Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Identidades Polinomiais $\mathbb{Z}_2$-Graduadas para as Álgebras $M_{1,1}(E)$ e $UT_2(\mathbb{F})$ via Representações de Grupos

Autor: *Karina Branco da Cruz*

Orientador: *Waldeck Schützer*

São Carlos, 30 de março de 2018.

Identidades Polinomiais $\mathbb{Z}_2$-Graduadas para as Álgebras $M_{1,1}(E)$ e $UT_2(\mathbb{F})$ via Representações de Grupos

Autor: *Karina Branco da Cruz*

Orientador: *Waldeck Schützer*

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Dissertação apresentada ao PPGM da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos, 30 de março de 2018.

Karina Branco da Cruz(aluna) Waldeck Schützer(orientador)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Karina Branco da Cruz, realizada em 01/09/2017:

Waldeck Schutzer

Prof. Dr. Waldeck Schutzer
UFSCar

Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo
UFSCar

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Profa. Dra. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva
UFMG

“Porque dele, e por meio dele, e para ele são todas as cousas. A ele, pois, a glória eternamente. Amém.” (Romanos 11.36)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por poder viver, pela salvação e eternidade frutos de Sua Graça em Cristo Jesus, pelo sustento material e espiritual concedidos diariamente, por todo o Seu cuidado de Pai a mim dispensados, e, sobretudo, agora, por ter conduzido os meus passos na Matemática desde à escolha do curso na época dos vestibulares.

Agradeço aos meus pais, Edson e Rosana, pela dedicação e esforço em criar e educar a mim e aos meus irmãos, Igor e Vitor. Sou grata também, pelos seus ensinos morais e éticos, pelo amor imensurável, e pela confiança que têm em mim. Claro, agradeço também, aos meus presentes de três anos, Igor e Vitor, por cada um dos momentos que vivemos juntos, por cada uma das palavras de incentivo que de suas bocas saíram. Agradeço aos meus avós: Decinho, Bel, Rodolfo e Lena, por cada boa lembrança compartilhada, por cada oração, por cada ensinamento, por todo carinho, por toda preocupação, por cada uma das vibrações diante das vitórias que Deus me permitiu. Espero ver mais uma vez na Glória eterna, a minha querida vó Lena! De um modo geral, agradeço aos demais familiares, por todo apoio. Enfim, agradeço a Deus pela família maravilhosa que Ele me deu, e digo: Eu os amo!

Sou grata pelo marido que tenho. Deus não poderia conceder alguém melhor para ser UM comigo. Todo o teu apoio, incentivo, oração, amor e carinho são indispensáveis em minha vida. Eu te amo, Wagner!

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Waldeck Schützer, pela disposição em me orientar no Trabalho de Conclusão de Curso e no Mestrado, pela paciência em cada encontro, pela preocupação com meu aprendizado e com minha saúde, por cada conversa que tivemos, desde matemáticas a pessoais.

Agradeço a cada um dos meus amigos, os de mais tempo como o Renato e a Carla, e os que os laços foram estreitados a menos tempo: Bárbara, Dalton, Renato, Flávia, Tico, Renan, Lucas, Renata e Carol. Cada um com seu jeito único, com seu modo de me fortalecer, de me aconselhar, de me aturar, de fazer graça diante de quase todos os tipos de situações, enfim a vocês o meu MUITO OBRIGADA! E que nossa amizade possa continuar crescendo.

Agradeço aos meus irmãos em Cristo, que sempre dobraram seus joelhos em orações por mim, e que me exortaram nas horas necessárias.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro durante o Mestrado.

Por fim, porém não menos importante, agradeço ao Prof. Dr. Humberto Luiz Talpo e a Profa. Dra. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva pela disposição em participar da minha banca, como também por cada vírgula lida e inúmeras contribuições para a melhoria desta dissertação. Foi uma honra tê-los como participantes deste momento em minha vida.

Resumo

Nesta dissertação estudaremos brevemente o conceito de Álgebra. Introduziremos um pouco da Teoria de Representação de Grupos, olhando especificamente para Teoria de Young que nos permite apresentar explicitamente a decomposição da álgebra de grupo $\mathbb{F}S_n$ em subálgebras simples, com S_n sendo o grupo simétrico de ordem $n!$. Falaremos também de Identidades Polinomiais e Identidades Polinomiais Graduadas, e alguns resultados pertinentes de PI-Teoria. Relacionaremos as duas teorias, Teorias de Representação de Grupos Simétricos e PI-Teoria. Exibiremos todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para as álgebras $M_2(\mathbb{F})$ e $M_{1,1}(E)$, com E sendo a álgebra de Grassmann infinitamente gerada sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero. Por fim, apresentaremos todas as possíveis G-graduações para a álgebra $UT_2(\mathbb{F})$, das matrizes triangulares superiores de ordem dois com entradas em um corpo de característica zero (veremos que, a menos de isomorfismos, são apenas duas possíveis), assim como, encontraremos todas as identidades polinomiais G-graduadas para esta álgebra e exibiremos uma sequência numérica envolvendo os cocaracteres graduados.

Abstract

In this essay we will briefly study the concept of Algebra. We will introduce a little of Group Representation Theory, looking specifically at Young's Theory, which allows us to present explicitly the decomposition of the group algebra $\mathbb{F}S_n$ into simple subalgebras, where S_n is the symmetric group of order $n!$. We will also talk about Polynomial Identities and Graded Polynomial Identities, and some pertinent PI-Theory's results. We will relate Symmetrical Groups Representation Theories with PI-Theory. We will show all the $\mathbb{Z}_2$-graded polynomial identities for the algebras $M_2(\mathbb{F})$ and $M_{1,1}(E)$, where E is the Grassmann Algebra infinitely generated over a field $\mathbb{F}$ of characteristic zero. Finally, we will present all G-gradings possibilities for the algebra $UT_2(\mathbb{F})$, of the upper triangular matrices of order two with entries in a field of characteristic zero (we will see that, up to isomorphisms, there are only two possibilities), moreover, we will find all the G-graded polynomial identities for this algebra and we will show a numerical sequence involving the graded cocaracteres.

Sumário

Introdução

A Teoria de Representação, uma das frentes de estudo da Álgebra, tem por objetivo descrever estruturas algébricas (grupos, anéis ou álgebras) que possuem estruturas mais abstratas em termos de transformações lineares sobre algum espaço vetorial. Em alguns casos, quando o espaço vetorial tem dimensão finita, representaremos elementos do grupo, anéis ou álgebras, como matrizes, e a operação destes ou uma delas, como multiplicação de matrizes. Sendo assim, a Teoria de Representação é importante pois torna problemas teóricos de grupos, anéis ou álgebras, em problemas de álgebra linear, que são um pouco mais palpáveis.

Tal teoria, desenvolvida no final do século XIX por Fröbenius e Schur, é um dos instrumentos utilizados pela Teoria das PI-Álgebras (do inglês Polynomial Identity), ou PI-Teoria, outra frente da Álgebra que estuda a classe das álgebras que satisfazem uma identidade polinomial, como por exemplo: as álgebras comutativas, as álgebras de dimensão finita, as álgebras matriciais, as álgebras nilpotentes, a álgebra de Grassmann, entre outras de grande importância para a matemática. Os principais ramos de pesquisas em PI-Teoria envolvem a descrição e o estudo dos T-ideais das identidades polinomiais de uma álgebra A e variedades de álgebras.

Faremos aqui um breve panorama do desenvolvimento da PI-Teoria para em seguida descrevermos o que cada capítulo desta dissertação contempla.

A Teoria de Identidades Polinomiais, iniciada implicitamente pelos trabalhos dos matemáticos Dehn ([7]) e Wagner ([36]) (que exibiram identidades polinomiais para as álgebras das matrizes de ordem dois, em torno dos anos de 1930), teve seu desenvolvimento mais intensificado por volta de 1950 com os trabalhos de Kaplansky ([18]), bem como de Amitsur e Levitzki ([1]). Kaplansky mostrou que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita, enquanto que, por meio de argumentos combinatórios, Amitsur e Levitzki demonstraram que o polinômio standard s_{2n} é uma identidade polinomial de grau mínimo para a álgebra das matrizes de ordem n sobre um corpo $\mathbb{F}$ (como comentaremos na Seção 3.2).

Ainda em 1950, Specht ([33]) conjecturou que, sobre corpos de característica zero, toda álgebra associativa possui uma base finita para suas identidades polinomiais. Somente em 1987, Kemer ([21]), estudando a estrutura dos T-ideais, as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas (superidentidades) e certos produtos tensoriais graduados com a álgebra de Grassmann E, respondeu assertivamente a conjectura de Specht.

A partir destes trabalhos acima (Amitsur e Levitzki, Specht e Kemer) e de outros, grande parte dos estudos de PI-Teoria foram destinados à descrição completa do T-ideal $Id(A)$ das identidades polinomiais de uma álgebra A. A grande complexidade deste tipo de estudo é evidente quando sabemos que, além da álgebra $M_2(\mathbb{F})$, da álgebra de Grassmann E, do quadrado tensorial da álgebra de Grassmann ($E \otimes E$) e da álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre um corpo $\mathbb{F}$ ($UT_n(\mathbb{F})$), muito pouco é conhecido.

Foquemos nossa atenção na álgebra de Grassmann E, com a qual trabalharemos mais intensamente no Capítulo 4. Em 1963, Latyshev ([25]) prova que o polinômio $[[x_1, x_2], x_3]$ (onde $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$ é o comutador entre x_1 e x_2) é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann. Dez anos depois, em 1973, Krakowski e Regev ([23]) mostraram que todas as identidades da álgebra de Grassmann são consequências deste polinômio. Os métodos usados por eles para esta conclusão se tornaram extremamente importantes para a PI-Teoria.

Devido à grande complexidade de estudo do T-ideal $Id(A)$ de uma álgebra A, surge o interesse por pesquisar outros tipos de identidades polinomiais como, por exemplo, as identidades polinomiais graduadas descritas por Razmyslov. O comportamento das identidades polinomiais graduadas é melhor do que o das identidades polinomiais ordinárias (como veremos quando descrevermos o que é uma identidade polinomial graduada, Seção 3.4) e também fornece informações sobre as identidades ordinárias. Neste sentido, vale ressaltar que, conforme já foi mencionado, Kemer usou um tipo de identidade polinomial graduada como ferramenta para resolver o problema de Specht, o que explicita ainda mais a importância desta vertente na Teoria de Identidades Polinomiais.

Os objetivos principais deste trabalho são:

- Encontrar todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a álgebra das matrizes de ordem dois com entradas em um corpo de característica zero;

- Descrever todas as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a álgebra $M_{1,1}(E)$ (sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero) das matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 \end{pmatrix},$$

  onde E é a álgebra de Grassmann, e E_0 e E_1 compõem a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural desta álgebra;

- Encontrar todas as possíveis G-graduações (G sendo um grupo qualquer) para a álgebra $UT_2(\mathbb{F})$, das matrizes triangulares superiores de ordem dois com entradas em um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero;

- Descrever as identidades polinomiais G-graduadas para a álgebra $UT_2(\mathbb{F})$, G como no item anterior;

- Mostrar uma importante relação com os caracteres via ação do grupo hiperoctaedral e via ação do grupo $S_r \times S_{n-r}$;

- Exibir uma sequência numérica que capta o comportamento exponencial da sequência de codimensões graduadas e calcular esta para $UT_2(\mathbb{F})$.

Para tanto, tentamos deixar a dissertação o mais independente possível. A dividimos em sete capítulos que descreveremos agora.

O Capítulo 1, *Conceitos Preliminares: Módulos, Álgebras e Produto Tensorial*, apresenta os conceitos de módulos, de álgebra, exemplifica este último conceito, e, também traz outros conceitos pertinentes como: ideais de uma álgebra, quocientes de álgebras, homomorfismos de álgebras, álgebra livre e álgebra graduada. É neste capítulo que nos deparamos pela primeira vez com a álgebra de Grassmann E, com as matrizes unitárias E_{ij}, e com o ambiente de busca por identidades polinomiais ordinárias e G-graduadas ($\mathbb{F}\langle X\rangle$ e $\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$, respectivamente). Ainda mais, o produto tensorial é introduzido, de maneira breve, juntamente algumas de suas propriedades.

Em *Representações Lineares de Grupos*, Capítulo 2, temos uma introdução à Teoria de Representação. Nele, vemos as definições de representação linear de grupo e representação de álgebra; exemplos de cada caso; uma equivalência das linguagens de representações com a linguagem de módulos (justificando o primeiro conceito abordado no Capítulo 1); uma equivalência entre representações de grupos e representações das álgebras de grupo; e, um pouco da Teoria de Young, que é imprescindível para explicitarmos a decomposição da álgebra $\mathbb{F}S_n$ em subálgebras simples (S_n sendo o grupo simétrico de ordem $n!$). Esta decomposição explícita é devida a Henke e Regev ([15]), e é um grande marco da Teoria de Representação. Para nossos objetivos, este capítulo é a ferramenta chave.

O Capítulo 3, *Identidades Polinomiais*, vem descrever e apresentar resultados pertinentes de PI-Teoria, tanto falando de identidades polinomiais ordinárias quanto de identidades polinomiais G-graduadas. E este contempla a Seção 3.3, *Teoria de Representação e PI-Teoria: Como relacioná-las?*, a qual começamos a lincar estas duas grandes teorias, Teoria de Representação e PI-Teoria, antes vistas separadamente.

Já os capítulos finais desta dissertação, Capítulos 4 e 5: *As Identidades Polinomiais $\mathbb{Z}_2$-Graduadas de $M_2(\mathbb{F})$ e $M_{1,1}(E)$* e *As Identidades Polinomiais Graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$*, baseados, respectivamente, nos artigos [8], de Di Vincenzo, e [34], de Valenti, aparecem para concretizar os objetivos principais propostos por esta dissertação.

Estendamo-nos um pouco mais e rapidamente escrevamos a importância das álgebras com que mais nos envolvemos neste trabalho. Primeiro, notemos que álgebra de Grassmann nos permite lidar, de maneira algébrica, com os conceitos de área, volume e orientação, e estender o conceito de integração para variedades diferenciáveis em qualquer dimensão. Ainda, a mesma apresenta uma formulação alternativa da teoria quântica dos orbitais moleculares em seus termos. Quanto a álgebra $M_2(\mathbb{F})$, temos que esta é uma superálgebra simples e verbalmente prima, isto é, $M_2(\mathbb{F})$ não possui ideais $\mathbb{Z}_2$-graduados não triviais e $M_2(\mathbb{F})^2 \neq 0$, o que chamamos de superálgebra simples; $Id^{gr}(M_2(\mathbb{F}))$ é um T_2-ideal com a seguinte propriedade: para quaisquer T_2-ideais I_1, I_2 com $I_1 I_2 \subseteq Id^{gr}(M_2(\mathbb{F}))$ então $I_1 \subseteq Id^{gr}(M_2(\mathbb{F}))$ ou $I_2 \subseteq Id^{gr}(M_2(\mathbb{F}))$, o que definimos por superálgebra verbalmente prima. Já $M_{1,1}(E)$ é uma superálgebra verbalmente prima, enquanto que $UT_2(\mathbb{F})$ é uma superálgebra minimal. Deixaremos para o leitor mais interessado a busca por estas importâncias, para tanto, citamos [26], [31] e [22].

Capítulo 1

Conceitos Preliminares: Módulos, Álgebras e Produto Tensorial

Pretendemos com este capítulo inicial facilitar a leitura dos capítulos posteriores. Portanto, introduziremos alguns conceitos e propriedades envolvendo módulos, álgebras e produto tensorial, na tentativa de familiarizar o leitor e tornar o texto, de fato, independente e autocontido. No entanto, para não criarmos um texto demasiadamente longo e cansativo, deixaremos ao leitor interessado a busca pelas demonstrações em alguns livros de Álgebra, tais como [16], [6] e [5].

1.1 Módulos

Nesta seção falaremos de R-módulos com R sendo um anel. Porém, com as devidas alterações, podemos falar de G-módulos e A-módulos, com G sendo um grupo e A sendo uma álgebra (conceito que trabalharemos na seção seguinte). Ainda mais, podemos pedir que B na definição seguinte seja um espaço vetorial e adicionarmos as propriedades necessárias para mantermos o módulo como um espaço vetorial (veremos isto melhor no Capítulo 2).

Definição 1.1.1. Seja R um anel, um *R-módulo (à esquerda)* é um grupo aditivo abeliano B junto com uma função $R \times B \to B$ (a imagem de (r, b) será denotada por rb) tal que para todo $r, s \in R$ e $b, c \in B$:

i) $r(b + c) = rb + rc$;

ii) $(r + s)b = rb + sb$;

iii) $r(sb) = (rs)b$.

Se R tem um elemento unidade, 1_R, e

iv) $1_R b = b$, para todo $b \in B$,

então B é um *R-módulo unitário*. Se R é um anel de divisão, então um R-módulo unitário é chamado de *espaço vetorial (à esquerda)*.

Observação 1.1.2. Um R-módulo à direita (unitário) é definido similarmente via uma função $B \times R \to B$, denotada por $(b, r) \mapsto br$, satisfazendo $i)$ à $iii)$ ($iv)$) com as devidas alterações.

Definição 1.1.3. Sejam B e C módulos sobre um anel R. Uma função $f : B \to C$ é um *homomorfismo de R-módulos* se para todo $b, b' \in B$ e $r \in R$:

$$f(b + b') = f(b) + f(b') \quad \text{e} \quad f(rb) = rf(b).$$

Se R é um anel de divisão, então o homomorfismo de R-módulos é chamado de *transformação linear*.

Observação 1.1.4. f na definição anterior é um *monomorfismo de R-módulos* (respectivamente, *epimorfismo*, *isomorfismo*) se é uma função injetiva (respectivamente, sobrejetiva, bijetiva) como função entre conjuntos.

Definição 1.1.5. Seja f um homomorfismo de R-módulos, como na definição acima, definimos o *núcleo de f* como o conjunto

$$\ker f = \{b \in B \mid f(b) = 0\}.$$

Similarmente, definimos a *imagem de f*, como o conjunto

$$Im\ f = \{c \in C \mid c = f(b) \text{ para algum } b \in B\}.$$

Teorema 1.1.6. *Seja $f : B \to C$ um homomorfismo de R-módulos. Então,*

a) f é um monomorfismo de R-módulos se, e somente se, $\ker f = \{0\}$*;*

b) f é um isomorfismo de R-módulos se, e somente se, existe um homomorfismo de R-módulos $g : C \to B$ tal que $gf = Id_B$ e $fg = Id_C$.

Definição 1.1.7. Sejam R um anel, B um R-módulo e C um subconjunto não-vazio de B. Dizemos que C é um *submódulo* de B se C é um subgrupo aditivo de B e $rc \in C$ para todo $r \in R$, $c \in C$. Um submódulo de um espaço vetorial sobre um anel de divisão é chamado *subespaço*.

Observação 1.1.8. Notemos que um submódulo é por si só um módulo. Também, que um submódulo de um módulo unitário sobre um anel com unidade é necessariamente unitário.

1.2 Álgebras

Nesta seção abordaremos os conceitos de álgebra, ideais de uma álgebra, quocientes de álgebras, homomorfismos de álgebras, álgebra livre e álgebra graduada. Como também, exibiremos alguns exemplos e algumas relações entre diferentes álgebras. Tal seção é imprescíndivel para a compreensão do coração deste trabalho. Nesse sentido, optamos por fazê-la de um modo mais cuidadoso.

1.2.1 Definições, Exemplos e Propriedades Básicas

Consideremos $\mathbb{F}$ um corpo, introduziremos o conceito de $\mathbb{F}$-álgebra e suas várias vertentes (associativa, comutativa, unitária, nil, nilpotente, etc), como também exibiremos exemplos e algumas propriedades para esses novos conceitos.

Definição 1.2.1. Uma $\mathbb{F}$-*álgebra* A é um espaço vetorial A sobre um corpo $\mathbb{F}$ munido de uma função bilinear $\mu : A \times A \to A$. Ou seja, $\forall\ a, b, c \in A$ e $\forall\ \lambda \in F$, μ satisfaz:

i) $\mu(a, b + c) = \mu(a, b) + \mu(a, c)$;

ii) $\mu(a + b, c) = \mu(a, c) + \mu(b, c)$;

iii) $\mu(\lambda a, b) = \mu(a, \lambda b) = \lambda\mu(a, b)$.

Por simplicidade, uma $\mathbb{F}$-álgebra A será chamada apenas por álgebra, e a função bilinear μ será chamada de produto ou multiplicação, e será denotada pela concatenação dos vetores. Isto é, $\mu(a, b) = ab$.

A partir de propriedades do produto de uma álgebra temos a seguinte definição.

Definição 1.2.2. Dizemos que uma *álgebra* A é:

i) *Associativa* quando o produto é associativo, isto é,$(ab)c = a(bc), \forall\ a, b, c \in A$.

ii) *Comutativa* se o produto o for, ou seja, $ab = ba, \forall\ a, b \in A$.

iii) *Unitária* (ou *com unidade*) se o produto de A possui elemento neutro, existe $1_A \in A$ tal que $1_A a = a1_A = a, \forall\ a \in A$.

Observação 1.2.3. Uma álgebra associativa A é um anel com a operação de adição sendo a adição de vetores de A vista como espaço vetorial, e operação de multiplicação como a multiplicação da álgebra A. Quando a álgebra A além de associativa é também unitária, A é um anel com unidade.

Definição 1.2.4. Um subconjunto β é uma *base da álgebra* A , se β é uma base de A como espaço vetorial, e assim definimos a *dimensão da* álgeba A como sendo a dimensão de A como espaço vetorial.

Exemplo 1.2.5. Dado $n \in \mathbb{N}$, o espaço vetorial $M_n(\mathbb{F})$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas no corpo $\mathbb{F}$, munido do produto usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade de dimensão n^2.

Destacamos nesta álgebra as *matrizes unitárias* E_{ij}, para $1 \leq i, j \leq n$, em que E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é na i-ésima linha e j-ésima coluna, nesta entrada tem-se a unidade do corpo $\mathbb{F}$, 1. Observamos também que estas matrizes formam uma base para $M_n(\mathbb{F})$ e que satisfazem a relação:

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k, \\ E_{il}, & \text{se } j = k \end{cases}$$

Resumidamente,

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}.$$

Exemplo 1.2.6. Se A é uma álgebra, temos que $M_n(A)$ é também uma álgebra com o produto dado de maneira análoga ao produto de matrizes com entradas em um corpo $\mathbb{F}$.

Ou seja, tal exemplo nos permite construir álgebras a partir de álgebras que já conhecemos.

Exemplo 1.2.7. Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$. Consideremos o conjunto de todas as palavras formadas pelos elementos $e_1, e_2, \dots$, juntamente com um novo elemento, 1. Definimos a *álgebra de Grassmann* (ou *álgebra exterior*) de V, denotada por $E(V)$ (ou simplesmente E), como sendo a álgebra associativa e unitária com base neste conjunto de palavras, isto é,

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\},$$

e cujo produto dado pela justaposição é definido pelas relações $e_i 1 = 1 e_i = e_i$, $11 = 1$, ${e_i}^2 = 0$ e $e_ie_j = -e_je_i$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$.

Consideremos em E os seguintes subespaços vetoriais:

- E_0 gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_l} \mid l \text{ par}\}$;

- E_1 gerado pelo conjunto $\{e_{i_1}e_{i_2} \dots e_{i_m} \mid m \text{ ímpar}\}$.

Observemos que $E = E_0 \oplus E_1$, soma direta como espaço vetorial. E mais, de $e_ie_j = -e_je_i$ segue por recorrência que $(e_{i_1} \dots e_{i_p})(e_{j_1} \dots e_{j_q}) = (-1)^{pq}(e_{j_1} \dots e_{j_q})(e_{i_1} \dots e_{i_p})$ para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$. Donde, juntando o acima e propriedades de produto de pares e ímpares, temos que $ax = xa$ para quaisquer $a \in E_0$ e $x \in E$, e $bc = -cb$ para quaisquer $b, c \in E_1$. Logo, os elementos de E_0 comutam com todos os elementos de E.

Quando a característica de $\mathbb{F}$ é dois (*char* $\mathbb{F} = 2$), E é uma álgebra comutativa. De fato, se *char* $\mathbb{F} = 2$, temos $e_ie_j = -e_ie_j$ implicando em $e_ie_j = e_je_i, \forall\, i, j \in \mathbb{N}$. Como estes são elementos da base de V, temos a comutatividade em E.

Seja agora E' a álgebra com base $\{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \geq 1\}$, temos que E' não tem unidade e é chamada *álgebra exterior sem unidade* .

Exemplo 1.2.8. Sejam V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $End_{\mathbb{F}}\ V = \{T : V \to V \mid T$ é linear$\}$. Definindo $\mu : End_{\mathbb{F}}\ V \times End_{\mathbb{F}}\ V \to End_{\mathbb{F}}\ V$ por $\mu(T,S) = T \circ S$, composição de funções, temos que $End_{\mathbb{F}}\ V$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa, unitária ($1_{End_{\mathbb{F}}\ V} = Id_V$), não comutativa (consideremos por exemplo, $T(v) = av$ e $S(v) = v + d$ para quaisquer $a, d \in \mathbb{F}$ e $a \neq 1$, $d \neq 1$).

Em $End_{\mathbb{F}}\ V$ destacamos o seguinte subconjunto notável:

$$GL_{\mathbb{F}}\ V = \{T \in End_{\mathbb{F}}\ V \mid T \text{ é invertível}\}.$$

Tal subconjunto é um grupo com a operação de composição e o chamamos de *Grupo Linear Geral de V*.

Observação 1.2.9. Dadas $T, S \in End_{\mathbb{F}}\ V$, $\mu(T,S) = T \circ S$, também poderá ser denotada por TS.

Exemplo 1.2.10. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{F}[x]$ dos polinômios na variável x com coeficientes em $\mathbb{F}$. Munido do produto usual de polinômios, $\mathbb{F}[x]$ é uma álgebra associativa, comutativa e com unidade.

Mais geralmente, podemos definir a *álgebra* $\mathbb{F}[X]$ *dos polinômios* em várias variáveis.

Exemplo 1.2.11. Um L espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ munido de uma operação bilinear

$$\mu : L \times L \to L$$

(por simplicidade escreveremos $\mu(u,v) = [u,v]$) é uma *álgebra de Lie* se valem:

i) $[u,u] = 0, \forall\ u \in L$ (anti-comutatividade);

ii) $[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0, \forall\ u,v,w \in L$ (identidade de Jacobi).

Em geral, uma *álgebra de Lie* é não associativa, não comutativa e não unitária.

Quando $[u,v] = 0, \forall\ u,v \in L$, a álgebra de Lie é *abeliana.*

Exemplo 1.2.12. Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{F}$, consideremos o espaço vetorial

$$\mathbb{F} \oplus A = \{(\lambda, a) \mid \lambda \in \mathbb{F}, a \in A\}.$$

Em $\mathbb{F} \oplus A$ definimos o produto $(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2)$, temos assim que $\mathbb{F} \oplus A$ é uma álgebra com unidade (que é o elemento $(1,0)$). Notemos também que $\mathbb{F} \oplus A$ é comutativa se, e somente se, A é comutativa (de fato, se $\mathbb{F} \oplus A$ é comutativa, temos que para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ e $a_1, a_2 \in A$, $(\lambda_1, a_1)(\lambda_2, a_2) = (\lambda_2, a_2)(\lambda_1, a_1)$, ou seja, $(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1 + a_1 a_2) = (\lambda_2\lambda_1, \lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2 + a_2 a_1)$. Donde, obtemos $a_1 a_2 = a_2 a_1$ em A.

Reciprocamente, se $a_1a_2 = a_2a_1$ em A, conseguimos $\mathbb{F} \oplus A$ comutativa). Analogamente, temos a necessidade e suficiência para a associatividade.

Esta construção é chamada de *adjunção formal da unidade a A* e nos permite, a partir de uma álgebra, torná-la uma álgebra unitária.

Exemplo 1.2.13. Sejam A_1 e A_2 duas álgebras. O produto direto de A_1 por A_2 é definido como sendo a álgebra $A_1 \times A_2$, cujas operações de soma, produto por escalar e multiplicação são definidas coordenada a coordenada. $A_1 \times A_2$ torna-se assim uma nova álgebra dependente das características das que a constroem.

Proposição 1.2.14. *Sejam A uma álgebra, $a, b, c \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$. Então:*

a) $0a = a0 = 0$;

b) $(\lambda_1 a)(\lambda_2 b) = \lambda_1\lambda_2 ab$;

c) $(-a)b = a(-b) = -ab$ *e* $(-a)(-b) = ab$;

d) $a(b - c) = ab - ac$ *e* $(a - b)c = ac - bc$;

e) Se A é unitária, então $(-1_A)a = a(-1_A) = -a$ *e* $(-1_A)(-a) = a$;

f) Se $A \neq \{0\}$ e A possui unidade, então $1_A \neq 0$.

Demonstração. Faremos a demonstração apenas do primeiro item, as demais seguem de maneira similar.

a)

$$\begin{aligned} 0a &= (0+0)a && \text{propriedade elemento neutro} \\ &= (0a) + (0a) && \text{propriedade } ii) \text{ Definição 1.2.1} \\ &\Rightarrow 0a - 0a = 0a && \text{soma mesma quantia} \\ &\Rightarrow 0 = 0a && \text{propriedade elemento inverso} \\ &\Rightarrow 0a = 0 && \text{simetria igualdade} \end{aligned}$$

Analogamente, $a0 = 0$.

□

Definição 1.2.15. Seja A uma álgebra. Se V e W são subespaços vetoriais de A, definimos o produto VW como sendo o subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{xy \mid x \in V, y \in W\}$.

Definição 1.2.16. Seja A uma álgebra, se $a \in A - \{0\}$, dizemos que a é um *divisor de zero* em A se existe algum elemento não nulo $b \in A$ tal que $ab = 0$ ou $ba = 0$.

Definição 1.2.17. Dizemos que um *elemento* $x \in A$, A uma álgebra, é *idempotente* se $x^2 = x$.

Observação 1.2.18.
- Se A é uma álgebra unitária e $x \in A - \{0, 1_A\}$ é um elemento idempotente, então x é um divisor de zero em A.

  De fato, como x é idempotente, temos $x^2 = x$. Adicionando $-x$ em ambos os lados da equação e usando propriedades de espaço vetorial, concluímos $x^2 - x = 0$. Por fim, aplicando o item $d)$ da Proposição 1.2.14, chegamos em $x(x - 1_A) = 0$, provando ser x um divisor de zero em A.

- A não possui divisores de zero se, e somente se, para $a, x, y \in A$, com $a \neq 0$, valem as seguintes implicações (*leis do cancelamento*):

$$ax = ay \Rightarrow x = y \text{ e } xa = ya \Rightarrow x = y.$$

Definição 1.2.19. Sendo A uma álgebra associativa, e $a, b \in A$, definimos o *comutador* entre a e b por:

$$[a, b] = ab - ba.$$

De maneira recursiva, definimos o *comutador de comprimento* n para $a_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, como sendo

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n].$$

Por fim, definimos o *comutador* de A, denotado por $[A, A]$, pelo subespaço vetorial de A gerado pelo conjunto $\{[x, y] \mid x, y \in A\}$.

Observação 1.2.20. Uma álgebra A é comutativa se, e somente se, $[A, A] = 0$.

Definição 1.2.21. Seja A uma álgebra associativa. Dizemos que:

i) Um *elemento* $a \in A$ é *nilpotente* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. O menor $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz $a^n = 0$ é chamado *índice de nilpotência de a* .

ii) A é uma *álgebra nil* se todo elemento de A é nilpotente.

iii) A é uma *álgebra nilpotente* se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$, ou seja, $x_1 x_2 \ldots x_n = 0$ para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$. O menor $n \in \mathbb{N}$ que satisfaz $A^n = 0$ é chamado de *índice de nilpotência de A* .

iv) Quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$ para todo $a \in A$, dizemos que A é *nil de índice limitado*.

Observação 1.2.22. Se A é uma álgebra nilpotente, então A é nil de índice limitado.

Observação 1.2.23. Uma álgebra nil não pode ter unidade.

De fato, ${1_A}^n = 1_A, \forall\ n \in \mathbb{N}$, e pela Proposição 1.2.14, temos $1_A \neq 0$. Ou seja, se $1_A \in A$, A não satisfaz a definição de nil.

Exemplo 1.2.24. Considere a $\mathbb{F}$-álgebra

$$\mathcal{N}_3(\mathbb{F}) \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F} \right\}.$$

Tal álgebra é nilpotente de índice 3. De fato,

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais geralmente, a álgebra $\mathcal{N}_m(\mathbb{F})$ de todas as matrizes $m \times m$ triangulares superiores com diagonal nula é nilpotente de índice m.

Definição 1.2.25. Seja A uma álgebra associativa com unidade. Dizemos que $a \in A$ é *invertível* se possui inverso multiplicativo, isto é, se existe $a^{-1} \in A$ tal que

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1_A.$$

Observação 1.2.26. Se $a \in A$ é invertível, então seu inverso é único.

Definição 1.2.27. Definimos $U(A) = \{a \in A \mid a \text{ é invertível}\}$.

Observação 1.2.28. $U(A)$ é um grupo munido com o produto induzido da álgebra A, este grupo é chamado de *grupo multiplicativo de A*.

De fato, temos que A é uma álgebra associativa com unidade, e ainda, $1_A 1_A = 1_A$. Portanto, temos que a operação produto de $U(A)$ é associativa e possui elemento neutro, como também, por definição, todo elemento em $U(A)$ possui inverso com relação a operação. Resta-nos mostrar que a operação é fechada no grupo, isto é, se $a, b \in U(A)$ temos que garantir que $ab \in U(A)$. Porém, se $a, b \in U(A)$, existem únicos $a^{-1}, b^{-1} \in A$ tais que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1_A = bb^{-1} = b^{-1}b$. Consideremos então $b^{-1}a^{-1} \in A$ e notemos que $ab(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = a1_Aa^{-1} = aa^{-1} = 1_A$ e que $(b^{-1}a^{-1})ab = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}1_Ab = b^{-1}b = 1_A$, terminando a afirmação.

Observação 1.2.29. Se $a \in U(A)$ e $\lambda \in \mathbb{F} - \{0\}$, então $\lambda a \in U(A)$.

De fato, como $\mathbb{F}$ é corpo e $\lambda \in \mathbb{F} - \{0\}$, temos que existe $\lambda^{-1} \in \mathbb{F}$ tal que $\lambda\lambda^{-1} = \lambda^{-1}\lambda = 1$. Ainda mais, como $a \in U(A)$ conseguimos um único $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1_A$. Portanto, tomemos $\lambda^{-1}a^{-1}$ e notemos que da propriedade *iii*) da Definição 1.2.1, $\lambda a(\lambda^{-1}a^{-1}) = \lambda\lambda^{-1}(aa^{-1}) = 11_A = 1_A$, analogamente, $(\lambda^{-1}a^{-1})\lambda a = 1_A$, terminando assim a afirmação.

Exemplo 1.2.30. Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos que $U(M_n(\mathbb{F})) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid det\ X \neq 0\}$. Este grupo é normalmente denotado por $GL_n\ (\mathbb{F})$, e chamado de *grupo linear geral de grau n sobre* $\mathbb{F}$.

Definição 1.2.31. Seja A uma álgebra associativa com unidade. Dizemos que A é uma *álgebra com divisão* se $U(A) = A - \{0\}$.

Vejamos agora como obtermos maiores informações sobre uma álgebra a partir de um subconjunto gerador desta como espaço vetorial.

Proposição 1.2.32. *Sejam A uma álgebra e S um subconjunto gerador de A (como espaço vetorial). Então:*

a) A é associativa se, e somente se, $(uv)w = u(vw)$ para quaisquer $u, v, w \in S$.

b) A é comutativa se, e somente se, $uv = vu$ para quaisquer $u, v \in S$.

c) A possui unidade se, e somente se, existe $1_A \in A$ tal que $1_Av = v1_A = v$ para todo $v \in S$.

Demonstração. Vide página 6 de [5]. □

Exemplo 1.2.33. Toda álgebra de dimensão 2 com unidade é comutativa e associativa. Para verificarmos isto, consideremos $a \in A - \mathbb{F}$ e notemos que $\{1_A, a\}$ é uma base de A, agora basta aplicarmos a proposição anterior.

Proposição 1.2.34. *Sejam A um espaço vetorial e β uma base de A. Então, dada uma função $f : \beta \times \beta \to A$, existe uma única aplicação bilinear $* : A \times A \to A$ estendendo f, ou seja, satisfazendo $u_1 * u_2 = f(u_1, u_2)$ para quaisquer $u_1, u_2 \in \beta$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5], páginas 6 e 7. □

Para terminarmos esta primeira subseção, apresentaremos um exemplo que será muito utilizado no decorrer desta dissertação.

Exemplo 1.2.35. Seja S um conjunto não vazio. Consideremos o conjunto $\mathbb{F}S$ de todas as somas formais $\sum_{s \in S} \alpha_s s$, onde $\alpha_s \in \mathbb{F}$ e $\{s \in S \mid \alpha_s \neq 0\}$ é finito. Aqui $\alpha_s s$ é um símbolo formal. Vamos dizer que $\sum_{s \in S} \alpha_s s = \sum_{s \in S} \beta_s s$ em $\mathbb{F}S$ se $\alpha_s = \beta_s$ para todo $s \in S$. Definamos agora em $\mathbb{F}S$ a soma

$$\sum_{s \in S} \alpha_s s + \sum_{s \in S} \beta_s s = \sum_{s \in S} (\alpha_s + \beta_s) s$$

e o produto por escalar

$$\lambda \sum_{s \in S} \alpha_s s = \sum_{s \in S} (\lambda \alpha_s) s \text{ para } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Temos que $\mathbb{F}S$, munido destas operações, é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial, chamado de $\mathbb{F}$-espaço vetorial com base S. Identificando $s_0 \in S$ com o elemento $\sum_{s \in S} \alpha_s s$, onde

$$\alpha_s = \begin{cases} 1, & \text{se } s = s_0 \\ 0, & \text{se } s \neq s_0 \end{cases},$$

temos que S é realmente uma base de $\mathbb{F}S$.

Se $*$ é uma operação em S, de acordo com o resultado anterior $*$ se estende a uma única operação bilinear em $\mathbb{F}S$, a qual, por simplicidade, vamos denotar também por $*$. Temos então que $(\mathbb{F}S, *)$ é uma $\mathbb{F}$- álgebra. Segue da Proposição 1.2.32 que se a operação $*$ em S é associativa (resp. comutativa), então a álgebra $(\mathbb{F}S, *)$ é associativa (resp. comutativa). Observamos também que se a operação $*$ possui elemento neutro em S, então este elemento funciona como unidade na álgebra $(\mathbb{F}S, *)$.

Um caso particular e importante de construção deste tipo aparece quando temos um grupo G. Adotando a notação multiplicativa em G e considerando no espaço vetorial $\mathbb{F}G$ o produto induzido pela operação de G, temos que $\mathbb{F}G$ é uma álgebra, chamada de *álgebra de grupo*. Observemos que $\mathbb{F}G$ é uma álgebra associativa com unidade e $\mathbb{F}G$ é comutativa se, e somente se, G é abeliano (Proposição 1.2.32).

1.2.2 Subálgebras, Ideais e Quocientes

Destacaremos alguns subespaços vetoriais de $\mathbb{F}$-álgebras, algumas propriedades válidas para eles e criaremos novas $\mathbb{F}$-álgebras a partir do quociente.

Definição 1.2.36. Seja A uma álgebra. Dizemos que um subespaço vetorial B de A é uma *subálgebra* de A se B é fechado com relação a operação produto, isto é, se $b_1 b_2 \in B$ para quaisquer $b_1, b_2 \in B$.

Observação 1.2.37. Sendo A uma álgebra, temos que uma subálgebra B de A é por si só uma álgebra, cujo produto é a restrição do produto de A para B.

Definição 1.2.38. Um subgrupo aditivo I de uma álgebra A é um *ideal à esquerda* de A, se: $\lambda x \in I$ e $ax \in I$ para quaisquer $x \in I$, $\lambda \in \mathbb{F}$ e $a \in A$.

Analogamente, definimos um *ideal à direita* de A.

Por fim, um subgrupo aditivo de A que é um ideal lateral à esquerda e à direita é chamado de *ideal* (bilateral) de A.

A observação a seguir enfraquece um pouco as hipóteses para termos um ideal no caso da álgebra em questão ser unitária.

Observação 1.2.39. Se A for uma álgebra unitária, podemos omitir a condição $\lambda x \in \mathbb{F}$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{F}$ e $x \in I$, já que esta condição é automaticamente satisfeita neste caso. De fato, consideremos I um subgrupo aditivo de A tal que $ax, xa \in I$ para quaisquer

$x \in I$ e $a \in A$. Dados $\lambda \in \mathbb{F}$ e $x \in I$ temos $\lambda x = \lambda(1_A x) = (\lambda 1_A)x \in I$, e assim, I é um ideal de A.

Exemplo 1.2.40. Consideremos A como sendo a subálgebra de $\mathbb{R}[x]$ constituída dos polinômios com termo constante nulo e

$$J = \{a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in A \mid n \in \mathbb{N}, a_1 \in \mathbb{Z}\},$$

temos que J é um subgrupo aditivo de A e que $au, ua \in J$ para quaisquer $u \in J$ e $a \in A$ (de fato, sejam $a = a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \in A$ e $u = b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots+b_mx^m \in J$, temos que $au = 0x + a_1b_1x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + \cdots + a_nb_mx^{n+m} \in J$, analogamente, vemos que $ua \in J$), mas J não é fechado em relação ao produto por escalar (consideremos por exemplo $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ e u como anteriormente, temos que $\lambda u = \frac{1}{2}b_1x + \frac{1}{2}b_2x^2 + \cdots + \frac{1}{2}b_mx^m$, e como $\frac{1}{2}b_1 \notin \mathbb{Z}$, conseguimos que $\lambda u \notin J$). Portanto, este exemplo nos mostra que o fato colocado na observação anterior, não é válido sem a hipótese de existência de unidade na álgebra.

Definição 1.2.41. Um *ideal nil* é um ideal em que todos seus elementos são nilpotentes. Enquanto que um *ideal nilpotente*, I, é um ideal no qual existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$, ou seja, $i_1i_2 \ldots i_n = 0$ para quaisquer $i_1, i_2, \ldots i_n \in I$.

Observação 1.2.42. A definição acima é pertinente também para ideais laterais.

Exemplo 1.2.43. Consideremos a álgebra de Grassmann E (Exemplo 1.2.7). Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos o subespaço E_n de E gerado pelo conjunto $\{1, e_{i_1}e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$. Temos que E_n é uma subálgebra de E de dimensão 2^n (combinatorialmente temos $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$), e é a *álgebra exterior do espaço vetorial com base* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Proposição 1.2.44. *Sejam A uma álgebra, W um subespaço, B uma subálgebra, e I, J ideais de A. Assumamos que S e X são subconjuntos geradores de A e W (como espaços vetoriais), respectivamente. Então:*

a) W é uma subálgebra de A se, e somente se, $x_1x_2 \in W$ para quaisquer $x_1, x_2 \in X$.

b) W é um ideal de A se, e somente se, $sx, xs \in W$ para quaisquer $x \in X$ e $s \in S$.

c) $I + J = \{u + y \mid u \in I, y \in J\}$ e $I \cap J$ são ideais de A.

d) $I + B = \{u + b \mid u \in I, b \in B\}$ é uma subálgebra de A.

e) Se A é associativa, então $IJ = span_{\mathbb{F}}\ \{uy \mid u \in I, y \in J\}$ é um ideal de A.

Demonstração. Omitiremos aqui a demonstração, porém, afirmamos que a ideia é similar a da demonstração da Proposição 1.2.32. □

Observação 1.2.45. Esta proposição continua válida se considerarmos I e J como ideais laterais da álgebra A.

Observação 1.2.46. A interseção de uma família qualquer de subálgebras (resp. ideais) de uma álgebra A ainda é uma subálgebra (resp. ideal) de A.

Definição 1.2.47. Sejam A uma álgebra com unidade e S um subconjunto de A. Definimos a *subálgebra de A gerada por S*, denotada por $\mathbb{F}\langle S\rangle$, como sendo a interseção de todas as subálgebras de A que contêm $S \cup \{1\}$.

Definição 1.2.48. Nas mesmas condições da definição anterior, o *ideal de A gerado por S* é o ideal oriundo da interseção de todos os ideais de A que contêm S.

Observação 1.2.49. Das Definições acima, temos que $\mathbb{F}\langle S\rangle$ contém o subespaço de A gerado por S e é a menor subálgebra de A que contém $S \cup \{1\}$. De modo análogo, temos que o ideal de A gerado por S é o menor ideal de A que contém S. Também é imediato que se $S_1 \subseteq S_2 \subseteq A$, então $\mathbb{F}\langle S_1\rangle \subseteq \mathbb{F}\langle S_2\rangle$ e o ideal gerado por S_1 está contido no ideal gerado por S_2.

Definição 1.2.50. Dizemos que uma *álgebra A é finitamente gerada* se existe um subconjunto finito S de A tal que $A = \mathbb{F}\langle S\rangle$. Neste caso, $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, denotamos $\mathbb{F}\langle S\rangle$ por $\mathbb{F}\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$.

Com o intuito de caracterizarmos a subálgebra gerada e o ideal gerado por um subconjunto de uma álgebra associativa com unidade, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.2.51. *Sejam A uma álgebra associativa com unidade e S um subconjunto não vazio de A. Então:*

a) A subálgebra de A gerada por S coincide com o subespaço de A gerado pelo conjunto $\{1, s_1 s_2 \ldots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$.

b) O ideal de A gerado por S coincide com o subespaço de A gerado por $\{asb \mid s \in S, a, b \in A\}$.

Demonstração. A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [5]. $\square$

Exemplo 1.2.52. Consideremos a subálgebra E_n da álgebra exterior E (Exemplo 1.2.43). Temos que $E_n = \mathbb{F}\langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$.

Definição 1.2.53. Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Consideremos o espaço vetorial quociente $\frac{A}{I}$. Para cada $a \in A$, vamos denotar o elemento $a + I$ de $\frac{A}{I}$ por $\overline{a}$. Temos que as operações de soma e produto por escalar em $\frac{A}{I}$ são definidas por

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \quad \text{e} \quad \lambda\overline{a} = \overline{\lambda a},$$

para $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Consideremos agora o produto

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \dfrac{A}{I} \times \dfrac{A}{I} & \to & \dfrac{A}{I} \\ (\overline{a}, \overline{b}) & \mapsto & \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab} \end{array}$$

Pode-se mostrar que $\frac{A}{I}$, munida deste produto, é uma álgebra, chamada de *álgebra quociente de A por I*.

Como esperado, temos a seguinte observação:

Observação 1.2.54. Seja $\frac{A}{I}$ a álgebra quociente de A por I como na definição acima. Temos que:

i) Se A é associativa, então $\frac{A}{I}$ também o é.

ii) Se A é comutativa, então $\frac{A}{I}$ também o é.

iii) Se A possui unidade, então o elemento $\overline{1}$ é unidade em $\frac{A}{I}$.

1.2.3 Homomorfismo de Álgebras

Esta seção tem a intenção de relacionar duas álgebras sobre um mesmo corpo.

Definição 1.2.55. Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \to B$ é um *homomorfismo de álgebras* se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$.

Se φ é um *homomorfismo de álgebras*, dizemos que é um *mergulho*(ou *monomorfismo*) se é injetivo, e que é um *isomorfismo* se é bijetivo. Um *endomorfismo* de uma álgebra A é um homomorfismo de A em A, e um *automorfismo* é um endomorfismo bijetivo (endomorfismo e isomorfismo ao mesmo tempo). Denotaremos por $End_{\mathbb{F}}\ A$ e $Aut_{\mathbb{F}}\ A$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A. Quando existe um ismorfismo $\varphi : A \to B$, dizemos que as *álgebras A e B são isomorfas* e denotamos por $A \simeq B$.

Observação 1.2.56. No caso de A e B possuirem unidades, vamos exigir também $\varphi(1_A) = 1_B$ para que φ seja um homomorfismo de álgebras.

Definição 1.2.57. Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras, definimos o conjunto $\ker\ \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$, como *núcleo de φ*, e o conjunto $Im\ \varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$, como *imagem de φ*.

Observação 1.2.58. O núcleo de um homomorfismo de álgebras é um ideal do domínio, enquanto que a imagem de um homomorfismo de álgebras é uma subálgebra do contradomínio.

Por meio da observação anterior e da definição de álgebra quociente, conseguimos o seguinte resultado.

Exemplo 1.2.59 (Teorema do Isomorfismo de Álgebras)**.** A aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi}: \dfrac{A}{\ker\ \varphi} & \to & Im\ \varphi \\ \overline{a} & \mapsto & \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a) \end{array}$$

é um isomorfismo de álgebras quando φ é um homomorfismo de álgebras.

Exemplo 1.2.60. Sendo A uma álgebra com unidade, $\mathbb{F}$ um corpo, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi: \mathbb{F} & \to & A \\ \lambda & \mapsto & \psi(\lambda) = \lambda 1_A. \end{array}$$

Temos que ψ é um mergulho de $\mathbb{F}$ em A, e assim, $\mathbb{F}$ é isomorfo a $Im\ \psi = \{\lambda 1_A \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$, donde $Im\ \psi$ é um corpo. Daí, a identificação natural entre $\mathbb{F}$ e $\{\lambda 1_A \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$.

Exemplo 1.2.61. Sejam A uma álgebra, I um ideal de A. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi: A & \to & \dfrac{A}{I} \\ a & \mapsto & \pi(a) = \overline{a} = a + I \end{array}$$

que é chamada de *projeção canônica*, é um homomorfismo sobrejetivo de álgebras.

Exemplo 1.2.62. Sejam G_1 e G_2 grupos (com notação multiplicativa) e $f: G_1 \to G_2$ um homomorfismo de grupos. Consideremos as $\mathbb{F}$-álgebras $\mathbb{F}G_1$ e $\mathbb{F}G_2$, e a transformação linear $\varphi_f: \mathbb{F}G_1 \to \mathbb{F}G_2$ tal que $\varphi_f(x) = f(x)$ para todo $x \in G_1$. Observando que G_1 é uma base de $\mathbb{F}G_1$ e que $\varphi_f(xy) = f(xy) = f(x)f(y) = \varphi_f(x)\varphi_f(y)$ para quaisquer $x, y \in G_1$, temos que φ_f é um homomorfismo de álgebras. Assim, todo homomorfismo de grupos induz um homomorfismo entre as álgebras de grupo correspondentes.

Exemplo 1.2.63. Seja V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita n. Fixada uma base ordenada β de V, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi_\beta: End_{\mathbb{F}}\ V & \to & M_n(\mathbb{F}) \\ T & \mapsto & \psi_\beta(T) = [T]_\beta \end{array}$$

é um isomorfismo de álgebras, em que $[T]_\beta$ é a representação de T na base β.

A proposição a seguir permite-nos confirmar um homomorfismo de álgebras a partir de cálculos em um conjunto menor de elementos, apenas nos geradores das álgebras do domínio.

Proposição 1.2.64. *Sejam A e B álgebras e S um conjunto gerador de A como espaço vetorial. Seja $\varphi: A \to B$ uma transformação linear (satisfazendo $\varphi(1_A) = 1_B$ se A e*

B têm unidade). Então, φ é um homomorfismo de álgebras se, e somente se, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para quaisquer $x, y \in S$.

Demonstração. Vide página 13 de [5]. □

Vejamos uma caracterização das álgebras associativas com unidade.

Teorema 1.2.65. *Se A é uma álgebra associativa com unidade, são equivalentes:*

i) A é isomorfa a um produto direto $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ de álgebras associativas com unidade (não triviais).

ii) Existem ideais (bilaterais não triviais) $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de A tais que $A = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$, em que $\oplus$ simboliza a soma direta usual.

iii) Existem elementos $u_1, u_2, \ldots, u_n \in Z(A)$ $(n \geq 2)$ tais que $u_i u_j = 0$ para $i \neq j$, e $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1$.

Demonstração.

$i) \Rightarrow ii)$ Suponhamos $A, A_1, \ldots, A_n$ álgebras (não triviais sobre o mesmo corpo $\mathbb{F}$) tais que $A \simeq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ e $\varphi : A \to A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ um isomorfismo. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, consideremos o ideal (bilateral)

$$\mathcal{I}_i = \{(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0) \mid x \in A_i\} = \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times A_i \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$$

do produto direto $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Observamos que, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_n$. Daí, tomando $I_i = \varphi^{-1}(\mathcal{I}_i)$ temos que $A = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$. Notemos que, visto como álgebra, I_i é isomorfo a A_i.

$ii) \Rightarrow i)$ Suponhamos que $I_1, I_2, \ldots, I_n$ são ideais (bilaterais não triviais) de A tais que $A = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$. Considerando, $I_1, I_2, \ldots, I_n$ como álgebras, tomemos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n & \to & nA \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{array}$$

Temos que ψ é uma transformação linear. Ademais, é bijetora, uma vez que $A = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$. Para $i \neq j$, temos $I_i \cap I_j = \{0\}$ e daí $xy = 0$ para quaisquer $x \in I_i, y \in I_j$. Segue então que ψ é um isomorfismo de álgebras.

$ii) \Rightarrow iii)$ Pelo argumento final acima expresso, e pelo fato de A ser associativa e unitária temos demonstrada esta implicação.

□

1.2.4 Álgebra Livre

Um tipo especial de $\mathbb{F}$-álgebra é a álgebra livre. Destinamos uma subseção inteira para definirmos e caracterizarmos essa álgebra e os seus elementos. A grande especialidade de tal álgebra será vista na Proposição 1.2.83.

Definição 1.2.66. Seja X um conjunto não-vazio, para I um conjunto de índices, digamos $X = \{x_i \mid i \in I\}$. Chamaremos de *palavra* uma sequência finita de elementos de X, por exemplo, $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}$. A *sequência vazia*, chamada de *palavra vazia*, será denotada por 1.

O conjunto de todas as palavras munido com a operação de multiplicação por justaposição torna-se um monóide, chamado *monóide livre em* X, denotado por X^*.

Definição 1.2.67. Seja $\mathbb{F}$ um corpo e X um conjunto. A *álgebra livre em* X *sobre* $\mathbb{F}$ é a *álgebra de monóide de* X^* *sobre* $\mathbb{F}$ (a álgebra cuja base é o conjunto das palavras formadas de X, e cuja multiplicação é por justaposição de palavras). Denotaremos por $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

Assim, $\mathbb{F}\langle X\rangle = \mathbb{F}X^* = \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\omega_i \mid \lambda_i \in \mathbb{F} \quad \text{e} \quad \omega_i \in X^*\right\}$, ou seja, $\omega_i = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}$ ou $\omega_i = 1$.

Definição 1.2.68. Chamamos os elementos de X de *indeterminadas* e os da álgebra livre de *polinômios* (não-comutativos).

Definição 1.2.69. Um polinômio é um *monômio* quando é um múltiplo escalar não-nulo de uma palavra.

Exemplo 1.2.70. Por exemplo, $f = f(x_1, x_2, x_3) = 7{x_1}^2x_3{x_2}^3$ é um monômio em $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

Definição 1.2.71. O *comprimento de uma palavra não-vazia* $\omega = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}$ é definido como $l(\omega) := m$, e o da palavra vazia, $l(1) := 0$.

Exemplo 1.2.72. No exemplo anterior, a palavra da qual o monômio é múltiplo, tem comprimento 6.

Definição 1.2.73. O *grau de um polinômio não-nulo* $f = \lambda_1\omega_1 + \dots + \lambda_m\omega_m$, $(\lambda_i \neq 0)$, é definido como

$$deg(f) := max\ \{l(\omega_1), \dots, l(\omega_m)\}.$$

Definição 1.2.74. Se todos os monômios de um polinômio f têm mesmo grau, f é um *polinômio homogêneo*.

Exemplo 1.2.75. $f = f(x_1, x_2) = {x_1}^2x_2 - x_1x_2x_1 + {x_2}^3 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$ é um polinômio homogêneo de grau três, pois, $l(\omega_1) = l(\omega_2) = l(\omega_3) = 3$.

Definição 1.2.76. Se $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é um polinômio, dizemos que o *grau do polinômio* f *em* x_i é o maior número de ocorrências de x_i nos monômios de f.

Exemplo 1.2.77. Se $f = f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 x_2 x_3 x_1 + x_2 x_3 x_2$, f tem grau 3 em x_1, 2 em x_2 e 1 em x_3.

Definição 1.2.78. Um *polinômio* $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ *é homogêneo de grau* b *em* x_i se é uma combinação linear de monômios tais que, em cada monômio de f, a indeterminada x_i aparece b vezes.

Exemplo 1.2.79. Seja $f = f(x_1, x_2) = {x_1}^2 - 2x_1 x_2 x_1 + 5{x_2}^3 {x_1}^2$, temos que f é homogêneo de grau 2 em x_1.

Definição 1.2.80. Se $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é homogêneo de grau b_i em x_i para todo $i = 1, \ldots, n$, dizemos que f *é multihomogêneo de grau* $(b_1, \ldots, b_n)$.

Definição 1.2.81. $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é um *polinômio multilinear* se cada indeterminada x_i aparece em todo monômio de f estritamente uma vez. Isto é, f é multihomogêneo de grau $(1, \ldots, 1)$. Ou ainda,

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

onde, $\lambda_\sigma \in \mathbb{F}$ e S_n é o grupo simétrico em $\{1, \ldots, n\}$.

Proposição 1.2.82 (Propriedade Universal)**.** *Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra unitária. Se existe função $f : X \to A$, tal função pode ser estendida a um único homomorfismo de álgebra, $\overline{f} : \mathbb{F}\langle X \rangle \to A$. Ou seja,*

$$\overline{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_{i,j_1}) \ldots f(x_{i,j_{m_i}}), \quad \overline{f}(1) = 1_A,$$

com $\lambda_i \in \mathbb{F}, \omega_i = x_{i,j_1} \ldots x_{i,j_{m_i}}$, e o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{F}\langle X \rangle \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Uma computação direta mostra que $\overline{f}$ é um homomorfismo de álgebras. A fim de mostrarmos a unicidade, suponhamos que exista outro homomorfismo de álgebras $\overline{g}$, de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{F}\langle X \rangle \arrow[d, "\overline{g}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

comute. Assim, $\overline{g}(x) = f(x) = \overline{f}(x), \ \forall \ x \in X$.

Como $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são homomorfismos de álgebras, temos para qualquer $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\omega_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle$,

$$\overline{g}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\omega_i\right) = \overline{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\omega_i\right).$$

□

Veremos agora que podemos, por meio de homomorfismo, olhar qualquer álgebra unitária como um quociente por uma álgebra livre.

Proposição 1.2.83. *Toda álgebra unitária é imagem por homomorfismo de uma álgebra livre. Ou de outra maneira: Para toda $\mathbb{F}$-álgebra unitária A, existe uma álgebra livre $\mathbb{F}\langle X\rangle$ e um ideal $I = \ker\ \overline{f}$ ($\overline{f}$ da proposição acima, 1.2.82), tal que*

$$A \cong \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle}{I}.$$

Demonstração. [6]. □

Definição 1.2.84. Um *polinômio multilinear* $f = f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é *alternante* em $x_1,\dots,x_n$ se f torna-se nulo quando substituímos x_j por x_i, $1 \le i < j \le n$.

Observação 1.2.85. O nome alternante, se *char* $\mathbb{F} \neq 2$, vem do fato de que ao permutarmos x_i com x_j o sinal de f é trocado.

Ora, se $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é alternante, temos $f(x_1,x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) = 0$. Substituindo x_1 por x_1+x_2, conseguimos:

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_1+x_2,x_1+x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r)\\
&= f(x_1,x_1+x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) + f(x_2,x_1+x_2,\dots,y_1,\dots,y_r)\\
&= f(x_1,x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) + f(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r)\\
&\quad + f(x_2,x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) + f(x_2,x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r)\\
&= f(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) + f(x_2,x_1,\dots,y_1,\dots,y_r)\\
&\Rightarrow f(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r) = -f(x_2,x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_r).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.86. $h(x_1,x_2,x_3,y) = x_1yx_2x_3 - x_1yx_3x_2 + x_2yx_3x_1 - x_2yx_1x_3 + x_3yx_1x_2 - x_3yx_2x_1$ é alternante em x_1,x_2,x_3, pois $h(x_1,x_1,x_3,y) = 0 = h(x_1,x_2,x_1,y) = h(x_1,x_2,x_2,y)$.

Para acabar esta seção, vejamos duas grandes e importantes classes de polinômios alternantes.

Definição 1.2.87. Seja $n \ge 2$. O polinômio

$$s_n = s_n(x_1,\dots,x_n) := \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)},$$

em que $sgn(\sigma)$ é o sinal da permutação σ, é chamado de *polinômio standard de grau* n(alternante).

Exemplo 1.2.88. $s_2 = s_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$.

Definição 1.2.89. Seja $n \geq 2$. O polinômio

$$c_n = c_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \ldots y_{n-1} x_{\sigma(n)}$$

é chamado de *n-ésimo polinômio de Capelli* (alternante).

Exemplo 1.2.90. $c_2 = c_2(x_1, x_2, y_1) = x_1y_1x_2 - x_2y_1x_1$.

Observação 1.2.91. $s_n(x_1, \ldots, x_n) = c_n(x_1, \ldots, x_n, 1, \ldots, 1)$.

Espaço dos Polinômios Multilineares

Definição 1.2.92. Consideraremos P_n o conjunto dos polinômios multilineares de grau n nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$.

Proposição 1.2.93. *$B = \{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é uma base para P_n como espaço vetorial.*

Demonstração. De fato, tomemos a combinação linear

$$\alpha_1 x_1 \ldots x_n + \alpha_2 x_1 \ldots x_n x_{n-1} + \cdots + \alpha_{n!} x_n \ldots x_1 = 0.$$

Olhamos tal combinação em $\mathbb{F}\langle X \rangle$, nesta álgebra temos que as palavras são base, portanto, cada α_i acima é 0, $1 \leq i \leq n!$.

Ainda, sabemos que um polinômio multilinear de grau n em $\{x_1, \ldots, x_n\}$ pode ser descrito como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

donde, vemos que B gera P_n.

Portanto, pelo feito agora, temos que B é base de P_n. □

Proposição 1.2.94. *P_n é um S_n-módulo.*

Demonstração. De fato, por meio de verificações diretas, temos que a função:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : S_n \times P_n & \to & P_n \\ (\sigma, f(x_1, \ldots, x_n)) & \mapsto & \cdot(\sigma, f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \end{array}$$

é uma ação de S_n sobre P_n. □

Proposição 1.2.95. *P_n é um $\mathbb{F}S_n$-módulo (considerando $\mathbb{F}S_n$ como anel).*

Demonstração. De modo análogo ao que foi feito na proposição anterior, a função

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{F}S_n \times P_n & \to & P_n \\ \left(\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma, f(x_1, \ldots, x_n)\right) & \mapsto & \cdot\left(\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma, f(x_1, \ldots, x_n)\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) \\ & & = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \end{array}$$

é uma ação de $\mathbb{F}S_n$ sobre P_n. Ou, ainda, como veremos no capítulo de Teoria de Representações (2.5.9), por termos a proposição acima demonstrada e por S_n ser base de $\mathbb{F}S_n$, temos um único homomorfismo de álgebras entre $\mathbb{F}S_n$ e P_n, tal que quando olhamos para S_n ele se comporta como na proposição anterior. □

T-ideal

Definição 1.2.96. Um ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ (Olhar Definição 1.2.38) é chamado *T-ideal* se $\varphi(I) \subseteq I$ para qualquer endomorfismo de álgebra φ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ (invariante por endomorfismos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$).

Observação 1.2.97. Se φ é um endomorfismo de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ e $g_i := \varphi(x_i),\ i \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{array}{rcl} \varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) & = & \varphi\left(\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}\right) \\ & = & \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \varphi(x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}) \\ & = & \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \varphi(x_{\sigma(1)}) \ldots \varphi(x_{\sigma(n)}) \\ & = & \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} \\ & = & f(g_1, \ldots, g_n), \forall\ f \in \mathbb{F}\langle X\rangle. \end{array}$$

Por outro lado, para qualquer $g_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle, i \in \mathbb{N}$, existe um endomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ satisfazendo $\varphi(x_i) = g_i$. Portanto, um ideal I bilateral de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é um T-ideal se, e somente se, para toda $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, temos $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$.

Definição 1.2.98. Seja S um subconjunto de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Definimos *o T-ideal gerado por* S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como a intersecção de todos os T-ideais de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ que contêm S. Assim, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal contendo S.

Na prática, quando falarmos de T-ideal gerado por S, usaremos:

Observação 1.2.99. O T-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n) h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle\}.$$

Proposição 1.2.100. *Um T-ideal é invariante por permutação.*

Demonstração. De fato, seja $\sigma \in S_n$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$, com I sendo um T-ideal, devemos mostrar que

$$\sigma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in I.$$

Ora, como $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e I é T-ideal, temos que para $g_i := x_{\sigma(i)} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, $1 \leq i \leq n$, $f(g_1, \ldots, g_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in I$. □

Proposição 1.2.101. *Um T-ideal é um $\mathbb{F}S_n$- módulo (considerando $\mathbb{F}S_n$ como anel).*

Demonstração. Basta considerarmos para cada T-ideal I, a função:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F}S_n \times I &\rightarrow I \\ \left(\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma, f(x_1, \ldots, x_n)\right) &\mapsto \cdot\left(\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \sigma, f(x_1, \ldots, x_n)\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}), \end{aligned}$$

e verificarmos, por computação direta, que I é um $\mathbb{F}S_n$-módulo. □

1.2.5 Álgebras Graduadas

Para uma álgebra A daremos uma decomposição em soma direta de subespaços vetoriais com uma certa restrição. Olharemos para esta nova representação da álgebra livre que depois nos acompanhará nos Capítulos 3, 4 e 5.

Em toda esta subseção G denotará um grupo comutativo com notação aditiva. Embora para falarmos de álgebra G-graduada podemos pedir que G seja apenas um monóide comutativo com unidade.

Definição 1.2.102. Seja A uma álgebra. Definimos uma *G-graduação em A* como sendo uma família $(A_g)_{g\in G}$ de subespaços vetoriais de A tais que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad \text{e} \quad A_g A_h \subseteq A_{g+h},$$

para quaisquer $g, h \in G$. Definimos uma *álgebra G-graduada* como sendo uma álgebra munida de uma G-graduação.

O subespaço A_g é chamado *componente homogênea de grau g* e os seus elementos de *elementos homogêneos de grau g*.

Observação 1.2.103. A condição $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$, para $g, h \in G$, é equivalente a $xy \in A_{g+h}$ para quaisquer $x \in S_1$ e $y \in S_2$, onde S_1 e S_2 são conjuntos geradores de A_g e A_h (como espaços vetoriais), respectivamente.

Graduar uma álgebra é sempre possível, pois toda álgebra admite graduação para qualquer G monóide, como vemos:

Exemplo 1.2.104. Toda álgebra A admite uma G-graduação. Basta tomar $A_0 = A$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \in G - \{0\}$. Esta *graduação* é chamada de *trivial*.

A seguir, temos alguns exemplos mais interessantes de graduação em algumas álgebras específicas.

Exemplo 1.2.105. A álgebra de Grassmann E (Exemplo 1.2.7) possui uma $\mathbb{Z}_2$-*graduação natural*: $E = E_0 \oplus E_1$, em que E_0 é o subespaço dos elementos pares e E_1 dos elementos ímpares. Considerando agora a álgebra de Grassmann de dimensão 2^n, E_n (Exemplo 1.2.43), e tomando $(E_n)_0 = E_n \cap E_0$ e $(E_n)_1 = E_n \cap E_1$, temos $E_n = (E_n)_0 \oplus (E_n)_1$ e esta decomposição define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em E_n.

Exemplo 1.2.106. Consideremos n um inteiro positivo e $M = M_n(\mathbb{F})$. Para cada $\delta \in \mathbb{Z}_n$, tomemos o subespaço $M_\delta = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{ij} \mid \overline{j-i} = \delta\}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, tomemos

$$M_k = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } |k| \geq n, \\ span_{\mathbb{F}}\ \{E_{ij} \mid j-i = k\}, & \text{se } |k| < n. \end{cases}$$

Observemos que $M_{\overline{0}} = M_0$ é exatamente o conjunto das matrizes diagonais. Do fato do conjunto $\{E_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ ser uma base de M segue que

$$M = \bigoplus_{\delta \in \mathbb{Z}_n} M_\delta \quad \text{e} \quad M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k.$$

Agora, para vermos que estas decomposições definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação, respectivamente, em $M_n(\mathbb{F})$, basta observarmos que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k, \\ E_{il}, & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Donde, temos $M_{\delta_1}M_{\delta_2} \subseteq M_{\delta_1+\delta_2}$ para $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Z}_n$, e $M_{k_1}M_{k_2} \subseteq M_{k_1+k_2}$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 1.2.107. Seja G um grupo (com notação multiplicativa) e consideremos a $\mathbb{F}$-álgebra $\mathbb{F}G$ (vide Exemplo 1.2.35). Para cada $g \in G$ tomemos o subespaço $A_g = \{\lambda g \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$ de $\mathbb{F}G$. Como $(\lambda_1 g_1)(\lambda_2 g_2) = \lambda_1\lambda_2 g_1 g_2$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, temos claramente que a família $\{A_g \mid g \in G\}$ é uma G-graduação em $\mathbb{F}G$. Assim, a álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ já "nasce" G-graduada.

Definição 1.2.108. Seja A uma álgebra G-graduada. Dizemos que um *subespaço W de A é homogêneo* se $W = \bigoplus_{g \in G}(W \cap A_g)$.

Consideremos A uma álgebra G-graduada, sendo A_g a componente homogênea de grau $g \in G$. Sendo B uma subálgebra homogênea de A, temos $B = \bigoplus_{g \in G}(B \cap A_g)$. Ademais, para $g, h \in G$, vale a inclusão $(B \cap A_g)(B \cap A_h) \subseteq B \cap A_{g+h}$, e assim a família de subespaços $\{B \cap A_g \mid g \in G\}$ é uma *G-graduação em B induzida pela G-graduação de A.*

Observação 1.2.109. Sendo $v \in A$, temos que $v = \sum_{g \in G} v_g$ com $v_g \in A_g$ (é importante observar que $\{g \in G \mid v_g \neq 0\}$ é finito), sendo esta expressão única. Dizer que um subespaço W de A é homogêneo equivale a dizer que se $v \in W$, então $v_g \in W$ para todo $g \in G$. De fato, se W é homogêneo, então $W = \bigoplus_{g \in G}(W \cap A_g)$. Logo, para $v \in W$, temos $v = \sum_{g \in G} v'_g$, com $v'_g \in W \cap A_g$. Daí, pela unicidade da expressão de v como soma de elementos homogêneos, devemos ter $v'_g = v_g$ e, portanto, $v_g \in W$ para todo $g \in G$. Por outro lado, se para $v \in W$ tem-se $v_g \in W$ para todo $g \in G$, então $v_g \in W \cap A_g$ e daí segue que $W \subseteq \bigoplus_{g \in G}(W \cap A_g)$. Logo, W é homogêneo.

Exemplo 1.2.110. Consideremos a álgebra $M_2(\mathbb{F})$ munida da $\mathbb{Z}_2$-graduação (olhar Exemplo 1.2.106), definida por

$$M_2(\mathbb{F})_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{F} \right\} \quad \text{e} \quad M_2(\mathbb{F})_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{F} \right\}.$$

Sejam agora os subespaços

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\} \quad \text{e} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & b+c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{F} \right\}$$

de $M_2(\mathbb{F})$. Temos que V é homogêneo $(V = (V \cap M_2(\mathbb{F})_0) \oplus (V \cap M_2(\mathbb{F})_1))$, mas W não o é, em relação a esta graduação $\left((W \cap M_2(\mathbb{F})_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } (W \cap M_2(\mathbb{F})_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F} \right\} \right)$.

Proposição 1.2.111. *Se G é um grupo aditivo e A é uma álgebra G-graduada com unidade, então $1_A \in A_0$.*

Demonstração. Temos que existem $g_1, \ldots, g_n \in G$ tais que

$$1_A = a_0 + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$$

com $a_0 \in A_0$ e $a_{g_i} \in A_{g_i}$, para $i = 1, \ldots, n$. Tomando agora $h \in G$ e $a_h \in A_h$, arbitrários, temos

$$a_h = a_h a_0 + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}.$$

Observando que $a_h a_0 \in A_h$, $a_h a_{g_i} \in A_{h+g_i}$ e $h, h+g_1, \ldots, h+g_n$ são dois a dois distintos, podemos concluir que $a_h a_{g_i} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, donde $a_h a_0 = a_h$. De modo totalmente análogo mostramos que $a_0 a_h = a_h$ e assim concluímos que $a_0 = 1_A$. □

Definição 1.2.112. Sejam A e B álgebras G-graduadas com componentes homogêneas A_g e B_g, respectivamente. Dizemos que um *homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ é G-graduado* se $\varphi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$.

Exemplo 1.2.113. Consideremos na álgebra $M_3(\mathbb{F})$ as $\mathbb{Z}_2$-graduações $\{A_0, A_1\}$ definida por

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{F} \right\} \quad \text{e} \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{F} \right\}$$

e $\{B_0, B_1\}$, definida por

$$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{F} \right\} \quad \text{e} \quad B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{F} \right\}.$$

Temos que a aplicação $\varphi : M_3(\mathbb{F}) \to M_3(\mathbb{F})$ definida por

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_7 & x_9 & x_8 \\ x_4 & x_6 & x_5 \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de álgebras.

Analisaremos apenas o fato de ser $\mathbb{Z}_2$-graduado. Ora,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in B_0 \text{ e } \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & d \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \in B_1.$$

Proposição 1.2.114. *Sejam A e B álgebras G-graduadas com componentes homogêneas A_g e B_g, respectivamente, e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo G-graduado de álgebras. Então,* ker φ *é um ideal homogêneo de A.*

Demonstração. Sejam $g_1, g_2, \dots, g_n$ elementos distintos de G e $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \in$ ker φ, com $a_i \in A_{g_i}$. Como φ é G-graduado, temos $\varphi(a_i) \in B_{g_i}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, $0 = \varphi(a) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \cdots + \varphi(a_n)$ e daí $\varphi(a_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, pois $\{B_g \mid g \in G\}$ é uma família de subespaços independentes. Logo, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, temos $a_i \in \ker\ \varphi$, ou seja, $\ker\ \varphi = \bigoplus_{g \in G} (\ker\ \varphi \cap A_g)$, o que conclui a demonstração. □

Graduação da Álgebra Livre e T_G-ideal

Faremos agora a graduação da álgebra livre, que nos será imprescindível para o entendimento dos resultados dos artigos estudados (Capítulos 4 e 5).

Definição 1.2.115. Seja $\{X_g \mid g \in G\}$ uma família de conjuntos enumeráveis dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $\mathbb{F}\langle X\rangle$ (Definição 1.2.67). Definimos agora o homomorfismo de monóides

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{F}\langle X\rangle &\rightarrow G \\ 1 &\mapsto \alpha(1) = 0 \\ x_1x_2\dots x_k &\mapsto \alpha(x_1x_2\dots x_k) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \dots + \alpha(x_k) \end{aligned}$$

onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$.

Sendo m um monômio de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, dizemos que $\alpha(m)$ é o *G-grau de m*. Tomando para cada $g \in G$

$$\mathbb{F}\langle X\rangle_g = \langle m \mid m \text{ é monômio de } \mathbb{F}\langle X\rangle, \alpha(m) = g\rangle$$

temos

$$\mathbb{F}\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{F}\langle X\rangle_g \quad \text{e} \quad \mathbb{F}\langle X\rangle_g \mathbb{F}\langle X\rangle_h \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle_{g+h}, \forall\, g,h \in G.$$

E assim, $\mathbb{F}\langle X\rangle$ é chamada *álgebra associativa livre G-graduada*, e a denotaremos por $\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$ (ou $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ quando G está claro). Se $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle_g$, dizemos que f é *homogêneo de G-grau g* e usamos a notação $\alpha(f) = g$.

Definição 1.2.116. Um *polinômio G-graduado* $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ é dito *homogêneo na variável* $x_i \in X$, se x_i aparece com o mesmo grau em todos os monômios de f. Se f é homogêneo em todas as variáveis, então diremos que f é *multihomogêneo*.

Definição 1.2.117. Um *polinômio G-graduado $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ é linear na variável $x_i \in X$*, se x_i aparece com grau 1 em cada monômio de f. Se f é linear em todas as suas variáveis diremos que *f é multilinear G-graduado*.

Vejamos agora, assim como quando falamos de T-ideal, o que há de especial em um T_G-ideal de uma álgebra livre G-graduada.

Definição 1.2.118. Seja $\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$ é um *T_G-ideal*, se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ (isto é, $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr} \rightarrow \mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$ é um homomorfismo de álgebras e $\varphi(\mathbb{F}\langle X\rangle_g) \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle_g, \forall\, g \in G$).

Observação 1.2.119. Quando $G = \mathbb{Z}_n$, o T_G-ideal será denotado por T_n.

Observação 1.2.120. Analogamente ao que foi feito na Observação 1.2.97 temos que um ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$ é um T_G-ideal, se, e somente se, para toda $f = f(x_1,\dots,x_n) \in I$ e $g_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle_{\alpha(x_i)}$, $f(g_1,\dots,g_n) \in I$.

Definição 1.2.121. Seja S um subconjunto de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ G-graduada. Definimos *o T_G-ideal gerado por S*, denotado por $\langle S\rangle^{T_G}$, como a intersecção de todos os T_G-ideais de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ que contêm S. Assim, $\langle S\rangle^{T_G}$ é o menor T_G-ideal contendo S.

Considerando $\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$ a álgebra associativa livre G-graduada, e $End_G^{gr}(\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr})$ o espaço dos endomorfismos G-graduados da álgebra associativa livre G-graduada $\mathbb{F}\langle X\rangle$, quando falarmos de T_G-ideal gerado por S, na prática, usaremos:

Observação 1.2.122. O T_G-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$ G-graduada gerado pelo conjunto

$$\{h_1\varphi(f)h_2 \mid \varphi \in End_G^{gr}(\mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}), f \in S, h_1, h_2, \in \mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}\}.$$

Definição 1.2.123. Um polinômio $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle_G^{gr}$ é uma T_G-*consequência* de S, se $f \in \langle S\rangle^{T_G}$.

1.3 Produto Tensorial

Agora, daremos uma breve introdução ao conceito de produto tensorial para espaços vetoriais e diremos como podemos, a partir destes, obtermos produto tensorial de álgebras.

A ideia básica por trás do produto tensorial é a transformação de funções bilineares em funções lineares.

Para maiores informações sobre produto tensorial, indicamos [6].

Definição 1.3.1. Consideremos U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$. Denotaremos por $\mathcal{Y}$ o espaço vetorial com base $U \times V$. Seja $\mathcal{N}$ o subespaço de $\mathcal{Y}$ gerado por todos os elementos da forma

$$(\lambda u + \lambda' u', v) - \lambda(u, v) - \lambda'(u', v),$$

$$(u, \lambda v + \lambda' v') - \lambda(u, v) - \lambda'(u, v'),$$

com $\lambda, \lambda' \in \mathbb{F}$, $u, u' \in U$ e $v, v' \in V$. O *produto tensorial* de U e V é o espaço vetorial quociente $\dfrac{\mathcal{Y}}{\mathcal{N}}$. Este é denotado por $U \otimes V$ (ou por $U \otimes_{\mathbb{F}} V$ quando quisermos enfatizar que estamos considerando espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$).

As propriedades características de $U \otimes V$, que são o que de fato usamos, encontram-se no seguinte teorema:

Teorema 1.3.2. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Então existe uma função bilinear $U \times V \to U \otimes V$, $(u, v) \mapsto u \otimes v$, tal que:*

a) Todo elemento em $U \otimes V$ é uma soma de elementos da forma $u \otimes v$, $u \in U$, $v \in V$;

b) Dada uma função bilinear $\beta : U \times V \to W$, onde W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, existe uma função linear $\overline{\beta} : U \otimes V \to W$ tal que $\overline{\beta}(u \otimes v) = \beta(u, v)$ para todos $u \in U$, $v \in V$.

Ainda, as propriedades a) e b) caracterizam $U \otimes V$ a menos de isomorfismo.

Observação 1.3.3. De a) segue que $\overline{\beta}$ é a única função linear de $U \otimes V$ em W que leva $u \otimes v$ em $\beta(u, v)$.

Observação 1.3.4. O teorema acima mostra que podemos "colar" espaços U e V no espaço $U \otimes V$ de tal forma que as funções bilineares definidas em $U \times V$ podem ser representadas por funções lineares definidas em $U \otimes V$.

Funções lineares não são apenas mais simples do que funções bilineares, elas são os homomorfismos no contexto de espaços vetoriais.

Exemplo 1.3.5. Consideremos A uma $\mathbb{F}$-álgebra como definimos em 1.2.1. A sua multiplicação pode ser considerada como uma função linear que sai de $A \otimes A$ em A determinada por $\overline{\mu}(a_1 \otimes a_2) = \mu(a_1, a_2) = a_1 a_2$.

1.3.1 Propriedades Básicas do Produto Tensorial

Iremos nesta subseção resumir as propriedades básicas do produto tensorial, comecemos lembrando que o produto tensorial dos espaços vetoriais U e V é o espaço vetorial $U \otimes V$ constituído de elementos que podem ser escritos como

$$\lambda_1(u_1 \otimes v_1) + \lambda_2(u_2 \otimes v_2) + \cdots + \lambda_n(u_n \otimes v_n), \; u_i \in U, \; v_i \in V, \; \lambda_i \in \mathbb{F}.$$

Tais expressões estão longe de serem únicas. Afinal, nós temos de levar em conta que a função $(u, v) \mapsto u \otimes v$ é bilinear, significando que

$$(\lambda u + \lambda' u') \otimes v = \lambda(u \otimes v) + \lambda'(u' \otimes v),$$

$$u \otimes (\lambda v + \lambda' v') = \lambda(u \otimes v) + \lambda'(u \otimes v'),$$

para todos $\lambda, \lambda' \in \mathbb{F}$, $u, u' \in U$, $v, v' \in V$.

Essas fórmulas implicam que

$$u \otimes 0 = 0, \qquad 0 \otimes v = 0,$$

para todo $u \in U$, $v \in V$.

Por fim, temos da *Propriedade Universal*, b) do Teorema 1.3.2, que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\beta"'] & U \otimes V \arrow[d, "\overline{\beta}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

onde $\otimes$ denota a função canônica $(u, v) \mapsto u \otimes v$. Enfatizemos que $\otimes$ e β são funções bilineares, enquanto que $\overline{\beta}$ é uma função linear.

Definição 1.3.6. Chamaremos os elementos da forma $u \otimes v$ de *tensores simples*. Estes são os geradores do espaço $U \otimes V$.

Ao longo dos próximos resultados, consideraremos U, U', V, V', W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$.

O próximo lema introduz o *produto tensorial de funções lineares.*

Lema 1.3.1. *Se $\varphi : U \to U'$ e $\psi : V \to V'$ são funções lineares, então existe uma única função linear $U \otimes V \to U' \otimes V'$, que denotaremos por $\varphi \otimes \psi$, tal que*

$$(\varphi \otimes \psi)(u \otimes v) = \varphi(u) \otimes \psi(v),$$

para todo $u \in U$, $v \in V$.

Observação 1.3.7. Para funções lineares com domínios e contradomínios apropriados, temos

$$(\varphi \otimes \psi)(\varphi' \otimes \psi') = \varphi\varphi' \otimes \psi\psi'.$$

Consequentemente, se φ e ψ são isomorfismos, então $\varphi \otimes \psi$ também o é, e

$$(\varphi \otimes \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \otimes \psi^{-1}.$$

Isto mostra, em particular, que

$$U \cong U' \text{ e } V \cong V' \Rightarrow U \otimes V \cong U' \otimes V'.$$

E a validade das fórmulas,

$$(\lambda\varphi + \lambda'\varphi') \otimes \psi = \lambda(\varphi \otimes \psi) + \lambda'(\varphi' \otimes \psi),$$

$$\varphi \otimes (\lambda\psi + \lambda'\psi') = \lambda(\varphi \otimes \psi) + \lambda'(\varphi \otimes \psi').$$

Os próximos lemas dizem que o produto tensorial é comutativo e associativo, a menos de isomorfismo.

Lema 1.3.2. $U \otimes V \cong V \otimes U$.

Lema 1.3.3. $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$.

Observação 1.3.8. Geralmente identificamos $(U \otimes V) \otimes W$ e $U \otimes (V \otimes W)$ por $U \otimes V \otimes W$.

A partir de alguns lemas, que omitiremos aqui, chegamos a um resultado importante:

Teorema 1.3.9. *Se $\{e_i \mid i \in I\}$, com I um conjunto de índices, é uma base de U e $\{f_j \mid j \in J\}$, com J um conjunto de índices, é uma base de V, então $\{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$ é uma base de $U \otimes V$.*

Como consequência do teorema acima, temos, para I e J conjuntos finitos:

Corolário 1.3.10. *Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$, então*

$$\dim_{\mathbb{F}} U \otimes V = \dim_{\mathbb{F}} U \cdot \dim_{\mathbb{F}} V.$$

Ainda,

Observação 1.3.11.

$$U \otimes \mathbb{F} \cong U \text{ e } \mathbb{F} \otimes V \cong V.$$

1.3.2 Produto Tensorial de Álgebras

Esta subseção se destina à definição de produto tensorial entre duas álgebras, e à reformulação dos resultados já obtidos na subseção anterior.

Definição 1.3.12. Sejam A e B $\mathbb{F}$-álgebras (consulte a Definição 1.2.1), então $A \otimes B$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra (portanto, um espaço vetorial resultante do produto tensorial definido em 1.3.1) com multiplicação determinada por

$$(x \otimes y)(z \otimes w) = xz \otimes yw,$$

para todo $x, z \in A$, $y, w \in B$.

A partir da definição acima, do fato de uma $\mathbb{F}$-álgebra ser um espaço vetorial munido de uma operação bilinear e dos resultados já mencionados para produto tensorial de espaços vetoriais, temos: uma possível base para o produto tensorial de duas álgebras, uma comutatividade e associatividade (a menos de isomorfismo) do produto tensorial de duas álgebras, uma Propriedade Universal para o produto tensorial de duas álgebras, as fórmulas anteriormente expressas, entre outras informações.

Juntemos, por fim, alguns resultados interessantes envolvendo o produto tensorial de duas álgebras:

Proposição 1.3.13. *a) Se G e H são grupos, temos que*

$$\mathbb{F}G \otimes \mathbb{F}H \cong \mathbb{F}(G \times H),$$

onde $\mathbb{F}G$ é a álgebra de grupo de G (Exemplo 1.2.35), $\mathbb{F}H$ é a álgebra de grupo de H, e, $\mathbb{F}(G \times H)$ é a álgebra de grupo de $G \times H$.

b) Para qualquer $\mathbb{F}$-álgebra A e todo $n \geq 1$, temos

$$M_n(\mathbb{F}) \otimes A \cong M_n(A),$$

onde $M_n(\bullet)$ representa à álgebra das matrizes de ordem n com entradas em $\bullet$ (Exemplo 1.2.5).

c) $M_n(\mathbb{F}) \otimes M_m(\mathbb{F}) \cong M_{nm}(\mathbb{F})$, com $M_n(\bullet)$ como no item acima.

d) $End_{\mathbb{F}}(U) \otimes End_{\mathbb{F}}(V) \cong End_{\mathbb{F}}(U \otimes V)$, onde U e V são espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ e $End_{\mathbb{F}}(\bullet)$ é o conjunto de todas as transformações lineares de $\bullet$ em $\bullet$ (Exemplo 1.2.8).

Capítulo 2

Representações Lineares de Grupos

A Teoria de Representação, que teve seu início no final do século de XIX com Fröbenius e Schur, tem por objetivo descrever estruturas algébricas (grupos, anéis ou álgebras) que possuem estruturas mais abstratas em termos de transformações lineares sobre algum espaço vetorial. Como veremos, há uma equivalência em existir uma representação de um grupo em um espaço vetorial, com a ação do grupo sobre o espaço vetorial. Em alguns casos, quando o espaço vetorial tem dimensão finita, representaremos elementos do grupo como matrizes e a operação do grupo como multiplicação de matrizes. Sendo assim, a Teoria de Representação é importante pois torna problemas teóricos de grupos em problemas de álgebra linear, que são um pouco mais palpáveis.

Nosso objetivo com este capítulo é apresentar um pouco da Teoria de Representação, para posteriormente aplicarmos tal importante ferramenta matemática em PI-álgebras e PI-álgebras graduadas (como poderá ser visto na Seção 3.3).

2.1 Definições e Exemplos

Se A é uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa e unitária, então $U(A)$ é um grupo com multiliplicação (Definição 1.2.27 e Observação 1.2.28).

Faz sentido, dado um grupo G, perguntar se existe um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \to U(A).$$

Em particular, quando $A = End_{\mathbb{F}}\ V$, V um espaço vetorial, temos $U(A) = GL_{\mathbb{F}}\ V$, o grupo linear geral (Exemplo 1.2.8).

Definição 2.1.1. Sejam G um grupo e V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Uma *representação linear de G em V* é um homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \to & GL_{\mathbb{F}}\ V \\ g & \mapsto & \rho(g) = \rho_g. \end{array}$$

Sendo ρ uma representação linear de G, definimos o *grau* desta representação como sendo a dimensão de V. Dizemos que uma *representação* é *fiel* se é injetora.

Observação 2.1.2. Caso a dimensão de V seja finita, digamos n, sabemos que $GL_{\mathbb{F}}\ V \cong GL_n\ (\mathbb{F}) \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Neste caso, podemos pensar em uma representação matricial

$$\rho : G \to GL_n\ (\mathbb{F}).$$

Notemos que, se $n = 1$, então $GL_{\mathbb{F}}\ V \cong GL_1\ (\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^* = \mathbb{F} - \{0\}$, o grupo multiplicativo do corpo $\mathbb{F}$.

Observação 2.1.3. Quando quisermos deixar explícito o corpo em que estamos considerando a representação, usaremos o termo $\mathbb{F}$-*representação linear* ou *representação linear sobre* $\mathbb{F}$.

O exemplo a seguir mostra-nos que pensar em representação é algo viável quaisquer que sejam o grupo e o espaço vetorial.

Exemplo 2.1.4. Sejam G um grupo e V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial, a representação linear

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \to & GL_{\mathbb{F}}\ V \\ g & \mapsto & \rho(g) = Id_V \end{array}$$

é chamada de *representação trivial*. Quando dim $V = n$, pelo já visto na Observação 2.1.2, podemos definir esta representação da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \to & GL_n\ (\mathbb{F}) \\ g & \mapsto & \rho(g) = I_n \end{array}$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

Exemplo 2.1.5. Seja C_∞ um grupo cíclico infinito. Seja g um gerador de C_∞. Temos $C_\infty = \langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{-1}, g^{-2}, \ldots\} \cong \mathbb{Z}$. Definimos,

$$\begin{array}{rcl} \rho : C_\infty & \to & GL_2\ (\mathbb{R}) \\ g^n & \mapsto & \rho(g^n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Notemos que esta representação tem grau 2 e é fiel (de fato, $\rho(g^n) \neq \rho(g^m)$ quando $n \neq m$).

Exemplo 2.1.6. Consideremos $D_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$, o grupo diedral de ordem 4, e definamos a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \rho : D_4 &\rightarrow GL_2(\mathbb{R}) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observemos que $\rho(a^2) = \rho(aa) = \rho(a)\rho(a) = I_2$, porém, $a^2 \neq e$ e $\rho(e) = I_2$. Ou seja, tal representação não é fiel. E mais, tem grau 2.

Exemplo 2.1.7. Consideremos D_4 como acima e definamos:

$$\begin{aligned} \rho : D_4 &\rightarrow GL_2(\mathbb{R}) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ b &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando propriedades de homomorfismo de grupos e fazendo cálculos da aplicação de ρ nos elementos do domínio, vemos que esta representação é fiel. Ainda, tem grau 2.

2.2 Ações Lineares de Grupos

Definiremos o que é a ação de um grupo sobre um espaço vetorial, assim como relacionaremos este conceito com o de representação linear de grupo.

Definição 2.2.1. Sejam G um grupo e V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Dizemos que G *age (linearmente) sobre* V se existe uma função

$$\begin{aligned} \cdot : G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto g \cdot v \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades, $\forall\ v, v_1, v_2 \in V$,$\lambda \in \mathbb{F}$, $g, h \in G$ e $e \in G$ o elemento neutro da operação do grupo:

(A_1) $g \cdot (v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2$;

(A_2) $g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v)$;

(A_3) $e \cdot v = v$;

(A_4) $(gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v)$.

Neste caso, dizemos que V *é um* G*-módulo.*

Proposição 2.2.2. *Se um* $\mathbb{F}$*-espaço vetorial* V *é um* G*-módulo, então existe uma representação linear* $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$*. A recíproca também é válida.*

Demonstração. Suponhamos que V seja um G-módulo. Definamos:

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \to & End_{\mathbb{F}}\ V \\ g & \mapsto & Tg, \end{array}$$

onde $Tg : V \to V$ e $Tg(v) = g \cdot v, \forall\ v \in V$.

Notemos que, $\forall\ v, v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$Tg(v_1 + v_2) = g \cdot (v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2 = Tg(v_1) + Tg(v_2);$$

$$Tg(\lambda v) = g \cdot (\lambda v) = \lambda (g \cdot v) = \lambda Tg(v).$$

Mostrando que Tg é linear e ρ está bem definida.

Ainda, como

$$\rho(gh)(v) = Tgh(v) = (gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v) = Tg(Th(v)) = \rho(g) \circ \rho(h)(v),$$

temos que ρ é multiplicativa.

Por fim,

$$Tg \circ Tg^{-1}(v) = Tg(g^{-1} \cdot v) = g \cdot (g^{-1} \cdot v) = (gg^{-1}) \cdot v = e \cdot v = v,$$

mostra que $Tg \in GL_{\mathbb{F}}\ V$. Ou seja, ρ, definida como acima, é uma representação.

Provemos agora a recíproca. Para tanto, suponhamos que exista $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação. Definamos assim,

$$\begin{array}{rcl} \cdot : G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & g \cdot v := \rho(g)(v) \end{array}$$

Notemos que $\cdot$ é uma ação do grupo G sobre V, pois, $\forall\ v, v_1, v_2 \in V$,$\forall\ \lambda \in \mathbb{F}$, $\forall\ g, h \in G$, $e \in G$, e o elemento neutro da operação no grupo, temos:

(A_1)

$$g \cdot (v_1 + v_2) = \rho(g)(v_1 + v_2) = \rho(g)(v_1) + \rho(g)(v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2;$$

(A_2)

$$g \cdot (\lambda v) = \rho(g)(\lambda v) = \lambda(\rho(g)(v)) = \lambda(g \cdot v);$$

(A_3)

$$e \cdot v = \rho(e)(v) = v;$$

(A_4)

$$(gh) \cdot v = \rho(gh)(v) = (\rho(g)\rho(h))(v) = \rho(g)(\rho(h)(v)) = \rho(g)(h \cdot v) = g \cdot (h \cdot v).$$

$\square$

Pelo que vimos na proposição anterior, as duas linguagens, representação e G-módulo, são equivalentes, portanto, usaremos a que for mais conveniente para cada situação.

2.3 Mais Definições, Exemplos e Propriedades

Agora com a equivalência de linguagens entre representações lineares de um grupo G e G-módulos, exibiremos mais algumas definições, exemplos e propriedades.

Definição 2.3.1. Sejam G um grupo, V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial, e $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação linear. Dizemos que um *subespaço W de V é ρ-invariante* se $\rho_g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$.

No caso em que W é um subespaço de V e ρ-invariante, podemos considerar a restrição $\rho_g|_W : W \to W$. Como ρ_g é bijetora, $\rho_g|_W$ também o é, e definimos $\rho_W : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$.

Definição 2.3.2. Nas condições acima, ρ_W é uma *subrepresentação* de ρ (equivalentemente, W é um G-submódulo de V).

Observação 2.3.3. Se considerarmos $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação linear, os subespaços $\{0_V\}$ e V são sempre ρ-invariantes. E a estes chamamos de *subespaçoes triviais*. Qualquer outro subespaço ρ-invariante W com $\{0_V\} \neq W \neq V$ é *próprio*.

Definição 2.3.4. Uma *representação $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$* é *redutível* se possui subespaços ρ-invariantes próprios. Caso contrário, ρ é *irredutível*. (O G-módulo V é redutível se possui G-submódulos próprios. Caso contrário, V é irredutível como G-módulo).

Vejamos alguns exemplos de representações redutíveis e irredutíveis:

Exemplo 2.3.5. Toda representação de grau 1 é irredutível.

De fato, se uma representação tem grau 1, temos que a dimensão do espaço vetorial é 1. Donde, seus únicos subespaços vetoriais são os subespaços triviais, mostrando a irredutibilidade da representação.

Exemplo 2.3.6. Seja ρ a representação expressa no Exemplo 2.1.5. Notemos que, se $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $\rho(g^n)(v) = v$.

Assim, se considerarmos $W = span_{\mathbb{R}}\{v\}$, temos que W é subespaço próprio de $V = \mathbb{R}^2$ e ρ-invariante. Portanto, ρ é representação redutível.

Exemplo 2.3.7. Se $G \neq \{e\}$, G é finito e dim $V \geq |G|$, então qualquer representação $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ é redutível.

Para conseguirmos mostrar o acima falado, devemos encontrar um subespaço próprio de V que seja ρ-invariante.

Consideremos $v_0 \in V$ um vetor não-nulo (existe, pois a dim $V \geq |G| \neq \{e\}$), definamos $W = span_{\mathbb{F}}\{\rho(g)(v_0) \mid g \in G\}$ de modo que dim $W \leq |G|$. Notemos que, $W \neq \{0_V\}$, uma vez que, $v_0 \neq 0$ e $\rho(e)(v_0) = e \cdot v_0 = v_0$. Agora, observamos que

$$\rho(h)(\rho(g)(v_0)) = (\rho(h)\rho(g))(v_0) = \rho(hg)(v_0) \in W, \forall\ h \in G,$$

ou seja, W é ρ-invariante.

Suponhamos, por absurdo, que ρ é irredutível. Como, $W \neq \{0_V\}$ e W é ρ-invariante, temos que $W = V$. Assim, dim $V =$ dim $W \leq |G| \leq$ dim V.

Consideremos o operador $f : V \to V$ definido por $f = \sum\limits_{g \in G} \rho(g)$. Se $v \in \ker\ f$, então $f(v) = 0_V$, ou seja,

$$\sum_{g \in G} \rho(g)(v) = 0.$$

Ora,

$$f(\rho(h)(v)) = \sum_{g \in G} \rho(g)(\rho(h)(v)) = \sum_{g \in G} \rho(gh)(v) = f(v) = 0,$$

mostrando que $\rho(h)(v) \in \ker\ f, \forall\ h \in G$, isto é, que $\ker\ f$ é ρ-invariante.

Como ρ é irredutível, temos que $\ker\ f = \{0_V\}$ ou $\ker\ f = V$. E assim, f é bijetora ou nula.

Se $v \in V = W$ é arbitrário, então $v = \sum\limits_{g \in G} \lambda_g \rho(g)(v_0)$. Donde,

$$f(v) = \sum_{g \in G} \lambda_g (f \circ \rho(g))(v_0) = \sum_{g \in G} \lambda_g \sum_{h \in G} \rho(hg)(v_0) = \left(\sum_{g \in G} \lambda_g \right) f(v_0), \forall\ v \in V,$$

e daí, dim $Im\ f \leq 1$.

Mas, como $G \neq \{e\}$, se f é bijetora ($\ker\ f = \{0_V\}$), dim $Im\ f =$ dim $V \geq |G| > 1$, portanto, $f = 0$.

Se $f = 0$, então $\sum\limits_{g \in G} \rho(g)(v_0) = 0$, assim, o conjunto $\{\rho(g)(v_0) \mid g \in G\}$ é linearmente dependente. Logo, dim $W < |G|$, o que é uma contradição com o fato de $V = W$ e dim $V \geq |G|$ por hipótese. Portanto, ρ é redutível.

Exemplo 2.3.8. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão n. Fixada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V, consideremos, para cada $\sigma \in S_n$, a transformação linear $T_\sigma : V \to V$, definida por $T_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}$. Notemos que T_σ leva base em base, portanto, é um isomorfismo linear, e temos bem definida a representação linear

$$\begin{aligned} \rho : S_n &\rightarrow GL_{\mathbb{F}}\ V \\ \sigma &\mapsto \rho(\sigma) = T_\sigma. \end{aligned}$$

Consideremos agora os seguintes subespaços de V: $W = span_{\mathbb{F}}\ \{v_1 + \cdots + v_n\}$ e $U = span_{\mathbb{F}}\ \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0\}$. Mostremos que tais subespaços são ρ-invariantes e que deste modo ρ é uma representação redutível.

Ora,

$$\rho(\sigma)(v_1+\cdots+v_n) = T_\sigma(v_1+\cdots+v_n) = T_\sigma(v_1)+\cdots+T_\sigma(v_n) = v_{\sigma(1)}+\cdots+v_{\sigma(n)} = v_1+\cdots+v_n,$$

mostrando que $\rho(\sigma)(W) \subseteq W$, isto é, W é ρ-invariante.

Ainda,

$$\begin{aligned} \rho(\sigma)(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) &= T_\sigma(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 v_{\sigma(1)} + \cdots + \lambda_n v_{\sigma(n)} \\ &= \lambda_{\sigma^{-1}(1)} v_1 + \cdots + \lambda_{\sigma^{-1}(n)} v_n, \end{aligned}$$

e como $\lambda_{\sigma^{-1}(1)} + \cdots + \lambda_{\sigma^{-1}(n)} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, temos que $\rho(\sigma)(U) \subseteq U$, ou seja, U é ρ-invariante.

Vejamos agora que, ao considerarmos as subrepresentações ρ_W e ρ_U, ambas são irredutíveis. De fato, ρ_W é irredutível, pois W tem dimensão 1 (olhar Exemplo 2.3.5). Já para vermos que ρ_U é irredutível teremos um pouco mais de trabalho. Primeiramente, notamos que dim $U = n - 1$, e que $\beta_U = \{v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_1 - v_4, \ldots, v_1 - v_n\}$ é uma base de U, pois gera U e, além disso, os vetores em β_U são L.I.:

$$\begin{aligned} & a_2(v_1 - v_2) + a_3(v_1 - v_3) + \cdots + a_n(v_1 - v_n) = 0 \\ \Rightarrow\ & (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3 - \cdots - a_n v_n = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 0 \\ -a_2 = 0 \\ -a_3 = 0 \\ \vdots \\ -a_n = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & (v_1 - v_i),\ i = 2, \ldots, n \quad \text{são L.I., a partir do fato de } \beta \text{ ser uma base de } V. \end{aligned}$$

Suponhamos, por absurdo, que $\rho_U : S_n \rightarrow GL_{\mathbb{F}}\ U$ não seja uma subrepresentação irredutível, logo existe um subespaço vetorial $Z \subsetneq U$ tal que Z é ρ_U-invariante, isto é, $\rho_U(\sigma)(z) \in Z, \forall\ z \in Z$.

Digamos que $v_1 - v_i \notin Z$. Seja $0 \neq w \in Z$, então $w = \alpha_2(v_1 - v_2) + \cdots + \alpha_n(v_1 - v_n)$ com $\alpha_i \in \mathbb{F}, i = 2, \ldots, n$. Seja $\alpha_j \neq 0$.

Consideremos a transposição $\sigma = (ij)$, $i < j$, assim,

$$\begin{aligned}
\rho_U(\sigma)(w) &= \rho_U(ij)(w) \\
&= \rho_U(ij)\left(\alpha_2(v_1 - v_2) + \cdots + \alpha_i(v_1 - v_i) + \cdots + \alpha_j(v_1 - v_j) + \cdots + \alpha_n(v_1 - v_n)\right) \\
&= \alpha_2(v_1 - v_2) + \cdots + \alpha_i(v_1 - v_j) + \cdots + \alpha_j(v_1 - v_i) + \cdots + \alpha_n(v_1 - v_n),
\end{aligned}$$

e como $\alpha_i = 0$ pois $w \in Z$, e $\alpha_j \neq 0$ por hipótese, temos pelas contas acima que $\rho_U(\sigma)(w) \notin Z$.

Portanto, ρ_U é, de fato, uma subrepresentação irredutível.

Exemplo 2.3.9. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, e $R_n = \begin{pmatrix} cos\ \frac{2\pi}{n} & sen\ \frac{2\pi}{n} \\ -sen\ \frac{2\pi}{n} & cos\ \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$. Sendo C_n o grupo cíclico finito de ordem n, e g um gerador de C_n ($C_n = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$), temos a representação linear

$$\begin{aligned}
\rho : C_n &\to GL_2\ (\mathbb{R}) \cong GL_{\mathbb{R}}\ \mathbb{R}^2 \\
g^k &\mapsto \rho(g^k) = {R_n}^k
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} cos\ \theta & sen\ \theta \\ -sen\ \theta & cos\ \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\ \alpha & sen\ \alpha \\ -sen\ \alpha & cos\ \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} cos\ \theta cos\ \alpha - sen\ \theta sen\ \alpha & cos\ \theta sen\ \alpha + sen\ \theta cos\ \alpha \\ -sen\ \theta cos\ \alpha - cos\ \theta sen\ \alpha & -sen\ \theta sen\ \alpha + cos\ \theta cos\ \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cos\ (\theta + \alpha) & sen\ (\theta + \alpha) \\ -sen\ (\theta + \alpha) & cos\ (\theta + \alpha) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donde, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$,

$${R_n}^k = \begin{pmatrix} cos\ k\frac{2\pi}{n} & sen\ k\frac{2\pi}{n} \\ -sen\ k\frac{2\pi}{n} & cos\ k\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que tal representação é irredutível. De fato, se W é subespaço de $\mathbb{R}^2$ ρ-invariante e dim $W = 1$, então $W = span_{\mathbb{R}}\ \{w_0\}$ e $\rho(h)(w_0) = \lambda_h w_0$, para algum $\lambda_h \in \mathbb{R}$, $\forall\ h \in C_n$.

Em particular, para $g \in C_n$, $\rho(g)(w_0) = R_n w_0 = \lambda_g w_0$, ou seja, w_0 é autovetor de R_n associado ao autovalor $\lambda_g \in \mathbb{R}$. Mas, isto é um absurdo, uma vez que a matriz R_n não possui autovalores reais quando $n \geq 3$.

O resultado a seguir garante uma caracterização para representações irredutíveis de grau finito de um grupo abeliano em um espaço vetorial sobre um corpo algebricamente fechado.

Teorema 2.3.10. *Sejam G um grupo abeliano e $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado. Então, toda $\mathbb{F}$-representação de G irredutível de grau finito tem grau* 1.

Demonstração. Sejam V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação irredutível, temos que mostrar que dim $V = 1$. Se $\rho(g) = \lambda_g Id_V$, $\forall\ g \in G$ e para certos $\lambda_g \in \mathbb{F}$, então dim $V = 1$ [de fato, se supormos, sem perda de generalidade, que dim $V = 2$, teremos $\rho(g) = \lambda_g Id_V \cong \begin{pmatrix} \lambda_g & 0 \\ 0 & \lambda_g \end{pmatrix}$. Donde, calculando os autovalores, temos que λ_g é um autovalor de multiplicidade algébrica 2 e, portanto, ao encontrarmos os autoespaços generalizados associados a este, mostraremos que $\rho(g)$ na verdade é redutível, uma contradição com a hipótese do teorema]. Suponhamos então que dim $V > 1$ e que exista $g_0 \in G$ tal que $\rho(g_0)$ não é múltiplo escalar da identidade. Como $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, existe $\lambda \in \mathbb{F}$ autovalor de $\rho(g_0)$, e o autoespaço W associado a λ é tal que $0 \neq W \neq V$. Dado $g \in G$, temos $gg_0 = g_0 g$, e assim, $\rho(g)\rho(g_0) = \rho(g_0)\rho(g)$. Logo, $\rho(g)(W) \subseteq W$, contradizendo a hipótese de ρ ser irredutível. Portanto, $\rho(g)$ deve ser múltiplo escalar da identidade para todo $g \in G$ e, pelo já visto, neste caso dim $V = 1$, concluindo a demonstração. □

Observação 2.3.11. O Exemplo 2.3.9 deixa claro a necessidade da hipótese do corpo ser algebricamente fechado para validade do Teorema 2.3.10.

Definição 2.3.12. Sejam G um grupo e $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação linear. Dizemos que ρ é *completamente redutível* (ou *semi-simples*) se existem $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subespaços de V ρ-invariantes tais que:

i) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$;

ii) As restrições de ρ aos subespaços $V_i's$ são todas irredutíveis.

Como poderíamos esperar, temos os seguintes dois exemplos:

Exemplo 2.3.13. Toda representação irredutível é completamente redutível.

Exemplo 2.3.14. As representações triviais de grau finito são todas completamente redutíveis (olhar demonstração do Teorema 2.3.10).

Vejamos agora um exemplo não imediato da definição:

Exemplo 2.3.15. Consideremos um caso particular do Exemplo 2.3.8, *char* $\mathbb{F} = 0$ e $n = 3$. Sejam $W = span_{\mathbb{F}}\ \{v_1 + v_2 + v_3\}$ e $U = span_{\mathbb{F}}\ \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$. Temos que $V = W \oplus U$ e que W e U são subespaços ρ-invariantes, com ρ_W e ρ_U irredutíveis (veja Exemplo 2.3.8).

Portanto, ρ é completamente redutível.

O próximo teorema diz-nos em que condições sempre obtemos representações completamente redutíveis.

Teorema 2.3.16 (*Maschke*). *Seja G um grupo finito cuja ordem não é divisível por char $\mathbb{F}$. Se $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\, V$ é uma representação linear de grau finito e W é um subespaço ρ-invariante de V, então existe W_1 subespaço ρ-invariante de V tal que $V = W \oplus W_1$. Consequentemente, ρ é completamente redutível.*

Demonstração. Seja W um subespaço ρ-invariante de V. Fixemos uma transformação linear $T : V \to V$ tal que $Im\ T = W$ e $T|_W = Id_W$. Tomemos a aplicação $F : V \to V$ definida por

$$F(v) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\rho(g)^{-1} \circ T \circ \rho(g))(v).$$

Temos que, para cada $g \in G$, $(\rho(g)^{-1} \circ T \circ \rho(g))$ é uma função linear (composta de lineares), donde, F sendo uma soma de funções lineares é também linear. Ainda, $F|_W = Id_W$, pois W é ρ-invariante e $T|_W = Id_W$; $Im\ F = W$, pois W é ρ-invariante e $Im\ T = W$; e, $F^2 = F$, como podemos ver:

$$\begin{aligned} F^2(v) &= F \circ F(v) = F\left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (\rho(h)^{-1} \circ T \circ \rho(h))(v)\right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} F\left((\rho(h)^{-1} \circ T \circ \rho(h))(v)\right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)^{-1} \circ T \circ \rho(g)) \circ (\rho(h)^{-1} \circ T \circ \rho(h))(v) \end{aligned}$$

Notemos agora que

$$(\rho(g)^{-1} \circ T \circ \rho(g)) \circ (\rho(h)^{-1} \circ T \circ \rho(h))(v) = \rho(g)^{-1}(T(\rho(g)(\rho(h)^{-1}(T(\rho(h)(v)))))).$$

Sabemos que $T(\rho(h)(v)) \in W$, $\forall\ h \in G$, $\forall\ v \in V$, pois $Im\ T = W$. Agora, por ser W ρ-invariante, temos que

$$\rho(g)(\rho(h)^{-1}(T(\rho(h)(v)))) \in W,\ \forall\ g, h \in G,\ \forall\ v \in V.$$

Por fim, como $T|_W = Id_W$, conseguimos que

$$T(\rho(g)(\rho(h)^{-1}(T(\rho(h)(v))))) = \rho(g)(\rho(h)^{-1}(T(\rho(h)(v)))),\ \forall\ g, h \in G,\ \forall\ v \in V.$$

Assim, $,\forall\ g, h \in G,\ \forall\ v \in V$,

$$\begin{aligned} \rho(g)^{-1}(T(\rho(g)(\rho(h)^{-1}(T(\rho(h)(v)))))) &= \rho(g)^{-1}((\rho(g)(\rho(h)^{-1}(T(\rho(h)(v))))) \\ &= \rho(h)^{-1}(T(\rho(h)(v))) \end{aligned}$$

Donde, retornando as contas acima,

$$\begin{aligned} F^2(v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\rho(h)^{-1}\circ T\circ\rho(h))(v)\right) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\left(\frac{1}{|G|}|G|(\rho(h)^{-1}\circ T\circ\rho(h))(v)\right) \\ &= F(v). \end{aligned}$$

Logo, $V = W \oplus \ker\ F$. Mostremos por fim que $\ker\ F$ é ρ-invariante. Sejam $v \in \ker\ F$ e $x \in G$. Então, $\sum\limits_{g\in G}(\rho(g)^{-1}\circ T\circ\rho(g))(v) = 0$ e assim

$$\begin{aligned} |G|F(\rho(x)(v)) &= \sum_{g\in G}(\rho(g)^{-1}\circ T\circ\rho(g))\circ(\rho(x)(v)) \\ &= \sum_{g\in G}(\rho(x)\circ\rho(x)^{-1}\circ\rho(g)^{-1}\circ T\circ\rho(g)\circ\rho(x))(v) \\ &= \sum_{g\in G}\rho(x)((\rho(gx)^{-1}\circ T\circ\rho(gx))(v)) \\ &= \rho(x)\left(\sum_{g\in G}(\rho(gx)^{-1}\circ T\circ\rho(gx))(v)\right) \\ &= \rho(x)\left(\sum_{y\in G}(\rho(y)^{-1}\circ T\circ\rho(y))(v)\right) \end{aligned}$$

uma vez que $\{gx \mid g\in G\} = G$. Desta forma, $F(\rho(x)(v)) = \rho(x)(F(v)) = 0$ e daí segue que $\rho(x)(v) \in \ker\ F$, e $\ker\ F$ é ρ-invariante terminando a demonstração. □

Observação 2.3.17. O Teorema 2.3.16 diz então que se dim V é finita e *char* $\mathbb{F}$ não divide $|G|$, então $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$, com W_i ρ-invariante para todo i, e cada subrepresentação $\rho_i = \rho_{W_i}$ é irredutível.

Procuremos, agora, relacionar representaçãos partindo de um mesmo grupo.

Definição 2.3.18. Sejam G um grupo, V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$, e ρ_1 e ρ_2 representações lineares de G em V e W, respectivamente. Um *homomorfismo equivariante (homomorfismo de representações)* é uma transformação linear $T : V \to W$, tal que $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ para todo $g \in G$ (ou como G-módulos, $T(g\cdot v) = g\cdot T(v)$, $\forall\ g\in G$, $\forall\ v \in V$, e dizemos que T é G-equivariante).

Ou seja, o diagrama a seguir é comutativo, $\forall\ g \in G$,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V \arrow[r, "T"'] & W \end{tikzcd}$$

Dizemos que ρ_1 e ρ_2 são *representações equivalentes* se T é bijetora, ou ainda, um *isomorfismo de representações* (na linguagem de módulos, os módulos V e W são *equivalentes*, ou *isomorfos*, e escreve-se $V \cong W$).

Quando não existe um isomorfismo equivariante $T : V \to W$ entre os G-módulos V e W, dizemos que V e W são *inequivalentes* entre si.

Denotaremos por $Hom_G(V, W)$ o conjunto de todos estes homomorfismos equivariantes entre V e W.

Observação 2.3.19. Se ρ_1 e ρ_2 são representações equivalentes, então necessariamente $\dim\ V = \dim\ W$. Ou seja, representações equivalentes devem ter o mesmo grau.

Observação 2.3.20. Como $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ para todo $g \in G$, conseguimos, no caso de T ser bijetora, que $T^{-1}\rho_2(g)T = \rho_1(g)$ para todo $g \in G$.

Observação 2.3.21. Sendo β uma base para V, e γ uma base para W, temos que

$$[T]^\beta_\gamma [\rho_1(g)]^\beta_\beta = [\rho_2(g)]^\gamma_\gamma [T]^\beta_\gamma,$$

para todo $g \in G$. No caso, em que T é bijetora,

$$[T^{-1}]^\gamma_\beta [\rho_2(g)]^\gamma_\gamma [T]^\beta_\gamma = [\rho_1(g)]^\beta_\beta,$$

para todo $g \in G$.

Se dim V e dim W são finitas, em termos de matrizes, dizemos que duas representações lineares $\rho_1 : G \to GL_n\ (\mathbb{F})$ e $\rho_2 : G \to GL_n\ (\mathbb{F})$ são equivalentes se existe alguma matriz $A \in GL_n\ (\mathbb{F})$ tal que $A^{-1}\rho_2(g)A = \rho_1(g)$, para todo $g \in G$.

A seguir trazemos dois exemplos que nos permitem deduzir se representações equivalentes são triviais ou irredutíveis apenas olhando para uma delas.

Exemplo 2.3.22. Seja $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ tal que $\rho_1(g) = \lambda_g Id_V$, para cada $g \in G$ e certos $\lambda_g \in \mathbb{F}$. Se $\rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$ é equivalente a ρ_1, então,

$$\lambda_g T(v) = T(\lambda_g v) = T(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(T(v)),$$

que implica em $\rho_2(g)(T(v)) = \lambda_g T(v)$ e, por ser T bijetora, $\rho_2(g)w = \lambda_g w$, $\forall\ w \in W$. Ou seja, $\rho_2(g) = \lambda_g Id_W$, para cada $g \in G$. Particularmente, se duas representações forem equivalentes, então uma será trivial se, e somente se, a outra o for.

Exemplo 2.3.23. Se duas representações forem equivalentes, então uma será irredutível, se, e somente se, a outra o for. De fato, sejam $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$ duas representações equivalentes, e $T : V \to W$ a transformação linear bijetora que as tornam equivalentes (isto é, $T^{-1}\rho_2(g)T = \rho_1(g)$, para todo $g \in G$). Seja V_1 um subespaço de V. Se V_1 é ρ_1-invariante, temos que $T(V_1)$ é ρ_2-invariante. De fato, $\rho_2(g)(T(v_1)) = T(\rho_1(g)(v_1)) = T(\omega_{1_g})$, com $\omega_{1_g} \in V_1$, para qualquer $g \in G$ e qualquer $v_1 \in V_1$. Ou seja,

$\rho_2(T(v_1)) = T(\omega_{1_g}) \in T(V_1)$, para qualquer $g \in G$ e qualquer $v_1 \in V_1$, e, portanto, $T(V_1)$ é ρ_2-invariante.

Usemos a Definição 2.3.18 para verificarmos a equivalência das representações no exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.24. Consideremos $n = 3$ no Exemplo 2.3.9, e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

portanto,

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ainda,

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; XB = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; XBX^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = R_3.$$

Seja agora a representação linear

$$\begin{aligned} \psi : C_3 &\to GL_2(\mathbb{R}) \\ g^k &\mapsto \psi(g^k) = B^k, \end{aligned}$$

temos que ψ é equivalente ρ. De fato, consideremos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = X^{-1}x$, uma transformação linear bijetora, e notemos que o diagrama abaixo é comutativo,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\psi(g)"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "T"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

pois, por um lado, vendo por indução em k que $(XBX^{-1})^k = XB^kX^{-1}$, e lembrando que $R_3 = XBX^{-1}$, temos,

$$T(\rho(g^k)(x)) = T(R_3^k v) = X^{-1}R_3^k x = X^{-1}(XBX^{-1})^k x = X^{-1}XB^kX^{-1}x = B^kX^{-1}x.$$

Enquanto que, por outro lado,

$$\psi(g^k)(T(x)) = B^k(T(x)) = B^kX^{-1}x.$$

Ou seja, tais representações são equivalentes.

Por fim, dadas representações equivalentes, destacaremos dois submódulos interessantes.

Exemplo 2.3.25. Sejam $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\, V$ e $\rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\, W$ representações equivalentes. Seja $T : V \to W$ o homomorfismo equivariante. Então, ker T e $Im\ T$ são G-submódulos de V e W, respectivamente.

De fato, dados $g \in G$ e $v \in \ker\ T$, devemos mostrar que $g \cdot v \in \ker\ T$. Ora, como $T(g \cdot v) = g \cdot T(v) = g \cdot 0_W = \rho_2(g)(0_W) = 0_W$, temos que $g \cdot v \in \ker\ T$. E, portanto, ker T é G-submódulo de V.

Agora, dados $g \in G$ e $w \in Im\ T$, devemos mostrar que $g \cdot w \in Im\ T$. Ora, como $w \in Im\ T$, existe $v \in V$, tal que $T(v) = w$. Assim, $g \cdot w = g \cdot T(v) = T(g \cdot v) \in Im\ T$. Portanto, $Im\ T$ é G-submódulo de W.

2.4 Soma Direta de Representação e Produto Tensorial de Representação

Nesta seção, construiremos novas representações a partir das já conhecidas, e analisaremos algumas de suas propriedades.

Definição 2.4.1. Sejam $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$ duas representações lineares. Consideremos o espaço vetorial $V \oplus W$, e definimos para cada $g \in G$,

$$\begin{array}{rcl} \rho_1(g) \oplus \rho_2(g) : V \oplus W & \to & V \oplus W \\ (v, w) & \mapsto & (\rho_1(g)(v), \rho_2(g)(w)) \end{array}$$

Notemos que, para cada $g \in G$, $\rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$ acima definida é uma transformação linear invertível de $V \oplus W$ em $V \oplus W$. Portanto, podemos definir a representação linear,

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 \oplus \rho_2 : G & \to & GL_{\mathbb{F}}\ (V \oplus W) \\ g & \mapsto & (\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v, w) = (\rho_1(g)(v), \rho_2(g)(w)) = \rho_1(g)(v) + \rho_2(g)(w) \end{array}$$

Esta representação origina-se da *soma direta de outras duas representações do mesmo grupo G.*

Observação 2.4.2. Se dim $V = n$ e dim $W = m$, as representações ρ_1 e ρ_2 dadas acima, podem ser vistas na forma matricial

$$\rho_1 : G \to GL_n\ (\mathbb{F}) \qquad \text{e} \qquad \rho_2 : G \to GL_m\ (\mathbb{F}).$$

Assim,

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL_{n+m}\ (\mathbb{F}),$$

e, para cada $g \in G$,

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g)_{n\times n} & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & \rho_2(g)_{m\times m} \end{pmatrix}.$$

O resultado a seguir mostra que a soma direta de duas representações herda características das representações que foram somadas.

Proposição 2.4.3. *Se $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$ são representações completamente redutíveis, então $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ (V \oplus W)$ também é completamente redutível.*

Demonstração. Como ρ_1 e ρ_2 são completamente redutíveis, temos da Definição 2.3.12 que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ em que $\rho_1|_{V_i}$ é irredutível, com $i = 1, 2, \ldots, n$; e $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$ em que $\rho_2|_{W_j}$ é irredutível, com $j = 1, 2, \ldots, m$. Deste modo, $V \oplus W = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \oplus (W_1 \oplus \cdots \oplus W_m) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$. Se mostrarmos que $\rho_1 \oplus \rho_2|_{V_i}$ e $\rho_1 \oplus \rho_2|_{W_j}$ são irredutíveis, temos a demonstração da afirmação fazendo uso da Definição 2.3.12.

Ora,

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(0, 0, \ldots, v_i, 0, 0, \ldots) = \rho_1(g)(0, 0, \ldots, v_i, 0, \ldots) + \rho_2(g)(0, \ldots, 0) = \rho_1(g)(v_i),$$

ou seja, $\rho_1 \oplus \rho_2|_{V_i} = \rho_1|_{V_i}$, que é irredutível.

Analogamente, $\rho_1 \oplus \rho_2|_{W_j} = \rho_2|_{W_j}$, que irredutível. □

Passaremos agora a falar sobre o *produto tensorial de representações*, uma outra maneira de obtermos uma representação a partir de outras já conhecidas.

Definição 2.4.4. Sejam G um grupo,

$$\begin{aligned} \rho_1 : G &\to GL_{\mathbb{F}}\ V \\ g &\mapsto \rho_1(g) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \rho_2 : G &\to GL_{\mathbb{F}}\ W \\ g &\mapsto \rho_2(g) \end{aligned}$$

representações lineares de G. Dado $g \in G$, consideremos a aplicação $F_g : V \times W \to V \otimes W$, definida por $F_g(v, w) = \rho_1(g)(v) \otimes \rho_2(g)(w)$. Como esta aplicação é bilinear, existe uma transformação linear $\varphi_g : V \otimes W \to V \otimes W$ tal que $\varphi_g(v \otimes w) = \rho_1(g)(v) \otimes \rho_2(g)(w)$. Observando que $\rho_1(g) \in GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\rho_2(g) \in GL_{\mathbb{F}}\ W$, concluímos que $\varphi_g \in GL_{\mathbb{F}}\ (V \otimes W)$. Podemos então definir

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to GL_{\mathbb{F}}\ (V \otimes W) \\ g &\mapsto \varphi(g) = \varphi_g. \end{aligned}$$

Tal aplicação é uma representação linear de G em $V \otimes W$. Esta é chamada de *produto tensorial de ρ_1 e ρ_2*, e normalmente denotada por $\rho_1 \otimes \rho_2$.

Observemos agora que os produtos tensoriais entre representações equivalentes resultam em representações equivalentes.

Observação 2.4.5. Suponhamos agora que $\rho_1' : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V_1$ e $\rho_2' : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W_1$ são representações equivalentes a ρ_1 e ρ_2, respectivamente. Temos então que existem,

$$T : V \to V_1 \quad \text{e} \quad S : W \to W_1,$$

transformações lineares bijetoras tais que

$$T^{-1}\rho_1'(g)T = \rho_1(g) \quad \text{e} \quad S^{-1}\rho_2'(g)S = \rho_2(g),$$

para todo $g \in G$. Considerando agora a transformação linear:

$$\begin{array}{rcl} T \otimes S : V \otimes W & \to & V_1 \otimes W_1 \\ v \otimes w & \mapsto & T(v) \otimes T(w) \end{array}$$

temos que a sua inversa é a transformação

$$\begin{array}{rcl} T^{-1} \otimes S^{-1} : V_1 \otimes W_1 & \to & V \otimes W \\ v_1 \otimes w_1 & \mapsto & T^{-1}(v_1) \otimes S^{-1}(w_1). \end{array}$$

Ademais, sendo $\varphi = \rho_1 \otimes \rho_2$ e $\varphi' = \rho_1' \otimes \rho_2'$, temos $(T \otimes S)^{-1}\varphi'(g)(T \otimes S) = \varphi(g)$ para todo $g \in G$. Logo, $\rho_1 \otimes \rho_2$ e $\rho_1' \otimes \rho_2'$ são representações equivalentes.

Diferentemente do que ocorre com a soma direta de representações, o exemplo a seguir mostra-nos que dadas representações irredutíveis, o produto tensorial delas pode não ser uma representação irredutível.

Exemplo 2.4.6. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 2 e $\beta = \{v_1, v_2\}$ uma base de V. Consideremos $T \in GL_{\mathbb{R}}\ V$ tal que $T(v_1) = v_2$ e $T(v_2) = -v_1$. Sendo $C_4 = \{1, g, g^2, g^3\}$ um grupo cíclico de ordem 4, definamos

$$\begin{array}{rcl} \rho : C_4 & \to & GL_{\mathbb{R}}\ V \\ g^n & \mapsto & \rho(g^n) = T^n. \end{array}$$

Temos que ρ é uma representação linear irredutível de C_4. De fato,

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que o polinômio característico, $p_{[T]_\beta^\beta}(\lambda) = det([T]_\beta^\beta - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1$, não tem raiz em $\mathbb{R}$. Ou seja, T não é diagonalizável e, portanto, ρ é irredutível. Considerando agora a representação $\rho \otimes \rho : C_4 \to GL_{\mathbb{R}}\ (V \otimes V)$, temos que ela possui grau 4 e não é irredutível. De fato, o subespaço $W = span_{\mathbb{R}}\ \{v_1 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2\}$ de $V \otimes V$ tem grau 2 e é $(\rho \otimes \rho)$-

invariante, pois,

$$\begin{aligned}(\rho \otimes \rho)(g)(v_1 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2) &= (T \otimes T)(v_1 \otimes v_1 + v_2 \otimes v_2) \\ &= (T \otimes T)(v_1 \otimes v_1) + (T \otimes T)(v_2 \otimes v_2) \\ &= T(v_1) \otimes T(v_1) + T(v_2) \otimes T(v_2) = v_2 \otimes v_2 + (-v_1) \otimes (-v_1) \\ &= v_2 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_1.\end{aligned}$$

2.5 Representações de Álgebras e $\mathbb{F}G$-módulos

Pretendemos nesta seção associar representações de grupos com representações de álgebras e, por meio do estudo da álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ e dos $\mathbb{F}G$-módulos, obter informações pertinentes sobre as representações irredutíveis de G.

Definição 2.5.1. Sejam A uma $\mathbb{F}$-álgebra e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Um homomorfismo de álgebras $\rho : A \to End_{\mathbb{F}}\, V$ é chamado de uma *representação linear de álgebras* (ou uma *representação de álgebras*).

Observação 2.5.2. De forma análoga ao feito na Definição 2.1.1, temos os conceitos de grau de uma representação de álgebras e representação fiel entre álgebras. Como também, representação redutível e irredutível (Definição 2.3.4), subrepresentação, etc.

Pensando na linguagem por módulos, lembremo-nos das seguintes definições:

Definição 2.5.3. Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa com unidade. Definimos um *A-módulo* (ou módulo sobre A) como sendo um espaço vetorial V, munido de um produto

$$\begin{aligned}\cdot : A \times V &\to V \\ (a, v) &\mapsto a \cdot v\end{aligned}$$

que satisfaz, para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$:

i) $(a_1 + a_2) \cdot v = (a_1 \cdot v) + (a_2 \cdot v)$;

ii) $a \cdot (v_1 + v_2) = (a \cdot v_1) + (a \cdot v_2)$;

iii) $(\lambda a) \cdot v = a \cdot (\lambda v) = \lambda(a \cdot v)$;

iv) $a_1 \cdot (a_2 \cdot v) = (a_1 a_2) \cdot v$;

v) $1_A \cdot v = v$.

Observação 2.5.4. Sendo A uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa com unidade, temos pelo já observado (1.2.3) que A pode ser vista como um anel com unidade. E assim, a definição anterior pode ser pensada como uma ação do anel A sobre um espaço vetorial V.

De maneira geral, para termos um módulo a partir de um anel com unidade, precisamos apenas que V seja um grupo abeliano e que valham $i), ii), iv)$ e $v)$ na definição acima (para o caso de ser um módulo à esquerda). Porém, trabalharemos apenas com módulos quando V é um espaço vetorial e, para tanto, precisamos exigir a validade de $iii)$.

Definição 2.5.5. Sejam A uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa com unidade, e V um A-módulo. Dizemos que:

i) Um subespaço vetorial W de V é um *submódulo*(ou *A-submódulo*) de V, se $a \cdot w \in W$ para quaisquer $a \in A$ e $w \in W$;

ii) Um *submódulo* W de V é *minimal*, se não existe submódulo W_1 de V tal que $\{0_V\} \neq W_1 \subsetneq W$;

iii) V é um *A-módulo irredutível* (ou *simples*), se seus únicos submódulos são $\{0_V\}$ e V.

Observação 2.5.6. Se V é um A-módulo, temos que os submódulos minimais de V são exatamente aqueles que são A-módulos irredutíveis.

Observação 2.5.7. Assim como o feito na seção de Ações Lineares de Grupos deste mesmo capítulo, Seção 2.2, temos que as linguagens de representação de álgebras e A-módulos são equivalentes. Portanto, usaremos a mais conveniente em cada momento.

Observação 2.5.8. Podemos também aplicar a Definição 2.3.18 para representação de álgebras, fazendo as devidas alterações.

A partir da definição de representações de álgebras, chegamos à:

Observação 2.5.9. Se $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ é uma representação linear, consideremos a álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ (vista no Exemplo 1.2.35). Construamos o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathbb{F}G \arrow[d, "\overline{\rho}"] \\ & End_{\mathbb{F}}\ V \end{tikzcd}$$

Então, cada $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V \subseteq End_{\mathbb{F}}\ V$ determina um único homomorfismo de álgebras $\overline{\rho} : \mathbb{F}G \to End_{\mathbb{F}}\ V$ dado por,

$$\overline{\rho}\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} a_g \overline{\rho}(g) = \sum_{g \in G} a_g (\overline{\rho} \circ \iota)(g) = \sum_{g \in G} a_g \rho(g).$$

Isto é, $\overline{\rho}$ é representação de álgebras (olhe Proposição 1.2.82).

Por outro lado, se $\rho : \mathbb{F}G \to End_{\mathbb{F}}\ V$ é homomorfismo de álgebras (representação), $g, h, e \in G$, e e é o elemento neutro de G, então $\psi = \rho|_G : G \to End_{\mathbb{F}}\ V$ é tal que

$$\begin{aligned} \psi(gh) &= \rho|_G(gh) = \rho(gh) = \rho(g)\rho(h) \\ &= \rho|_G(g)\rho|_G(h) = \psi(g)\psi(h) \end{aligned}$$

e,

$$\psi(e) \;=\; \rho\,|_G\,(e) = \rho(e) = Id_V.$$

Ou seja, $\psi : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ é uma representação linear de grupo.

Portanto, as representações de um grupo G e da álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ são equivalentes. Ou melhor dizendo, existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas de $\mathbb{F}G$-módulo em V e as representações lineares de G em V.

Observação 2.5.10. Se W é um subespaço ρ-invariante de V ($\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ é representação linear), então $\rho(g)(w) \in W$, $\forall g \in G$ e $\forall\ w \in W$. Ou, na linguagem de módulos, $g \cdot w \in W$, para quaisquer $g \in G$ e $w \in W$. Como G é base de $\mathbb{F}G$, concluímos que W é um submódulo do $\mathbb{F}G$-módulo V.

Definição 2.5.11. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e A uma $\mathbb{F}$-álgebra. Definimos os seguintes conjuntos:

$$Hom_A\ (V, W) = \{f \in Hom_{\mathbb{F}}(V, W) \mid f \text{ é equivariante}\},$$

$$End_A\ V = \{f \in End_{\mathbb{F}}\ V \mid f \text{ é equivariante}\}.$$

Temos no próximo lema uma caracterização para o conjunto $Hom_A\ (V, W)$ para algumas condições sobre o corpo $\mathbb{F}$.

Lema 2.5.1 (*Lema de Schur*)**.** *Sejam $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado e char $\mathbb{F} = 0$; A uma $\mathbb{F}$-álgebra; $\rho : A \to End_{\mathbb{F}}\ V$ e $\tau : A \to End_{\mathbb{F}}\ W$ representações irredutíveis; e, V, W espaços de dimensão enumerável. Então,*

$$\dim_{\mathbb{F}}\ Hom_A(V, W) = \begin{cases} 1, & se\ \rho \cong \tau \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $T \in Hom_A\ (V, W)$. Temos que ker T é um A-submódulo de V e $Im\ T$ é um A-submódulo de W (vide Exemplo 2.3.25). Se $T \neq 0$, então ker $T \neq V$ e $Im\ T \neq \{0_W\}$. Como V e W são A-módulos irredutíveis, ker $T = \{0_V\}$ e $Im\ T = W$. Ou seja, T é um isomorfismo de representações de álgebras. Assim, já temos estabelecido que $\dim_{\mathbb{F}}\ Hom_A\ (V, W) \neq 0$ se, e somente se, $\rho \cong \tau$.

Suponhamos, então, $\rho \cong \tau$. Se $S, T \in Hom_A\ (V, W)$, então $R = T^{-1}S \in End_{\mathbb{F}}\ V$. Suponhamos que R não seja escalar, logo, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $(R - \lambda Id_V)$ não é nulo, portanto, invertível.

Afirmação: $\forall\ 0 \neq v \in V$ e $\forall\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$,

$$\{(R - \lambda_1 Id_v)^{-1}(v), \ldots, (R - \lambda_m Id_V)^{-1}(v)\}$$

é L.I.

Seja a combinação linear

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(R-\lambda_i Id_V)^{-1}(v)=0,\ \forall a_i\in\mathbb{F}.$$

Multiplicando por $\prod_{j=1}^{m}(R-\lambda_j Id_V)$ e notando que os $(R-\lambda_j Id_V)$ comutam entre si $[(R-\lambda_i Id_V)(R-\lambda_j Id_V)=R^2-\lambda_j RId_V-\lambda_i RId_V+\lambda_i\lambda_j Id_V^2=R^2-\lambda_i RId_V-\lambda_j RId_V+\lambda_j\lambda_i Id_V^2=(R-\lambda_j Id_V)(R-\lambda_i Id_V)]$, temos

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1,j\neq i}^{m}(R-\lambda_j Id_V)(v)=0.$$

Fazendo $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{m} a_i\prod_{j=1,j\neq i}^{m}(x-\lambda_j Id_V)$, conseguimos que $f(R)(v)=0$.

Se algum $a_i\neq 0$, para $i=1,2,\ldots,m$, então $f\neq 0$. Logo, possui fatoração,

$$f(x)=c(x-\mu_1)\ldots(x-\mu_{m-1}),$$

$c\neq 0$, e $\mu_1,\ldots\mu_{m-1}\in\mathbb{F}$. Deste modo,

$$f(R)=c(R-\mu_1 Id_V)\ldots(R-\mu_{m-1}Id_V)$$

é invertível, o que contradiz $f(R)(v)=0$. Portanto, $a_i=0$, para todo $i=1,2,\ldots,m$.

Assim, com a Afirmação provada, chegamos a uma contradição com a hipótese de V ter dimensão enumerável (podemos tomar quaisquer escalares e quaisquer vetores não nulos de V e obtermos pela Afirmação uma quantidade não enumerável de vetores L.I. em V). Donde, concluímos que R é escalar e, portanto, temos a conclusão da demonstração. □

Corolário 2.5.12. *Se $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado e char $\mathbb{F}=0$, $\rho: A\to End_{\mathbb{F}}\ V$ representação irredutível de álgebras, com V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão enumerável, então $End_A\ V=\{\lambda Id_V\mid\lambda\in\mathbb{F}\}\cong\mathbb{F}$.*

Demonstração. Basta aplicarmos o Lema de Schur, 2.5.1, para $\tau=\rho$ (ρ na hipótese do Corolário). □

O resultado a seguir retoma a correspondência biunívoca entre as estruturas de $\mathbb{F}G$-módulos e as representações lineares de G.

Proposição 2.5.13. *Sejam $\rho_1: G\to GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\rho_2: G\to GL_{\mathbb{F}}\ W$ representações lineares de G. Então, valem:*

a) ρ_1 e ρ_2 são equivalentes se, e somente se, os respectivos $\mathbb{F}G$-módulos V e W são isomorfos.

b) ρ_1 é irredutível se, e somente se, o respectivo $\mathbb{F}G$-módulo V é irredutível.

Demonstração. a) Suponhamos que ρ_1 e ρ_2 são equivalentes, temos então a existência de um homomorfismo equivariante $T : V \to W$, isto é, uma função linear bijetora tal que $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ para todo $g \in G$. Assim, considerando a linguagem em G-módulos, temos

$$T(g \cdot v) = T(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(T(v)) = g \cdot T(v),$$

para quaisquer $g \in G$ e $v \in V$. Como T é linear e G é base de $\mathbb{F}G$, temos que

$$\begin{aligned} T\left(\left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \cdot v\right) &= T\left(\sum_{g\in G} \alpha_g (g \cdot v)\right) = \sum_{g\in G} \alpha_g T(g \cdot v) \\ &= \sum_{g\in G} \alpha_g (g \cdot T(v)) = \left(\sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \cdot T(v), \end{aligned}$$

para quaisquer $\alpha_g \in \mathbb{F}$ e $v \in V$. Logo, T é um isomorfismo de $\mathbb{F}G$-módulos.

Suponhamos agora que V e W são $\mathbb{F}G$-módulos isomorfos. Seja $F : V \to W$ um isomorfismo de $\mathbb{F}G$-módulos. F é então uma transformação linear bijetora que satisfaz $F(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot F(v)$ para quaisquer $\alpha \in \mathbb{F}G$ e $v \in V$. Assim,

$$(F\rho_1(g))(v) = F(\rho_1(g)(v)) = F(g \cdot v) = g \cdot F(v) = \rho_2(g)(F(v)) = (\rho_2(g)F)(v),$$

e, portanto, $F\rho_1(g) = \rho_2(g)F$ para todo $g \in G$. Donde, ρ_1 e ρ_2 são equivalentes.

b) A Observação 2.5.10 garante-nos que os submódulos do $\mathbb{F}G$-módulo V correspondentes a ρ_1 são exatamente os subespaços ρ_1-invariantes. Donde, temos o resultado. □

Antes de expormos o próximo lema, que nos dá um conjunto gerador para $End_{\mathbb{F}}\ V$ quando $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado, iremos apresentar mais dois resultados que são utilizados na demonstração deste, e que podem ser encontrados em [5]. Para tanto, consideremos A uma $\mathbb{F}$-álgebra e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

Proposição 2.5.14. *Sejam V um A-módulo simples de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$, e, $f \in End_{\mathbb{F}}\ V$ tal que $f \circ T = T \circ f$ para todo $T \in End_A\ V$. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, então existe $a \in A$ tal que $f(v_i) = a \cdot v_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Corolário 2.5.15. *Se V é um A-módulo simples de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$, e, $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, então $End_A\ V = \{\lambda Id_V \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$.*

Lema 2.5.2 (*Lema de Burnside*)**.** *Suponhamos $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado e $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação linear irredutível de grau finito. Então, o conjunto $\{\rho(g) \mid g \in G\}$ gera $End_{\mathbb{F}}\ V$ como $\mathbb{F}$-espaço vetorial.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5]. □

Corolário 2.5.16. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado, G é finito e ρ é uma representação irredutível de grau n de G, então $n^2 \leq |G|$.*

Demonstração. Pelo Lema de Burnside temos que $\{\rho(g) \mid g \in G\}$ gera $End_{\mathbb{F}}\ V$ como $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Como $|\{\rho(g) \mid g \in G\}| \leq |G|$ e $\dim_{\mathbb{F}}\ End_{\mathbb{F}}\ V = n^2$, conseguimos $n^2 \leq |G|$. □

Vejamos a importância do corpo ser algebricamente fechado no corolário acima.

Observação 2.5.17. No Exemplo 2.3.9, para $n = 3$, temos $|C_3| = 3$ e o grau da representação ρ, que é irredutível, igual a 2. Donde, $2^2 = 4 \nleq |C_3| = 3$.

Apresentaremos alguns resultados de A-módulos que serão ferramentas importantes para aplicarmos em PI-Teoria (Capítulos 3 em diante). Comecemos com um lema que afirma que a imagem de um homomorfismo A-equivariante partindo de um A-módulo simples é um A-módulo simples:

Lema 2.5.3. *Se $f \in Hom_A\ (V, W)$ em que V e W são A-módulos, V é simples, então $Im\ f \subseteq W$ é um submódulo simples.*

Demonstração. Consideremos $U \subseteq Im\ f$ um submódulo não nulo, temos então que $\{0_V\} \neq f^{-1}(U)$ é um A-submódulo de V [de fato, seja $\tilde{v} \in f^{-1}(U)$, notemos que $f(a \cdot \tilde{v}) = a \cdot f(\tilde{v}) \in U$ para qualquer $a \in A$. Assim, $a \cdot \tilde{v} \in f^{-1}(U)$, mostrando o antes afirmado], donde, $f^{-1}(U) = V$, por ser V simples. Portanto, $U = f(V) = Im\ f$. Ou seja, $Im\ f$ é um submódulo simples de W. □

Lema 2.5.4. *Sejam A uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa com unidade, V um A-módulo e W um submódulo próprio de V. Então,*

a) Se $W_1, W_2, \ldots, W_n$ são submódulos irredutíveis de V tais que $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$, então existem $j_1, \ldots, j_l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $V = W \oplus W_{j_1} \oplus \cdots \oplus W_{j_l}$.

b) Se W_1 e W_2 são submódulos de V tais que $V = W \oplus W_1 = W \oplus W_2$, então $W_1 \simeq W_2$.

Demonstração. a) Como $\{0_V\} \neq W \neq V$ deve existir $j_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $W_{j_1} \nsubseteq W$ (caso contrário $W = V$) e assim, por ser W_{j_1} um módulo irredutível de V, temos $W_{j_1} \cap W = \{0_V\}$. Se $V = W \oplus W_{j_1}$, acabamos. Se não, deve existir $j_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $W_{j_2} \nsubseteq W \oplus W_{j_1}$ e então $W_{j_2} \cap (W \oplus W_{j_1}) = \{0_V\}$. Se $V = W \oplus W_{j_1} \oplus W_{j_2}$, acabamos. Se não, o processo continua. Como $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$, temos que tal processo para em algum momento, donde concluímos o resultado.

b) Dado $v \in V$, existem únicos $w' \in W$ e $w_2 \in W_2$ tais que $v = w' + w_2$. Como W_1 é submódulo de V, definimos, assim, a aplicação

$$\begin{aligned} f : W_1 &\to W_2 \\ v &\mapsto f(v) = w_2. \end{aligned}$$

Notemos que, $\forall\ v, v' \in W_1$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{F}$, $\forall\ a \in A$,

$$f(v+v') = f((w'+w_2)+(w''+w_2')) = f((w'+w'')+(w_2+w_2')) = w_2+w_2' = f(v)+f(v');$$

$$f(\lambda v) = f(\lambda(w' + w_2)) = f(\lambda w' + \lambda w_2) = \lambda w_2 = \lambda f(v);$$

$$f(a \cdot v) = f(a \cdot (w' + w_2)) = f(a \cdot w' + a \cdot w_2) = a \cdot w_2 = a \cdot f(v).$$

Ou seja, f é um homomorfismo de A-módulos e seu núcleo é exatamente $W \cap W_1 = \{0_V\}$. Ainda, vejamos que f é sobrejetora: se $w_2 \in W_2$, então existem $w'' \in W$ e $w_1 \in W_1$ tais que $w_2 = w'' + w_1$. Logo, $w_1 = (-w'') + w_2$ e assim $f(w_1) = w_2$. Concluímos de tudo que f é um isomorfismo de A-módulos.

□

Na proposição a seguir veremos que, se uma representação linear $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ é completamente redutível, então a decomposição de V em soma direta de subespaços ρ-invariantes, com respectivas subrepresentações irredutíveis, é única, a menos de ordem dos subespaços e equivalência das subrepresentações.

Proposição 2.5.18. *Sejam A uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa com unidade, e, W e Z A-módulos isomorfos. Se*

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n \quad e \quad Z = Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_m,$$

onde W_i e Z_j são submódulos minimais de W e Z, respectivamente, então $m = n$ e $W_i \simeq Z_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (reordenando os $Z_j's$, se necessário).

Demonstração. Como W e Z são A-módulos isomorfos, temos que existe $f : W \to Z$ um isomorfismo de A-módulos. Por sabermos que W_i é um submódulo minimal de W, temos pelo Lema 2.5.3 que $f(W_i)$ é um submódulo minimal de Z, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Além disso, $Z = f(W_1) \oplus f(W_2) \oplus \cdots \oplus f(W_n)$. Pelo item $a)$ do lema anterior, devem existir $j_1, \ldots, j_l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $Z = Z_1 \oplus f(W_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(W_{j_l})$ e assim, do item $b)$, $f(W_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(W_{j_l}) \simeq Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_m$. Como $l < n$, temos por indução que $l = m - 1$, $W_{j_1} \simeq Z_2, \ldots, W_{j_l} \simeq Z_m$. Sendo $\{j_{l+1}, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} - \{j_1, \ldots, j_l\}$, temos

$$Z = (f(W_{j+1}) \oplus \cdots \oplus f(W_{j_n})) \oplus (f(W_{j_1}) \oplus \cdots \oplus f(W_{j_l})).$$

Segue então, novamento do lema anterior, que $Z_1 \simeq f(W_{j_{l+1}}) \oplus \cdots \oplus f(W_{j_n})$. Mas, como Z_1 é minimal, devemos ter $n = l + 1$ e $Z_1 \simeq f(W_{j_n})$, donde $n = m$ e $Z_1 \simeq W_{j_n}$, concluindo a demonstração. □

Em virtude do ganho da proposição anterior, a partir deste momento, G será um grupo finito cuja ordem não é divisível pela característica do corpo $\mathbb{F}$. Neste caso, toda representação de G de grau finito é completamente redutível por Maschke (2.3.16) e podemos fazer uso de tal ganho.

Definição 2.5.19. Consideremos a representação linear

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : G &\to GL_{\mathbb{F}}\, \mathbb{F}G \\ g &\mapsto \tilde{\rho}(g) \end{aligned}$$

onde $\tilde{\rho}(g) : \mathbb{F}G \to \mathbb{F}G$ é definida por $\tilde{\rho}(g)(\alpha) = g\alpha$. Esta representação, chamada de *representação regular à esquerda de* G, é fiel e é a representação correspondente ao $\mathbb{F}G$-módulo à esquerda de $\mathbb{F}G$.

Observação 2.5.20. Observemos que os subespaços $\tilde{\rho}$-invariantes de $\mathbb{F}G$, ou os $\mathbb{F}G$-submódulos de $\mathbb{F}G$, são exatamente os ideais à esquerda de $\mathbb{F}G$. Segue novamente do Teorema de Maschke (2.3.16) que se W é um ideal à esquerda de $\mathbb{F}G$, então existe W_1 também ideal à esquerda de $\mathbb{F}G$ tal que $\mathbb{F}G = W \oplus W_1$.

Observação 2.5.21. Desta maneira, os ideais minimais à esquerda de $\mathbb{F}G$ correspondem às subrepresentações irredutíveis de $\tilde{\rho}$, concluímos, novamente pelo Teorema de Maschke (2.3.16), que $\mathbb{F}G$ é uma soma direta de uma quantidade finita de ideais minimais à esquerda.

O próximo lema diz que toda representação linear irredutível de dimensão finita de G é equivalente a uma subrepresentação da representação regular à esquerda de G. Isto é, podemos olhar para os subespaços invariantes segundo a representação linear irredutível de G como ideais minimais à esquerda de $\mathbb{F}G$.

Lema 2.5.5. *Todo $\mathbb{F}G$-módulo irredutível de dimensão finita é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{F}G$.*

Demonstração. Seja V um $\mathbb{F}G$-módulo irredutível de dimensão finita (digamos que $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\, V$ é a representação linear correspondente) e fixemos $v_0 \in V - \{0_V\}$. Consideremos $T : \mathbb{F}G \to V$ que satisfaz $T(g) = g \cdot v_0$ para todo $g \in G$. Observemos que $T(g + \lambda h) = (g + \lambda h) \cdot v_0 = g \cdot v_0 + (\lambda h) \cdot v_0 = g \cdot v_0 + \lambda(h \cdot v_0) = T(g) + \lambda T(h)$, e, $T(h \cdot g) = (hg) \cdot v_0 = h \cdot (g \cdot v_0) = h \cdot T(v_0)$, para quaisquer, $g, h \in G$, $\lambda \in \mathbb{F}$; ainda que G é base de $\mathbb{F}G$; temos então que T é um homomorfismo de $\mathbb{F}G$-módulos. Assim, como $T \neq 0$ [pois sendo $e \in G$ o elemento identidade do grupo temos que $T(e) = e \cdot v_0 = v_0 \neq 0_V$], e temos a irredutibilidade de V, $Im\ T = V$, isto é, T é sobrejora.

Sabemos que ker T é um $\mathbb{F}G$-submódulo de $\mathbb{F}G$, e $\mathbb{F}G$ é completamente redutível por Maschke, logo, existe um $\mathbb{F}G$-submódulo I de $\mathbb{F}G$ tal que $\mathbb{F}G = \ker\ T \oplus I$. Considerando então a restrição de T a I

$$\begin{aligned} T_1 : I &\to V \\ \alpha &\mapsto T_1(\alpha) = \alpha \cdot v_0 \end{aligned}$$

temos que $Im\ T_1 = Im\ T(= V)$, pois se $\alpha_1 \in \ker\ T$ e $\alpha_2 \in I$, então $T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = T(\alpha_2)$. Ainda, $\ker\ T_1 \subseteq \ker\ T \cap I$ e, portanto, $\ker\ T_1 = \{0_{\mathbb{F}G}\}$. Temos então que T_1 é um isomorfismo de $\mathbb{F}G$-módulos. Afirmamos que I é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{F}G$. Já sabemos que I por ser um $\mathbb{F}G$-submódulo de $\mathbb{F}G$ é um ideal à esquerda de $\mathbb{F}G$, suponhamos que I não seja minimal, isto é, que exista $\{0_{\mathbb{F}G}\} \neq I_1 \subsetneq I$ um ideal à esquerda de $\mathbb{F}G$. Assim, I_1 é um $\mathbb{F}G$-submódulo de $\mathbb{F}G$, e, portanto, I_1 é subespaço $\tilde{\rho}$-invariante de $\mathbb{F}G$. Como T_1 é isomorfismo, temos $T(I_1) = T_1(I_1)$ é subespaço ρ-invariante de V, o que é um absurdo. Logo, I é ideal minimal à esquerda de $\mathbb{F}G$. $\square$

Vejamos agora quando os ideais minimais à esquerda de $\mathbb{F}G$ são isomorfos como $\mathbb{F}G$-módulos. Ou equivalentemente, quando as subrepresentações irredutíveis de $\tilde{\rho}$ são isomorfas.

Lema 2.5.6. *Sejam I e J ideais minimais à esquerda de $\mathbb{F}G$. Então, I e J são isomorfos como $\mathbb{F}G$-módulos se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{F}G$ tal que $J = I\alpha$.*

Demonstração. Suponhamos $\varphi : I \to J$ um isomorfismo de $\mathbb{F}G$-módulos. Como, por Maschke, existe W ideal à esquerda de $\mathbb{F}G$ tal que $\mathbb{F}G = I \oplus W$, e $1_{\mathbb{F}G} \in \mathbb{F}G$, tomemos $\alpha_1 \in I$ e $w_1 \in W$ tais que $1_{\mathbb{F}G} = \alpha_1 + w_1$. Para qualquer $x \in \mathbb{F}G$, temos então $x = x\alpha_1 + xw_1$ ($x\alpha_1 \in I$ e $xw_1 \in W$). Em particular, para $x \in I$ segue que $xw_1 = 0$. Desta forma, $\varphi(x) = \varphi(x\alpha_1) = x\varphi(\alpha_1)$. Considerando $\alpha = \varphi(\alpha_1)$, temos $J = Im\ \varphi = I\alpha$.

Suponhamos agora $J = I\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{F}G$. Então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : I & \to & J \\ x & \mapsto & \varphi(x) = x\alpha \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejetivo de $\mathbb{F}G$-módulos [ora, $\varphi(x + \lambda y) = (x + \lambda y)\alpha = x\alpha + (\lambda y)\alpha = x\alpha + \lambda(y\alpha) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$, e $\varphi(\beta \cdot x) = (\beta \cdot x)\alpha = \beta \cdot (x\alpha) = \beta \cdot \varphi(x)$, para quaisquer $x, y \in I$, $\lambda \in \mathbb{F}$ e $\beta \in \mathbb{F}G$]. Como, $\varphi \neq 0$, $\ker\ \varphi \neq I$ e I é irredutível como $\mathbb{F}G$-módulo (lema anterior), devemos ter $\ker\ \varphi = \{0_I\}$, terminando a demonstração. $\square$

Exibamos mais dois resultados que serão ferramentas técnicas posteriormente e deixamos as demonstrações apenas referenciadas, [5].

Lema 2.5.7. *Sejam A uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa com unidade, V um A-módulo e W um submódulo minimal de V. Se $\{W_i \mid i \in \Lambda\}$ é uma família de submódulos minimais de V tais que $W \subseteq \sum_{i \in \Lambda} W_i$, então W é isomorfo como A-módulo a algum dos W_i's.*

Corolário 2.5.22. *Se $I_1, I_2, \ldots, I_m$ são ideais minimais à esquerda de $\mathbb{F}G$ dois a dois não isomorfos (como $\mathbb{F}G$-módulos), então $\sum_{j=1}^{m} \dim_{\mathbb{F}}\ I_j \leq |G|$. Particularmente, $m \leq |G|$.*

Proposição 2.5.23. *Se $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ são $\mathbb{F}$-representações irredutíveis duas a duas não equivalentes de G, então a soma de seus graus é menor ou igual a $|G|$ e também $m \leq |G|$.*

Demonstração. Sejam para $j = 1, 2, \ldots, m$, $\rho_j : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V_j$ as $\mathbb{F}$-representações irredutíveis duas a duas não equivalentes de G, onde V_j é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão n_j. Observemos que os respectivos $\mathbb{F}G$-módulos $V_1, V_2, \ldots, V_m$ são dois a dois não isomorfos (2.5.13). Pelo Lema 2.5.5, existem $I_1, I_2, \ldots, I_m$ ideais minimais à esquerda de $\mathbb{F}G$ tais que $I_j \simeq V_j$ como $\mathbb{F}G$-módulos, para $j = 1, 2, \ldots, m$. Assim, $\dim_{\mathbb{F}}\ I_j = n_j$ e $I_1, I_2, \ldots, I_m$ são dois a dois não isomorfos como $\mathbb{F}G$-módulos. Segue então do corolário anterior que $n_1 + n_2 + \cdots + n_m \leq |G|$ e $m \leq |G|$. Donde, provamos o dito. □

Vejamos agora um exemplo de aplicação da proposição anterior, e, portanto, das ferramentas técnicas antes apresentadas.

Exemplo 2.5.24. Consideremos o caso $n = 3$ no exemplo 2.3.9:

$$R_3 = \begin{pmatrix} cos\ \frac{2\pi}{3} & sen\ \frac{2\pi}{3} \\ -sen\ \frac{2\pi}{3} & cos\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

e,

$$\begin{array}{rcl} \rho : C_3 & \to & GL_2\ \mathbb{R} \\ g^k & \mapsto & \rho(g^k) = R_3^k. \end{array}$$

Temos que ρ é uma $\mathbb{R}$-representação irredutível de grau 2 de C_3. Consideremos também a representação trivial $\sigma : C_3 \to GL_{\mathbb{R}}\ \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^*$, definida por $\sigma(g^k) = Id_{\mathbb{R}} = 1$ de grau 1 (portanto, irredutível). Pela Proposição 2.5.23, não pode existir uma terceira representação irredutível de C_3 sobre $\mathbb{R}$ que não é equivalente nem a ρ e nem a σ. Assim, qualquer representação linear de C_3 irredutível sobre $\mathbb{R}$ deve ser equivalente a ρ ou a σ.

Faremos mais algumas definições e observações para então chegarmos à decomposição de $\mathbb{F}G$ em componentes isotípicas.

Definição 2.5.25. Consideremos m o número de representações irredutíveis (a menos de equivalência) de G. Tomemos $I_1, I_2, \ldots, I_m$ ideais minimais à esquerda de $\mathbb{F}G$ dois a dois não isomorfos como $\mathbb{F}G$-módulos. Seja $d_j = \dim_{\mathbb{F}}\ I_j$.

Observação 2.5.26. Observemos então que todo ideal minimal à esquerda de $\mathbb{F}G$ é isomorfo como $\mathbb{F}G$-módulo a exatamente um deles.

Definição 2.5.27. Para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, consideremos $J_j = I_j\mathbb{F}G$, e notemos que é um ideal bilateral de $\mathbb{F}G$. A cada um destes ideais bilaterais de $\mathbb{F}G$, damos o nome de *componente isotípica*. Podemos entender melhor o nome pela observação a seguir.

Observação 2.5.28. Para cada $\alpha \in \mathbb{F}G$, $I_j\alpha$ é ideal minimal à esquerda de J_j isomorfo a I_j (como $\mathbb{F}G$-módulos). Segue do Lema 2.5.6 que J_j é exatamente a soma de todos os ideais minimais à esquerda de $\mathbb{F}G$ isomorfos (como $\mathbb{F}G$-módulos) a I_j.

Chegamos assim à grande caracterização da álgebra de grupo $\mathbb{F}G$, caracterização esta dada por meio de suas componentes isotípicas.

Proposição 2.5.29.

$$\mathbb{F}G = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_m.$$

Demonstração. Sejam $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0$, com $x_j \in J_j$. Suponhamos $x_m \neq 0$ e tomemos I um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{F}G$ contido em $(\mathbb{F}G)x_m$. Notemos que $x_m \in J_m \cap (J_1 + \cdots + J_{m-1})$, e, portanto, $I \subseteq J_m \cap (J_1 + \cdots + J_{m-1})$. Segue então do Lema 2.5.7 que I é isomorfo a I_m e também a I_j para algum $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, o que é um absurdo. Devemos ter então $x_m = 0$. De maneira análoga, concluímos que $x_1 = \cdots = x_{m-1} = 0$. Logo, a soma $J_1 + J_2 + \cdots + J_m$ é direta.

Como $\mathbb{F}G$ é a soma de todos os seus ideais minimais à esquerda, temos que

$$J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_m = \mathbb{F}G.$$

□

Observação 2.5.30. Pelo Teorema 1.2.65 e pela proposição anterior, temos que

$$\mathbb{F}G \simeq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m,$$

onde $A_j \simeq J_j$ (como álgebras) para $j = 1, 2, \ldots, m$.

Como $Z(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m) = Z(A_1) \times Z(A_2) \times \cdots \times Z(A_m)$, temos $\dim_{\mathbb{F}} Z(\mathbb{F}G) \geq m$, uma vez que A_j é uma álgebra com unidade e, consequentemente, $\dim_{\mathbb{F}} Z(A_j) \geq 1$, para $j = 1, 2, \ldots, m$.

Tentemos com o próximo lema ter uma estimativa para m, o número de representações irredutíveis, inequivalentes de G. Veremos que esta estimativa está associada ao número de classes de conjugação do grupo G.

Lema 2.5.8. *Sejam G um grupo finito, $Cl_1, Cl_2, \ldots, Cl_h$ as distintas classes de conjugação de G e $v_j = \sum_{g \in Cl_j} g$ para $j = 1, 2, \ldots, h$. Então, $\{v_1, v_2, \ldots, v_h\}$ é uma base de $Z(\mathbb{F}G)$ e, portanto, $\dim_{\mathbb{F}} Z(\mathbb{F}G) = h$. Em particular, conseguimos que $m \leq h$.*

Demonstração. Encontrada em [5]. □

Pelo visto neste lema e no seu anterior, temos que o número de $\mathbb{F}$-representações irredutíveis (a menos de equivalência) de G é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G. Veremos agora que se $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, então vale a igualdade. Isto é, $m = h$.

Para isto, precisamos do seguinte teorema encontrado em [5].

Teorema 2.5.31. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado e A é uma $\mathbb{F}$-álgebra simples de dimensão finita, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \simeq M_n(\mathbb{F})$.*

Teorema 2.5.32. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado cuja característica não divide a ordem de um grupo finito G, então*

$$\mathbb{F}G \simeq M_{d_1}(\mathbb{F}) \times M_{d_2}(\mathbb{F}) \times \cdots \times M_{d_m}(\mathbb{F})$$

onde $d_1, d_2, \ldots, d_m$ são os graus das (inequivalentes) $\mathbb{F}$-representações irredutíveis de G.

Demonstração. Fixado $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ (arbitrário), consideremos U um ideal bilateral não nulo de J_j. Seja $x \in \mathbb{F}G$, temos que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$, com $x_j \in J_j$. Agora, seja $u \in U$. Então, $xu = x_1u + x_2u + \cdots + x_mu$, $ux = ux_1 + ux_2 + \cdots + ux_m$, e ambos pertencem a U, pois $J_jJ_i = J_iJ_j = \{0\}$ para $i \neq j$, já que, $\mathbb{F}G$ é álgebra associativa e temos a validade da Proposição 1.2.44. Podemos então concluir que U é um ideal bilateral de $\mathbb{F}G$.

Tomando agora I um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{F}G$ contido em U, temos pelos Lemas 2.5.7 e 2.5.6 que I é isomorfo a I_j (como $\mathbb{F}G$-módulo) e que $I_j \subseteq U$. Logo, $J_j = I_j\mathbb{F}G \subseteq U$ e assim $U = J_j$. Desta forma, J_j é uma $\mathbb{F}$-álgebra simples de dimensão finita. Ainda, como todo ideal à esquerda de J_j é também um ideal à esquerda de $\mathbb{F}G$, temos que I_j é um ideal minimal à esquerda de J_j.

Supondo agora $\mathbb{F}$ algebricamente fechado, temos $J_j \simeq M_{d_j}(\mathbb{F})$ (observe o teorema acima). □

Observação 2.5.33. Do teorema acima é imediato que $|G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_m^2$. Além disso, como $\dim_{\mathbb{F}} Z(M_{d_j}(\mathbb{F})) = 1$, temos que $\dim_{\mathbb{F}} Z(\mathbb{F}G) = m$.

Teorema 2.5.34. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado cuja característica não divide a ordem de um grupo finito G, então:*

i) O número de $\mathbb{F}$-representações lineares irredutíveis de G é finito, a menos de equivalência, e é igual ao número de classes de conjugação de G.

ii) Se $d_1, d_2, \ldots, d_m$ são os graus das $\mathbb{F}$-representações irredutíveis (não equivalentes) de G, então $|G| = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_m^2$.

Demonstração. Segue do teorema e da observação anteriores. □

Apliquemos os teoremas anteriores:

Exemplo 2.5.35. Sabemos que o subgrupo S_3 possui exatamente 3 classes de conjugação. Sendo então $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado de característica diferente de 2 e 3, temos que o número de $\mathbb{F}$-representações irredutíveis, a menos de equivalência de S_3, é 3. Sendo d_1, d_2 e d_3 os graus dessas representações, temos $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 6$, e, assim concluímos que $d_1 = d_2 = 1$ e $d_3 = 2$.

2.6 Caracteres de uma Representação

Apresentaremos agora o conceito de caracter de uma representação e mostraremos que todo caracter é uma soma de caracteres irredutíveis.

Definição 2.6.1. Se V é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita, então $V \cong V^*$, onde $V^* = \{f : V \to \mathbb{F} \mid f \text{ é linear}\}$. Existe um *emparelhamento* $\langle ., . \rangle : V^* \times V \to \mathbb{F}$ dado por $\langle f, v \rangle = f(v)$, $\forall\, f \in V^*$, $\forall\, v \in V$.

Este emparelhamento é não degenerado:

$$\langle f, v \rangle = 0,\ \forall\, v \in V \Rightarrow f = 0;$$

$$\langle f, v \rangle = 0,\ \forall\, f \in V^* \Rightarrow v = 0.$$

Proposição 2.6.2. *Se V é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita, então $End_{\mathbb{F}}\ V \cong V^* \otimes V$ como espaços vetoriais.*

Demonstração. Consideremos $\gamma : V^* \times V \to End_{\mathbb{F}}\ V$ dada por $\gamma(f, v)(u) = \langle f, u \rangle v = f(u)v$. Por cálculos simples vemos que γ é bilinear. Pela Propriedade Universal, existe uma única transformação linear $\overline{\gamma} : V^* \otimes V \to End_{\mathbb{F}}\ V$ tal que $\overline{\gamma}(f \otimes v) = \overline{\gamma} \circ \iota(f, v) = \gamma(f, v)$, $\forall\, f \in V^*$, $\forall\, v \in V$. Como pode ser visto no diagrama comutativo a seguir:

$$\begin{tikzcd} V^* \times V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\gamma"'] & V^* \otimes V \arrow[d, "\overline{\gamma}"] \\ & End_{\mathbb{F}}\ V \end{tikzcd}$$

Notemos que

$$\overline{\gamma}(f \otimes v) = 0 \Rightarrow \overline{\gamma} \circ \iota(f, v) = 0 \Rightarrow \gamma(f, v) = 0 \Rightarrow \langle f, u \rangle v = 0,\ \forall\, u \in V$$

$$\Rightarrow \langle f, u \rangle = 0,\ \forall\, u \in V \text{ ou } v = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ ou } v = 0 \Rightarrow f \otimes v = 0 \Rightarrow \overline{\gamma} \text{ é injetora.}$$

Como $V \cong V^*$, $\dim_{\mathbb{F}}\ End_{\mathbb{F}}\ V = \dim_{\mathbb{F}}\ V^* \otimes V$, portanto, $\overline{\gamma}$ é sobrejetora. Logo, $\overline{\gamma}$ é um isomorfismo, o que conclui a demonstração. □

Observação 2.6.3. Pela Propriedade Universal de $V^* \otimes V$, como $\langle ., . \rangle$ é bilinear, existe uma única transformação linear $ev : V^* \otimes V \to \mathbb{F}$ tal que $ev(f \otimes v) = ev \circ \iota(f, v) = \langle f, v \rangle = f(v)$.

Olhemos pelo diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} V^* \times V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\langle .,. \rangle"'] & V^* \otimes V \arrow[d, "ev"] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

Definição 2.6.4. Seja $T \in End_{\mathbb{F}}\ V$, em que V é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita. O *traço* de T é o escalar

$$tr\ T = ev(\overline{\gamma}^{-1}(T)).$$

Notemos que $tr : End_{\mathbb{F}}\ V \to \mathbb{F}$ é linear.

Definição 2.6.5. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V \subseteq End_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação linear. Definimos o *caracter* de ρ como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \chi_\rho(g) = tr\ \rho(g) = ev(\overline{\gamma}^{-1}(\rho(g))) \end{aligned}$$

Dizemos que χ_ρ é um *caracter irredutível* de G se a representação ρ é irredutível.

Proposição 2.6.6. *a) Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V e $A = [T]_\beta = (a_{ij})$ é a matriz representando $T \in End_{\mathbb{F}}\ V$ na base β, então*

$$tr\ T = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn};$$

b) Para todos $S, T \in End_{\mathbb{F}}\ V$, temos

$$tr\ ST = tr\ TS;$$

c) Se $\varphi : V \to W$ é um isomorfismo, então

$$tr\ (\varphi T \varphi^{-1}) = tr\ T,\ \forall\ T \in End_{\mathbb{F}}\ V;$$

d)

$$\overline{\gamma}^{-1}(T) = e_1 \otimes T(v_1) + \cdots + e_n \otimes T(v_n),\ \forall\ T \in End_{\mathbb{F}}\ V,$$

onde, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V, e $\beta^* = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base dual de V^*.

Demonstração. Demonstraremos apenas o primeiro item. Os demais itens seguem de maneira análoga a este.

a) Consideremos $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a base de V. Tomemos $\beta^* = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base dual de V^*. Sabemos que $\beta^* \otimes \beta = \{e_1 \otimes v_1, e_1 \otimes v_2, \ldots, e_1 \otimes v_n, e_2 \otimes v_1, \ldots, e_n \otimes v_1, \ldots, e_n \otimes v_n\}$ é base de $V^* \otimes V$.

Consideremos $T_{ij} \in End_{\mathbb{F}}\ V$ a transformação linear dada por $T_{ij}(v_k) = \delta_{ik} v_j$. Notemos que o isomorfismo existente entre $M_n\ (\mathbb{F})$ e $End_{\mathbb{F}}\ V$ associa as matrizes unitárias E_{ij} (olhe Exemplo 1.2.5) às transformações T_{ij}. Assim, $\beta_{End} = \{T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{1n}, T_{21}, \ldots, T_{n1}, \ldots, T_{nn}\}$ é uma base para $End_{\mathbb{F}}\ V$.

Calculemos explicitamente a transformação $\overline{\gamma}$ de $V^* \otimes V$ em $End_{\mathbb{F}}\ V$. Para tanto, vejamos o que ocorre nas bases acima. Seja $u \in V$ (arbitrário), temos que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, para $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Isto é, u é uma combinação linear dos vetores da base β. Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}(e_1 \otimes v_1)(u) &= \overline{\gamma}(e_1 \otimes v_1)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\
&= e_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) v_1 \\
&= \alpha_1 v_1.
\end{aligned}$$

Notando que,

$$T_{11}(u) = T_{11}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 v_1.$$

Chegamos que $\overline{\gamma}(e_1 \otimes v_1) = T_{11}$. E, portanto, pelo mesmo processo, concluímos que $\overline{\gamma}(e_i \otimes v_j) = T_{ij}$. Assim,

$$[\overline{\gamma}]_{\beta_{End}}^{\beta^* \otimes \beta} = I_n.$$

Donde, dada $T \in End_{\mathbb{F}}\ V$, temos que $T = \sum\limits_{i,j} a_{ij} T_{ij}$. E então, $\overline{\gamma}^{-1}(T) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}(e_i \otimes v_j)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
tr\ T &= ev(\overline{\gamma}^{-1}(T)) \\
&= ev\left(\sum_{i,j} a_{ij}(e_i \otimes v_j)\right) \\
&= \sum_{i,j} a_{ij} ev(e_i \otimes v_j) \\
&= \sum_{i,j} a_{ij} \delta_{ij} \\
&= \sum_{i} a_{ii}.
\end{aligned}$$

□

Utilizemos tal proposição e vejamos agora algumas propriedades de caracteres:

Proposição 2.6.7. *a) Se $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$ são representações equivalentes de grau finito, então $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$;*

b) $\chi_\rho(e) = \dim_{\mathbb{F}}\ V$, onde $e \in G$ é o elemento identidade e $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ é uma representação linear de grau finito;

c) $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$, $\forall\ g, h \in G$, em que $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ é uma representação linear de grau finito. Em palavras, temos que χ_ρ é uma **função de classe***, isto é, χ_ρ é constante nas classes de conjugação de G.*

Demonstração. a) Sendo $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$ representações equivalentes de grau finito, temos que existe transformação linear bijetora $T : V \to W$ tal que $\rho_2(g) = T\rho_1(g)T^{-1}$ para todo $g \in G$. Logo,

$$\chi_{\rho_2}(g) = tr\ \rho_2(g) = tr\ (T\rho_1(g)T^{-1}) = tr\ \rho_1(g) = \chi_{\rho_1}(g),$$

e, portanto, $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

b) Ora, $\chi_\rho(e) = tr\ \rho(e) = tr\ Id_V = \dim_{\mathbb{F}}\ V$.

c) Supondo $g, g_1 \in G$ elementos conjugados, temos $g_1 = hgh^{-1}$ para algum $h \in G$, e daí

$$\begin{aligned}\chi_\rho(g_1) &= tr\ \rho(g_1) = tr\ \rho(hgh^{-1}) = tr\ (\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})) \\ &= tr\ (\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = tr\ \rho(g) = \chi_\rho(g),\end{aligned}$$

e, portanto, $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$.

□

Observação 2.6.8. No caso de uma representação $\rho : G \to GL_n\ (\mathbb{F})$, definimos o caracter de ρ da mesma forma, observando que $\chi_\rho(g)$ é o traço da matriz $\rho(g)$ (Olhe Proposição 2.6.6).

Calculemos alguns caracteres:

Exemplo 2.6.9. Consideremos G um grupo. Sendo $\rho_0 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação trivial ($\rho_0(g) = Id_V$ para todo $g \in G$) de grau finito, temos

$$\chi_{\rho_0}(g) = tr\ \rho_0(g) = tr\ Id_V = \dim_{\mathbb{F}}\ V,$$

para todo $g \in G$.

Exemplo 2.6.10. Sejam V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial tal que $\dim_{\mathbb{F}}\ V = 1$, e $\zeta : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V \cong \mathbb{F}^*$ uma representação linear, temos que

$$\chi_\zeta(g) = tr\ \zeta(g) = \zeta(g),$$

para todo $g \in G$.

Mostraremos um caso em que o caracter de uma representação é o grau desta representação, mesmo quando a representação não é a trivial:

Exemplo 2.6.11. Sejam $G = C_\infty$ o grupo cíclico gerado por g, e $\rho : G \to GL_2\ (\mathbb{R})$ a representação apresentada no Exemplo 2.1.5. Temos,

$$\chi_\rho(g^n) = tr\ \rho(g^n) = tr\ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, porém ρ não é trivial.

A seguir, apresentaremos algumas proposições e consequentes observações que podem ser encontradas tanto em [5] quanto em [32].

Proposição 2.6.12. *Se $V = U \oplus W$, soma direta de $\mathbb{F}$-espaços vetoriais de dimensão finita, e $T \in End_{\mathbb{F}}\ V$ é tal que $T = T_1 + T_2$, com $T_1 \in End_{\mathbb{F}}\ U$ e $T_2 \in End_{\mathbb{F}}\ W$, então*

$$tr\ T = tr\ T_1 + tr\ T_2.$$

Observação 2.6.13. Desta forma, se $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ é representação completamente redutível de grau finito, e $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V_1, \ldots, \rho_k : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V_k$ são as componentes irredutíveis, então $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2} + \cdots + \chi_{\rho_k}$.

Proposição 2.6.14. *Sejam $T \in End_{\mathbb{F}}\ V$ e $S \in End_{\mathbb{F}}\ W$, com V e W $\mathbb{F}$-espaços vetoriais de dimensão finita. Então,*

$$tr\ (T \otimes S) = tr\ T \cdot tr\ S.$$

Observação 2.6.15. Assim, se $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\sigma : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$ são representações de grau finito, temos que para $g \in G$

$$\chi_{\rho\otimes\sigma}(g) = tr\ ((\rho \otimes \sigma)(g)) = tr\ (\rho(g) \otimes \sigma(g)) = tr\ \rho(g) \cdot tr\ \sigma(g) = \chi_\rho(g) \cdot \chi_\sigma(g).$$

Ou seja,

$$\chi_{\rho\otimes\sigma} = \chi_\rho \cdot \chi_\sigma.$$

Chegamos no teorema principal sobre caracteres.

Teorema 2.6.16. *Todo caracter de um grupo G é uma soma de caracteres irredutíveis.*

Demonstração. Sejam V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão n, $\rho : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ uma representação linear, e, χ_ρ o seu caracter. Sendo ρ irredutível, temos que χ_ρ é também irredutível e terminamos a demonstração. Suponhamos então que ρ é redutível e tomemos um subespaço V_1 não nulo ρ-invariante de V de menor dimensão possível. Consideremos χ_{ρ_1} o caracter da subrepresentação ρ_{V_1}. Como ρ_{V_1} é irredutível (caso contrário teríamos um subespaço V_2 ρ_1-invariante (portanto, ρ-invariante) de dimensão menor do V_1), temos que χ_{ρ_1} é um caracter irredutível.

Tomando agora $r = \dim_{\mathbb{F}}\ V_1$, γ uma base de V_1 e $\beta = \gamma \cup \gamma_1$ uma base de V, temos

$$[\rho(g)]_\beta = \begin{pmatrix} B_1(g) & C(g) \\ 0 & B_2(g) \end{pmatrix},$$

onde $B_1(g)$ é um bloco $r \times r$, $C(g)$ é um bloco $r \times (n-r)$ e $B_2(g)$ é um bloco $(n-r) \times (n-r)$, para todo $g \in G$. Como ρ é uma representação, temos $[\rho(xy)]_\beta = [\rho(x)]_\beta[\rho(y)]_\beta$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} B_1(xy) & C(xy) \\ 0 & B_2(xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(x)B_1(y) & B_1(x)C(y) + C(x)B_2(y) \\ 0 & B_2(x)B_2(y) \end{pmatrix}.$$

Logo, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} B_2 : G & \to & GL_{n-r}\,(\mathbb{F}) \\ g & \mapsto & B_2(g) \end{array}$$

é uma representação linear de G e seu caracter é dado por $\chi_2(g) = tr\ B_2(g)$. Temos então

$$\chi(g) = tr\ B_1(g) + tr\ B_2(g) = \chi_{\rho_1}(g) + \chi_2(g).$$

Como B_2 é uma representação de grau menor do que n, temos por indução que χ_2 é uma soma de caracteres irredutíveis, o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 2.6.17. Sendo G um grupo finito, temos que o número de $\mathbb{F}$-caracteres irredutíveis de G é finito. Sendo $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ esses caracteres irredutíveis, segue do resultado anterior que dado χ um $\mathbb{F}$-caracter de G, existem $n_1, n_2, \ldots, n_m$ inteiros não negativos tais que

$$\chi = n_1\chi_1 + n_2\chi_2 + \cdots + n_m\chi_m.$$

Observemos que pelo menos um dos n_j's deve ser estritamente positivo.

Vamos agora ver três resultados que sob certas condições garantem-nos a unicidade dos n_j's. Deixamos a cargo do leitor a busca pelas demonstrações em [5] e [32].

Teorema 2.6.18 (*Relações de Ortogonalidade*)**.** *Sejam G um grupo finito e $\rho_1 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ V$ e $\rho_2 : G \to GL_{\mathbb{F}}\ W$ representações irredutíveis de G, com caracteres χ_1 e χ_2, respectivamente. Então:*

a) Se ρ_1 e ρ_2 são não equivalentes, então $\sum_{g\in G} \chi_2(g^{-1})\chi_1(g) = 0$.

b) Se $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado e char $\mathbb{F}$ não divide $|G|$, então $\sum_{g\in G} \chi_1(g^{-1})\chi_1(g) = |G|$.

c) Se $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, char $\mathbb{F}$ não divide $|G|$, e ρ_1 e ρ_2 são não equivalentes, então $\chi_1 \neq \chi_2$.

Corolário 2.6.19. *Sendo $\mathbb{F}$ um corpo de característica 0 e G um grupo finito, valem:*

a) Se η é um $\mathbb{F}$-caracter de G, então $\sum_{g\in G} \eta(g^{-1})\eta(g) = q|G|$ para algum inteiro positivo $q \in \mathbb{F}$.

b) Se η é um $\mathbb{F}$-caracter de G tal que $\sum\limits_{g\in G} \eta(g^{-1})\eta(g) = |G|$, então η é irredutível.

c) Caracteres de $\mathbb{F}$-representações irredutíveis e não equivalentes de G são distintos.

Terminamos esta seção com um teorema que nos garante a equivalência de representações lineares de um mesmo grupo por meio de igualdade dos caracteres para certos corpos.

Teorema 2.6.20. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica 0, então duas $\mathbb{F}$-representações lineares de um grupo G que têm o mesmo caracter são equivalentes.*

2.7 Representação do Grupo Simétrico S_n

Apresentaremos agora uma introdução à Teoria de Young sobre as representações lineares dos grupos simétricos. Tal teoria, desenvolvida, em sua maioria, por argumentos combinatórios, será muitas vezes apenas referenciada.

Por meio do provado na Seção 2.5 temos que $\mathbb{F}S_n$ é um $\mathbb{F}S_n$-módulo naturalmente e, portanto, um S_n-módulo com a restrição. Ainda, sabemos que a álgebra $\mathbb{F}S_n$ é decomposta em ideais minimais à esquerda. Explicitaremos tal decomposição, que é uma ferramenta essencial para a PI-Teoria e que usaremos a partir da Seção 3.3.

Começaremos com o conceito de partição de um número natural, uma vez que podemos indexar as classes de conjugação de S_n usando elementos de $Part_n$ (partições de $n \in \mathbb{N}$); seguiremos com os conceitos de diagrama e tableau (tabela) de Young, de onde construiremos os S_n-módulos irredutíveis, e, consequentemente, as representações irredutíveis do grupo S_n. Ainda, obteremos importantes propriedades dessas representações.

Durante toda esta seção $\mathbb{F}$ será um corpo de característica 0.

2.7.1 Partições

Falaremos brevemente de partições de um número natural, apontaremos sua relação com os diagramas de Young e exibiremos alguns exemplos.

Definição 2.7.1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma *partição* de n é uma sequência $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 1$, e que satisfaz $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = n$.

O número $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$ é chamado de *peso de* λ.

Chamaremos de *comprimento da partição* λ o número $l(\lambda) = r$.

Se λ é uma partição de n, denotaremos por $\lambda \vdash n$.

Definição 2.7.2. O conjunto de todas as partições de $n \in \mathbb{N}$ será denotado por $Part_n$.

Exemplo 2.7.3. $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1)$ é tal que: o seu peso é 12, $|\lambda| = 4+3+2+2+1 = 12$; e, seu comprimento é $l(\lambda) = 5$.

Assim, $\lambda \in Part_{12}$.

Definição 2.7.4. Se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, definiremos o *Diagrama de Young* associado à partição λ como o subconjunto finito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definido por

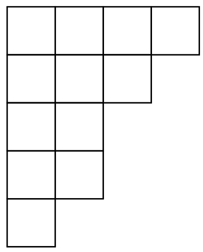
$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Costuma-se representar graficamente o Diagrama de Young da seguinte maneira: os pontos (i, j) serão substituídos por quadrados (portanto, temos exatamente n quadrados), onde a primeira coordenada i (índice das linhas) cresce de cima para baixo, e a segunda coordenada j (índice das colunas) cresce da esquerda para a direita.

De um modo geral, temos que o primeiro quadrado à esquerda de cada linha está um abaixo do outro, e, que a linha i possui λ_i quadrados.

Vejamos como se dá a representação gráfica de um Diagrama de Young para $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1) \vdash 12$ do exemplo anterior.

Exemplo 2.7.5. Seja $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1) \vdash 12$, temos

$D_{(4,3,2,2,1)} =$ 

Definição 2.7.6. Seja $\lambda \vdash n$. Consideremos λ'_j o comprimento da j-ésima coluna do Diagrama de Young associado a λ, D_λ. Dizemos que a partição $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)$ é a *partição conjugada* de λ.

Exemplo 2.7.7. Sendo $\lambda = (4, 3, 2, 2, 1)$, como antes, temos que $\lambda' = (5, 4, 2, 1)$ é a sua partição conjugada.

Definição 2.7.8. Consideremos $\lambda \vdash n$. Um *tableau de Young* é uma função

$$T_\lambda : D_\lambda \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\},$$

bijetora.

Podemos pensar em T_λ como sendo o preenchimento dos quadrados de D_λ pelos números naturais de 1 a n sem repetição. Denotaremos $T_\lambda = D_\lambda(T_\lambda(i, j))$, onde $T_\lambda(i, j)$ é o natural usado para preencher o quadrado (i, j).

Definição 2.7.9. O conjunto de todos os tableaux de uma partição λ será denotado por Tab_λ.

Observação 2.7.10. $|Tab_\lambda| = n!$ se $\lambda \vdash n$.

Definição 2.7.11. Dado $T_\lambda \in Tab_\lambda$ para $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, dizemos que T_λ é um *tableau de Young standard* se satisfaz:

i) $T_\lambda(i,j) < T_\lambda(i, j+1)$ para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq \lambda_i$;

ii) $T_\lambda(i,j) < T_\lambda(i+1, j)$ para $1 \leq j \leq \lambda_i$ e $1 \leq i \leq \lambda'_j$.

Em palavras, dizemos que um *tableau de Young* é *standard* quando os números presentes nos quadrados crescem em cada linha da esquerda para a direita, e em cada coluna de cima para baixo.

Definição 2.7.12. Indicaremos por Std_λ o conjunto dos tableaux de Young standard associados à partição $\lambda \vdash n$.

Exemplo 2.7.13. Seja $\lambda = (2,1) \vdash 3$, temos que

$$Tab_\lambda = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}.$$

Consideremos

$$T_{\lambda,2} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{e} \quad T_{\lambda,3} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

temos que $T_{\lambda,2}$ é um tableau de Young standard, enquanto que $T_{\lambda,3}$ não é.

Na verdade,

$$Std_\lambda = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}.$$

Definiremos agora uma ação do grupo simétrico S_n sobre $T_\lambda \in Tab_\lambda$, onde $\lambda \vdash n$.

Definição 2.7.14. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$ tal que $T_\lambda = D_\lambda(T_\lambda(i,j))$. Consideremos $\sigma \in S_n$. Definiremos então a ação da permutação no tableau por

$$\sigma T_\lambda = \sigma D_\lambda(T_\lambda(i,j)) = D_\lambda(\sigma(T_\lambda(i,j))).$$

Exemplo 2.7.15. Sejam $\sigma = (2496)(35)(78) \in S_9$, $\lambda = (4,2,2,1) \vdash 9$ e

$$T_{\lambda,1} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 7 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Temos,

$$\sigma T_{\lambda,1} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 5 & 9 \\ \hline 3 & 2 \\ \cline{1-2} 8 & 7 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \in Tab_\lambda.$$

Proposição 2.7.16. *Se $\sigma, \gamma \in S_n$, $\lambda \vdash n$ e $\sigma T_\lambda = \gamma T_\lambda$ para algum $T_\lambda \in Tab_\lambda$, então $\sigma = \lambda$.*

Demonstração. Por $T_\lambda \in Tab_\lambda$ temos que $T_\lambda : D_\lambda \to \{1, 2, \ldots, n\}$ é bijeção. Assim, consideremos sua inversa, ${T_\lambda}^{-1} : \{1, 2, \ldots, n\} \to D_\lambda$. Notemos que, $\sigma T_\lambda {T_\lambda}^{-1} = \gamma T_\lambda {T_\lambda}^{-1}$. Donde, chegamos em $\sigma = \gamma$. □

Observação 2.7.17. Deste modo, percebemos que $\sigma T_\lambda = T_\lambda$ se, e somente se, $\sigma = 1$. Além disso, dadas $T_{\lambda,1}, T_{\lambda,2} \in D_\lambda$, existe $\alpha \in S_n$ tal que $T_{\lambda,2} = \alpha T_{\lambda,1}$.

Definição 2.7.18. Consideremos $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ e T_λ um tableau de Young do diagrama D_λ. Definimos:

i) $R_i(T_\lambda) = \{T_\lambda(i,j) \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ a *i-ésima linha de T_λ*;

ii) $C_j(T_\lambda) = \{T_\lambda(i,j) \mid 1 \leq i \leq \lambda'_j\}$ a *j-ésima coluna de T_λ*.

Exemplo 2.7.19. Retornemos ao nosso exemplo acima em que $\lambda = (4, 2, 2, 1) \vdash 9$ e

$$T_{\lambda,1} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 7 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Temos: $R_1(T_{\lambda,1}) = \{1, 2, 3, 4\}$; $R_2(T_{\lambda,1}) = \{5, 6\}$; $R_3(T_{\lambda,1}) = \{7, 8\}$; $R_4(T_{\lambda,1}) = \{9\}$; $C_1(T_{\lambda,1}) = \{1, 5, 7, 9\}$; $C_2(T_{\lambda,1}) = \{2, 6, 8\}$; $C_3(T_{\lambda,1}) = \{3\}$ e $C_4(T_{\lambda,1}) = \{4\}$.

Definição 2.7.20. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$. Para $1 \leq i \leq l(\lambda)$, definimos o conjunto

$$S_{\lambda_i}(T_\lambda) = Sym\ R_i(T_\lambda) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma R_i(T_\lambda) = R_i(T_\lambda), \sigma = 1 \text{ nos demais elementos}\}.$$

E, para, $1 \leq j \leq l(\lambda')$,

$$S_{\lambda'_j}(T_\lambda) = Sym\ C_j(T_\lambda) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma C_j(T_\lambda) = C_j(T_\lambda), \sigma = 1 \text{ nos demais elementos}\}.$$

Exemplo 2.7.21. Novamente, sejam $\lambda = (4, 2, 2, 1) \vdash 9$, e

$$T_{\lambda,1} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 7 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Temos por exemplo que: $S_{\lambda_1}(T_{\lambda,1}) = Sym\ R_1(T_{\lambda,1}) = Sym\ \{1, 2, 3, 4\} \cong S_4$; $S_{\lambda_4}(T_{\lambda,1}) = Sym\ R_4(T_{\lambda,1}) = Sym\ \{9\} \cong S_1$; $S_{\lambda'_1}(T_{\lambda,1}) = Sym\ C_1(T_{\lambda,1}) = Sym\ \{1, 5, 7, 9\} \cong S_4$ e $S_{\lambda'_2}(T_{\lambda,1}) = Sym\ C_2(T_{\lambda,1}) = Sym\ \{2, 6, 8\} \cong S_3$.

Observação 2.7.22. i) $S_{\lambda_i}(T_\lambda)$ e $S_{\lambda'_j}(T_\lambda)$ são subgrupos de S_n, chamados de *subgrupos de Young*;

ii) Se $i \neq k$, temos que $R_i(T_\lambda)$ e $R_k(T_\lambda)$ são disjuntos. Portanto, se $\sigma \in S_{\lambda_i}(T_\lambda)$ e $\tau \in S_{\lambda_k}(T_\lambda)$, obtemos $\sigma\tau = \tau\sigma$.

iii) O item acima é válido para $C_j(T_\lambda)$ e $S_{\lambda'_j}(T_\lambda)$.

iv) $S_{\lambda_1}(T_\lambda)S_{\lambda_2}(T_\lambda)\dots S_{\lambda_r}(T_\lambda) \leq S_n$, pois dados $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_r \in S_{\lambda_1}(T_\lambda)S_{\lambda_2}(T_\lambda)\dots S_{\lambda_r}(T_\lambda)$ e $\tau_1\tau_2\dots\tau_r \in S_{\lambda_1}(T_\lambda)S_{\lambda_2}(T_\lambda)\dots S_{\lambda_r}(T_\lambda)$, temos

$$(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_r)(\tau_1\tau_2\dots\tau_r) = \sigma_1\sigma_2\dots\tau_1\sigma_r\tau_2\dots\tau_r = \sigma_1\sigma_2\dots\tau_1\sigma_{r-1}\tau_2\sigma_r\dots\tau_r$$

$$= \dots = (\sigma_1\tau_1)(\sigma_2\tau_2)\dots(\sigma_r\tau_r) \in S_{\lambda_1}(T_\lambda)S_{\lambda_2}(T_\lambda)\dots S_{\lambda_r}(T_\lambda).$$

Analogamente, $S_{\lambda'_1}(T_\lambda)S_{\lambda'_2}(T_\lambda)\dots S_{\lambda'_k}(T_\lambda) \leq S_n$.

Definição 2.7.23. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$. Definimos:

i) $R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(T_\lambda)S_{\lambda_2}(T_\lambda)\dots S_{\lambda_{l(\lambda)}}(T_\lambda)$, e chamamos de *grupo das linhas de* T_λ;

ii) $C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(T_\lambda)S_{\lambda'_2}(T_\lambda)\dots S_{\lambda'_{l(\lambda')}}(T_\lambda)$, e chamamos de *grupo das colunas de* T_λ.

Observação 2.7.24. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$. Se $\sigma \in R_{T_\lambda}$, então σT_λ e T_λ possuem as mesmas linhas (no sentido de comprimento e elementos). Analogamente, se $\sigma \in C_{T_\lambda}$. Ainda, para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\{k\} = R_i(T_\lambda) \cap C_j(T_\lambda)$ para certos i, j. Donde, sendo $\sigma \in R_{T_\lambda} \cap C_{T_\lambda}$, temos que $\sigma(k) \in R_i(T_\lambda) \cap C_j(T_\lambda) = \{k\}$, portanto, $\sigma(k) = k$ e $\sigma = 1$. Ou seja, $R_{T_\lambda} \cap C_{T_\lambda} = \{1\}$.

2.7.2 Relação entre S_n e $Part_n$

Iremos mostrar como podemos indicar as classes de conjugação de S_n usando os elementos de $Part_n$ por meio de uma correspondência biunívoca. Através desta correspondência, o Lema 2.5.8 e suas consequências ficam completamente determinados por elementos de $Part_n$.

Definição 2.7.25. Sejam $\sigma \in S_n$ e $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_r$ a sua decomposição em ciclos disjuntos (incluindo os 1-ciclos). Suponhamos que os ciclos $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ estejam ordenados em ordem decrescente de comprimento, digamos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ são os respectivos comprimentos de $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$. Então, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$, e esses números formam uma partição

$$\lambda(\sigma) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

de n. Chamaremos $\lambda(\sigma)$ de *tipo cíclico* da permutação $\sigma \in S_n$.

Observação 2.7.26. Observamos que como a decomposição de σ em ciclos é única, a menos de ordenação dos ciclos, temos que a partição $\lambda(\sigma)$ é unicamente determinada.

Explicitemos a relação acima observada e provemos que esta além de bem definida é sobrejetora.

Proposição 2.7.27. *A aplicação $f : S_n \to Part_n$ definida por $f(\sigma) = \lambda(\sigma)$ é sobrejetora.*

Demonstração. De fato, dado $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in Part_n$. Temos,

$$\{1, 2, \ldots, \lambda_1\} \sqcup \{\lambda_1+1, \ldots, \lambda_1+\lambda_2\} \sqcup \cdots \sqcup \{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{r-1}+1, \ldots, \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{r-1}+\lambda_r = |\lambda| = n\}$$

uma partição $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Consideremos

$$\sigma = (12\ldots\lambda_1)(\lambda_1+1\ldots\lambda_1+\lambda_2)\ldots(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{r-1}+1\ldots n) \in S_n.$$

Notemos que $f(\sigma) = \lambda(\sigma) = \lambda$ e assim terminamos a demonstração. □

Observação 2.7.28. Seja $(k_1k_2\ldots k_r)$ um ciclo em S_n. Para $\sigma \in S_n$, arbitrária, sejam $j_1 = \sigma(k_1), \ldots, j_r = \sigma(k_r)$. Temos,

$$\sigma(k_1k_2\ldots k_r)\sigma^{-1}(j_i) = \sigma(k_1k_2\ldots k_r)(k_i) = \begin{cases} \sigma(k_{i+1}), \text{ se } i < r \\ \sigma(k_1), \text{ se } i = r \end{cases} = \begin{cases} j_{i+1}, \text{ se } i < r \\ j_1, \text{ se } i = r \end{cases}.$$

Donde, $\sigma(k_1k_2\ldots k_r)\sigma^{-1}(x) = x, \ \forall\ x \neq j_i$.

Então, $\sigma(k_1k_2\ldots k_r)\sigma^{-1} = (j_1j_2\ldots j_r) = (\sigma(k_1)\sigma(k_2)\ldots\sigma(k_r))$.

Teorema 2.7.29. *Se σ e τ pertencem à mesma classe de conjugação, então $f(\sigma) = \lambda(\sigma) = \lambda(\tau) = f(\tau)$.*

Demonstração. Aplicação da observação acima. □

Observação 2.7.30. Se Cl é uma classe de conjugação de S_n, então para todo $\sigma, \tau \in Cl$, temos do teorema anterior que $f(\sigma) = \lambda(\sigma) = \lambda(\tau) = f(\tau)$.

Suponhamos agora que $f(\sigma) = \lambda(\sigma) = \lambda(\tau) = f(\tau)$ e que $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r$ e $\tau = \tau_1\tau_2\ldots\tau_r$ são as respectivas decomposições em ciclos disjuntos das permutações $\sigma \in S_n$ e $\tau \in S_n$.

Consideremos para $1 \leq i \leq r$:

$$\sigma_i = (k_1k_2\ldots k_m) \quad \text{e} \quad \tau_i = (l_1l_2\ldots l_m),$$

e formemos a permutação $\pi_i = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_m \end{pmatrix} \in S_n$.

Notamos que $\pi_i\sigma_i{\pi_i}^{-1} = (l_1l_2\ldots l_m) = \tau_i$ para todo $1 \leq i \leq r$.

Então, lembrando que para $\gamma \in S_n$, $supp\ \gamma = \{i \in \mathbb{N}_n \mid \gamma(i) \neq i\}$, temos que $supp\ \pi_i \cap supp\ \pi_j (= supp\ \sigma_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Donde, vemos que π_i comuta com π_j e com σ_j no caso $i \neq j$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \tau = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r &= (\pi_1\sigma_1{\pi_1}^{-1})(\pi_2\sigma_2{\pi_2}^{-1}) \dots (\pi_r\sigma_r{\pi_r}^{-1}) \\ &= \pi_1\pi_2 \dots \pi_r\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_r{\pi_r}^{-1}{\pi_{r-1}}^{-1} \dots {\pi_1}^{-1} \\ &= (\pi_1\pi_2 \dots \pi_r)\sigma(\pi_1\pi_2 \dots \pi_r)^{-1}. \end{aligned}$$

E assim, σ e τ estão na mesma classe de conjugação. E conseguimos $f|_{Cl} : Cl \to Part_n$ a restrição da f a uma classe de conjugção, Cl, de S_n é constante.

Por tudo o feito chegamos,

Teorema 2.7.31. *As classes de conjugação de S_n estão em correspondência biunívoca com $Part_n$. Consideremos $\sim$ a relação de conjugação em S_n, assim, $f : \frac{S_n}{\sim} \to Part_n$ é bijeção.*

Observação 2.7.32. Pelo teorema acima, vemos que podemos indexar as classes de conjugação de S_n usando os elementos de $Part_n$. E, em particular, que S_n possui exatamente $p(n) = |Part_n|$ classes de conjugação.

Observação 2.7.33. Sabemos que o número de partições de $n \in \mathbb{N}$ é dado assintoticamente por:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}.$$

E este é parte do trabalho desenvolvido, por volta de 1918, pelos matemáticos Hardy e Ramanujan envolvendo partições (*Hardy-Ramanujan Fórmula Assintótica para partição*).

2.7.3 Os $e_{T_\lambda}'s$

Nesta subseção, começamos a nos aproximar do nosso objetivo de decompor a álgebra $\mathbb{F}S_n$ em ideais minimais à esquerda. Para tanto apresentaremos os elementos $e_{T_\lambda}'s$ e mostraremos que estes são semi-idempotentes.

Definição 2.7.34. Para um subconjunto $H \subseteq S_n$ definimos os seguintes elementos da álgebra $\mathbb{F}S_n$:

$$H^+ = \sum_{\sigma \in H} \sigma \quad \text{e} \quad H^- = \sum_{\sigma \in H} sgn(\sigma)\sigma = \sum_{\sigma \in H} (-1)^\sigma \sigma.$$

Observação 2.7.35. Em particular, podemos aplicar a definição acima em R_{T_λ} e C_{T_λ} vistos em 2.7.23.

A seguir, apresentaremos um elemento de destaque em $\mathbb{F}S_n$.

Definição 2.7.36. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$. Definimos o *simetrizador de Young* como o elemento de $\mathbb{F}S_n$,

$$e_{T_\lambda} = R^+_{T_\lambda} C^-_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau.$$

Exemplo 2.7.37. Seja $\lambda \vdash 3$ e $T_{\lambda,2} \in Tab_\lambda$ definido como:

$$T_{\lambda,2} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Temos que,

$$R_1(T_{\lambda,2}) = \{1,3\}; R_2(T_{\lambda,2}) = \{2\}; \qquad C_1(T_{\lambda,2}) = \{1,2\}; C_2(T_{\lambda,2}) = \{3\};$$

$$S_{\lambda_1}(T_{\lambda,2}) = \{1,(13)\}; S_{\lambda_2}(T_{\lambda,2}) = \{1\}; \qquad S_{\lambda'_1}(T_{\lambda,2}) = \{1,(12)\}; S_{\lambda'_2}(T_{\lambda,2}) = \{1\};$$

$$R_{T_{\lambda,2}} = \{1,(13)\}. \qquad C_{T_{\lambda,2}} = \{1,(12)\}.$$

E, então,

$$e_{T_{\lambda,2}} = \sum_{\sigma \in R_{T_{\lambda,2}}} \sigma \sum_{\tau \in C_{T_{\lambda,2}}} (-1)^\tau \tau = (1+(13))(1-(12)) = 1-(12)+(13)-(13)(12).$$

Como poderíamos esperar temos o seguinte resultado:

Proposição 2.7.38. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$. Então,*

$$R_{T_\lambda}{}^+ = S_{\lambda_1}{}^+ S_{\lambda_2}{}^+ \dots S_{l(\lambda)}{}^+ \quad e \quad C_{T_\lambda}{}^- = S_{\lambda'_1}{}^- S_{\lambda'_2}{}^- \dots S_{\lambda'_{l(\lambda')}}{}^-.$$

Proposição 2.7.39. *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$ e $\sigma \in S_n$. Então,*

a) $R_{\sigma T_\lambda} = \sigma R_{T_\lambda} \sigma^{-1}$;

b) $C_{\sigma T_\lambda} = \sigma C_{T_\lambda} \sigma^{-1}$;

c) $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1}$;

d) Se $\tau \in C_{T_\lambda}$, *então* $C_{\tau T_\lambda} = C_{T_\lambda}$.

Demonstração. Demonstraremos apenas um dos itens. Os demais seguem por argumentos análogos a este.

a) Sabemos que se $(k_1 k_2 \dots k_m) \in S_n$, então

$$(\sigma(k_1)\sigma(k_2)\dots\sigma(k_m)) = \sigma(k_1 k_2 \dots k_m)\sigma^{-1}.$$

Um elemento típico de $R_{\sigma T_\lambda}$ é da forma $(\sigma(k_{11})\dots\sigma(k_{1r_1}))\dots(\sigma(k_{s1})\dots\sigma(k_{sr_s}))$, onde $(k_{11}\dots k_{1r_1})\dots(k_{s1}\dots k_{sr_s}) \in R_{T_\lambda}$. Assim,

$$\begin{aligned}(\sigma(k_{11})\dots\sigma(k_{1r_1}))\dots(\sigma(k_{s1})\dots\sigma(k_{sr_s})) &= \sigma(k_{11}\dots k_{1r_1})\sigma^{-1}\dots\sigma(k_{s1}\dots k_{sr_s})\sigma^{-1}\\ &= \sigma(k_{11}\dots k_{1r_1})\dots(k_{s1}\dots k_{sr_s})\sigma^{-1}\end{aligned}$$

Mas, $\sigma(k_{11}\dots k_{1r_1})\dots(k_{s1}\dots k_{sr_s})\sigma^{-1}$ é um elemento típico de $\sigma R_{T_\lambda}\sigma^{-1}$. Portanto, $R_{\sigma T_\lambda} = \sigma R_{T_\lambda}\sigma^{-1}$.

□

Definição 2.7.40. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$.

i) Dizemos que $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ são elementos *co-linha* em T_λ se estão na mesma linha de T_λ;

ii) Dizemos que $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ são elementos *co-coluna* em T_λ se estão na mesma coluna de T_λ.

Relacionemos elementos co-linha com co-colunas em um tableau de Young:

Proposição 2.7.41. *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$, $\sigma \in R_{T_\lambda}$ e $\tau \in C_{T_\lambda}$. Se $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ são co-linha em T_λ, então i e j não são co-coluna em $\sigma\tau T_\lambda$.*

Demonstração. Temos que $\sigma\tau T_\lambda = (\sigma\tau\sigma^{-1})\sigma T_\lambda$. Como $\sigma\tau\sigma^{-1} \in C_{\sigma T_\lambda}$ pelo visto na Proposição 2.7.39, e $R_i(T_\lambda) = R_i(\sigma T_\lambda)$, $\forall\, i$ (no sentido de mesmo comprimento e mesmos elementos), temos que os elementos que estão em colunas diferentes de T_λ permanecem em colunas diferentes de $\sigma\tau T_\lambda$. □

Com o intuito de chegarmos ao *Lema de Von Neumann*, importante para a caracterização dos $e_{T_\lambda}'s$, apresentaremos alguns lemas técnicos e deixaremos para o leitor interessado olhar as demonstrações em [32] ou ainda em [15] .

Lema 2.7.1. *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$ e $\rho \in S_n$. Suponhamos que T_λ e ρT_λ sejam tais que quaisquer i, j elementos co-linha não são elementos co-coluna em ρT_λ. Então, $\rho = \sigma\tau$ para $\sigma \in R_{T_\lambda}$ e $\tau \in C_{T_\lambda}$.*

Lema 2.7.2. *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$ e $\rho \notin R_{T_\lambda}C_{T_\lambda}$. Então, existem transposições $\sigma \in R_{T_\lambda}$ e $\tau \in C_{T_\lambda}$ tais que $\sigma\rho\tau = \rho$.*

Lema 2.7.3. *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$, $\sigma \in R_{T_\lambda}$ e $\tau \in C_{T_\lambda}$. Então, $\sigma e_{T_\lambda}\tau = (-1)^\tau e_{T_\lambda}$.*

Lema 2.7.4 (*Lema de Von Neumann*)**.** *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$. Suponhamos que $\alpha \in \mathbb{F}S_n$ seja tal que $\sigma\alpha\tau = (-1)^\tau\alpha$, $\forall\, \sigma \in R_{T_\lambda}$ e $\forall\, \tau \in C_{T_\lambda}$. Então, existe $\beta \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha = \beta e_{T_\lambda}$.*

Demonstração. Seja $\alpha = \sum_{\rho \in S_n} a_\rho \rho \in \mathbb{F}S_n$. Então,

$$\sigma\alpha\tau \;=\; \sum_{\rho \in S_n} a_\rho \sigma\rho\tau = \sum_{\eta \in S_n} a_{\sigma^{-1}\eta\tau^{-1}}\eta$$

e

$$(-1)^\tau \alpha \;=\; \sum_{\eta \in S_n} (-1)^\tau a_\eta \eta.$$

Logo,

$$a_{\sigma^{-1}\eta\tau^{-1}} = (-1)^\tau a_\eta, \forall\ \sigma \in R_{T_\lambda}, \tau \in C_{T_\lambda} \text{ e } \eta \in S_n,$$

o que implica em

$$a_{\sigma\eta\tau} = (-1)^{\tau^{-1}} a_\eta = (-1)^\tau a_\eta,\ \forall\ \sigma \in R_{T_\lambda}, \tau \in C_{T_\lambda} \text{ e } \eta \in S_n.$$

Tomando $\eta = 1$, $a_{\sigma\tau} = (-1)^\tau a_1, \forall\ \sigma \in R_{T_\lambda}, \forall\ \tau \in C_{T_\lambda}$.

Por outro lado, se $\eta \notin R_{T_\lambda}C_{T_\lambda}$, pelo Lema 2.7.2 existem transposições $\sigma \in R_{T_\lambda}$ e $\tau \in C_{T_\lambda}$ tais que $\sigma\eta\tau = \eta$, logo,

$$a_\eta = a_{\sigma\eta\tau} = (-1)^\tau a_\eta = -a_\eta.$$

Como *char* $\mathbb{F} = 0$, $a_\eta = 0$. Então, concluímos que,

$$a_\eta = \begin{cases} (-1)^\tau a_1, \text{ se } \sigma\tau \in R_{T_\lambda}C_{T_\lambda} \\ 0, \text{ se } \eta \notin R_{T_\lambda}C_{T_\lambda}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\alpha = \sum_{\eta \in S_n} a_\eta \eta = \sum_{\eta = \sigma\tau} (-1)^\tau a_1 \eta = a_1 \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (-1)^\tau \tau = a_1 e_{T_\lambda}.$$

Tomando $\beta = a_1$ concluímos a demonstração. □

Corolário 2.7.42. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$. Para todo $\alpha \in \mathbb{F}S_n$, existe $\beta \in \mathbb{F}$ tal que $e_{T_\lambda}\alpha e_{T_\lambda} = \beta e_{T_\lambda}$.*

Demonstração. Para todo $\alpha \in \mathbb{F}S_n$, $\tau_1 \in R_{T_\lambda}$, $\eta_1 \in C_{T_\lambda}$, temos:

$$\begin{aligned}
\tau_1(e_{T_\lambda}\alpha e_{T_\lambda})\eta_1 &= \tau_1\left(\sum_{\tau\in R_{T_\lambda}}\tau\sum_{\eta\in C_{T_\lambda}}(-1)^\eta\eta\right)\alpha\left(\sum_{\tau\in R_{T_\lambda}}\tau\sum_{\eta\in C_{T_\lambda}}(-1)^\eta\eta\right)\eta_1 \\
&= \left(\sum_{\tau\in R_{T_\lambda}}\tau_1\tau\sum_{\eta\in C_{T_\lambda}}(-1)^\eta\eta\right)\alpha\left(\sum_{\tau\in R_{T_\lambda}}\tau\sum_{\eta\in C_{T_\lambda}}(-1)^\eta\eta\eta_1\right) \\
&= (e_{T_\lambda})\alpha((-1)^{\eta_1}e_{T_\lambda}) \\
&= (-1)^{\eta_1}e_{T_\lambda}\alpha e_{T_\lambda}
\end{aligned}$$

Donde, pelo Lema de Von Neumann (2.7.4), existe $\beta \in \mathbb{F}$ tal que $e_{T_\lambda}\alpha e_{T_\lambda} = \beta e_{T_\lambda}$. □

Lema 2.7.5. *Seja* $\alpha = \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma \in \mathbb{F}S_n$, *com* $a_1 \neq 0$. *Então,* $\alpha^2 \neq 0$.

Demonstração. Definimos a transformação linear:

$$\begin{aligned}
r_\alpha : \mathbb{F}S_n &\to \mathbb{F}S_n \\
x &\mapsto x\alpha
\end{aligned}$$

Notemos que $r_\alpha = \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma r_\sigma$ e, portanto, $tr\ r_\alpha = \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma tr\ r_\sigma$.

Agora, vejamos:

- Se $\sigma = 1$, temos que, para todo $\xi \in S_n$, $r_1(\xi) = \xi$. Logo, os elementos da diagonal principal da matriz de r_1 são todos iguais a 1, donde, $tr\ r_1 = n!$;

- Se $\sigma \neq 1$, temos que, para todo $\xi \in S_n$, $r_\sigma(\xi) = \sigma\xi \neq \xi$. Logo, os elementos da diagonal principal da matriz de r_σ são todos iguais a 0, donde, $tr\ r_\sigma = 0$.

Desta maneira, $tr\ r_\alpha = a_1 n! \neq 0$.

Por outro lado, $tr\ r_\alpha$ é igual a soma dos autovalores de r_α multiplicado por suas respectivas multiplicidades. Portanto, r_α possui um autovalor γ no fecho algébrico de $\mathbb{F}$ não nulo associado a um autovetor $x \in \mathbb{F}S_n$. Donde,

$$x\alpha^2 = (r_\alpha)^2(x) = r_\alpha(r_\alpha(x)) = r_\alpha(\gamma x) = \gamma^2 x \neq 0.$$

Logo, $\alpha^2 \neq 0$. □

Terminaremos a subseção com uma caracterização importante para os ${e_{T_\lambda}}'s$.

Teorema 2.7.43. *Sejam* $\lambda \vdash n$ *e* $T_\lambda \in Tab_\lambda$. *O elemento* e_{T_λ} *é um semi-idempotente, isto é, existe um elemento* $\beta \in \mathbb{F}$ *não nulo tal que* ${e_{T_\lambda}}^2 = \beta e_{T_\lambda}$.

Demonstração. Sabemos pelo Corolário do Lema de Von Neumann (2.7.42) que existe $\beta \in \mathbb{F}$ tal que ${e_{T_\lambda}}^2 = \beta e_{T_\lambda}$. Ainda, escrevendo $e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma$, vemos que $a_1 = 1$, e, portanto, pelo lema anterior, ${e_{T_\lambda}}^2 \neq 0$, donde, $\beta \neq 0$. □

2.7.4 Os $M_{T_\lambda}{}'s$

Conseguiremos agora os nossos candidatos para S_n-módulos irredutíveis.

Definição 2.7.44. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Tab_\lambda$. Definimos:

$$M_{T_\lambda} = \mathbb{F}S_n e_{T_\lambda} = \{\alpha e_{T_\lambda} \mid \alpha \in \mathbb{F}S_n\}.$$

Observemos que M_{T_λ} é um ideal à esquerda de $\mathbb{F}S_n$ e, portanto, é um *submódulo de* $\mathbb{F}S_n$ (visto como S_n-módulo).

Consideremos M_λ o submódulo associado ao tableau standard da partição λ em que $T_\lambda(1,j) = j$, $T_\lambda(2,j) = \lambda_1 + j$, $T_\lambda(3,j) = \lambda_1 + \lambda_2 + j$ e assim sucessivamente.

Proposição 2.7.45. *Sejam $\lambda, \mu \vdash n$. Se $M_\lambda \cong M_\mu$, então $\lambda = \mu$.*

Demonstração. Consulte [32] ou [15]. □

Teorema 2.7.46. *Seja $\lambda \vdash n$.*

a) Para todo $T_\lambda \in Tab_\lambda$, M_{T_λ} é um S_n-módulo irredutível;

b) Para todo $T_{\lambda,1}, T_{\lambda,2} \in Tab_\lambda$, $M_{T_{\lambda,1}} \cong M_{T_{\lambda,2}}$ como $\mathbb{F}S_n$-módulos. Em particular, $M_{T_{\lambda,1}} \cong M_{T_{\lambda,2}} \cong M_\lambda$;

c) Todo S_n-módulo irredutível é equivalente a algum M_λ.

Demonstração. a) Seja $\beta \in \mathbb{F}$ não nulo tal que ${e_{T_\lambda}}^2 = \beta e_{T_\lambda}$, dado pelo teorema anterior. Definamos $E_{T_\lambda} = \frac{1}{\beta} e_{T_\lambda}$. Então, ${E_{T_\lambda}}^2 = \frac{1}{\beta^2} {e_{T_\lambda}}^2 = \frac{\beta}{\beta^2} e_{T_\lambda} = \frac{1}{\beta} e_{T_\lambda} = E_{T_\lambda}$. Ainda, $M_{T_\lambda} = \mathbb{F}S_n e_{T_\lambda} = \mathbb{F}S_n E_{T_\lambda}$.

Agora, suponhamos que $\varphi \in End_{\mathbb{F}S_n}\ M_{T_\lambda}$ (equivariante). Sendo $\varphi(E_{T_\lambda}) = \alpha E_{T_\lambda}$ para algum $\alpha \in \mathbb{F}S_n$, temos que

$$\alpha E_{T_\lambda} = \varphi(E_{T_\lambda}) = \varphi({E_{T_\lambda}}^2) = E_{T_\lambda}\varphi(E_{T_\lambda}) = E_{T_\lambda}\alpha E_{T_\lambda}.$$

Para $\sigma \in R_{T_\lambda}$ e $\tau \in C_{T_\lambda}$,

$$\sigma\varphi(E_{T_\lambda})\tau = \sigma E_{T_\lambda}\alpha E_{T_\lambda}\tau = (-1)^\tau E_{T_\lambda}\alpha E_{T_\lambda} = (-1)^\tau \varphi(E_{T_\lambda}).$$

Pelo Lema de Von Neumann (2.7.4), existe $\gamma \in \mathbb{F}$, tal que $\varphi(E_{T_\lambda}) = \gamma E_{T_\lambda}$. Portanto, $\varphi(x) = \varphi(\omega E_{T_\lambda}) = \omega\varphi(E_{T_\lambda}) = \omega\gamma E_{T_\lambda} = \gamma x$, $\forall x \in M_{T_\lambda}$, e assim, $\varphi = \gamma Id_{M_{T_\lambda}}$. Com isso,

$$End_{\mathbb{F}S_n}\ M_{T_\lambda} = \{\gamma Id_{M_{T_\lambda}} \mid \gamma \in \mathbb{F}\} \cong \mathbb{F}.$$

Suponhamos que N seja um submódulo de M_{T_λ}. Por Maschke, existe submódulo N' tal que $M_{T_\lambda} = N \oplus N'$. Definamos para $\alpha \in N$ e $\alpha' \in N'$,

$$\begin{aligned} \Phi : M_{T_\lambda} &\to M_{T_\lambda} \\ \alpha + \alpha' &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

Então, $\Phi^2 = \Phi$ e $\Phi \in End_{\mathbb{F}S_n}\ M_{T_\lambda} \cong \mathbb{F}$. Donde, $\Phi = 0$ ou $\Phi = Id_{M_{T_\lambda}}$. Portanto, $N = \{0_{M_{T_\lambda}}\}$ ou $N = M_{T_\lambda}$. E assim, segue que M_{T_λ} é irredutível.

b) Sejam $T_{\lambda,1}, T_{\lambda,2} \in Tab_\lambda$. Existe $\rho \in S_n$ tal que $T_{\lambda,1} = \rho T_{\lambda,2}$. Logo, $e_{T_{\lambda,1}} = e_{\rho T_{\lambda,2}} = \rho e_{T_{\lambda,2}} \rho^{-1}$ (vide Proposição 2.7.39).

Portanto,

$$M_{T_{\lambda,1}} = \mathbb{F}S_n e_{T_{\lambda,1}} = \mathbb{F}S_n \rho e_{T_{\lambda,2}} \rho^{-1} = \mathbb{F}S_n e_{T_{\lambda,2}} \rho^{-1} = M_{T_{\lambda,2}} \rho^{-1}$$

e assim $M_{T_{\lambda,1}} \cong M_{T_{\lambda,2}}$.

Em particular, $M_{T_\lambda} \cong M_\lambda$, $\forall\ T_\lambda \in Tab_\lambda$.

c) Pela proposição anterior, $\{M_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ forma um conjunto de módulos irredutíveis dois a dois inequivalentes, totalizando $p(n) = |Part_n|$ módulos.

Mas, $p(n)$ é igual ao número de classes de conjugação de S_n e para G finito arbitrário esse é o número máximo de módulos irredutíveis inequivalentes. Então, qualquer módulo irredutível para S_n deve ser isomorfo a algum dos M_λ dessa lista.

□

Corolário 2.7.47. *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$ e $\beta \in \mathbb{F}$ tal que $e_{T_\lambda}^2 = \beta e_{T_\lambda}$. Então,*

$$\dim_{\mathbb{F}}\ M_{T_\lambda} = \frac{n!}{\beta}.$$

Demonstração. Para $\alpha \in \mathbb{F}S_n$, consideremos

$$\begin{aligned} r_\alpha : M_{T_\lambda} &\to M_{T_\lambda} \\ x &\mapsto x\alpha \end{aligned}$$

Escrevamos $e_{T_\lambda} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma$, de modo que $a_1 = 1$. Como ${E_{T_\lambda}}^2 = E_{T_\lambda}$, temos que

$$\mathbb{F}S_n = \mathbb{F}S_n E_{T_\lambda} \oplus \mathbb{F}S_n (1 - E_{T_\lambda}).$$

Notemos que $r_{E_{T_\lambda}}$ anula $\mathbb{F}S_n(1 - E_{T_\lambda})$ e é a identidade em $\mathbb{F}S_n E_{T_\lambda} = M_{T_\lambda}$.

Logo, por um lado, $tr\ r_{E_{T_\lambda}} = \dim_{\mathbb{F}}\ M_{T_\lambda}$ e, por outro,

$$tr\ r_{\frac{1}{\beta}e_{T_\lambda}} = \frac{1}{\beta} tr\ r_{e_{T_\lambda}} = \frac{1}{\beta} a_1 n! = \frac{n!}{\beta}.$$

□

Lema 2.7.6. *Sejam $\lambda, \mu \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$, $T_\mu \in Tab_\mu$. Suponhamos que existam i, j elementos que são simultaneamente co-linha em T_μ e co-coluna em T_λ. Então, $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = 0$.*

Demonstração. [32] ou [15]. □

O exemplo a seguir mostra que podemos ter $e_{T_\mu} e_{T_\lambda} \neq 0$ nas condições do lema acima.

Exemplo 2.7.48. Sejam $\lambda = \mu = (2, 1) \vdash 3$ e

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$1, 2$ são co-linha em T_1 e co-coluna em T_2, temos pelo lema que $e_{T_2} e_{T_1} = 0$.
Mas,

$$R_{T_1} = \{1, (12)\} \qquad C_{T_1} = \{1, (13)\}$$

$$R_{T_2} = \{1, (23)\} \qquad C_{T_2} = \{1, (12)\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e_{T_1} e_{T_2} &= {R_{T_1}}^+ {C_{T_1}}^- {R_{T_2}}^+ {C_{T_2}}^- \\ &= (1 + (12))(1 - (13))(1 + (23))(1 - (12)) \\ &= 3((23) - (13) - (132) + (123)) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Definição 2.7.49. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots), \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) \vdash n$. Definiremos uma relação de ordem parcial $\trianglerighteq$ sobre os conjuntos das partições de n: diremos que $\lambda \trianglerighteq \mu$ se para todo $i \in \mathbb{N}$ tivermos $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$.

Tal ordem é conhecida como *ordem natural*.

Definição 2.7.50. Definiremos também uma ordem total, $\geq$, sobre os conjuntos das partições de n: Sejam $\lambda, \mu \vdash n$, diremos que $\lambda \geq \mu$ se $\lambda = \mu$, ou se existir $i \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_1 = \mu_1$; $\lambda_2 = \mu_2$; $\dots$; $\lambda_{i-1} = \mu_{i-1}$; $\lambda_i > \mu_i$.

Esta ordem é chamada de *ordem lexicográfica*.

Apresentaremos alguns resultados sem nos importarmos com as demonstrações, uma vez que podem ser encontrados em [32] ou [15], e que são pequenos passos para a grande conclusão da teoria a qual estamos interessados.

Lema 2.7.7. *Sejam $\lambda, \mu \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$ e $T_\mu \in Tab_\mu$. Suponhamos que T_λ, T_μ satisfaçam a seguinte condição:*

"Não existem elementos i, j que são simultaneamente co-linha em T_μ e co-coluna em T_λ."

Então, $\lambda \trianglerighteq \mu$.

Relacionemos as duas ordens:

Lema 2.7.8. *Sejam $\lambda, \mu \vdash n$. Se $\lambda \trianglerighteq \mu$, então $\lambda \geq \mu$.*

Proposição 2.7.51. *Sejam $\lambda, \mu \vdash n$ com $\lambda > \mu$. Se $T_\lambda \in Tab_\lambda$, $T_\mu \in Tab_\mu$, então $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = 0$. Ainda, se $\alpha \in \mathbb{F}S_n$, então $e_{T_\lambda} \alpha e_{T_\mu} = 0$.*

Proposição 2.7.52. *Sejam $\lambda, \mu \vdash n$, com $\mu > \lambda$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$ e $T_\mu \in Tab_\mu$. Então o único homomorfismo de $\mathbb{F}S_n$-módulos $\varphi : M_{T_\lambda} \to M_{T_\mu}$ é a aplicação nula. Em particular, $M_{T_\lambda} \ncong M_{T_\mu}$.*

Recapitulemos um pouco do até agora feito. Na Seção 3.5 vimos que o número de S_n-módulos irredutíveis inequivalentes sobre um corpo de característica zero é menor ou igual ao número de classes de conjugação de S_n, neste caso, o número de partições de n (Seção 2.7.2).

Porém, como vimos no decorrer desta subseção, cada $\lambda \vdash n$ dá origem a um S_n-módulo irredutível M_{T_λ} (Teorema 2.7.46). Ainda, vimos que partições distintas dão origem a módulos inequivalentes entre si (Proposições 2.7.45 e 2.7.52). Logo, os módulos M_{T_λ} são, a menos de isomorfismo, todos os módulos irredutíveis de S_n sobre um corpo de característica 0.

Continuemos nossos passos rumo à decomposição explícita de $\mathbb{F}S_n$ em componentes isotípicas, próxima proposição, porém em virtude de apenas utilizarmos o que esta nos diz e não as técnicas de sua demonstração, deixaremos para o leitor interessado a busca em [32] ou [15] ou [5].

Definição 2.7.53. Para $\lambda \vdash n$, definamos $I_\lambda = \sum\limits_{T_\lambda \in Tab_\lambda} M_{T_\lambda}$. Chamamos cada I_λ de *componente isotípica* de $\mathbb{F}S_n$.

Nas condições da definição anterior, temos:

Proposição 2.7.54. *a) I_λ é um ideal bilateral de $\mathbb{F}S_n$ igual a $\mathbb{F}S_n e_{T_\lambda} \mathbb{F}S_n$ para $T_\lambda \in Tab_\lambda$ arbitrário.*

b) $\mathbb{F}S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$ como soma direta de $\mathbb{F}$-álgebras simples. Ademais, essa decomposição é única e $I_\lambda \cong M_d(\mathbb{F})$ para algum $d \in \mathbb{N}$ e $\forall\ \lambda \vdash n$.

Retornemos nossa atenção aos tableaux standards, pois como veremos estes formam uma base para os M_{T_λ}'s sendo $\lambda \vdash n$ (já vimos que $M_{T_\lambda} \cong M_\lambda \in Std_\lambda$ - Teorema 2.7.46). Para tanto, continuemos a apresentar resultados sem demonstração que podem ser encontrados em [32], [15] e [5].

Definição 2.7.55. Sejam $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Dizemos que $(i_1, j_1) < (i_2, j_2)$ se $i_1 < i_2$, ou, $i_1 = i_2$ e $j_1 < j_2$. Esta ordem é a *ordem lexicográfica* em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Como para cada $\lambda \vdash n$ associamos um diagrama de Young $D_\lambda \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e cada $T_\lambda \in Tab_\lambda$ é um preenchimento de D_λ. Podemos usar tal ordem para compararmos os $T_\lambda{}'s$ em Tab_λ.

Definição 2.7.56. Se $T_{\lambda,1}, T_{\lambda,2} \in Tab_\lambda$, com $\lambda \vdash n$, dizemos $T_{\lambda,1} < T_{\lambda,2}$ se $T_{\lambda,1} \neq T_{\lambda,2}$ e $T_{\lambda,1}(i_0, j_0) < T_{\lambda,2}(i_0, j_0)$, onde $(i_0, j_0) = min\ \{(i, j) \in D_\lambda \mid T_{\lambda,1}(i, j) \neq T_{\lambda,2}(i, j)\}$.

Observação 2.7.57. Esta ordem é uma ordem total em Tab_λ, e, portanto, também o é em Std_λ.

Lema 2.7.9. *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_{\lambda,1}, T_{\lambda,2} \in Std_\lambda$ tais que $T_{\lambda,1} < T_{\lambda,2}$. Então, $e_{T_{\lambda,2}} e_{T_{\lambda,1}} = 0$.*

Lema 2.7.10. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_{\lambda,1}, T_{\lambda,2}, \ldots, T_{\lambda,m} \in Std_\lambda$. Então, a soma $M_{T_{\lambda,1}} + M_{T_{\lambda,2}} + \cdots + M_{T_{\lambda,m}} = \sum_{T_\lambda \in Std_\lambda} M_{T_\lambda}$ é direta.*

Teorema 2.7.58.

$$\sum_{\lambda \vdash n} (|Std_\lambda|)^2 = n!.$$

Demonstração. Esta demonstração segue do Algoritmo de Robinson-Schensted (ou RSK-algoritmo), e podemos encontrar no Capítulo 3 de [30]. □

Teorema 2.7.59. *Se $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Tab_\lambda$ e $\dim_{\mathbb{F}}\ M_{T_\lambda} = d_\lambda$. Então, $\dim_{\mathbb{F}}\ M_{T_\lambda} = d_\lambda = |Std_\lambda|$.*

Observação 2.7.60. Observemos o que teorema acima nos diz mais atentamente: Como cada M_{T_λ} é um S_n-módulo irredutível, o teorema nos garante que o grau da $\mathbb{F}$-representação irredutível de S_n correspondente à partição λ é exatamente o número de tableaux standards associados à λ.

Corolário 2.7.61. *A decomposição explícita de $\mathbb{F}S_n$ em ideais minimais à esquerda é dada por*

$$\mathbb{F}S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \left(\bigoplus_{T \in Std_\lambda} M_T \right).$$

Definição 2.7.62. Seja $\lambda \vdash n$. Consideremos $s = (i, j) \in D_\lambda$, definimos

i) $a(s) = \lambda_i - j$ como o *braço de s*;

ii) $l(s) = \lambda'_j - i$ como a *perna de s*;

iii) $h(s) = a(s) + l(s) + 1$ como o *gancho de s*;

iv) $h(\lambda) = \prod_{s \in D_\lambda} h(s)$ como o *produto dos ganchos*.

Exemplo 2.7.63. Consideremos $\lambda = (3, 2, 1) \vdash 6$. Preenchendo cada quadrado do diagrama com seus respectivos braços, pernas e ganchos, temos:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \cline{1-2} 0 \\ \cline{1-1}\end{array}\ ;\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \cline{1-2} 0 \\ \cline{1-1}\end{array}\ ;\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}\ .$$

Portanto, $h(\lambda) = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$.

Ainda, pelo Teorema 2.7.46, pelo Teorema 2.7.59 e pela Fórmula do Gancho 2.7.64, conseguimos para a partição λ acima:

$$\dim_{\mathbb{F}}\ M_\lambda = \frac{6!}{45} = 16.$$

Teorema 2.7.64 (*Fórmula do Gancho*)**.** *Seja $\lambda \vdash n$, temos*

$$|Std_\lambda| = \frac{n!}{h(\lambda)}.$$

Demonstração. Encontrada em [3]. □

Observação 2.7.65. Juntando a Fórmula do Gancho com o Teorema 2.7.59 vemos que $\dim_{\mathbb{F}}\ M_{T_\lambda} = \frac{n!}{h(\lambda)}$ para $\lambda \vdash n$. E, pelo já visto no Corolário 2.7.47, concluímos que $\frac{n!}{\beta} = \frac{n!}{h(\lambda)}$, donde, conseguimos $\beta = h(\lambda)$ (lembrando que β é múltiplo escalar da semi-idempotência de e_{T_λ}).

Definição 2.7.66. Sejam $\lambda \vdash n$ e $T_\lambda \in Std_\lambda$. Definimos $\sum\limits_{T_\lambda} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma T_\lambda \in Std_\lambda\}$.

Observação 2.7.67. Observemos que nas condições acima, $\sum\limits_{T_\lambda} \neq \emptyset$, pois $1 \in \sum\limits_{T_\lambda}$.

Proposição 2.7.68. *Sejam $\lambda \vdash n$, $T_\lambda \in Std_\lambda$, então $B_{T_\lambda} = \left\{\sigma e_{T_\lambda} \mid \sigma \in \sum\limits_{T_\lambda}\right\}$ é base para M_{T_λ}.*

Demonstração. Como $\left|\sum\limits_{T_\lambda}\right| = |Std_\lambda| = d_\lambda = \dim_{\mathbb{F}}\ M_{T_\lambda}$, basta mostrarmos que B_{T_λ} é L.I.

Consideremos $\sum\limits_{T_\lambda} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ de modo que $T_{\lambda,1} = \sigma_1 T_\lambda > T_{\lambda,2} = \sigma_2 T_\lambda > \cdots > T_{\lambda,m} = \sigma_m T_\lambda$. Temos $Std_\lambda = \{T_{\lambda,1}, \ldots, T_{\lambda,m}\}$, e assim $\dim_{\mathbb{F}}\ M_{T_\lambda} = |Std_\lambda| = m$.

Se $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ são tais que $a_1\sigma_1 e_{T_\lambda} + \cdots + a_m\sigma_m e_{T_\lambda} = 0$, então:

$$a_1\sigma_1 e_{T_\lambda} + \cdots + a_m\sigma_m e_{T_\lambda} = 0 \Rightarrow a_1\sigma_1({\sigma_1}^{-1} e_{T_{\lambda,1}}\sigma_1) + \cdots + a_m\sigma_m({\sigma_m}^{-1} e_{T_{\lambda,m}}\sigma_m) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 e_{T_{\lambda,1}}\sigma_1 + \cdots + a_m e_{T_{\lambda,m}}\sigma_m = 0.$$

Multiplicando a equação acima por $e_{T_{\lambda,1}}$ à esquerda conseguimos:

$$a_1 {e_{T_{\lambda,1}}}^2\sigma_1 + a_2 e_{T_{\lambda,1}} e_{T_{\lambda,2}}\sigma_2 + \cdots + a_m e_{T_{\lambda,1}} e_{T_{\lambda,m}}\sigma_m = 0.$$

Fazendo uso do Lema 2.7.9, obtemos $a_1 e_{T_{\lambda,1}}{}^2 \sigma_1 = 0$ e, portanto, $a_1 = 0$.

Repetindo o mesmo argumento, conseguimos demonstrar o que queríamos. $\square$

Recapitulemos um pouco do já falado (Proposição 2.7.54, Teorema 2.7.59 e Corolário 2.7.61), e adicionemos algumas informações que podem ser encontradas pelo leitor em [15], de modo a obtermos um teorema com um panorama geral dos fatos principais e que nos facilite posteriores referências.

Teorema 2.7.69. *i) Cada I_λ é ideal de $\mathbb{F}S_n$ ($I_\lambda = \mathbb{F}S_n e_{T_\lambda} \mathbb{F}S_n$);*

ii) $\mathbb{F}S_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$;

iii) $I_\lambda = \bigoplus_{T \in Std_\lambda} M_T$;

iv) $\dim_{\mathbb{F}} \ I_\lambda = {d_\lambda}^2$, em que $\dim_{\mathbb{F}} \ M_{T_\lambda} = d_\lambda$;

v) Existe $\{e_\lambda \mid \lambda \vdash n\} \subseteq \mathbb{F}S_n$, tal que ${e_\lambda}^2 = e_\lambda$, $e_\lambda e_\mu = 0$ ($\mu \neq \lambda$), $1 = \sum\limits_{\lambda \vdash n} e_\lambda$, $I_\lambda = \mathbb{F}S_n e_\lambda$, e e_λ é o elemento identidade da álgebra simples I_λ.

Terminemos esta seção com um exemplo aplicando a grande maioria dos resultados obtidos.

Exemplo 2.7.70. Encontremos as representações irredutíveis de S_4 considerando o corpo $\mathbb{F}$ tendo característica 0 e sendo algebricamente fechado.

Sabemos que o número de classes de conjugação de S_4 é o número de partições de 4 (Observação 2.7.32). Como $p(4) = 5$ ($Part_n = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\}$), temos que o número de classes de conjugação de S_4 é 5.

Passando o quociente de S_n pela relação de conjugação temos, por exemplo, os seguintes representantes das classes:

$$\{(1234), (123)(4), (12)(34), (1)(2)(3)(4)\}.$$

Associemos a cada partição o seu diagrama de Young e calculemos os seus ganchos preenchendo o diagrama:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}\ ;\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}\ ;\ \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}\ ;\ \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}\ \text{ e }\ \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}.$$

Usando a Fórmula do Gancho 2.7.64 e o Teorema 2.7.59, temos que:

$$d_{(4)} = \frac{4!}{4!} = 1; d_{(3,1)} = \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3; d_{(2,2)} = \frac{4!}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 2;$$

$$d_{(2,1,1)} = \frac{4!}{4 \cdot 2} = 3 \text{ e } d_{(1,1,1,1)} = \frac{4!}{4!} = 1.$$

Notemos que $1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 = 24 = 4! = |S_n|$, como deveria ser pelo Teorema 2.5.34.

Calculemos agora dois dos M_λ para $\lambda \vdash 4$:

- Para $\lambda = (4) \vdash 4$, temos

$$Std_\lambda = \left\{ T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline\end{array} \right\}.$$

Donde, $R_{T_1} = S_4$, $C_{T_1} = \{1\}$ e, portanto, $e_{T_1} = {R_{T_1}}^+ {C_{T_1}}^- = \sum\limits_{\sigma \in S_4} \sigma$. E, então, $\forall\ \tau \in S_4, \tau e_{T_1} = e_{T_1}$ (Proposição 2.7.68).

Assim, $M_{T_1} = M_\lambda = \mathbb{F}S_4 e_{T_1} = \mathbb{F}e_{T_1}$ é a representação trivial irredutível.

- Para $\lambda = (3, 1)$, temos

$$Std_\lambda = \left\{ T_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ;\ T_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ ;\ T_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}.$$

Donde, pelo Teorema 2.7.46, podemos apenas nos preocupar com os cálculos para T_1, já que os demais M_{T_λ} são isomorfos como $\mathbb{F}S_n$-módulos a este. E assim $R_{T_1} = S_3$, $C_{T_1} = S_2$ (agindo em $\{1, 4\}$), portanto,

$$e_{T_1} = {R_{T_1}}^+ {C_{T_1}}^- = (1 + (12) + (13) + (23) + (123) + (132))(1 - (14))$$

$$= 1-(14)+(12)-(12)(14)+(13)-(13)(14)+(23)-(23)(14)+(123)-(123)(14)+(132)-(132)(14)$$

$$= 1-(14)+(12)-(142)+(13)-(143)+(23)-(23)(14)+(123)-(1423)+(132)-(1432)$$

$$= 1+(12)+(13)-(14)+(23)-(14)(23)+(123)+(132)-(142)-(143)-(1423)-(1432).$$

Observemos que

$$1 \cdot T_1 = T_1 \in Std_\lambda;$$

$$(34) \cdot T_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} = T_2 \in Std_\lambda;$$

$$(234) \cdot T_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} = T_3 \in Std_\lambda.$$

E estas são as únicas permutações de S_4 que quando aplicadas em T_1 permanecem neste Std_λ. Logo, da definição de $\sum\limits_{T_1}$ (2.7.66), temos que $\sum\limits_{T_1} = \{1, (34), (234)\}$. Assim, $B_{T_1} = \{e_{T_1}, (34)e_{T_1}, (234)e_{T_1}\}$ é base de $M_{T_1} = M_\lambda \cong M_{T_2} \cong M_{T_3} \cong M_{T_{(3,1)}}$ (vide 2.7.68).

Portanto, M_{T_1} é representação de grau 3 irredutível.

Por fim, ao calcularmos os M_λ para $\lambda \vdash 4$, onde M_λ está associada ao tableau standard especial (Definição 2.7.44), conseguimos todas as representações irredutíveis de S_4 (vide parágrafos acima da Definição 2.7.53).

Capítulo 3

Identidades Polinomiais

Trabalharemos neste capítulo introduzindo o conceito de Identidades Polinomiais de uma álgebra e exemplicando-o (Seção 3.1); exibindo alguns dos resultados mais importantes de PI-Teoria (Seção 3.2); relacionando a Teoria de Representações com a PI-Teoria (Seção 3.3); e, por fim, falando de Identidades Polinomiais Graduadas de uma álgebra G-graduada e relacionando estas às Identidades Polinomias não Graduadas (que chamaremos de ordinárias) da mesma álgebra (Seção 3.4).

3.1 Definições e Exemplos

Definição 3.1.1. Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é uma *identidade polinomial* (ou simplesmente identidade) de uma $\mathbb{F}$-álgebra A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \forall\, a_1, \ldots, a_n \in A$. Neste caso também dizemos que A *satisfaz* f.

Como toda álgebra A satisfaz $f = 0$, chegamos à definição:

Definição 3.1.2. Se um polinômio não-nulo é uma identidade polinomial de A, então A é chamada de *PI-álgebra*.

O exemplo a seguir sugere que a noção de procurar uma identidade polinomial é uma generalização de comutatividade.

Exemplo 3.1.3. Toda álgebra comutativa é uma PI-álgebra, pois satisfaz $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.

Para justificarmos o próximo exemplo atentemo-nos ao seguinte lema:

Lema 3.1.1. *Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra e sejam $a_1, \ldots, a_n \in A$ elementos linearmente dependentes. Se um polinômio multilinear $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ é alternante em $x_1, \ldots, x_n$ então $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_r) = 0, \forall\, b_1, \ldots, b_r \in A$.*

Demonstração. Podemos supor que $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i$ para alguns $\lambda_i's \in \mathbb{F}$. Assim,

$$\begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_r) &= f\left(a_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i, b_1, \ldots, b_r\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f(a_1, \ldots, a_i, b_1, \ldots, b_r) = 0, \end{aligned}$$

pois $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_i, b_1, \ldots, b_r) = 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$. □

Exemplo 3.1.4. Toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra. Se $\dim_{\mathbb{F}} A = d$, então todo polinômio multilinear que é alternante em $d+1$ indeterminadas é uma identidade de A, como pode ser visto pelo lema acima.

Em particular, A satisfaz s_{d+1}.

Observação 3.1.5. Pelo exemplo anterior concluímos que $M_n(\mathbb{F})$ é uma PI-álgebra, e que satisfaz s_{n^2+1}.

Exemplo 3.1.6. Toda álgebra nilpotente é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade $x_1 \ldots x_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Em particular, $\mathcal{N}_m(\mathbb{F})$ (Exemplo 1.2.24) é uma PI-álgebra.

Exemplo 3.1.7. Consideremos $UT_2(\mathbb{F})$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 com entradas em um corpo $\mathbb{F}$ (o produto desta álgebra é o induzido da álgebra de matrizes). Notemos que, para $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da & db + ec \\ 0 & fc \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} ad & ae + bf \\ 0 & cf \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} da & db + ec \\ 0 & fc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ae + bf - db - ec \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, $[A, B]$ com $A, B \in UT_2(\mathbb{F})$, pertence a $\mathcal{N}_2(\mathbb{F})$. Pelo exemplo anterior sabemos que $\mathcal{N}_2(\mathbb{F})$ é PI-álgebra e satisfaz $x_1 x_2$, portanto, $UT_2(\mathbb{F})$ satisfaz $[x_1, y_1][x_2, y_2]$.

De um modo mais geral, temos que $UT_n(C)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ com entradas em uma álgebra comutativa C, satisfaz $[x_1, y_1] \ldots [x_n, y_n]$.

Exemplo 3.1.8. Seja E a álgebra de Grassmann definida no Exemplo 1.2.7. Notemos que o comutador $[x, y]$ de quaisquer dois elementos $x, y \in E$ pertence a E_0. Ora, basta verificarmos para dois elementos básicos, $x = e_{i_1} \ldots e_{i_n}$ e $y = e_{j_1} \ldots e_{j_m}$. Como vimos, $ax = xa$ para qualquer que seja $x \in E$ e $a \in E_0$, portanto, $[x, y]$ é não-nulo apenas quando n e m são ímpares, isto é, $x, y \in E_1$. Mas, ainda neste caso $xy \in E_0$ e $yx \in E_0$ (ímpar

+ ímpar = par), ou seja, $[x,y] \in E_0$. Logo, E é uma PI-álgebra e satisfaz a identidade $[[x_1,x_2],x_3]$.

Observação 3.1.9. Se f é uma identidade da álgebra A, então f é também uma identidade de qualquer subálgebra de A.

Constuíremos agora novas PI-álgebras a partir de PI-álgebras já conhecidas.

Exemplo 3.1.10. Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras e A é uma PI-álgebra, então $\varphi(A)$ é uma PI-álgebra. Ora, se $f(x_1,\ldots,x_n)$ é identidade polinomial de A, digamos

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \lambda_1 x_{i_{1_1}} x_{i_{1_2}} \ldots x_{i_{1_{r_1}}} + \cdots + \lambda_s x_{i_{s_1}} x_{i_{s_2}} \ldots x_{i_{s_{r_s}}},\ \lambda_j \in \mathbb{F}\ (1 \le j \le s),$$

$$1 \le i_{j_l} \le n\ (1 \le l \le r_j).$$

Temos,

$$\begin{aligned} f(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n)) &= \lambda_1 \varphi(a_{i_{1_1}})\varphi(a_{i_{1_2}})\ldots\varphi(a_{i_{1_{r_1}}}) + \cdots + \lambda_s \varphi(a_{i_{s_1}})\varphi(a_{i_{s_2}})\ldots\varphi(a_{i_{s_{r_s}}}) \\ &= \varphi(\lambda_1 a_{i_{1_1}} \ldots a_{i_{1_{r_1}}} + \cdots + \lambda_s a_{i_{s_1}} \ldots a_{i_{s_{r_s}}}) \\ &= \varphi(f(a_1,\ldots,a_n)) = \varphi(0) = 0, \forall a_1, a_2, \ldots a_n \in A. \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(A)$ satisfaz f.

A fim de mostrarmos que não são todas as álgebras PI-álgebras, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.11. A álgebra livre $\mathbb{F}\langle X\rangle$ não é PI-álgebra.

Continuaremos esta seção apresentando conceitos, resultado e exemplo concernentes a um dos principais ramos de pesquisa em PI-Teoria.

Definição 3.1.12. Chamaremos de $Id(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de A.

Proposição 3.1.13. *Se A é uma álgebra então $Id(A)$ é um T-ideal.*

Demonstração. Uma computação direta mostra que $Id(A)$ é um ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

A fim de mostrarmos que $Id(A)$ é um T-ideal, faremos uso da Observação 1.2.97. Assim, sejam $g(x_1,\ldots,x_n) \in Id(A)$, $g_1(x_{1_1},\ldots,x_{1_{r_1}}),\ldots,g_n(x_{n_1},\ldots,x_{n_{r_n}}) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ e, para $j=1,\ldots,n$, sejam $a_{j_1},\ldots,a_{j_{r_n}} \in A$. Como $b_j := g_j(a_{j_1},\ldots,a_{j_{r_j}}) \in A$, então

$$f(g_1(a_{1_1},\ldots,a_{1_{r_1}}),\ldots,g_n(a_{n_1},\ldots,a_{n_{r_n}})) = f(b_1,\ldots,b_n) = 0.$$

Logo, $f(g_1,\ldots,g_n) \in Id(A)$. E por $f, g_1, \ldots, g_n$ serem quaisquer, temos que $Id(A)$ é um T-ideal. □

Exemplo 3.1.14. Para álgebra de Grassmann E sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica 0, $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2], x_3] \in Id(E)$, como podemos perceber a partir da observação sobre E_0 já feita no Exemplo 1.2.7.

Definição 3.1.15. Se A é uma $\mathbb{F}$-álgebra e $S \subseteq Id(A)$ é tal que $Id(A) = \langle S \rangle^T$ (veja Definição 1.2.98), dizemos que *S é uma base das identidades de A*. Se um polinômio $f \in \langle S \rangle^T$, dizemos que *$f$ é consequência de S*.

Para terminarmos esta seção, apresentaremos duas sequências númericas para uma certa álgebra A, $c_n(A)$ e $l_n(A)$, com $n \in \mathbb{N}$, chamadas, respectivamente, de *sequência de codimensões de A* e *sequência de cocomprimentos de A*. Ambas são usadas, de certo modo, para medirem as identidades polinomiais que A satisfaz. Para tanto, trabalharemos com os espaços P_n.

Definição 3.1.16. $P_n \cap Id(A)$ é o conjunto de todas as identidades polinomiais multilineares da álgebra A.

Proposição 3.1.17. *$P_n \cap Id(A)$ é um $\mathbb{F}S_n$-submódulo de P_n.*

Demonstração. Notemos que $0 \in P_n \cap Id(A)$, mostrando que $P_n \cap Id(A) \neq \emptyset$. Ainda, se $f, g \in P_n \cap Id(A)$, então claramente $f - g \in P_n \cap Id(A)$. Ou seja, $P_n \cap Id(A)$ é um subgrupo aditivo.

Lembremos que um T-ideal é invariante por permutação (Proposição 1.2.100). Assim,

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in P_n \cap Id(A),$$

para todo $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n \cap Id(A)$ e $\sum\limits_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma \in \mathbb{F}S_n$. Logo, $P_n \cap Id(A)$ é um $\mathbb{F}S_n$-submódulo de P_n. $\square$

Pensemos no quociente dos seguintes espaços vetoriais P_n por $P_n \cap Id(A)$ e definamos:

Definição 3.1.18. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}.$$

Podemos ver $P_n(A)$ como o "subespaço" vetorial de P_n que contem todas as não-identidades polinomiais multilineares da $\mathbb{F}$-álgebra A.

Observação 3.1.19. Temos como consequência do já feito e lembrando resultados de módulos ([16]), que o espaço quociente $P_n(A)$ para $n \in \mathbb{N}$ é um $\mathbb{F}S_n$-módulo.

Ainda trabalhando com este quociente, e lembrando do caracter de uma representação, Seção 2.6 do Capítulo 2, chegamos à:

Definição 3.1.20. Com $n \in \mathbb{N}$, o caracter de S_n associado à representação de $P_n(A)$ $\chi_n(A)$ é chamado de *n-ésimo cocaracter de A*.

Pela Teoria de Representação expressa no capítulo anterior, sabemos que

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n-caracter irredutível associado à $\lambda \vdash n$, e $m_\lambda \geq 0$ é a multiplicidade correspondente.

Por fim, chegamos às tais sequências mencionadas:

Definição 3.1.21. Sendo A uma $\mathbb{F}$-álgebra e considerando o $\mathbb{F}S_n$-módulo quociente acima, definimos como *a n-ésima codimensão de A*,

$$c_n(A) = \dim_{\mathbb{F}} \ P_n(A).$$

Definição 3.1.22. Para $n \in \mathbb{N}$, chamamos o número

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda,$$

de *n-ésimo cocomprimento de A*, onde m_λ é a multiplicidade associada ao caracter irredutível χ_λ da decomposição de $\chi_n(A)$ visto anteriormente.

3.2 Resultados importantes de PI-álgebras

Discutiremos agora, brevemente, alguns resultados importantes da Teoria de PI-álgebras.

Comecemos com um resultado que nos permite tornar quaisquer identidades polinomiais de uma álgebra em elementos do espaço P_n dos polinômios multilineares.

Teorema 3.2.1. *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial não-nula, então A também satisfaz uma identidade multilinear não-nula de mesmo ou menor grau.*

Demonstração. Vide [6]. □

A demonstração acima contempla *o processo de multilinearização* que mostraremos por meio do exemplo a seguir.

Exemplo 3.2.2. Seja A uma álgebra que satisfaz $f(x) = x^3$. Definamos dois novos polinômios, $g = g(x_1, x_2)$ e $h = h(x_1, x_2, x_3)$, por:

$$g := f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2),$$

$$h := g(x_1, x_2 + x_3) - g(x_1, x_2) - g(x_1, x_3).$$

Notemos que h pode ser escrito em função de f

$$\begin{aligned} h &= f(x_1+(x_2+x_3)) - f(x_1) - f(x_2+x_3) - f(x_1+x_2) + f(x_1) + f(x_2) - f(x_1+x_3) \\ &\quad + f(x_1) + f(x_3) \\ &= f(x_1+(x_2+x_3)) - f(x_2+x_3) - f(x_1+x_2) + f(x_2) - f(x_1+x_3) + f(x_1) + f(x_3). \end{aligned}$$

Agora, fazendo os cálculos explícitos, temos

$$\begin{aligned} g &= (x_1+x_2)^3 - {x_1}^3 - {x_2}^3 \\ &= x_1{x_2}^2 + x_2x_1x_2 + {x_2}^2x_1 + {x_1}^2x_2 + x_1x_2x_1 + x_2{x_1}^2 \end{aligned}$$

Usando o cálculo de g, retornamos a h e conseguimos

$$\begin{aligned} h &= x_1(x_2+x_3)^2 + (x_2+x_3)x_1(x_2+x_3) + (x_2+x_3)^2x_1 + {x_1}^2(x_2+x_3) + x_1(x_2+x_3)x_1 + \\ &\quad + (x_2+x_3){x_1}^2 - x_1{x_2}^2 - x_2x_1x_2 - {x_2}^2x_1 - {x_1}^2x_2 - x_1x_2x_1 - x_2{x_1}^2 - x_1{x_3}^2 - x_3x_1x_3 - \\ &\quad - {x_3}^2x_1 - {x_1}^2x_3 - x_1x_3x_1 - x_3{x_1}^2 \\ &= x_1x_2x_3 + x_1x_3x_2 + x_2x_1x_3 + x_3x_1x_2 + x_2x_3x_1 + x_3x_2x_1, \end{aligned}$$

ou seja, h é multilinear em x_1, x_2 e x_3.

Como A satisfaz f, A também satisfaz h (pode ser dada em função de f, estando em $\langle f \rangle^T$ como vimos). Conseguimos uma identidade polinomial para a álgebra A ao custo de aumentarmos o número de indeterminadas.

Lembrando que dois conjuntos de polinômios são equivalentes se geram o mesmo T-ideal, atentemo-nos ao próximo resultado que pode ser melhor encontrado em [14]:

Teorema 3.2.3. *Seja*

$$f = f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in \mathbb{F}\langle X \rangle,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1 e n é o grau de f em x_1.

i) Se o corpo $\mathbb{F}$ possui mais que n elementos, então $\{f\}$ e $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ são equivalentes.

ii) Se o corpo $\mathbb{F}$ é de característica 0, então $\{f\}$ é equivalente a um conjunto (finito) de polinômios multilineares.

Este nos diz que, quando o corpo $\mathbb{F}$ é de característica 0, a nossa busca por identidades polinomiais de uma álgebra A pode se restringir ao espaço P_n dos polinômios multilineares.

Passemos agora a contemplar o grande resultado obtido em 1950 por S. A. Amitsur e J. Levitzki, no artigo *Minimal identities for algebras*, [1]. Como já vimos, a álgebra de matrizes $M_n(\mathbb{F})$ tem dimensão n^2 e, portanto, satisfaz s_{n^2+1} (Observação do Exemplo 3.1.4). Tentando descobrir o grau mínimo de uma identidade não-nula para $M_n(\mathbb{F})$, eles chegaram ao:

Teorema 3.2.4 (*Teorema de Amitsur-Levitzki*)**.** *O polinômio standard s_{2n} é uma identidade de $M_n(C)$ para toda álgebra comutativa C.*

Em [6] temos a validade do seguinte lema:

Lema 3.2.1. *Um polinômio não-nulo de grau menor do que $2n$ não é uma identidade de $M_n(\mathbb{F})$.*

Assim, usando os dois resultados acima, teorema e lema, concluímos que o grau mínimo de uma identidade polinomial não-nula para $M_n(\mathbb{F})$ é $2n$.

Neste momento, fazendo uso dos *Teoremas de Poincaré-Birkhoff-Witt* e de *Witt*([9]), vemos como ordenar adequamente polinômios multilineares. Isto é, conseguimos escrever qualquer polinômio multilinear f de grau n como combinação linear sobre $\mathbb{F}$ de polinômios do tipo

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} c_1 \dots c_s,$$

com $i_1 < \cdots < i_k$, e $c_1, \dots, c_s$ comutadores de comprimento arbitrário nas demais variáveis $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$, onde $k + r = n$.

Terminemos a seção falando de um resultado que é consequência de um teorema de Kemer ([20]) e que engloba as sequências de codimensões de uma álgebra A. Para tanto, sobre um corpo de característica zero, lembremos que $Id(UT_n) = \langle [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n] \rangle^T$ e $Id(E) = \langle [[x_1, x_2], x_3] \rangle^T$.

Teorema 3.2.5. *Se A é uma álgebra sobre um corpo de característica zero, então $c_n(A)$ é limitada polinomialmente se, e somente se, $Id(A) \nsubseteq Id(UT_2)$ e $Id(A) \nsubseteq Id(E)$, onde E é álgebra de Grassmann de dimensão infinita.*

3.3 Teoria de Representações e PI-Teoria: Como relacioná-las?

Destinamos esta seção para relacionarmos a Teoria de Representações e a PI-Teoria que já foram explanadas nos Capítulos 2 e 3. Pretendemos agora justificar a importância de tudo anteriormente feito.

Comecemos então mostrando um isomorfismo entre $\mathbb{F}S_n$ e P_n como $\mathbb{F}S_n$-módulos, o qual nos permitirá escrevermos explicitamente P_n como soma de ideais, quando $\mathbb{F}$ é um corpo de característica zero e algebricamente fechado.

Proposição 3.3.1. *P_n e $\mathbb{F}S_n$ são isomorfos como $\mathbb{F}S_n$-módulos.*

Demonstração. De fato, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{F}S_n &\rightarrow P_n \\ \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma \sigma &\mapsto \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Uma computação direta mostra que φ é um homomorfismo de $\mathbb{F}S_n$-módulos.

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \ker\ \varphi &= \left\{ \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma \in \mathbb{F}S_n \mid \varphi\left(\sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma\right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma \in \mathbb{F}S_n \mid \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)} = \sum_{\rho\in S_n} 0 x_{\rho(1)}\dots x_{\rho(n)} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma \in \mathbb{F}S_n \mid a_\sigma = 0,\ \forall\ \sigma\in S_n \right\} = \{0\} \end{aligned}$$

e assim φ é injetora.

Finalmente, dado $f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)} \in P_n$, tomemos $\sum_{\sigma\in S_n}\lambda_\sigma\sigma \in \mathbb{F}S_n$ e notemos que

$$\varphi\left(\sum_{\sigma\in S_n}\lambda_\sigma\sigma\right) = \sum_{\sigma\in S_n}\lambda_\sigma x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)}.$$

Desta forma, φ é sobrejetora. Assim, concluímos que φ é um isomorfismo de $\mathbb{F}S_n$-módulos. $\square$

Diante deste isomorfismo, podemos tratar elementos de $\mathbb{F}S_n$ como polinônios em P_n e vice-versa.

Sabemos que, nas condições de corpo consideradas, $\mathbb{F}S_n = \bigoplus_{\lambda\vdash n} I_\lambda$ como soma direta de $\mathbb{F}$-álgebras simples, $I_\lambda = M_\lambda\oplus\cdots\oplus M_\lambda$, $M_\lambda = \mathbb{F}S_n e_T$ com $T\in Std_\lambda$ - especial (Proposição 2.7.54, Teorema 2.7.46, Definição 2.7.44 e Lema 2.7.10). Ademais, essa decomposição é única e $I_\lambda \cong M_d\ (\mathbb{F})$ para algum $d\in\mathbb{N}$, $\forall\ \lambda\vdash n$, I_λ é uma componente isotípica de $\mathbb{F}S_n$ (Proposição 2.7.54).

Também, pelo Teorema 2.7.59 e Lema 2.7.10, temos que $\dim_{\mathbb{F}}\ I_\lambda = {d_\lambda}^2$ onde $d_\lambda = \dim_{\mathbb{F}}\ M_\lambda = |Std_\lambda|$ e, consequentemente, $I_\lambda = \bigoplus_{T_\lambda\in Std_\lambda} M_{T_\lambda}$ (Corolário 2.7.61).

Portanto,

$$P_n = \varphi(\mathbb{F}S_n) = \varphi\left(\bigoplus_{\lambda\vdash n} I_\lambda\right) = \bigoplus_{\lambda\vdash n}\varphi(I_\lambda).$$

E, lembrando que φ é um isomorfismo de $\mathbb{F}S_n$-módulos (portanto, $\mathbb{F}S_n$-equivariante),

$$\varphi(I_\lambda) = \varphi\left(\bigoplus_{T_\lambda \in Std_\lambda} M_{T_\lambda}\right) = \bigoplus_{T_\lambda \in Std_\lambda} \varphi(M_{T_\lambda}) = \bigoplus_{T_\lambda \in Std_\lambda} \varphi(\mathbb{F}S_n e_{T_\lambda}) = \bigoplus_{T_\lambda \in Std_\lambda} \mathbb{F}S_n \varphi(e_{T_\lambda}).$$

Como os $\mathbb{F}S_n$-módulos irredutíveis em $\mathbb{F}S_n$ são os M_{T_λ}, $\forall\, T_\lambda \in Std_\lambda$, $\lambda \vdash n$, temos que os $\mathbb{F}S_n$-módulos irredutíveis em P_n são $\varphi(M_{T_\lambda}) = \varphi(\mathbb{F}S_n e_{T_\lambda}) = \mathbb{F}S_n\varphi(e_{T_\lambda})$, $\forall\, T_\lambda \in Std_\lambda$, $\lambda \vdash n$.

Vejamos em um exemplo o cálculo dos $\mathbb{F}S_n$-módulos irredutíveis em P_n, fazendo uso do isomorfismo φ:

Exemplo 3.3.2. 1) Consideremos $\lambda = (1, 1, \dots, 1) = (1^n) \vdash n$; $T_\lambda = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \dots \\ \hline n \\ \hline\end{array} \in Std_\lambda$ o tableau especial ao qual associamos M_λ; e, calculemos e_{T_λ}. Para tanto, notemos que $R_{T_\lambda} = \{1\}$ e $C_{T_\lambda} = S_n$, portanto,

$$e_{T_\lambda} = {R_{T_\lambda}}^+ {C_{T_\lambda}}^- = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma.$$

Assim,

$$\varphi(e_{T_\lambda}) = \varphi\left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma\right) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} = s_n(x_1, \dots, x_n),$$

onde $s_n(x_1, \dots, x_n)$ é o polinômio standard de grau n definido em 1.2.87.

2) Sejam agora $\tilde{\lambda} = (n) \vdash n$, $T_{\tilde{\lambda}} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \dots & n \\ \hline\end{array} \in Std_{\tilde{\lambda}}$ o tableau especial ao qual associamos $M_{\tilde{\lambda}}$; e, calculemos $e_{T_{\tilde{\lambda}}}$. Para tanto, observemos que $R_{T_{\tilde{\lambda}}} = S_n$ e $C_{T_{\tilde{\lambda}}} = \{1\}$, assim,

$$e_{T_{\tilde{\lambda}}} = {R_{T_{\tilde{\lambda}}}}^+ {C_{T_{\tilde{\lambda}}}}^- = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma.$$

Portanto,

$$\varphi(e_{T_{\tilde{\lambda}}}) = \varphi\left(\sum_{\sigma \in S_n} \sigma\right) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}.$$

Donde, temos $\mathbb{F}S_n\varphi(e_{T_\lambda}) = \mathbb{F}S_n s_n(x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbb{F}S_n\varphi(e_{T_{\tilde{\lambda}}}) = \mathbb{F}S_n \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$, os $\mathbb{F}S_n$-módulos irredutíveis em P_n (portanto, os S_n-módulos irredutíveis em P_n) associados às partições em 1) e 2), respectivamente.

Da observação já feita, basta calcularmos $\varphi(e_{T_\lambda})$ para $\lambda \vdash n$ para encontrarmos os $\mathbb{F}S_n$-módulos (portanto, S_n-módulos) irredutíveis de P_n, a menos de isomorfismos.

Terminamos esta seção, considerando A uma $\mathbb{F}$-álgebra para $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero e algebricamente fechado, e $Id(A)$ como na Definição 3.1.12.

Sabemos que $P_n \cap Id(A)$ é um $\mathbb{F}S_n$-submódulo de P_n (Proposição 3.1.17), e acabamos de ver que os $\mathbb{F}S_n$-módulos irredutíveis de P_n são os $\mathbb{F}S_n\varphi(e_{T_\lambda})$, $\forall\ T_\lambda \in Std_\lambda$ e $\lambda \vdash n$. Assim, $(P_n \cap Id(A)) \cap \mathbb{F}S_n\varphi(e_{T_\lambda})$, $\forall\ T_\lambda \in Std_\lambda$ e $\lambda \vdash n$ são todos os $\mathbb{F}S_n$-módulos irredutíveis de $P_n \cap Id(A)$.

Assim, se $(P_n \cap Id(A)) \neq 0$, temos que para algum $\lambda \vdash n$, $(P_n \cap Id(A)) \cap \varphi(I_\lambda) \neq 0$ (consequência do Teorema 2.7.69).

Como temos a validade do Teorema 3.2.3 e estamos no caso do corpo de característica zero, conseguimos por meio da Teoria de Representação e do trabalho desenvolvido por Bondari ([4]) uma técnica de busca das identidades polinomiais de A usando os $I_\lambda' s$, e assim, uma "restrição" no espaço de busca de identidades polinomiais para uma $\mathbb{F}$-álgebra A.

3.4 Identidades Polinomiais Graduadas

De um modo similar ao feito na seção de Definições e Exemplos deste capítulo, fixado um grupo G, introduziremos o conceito de identidade polinomial G-graduada, o de ideal de todas as identidades polinomiais G-graduadas e afirmamos que as demais definições e propriedades sem graduações podem ser reescritas, de modo análogo, envolvendo graduações. Ainda, traçaremos um paralelo entre as identidades polinomiais G-graduadas (omitiremos G, quando este estiver claro), e as identidades polinomiais sem graduação, que passaremos a chamar de *identidades polinomiais ordinárias.*

Definição 3.4.1. Sejam G um grupo e $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ é uma *identidade polinomial G-graduada* para A se $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$. Dizemos assim que A *satisfaz* f.

Definição 3.4.2. Se um polinômio não-nulo é uma identidade polinomial para uma álgebra A G-graduada, então A será chamada de *PI-álgebra graduada*.

Definição 3.4.3. Consideremos A uma álgebra G-graduada, $Id^{gr}(A)$ denotará o *conjuntos de todas as identidades polinomiais G-graduadas da álgebra A.*

Similarmente ao feito para o conjunto das identidades polinomiais ordinárias de uma álgebra A, temos:

Proposição 3.4.4. *Se A é uma álgebra G-graduada então $Id^{gr}(A)$ é um T_G-ideal.*

Definição 3.4.5. Se A é uma $\mathbb{F}$-álgebra G-graduada e $S \subseteq Id^{gr}(A)$ é tal que $Id^{gr}(A) = \langle S\rangle^{T_G}$ (olhe Definição 1.2.121), dizemos que S *é uma base das identidades G-graduadas de A.*

Como já falado, as demais definições e propriedades são reescritas como as de cima. Atentemo-nos apenas à validade do Teorema 3.2.3, com as devidas alterações, para o caso de uma álgebra G-graduada. O que novamente garante-nos a busca por identidades polinomiais G-graduadas apenas no espaço dos polinômios multilineares G-graduados.

Relacionemos agora identidades polinomias ordinárias com identidades polinomiais graduadas:

Proposição 3.4.6. *Sejam A e B duas álgebras. Se A e B possuem G-graduações tais que $Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B)$, então $Id(A) \subseteq Id(B)$. Ademais, se $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(B)$, então $Id(A) = Id(B)$.*

Demonstração. Assumamos primeiramente que $Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B)$. Sejam $\mathbb{F}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre e $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Id(A)$. Devemos mostrar que $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Id(B)$. Dados $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$, tomemos $b_{i_g} \in B_g$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $g \in G$, tais que $b_i = \sum\limits_{g\in G} b_{i_g}$. Para cada $b_{i_g} \neq 0$, tomemos $x_{i_g} \in X_g$ e consideremos o polinômio $f_1 = f(\sum\limits_{g\in G} x_{1_g}, \ldots, \sum\limits_{g\in G} x_{n_g}) \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$. Como $f \in Id(A)$, temos $f_1 \in Id^{gr}(A)$ e, por hipótese, $f_1 \in Id^{gr}(B)$.

Fazendo então as substituições $x_{i_g} = b_{i_g}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $g \in G$, temos

$$f(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f\left(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \sum_{g\in G} b_{2_g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{n_g}\right) = 0,$$

donde, $f \in Id(B)$.

Se $Id^{gr}(A) = Id^{gr}(B)$, então $Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B)$ e $Id^{gr}(B) \subseteq Id^{gr}(A)$, portanto, pelo feito anteriormente, temos a última afirmação. □

Observação 3.4.7. A recíproca do resultado acima é falsa, isto é, se $Id(A) \subseteq Id(B)$, não temos necessariamente $Id^{gr}(A) \subseteq Id^{gr}(B)$. Consideremos na álgebra de Grassmann E a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$ e a $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial $E = E \oplus \{0\}$. Temos que $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$, com $\alpha(x_1) = 0 = \alpha(x_2)$, é identidade graduada de E com respeito à primeira graduação, mas não é identidade graduada com respeito à graduação trivial.

Capítulo 4

As Identidades Polinomiais $\mathbb{Z}_2$-Graduadas de $M_2(\mathbb{F})$ e $M_{1,1}(E)$

Este capítulo, baseado no artigo [8] de Di Vincenzo, pretende determinar o $S_n \times S_m$-cocaracter das álgebras $M_2(\mathbb{F})$ e $M_{1,1}(E)$, e provar que o T_2-ideal de suas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas é gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1 = [y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$, $y_1y_2 - y_2y_1 = [y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$, respectivamente.

Estaremos trabalhando com $\mathbb{Z}_2$-graduação e identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas em todo este capítulo, portanto, em alguns momentos omitiremos $\mathbb{Z}_2$.

Para atingir o pretendido, precisaremos dos conceitos já definidos: cocaracter (Definição 3.1.20); T_G-ideal (Definição 1.2.118); T_n-ideal (Observação 1.2.119); T_G ideal gerado por S (Definição 1.2.121); identidade polinomial graduada (Definição 3.4.1); comutador (Definição 1.2.19); e, álgebra de Grassmann (Exemplo 1.2.7). Ainda, da relação do $S_n \times S_m$-cocaracter $\chi_{n,m}$ para álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas com o S_{n+m}-cocaracter ordinário que pode ser vista em [2].

Comecemos definindo o que vem a ser as subálgebras $M_{k,l}(E)$ da álgebra $M_{k+l}(E)$:

Definição 4.0.1. Seja E a álgebra de Grassmann encontrada no Exemplo 1.2.7. Vemos que $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 é o espaço vetorial gerado por 1 e pelos elementos de comprimento par; e, E_1 é o espaço vetorial gerado pelos elementos de comprimento ímpar (ou seja, E possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural - vide Exemplo 1.2.105). Dados $k, l \in \mathbb{N}$, denotaremos por $M_{k,l}(E)$ *as seguintes subálgebras de* $M_{k+l}(E)$:

$$M_{k,l}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} A \in M_k(E_0), D \in M_l(E_0), B, C \text{ são respectivamente} \\ k \times l \text{ e } l \times k \text{ matrizes, ambas com entradas em } E_1 \end{array} \right\}.$$

Observação 4.0.2. Notemos que $M_{k,l}(E)$ é um subespaço vetorial de $M_{k+l}(E)$. Agora, fazendo uso de propriedades de produto de matrizes e, de da de graduação de uma álgebra (Definição 1.2.102), veremos que $M_{k,l}(E)$ é uma subálgebra de $M_{k+l}(E)$:

Ora, sejam $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \in M_{k,l}(E)$, temos

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}.$$

Como $A, E \in M_k(E_0)$ e $E_0E_0 \subseteq E_0$, conseguimos que $AE \in M_k(E_0)$. Por $B \in M_{k\times l}(E_1)$, $G \in M_{l\times k}(E_1)$ e $E_1E_1 \subseteq E_0$, temos $BG \in M_k(E_0)$. Donde, $AB+BG \in M_k(E_0)$. Fazendo uma análise similar para os demais casos, concluímos que,

$$\begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix} \in M_{k,l}(E).$$

E assim, $M_{k,l}(E)$ é subálgebra de $M_{k+l}(E)$.

Observação 4.0.3. A álgebra com que trabalharemos no capítulo,

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \begin{pmatrix} E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 \end{pmatrix} \right\}$$

é subálgebra de $M_2(E)$.

Definição 4.0.4. Na Definição 1.2.115 da álgebra livre graduada, com $G = \mathbb{Z}_2$, diremos que $X = Y \sqcup Z$, onde Y e Z são subconjuntos enumeráveis disjuntos de X.

Denotaremos $\mathcal{F}_0$ *como o subespaço de* $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ gerado pelos monômios de grau par com respeito a Z (que coincide com o $\mathbb{F}\langle X\rangle_0$); similarmente, $\mathcal{F}_1$ *denotará o subespaço de* $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ gerado pelos monômios de grau ímpar com respeito a Z (que coincide com o $\mathbb{F}\langle X\rangle_1$). Donde, $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$.

Observação 4.0.5. Assim, no nosso caso, um ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ é um T_2-ideal se este é invariante por todos os endomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados η de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ tal que $\eta(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{F}_0$ e $\eta(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathcal{F}_1$ (consulte Definição 1.2.118 e Observação 1.2.119). E, um polinômio $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ é uma identidade polinomial de uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, $A = A_0 \oplus A_1$, se $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in A_0$ e $b_1, \ldots, b_m \in A_1$ (conforme a Definição 3.4.1).

Definição 4.0.6. Consideraremos $V_{n,m}$ o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares de grau $n+m$ nas variáveis $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m$.

Definição 4.0.7. Seja $Id^{gr}(A)$ o T_2-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$, como na Definição 3.4.3. Denotaremos $I_{n,m} = Id^{gr}(A) \cap V_{n,m}$, o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares de grau $n+m$ nas variáveis $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m$ que são identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada A.

Como podemos esperar pelo já visto na Proposição 3.1.17, temos:

Proposição 4.0.8. *$I_{n,m}$ é um $S_n \times S_m$-submódulo de $V_{n,m}$.*

Demonstração. Consideremos a função,

$$\begin{array}{rcl} \cdot : (S_n \times S_m) \times V_{n,m} & \to & V_{n,m} \\ ((\sigma,\pi), f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m)) & \mapsto & \cdot((\sigma,\pi), f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m)) \\ & & = (\sigma,\pi)\cdot f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m) \\ & & = f(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(n)},z_{\pi(1)},\ldots,z_{\pi(m)}). \end{array}$$

Uma computação direta mostra que esta é uma ação do grupo $S_n \times S_m$ em $V_{n,m}$ (olhe Definição 2.2.1), portanto, $V_{n,m}$ é um $S_n \times S_m$-módulo.

Como $I_{n,m} = Id^{gr}(A) \cap V_{n,m}$, temos que $Id^{gr}(A)$ é um T_2-ideal,(portanto, $Id^{gr}(A)$ é subespaço vetorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$), e, ainda $V_{n,m}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$, concluímos que $I_{n,m}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$. Assim, $I_{n,m}$ é subespaço vetorial de $V_{n,m}$.

Notemos que um T_2-ideal I é invariante por par de permutações:

De fato, seja $(\sigma,\pi) \in S_n \times S_m$ e $f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m) \in I$, devemos mostrar que

$$(\sigma,\pi)\cdot f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m) = f(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(n)},z_{\pi(1)},\ldots,z_{\pi(m)}) \in I.$$

Ora, como $f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m) \in I$ e I é T_2-ideal, temos que para $g_i = y_{\sigma(i)}$ e $\tilde{g}_j = z_{\pi(j)}$ em $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$,

$$f(g_1,\ldots,g_n,\tilde{g}_1,\ldots,\tilde{g}_m) = f(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(n)},z_{\pi(1)},\ldots,z_{\pi(m)}) \in I.$$

Assim,

$$(\sigma,\pi)\cdot f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m) = f(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(n)},z_{\pi(1)},\ldots,z_{\pi(m)}) \in I_{n,m},$$

se $f \in I_{n,m}$, $\forall\ (\sigma,\pi) \in S_n \times S_m$.

Ou seja, $I_{n,m}$ é um $S_n \times S_m$-submódulo de $V_{n,m}$. □

Definição 4.0.9. Para $n, m \in \mathbb{N}$, definimos

$$V_{n,m}(A) = \frac{V_{n,m}}{I_{n,m}} = \frac{V_{n,m}}{Id^{gr}(A) \cap V_{n,m}},$$

como o "subespaço vetorial" de $V_{n,m}$ que contêm todas as não-identidades polinomiais multilineares em $y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m$ graduadas da $\mathbb{F}$-álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada A.

Observação 4.0.10. Pelo feito acima e por resultados da teoria de módulos ([16]), temos que o quociente $V_{n,m}(A) = \dfrac{V_{n,m}}{I_{n,m}}$ é um $S_n \times S_m$-módulo.

Definição 4.0.11. Definiremos $\chi_{n,m}(A)$ como $S_n \times S_m$-cocaracter do módulo quociente $V_{n,m}(A)$, e, $c_{n,m}(A)$ a sua codimensão sobre o corpo $\mathbb{F}$ (relembre as Definições 3.1.20 e

3.1.21).

Observação 4.0.12. Sabemos que $S_n \times S_m$ é finito, que $V_{n,m}(A)$ é $S_n \times S_m$-módulo, portanto, como já visto na Observação 2.6.17, existe um número finito de caracteres irredutíveis, $\chi_{n,m_1}, \ldots, \chi_{n,m_p}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{N}$, tais que

$$\chi_{n,m} = \lambda_1 \chi_{n,m_1} + \cdots + \lambda_p \chi_{n,m_p}.$$

Sabemos que um caracter é irredutível se a representação a que ele está associado é irredutível (Definição 2.6.5).

Sabemos que o caracter é uma função de classe, e que as classes de conjugação de S_n estão em correspondência biunívoca com $Part_n$ (Proposição 2.6.7 e Teorema 2.7.31). Assim, $S_n \times S_m$ está em correspondência biunívoca com $Part_n + Part_m$.

Sabemos, quando $char\ \mathbb{F} = 0$, que todo S_n-módulo irredutível é equivalente a algum $M_\lambda = \mathbb{F}S_n e_{T_\lambda}$ para $\lambda \vdash n$ e M_λ associado ao tableau standard especial $T_\lambda \in Std_\lambda$ (Definição 2.7.44), e que, se o corpo $\mathbb{F}$ for algebricamente fechado, o número de representações irredutíveis e inequivalentes de S_n é equivalente ao número de classes de conjugação de S_n(veja parágrafos após Proposição 2.7.52). Portanto, da relação expressa em [2] e de tudo acima falado, segue da Teoria de Representações do Grupo Simétrico que

$$\chi_{n,m}(A) = \sum_{\lambda \vdash n, \mu \vdash m} m_{\lambda,\mu} [\lambda] \otimes [\mu],$$

onde, $[\lambda] \otimes [\mu]$ denota os $S_n \times S_m$-caracteres irredutíveis dado pelo produto tensorial dos caracteres irredutíveis $[\lambda]$,$[\mu]$ correspondentes às partições λ, μ de n e m, respectivamente.

Ainda mais, $m_{\lambda,\mu} \neq 0$ se, e somente se, existe um $T_{\lambda,1}$ tableau associado à partição λ; um $T_{\mu,2}$ tableau associado à partição μ; e, algum monômio $M(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ de $V_{n,m}$ tal que o polinômio $e_{T_{\lambda,1}} e_{T_{\mu,2}} M(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ não é uma identidade graduada de A (olhe a Definição 2.7.36 para ver quem são os $e_T's$).

4.1 As Identidades Polinomiais $\mathbb{Z}_2$-Graduadas de $M_2(\mathbb{F})$

Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero. Nesta seção estudaremos as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $A = M_2(\mathbb{F})$ com $\mathbb{Z}_2$-graduação não-trivial

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in \mathbb{F} \right\} \quad , \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| b, c \in \mathbb{F} \right\}.$$

(Veja Exemplo 1.2.110).

Observação 4.1.1. Observemos que:

- A_0 é subálgebra comutativa, pois lembrando que $\mathbb{F}$ é corpo, e considerando

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} \in A_0$ quaisquer, temos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & dd' \end{pmatrix}}_{\in A_0} = \begin{pmatrix} a'a & 0 \\ 0 & d'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

- A_0 é subálgebra não-nilpotente, pois $\mathbb{F}$ é corpo, e para $a, d \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$ ou $d \neq 0$, temos:
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
e por indução, $\forall\ n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Começaremos agora a considerar um subconjunto adequado de $V_{n,m}$ que virá a ser uma base de $V_{n,m}(A) = \dfrac{V_{n,m}}{Id^{gr}(A) \cap V_{n,m}}$, com A como acima.

Definição 4.1.2. Para $m > 0$, seja $(j) = \{j_1, j_2, \ldots, j_{[\frac{m}{2}]}\}$ um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, m\}$ de ordem $[\frac{m}{2}]$ (onde $[\frac{m}{2}]$ é o maior inteiro menor ou igual a $\frac{m}{2}$), e seja $(i) = \{i_1, i_2, \ldots\}$ o seu complementar em $\{1, 2, \ldots, m\}$. Além disso, para $q = 0, 1, \ldots, n$ seja $(t) = \{t_1, \ldots, t_q\}$ um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de ordem q, e seja $(s) = \{s_1, s_2, \ldots\}$ o seu complementar em $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Escrevemos separadamente em ordem crescente todos os inteiros ocorrendo nos conjuntos distintos $(i), (j), (t), (s)$ e definamos

$$\begin{aligned} M_{(t),(j)} &= M_{(t),(j)}(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \\ &= \begin{cases} y_{t_1} y_{t_2} \ldots y_{t_q} z_{i_1} y_{s_1} \ldots y_{s_{n-q}} z_{j_1} z_{i_2} z_{j_2} \ldots z_{i_{[\frac{m}{2}]}} z_{j_{[\frac{m}{2}]}}, & m \ \text{ par;} \\ y_{t_1} y_{t_2} \ldots y_{t_q} z_{i_1} y_{s_1} \ldots y_{s_{n-q}} z_{j_1} z_{i_2} z_{j_2} \ldots z_{i_{[\frac{m}{2}]+1}}, & m \ \text{ ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Observação 4.1.3. O número de monômios $M_{(t),(j)}$ existentes é $2^n \binom{m}{[\frac{m}{2}]}$. De fato, para escolhermos (t) temos $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$ possibilidades. Por consequência de (s) ser seu complementar, temos que, ao escolhermos (t), já escolhemos automaticamente (s).

Para escolhermos (j) temos $\binom{m}{[\frac{m}{2}]}$ possibilidades. Por consequência de (i) ser seu complementar, temos que, ao escolhermos (j), já automaticamente escolhemos (i).

Portanto, o número de monômios $M_{(t),(j)}$ é $2^n \binom{m}{[\frac{m}{2}]}$.

Lema 4.1.1. *Os $2^n \binom{m}{[\frac{m}{2}]}$ monômios $M_{(t),(j)}$ são linearmente independentes módulo $I_{n,m}$.*

Demonstração. Para demonstrar o lema, lembremos que $\{v_1 + I, \ldots, v_n + I\}$ é L.I. em $\frac{V}{I}$, com V um espaço vetorial e I subespaço vetorial de V ambos sobre o corpo $\mathbb{F}$, se, e somente se, para $a_i \in \mathbb{F}$, $1 \le i \le n$,

$$a_1(v_1 + I) + a_2(v_2 + I) + \cdots + a_n(v_n + I) = I$$

$$\Leftrightarrow (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) + I = I$$

$$\Leftrightarrow a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in I$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Assim, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é L.I. módulo I quando $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \in I \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Suponhamos m par. Consideremos $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ a base padrão de M_2 $(\mathbb{F})$ (olhe Exemplo 1.2.5) e

$$z_i \mapsto \overline{z_i} = a_iE_{12} + b_iE_{21}, \qquad y_i \mapsto \overline{y_i} = \alpha_iE_{11} + \beta_iE_{22},$$

as substituições graduadas mais gerais $(a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{F})$.

Para cada monômio, temos

$$M_{(t),(j)}(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m}) = \overline{y_{t_1}}\ \overline{y_{t_2}} \ldots \overline{y_{t_q}}\ \overline{z_{i_1}}\ \overline{y_{s_1}} \ldots \overline{y_{s_{n-q}}}\ \overline{z_{j_1}}\ \overline{z_{i_2}}\ \overline{z_{j_2}} \ldots \overline{z_{i_{[\frac{m}{2}]}}}\ \overline{z_{j_{[\frac{m}{2}]}}} =$$

$$= (\alpha_{t_1}E_{11}+\beta_{t_1}E_{22})(\alpha_{t_2}E_{11}+\beta_{t_2}E_{22})\ldots(\alpha_{t_q}E_{11}+\beta_{t_q}E_{22})(a_{i_1}E_{12}+b_{i_1}E_{21})(\alpha_{s_1}E_{11}+\beta_{s_1}E_{22})\ldots$$

$$\ldots(\alpha_{s_{n-q}}E_{11} + \beta_{s_{n-q}}E_{22})(a_{j_1}E_{12} + b_{j_1}E_{21})\ldots(a_{i_{[\frac{m}{2}]}}E_{12} + b_{i_{[\frac{m}{2}]}}E_{21})(a_{j_{[\frac{m}{2}]}}E_{12} + b_{j_{[\frac{m}{2}]}}E_{21}) =$$

Como $E_{11}E_{11} = E_{11}$, $E_{11}E_{22} = 0 = E_{22}E_{11}$ e $E_{22}E_{22} = E_{22}$,

$$= [\alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\ldots\alpha_{t_q}E_{11} + \beta_{t_1}\beta_{t_2}\ldots\beta_{t_q}E_{22}](a_{i_1}E_{12} + b_{i_1}E_{21})(\alpha_{s_1}E_{11} + \beta_{s_1}E_{22})\ldots$$

$$\ldots(\alpha_{s_{n-q}}E_{11} + \beta_{s_{n-q}}E_{22})(a_{j_1}E_{12} + b_{j_1}E_{21})\ldots(a_{i_{[\frac{m}{2}]}}E_{12} + b_{i_{[\frac{m}{2}]}}E_{21})(a_{j_{[\frac{m}{2}]}}E_{12} + b_{j_{[\frac{m}{2}]}}E_{21}).$$

Analogamente, como $E_{kl}E_{rs} = \delta_{lr}E_{ks}$, temos

$$M_{(t),(j)}(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m}) = \alpha_{t_1}\alpha_{t_2}\ldots\alpha_{t_q}a_{i_1}\beta_{s_1}\beta_{s_2}\ldots\beta_{s_{n-q}}b_{j_1}a_{i_2}b_{j_2}\ldots a_{i_{[\frac{m}{2}]}}b_{j_{[\frac{m}{2}]}}E_{11}+$$

$$+\beta_{t_1}\beta_{t_2}\ldots\beta_{t_q}b_{i_1}\alpha_{s_1}\alpha_{s_2}\ldots\alpha_{s_{n-q}}a_{j_1}b_{i_2}a_{j_2}\ldots b_{i_{[\frac{m}{2}]}}a_{j_{[\frac{m}{2}]}}E_{22}.$$

Seja $f = \sum\limits_{(t),(j)} A_{(t),(j)}M_{(t),(j)}(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $M_2(\mathbb{F})$ com $A_{(t),(j)} \in \mathbb{F}$. Para $(j) = \{j_1, j_2, \ldots\}$ fixado, especializamos na substituição

$$a_{i_1} = \cdots = a_{i_{[\frac{m}{2}]}} = b_{j_1} = \cdots = b_{j_{[\frac{m}{2}]}} = 1$$

e

$$b_{i_1} = \cdots = b_{i_{[\frac{m}{2}]}} = a_{j_1} = \cdots = a_{j_{[\frac{m}{2}]}} = 0.$$

Portanto, para todos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$, lembrando que f é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $M_2(\mathbb{F})$ e substituindo a especialização em $M_{(t),(j)}(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m})$, temos

$$0 = f(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m}) = \sum_{(t)} A_{(t),(j)} \alpha_{t_1} \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_q} \beta_{s_1} \beta_{s_2} \ldots \beta_{s_{n-q}} E_{11}.$$

Como a característica do corpo $\mathbb{F}$ é zero, segue que $A_{(t),(j)} = 0$, para todo (t), e isto prova o lema, já que o caso m ímpar é análogo a este, e fazemos uso do lembrete no começo da demonstração. $\square$

Provaremos agora o nosso primeiro resultado sobre identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(\mathbb{F})$. Para tanto, recorreremos ao seguinte lema:

Lema 4.1.2. *Seja B uma álgebra comutativa. Então, o T-ideal $Id(B)$ é $Id(B) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$. Se B é uma álgebra comutativa e não-unitária, temos dois casos a considerar, se B é não-nilpotente ou nilpotente, e assim, seu T-ideal $Id(B)$ em $\mathbb{F}\langle X \rangle$ é, respectivamente,*

$$Id(B) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T \quad e \quad Id(B) = \langle [x_1, x_2], x_1 \ldots x_n \rangle^T,$$

onde n é o índice de nilpotência.

Demonstração. Consideraremos apenas o caso não-unitário. A álgebra B satisfaz a identidade polinomial $[x_2, x_2] = 0$ e devemos trabalhar módulo $[x_1, x_2]$. Como o corpo tem característica zero, podemos assumir que

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \lambda_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(m)}, \ \lambda_\sigma \in \mathbb{F},$$

é uma identidade polinomial multilinear para B. Módulo $[x_1, x_2]$, podemos rearranjar os monômios na forma $\lambda_\sigma x_1 \ldots x_m$ e apresentarmos f na forma

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \lambda x_1 \ldots x_m, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Se $\lambda = 0$, então $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ é uma consequência da identidade $[x_1, x_2] = 0$.

Se $\lambda \neq 0$, então, módulo $[x_1, x_2]$, a identidade $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ é equivalente a identidade de nilpotência $x_1 \ldots x_m$. Escolhendo o m mínimo tal que $x_1 \ldots x_m = 0$ é uma identidade de B, completamos a demonstração para o caso em que nos preocupamos. Similarmente, o outro caso pode ser provado. $\square$

Lema 4.1.3. *$Id^{gr}(A)$ é o T_2-ideal gerado por $y_1 y_2 - y_2 y_1 = [y_1, y_2]$ e $z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1$, isto é, $Id^{gr}(A) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1 \rangle^{T_2}$. Ainda mais, $c_{n,0}(A) = 1$ e $c_{n,m}(A) = 2^n \binom{m}{[\frac{m}{2}]}$ para $n \geq 0$, $m > 0$.*

Demonstração. Seja J o T_2-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ gerado por $[y_1, y_2] = y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$.

Como:

- para $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{F}$,

$$(a_1E_{11} + b_1E_{22})(a_2E_{11} + b_2E_{22}) - (a_2E_{11} + b_2E_{22})(a_1E_{11} + b_1E_{22}) =$$

$$= (a_1a_2E_{11}+b_1b_2E_{22})-(a_2a_1E_{11}+b_2b_1E_{22}) = (a_1a_2-a_2a_1)E_{11}+(b_1b_2-b_2b_1)E_{22} = 0,$$

pois $E_{11}E_{11} = E_{11}$, $E_{11}E_{22} = 0 = E_{22}E_{11}$, $E_{22}E_{22} = E_{22}$ e $\mathbb{F}$ é corpo;

- e, para $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{F}$,

$$(a_1E_{12}+b_1E_{21})(a_2E_{12}+b_2E_{21})(a_3E_{12}+b_3E_{21})-(a_3E_{12}+b_3E_{21})(a_2E_{12}+b_2E_{21})(a_1E_{12}+b_1E_{21}) =$$

$$= (a_1b_2E_{11} + b_1a_2E_{22})(a_3E_{12} + b_3E_{21}) - (a_3b_2E_{11} + b_3a_2E_{22})(a_1E_{12} + b_1E_{21}) =$$

$$= (a_1b_2a_3E_{12} + b_1a_2b_3E_{21}) - (a_3b_2a_1E_{12} + b_3a_2b_1E_{21}) =$$

$$= (a_1b_2a_3 - a_3b_2a_1)E_{12} + (b_1a_2b_3 - b_3a_2b_1)E_{21} = 0,$$

pois $E_{12}E_{12} = 0 = E_{21}E_{21}$, $E_{12}E_{21} = E_{11}$, $E_{21}E_{12} = E_{22}$, $E_{11}E_{12} = E_{12}$, $E_{11}E_{21} = 0 = E_{22}E_{12}$, $E_{22}E_{21} = E_{21}$ e $\mathbb{F}$ é corpo;

temos que estes polinômios são identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(\mathbb{F})$. Segue que $J \subseteq Id^{gr}(A)$, e então, para todo, $n, m \geq 0$, $J \cap V_{n,m} \subseteq Id^{gr}(A) \cap V_{n,m}$ e assim, como

$$c_{n,m}(J) = \dim_{\mathbb{F}} \frac{V_{n,m}}{J \cap V_{n,m}} \text{ e } c_{n,m}(A) = \dim_{\mathbb{F}} \frac{V_{n,m}}{Id^{gr}(A) \cap V_{n,m}},$$

conseguimos

$$c_{n,m}(J) \geq c_{n,m}(A). \tag{4.1}$$

Lembramos que por A_0 ser subálgebra comutativa e não-nilpotente (vide Observação 4.1.1), temos $I_{n,0} = Id^{gr}(A) \cap V_{n,0} = J \cap V_{n,0} = J_{n,0}$ (Consequência do Lema 4.1.2).

Sabemos que

$$I_{n,0} = \langle [y_1, y_2] \rangle^{T_2} = span_{\mathbb{F}} \; \{h_1\varphi([y_1, y_2])h_2 \mid h_1, h_2 \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr} \text{ e } \varphi \in End_{\mathbb{F}} \; (\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr})^2 \; \},$$

onde, $End_{\mathbb{F}} \; (\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr})^2$ são todos os endomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$.

Consideremos $n = 3$, e notemos que:

- $y_1y_3y_2 = -y_1[y_2, y_3] + y_1y_2y_3$;
- $y_2y_1y_3 = -[y_1, y_2]y_3 + y_1y_2y_3$;

- $y_2y_3y_1 = -y_2[y_1, y_3] - [y_1, y_2]y_3 + y_1y_2y_3$;
- $y_3y_1y_2 = -[y_1, y_3]y_2 - y_1[y_2, y_3] + y_1y_2y_3$;
- $y_3y_2y_1 = -[y_2, y_3]y_1 - y_2[y_1, y_3] - [y_1, y_2]y_3 + y_1y_2y_3$.

Como $V_{3,0} = span_{\mathbb{F}} \ \{y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}y_{\sigma(3)} \mid \sigma \in S_3\}$, temos pelos itens feitos acima que $\dfrac{V_{3,0}}{I_{3,0}} = span_{\mathbb{F}} \ \{y_1y_2y_3\}$.

Em geral, $\dfrac{V_{n,0}}{I_{n,0}}$ é o S_n-módulo unidimensional com caracter $[(n)]$. Logo, $c_{n,0}(A) = 1$.

Suponhamos agora $m > 0$.

Para cada monômio M tendo grau par nos $z_j's$, isto é, $M \in \mathcal{F}_0$, temos que $y_iM - My_i \in \mathcal{F}_0$. Ora, como J é um T_2-ideal, então $y_iM - My_i \in J$. Isto, mais o fato de $[y_1, y_2] \in J_{n,m}$ e de $z_{i_1}z_{i_2}\ldots z_{i_m} \in \mathcal{F}_0$ para m par, implica que $V_{n,m}$ é gerado módulo $J_{n,m}$ pelos monômios $u_0(y)z_{i_1}u_1(y)z_{i_2}\ldots z_{i_m}$, onde $u_0(y)$ e $u_1(y)$ são monômios (eventualmente 1) em $y_1, \ldots, y_n$ nos quais os $y_i's$ ocorrem em ordem crescente $\left(\text{isto é, } \dfrac{V_{n,m}}{J_{n,m}} \text{ é gerado pelos monômios } u_0(y)z_{i_1}u_1(y)z_{i_2}\ldots z_{i_m} \text{ como já descritos}\right)$.

Agora, consideremos a ação à direita do grupo simétrico S_m no espaço vetorial $V_{0,m}$ de todos os polinômios multilineares em $z_1, \ldots, z_m$. Tal ação é definida como:

$$(z_{i_1}\ldots z_{i_m})\sigma^{-1} = z_{i_{\sigma(1)}}\ldots z_{i_{\sigma(m)}},$$

isto é, σ age no monômio $M = M(z_1, \ldots, z_m)$ trocando a ordem dos $z_i's$. Portanto, lembrando que $(i\ i+2)^{-1} = (i\ i+2)$, temos que os polinômios

$$z_{t_1}\ldots z_{t_m}(1 - (i\ i+2)) = z_{t_1}\ldots z_{t_i}z_{t_{i+1}}z_{t_{i+2}}\ldots z_{t_m} - z_{t_1}\ldots z_{t_{i+2}}z_{t_{i+1}}z_{t_i}\ldots z_{t_m}$$

estão no T_2-ideal J, e então $z_{t_1}\ldots z_{t_m} \equiv z_{t_1}\ldots z_{t_m}(i\ i+2)(mod\ J)$, para todo i.

Seja G o subgrupo de S_m gerado pelas transposições $(i\ i+2)$, com $i = 1, \ldots, m-2$, então

$$z_{t_1}\ldots z_{t_m}g \equiv z_{t_1}\ldots z_{t_m}(mod\ J), \tag{4.2}$$

para qualquer $g \in G$.

Considerando G_1 e G_2 os subgrupos simétricos de G agindo, respectivamente, em dígitos ímpares e dígitos pares, vemos que $G_1 \cap G_2 = \{1\}$ e $G_1G_2 = G$, portanto, conseguimos G como o produto direto de G_1 e G_2. Então, segue de (4.2) que, para cada monômio $M = M(z_1, \ldots, z_m)$ de $V_{n,m}$ podemos aplicar uma transposição $g \in G$ adequada e separadamente escrevermos os $z_i's$ ocorrendo nas posições pares e ímpares de M em ordem crescente. Além disso, $M - Mg \in J$.

Como J é um T_2-ideal, segue do argumento anterior que $V_{n,m}$ é gerado módulo $J_{n,m}$ pelos monômios $M_{(t),(j)}$ da Definição 4.1.2. Portanto, $c_{n,m}(J) \leq 2^n\binom{m}{[\frac{m}{2}]}$.

Por outro lado, pelo Lema 4.1.1, $2^n\binom{m}{[\frac{m}{2}]} \leq c_{n,m}(A)$.

Juntando as inequações logo acima e a em (4.1), chegamos em

$$2^n\binom{m}{[\frac{m}{2}]} \leq c_{n,m}(A) \leq c_{n,m}(J) \leq 2^n\binom{m}{[\frac{m}{2}]},$$

portanto,

$$c_{n,m}(A) = c_{n,m}(J) = 2^n\binom{m}{[\frac{m}{2}]}.$$

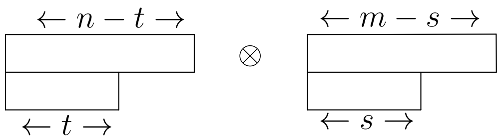
Ainda, como $J \subseteq Id^{gr}(A)$, $I_{n,m} = J_{n,m}$, para todo $n, m \geq 0$. Como $Id^{gr}(A)$ e J são T_2-ideais de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ e *char* $\mathbb{F} = 0$, isto é suficiente para concluir a demonstração (em *char* $\mathbb{F} = 0$, os T_2-ideais são determinados pelos polinômios multilineares). □

Observação 4.1.4. Observemos que este último resultado junto com o Lema 4.1.1 mostram que o conjunto $\{M_{(t),(j)} + I_{n,m}\}$ é uma base de $\dfrac{V_{n,m}}{I_{n,m}}$ para todo $n \geq 0$ e $m \geq 0$.

Examinaremos mais de perto a $S_n \times S_m$-estrutura de $\dfrac{V_{n,m}}{I_{n,m}}$.

Definição 4.1.5. Seja q um inteiro fixo com $0 \leq q \leq n$, suponhamos $m > 0$. Consideraremos W_q o $S_n \times S_m$-submódulo de $\dfrac{V_{n,m}}{I_{n,m}}$ gerado por $y_1 \ldots y_q z_1 y_{q+1} \ldots y_n z_2 z_3 \ldots z_m + I_{n,m}$.

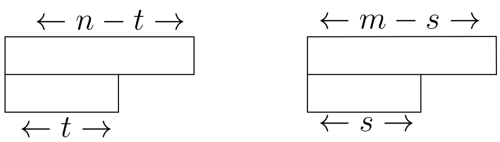
Lema 4.1.4. *Para s, t, com $0 \leq t \leq q^* = min\ \{q, n-q\}$ e $0 \leq s \leq [\frac{m}{2}]$, o $S_n \times S_m$-cocaracter irredutível*



(4.3)

é uma componente de $\chi_{n,m}(W_q)$.

Demonstração. Como $\chi_{n,m}(A) = \sum_{\lambda\vdash n, \mu\vdash m} m_{\lambda,\mu}[\lambda] \otimes [\mu]$, e $m_{\lambda,\mu} \neq 0$ se, e somente se, existe um tableau $T_{\lambda,1}$ associado à partição λ, um tableau $T_{\mu,2}$ associado à partição μ, e, algum monômio $M(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ de $V_{n,m}$ tal que o polinômio $e_{T_{\lambda,1}} e_{T_{\mu,2}} M(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ não é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}_2$-graduada de $A = M_2(\mathbb{F})$ (veja a Observação 4.0.12). Assim, podemos fazer as devidas alterações e concluir que se exibirmos para cada par de diagramas



um par de tableaux T_1,T_2 tal que o correspondente elemento

$$(e_{T_1}e_{T_2})y_1 \ldots y_q z_1 y_{q+1} \ldots y_n z_2 z_3 \ldots z_m \ \text{ de } \ V_{n,m}$$

não é uma identidade polinomial $\mathbb{Z}_2$-graduada de $A = M_2(\mathbb{F})$, teremos o $S_n \times S_m$-cocaracter irredutível em (4.3) como componente de $\chi_{n,m}(W_q)$.

Para fazermos isto, prosseguimos da seguinte maneira:

Assumamos, por simplicidade de notação, que $q^* = q$ e m é par (os demais casos seguem de maneira análoga). Para $t \leq q$, $s \leq [\frac{m}{2}]$ consideremos os seguintes tableaux de Young,

$$T_1 = \overset{\longleftarrow \quad n-t \quad \longrightarrow}{\underset{\longleftarrow \ t \ \longrightarrow}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline q+1 & q+2 & \cdots & q+t & t+1 & \cdots & q & q+t+1 & \cdots & n \\ \hline 1 & 2 & \cdots & t \\ \cline{1-4}\end{array}}}$$

$$T_2 = \overset{\longleftarrow \quad m-s \quad \longrightarrow}{\underset{\longleftarrow \ s \ \longrightarrow}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & \cdots & 2s-1 & 2s+1 & \cdots & m \\ \hline 2 & 4 & \cdots & 2s \\ \cline{1-4}\end{array}}}$$

e sejam $R_{T_i}{}^+$, $C_{T_i}{}^-$, para $i = 1, 2$, definidos como em 2.7.35.

Consideremos

$$M = M(y, z) = y_1 \ldots y_q z_1 y_{q+1} \ldots y_n z_2 z_3 \ldots z_m,$$

$$M_1 = M_1(y, z) = y_1 \ldots y_q z_1 y_{q+1} \ldots y_n z_2,$$

$$M_2 = M_2(y, z) = y_1 \ldots y_q z_2 y_{q+1} \ldots y_n z_1,$$

e

$$\begin{aligned} f(z) &= [z_3, z_4] \ldots [z_{2s-1}, z_{2s}] z_{2s+1} \ldots z_m \\ &= (z_3 z_4 - z_4 z_3)(z_5 z_6 - z_6 z_5) \ldots (z_{2s-1} z_{2s} - z_{2s} z_{2s-1}) z_{2s+1} \ldots z_m \\ &= z_3 z_4 z_5 z_6 \ldots z_{2s-1} z_{2s} z_{2s+1} \ldots z_m - z_4 z_3 z_5 z_6 \ldots z_{2s-1} z_{2s} z_{2s+1} \ldots z_m + \\ &\quad + \cdots + (-1)^s z_4 z_3 z_6 z_5 \ldots z_{2s} z_{2s-1} z_{2s+1} \ldots z_m. \end{aligned}$$

Da independência entre $R_{T_2}{}^+$ e $C_{T_1}{}^-$, temos

$$e_{T_1} e_{T_2} M = e_{T_1}(R_{T_2}{}^+ C_{T_2}{}^- M) = R_{T_1}{}^+ C_{T_1}{}^- (R_{T_2}{}^+ C_{T_2}{}^- M) = R_{T_1}{}^+ R_{T_2}{}^+ C_{T_1}{}^- C_{T_2}{}^- M,$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
C_{T_2}{}^{-}M &= [1-(1\ 2)-(3\ 4)-(5\ 6)-\cdots-(2s-1\ \ 2s)+(1\ 2)(3\ 4)+(1\ 2)(5\ 6)+\\
&\quad +\cdots+(1\ 2)(2s-1\ \ 2s)+\cdots+(2s-3\ \ 2s-2)(2s-1\ \ 2s)-\\
&\quad -(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)-\cdots-(2s-5\ \ 2s-4)(2s-3\ \ 2s-2)(2s-1\ \ 2s)+\ldots\\
&\quad +(-1)^s(1\ 2)(3\ 4)\ldots(2s-1\ \ 2s)]M\\
&= M-y_1\ldots y_qz_2y_{q+1}\ldots y_nz_1z_3\ldots z_m-y_1\ldots y_qz_1y_{q+1}\ldots y_nz_2z_4z_3\ldots z_m-\ldots\\
&\quad \cdots-y_1\ldots y_qz_1y_{q+1}\ldots y_nz_2z_3\ldots z_{2s}z_{2s-1}\ldots z_m+\\
&\quad +\ y_1\ldots y_qz_2y_{q+1}\ldots y_nz_1z_4z_3\ldots z_{2s}z_{2s-1}\ldots z_m+\ldots\\
&\quad \cdots+\ y_1\ldots y_qz_1y_{q+1}\ldots y_nz_2z_3\ldots z_{2s-2}z_{2s-3}z_{2s}z_{2s-1}\ldots z_m+\ldots\\
&\quad \cdots+\ (-1)^sy_1\ldots y_qz_2y_{q+1}\ldots y_nz_1z_4z_3\ldots z_{2s-2}z_{2s-3}z_{2s}z_{2s-1}\ldots z_m\\
&= M_1(y,z)f(z)-M_2(y,z)f(z)
\end{aligned}$$

Agora, seja $\pi\in C_{T_1}$ e seja $(i)=\{i_1,\ldots,i_r\}\subseteq\{1,\ldots,t\}$ o conjunto ordenado de inteiros da segunda linha de T_1 que é mexido por π; isto é,

$$\pi=(i_1\ q+i_1)(i_2\ q+i_2)\ldots(i_r\ q+i_r).$$

Então, $(-1)^\pi\pi M_1(y,z)f(z)$ é congruente módulo $I_{n,m}$ à

$$(-1)^r y_{j_1}\ldots y_{j_v}y_{t+1}\ldots y_qy_{q+i_1}\ldots y_{q+i_r}z_1y_{i_1}\ldots y_{i_r}y_{q+j_1}\ldots y_{q+j_v}y_{q+t+1}\ldots y_nz_2f(z),$$

onde, $\{j_1,\ldots,j_v\}=\{1,\ldots,t\}-\{i_1,\ldots,i_r\}$ e $j_1<\cdots<j_v$.

Do mesmo modo $(-1)^\pi\pi M_2(y,z)f(z)$ é congruente módulo $I_{n,m}$ à

$$(-1)^r y_{j_1}\ldots y_{j_v}y_{t+1}\ldots y_qy_{q+i_1}\ldots y_{q+i_r}z_2y_{i_1}\ldots y_{i_r}y_{q+j_1}\ldots y_{q+j_v}y_{q+t+1}\ldots y_nz_1f(z).$$

Portanto, $C_{T_1}{}^{-}C_{T_2}{}^{-}M=C_{T_1}{}^{-}(M_1(y,z)f(z)-M_2(y,z)f(z))$ é congruente, módulo $I_{n,m}$, à

$$g(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m)=\sum_{r=0}^{t}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le t}(-1)^r$$

$$[(y_{j_1}\ldots y_{j_v}y_{t+1}\ldots y_qy_{q+i_1}\ldots y_{q+i_r}z_1y_{i_1}\ldots y_{i_r}y_{q+j_1}\ldots y_{q+j_v}y_{q+t+1}\ldots y_nz_2)$$

$$-(y_{j_1}\ldots y_{j_v}y_{t+1}\ldots y_qy_{q+i_1}\ldots y_{q+i_r}z_2y_{i_1}\ldots y_{i_r}y_{q+j_1}\ldots y_{q+j_v}y_{q+t+1}\ldots y_nz_1)]\cdot f(z)$$

onde, como acima,

$$\{j_1,\ldots,j_v\}=\{1,\ldots,t\}-\{i_1,\ldots,i_r\}\ \text{ e }\ j_1<\cdots<j_v.$$

Agora, em $g(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$ nós identificamos:

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_t,$$

$$y_{t+1} = y_{t+2} = \cdots = y_n,$$

$$z_2 = z_4 = \cdots = z_{2s}$$

$$z_1 = z_3 = \cdots = z_{2s-1} = z_{2s+1} = z_{2s+2} = \cdots = z_m.$$

Deste modo, obtemos o polinômio

$$g_{T_1,T_2}(y_1, y_{t+1}, z_1, z_2) = \sum_{r=0}^{t} \binom{t}{r} (-1)^r ({y_1}^{t-r} {y_{t+1}}^{q+r-t} z_1 {y_1}^r {y_{t+1}}^{n-q-r} z_2$$

$$-{y_1}^{t-r} {y_{t+1}}^{q+r-t} z_2 {y_1}^r {y_{t+1}}^{n-q-r} z_1)[z_1, z_2]^{s-1} {z_1}^{m-2s}.$$

Um argumento padrão, encontrado nas Seções 1 e 3 de [28], mostra que

$$g_{T_1,T_2}(y_1, y_{t+1}, z_1, z_2) \in Id^{gr}(A) \Leftrightarrow (e_{T_1} e_{T_2}) y_1 \ldots y_q z_1 y_{q+1} \ldots y_n z_2 z_3 \ldots z_m \in I_{n,m}. \quad (4.4)$$

Seja $y_1 \mapsto \overline{y_1} = \alpha_1 E_{11} + \beta_1 E_{22}$, $y_{t+1} \mapsto \overline{y_{t+1}} = \alpha_2 E_{11} + \beta_2 E_{22}$, $z_i \mapsto \overline{z_i}$ uma substituição graduada das variáveis com elementos de $M_2(\mathbb{F})$. Temos,

$$g_{T_1,T_2}(\overline{y_1}, \overline{y_{t+1}}, \overline{z_1}, \overline{z_2}) = \sum_{r=0}^{t} \binom{t}{r} (-1)^r (\overline{y_1}^{t-r}\ \overline{y_{t+1}}^{q+r-t}\ \overline{z_1}\ \overline{y_1}^r\ \overline{y_{t+1}}^{n-q-r}\ \overline{z_2}$$

$$-\overline{y_1}^{t-r}\ \overline{y_{t+1}}^{q+r-t}\ \overline{z_2}\ \overline{y_1}^r\ \overline{y_{t+1}}^{n-q-r}\ \overline{z_1})[\overline{z_1}, \overline{z_2}]^{s-1}\ \overline{z_1}^{m-2s}.$$

Façamos algumas contas separadas para depois concluirmos quem é $g_{T_1,T_2}(\overline{y_1}, \overline{y_{t+1}}, \overline{z_1}, \overline{z_2})$:

- Como $E_{11}E_{22} = 0 = E_{22}E_{11}$, $E_{11}E_{11} = E_{11}$ e $E_{22}E_{22} = E_{22}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{y_1}^{t-r} &= (\alpha_1 E_{11} + \beta_1 E_{22})^{t-r} \\ &= \underbrace{(\alpha_1 E_{11} + \beta_1 E_{22}) \ldots (\alpha_1 E_{11} + \beta_1 E_{22})}_{t-r \text{ vezes}} \\ &= {\alpha_1}^{t-r} E_{11} + {\beta_1}^{t-r} E_{22} \end{aligned}$$

- Similarmente ao item anterior, vemos que,

$$\overline{y_{t+1}}^{q+r-t} = {\alpha_2}^{q+r-t} E_{11} + {\beta_2}^{q+r-t} E_{22},$$

$$\overline{y_1}^{r} = {\alpha_1}^{r} E_{11} + {\beta_1}^{r} E_{22},$$

$$\overline{y_{t+1}}^{n-q-r} = {\alpha_2}^{n-q-r} E_{11} + {\beta_2}^{n-q-r} E_{22}.$$

- Ainda, por $E_{11}E_{22} = 0 = E_{22}E_{11}$, $E_{11}E_{11} = E_{11}$ e $E_{22}E_{22} = E_{22}$, conseguimos,

$$\overline{y_1}^{t-r}\overline{y_{t+1}}^{q+r-t} = {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22},$$

$$\overline{y_1}^{r}\overline{y_{t+1}}^{n-q-r} = {\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22},$$

$$({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22})\overline{z_1}({\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22})\overline{z_2} =$$

$$= {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11}\overline{z_1}E_{11}\overline{z_2} + {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{11}\overline{z_1}E_{22}\overline{z_2} +$$
$$+ {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{22}\overline{z_1}E_{11}\overline{z_2} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22}\overline{z_1}E_{22}\overline{z_2},$$

$$({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22})\overline{z_2}({\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22})\overline{z_1} =$$

$$= {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11}\overline{z_2}E_{11}\overline{z_1} + {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{11}\overline{z_2}E_{22}\overline{z_1} +$$
$$+ {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{22}\overline{z_2}E_{11}\overline{z_1} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22}\overline{z_2}E_{22}\overline{z_1}.$$

- Considerando $\overline{z_1} = aE_{12} + bE_{21}$, $\overline{z_2} = cE_{12} + dE_{21}$ para $a, b, c, d \in \mathbb{F}$, temos

$$E_{11}\overline{z_1}E_{11}\overline{z_2} = E_{11}(aE_{12} + bE_{21})E_{11}(cE_{12} + dE_{21}) = (aE_{12})(cE_{12}) = 0,$$

$$E_{22}\overline{z_1}E_{22}\overline{z_2} = E_{22}(aE_{12} + bE_{21})E_{22}(cE_{12} + dE_{21}) = (bE_{21})(dE_{21}) = 0,$$

$$E_{11}\overline{z_2}E_{11}\overline{z_2} = E_{11}(cE_{12} + dE_{21})E_{11}(aE_{12} + bE_{21}) = (cE_{12})(aE_{12}) = 0,$$

$$E_{22}\overline{z_2}E_{22}\overline{z_1} = E_{22}(cE_{12} + dE_{21})E_{22}(aE_{12} + bE_{21}) = (dE_{21})(bE_{21}) = 0.$$

- Juntando os dois últimos itens, obtemos

$$({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22})\overline{z_1}({\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22})\overline{z_2} =$$

$$= {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{11}\overline{z_1}E_{22}\overline{z_2} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{22}\overline{z_1}E_{11}\overline{z_2},$$

$$({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22})\overline{z_2}({\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22})\overline{z_1} =$$

$$= {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{11}\overline{z_2}E_{22}\overline{z_1} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{22}\overline{z_2}E_{11}\overline{z_1}.$$

- Sendo $\overline{z_1} = aE_{12} + bE_{21}$, $\overline{z_2} = cE_{12} + dE_{21}$ para $a, b, c, d \in \mathbb{F}$, notemos que

$$\overline{z_1}E_{22} = (aE_{12} + bE_{21})E_{22} = aE_{12} = E_{11}(aE_{12} + bE_{21}) = E_{11}\overline{z_1},$$

$$\overline{z_1}E_{11} = (aE_{12} + bE_{21})E_{11} = bE_{21} = E_{22}(aE_{12} + bE_{21}) = E_{22}\overline{z_1},$$

$$\overline{z_2}E_{22} = (cE_{12} + dE_{21})E_{22} = cE_{12} = E_{11}(cE_{12} + dE_{21}) = E_{11}\overline{z_2},$$

$$\overline{z_2}E_{11} = (cE_{12} + dE_{21})E_{11} = dE_{21} = E_{22}(cE_{12} + dE_{21}) = E_{22}\overline{z_2}.$$

- Substituindo o feito no item anterior no item acima dele; e, lembrando que $E_{11}E_{11} = E_{11}$ e $E_{22}E_{22} = E_{22}$; chegamos em

$$({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22})\overline{z_1}({\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22})\overline{z_2} =$$

$$= {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{11}\overline{z_1}\ \overline{z_2} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{22}\overline{z_1}\ \overline{z_2},$$

$$({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22})\overline{z_2}({\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22})\overline{z_1} =$$

$$= {\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{11}\overline{z_2}\ \overline{z_1} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{22}\overline{z_2}\ \overline{z_1}.$$

- Assim,

$$\begin{aligned}&\big(({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22})\overline{z_1}({\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22})\overline{z_2}\big) - \\ &- \big(({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}E_{22})\overline{z_2}({\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{22})\overline{z_1}\big) = \\ &= \big({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{11} + {\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{22}\big)\,[\overline{z_1}, \overline{z_2}].\end{aligned}$$

Retornando em $g_{T_1,T_2}(\overline{y_1}, \overline{y_{t+1}}, \overline{z_1}, \overline{z_2})$,

$$\begin{aligned} g_{T_1,T_2}(\overline{y_1}, \overline{y_{t+1}}, \overline{z_1}, \overline{z_2}) &= \sum_{r=0}^{t} \binom{t}{r}(-1)^r({\alpha_1}^{t-r}{\alpha_2}^{q+r-t}{\beta_1}^{r}{\beta_2}^{n-q-r}E_{11} + \\ &\quad +{\beta_1}^{t-r}{\beta_2}^{q+r-t}{\alpha_1}^{r}{\alpha_2}^{n-q-r}E_{22})[\overline{z_1}, \overline{z_2}]^s\overline{z_1}^{m-2s}.\end{aligned}$$

Se $\overline{z_1} = E_{12} + E_{21}$ e $\overline{z_2} = E_{21}$, como $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, então

$$\begin{aligned}[\overline{z_1}, \overline{z_2}]^s\overline{z_1}^{m-2s} &= ((E_{12} + E_{21})E_{21} - E_{21}(E_{12} + E_{21}))^s(E_{12} + E_{21})^{m-2s} \\ &= (E_{11} + (-1)^sE_{22})(E_{11} + E_{22})^{\frac{m-2s}{2}} \\ &= E_{11} + (-1)^sE_{22}\end{aligned}$$

que é uma matriz invertível em $A = M_2\ (\mathbb{F})$. Portanto, $g_{T_1,T_2}(\overline{y_1}, \overline{y_{t+1}}, \overline{z_1}, \overline{z_2}) = 0$ implica que

$$\sum_{r=0}^{t} \binom{t}{r} (-1)^r {\alpha_1}^{t-r} {\alpha_2}^{q+r-t} {\beta_1}^r {\beta_2}^{n-q-r} = 0 \quad \text{para todo} \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{F}.$$

Como *char* $\mathbb{F} = 0$, isto é impossível. Logo,

$$g_{T_1,T_2}(y_1, y_{t+1}, z_1, z_2) \notin Id^{gr}(A),$$

e, pelo observado em (4.4) e início da demonstração, concluímos a prova do lema.

□

Lema 4.1.5. *Seja $q^* = min\ \{q, n-q\}$, então,*

$$\chi_{n,m}(W_q) = \sum_{t=0}^{q^*} \sum_{s=0}^{[\frac{m}{2}]} \begin{array}{l} \leftarrow n-t \rightarrow \\ \begin{array}{|l|} \hline \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|l|} \qquad\qquad\quad \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow t \rightarrow \end{array} \otimes \begin{array}{l} \leftarrow m-s \rightarrow \\ \begin{array}{|l|} \hline \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|l|} \qquad\qquad\quad \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow s \rightarrow \end{array}$$

Demonstração. Consideremos d o grau da $S_n \times S_m$-representação associada à

$$\sum_{t=0}^{q^*} \sum_{s=0}^{[\frac{m}{2}]} \begin{array}{l} \leftarrow n-t \rightarrow \\ \begin{array}{|l|} \hline \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|l|} \qquad\qquad\quad \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow t \rightarrow \end{array} \otimes \begin{array}{l} \leftarrow m-s \rightarrow \\ \begin{array}{|l|} \hline \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|l|} \qquad\qquad\quad \\ \hline \end{array} \\ \leftarrow s \rightarrow \end{array}$$

Pela Fórmula do Gancho, 2.7.64, a dimensão da representação irredutível associada ao Diagrama de Young

$$D_\lambda = \begin{array}{l} \qquad N-R \\ \begin{array}{|l|} \hline \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|l|} \qquad\qquad\quad \\ \hline \end{array} \\ \qquad R \end{array}$$

é:

$$\begin{aligned}
\frac{N!}{h(\lambda)} &= \frac{N!}{\prod\limits_{s\in\lambda} h(s)} \\
&= \frac{N!}{\underbrace{(N-R+1)(N-R)\cdot\dots\cdot(N-2R+2)(N-2R)\cdot\dots\cdot 1}_{\text{produto dos ganchos da primeira linha}}}\cdot \\
&\quad \cdot\frac{1}{\underbrace{R(R-1)\cdot\dots\cdot 1}_{\text{produto dos ganchos da segunda linha}}} \\
&= \frac{N!}{(N-R+1)(N-R)\cdot\dots\cdot(N-2R+2)(N-2R)!R!} \\
&= \frac{N!}{\left(\frac{(N-R+1)!}{(N-2R+1)!}(N-2R)!R!\right)} \\
&= \frac{N!}{\left(\frac{(N-R+1)!R!}{(N-2R+1)}\right)} \\
&= \frac{N!(N-2R+1)}{(N-R+1)!R!} \\
&= \frac{\binom{N+1}{R}(N-2R+1)}{N+1} \\
&= \frac{\binom{N+1}{R}((N+1)-2R)}{N+1} \\
&= \binom{N+1}{R}\left(1-\frac{2R}{N+1}\right).
\end{aligned}$$

Agora, por indução sobre p, temos

$$\sum_{R=0}^{p}\binom{N+1}{R}\left(1-\frac{2R}{N+1}\right)=\binom{N}{p},\ \forall\, p=0,\dots,N.$$

De fato, para $p=0$, temos

$$\sum_{R=0}^{0}\binom{N+1}{R}\left(1-\frac{2R}{N+1}\right)=\binom{N+1}{0}\left(1-\frac{2\cdot 0}{N+1}\right)=1\cdot(1-0)=1=\binom{N}{0}=\binom{N}{p}.$$

Suponhamos a afirmação válida para $0\le k\le p-1$ e tentemos provar para $k=p$, com $0 \leq p \leq N$,

$$\begin{aligned}
\sum_{R=0}^{p} \binom{N+1}{R}\left(1-\frac{2R}{N+1}\right) &= \sum_{R=0}^{p-1} \binom{N+1}{R}\left(1-\frac{2R}{N+1}\right) + \binom{N+1}{p}\left(1-\frac{2p}{N+1}\right) \\
&= \binom{N}{p-1} + \binom{N+1}{p} - \frac{2p}{N+1}\binom{N+1}{p} \\
&= \binom{N}{p-1} + \binom{N+1}{p} - \frac{2p}{N+1}\left(\frac{(N+1)!}{p!(N+1-p)!}\right) \\
&= \binom{N}{p-1} + \binom{N+1}{p} - 2\binom{N}{p-1} \\
&= \binom{N+1}{p} - \binom{N}{p-1}
\end{aligned}$$

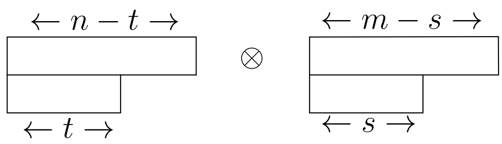
Pela *Regra de Stiefel*:

$$\binom{N}{p-1} + \binom{N}{p} = \binom{N+1}{p},$$

concluímos,

$$\sum_{R=0}^{p} \binom{N+1}{R}\left(1-\frac{2R}{N+1}\right) = \binom{N}{p}$$

Assim, a dimensão da representação irredutível associada à



é

$$\left[\binom{n+1}{t}\left(1-\frac{2t}{n+1}\right)\right] \cdot \left[\binom{m+1}{s}\left(1-\frac{2s}{m+1}\right)\right].$$

E como

$$\sum_{t=0}^{p} \binom{n+1}{t}\left(1-\frac{2t}{n+1}\right) = \binom{n}{p}, \quad \text{com } 0 \leq p \leq n,$$

e

$$\sum_{s=0}^{\tilde{p}} \binom{m+1}{s}\left(1-\frac{2s}{m+1}\right) = \binom{m}{\tilde{p}}, \quad \text{com } 0 \leq \tilde{p} \leq m,$$

temos $d = \binom{n}{q^*}\binom{m}{[\frac{m}{2}]}$ (lembrar que as somas podem ser vistas disjuntamente).

Por outro lado, W_q é gerado, como espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, pelos elementos

$$y_{\sigma(1)} \ldots y_{\sigma(q)} z_{\pi(1)} y_{\sigma(q+1)} \ldots y_{\sigma(n)} z_{\pi(2)} z_{\pi(3)} \ldots z_{\pi(m)} + I_{n,m} \qquad (\sigma, \pi) \in S_n \times S_m.$$

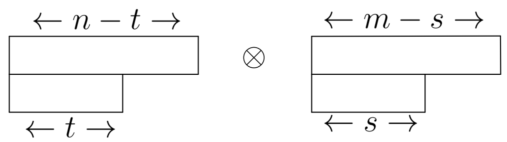
Além disso, como mostrado na prova do Lema 4.1.3, cada um destes é igual a um dos elementos $M_{(t),(j)}(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) + I_{n,m}$, com $(t) = \{t_1, \ldots, t_q\}$ e q fixo.

Como $M_{(t),(j)}(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m)+I_{n,m}$ estão na base de $\dfrac{V_{n,m}}{I_{n,m}}$, temos que

$$\dim\ W_q = \binom{n}{q}\binom{m}{[\frac{m}{2}]}.$$

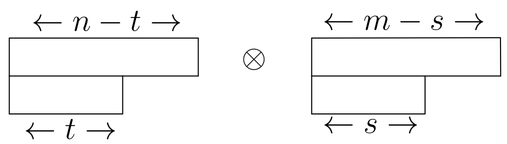
Por $\binom{n}{q}=\binom{n}{n-q}$ e $q^*=min\ \{q,n-q\}$, conseguimos que $\dim\ W_q = d$.

Portanto, pelo Lema 4.1.4, temos que do fato de



com $0\le t\le q^*=min\ \{q,n-q\}$ e $0\le s\le [\frac{m}{s}]$, ser uma componente de $\chi_{n,m}(W_q)$, e $\dim\ W_q = d =$ grau da $S_n\times S_m-$ representação associada à

$$\chi_{n,m}(W_q)=\sum_{t=0}^{q^*}\sum_{s=0}^{[\frac{m}{2}]}$$

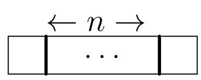


temos a conclusão do Lema 4.1.5. □

Observação 4.1.6. A base de $\dfrac{V_{n,m}}{I_{n,m}}$ dada nas provas dos Lemas 4.1.1 e 4.1.3 é “dividida” nas bases dos submódulos W_q da Definição 4.1.5, para $q=0,1,\ldots,n$; portanto, $\dfrac{V_{n,m}}{I_{n,m}}=\oplus W_q$.

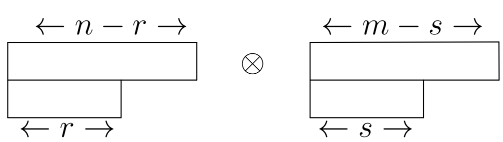
Lema 4.1.6. *Seja $A=M_2(\mathbb{F})$ com graduação não-trivial. Então,*

$$\chi_{n,0}(A)=$$

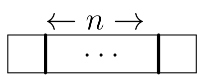


e, para $m>0$,

$$\chi_{n,m}(A)=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{s=0}^{[\frac{m}{2}]}(n+1-2r)$$



Demonstração. Como visto no Lema 4.1.1 e na demonstração do Lema 4.1.3, $\dfrac{V_{n,0}}{I_{n,0}}$ é S_n-módulo um dimensional com caracter



Enquanto para $m>0$, $\dfrac{V_{n,m}}{I_{n,m}}=\oplus W_q$ (vide Observação 4.1.6). Portanto, pelo Lema 4.1.5

$$\chi_{n,m}(A) = \sum_{q=0}^{n}\sum_{t=0}^{q^*}\sum_{s=0}^{[\frac{m}{2}]} \begin{array}{l} \leftarrow n-t \rightarrow \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \leftarrow t \rightarrow \end{array} \otimes \begin{array}{l} \leftarrow m-s \rightarrow \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \leftarrow s \rightarrow \end{array}$$

onde $q^* = min\ \{q, n-q\}$.

Afirmação: Para um r fixado, com $0 \leq r \leq [\frac{n}{2}]$, existem precisamente $(n+1-2r)$ valores de q, com $0 \leq q \leq n$, tais que $r \leq min\ \{q, n-q\}$, são estes $q = r, r+1, \ldots, n-r$.

De fato, $r \leq min\ \{q, n-q\} \leq q$ e $r \leq min\ \{q, n-q\} \leq n-q$, donde, $r \leq n-q$ implica em $q \leq n-r$. E assim, $q = r, r+1, r+2, \ldots, n-r$ e então temos $(n+1-2r)$ possíveis valores para q.

Portanto, para $m > 0$, temos

$$\chi_{n,m}(A) = \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{s=0}^{[\frac{m}{2}]}(n+1-2r) \begin{array}{l} \leftarrow n-r \rightarrow \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \leftarrow r \rightarrow \end{array} \otimes \begin{array}{l} \leftarrow m-s \rightarrow \\ \boxed{} \\ \boxed{} \\ \leftarrow s \rightarrow \end{array}$$

concluindo a demonstração. $\square$

4.2 $M_{1,1}(E)$ e suas Identidades Polinomiais $\mathbb{Z}_2$-Graduadas

Apresentaremos algumas definições e resultados que podem ser encontrados em [19] e que serão fundamentais para provarmos o nosso resultado principal sobre $M_{1,1}(E)$. Para o qual generalizaremos alguns dos conceitos abaixo.

Definição 4.2.1. Lembremos da Definição 1.2.115. Consideremos $G = \mathbb{Z}_2$ e $X = Y \sqcup Z$. Chamaremos M_X, M_Y *e* M_Z *os subespaços* de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ gerados pelos conjuntos X, Y e Z, respectivamente.

Definição 4.2.2. Um ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ é chamado de S_2-*ideal* se

$$f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in I \Rightarrow \forall\, a_1, \ldots, a_n \in M_Y, \forall\, b_1, \ldots, b_m \in M_Z, f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in I.$$

Definição 4.2.3. Uma função f é uma *involução* quando ela é sua própria inversa. Isto é,

$$f(f(x)) = x,\ \forall\, x \text{ no domínio da } f.$$

Definição 4.2.4. $P_{m,Z}$ é o conjunto dos polinômios multilineares de grau m em $z_1, \ldots, z_m$ de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$.

Assim,

$$f \in P_{m,Z} \Rightarrow f = \sum_{u} \sum_{\sigma \in S_m} a_{\sigma,u} u_1 z_{\sigma(1)} u_2 z_{\sigma(2)} u_3 \dots z_{\sigma(m)} u_{m+1},$$

com u_i palavras em X não contendo as indeterminadas em Z, $u = (u_1, \dots, u_{m+1})$, $z_i \in Z$, $z_1 < z_2 < \dots < z_m$, e $a_{\sigma,u} \in \mathbb{F}$.

Definição 4.2.5. Definiremos agora a seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} * : P_{m,Z} & \to & P_{m,Z} \\ f & \mapsto & f^*, \end{array}$$

onde, para $f \in P_{m,Z}$ como na definição anterior,

$$f^* = \sum_{u} \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\sigma} a_{\sigma,u} u_1 z_{\sigma(1)} u_2 z_{\sigma(2)} u_3 \dots z_{\sigma(m)} u_{m+1}.$$

Definição 4.2.6. I^* é o S_2-ideal gerado por $(I \cap P_{m,Z})^*$, quando I é um S_2-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$.

Lema 4.2.1. *A função $I \to I^*$ é uma involução de S_2-ideais.*

Lema 4.2.2. *Suponhamos $A = A_0 \oplus A_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e I o S_2-ideal das identidades graduadas do subespaço $M = M_0 \oplus M_1$, onde $M_0 \subseteq A_0$ e $M_1 \subseteq A_1$. Então, I^* é o S_2-ideal das identidades graduadas do subespaço $(M_0 \otimes E_0) \oplus (M_1 \otimes E_1)$ da álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $(A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$, com $E = E_0 \oplus E_1$ a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural da álgebra de Grassmann.*

Demonstração. Vide páginas 363 e 364 de [19]. □

Como um T_2-ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ é um S_2-ideal, podemos aplicar os lemas acima e concluir que, para $A = A_0 \oplus A_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada e $Id^{gr}(A)$ o T_2-ideal de suas identidades graduadas, o T_2-ideal $Id^{gr}(B)$ associado à álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $B = (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1)$ satisfaz a condição $Id^{gr}(B) = Id^{gr}(A)^*$.

Além disso, para todos $n, m \geq 0$, temos $Id^{gr}(B) \cap V_{n,m} = (Id^{gr}(A) \cap V_{n,m})^* = Id^{gr}(A)^* \cap V_{n,m}$.

Observação 4.2.7. Para cada monômio $M = M(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$ de $V_{n,m}$, denotemos a ordem em que os $z_i's$ ocorrem em M por $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_m}$. Então, $M^* = (-1)^{\pi} M$, onde π é a permutação $\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}$ de S_m.

Lema 4.2.3. *Seja $\triangle$ o $S_n \times S_m$-módulo unidimensional que oferece a $S_n \times S_m$-representação dada pela ação*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : (S_n \times S_m) \times V_{n,m} & \to & V_{n,m} \\ ((\sigma, \tau), f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)) & \mapsto & (-1)^{\tau} f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \end{array}$$

Então, para todo $S_n \times S_m$-submódulo N de $V_{n,m}$ temos

a) N^* é um $S_n \times S_m$-submódulo de $V_{n,m}$;

b) $N^* \cong N \otimes_{\mathbb{F}} \triangle$.

Demonstração. Consideremos $0 \neq \tilde{f} \in V_{n,m}$, tal que $\triangle = span_{\mathbb{F}} \{\tilde{f}\} = \mathbb{F}\tilde{f}$.

a) Sejam $M \in V_{n,m}$ um monômio e π a permutação que determina a ordem que as indeterminadas em Z aparecem em M. Da definição de $*$ em $V_{n,m}$ e da ação $\cdot$ em $V_{n,m}$ (Proposição 4.0.8), temos, por um lado

$$\begin{aligned}[(\sigma,\tau)\cdot M(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_m)]^* &= [M(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(n)},z_{\tau(1)},\dots,z_{\tau(m)})]^* \\ &= (-1)^{\tau\pi} M(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(n)},z_{\tau(1)},\dots,z_{\tau(m)}) \\ &= (-1)^{\tau}(-1)^{\pi} M(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(n)},z_{\tau(1)},\dots,z_{\tau(m)}),\end{aligned}$$

e por outro,

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau}(\sigma,\tau)\cdot M^* &= (-1)^{\tau}(\sigma,\tau)\cdot((-1)^{\pi}M(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_m)) \\ &= (-1)^{\tau}(-1)^{\pi}(\sigma,\tau)\cdot M(y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_m) \\ &= (-1)^{\tau}(-1)^{\pi} M(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(n)},z_{\tau(1)},\dots,z_{\tau(m)}).\end{aligned}$$

Donde,

$$[(\sigma,\tau)\cdot M]^* = (-1)^{\tau}(\sigma,\tau)\cdot M^*.$$

Assim, para $M^* \in N^*$, $(\sigma,\tau)\cdot M^* = (-1)^{\tau}[(\sigma,\tau)\cdot M]^* \in N^*$ por N ser $S_n \times S_m$-submódulo e $M \in N$. Isto conclui o item.

b) Seja

$$\begin{aligned}\varphi : N^* &\to N \otimes_{\mathbb{F}} \triangle \\ M^* &\mapsto M \otimes \tilde{f}\end{aligned}$$

Vejamos que:

- φ é $S_n \times S_m$-equivariante.

  Ora,

$$\begin{aligned}\varphi((\sigma,\tau)\cdot M^*) &= \varphi((\sigma,\tau)\cdot[(-1)^{\pi}M]) = \varphi\left((-1)^{\pi}\underbrace{(\sigma,\tau)\cdot M}_{M'}\right) \\ &= \varphi((-1)^{\pi}M') = \varphi((-1)^{\pi}(-1)^{\theta}(M')^*), \quad \text{onde } \theta \text{ é a permutação similar à } \pi \text{ para } M\text{, mas agora para } M'. \\ &= (-1)^{\pi}(-1)^{\theta}[M' \otimes \tilde{f}] \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Ainda,

$$(\sigma,\tau)\cdot[M\otimes\tilde{f}]=(\sigma,\tau)\cdot M\otimes(\sigma,\tau)\cdot\tilde{f}=M'\otimes(-1)^{\tau}\tilde{f}=(-1)^{\tau}M'\otimes\tilde{f}.$$

Como, por um lado, $(M')^*=(-1)^{\theta}M'$, e por outro,

$$\begin{aligned}(M')^* &= [(\sigma,\tau)\cdot M]^*=(-1)^{\tau}(\sigma,\tau)\cdot M^*\\ &= (-1)^{\tau}(\sigma,\tau)\cdot[(-1)^{\pi}M]=(-1)^{\tau}(-1)^{\pi}(\sigma,\tau)\cdot M\\ &= (-1)^{\tau}(-1)^{\pi}M',\end{aligned}$$

temos então, $(-1)^{\theta}=(-1)^{\tau}(-1)^{\pi}$ e, por $\mathbb{F}$ ser corpo, multiplicando ambos os lados da igualdade pela mesma quantia, chegamos em

$$(-1)^{\pi}(-1)^{\theta}=(-1)^{\tau}. \tag{4.6}$$

Substituindo (4.6) em (4.5), conseguimos

$$\varphi\left((\sigma,\tau)\cdot M^*\right)=(-1)^{\tau}[M'\otimes\tilde{f}]=(\sigma,\tau)\cdot[M\otimes\tilde{f}]=(\sigma,\tau)\varphi(M^*),$$

mostrando que φ é $S_n\times S_m$-equivariante.

- φ é injetora.

  Ora, como $\tilde{f}\neq 0$, e fazendo uso de propriedades de tensor, temos

$$\begin{aligned}\ker\varphi &= \{M^*\in N^*\mid \varphi(M^*)=M\otimes\tilde{f}=0\}\\ &= \{M^*\in N^*\mid M=0\},\end{aligned}$$

  o que implica em $\ker\varphi=\{0\}$, e, portanto, φ é injetora.

- A sobrejeção.

  Seja $M\otimes\tilde{f}\in N\otimes_{\mathbb{F}}\triangle$, devemos encontrar $M^*\in N^*$ tal que $\varphi(M^*)=M\otimes\tilde{f}$. Como $*$ é sobrejetora (é mais do que isto, é involução), temos a sobrejeção de φ demonstrada.

Assim, pelos três itens acima provados, concluímos a demonstração do item b) do lema.

□

Lema 4.2.4. *Seja $A=A_0\oplus A_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, e seja $B=(A_0\otimes E_0)\oplus(A_1\otimes E_1)$ o produto tensorial graduado de A com E.*

Se $\chi_{n,m}(A)=\sum_{\lambda\vdash n,\mu\vdash m} m_{\lambda,\mu}[\lambda]\otimes[\mu]$, então $\chi_{n,m}(B)=\sum_{\lambda\vdash n,\mu\vdash m} m_{\lambda,\mu}[\lambda]\otimes[\mu']$, onde μ' é a partição conjugada de μ.

Demonstração. Seja $Id^{gr}(A)$ o T_2-ideal das identidades graduadas de A, decomponhamos $V_{n,m}$ como soma direta dos $S_n \times S_m$-submódulos $I_{n,m}$, N. Isto é, $V_{n,m} = I_{n,m} \oplus N$.

Como $*$ é sobrejetora e $*$ age linearmente, temos ${V_{n,m}}^* = V_{n,m} = (I_{n,m})^* \oplus N^*$. Como já dito, no parágrafo após o Lema 4.2.2, ${I_{n,m}}^* = (Id^{gr}(A) \cap V_{n,m})^* = Id^{gr}(A)^* \cap V_{n,m}$. Logo, fazendo uso dos Lemas 4.2.3 e 4.2.2; de propriedades de caracter (como por exemplo, $[\lambda] \otimes [n] \cong [\lambda]$; e, $[\lambda] \otimes [\mu](\sigma \otimes \tau) = [\lambda](\sigma) \otimes [\mu](\tau) = [\lambda](\sigma)[\mu](\tau)$, considerando que $[\lambda] : \mathbb{F}S_n \to \mathbb{F}$, $[\mu] : \mathbb{F}S_m \to \mathbb{F}$ e $\mathbb{F} \otimes \mathbb{F} \cong \mathbb{F}$ por meio do produto); do fato de que $\frac{V_{n,m}}{{I_{n,m}}^*} \cong N^*$; de $\chi_{n,m}(A) = \sum\limits_{\lambda \vdash n, \mu \vdash m} m_{\lambda,\mu}[\lambda] \otimes [\mu]$; e, de N ser $S_n \times S_m$ submódulo de $V_{n,m}$, temos

$$
\begin{aligned}
\chi_{n,m}(B) &= \chi_{n,m}\left(\frac{V_{n,m}}{{I_{n,m}}^*}\right) = \chi_{n,m}(N^*) \\
&= \chi_{n,m}(N \otimes_{\mathbb{F}} \triangle) = \chi_{n,m}(N) \otimes \chi_{n,m}(\triangle) \\
&= \left(\sum_{\lambda \vdash n, \mu \vdash m} m_{\lambda,\mu}[\lambda] \otimes [\mu]\right) \otimes ([(n)] \otimes [(1^m)]) \\
&= \sum_{\lambda \vdash n, \mu \vdash m} m_{\lambda,\mu}([\lambda] \otimes [(n)]) \otimes ([\mu] \otimes [(1^m)]) \\
&= \sum_{\lambda \vdash n, \mu \vdash m} m_{\lambda,\mu}([\lambda]) \otimes ([\mu] \otimes [(1^m)]),
\end{aligned}
$$

onde $[(n)]$ é o caracter trivial de S_n e $[(1^m)]$ é o caracter alternante unidimensional de S_m.

Por fim, usando 6.6 de [17], concluímos que

$$
\chi_{n,m}(B) = \sum_{\lambda \vdash n, \mu \vdash m} m_{\lambda,\mu}[\lambda] \otimes [\mu'],
$$

onde μ' é a partição conjugada a μ. □

Chegamos agora, a partir de todo o ferramental acima, no resultado que desejávamos. Porém, para o demonstrarmos precisamos das generalizações já mencionadas:

Definição 4.2.8. Consideremos M um monômio em quaisquer indeterminadas de Y e nas indeterminadas $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_r}$ de Z, onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ (denotaremos M por $M = M(Y, z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_r})$ sem nos preocuparmos muito com as indeterminadas de Y). Definiremos uma ação $\star$ no monômio M.

Denotemos por $p_1, p_2, \ldots, p_r$ a ordem em que os $z_{i_j}'s$, com $1 \leq j \leq r$, aparecem no monômio M. Assim, $M^\star = (-1)^\pi M$, onde $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_5 \end{pmatrix}$ é uma permutação em $Sym\ \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$.

Exemplo 4.2.9. Por exemplo, consideremos $M = M(Y, z_2, z_7, z_9) = y_1 z_9 y_2 y_3 z_7 z_2 y_4$, pela definição acima, $M^\star = (-1)^\pi M = -M$, já que,

$$\pi = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 9).$$

Observação 4.2.10. Notemos que a definição de $\star$ no monômio $M(Y, z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_r})$ estende a definição de $*$ (definida apenas para monômios com m indeterminadas em Z). Ainda mais, que $\star$ é uma involução.

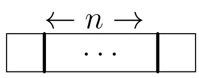
Teorema 4.2.11. *Seja $Id^{gr}(M_{1,1}(E))$ o T_2-ideal das identidades graduadas de $M_{1,1}\ (E)$, então*

a) $Id^{gr}(M_{1,1}(E))$ *é gerado por* $[y_1, y_2] = y_1y_2 - y_2y_1$ *e* $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$*;*

b) $c_{n,0}(Id^{gr}(M_{1,1}(E))) = 1$ *e* $c_{n,m}(Id^{gr}(M_{1,1}(E))) = 2^n\binom{m}{[\frac{m}{2}]}$ *para* $n \geq 0$*,* $m \geq 0$*;*

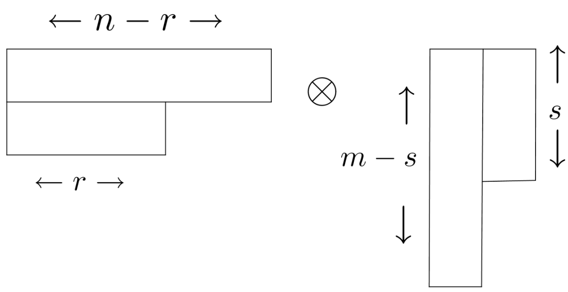
c) Para $m = 0$*,*

$$\chi_{n,0}(Id^{gr}(M_{1,1}(E))) =$$



e, para $m > 0$*,*

$$\chi_{n,m}(Id^{gr}(M_{1,1}\ (E))) = \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{s=0}^{[\frac{m}{2}]}(n+1-2r)$$



Demonstração. Consideremos $A = M_2(\mathbb{F})$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial.

Notemos que $M_{1,1}(E)$ possui a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial:

$$M_{1,1}(E)_0 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in E_0\right\} \text{ e } M_{1,1}\ (E)_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| b, c \in E_1\right\}.$$

Sejam g_0 e $\tilde{g}_0$ elementos básicos de E_0, e, g_1 e $\tilde{g}_1$ elementos básicos de E_1 (vide Exemplo 1.2.7). Consideraremos $\varphi : (A_0 \otimes E_0) \to (M_{1,1}(E))_0$ estendida linearmente a partir da seguinte definição nos tensores básicos de $A_0 \otimes E_0$:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes g_0\right) = \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes g_0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que φ é transformação linear (portanto, homomorfismo).

Ainda mais, φ é sobrejetora.

De fato, para qualquer gerador $\begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & \tilde{g_0} \end{pmatrix} \in (M_{1,1}(E))_0$, temos que

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes g_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \tilde{g_0}\right) = \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & \tilde{g_0} \end{pmatrix}.$$

Notemos também que φ é injetora.

De fato, consideremos $g_{0_1}, g_{0_2}, \ldots, g_{0_n}$ elementos básicos distintos de E_0 (caso não sejam, fazemos uso das propriedades já vistas de produto tensorial e caímos no caso em questão). Como

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \otimes g_{0_1} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \otimes g_{0_2} + \cdots + \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \otimes g_{0_n}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \otimes g_{0_1}\right) + \cdots + \varphi\left(\begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \otimes g_{0_n}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 g_{0_1} & 0 \\ 0 & d_1 g_{0_1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_n g_{0_n} & 0 \\ 0 & d_n g_{0_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 g_{0_1} + \cdots + a_n g_{0_n} & 0 \\ 0 & d_1 g_{0_1} + \cdots + d_n g_{0_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 g_{0_1} + \cdots + a_n g_{0_n} = 0 \\ d_1 g_{0_1} + \cdots + d_n g_{0_n} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \cdots = a_n = 0 \\ d_1 = \cdots = d_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \otimes g_{0_1} + \cdots + \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix} \otimes g_{0_n} = 0$$

$$\Rightarrow \ker \varphi = \{0\}.$$

Donde conluímos a injetividade, e, portanto, φ é um isomorfismo.

De modo, análogo, conseguimos que $\psi : (A_1 \otimes E_1) \to (M_{1,1}(E))_1$ estendida linearmente a partir da seguinte definição nos tensores básicos de $A_1 \otimes E_1$,

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes g_1\right) = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes g_1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_1 & 0 \end{pmatrix}$$

é isomorfismo.

E, assim, para $\gamma_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g_{0_i}$ com $\alpha_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq n$, para cada i, g_{0_i} um elemento básico de E_0, e, $\gamma_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j g_{1_j}$ com $\beta_j \in \mathbb{F}, 1 \leq j \leq m$, para cada j, g_{1_j} um elemento básico de E_1, temos que $\varphi \oplus \psi : (A_0 \otimes E_0) \oplus (A_1 \otimes E_1) \to M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}\ (E))_1$ definida nos tensores simples por:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \otimes \gamma_0 + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \otimes \gamma_1 \mapsto \varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \otimes \gamma_0\right) + \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \otimes \gamma_1\right)$$

é isomorfismo.

Portanto, $b)$ e $c)$ seguem dos Lemas 4.1.6 e 4.2.4. Além disso, pelo Lema 4.2.2, $Id^{gr}(M_{1,1}\ (E)) = Id^{gr}(A)^*$, onde $Id^{gr}(A)$ é o T_2-ideal das identidades graduadas de A. Como $char\ \mathbb{F} = 0$, $Id^{gr}(A)^*$ é o T_2-ideal gerado pelos polinômios multilineares f^*, com $f \in Id^{gr}(A)$. Pelo Lema 4.1.3, $Id^{gr}(A) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1 \rangle^{T_2}$, portanto, qualquer polinômio multilinear f de $Id^{gr}(A)$ é uma combinação linear de polinômios $a_0(a_1a_2 - a_2a_1)a_3$ e $b_0(b_1b_2b_3 - b_3b_2b_1)b_4$, onde a_i, b_j são monômios multilineares de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$, com $a_i \in \mathcal{F}_0$, $b_j \in \mathcal{F}_1$, para $i = 1, 2$, e $j = 1, 2, 3$ (Relembre a Observação 1.2.122). Para descrevermos $Id^{gr}(M_{1,1}\ (E))$, então, basta calcularmos $f^* = f^\star$ (já que, como observado, $\star$ estende $*$ em $Id^{gr}(A)$) para os polinômios

$$a_0(a_1a_2 - a_2a_1)a_3$$

$$b_0(b_1b_2b_3 - b_3b_2b_1)b_4$$

geradores como espaço vetorial de $Id^{gr}(A)$.

Consideremos a, b monômios de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$, lineares nos subconjuntos ordenados e disjuntos $\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_r}\}$, $\{z_{j_1}, \ldots, z_{j_s}\}$ de Z, isto é, $a = a(Y, z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_r})$ e $b = b(Y, z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_s})$.

Afirmação 1: $(ab)^\star = (-1)^\sigma a^\star b^\star$, onde $\sigma = \begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_r & t_{r+1} & \ldots & t_{r+s} \\ i_1 & \ldots & i_r & j_1 & \ldots & j_s \end{pmatrix}$ é uma permutação em $Sym\ \{t_1, \ldots, t_{r+s}\}$, e, $t_1, t_2, \ldots, t_{r+s}$ são os inteiros $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ escritos em ordem crescente.

Por um lado, da definição da ação $\star$, temos $(ab)^\star = (-1)^\theta ab$, onde θ é a permutação,

$$\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_r & t_{r+1} & \ldots & t_{r+s} \\ \pi(i_1) & \ldots & \pi(i_r) & \tau(j_1) & \ldots & \tau(j_s) \end{pmatrix}}_{\text{ordem dos } z's \text{ no monômio } ab}.$$

Por outro lado,

- $a^\star = (-1)^\pi a$, com $\pi = \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ \pi(i_1) & \ldots & \pi(i_r) \end{pmatrix}}_{\text{ordem dos } z_i's \text{ no monômio } a}$;

- $b^\star = (-1)^\tau b$, com $\tau = \underbrace{\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_s \\ \tau(j_1) & \dots & \tau(j_s) \end{pmatrix}}_{\text{ordem dos } z_j's \text{ no monômio } b}$;

- $(-1)^\sigma a^\star b^\star = (-1)^\sigma (-1)^\pi a (-1)^\tau b = (-1)^\sigma (-1)^\pi (-1)^\tau ab.$

Assim, para provarmos a **Afirmação 1** devemos mostrar que $(-1)^\theta = (-1)^\sigma(-1)^\pi(-1)^\tau$. Lembremos que:

- Para $n \in \mathbb{N}$, $sgn : S_n \to \{-1, 1\}$ é um homomorfismo de grupos, com o contra-domínio sendo um grupo com a operação de multiplicação. Assim, $sgn\ (\sigma\tau) = sgn\ (\sigma) \cdot sgn\ (\tau)$.

- Podemos olhar π que é uma permutação em $Sym\ \{i_1, \dots, i_r\}$ como uma permutação $\tilde{\pi}$ em $Sym\ \{t_1, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_{r+s}\}$ que fixa os inteiros $j's$ e faz o mesmo que π nos inteiros $i's$.

  Analogamente, podemos olhar τ como uma permutação $\tilde{\tau}$ em $Sym\ \{t_1, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_{r+s}\}$.

- Da definição de $\tilde{\pi}$ e $\tilde{\tau}$ no item acima, vemos que $sgn\ (\pi) = sgn\ (\tilde{\pi})$ e $sgn\ (\tau) = sgn\ (\tilde{\tau})$ (com os devidos homomorfismos sgn).

- Podemos reescrever a igualdade $(-1)^\theta = (-1)^\sigma(-1)^\pi(-1)^\tau$ fazendo uso da linguagem do homomorfismo sgn e do segundo item desta lista como: $sgn\ (\theta) = sgn\ (\sigma) \cdot sgn\ (\tilde{\pi}) \cdot sgn\ (\tilde{\tau})$. Vamos provar tal igualdade.

Usando as informações adequadas nos itens acima, e abusando um pouco de notação, temos

$$sgn\ (\sigma) \cdot sgn\ (\tilde{\pi}) \cdot sgn\ (\tilde{\tau}) = sgn\ (\tilde{\pi}) \cdot sgn\ (\tilde{\tau}) \cdot sgn\ (\sigma) = sgn\ (\tilde{\pi}\tilde{\tau}\sigma) =$$

$$= sgn \left(\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ \pi(i_1) & \dots & \pi(i_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_s \\ \tau(j_1) & \dots & \tau(j_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_{r+s} \\ i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix} \right) = sgn\ (\theta).$$

Portanto, concluímos a demonstração da **Afirmação 1**, e assim temos que

$$(ab)^\star = (-1)^\sigma a^\star b^\star.$$

Afirmação 2: Se r e s são números pares, as permutações

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_{r+s} \\ i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}}_{\gamma} \text{ e } \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_s & t_{s+1} & \dots & t_{r+s} \\ j_1 & \dots & j_s & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}}_{\eta}$$

têm o mesmo sinal.

De fato, para passarmos de γ para η são necessárias $r \cdot s$ transposições, pois, por exemplo, para passarmos i_r à "$(r+s)$-ésima coluna da permutação γ" são necessárias s transposições.

Assim, $sgn\ (\gamma) = (-1)^{r \cdot s} sgn\ (\eta)$. Como r, s são ambos pares, $r \cdot s$ é também par, e temos $sgn\ (\gamma) = sgn\ (\eta)$, terminando a **Afirmação 2**.

Afirmação 3: Se r, s e u são números ímpares, as permutações

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_{r+s} & t_{r+s+1} & \dots & t_{r+s+u} \\ i_1 & \dots & i_r & v_1 & \dots & v_s & j_1 & \dots & j_u \end{pmatrix}}_{\rho}$$

e

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_u & t_{r+1} & \dots & t_{u+s} & t_{u+s+1} & \dots & t_{u+s+r} \\ j_1 & \dots & j_u & v_1 & \dots & v_s & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}}_{\lambda}$$

têm sinais opostos.

De fato, para passarmos de ρ para $\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_s & t_{s+1} & \dots & t_{s+r} & t_{s+r+1} & \dots & t_{s+r+u} \\ v_1 & \dots & v_s & i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_u \end{pmatrix}$ são necessárias $r \cdot s$ transposições, por argumentação análoga à feita anteriormente.

Agora, para passarmos de $\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_s & t_{s+1} & \dots & t_{s+r} & t_{s+r+1} & \dots & t_{s+r+u} \\ v_1 & \dots & v_s & i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_u \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_s & t_{s+1} & \dots & t_{s+u} & t_{s+u+1} & \dots & t_{s+u+r} \\ v_1 & \dots & v_s & j_1 & \dots & j_u & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}$ são necessárias $r \cdot u$ transposições.

Por fim, para passarmos de $\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_s & t_{s+1} & \dots & t_{s+u} & t_{s+u+1} & \dots & t_{s+u+r} \\ v_1 & \dots & v_s & j_1 & \dots & j_u & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}$ para λ são necessárias $s \cdot u$ transposições.

E então, para passarmos de ρ à λ são necessárias $r \cdot s + r \cdot u + s \cdot u = r \cdot (s+u) + s \cdot u$ transposições.

Assim, $sgn\ (\rho) = (-1)^{r \cdot (s+u) + s \cdot u} sgn\ (\lambda)$. Como s, u são números ímpares, temos $s+u$ par, e então $r \cdot (s+u)$ par. Ainda, por s, u serem ímpares, temos $s \cdot u$ ímpar. Logo, $r \cdot (s+u) + s \cdot u$ é ímpar, e então, $sgn\ (\rho) = (-1)^{r \cdot (s+u) + s \cdot u} sgn\ (\lambda) = -sgn\ (\lambda)$, provando a **Afirmação 3**.

Consideremos a, b, c monômios de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$, lineares nos subconjuntos ordenados e disjuntos $\{z_{i_1}, \dots, z_{i_r}\}$, $\{z_{j_1}, \dots, z_{j_s}\}$ e $\{z_{k_1}, \dots, z_{k_u}\}$ de Z, isto é, $a = a(Y, z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_r})$, $b = b(Y, z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_s})$ e $c = c(Y, z_{k_1}, \dots, z_{k_u})$.

Afirmação 4: $(abc)^\star = (-1)^{\widetilde{\sigma}} a^\star b^\star c^\star$, onde

$$\widetilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 & \dots & \tilde{t}_r & \tilde{t}_{r+1} & \dots & \tilde{t}_{r+s} & \tilde{t}_{r+s+1} & \dots & \tilde{t}_{r+s+u} \\ i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s & k_1 & \dots & k_u \end{pmatrix}$$

é uma permutação em $Sym\ \{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{r+s+u}\}$, e, $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_{r+s+u}$ são os inteiros $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s, k_1, \dots, k_u$ escritos em ordem crescente.

De fato, usando a **Afirmação 1** e indexando cada permutação σ com os monômios aos quais ela se relaciona, conseguimos

$$(abc)^\star = ((ab)c)^\star = (-1)^{\sigma_{ab,c}}(ab)^\star c^\star = (-1)^{\sigma_{ab,c}}(-1)^{\sigma_{a,b}}a^\star b^\star c^\star,$$

onde

$$\sigma_{a,b} = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_r & t_{r+1} & \dots & t_{r+s} \\ i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix},$$

$t_1, \dots, t_{r+s}$ são os números $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$ em ordem crescente, e,

$$\sigma_{ab,c} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 & \dots & \tilde{t}_r & \dots & \tilde{t}_{r+s} & \tilde{t}_{r+s+1} & \dots & \tilde{t}_{r+s+u} \\ t_1 & \dots & t_r & \dots & t_{r+s} & k_1 & \dots & k_u \end{pmatrix},$$

$\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{r+s+u}$ são os números $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s, k_1, \dots, k_u$ em ordem crescente.

Notemos que

$$\sigma_{a,b}\sigma_{ab,c} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 & \dots & \tilde{t}_r & \tilde{t}_{r+1} & \dots & \tilde{t}_{r+s} & \tilde{t}_{r+s+1} & \dots & \tilde{t}_{r+s+u} \\ i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s & k_1 & \dots & k_u \end{pmatrix} = \widetilde{\sigma}.$$

Donde, provamos $(abc)^\star = (-1)^{\widetilde{\sigma}}a^\star b^\star c^\star$, e temos a validade da **Afirmação 4** verificada.

Afirmação 5: De uma forma geral, temos

$$(a_1a_2\dots a_n)^\star = (-1)^{\sigma_{a_1,a_2,\dots,a_n}}{a_1}^\star {a_2}^\star \dots {a_n}^\star,$$

onde $\sigma_{a_1,a_2,\dots,a_n}$ é definida de maneira semelhante à $\widetilde{\sigma}$ na afirmação anterior.

Afirmação 6:

$$(a_0(a_1a_2 - a_2a_1)a_3)^\star = \pm {a_0}^\star({a_1}^\star {a_2}^\star - {a_2}^\star {a_1}^\star){a_3}^\star,$$

com $a_0 = a_0(Y, z_{l_1}, \dots, z_{l_v})$, $a_1 = a_1(Y, z_{i_1}, \dots, z_{i_r})$, $a_2 = a_2(Y, z_{j_1}, \dots, z_{j_s})$, $a_3 = a_3(Y, z_{k_1}, \dots, z_{k_u})$; os conjuntos: $\{z_{l_1}, \dots, z_{l_v}\}$, $\{z_{i_1}, \dots, z_{i_r}\}$, $\{z_{j_1}, \dots, z_{j_s}\}$ e $\{z_{k_1}, \dots, z_{k_u}\}$ sendo ordenados e disjuntos; e, r e s sendo números pares.

Ora, da linearidade de $\star$, da sua definição, e da **Afirmação 5**, temos

$$\begin{aligned} (a_0(a_1a_2 - a_2a_1)a_3)^\star &= (a_0a_1a_2a_3 - a_0a_2a_1a_3)^\star = (a_0a_1a_2a_3)^\star - (a_0a_2a_1a_3)^\star \\ &= (-1)^{\sigma_{a_0,a_1,a_2,a_3}}{a_0}^\star {a_1}^\star {a_2}^\star {a_3}^\star - (-1)^{\sigma_{a_0,a_2,a_1,a_3}}{a_0}^\star {a_2}^\star {a_1}^\star {a_3}^\star \end{aligned} \tag{4.7}$$

Notemos que

$$\sigma_{a_0,a_1,a_2,a_3} = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_{v+1} & \dots & t_{v+r} & t_{v+r+1} & \dots & t_{v+r+s} & \dots & t_{v+r+s+u} \\ l_1 & \dots & i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s & \dots & k_u \end{pmatrix}$$

e

$$\sigma_{a_0,a_2,a_1,a_3} = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_{v+1} & \dots & t_{v+s} & t_{v+s+1} & \dots & t_{v+s+r} & \dots & t_{v+s+r+u} \\ l_1 & \dots & j_1 & \dots & j_s & i_1 & \dots & i_r & \dots & k_u \end{pmatrix},$$

onde $t_1, \dots, t_{v+r+s+u}$ são os inteiros $l_1, \dots, l_v, i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s, k_1, \dots, k_u$ em ordem crescente.

Fazendo uso da **Afirmação 2**, uma vez que temos r e s pares, concluímos que σ_{a_0,a_1,a_2,a_3} e σ_{a_0,a_2,a_1,a_3} possuem o mesmo sinal. Assim, retornando à (4.7), conseguimos

$$(a_0(a_1a_2 - a_2a_1)a_3)^\star = \pm a_0{}^\star(a_1{}^\star a_2{}^\star - a_2{}^\star a_1{}^\star)a_3{}^\star,$$

concluindo a **Afirmação 6**.

Afirmação 7:

$$(b_0(b_1b_2b_3 - b_3b_2b_1)b_4)^\star = \pm b_0{}^\star(b_1{}^\star b_2{}^\star b_3{}^\star + b_3{}^\star b_2{}^\star b_1{}^\star)b_4{}^\star,$$

com $b_0 = b_0(Y, z_{\widetilde{l_1}}, \dots, z_{\widetilde{l_v}})$, $b_1 = b_1(Y, z_{\widetilde{i_1}}, \dots, z_{\widetilde{i_r}})$, $b_2 = b_2(Y, z_{\widetilde{j_1}}, \dots, z_{\widetilde{j_s}})$, $b_3 = b_3(Y, z_{\widetilde{k_1}}, \dots, z_{\widetilde{k_u}})$ e $b_4 = b_4(Y, z_{\widetilde{m_1}}, \dots, z_{\widetilde{m_w}})$; os conjuntos: $\{z_{\widetilde{l_1}}, \dots, z_{\widetilde{l_v}}\}$, $\{z_{\widetilde{i_1}}, \dots, z_{\widetilde{i_r}}\}$, $\{z_{\widetilde{j_1}}, \dots, z_{\widetilde{j_s}}\}$, $\{z_{\widetilde{k_1}}, \dots, z_{\widetilde{k_u}}\}$ e $\{z_{\widetilde{m_1}}, \dots, z_{\tilde{m}_w}\}$ sendo ordenados e disjuntos; e, r, s e u sendo números ímpares.

Ora, da linearidade de $\star$, da sua definição, e da **Afirmação 5**, temos

$$\begin{aligned} (b_0(b_1b_2b_3 - b_3b_2b_1)b_4)^\star &= (b_0b_1b_2b_3b_4 - b_0b_3b_2b_1b_4)^\star = (b_0b_1b_2b_3b_4)^\star - (b_0b_3b_2b_1b_4)^\star \\ &= (-1)^{\sigma_{b_0,b_1,b_2,b_3,b_4}} b_0{}^\star b_1{}^\star b_2{}^\star b_3{}^\star b_4{}^\star \\ &\quad -(-1)^{\sigma_{b_0,b_3,b_2,b_1,b_4}} b_0{}^\star b_3{}^\star b_2{}^\star b_1{}^\star b_4{}^\star \end{aligned} \tag{4.8}$$

Notemos que

$$\sigma_{b_0,b_1,b_2,b_3,b_4} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 & \dots & \tilde{t}_{v+1} & \dots & \tilde{t}_{v+r+1} & \dots & \tilde{t}_{v+r+s+1} & \dots & \tilde{t}_{v+r+s+u+w} \\ \tilde{l}_1 & \dots & \tilde{i}_1 & \dots & \tilde{j}_1 & \dots & \tilde{k}_1 & \dots & \tilde{m}_w \end{pmatrix},$$

e,

$$\sigma_{b_0,b_3,b_2,b_1,b_4} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 & \dots & \tilde{t}_{v+1} & \dots & \tilde{t}_{v+u+1} & \dots & \tilde{t}_{v+u+s+1} & \dots & \tilde{t}_{v+u+s+r+w} \\ \tilde{l}_1 & \dots & \tilde{k}_1 & \dots & \tilde{j}_1 & \dots & \tilde{i}_1 & \dots & \tilde{m}_w \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{v+r+s+u+w}$ são os inteirtos $\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_v, \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_r, \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_s, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_u, \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_w$ em ordem crescente.

Fazendo uso da **Afirmação 3**, uma vez que temos r, s e u ímpares, concluímos que $\sigma_{b_0,b_1,b_2,b_3,b_4}$ e $\sigma_{b_0,b_3,b_2,b_1,b_4}$ possuem sinais opostos. Assim, retornando à (4.8) e analisando as possibilidades de sinais para $\sigma_{b_0,b_1,b_2,b_3,b_4}$, conseguimos

$$(b_0(b_1b_2b_3 - b_3b_2b_1)b_4)^\star = \begin{cases} {b_0}^\star {b_1}^\star {b_2}^\star {b_3}^\star {b_4}^\star + {b_0}^\star {b_3}^\star {b_2}^\star {b_1}^\star {b_4}^\star, \text{ ou} \\ -{b_0}^\star {b_1}^\star {b_2}^\star {b_3}^\star {b_4}^\star - {b_0}^\star {b_3}^\star {b_2}^\star {b_1}^\star {b_4}^\star \end{cases}.$$

Donde,

$$(b_0(b_1b_2b_3 - b_3b_2b_1)b_4)^\star = \pm {b_0}^\star ({b_1}^\star {b_2}^\star {b_3}^\star + {b_3}^\star {b_2}^\star {b_1}^\star) {b_4}^\star,$$

concluindo a **Afirmação 7**.

Das **Afirmações 6** e **7**, o T_2-ideal procurado, $Id^{gr}(M_{1,1}\ (E))$, é gerado como espaço vetorial pelos polinômios multilineares

$${a_0}^\star ({a_1}^\star {a_2}^\star - {a_2}^\star {a_1}^\star) {a_3}^\star$$

$${b_0}^\star ({b_1}^\star {b_2}^\star {b_3}^\star + {b_3}^\star {b_2}^\star {b_1}^\star) {b_4}^\star.$$

Por fim, notemos que, a menos de endomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados, os polinômios multilineares acima são gerados por $[y_1, y_2]$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$, respectivamente. Portanto,

$$Id^{gr}(M_{1,1}\ (E)) = \langle [y_1, y_2], z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \rangle^{T_2},$$

completando a demonstração.

$\square$

Capítulo 5

As Identidades Polinomiais Graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$

Neste capítulo, classificaremos todas as possíveis G-graduações, com G um grupo multiplicativo (as Definições 1.2.102 e 1.2.115 são as mesmas, com as devidas alterações para a operação do grupo), para a álgebra $UT_2(\mathbb{F})$, das matrizes triangulares superiores de ordem 2×2 sobre um corpo $\mathbb{F}$, que, por simplicidade, denotaremos como UT_2; estudaremos todas as identidades graduadas para as G-graduações de UT_2; descreveremos completamente o espaço das identidades polinomiais graduadas multilineares por meio da Teoria de Representação quando o grupo é hiperoctaedral e $char\ \mathbb{F} = 0$; falaremos de cocaracteres e codimensões graduadas, e ainda, mostraremos uma importante relação com os caracteres via ação do grupo hiperoctaedral e via ação do grupo $S_r \times S_{n-r}$; por fim, falaremos de uma sequência numérica que capta o comportamento exponencial da sequência de codimensões graduadas, e calcularemos esta para UT_2.

Tudo o que vai ser aqui feito é fundamentado no artigo [34] de Valenti.

Manteremos a Definição 4.0.4 e sua Observação, também adicionaremos:

Definição 5.0.1. Um *polinômio graduado*, $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$, é *multilinear de grau n em* $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$, se em cada monômio de f, ou y_i ou z_i aparece para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Denotaremos por ${P_n}^{gr}$ o espaço de tais polinômios.

Para enterdemos o que vem a ser o grupo hiperoctaedral (referido no início do capítulo), e, como este age no espaço ${P_n}^{gr} \cap Id^{gr}(UT_2)$, das identidades polinomiais graduadas multilineares de grau n de UT_2, precisamos:

Definição 5.0.2. Consideremos o grupo simétrico S_n e G um grupo. O conjunto

$$\{(a_1, \ldots, a_n; \sigma) \mid a_i \in G, \sigma \in S_n\},$$

junto com a lei de composição

$$(a_1, \ldots, a_n; \sigma)(b_1, \ldots, b_n; \tau) := (a_1 b_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_n b_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma\tau)$$

é um grupo chamado *produto entrelaçado* de G por S_n, e é denotado por $G \wr S_n$.

Definição 5.0.3. O *grupo hiperoctaedral*, H_n, é o produto entrelaçado de $\mathbb{Z}_2 = \{1, g\}$, como grupo multiplicativo de ordem 2, por S_n. Ou seja, $H_n := \mathbb{Z}_2 \wr S_n$.

Definição 5.0.4. Seja A uma *superálgebra*, ou seja, considerando A com uma $\mathbb{Z}_2$-graduação, definimos

$$P_n{}^{gr}(A) = \frac{P_n{}^{gr}}{P_n{}^{gr} \cap Id^{gr}(A)}.$$

Podemos ver $P_n{}^{gr}(A)$ como o *"subespaço" dos polinômios multilineares de grau n que não são identidades polinomiais graduadas da superálgebra A.*

Definição 5.0.5. Para uma superálgebra A, a sequência

$$c_n{}^{gr}(A) = \dim_{\mathbb{F}} P_n{}^{gr}(A) = \dim_{\mathbb{F}} \frac{P_n{}^{gr}}{P_n{}^{gr} \cap Id^{gr}(A)}, \ n = 1, 2, \ldots$$

é chamada de *sequência das codimensões graduadas de A.*

5.1 Graduações em UT_2

Provaremos, nesta seção que, a menos de isomorfismo, UT_2 possui apenas duas G-graduações, sendo G um grupo com notação multiplicativa. Lembremos o que vem a ser uma G-graduação trivial de UT_2 por meio do Exemplo 1.2.104 (com as devidas alterações da operação do grupo). Definamos agora o que vem a ser uma G-graduação canônica para UT_2:

Definição 5.1.1. Seja G um grupo arbitrário com notação multiplicativa. Dizemos que *UT_2 tem G-graduação canônica* se existe $g \in G$, $g \neq 1$, tal que $UT_2 = (UT_2)_1 \oplus (UT_2)_g$, onde $(UT_2)_1 = \mathbb{F}E_{11} + \mathbb{F}E_{22}$ e $(UT_2)_g = \mathbb{F}E_{12}$, com E_{ij}, $i, j = 1, 2$, sendo as matrizes unitárias do Exemplo 1.2.5.

Antes de provarmos que só existem duas G-graduações para UT_2, a menos de isomorfismos, façamos uma definição e um exemplo que podem ser encontrados em [6].

Definição 5.1.2. O ideal nilpotente maximal de uma álgebra A de dimensão finita é chamado de *radical de Jacobson* de A.

Exemplo 5.1.3. O radical de Jacobson da UT_n (matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$), é o conjunto das matrizes estritamente triangulares superiores (a diagonal é nula).

Assim, no caso UT_2, $J = \mathbb{F}E_{12}$.

Teorema 5.1.4. *Qualquer G-graduação em UT_2 é, a menos de isomorfismo, ou trivial ou canônica.*

Demonstração. Por simplicidade, escrevamos $A = UT_2$, e, consideremos $e \in G$ como sendo o elemento unidade de G.

Afirmação: Se $\dim A_e = 3$, então A tem graduação trivial.

De fato, sabemos que $\dim A = 3$; da G-graduação de A, $A = A_e \oplus \left(\bigoplus_{g\in G,\ g\neq e} A_g\right)$ e, por hipótese $\dim A_e = 3$; logo, devemos ter $\dim \bigoplus_{g\in G,\ g\neq e} A_g = 0$. Portanto, para $g \neq e$, $\dim A_g = 0$.

Assim, assumiremos $\dim A_e \leq 2$.

Suponhamos primeiro que $\dim A_e = 2$. Podemos assumir que $E_{11} + E_{22}$ e $aE_{11} + bE_{12}$ formam uma base de A_e sobre $\mathbb{F}$, para adequados $a, b \in \mathbb{F}$ (não ambos nulos). Pois,

- Sabemos, com as devidas alterações sobre a operação do grupo, pela Proposição 1.2.111 que $E_{11} + E_{22} \in A_e$;

- Notemos que

$$(cE_{11} + dE_{12} + eE_{22})(aE_{11} + bE_{12}) = caE_{11} + cbE_{12} = c(aE_{11} + bE_{12}),$$

  com $a, b, c, d, e \in \mathbb{F}$.

  Assim, suponhamos que $(aE_{11} + bE_{12}) \in A_g$ com $g \neq e$, consideremos $(cE_{11} + dE_{12} + eE_{22}) \in A_{\tilde{g}}$ para algum $\tilde{g} \in G$. Então,

$$A_{\tilde{g}}A_g \ni (cE_{11} + dE_{12} + eE_{22})(aE_{11} + bE_{12}) = c(aE_{11} + bE_{12}) \in A_g,$$

  e como $A_{\tilde{g}}A_g \subseteq A_{\tilde{g}g}$, conseguimos, por $\tilde{g}g \neq g$, o absurdo de $A_{\tilde{g}g} \cap A_g \neq \{0\}$, logo $g = e$. Ou seja, $aE_{11} + bE_{12} \in A_e$;

- Verifiquemos que $E_{11} + E_{22}$ e $aE_{11} + bE_{12}$ são L.I:

$$\begin{aligned}
& \lambda(E_{11} + E_{22}) + \mu(aE_{11} + bE_{12}) = 0_{2\times 2}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F} \\
\Rightarrow\ & (\lambda + \mu a)E_{11} + \lambda E_{22} + \mu b E_{12} = 0_{2\times 2} \\
\Rightarrow\ & \begin{cases} \lambda + \mu a = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu b = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow\ & \mu a = 0 \ e \ \mu b = 0 \\
\Rightarrow\ & \mu = 0, \text{ pois, ou } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0.
\end{aligned}$$

  Portanto, $E_{11} + E_{22}$ e $aE_{11} + bE_{12}$ são L.I.

E, juntando os três itens, mostramos o porquê de podermos assumir que $E_{11} + E_{22}$ e $aE_{11} + bE_{12}$ formam uma base de A_e sobre $\mathbb{F}$, para adequados $a, b \in \mathbb{F}$.

Como $\dim A = 3$, existe $g \in G$, tal que $\dim A_g = 1$ (de fato, $A = A_e \bigoplus_{g\in G,\ g\neq e} A_g$, $\dim A = 3$, $\dim A_e = 2$, portanto, existe $g \in G$, $g \neq e$ com $\dim A_g > 0$). Seja, $A_g = span_{\mathbb{F}}\ \{a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22}\}$, com $a', b', c' \in \mathbb{F}$ não todos nulos.

Caso $a = 0$, A_e tem base $\{E_{11} + E_{22}, bE_{12}\}$. Das inclusões $A_gA_e \subseteq A_g$ e $A_eA_g \subseteq A_g$, e do fato de que

$$(a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22})(bE_{12}) = a'bE_{12} \in A_g \cap A_e = \{0\},$$

e

$$(bE_{12})(a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22}) = bc'E_{12} \in A_g \cap A_e = \{0\},$$

temos que $a' = 0 = c'$.

Portanto, $A_g = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{12}\} \subseteq A_e$, uma contradição. Donde, vemos que $a \neq 0$, e podemos assumir $a = 1$.

Segue assim, por $\{E_{11} + E_{22}, E_{11} + bE_{12}\}$ ser base de A_e no caso em que $a \neq 0$, e por

$$E_{22} - bE_{12} = (E_{11} + E_{22}) - (E_{11} + bE_{12}),$$

que os elementos $E_{11} + bE_{12}$ e $E_{22} - bE_{12}$ formam uma base de A_e sobre $\mathbb{F}$.

Suponhamos primeiro que $b \neq 0$. Consideremos, $A_g = span_{\mathbb{F}}\ \{a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22}\}$, com $a', b', c' \in \mathbb{F}$. Lembremos que $A_gA_e \subseteq A_g$ e $A_eA_g \subseteq A_g$. Como

$$(a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22})(E_{11} + bE_{12}) = a'(E_{11} + bE_{12}) \in A_g \cap A_e = \{0\},$$

obtemos que $a' = 0$. Analogamente,

$$(E_{22} - bE_{12})(b'E_{12} + c'E_{22}) = c'(E_{22} - bE_{12}) \in A_g \cap A_e = \{0\},$$

obtemos que $c' = 0$. Portanto, $A_g = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{12}\}$, $A_e = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{11} + E_{22}, E_{11} + bE_{12}\}$ e $A_e \oplus A_g$ é isomorfo a $A = UT_2$ com G-graduação canônica.

Vejamos o isomorfismo explicitamente, para tanto, lembremos que

- $A = UT_2$ canônica, A^{can}:

$$A^{can} = {A_e}^{can} \oplus {A_g}^{can};$$

$${A_e}^{can} = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{11}, E_{22}\};$$

$${A_g}^{can} = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{12}\}.$$

- $A = UT_2$ que aparece no teorema, A^{teo}:

$$A^{teo} = {A_e}^{teo} \oplus {A_g}^{teo};$$

$${A_e}^{teo} = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{11} + bE_{12}, E_{22} - bE_{12}\}, 0 \neq b \in \mathbb{F};$$

$$A_g{}^{teo} = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{12}\}.$$

Consideremos

$$\begin{array}{rcl} \varphi : A^{can} & \to & A^{teo} \\ E_{12} & \mapsto & E_{12} \\ E_{11} & \mapsto & a_{11}(E_{11} + bE_{12}) + a_{12}(E_{22} - bE_{12}) \\ E_{22} & \mapsto & a_{21}(E_{11} + bE_{12}) + a_{22}(E_{22} - bE_{12}), \end{array}$$

onde, $a_{ij} \in \mathbb{F}$ com $i, j = 1, 2$, estendida linearmente.

Tentemos fazer com que φ seja o homomorfismo de álgebras que respeita a graduação:

- Ora, devemos ter $\varphi(E_{11} + E_{22}) = E_{11} + E_{22}$. Assim, como

  $$\varphi(E_{11}+E_{22}) = a_{11}(E_{11}+bE_{12})+a_{12}(E_{22}-bE_{12})+a_{21}(E_{11}+bE_{12})+a_{22}(E_{22}-bE_{12}),$$

  temos igualando:

  $$\begin{cases} (a_{11} + a_{21})E_{11} = 1E_{11} \\ (a_{12} + a_{22})E_{22} = 1E_{22} \\ (a_{11}b - a_{12}b + a_{21}b - a_{22}b)E_{12} = 0E_{12} \end{cases}.$$

  Donde,

  $$\begin{cases} a_{11} + a_{21} = 1 \\ a_{12} + a_{22} = 1 \\ a_{11} - a_{12} + a_{21} - a_{22} = 0 \end{cases}$$

- Agora,

  $$\varphi(E_{11} \cdot E_{12}) = \varphi(E_{11}) \cdot \varphi(E_{12}) = [a_{11}(E_{11} + bE_{12}) + a_{12}(E_{22} - bE_{12})]E_{12} = a_{11}E_{12},$$

  por outro lado,

  $$\varphi(E_{11} \cdot E_{12}) = \varphi(E_{12}) = E_{12}.$$

  Donde, $a_{11} = 1$.

- Ainda,

  $$\varphi(E_{12} \cdot E_{22}) = \varphi(E_{12}) \cdot \varphi(E_{22}) = E_{12}[a_{21}(E_{11} + bE_{12}) + a_{22}(E_{22} - bE_{12})] = a_{22}E_{12},$$

  por outro lado,

  $$\varphi(E_{12} \cdot E_{22}) = \varphi(E_{12}) = E_{12}.$$

Donde, $a_{22} = 1$.

Assim, juntando as informações, conseguimos $a_{11} = 1 = a_{22}$ e $a_{12} = 0 = a_{21}$. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi : A^{can} &\to A^{teo} \\ E_{12} &\mapsto E_{12} \\ E_{11} &\mapsto E_{11} + bE_{12} \\ E_{22} &\mapsto E_{22} - bE_{12} \end{aligned}$$

é um homomorfismo entre as álgebras graduadas, que respeita a graduação, e é também bijetor. Isto é, um isomorfismo que respeita a graduação, aquele que desejávamos explicitar.

Por fim, chegamos ao último caso para $\dim A_e = 2$, caso $b = 0$. Neste caso, $A_e = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{11}, E_{22}\}$ e $A_g = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{12}\}$ (de fato, $(a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22})E_{11} = a'E_{11} \in A_g \cap A_e = \{0\} \Rightarrow a' = 0$ e $E_{22}(a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22}) = c'E_{22} \in A_g \cap A_e = \{0\} \Rightarrow c' = 0$). Portanto, temos tal caso feito também.

Suponhamos agora que $\dim A_e = 1$, isto é, $A_e = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{11} + E_{22}\}$. Então, ou $UT_2 = A = A_e \oplus A_g \oplus A_h$, onde $\dim A_g = \dim A_h = 1$; ou $UT_2 = A = A_e \oplus A_g$, com $\dim A_g = 2$. Seja $UT_2 = A = A_e \oplus A_g \oplus A_h$, e suponhamos primeiramente $gh \neq e$. Então, $A_g A_h = \{0\}$ (de fato, $A_g A_h \subseteq A_{gh} \neq A_e$ $(gh \neq e)$, $A_{gh} \neq A_g$ $(h \neq e)$ e $A_{gh} \neq A_h$ $(g \neq e)$), e, no caso $g^2 \neq e$ e $h^2 \neq e$ temos $A_g \oplus A_h$ um ideal nilpotente de $A = UT_2$ de dimensão 2, contradizendo o fato de que $\dim J = 1$, onde J é o radical de Jacobson de $A = UT_2$. Portanto, ou $g^2 \neq e$, $h^2 = e$ (analogamente, $g^2 = e$, $h^2 \neq e$); ou $g^2 = h^2 = e$. No primeiro caso, $g^2 \neq e$ e $h^2 = e$, $A_g = J$ e considerando $A_h = span_{\mathbb{F}}\ \{aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}\}$, temos de $A_g A_h = A_h A_g = \{0\}$ e

$$E_{12}(aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}) = cE_{12} \in A_g,$$

$$(aE_{11} + bE_{12} + cE_{22})E_{12} = aE_{12} \in A_g,$$

conseguimos $c = 0 = a$.

Donde, $A_h = span_{\mathbb{F}}\ \{E_{12}\} = J = A_g$, uma contradição (estamos no caso, $A = A_e \oplus A_g \oplus A_h$). Agora, no caso $g^2 = h^2 = e$, como $A_g = span_{\mathbb{F}}\ \{u\}$, $A_h = span_{\mathbb{F}}\ \{v\}$, onde $u^2 = v^2 = 1$, $u, v \in A = UT_2$, conseguimos que $0 \neq uv \in A_g A_h$ (se $uv = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $v = 0 \Rightarrow u^2 = 0$ ou $v^2 = 0$, absurdo!), uma contradição ($A_g A_h = 0$, já feito acima!).

Suponhamos agora, que $gh = e$. Se $g^3 \neq e$, então $g^2 \neq g^{-1}$, $g^{-1} \neq g$ (pois, caso contrário, $g^2 = g^{-1} \Rightarrow g^3 = gg^2 = gg^{-1} = e$; e, $g = g^{-1} \Rightarrow g^2 = gg = gg^{-1} = e \Rightarrow g^3 = g^2 g = g$ e g^{-1}; ambas contradições), portanto, $(A_g)^2 = (A_h)^2 = \{0\}$ (se $(A_g)^2 \neq \{0\}$, teremos $(A_g)^2 = A_g A_g \subseteq A_{g^2}$, e então, ou $g^2 = e \Rightarrow g = g^{-1}$; ou $g^2 = h \Rightarrow g^3 = gg^2 = gh = e$; ou $g^2 = g \Rightarrow gg = g \Rightarrow g = e \Rightarrow g^3 = e$; todos contradições. Analogamente, chegamos a contradição ao supormos $(A_h)^2 \neq \{0\}$), uma contradição com $\dim J = 1$.

No caso $g^3 = e$, obtemos que $A_g = span_{\mathbb{F}}\ \{a\}$ onde $a = \alpha E_{11} + E_{22}$ com α uma raiz terceira da unidade. De fato, $(A_g)^3 = A_gA_gA_g \subseteq A_gA_{g^2} \subseteq A_{g^3} = A_e$, e então, por um lado, $a^3 = \lambda(E_{11} + E_{22}) = \lambda E_{11} + \lambda E_{22}$ com $a = (a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22})$. Por outro lado, como,

- $a^2 = (a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22})(a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22}) = a'^2E_{11}+a'b'E_{12}+b'c'E_{12}+c'^2E_{22}$;
- $a^3 = a^2a = (a'^2E_{11} + a'b'E_{12} + b'c'E_{12} + c'^2E_{22})(a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22}) = a'^3E_{11} + a'^2b'E_{12} + a'b'c'E_{12} + b'c'^2E_{12} + c'^3E_{22}$;
- Igualando,

$$a'^3E_{11} + (a'^2b' + a'b'c' + b'c'^2)E_{12} + c'^3E_{22} = \lambda E_{11} + \lambda E_{22}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a'^3 = \lambda \\ a'^2b' + a'b'c' + b'c'^2 = 0 \\ c'^3 = \lambda \end{cases}$$

Como $a^3 = 1$, temos $\lambda = 1$ e $a'^3 = 1 \Rightarrow a'$ é raiz terceira da unidade. Portanto, $a = \alpha E_{11} + E_{22}$ com α raiz terceira da unidade.

Então, teríamos dim $(\mathbb{F}a + \mathbb{F}a^2 + \mathbb{F}e) = 2$, uma contradição.

Resta-nos apenas $UT_2 = A = A_e \oplus A_g$ e $\dim A_g = 2$. Se $g^2 \neq e$ segue que $(A_g)^2 = A_gA_g \subseteq A_g \neq A_e$ e A_g é um ideal nilpotente, donde, $A_g \subseteq J$, uma contradição ($\dim A_g = 2 > 1 = \dim J$). Portanto, $g^2 = e$. Como $A_gA_g \subseteq A_e$, conseguimos uma contradição também neste caso.

Assim, tendo coberto todas as possibilidades, provamos o necessário. □

Observação 5.1.5. No caso de um grupo abeliano finito G, todas as possíveis G-graduações da álgebra $UT_n(\mathbb{F})$, das matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de característica zero, está descrito em [35].

A partir do Teorema 5.1.4, fica claro que quando falarmos de identidades polinomiais graduadas para UT_2, elas são identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas, assim como as G-graduações serão $\mathbb{Z}_2$-graduações. Portanto, em certos momentos evitaremos a redundância.

5.2 Cocaracteres e Codimensões Graduadas

No decorrer desta seção, que vem a definir os cocaracteres e as codimensões graduadas, e ainda, relacionar as ações via os dois grupos mencionados no início do capítulo, consideraremos $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero e $A = A_0 \oplus A_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada (ou superálgebra).

Utilizando a mesma definição da superálgebra associativa livre vista na Definição 4.0.4, sabemos que para qualquer superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$, qualquer função $Y \sqcup Z \to A$ preservando a graduação (lembrando que as variáveis $y_i \in Y$ e $z_i \in Z$ são homogêneas de graus zero e um, respectivamente), pode ser estendida a um único homomorfismo de superálgebras $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr} \to A$ (Propriedade Universal, análoga à, em 1.2.82).

Observemos uma relação interessante e com a qual trabalharemos aqui.

Observação 5.2.1. Para qualquer $\mathbb{F}$-álgebra A, existe uma dualidade entre $\mathbb{Z}_2$-graduações de A e Φ-ações onde $\Phi \in Aut(A)$ é um automorfismo de ordem dois.

Ora, se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de A, então $\Phi : A \to A$ tal que $\Phi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$ é um automorfismo de ordem dois em A.

Agora, se Φ é um automorfismo de ordem dois em A, então $A = A_0 \oplus A_1$ onde $A_0 = \{a \in A \mid \Phi(a) = a\}$ e $A_1 = \{a \in A \mid \Phi(a) = -a\}$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de A.

Observação 5.2.2. Consideremos $\overline{x_i} = y_i + z_i$ e $\overline{x_i}^{\Phi} = y_i - z_i$, com $i = 1, 2, \ldots$, e suponhamos que Φ age como um autormorfismo de ordem dois em $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Então, $\mathbb{F}\langle X\rangle$ se torna uma álgebra livre em X com Φ-ação, que denotaremos por $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\Phi}$ (ou ainda, pela observação anterior, uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada).

Ainda, de modo análogo ao acima visto, se A é uma álgebra qualquer com um automorfismo Φ, tal que $\Phi^2 = Id$, então, qualquer função $f : \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots\} \to A$, se estende unicamente a um homomorfismo $\overline{f} : \mathbb{F}\langle X\rangle^{\Phi} \to A$, tal que, $\overline{f}(\overline{x_i}^{\Phi}) = f(\overline{x_i})^{\Phi}$.

Assim, pela dualidade expressa na Observação 5.2.1 e como já vimos na Observação 4.0.5 a definição de identidade polinomial graduada para uma superálgebra, faremos o mesmo para uma Φ-identidade.

Definição 5.2.3. $f(\overline{x_1}, \overline{x_1}^{\Phi}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{x_n}^{\Phi})$ é uma uma Φ-*identidade* para uma superálgebra A, se $f(c_1, c_1{}^{\Phi}, \ldots, c_n, c_n{}^{\Phi}) = 0$ para todos $c_1, \ldots, c_n \in A$.

Definição 5.2.4. $Id^{\Phi}(A)$ é o *ideal* de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ *das* Φ*-identidades de* A.

Observação 5.2.5. Novamente, pela dualidade, e pela definição de $Id^{gr}(A)$ para uma superálgebra A (vide Definição 3.4.3), temos que $Id^{gr}(A) = Id^{\Phi}(A)$. O que nos permite usar a linguagem mais conveniente em cada momento.

Como estamos em um corpo de característica zero, sabemos que o conjunto das identidades polinomiais graduadas de uma superálgebra é completamente determinado pelo espaço dos polinômios multilineares (na verdade, com as devidas alterações, é mais geral do que para superálgebra, olhe Teorema 3.2.3). Sendo assim, definimos:

Definição 5.2.6. $P_n{}^{\Phi}$ é o *espaço vetorial dos* Φ*-polinômios multilineares de grau* n *em* $\overline{x_1}, \overline{x_1}^{\Phi}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{x_n}^{\Phi}$. Segue da dualidade e da Definição 5.0.1,

$$P_n{}^{\Phi} = P_n{}^{gr} = span_{\mathbb{F}}\,\{w_{\sigma(1)} \ldots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ ou } w_i = z_i, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Observação 5.2.7. Lembremos da Definição 5.0.3, do grupo hiperoctaedral de grau n, H_n. Considerando Φ um automorfismo de ordem dois, podemos considerar H_n como o produto entrelaçado de $\mathbb{Z}_2 = \{1, \Phi\}$ e S_n, grupo simétrico de grau n.

Para continuarmos a entender como ocorre a estrutura de H_n-módulo do espaço ${P_n}^{gr}$ e como podemos decompô-lo em H_n-módulos irredutíveis, vamos olhar alguns resultados em [12].

Definição 5.2.8. Consideremos G um grupo abeliano finito de ordem k, e $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado e de característica zero.

Denotemos a álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ por B, e, o produto tensorial n vezes da álgebra de grupo $\underbrace{B \otimes \cdots \otimes B}_{n-vezes}$ por $B^{\otimes n}$.

Observação 5.2.9. O grupo S_n age naturalmente em $B^{\otimes n}$ permutando as coordenadas. Isto é, se $\sigma \in S_n$, $b = b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \in B^{\otimes n}$, então $\sigma(b) = \sigma(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = b_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes b_{\sigma^{-1}(n)}$.

Definição 5.2.10. A *álgebra de grupo* $\mathbb{F}[G \wr S_n]$, que escreveremos $B \wr S_n$, é definida como o espaço vetorial $B \wr S_n = B^{\otimes n} \otimes \mathbb{F}S_n$, com multiplicação dada por $(b \otimes \sigma)(c \otimes \tau) = (b\sigma(c)) \otimes \sigma\tau$, onde $b, c \in B^{\otimes n}$, $\sigma, \tau \in S_n$.

Observação 5.2.11. Como G é abeliano de ordem k, *char* $\mathbb{F} = 0$, e $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, sabemos que existem $f_1, \ldots, f_k$ idempotentes minimais tais que $\mathbb{F}f_i$ é representação irredutível de G (vide Seção 3.5 e [11]).

Seja W um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com $\dim W \geq n$. Então, decomporemos $\mathbb{F}G \otimes W = B \otimes W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, onde para $i = 1, \ldots, k$, $W_i = \mathbb{F}f_i \otimes_{\mathbb{F}} W = f_i \otimes W$.

Definição 5.2.12. Consideremos $n = m_1 + \cdots + m_k$, onde $m_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$. Seja S_{m_i} o grupo simétrico agindo nos conjuntos $\{m_1 + \cdots + m_{i-1} + 1, \ldots, m_1 + \cdots + m_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, $m_0 = 0$.

Observação 5.2.13. Deste modo, temos a seguinte identificação:

$$\mathbb{F}[S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_k}] \equiv \mathbb{F}S_{m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}S_{m_k}.$$

Observação 5.2.14. Se $V = \mathbb{F}G \otimes W = B \otimes W$, conseguimos a identificação $V^{\otimes n} \equiv (\mathbb{F}G)^{\otimes n} \otimes W^{\otimes n} = B^{\otimes n} \otimes W^{\otimes n}$.

Observação 5.2.15. A função

$$\varphi : B \wr S_n \to End_{\mathbb{F}}\ (V^{\otimes n}) \equiv End_{\mathbb{F}}\ (B^{\otimes n} \otimes W^{\otimes n}),$$

definida por $\varphi(b \otimes \sigma)(\underbrace{c \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n}_{\in B^{\otimes n} \otimes W^{\otimes n}}) = \underbrace{b\sigma(c)}_{\in B^{\otimes n}} \otimes \underbrace{w_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma^{-1}(n)}}_{\in W^{\otimes n}}$ é um homomorfismo injetor.

Definição 5.2.16. Para todo $i = 1, \ldots, k$, seja $\lambda(i) \vdash m_i$ e consideremos um tableau associado à partição $\lambda(i)$. Denotemos por $E_{\lambda(i)}$ o correspondente minimal idempotente de $\mathbb{F}S_{m_i}$ (Seção 3.7).

Por simplicidade, escrevamos $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \ldots, \lambda(k))$ e $p_{\langle\lambda\rangle} = E_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes E_{\lambda(k)} \in \mathbb{F}S_{m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}S_{m_k}$. Chamemos $\langle\lambda\rangle$ de *multipartição de n*.

Retornemos ao homomorfismo injetor, φ (Observação 5.2.15), e usando a definição acima e todas as identificações já feitas, consideremos:

Definição 5.2.17. $M_{\langle\lambda\rangle} = \varphi(p_{\langle\lambda\rangle})(W_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes W_k^{\otimes m_k}) \subseteq W_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes W_k^{\otimes m_k} \cong V^{\otimes n}$.

Observação 5.2.18. Sabemos que $M_{\langle\lambda\rangle} = 0$, ou $M_{\langle\lambda\rangle}$ é $GL_{\mathbb{F}}\, W_1 \otimes \cdots \otimes GL_{\mathbb{F}}\, W_k$-irredutível. Em particular, se, para todo i, o número de partes de $\lambda(i)$ é menor do que m_i, então $M_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$, e, portanto, neste caso é $GL_{\mathbb{F}}\, W_1 \otimes \cdots \otimes GL_{\mathbb{F}}\, W_k$-irredutível.

Assim, definimos,

Definição 5.2.19. $N_{\langle\lambda\rangle} = Hom_{GL_{\mathbb{F}}\, W_1 \otimes \cdots \otimes GL_{\mathbb{F}}\, W_k}\, (M_{\langle\lambda\rangle}, V^{\otimes n})$.

Por tudo o feito, temos o seguinte:

Teorema 5.2.20. *Para fixados n e W tais que* $\dim W \geq n$, $N_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$, *e*

$$\{N_{\langle\lambda\rangle} \mid \langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \ldots, \lambda(k)), \lambda(i) \vdash m_i, m_1 + \cdots + m_k = n\}$$

é um conjunto completo de $\mathbb{F}G \wr S_n$-representações irredutíveis inequivalentes. Também, para cada $\langle\lambda\rangle$,

$$\dim_{\mathbb{F}} N_{\langle\lambda\rangle} = \binom{n}{m_1, \ldots, m_k} \cdot d_{\lambda(1)} \ldots d_{\lambda(k)},$$

onde $d_{\lambda(i)} = \dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}S_{m_i} E_{\lambda(i)})$.

Observação 5.2.21. Portanto, devemos encontrar um conjunto completo de ideais à esquerda de $\mathbb{F}G \wr S_n$ não isomorfos, calculando $\varphi^{-1}(N_{\langle\lambda\rangle})$ para todas as multipartições $\langle\lambda\rangle$.

Lembremos que, da Teoria de Representação do grupo S_n e, do $GL_{\mathbb{F}}\, W$, é conhecido que $Hom_{GL_{\mathbb{F}}\, W}(\varphi(E_\lambda)W^{\otimes m}, W^{\otimes m}) = \varphi(\mathbb{F}S_m E_\lambda)$, onde $\lambda \vdash m$ e E_λ é um idempotente primitivo correspondente a λ. Então, lembrando que $W_i = f_i \otimes W$,

Proposição 5.2.22.

$$Hom_{GL_{\mathbb{F}}\, W_i}(\varphi(E_{\lambda(i)})W_i^{\otimes m_i}, W_i^{\otimes m_i}) = \varphi(f_i^{\otimes m_i} \otimes \mathbb{F}S_{m_i} E_{\lambda(i)}).$$

Definição 5.2.23. Para uma multipartição $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \ldots, \lambda(k))$, $\lambda(i) \vdash m_i$, e correspondentes minimais idempotentes, definimos

$$E_{\langle\lambda\rangle} = f_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes f_k^{\otimes m_k} \otimes E_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes E_{\lambda(k)}$$

e

$$L_{\langle\lambda\rangle} = {f_1}^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes {f_k}^{\otimes m_k} \otimes \mathbb{F}S_{m_1}E_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}S_{m_k}E_{\lambda(k)}.$$

Teorema 5.2.24. *Para qualquer multipartição $\langle\lambda\rangle$ de n, $E_{\langle\lambda\rangle}$ é um idempotente minimal de $\mathbb{F}G \wr S_n$ e $(\mathbb{F}G \wr S_n)E_{\langle\lambda\rangle} = \bigoplus_{\tau\in\Lambda} \tau L_{\langle\lambda\rangle}$, onde Λ é uma transversal esquerda de $S_{m_1} \times \cdots \times S_{m_k}$ em S_n.*

Continuaremos fazendo uso de [12], Seção 5, para então retornarmos a ação de H_n em ${P_n}^{gr} = {P_n}^{\Phi}$.

Definição 5.2.25. Para A uma $\mathbb{F}$-álgebra e $G \subseteq Aut(A)$ um grupo abeliano finito. Lembremos que ${P_n}^G = span_{\mathbb{F}}\ \{{x_{\sigma(1)}}^{g_{\sigma(1)}} \ldots x_{\sigma}(n)^{g_{\sigma(n)}} \mid \sigma \in S_n, g_1, \ldots, g_n \in G\}$ é o espaço dos G-polinômios multilineares em $\mathbb{F}\langle X\rangle$ com G-ação.

Podemos definir um isomorfismo linear $\Psi : \mathbb{F}G \wr S_n \to {P_n}^G$ colocando

$$g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes \sigma \mapsto {x_{\sigma(1)}}^{{g_{\sigma(1)}}^{-1}} \ldots x_{\sigma}(n)^{{g_{\sigma(n)}}^{-1}},$$

onde $g_1, \ldots, g_n \in G$, $\sigma \in S_n$.

Observação 5.2.26. Tal isomorfismo define uma ação à esquerda e à direita de $\mathbb{F}G \wr S_n$ em ${P_n}^G$, dada por $a \cdot \Psi(b) = \Psi(ab)$ e $\Psi(a) \cdot b = \Psi(ab)$, para $a, b \in \mathbb{F} \wr S_n$. Assim, se $f(x_1, \ldots, x_n) \in {P_n}^G$ e $g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes \sigma \in G \wr S_n$, então

$$(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes \sigma) \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f({x_{\sigma(1)}}^{{g_{\sigma(1)}}^{-1}}, \ldots, {x_{\sigma(n)}}^{{g_{\sigma(n)}}^{-1}}).$$

Observação 5.2.27. Portanto, os ideais das G-identidades de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ são invariantes pela ação de $G \wr S_n$. O que torna ${P_n}^G(A) = \dfrac{{P_n}^G}{{P_n}^G \cap Id^G(A)}$ um $G \wr S_n$-módulo à esquerda.

Definição 5.2.28. Para uma multipartição $\langle\lambda\rangle$ de n, consideremos $\chi_{\langle\lambda\rangle}$ o correspondente $G \wr S_n$-caracter irredutível. Então, escrevemos

$${\chi_n}^G(A) = \chi\left(\frac{{P_n}^G}{{P_n}^G \cap Id^G(A)}\right) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash n} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle},$$

onde ${\chi_n}^G(A)$ é chamado de *n-ésimo G-cocaracter de A.*

Portanto, da dualidade (Observação 5.2.1), da Definição 5.2.25, da Observação 5.2.26, da Observação 5.2.7, e, do fato de $\mathbb{Z}_2$ ser grupo abeliano finito, temos:

Observação 5.2.29. • O espaço ${P_n}^{gr}$ tem uma estrutura natural de H_n-módulo à esquerda:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : H_n \times {P_n}^{gr} & \to & {P_n}^{gr} \\ (h = (a_1, \ldots, a_n; \sigma), f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)) & \mapsto & f(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}, {z_{\sigma(1)}}^{\Phi}, \ldots, {z_{\sigma(n)}}^{\Phi}) \\ & & = f(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}, \pm z_{\sigma(1)}, \ldots, \pm z_{\sigma(n)}) \end{array}$$

- Sendo ${P_n}^{gr}(A)$ o mesmo da Definição 5.0.4, temos pelo já visto na Observação 5.2.27 que ${P_n}^{gr}(A)$ é um H_n-módulo.

- Analogamente ao feito na Definição 5.2.28, temos ${\chi_n}^{gr}(A)$ o n-ésimo cocaracter graduado de ${P_n}^{gr}(A)$ visto como H_n-módulo.

Observação 5.2.30. Como pode ser visto em [12], das Seções 3 à 5, existe uma bijeção entre H_n-caracteres irredutíveis e pares de partições (λ, μ), onde $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash n - r$, para todo $r = 0, 1, \ldots, n$ (na verdade qualquer multipartição).

Com isto em mente, definamos o que vem a ser o H_n-caracter correspondente à (λ, μ), o espaço dos polinômios multilineares ao par de partições relacionados, e o $S_r \times S_{n-r}$-cocaracter, para então, relacionarmos com o H_n-cocaracter já expressado.

Definição 5.2.31. $\chi_{\lambda,\mu}$ denota o H_n-caracter irredutível correspondente a (λ, μ).

Escrevemos

$$ {\chi_n}^{gr}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\lambda \vdash r, \mu \vdash n-r} m_{\lambda,\mu} \chi_{\lambda,\mu}, $$

onde $m_{\lambda,\mu} \geq 0$ são as multiplicidades correspondentes.

Definição 5.2.32. Para fixado $r \in \{0, \ldots, n\}$, seja

$$P_{r,n-r} = span_{\mathbb{F}}\{w_{\sigma(1)} \ldots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ para } i = 1, \ldots, r, \text{ e } w_i = z_i \text{ para} i = r+1, \ldots, n\}$$

o espaço dos polinômios multilineares nas variáveis $y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_n$.

Observação 5.2.33. Pela multihomogeneidade de T_2-ideais, para estudarmos ${P_n}^{gr}(A)$ é suficiente estudarmos

$$ {P_{r,n-r}}^{gr}(A) = \frac{P_{r,n-r}}{P_{r,n-r} \cap Id^{gr}(A)}, $$

para todo $r = 0, \ldots, n$.

Observação 5.2.34. Se deixarmos S_r agir nas variáveis $y_1, \ldots, y_r$ e S_{n-r} agir nas variáveis $z_{r+1}, \ldots, z_n$, obtemos uma ação de $S_r \times S_{n-r}$ em $P_{r,n-r}$ e ${P_{r,n-r}}^{gr}(A)$ se torna um $S_r \times S_{n-r}$-módulo.

Definição 5.2.35. $\chi_{r,n-r}(A)$ *é o cocaracter de* ${P_{r,n-r}}^{gr}(A)$ visto como $S_r \times S_{n-r}$-módulo.

Observação 5.2.36. Os $S_r \times S_{n-r}$-caracteres irredutíveis são obtidos pelo produto tensorial dos S_r e S_{n-r} caracteres irredutíveis, respectivamente (como já observamos em 4.0.12). Então, escrevemos

$$\chi_{r,n-r}(A) = \sum_{\lambda \vdash r, \mu \vdash n-r} m_{\lambda,\mu}(\chi_\lambda \otimes \chi_\mu),$$

onde χ_λ(respectivamente, χ_μ) denota o S_r-caracter irredutível (respectivamente, S_{n-r}), e $m_{\lambda,\mu} \geq 0$ são suas multiplicidades correspondentes.

Chegamos então na relação que queríamos:

Observação 5.2.37. H_n-cocaracteres e $S_r \times S_{n-r}$-cocaracteres se relacionam (as multiplicidades são as mesmas) por: para qualquer superálgebra A temos

$$\chi_n{}^{gr}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\lambda \vdash r, \mu \vdash n-r} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu} \text{ e } \chi_{r,n-r}(A) = \sum_{\lambda \vdash r, \mu \vdash n-r} m_{\lambda,\mu}(\chi_\lambda \otimes \chi_\mu) \text{ para } r \leq n.$$

Ainda,

$$c_n{}^{gr}(A) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \dim_{\mathbb{F}} P_{r,n-r}{}^{gr}(A).$$

(Observe Teoremas 1, 2 e 4 de [12]).

5.3 Identidades Graduadas de UT_2

Dedicaremos esta seção à procura das identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas de UT_2. Da Seção 5.1 sabemos que só existem duas $\mathbb{Z}_2$-graduações possíveis para UT_2, a trivial e a canônica (estas na verdade são todas, a menos de isomorfismos). Consideraremos $A = UT_2$ com $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica, uma vez que as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas para UT_2 com $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial são as mesmas identidades polinomiais ordinárias de UT_2 (vide parágrafo antes do Teorema de 3.2.5).

Observação 5.3.1. Claramente os polinômios $z_1 z_2$ e $[y_1, y_2]$ são identidades graduadas de A.

Mostraremos nesta seção que estas identidades geram $Id^{gr}(A)$ como um T_2-ideal.

Proposição 5.3.2. *Para qualquer indeterminada $x = y + z$, $z_1 x z_2 \in \langle z_1 z_2, [y_1, y_2] \rangle^{T_2}$.*

Demonstração. Escrevamos $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$ (4.0.4). Como $z_1 y \in \mathcal{F}_1$, temos que $z_1 y z_2 \in \langle z_1 z_2 \rangle^{T_2}$. De fato, como

$$\langle z_1 z_2 \rangle^{T_2} = span_{\mathbb{F}} \; \{h_1 \varphi(z_1 z_2) h_2 \mid h_1, h_2 \in \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}, \varphi \in End_{\mathbb{F}} \; (\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr})^2\},$$

e por, $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr} \to \mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ definida como identidade em todas as indeterminadas de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$ exceto em z_1, em que $z_1 \mapsto z_1 y$, ser um endomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de $\mathbb{F}\langle X \rangle^{gr}$, concluímos que $z_1 y z_2 \in \langle z_1 z_2 \rangle^{T_2}$.

Ainda, $z_1(y+z)z_2 = z_1yz_2 + z_1zz_2 \in \langle z_1z_2\rangle^{T_2}$, pois $z_1yz_2 \in \langle z_1z_2\rangle^{T_2}$ pelo feito acima; e, claramente $z_1zz_2 \in \langle z_1z_2\rangle^{T_2}$. Portanto, $z_1xz_2 \in \langle z_1z_2\rangle^{T_2} \subseteq \langle z_1z_2, [y_1,y_2]\rangle^{T_2}$. □

Teorema 5.3.3. *As identidades polinomiais graduadas z_1z_2 e $[y_1,y_2]$ geram $Id^{gr}(A)$ como T_2-ideal. Isto é, $Id^{gr}(A) = \langle z_1z_2, [y_1,y_2]\rangle^{T_2}$.*

Demonstração. Escrevamos $I = \langle z_1z_2, [y_2,y_2]\rangle^{T_2}$. Fazendo uso da Observação 5.3.1, temos que $I \subseteq Id^{gr}(A)$. Consideremos $f(y_1,\ldots,y_t,z_1,\ldots,z_t)$ um polinômio multilinear em $Id^{gr}(A)$. Queremos mostrar que módulo I f é o polinômio nulo. Para tal, mostraremos que

$$f(y_1,\ldots,y_t,z_1,\ldots,z_t) = f_1(y_1,\ldots,y_s) + f_2(z,y_1,\ldots,y_s)\ (mod\ I),$$

onde $f_1(y_1,\ldots,y_s)$ é um polinômio multilinear em $y_1,\ldots,y_s$, e $f_2(z,y_1,\ldots,y_s)$ é um polinômio multilinear em $z,y_1,\ldots,y_s$.

Façamos uma análise do que ocorre com os possíveis monômios de $f(y_1,\ldots,y_t,z_1,\ldots,z_t)$:

- Se o monômio não contém nenhuma indeterminada em Z, isto é, é da forma $\alpha y_{\sigma(1)}\ldots y_{\sigma(s)}$ para $s \le t$, $\sigma \in S_s$ e $\alpha \in \mathbb{F}$; ele será um monômio do polinômio $f_1(y_1,\ldots,y_s)$.

- Se o monômio contiver exatamente uma indeterminada em Z, ou seja, da forma $\alpha y_{\sigma(1)}\ldots y_{\sigma(k)}z_iy_{\sigma(k+1)}\ldots y_{\sigma(s)}$, para $1 \le k \le s \le t$, $\sigma \in S_s$, $i \in \{1,2,\ldots,t\}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$; ele será um monômio do polinômio $f_2(z,y_1,\ldots,y_s)$.

  Identificando todos os $z_i's$ com z (por meio dos endomorfismos $\mathbb{Z}_2$-graduados que agem como identidade em todas as indeterminadas de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ exceto em z_i, em que $z_i \mapsto z$), obtemos o polinômio $f_2(z,y_1,\ldots,y_s)$ com a mesma indeterminada z em todos os monômios.

- Se o monômio contiver duas ou mais indeterminadas em Z, ou seja, das seguintes formas:

  – possuir dois ou mais $z's$ juntos;

  – possuir todos os $z's$ de alguma forma separados pelos $y's$;

  temos que pela Proposição 5.3.2, o monômio pertencerá a I, em ambos os casos.

Assim, por todas as análises de monômios acima feitas, conseguimos $f(y_1,\ldots,y_t,z_1,\ldots,z_t) = f_1(y_1,\ldots,y_s) + f_2(z,y_1,\ldots,y_s)\ (mod\ I)$.

Da multihomogeneidade de T_2-ideais e por f ser uma identidade polinomial graduada de A, segue que f_1 e f_2 são ambas identidades polinomiais graduadas de A. Como $[y_1,y_2] \in I$, temos que $f_1 = \alpha y_1\ldots y_s$ para $\alpha \in \mathbb{F}$ (observe a demonstração do Lema 4.1.3). Assim, fazendo a substituição graduada $y_1 = \cdots = y_s = E_{11}$, conseguimos $f_1 = \alpha E_{11}$. Por f_1 ser identidade polinomial graduada de A, $\alpha = 0$. Então, $f_1 = 0\ (mod\ I)$. Escrevamos $f_2 =$

$\sum \alpha y_{i_1} \dots y_{i_t} z y_{j_1} \dots y_{j_{n-t}}$ onde $i_1 < \dots < i_t$, $j_1 < \dots < j_{n-t}$, e estes índices pertencem ao $\{1, 2, \dots, s\}$ com $s \leq t$ (observemos que a ordenação é possível pois $[y_1, y_2] \in I$). Suponhamos que exista um monômio não-nulo de f_2, seja ele $M_{f_2} = \alpha y_1 \dots y_s z y_{s+1} \dots y_n$. Façamos a seguinte substituição graduada: $y_1 = \dots = y_s = E_{11}$, $y_{s+1} = \dots = y_n = E_{22}$ e $z = E_{12}$. Notemos que com ela, $M_{f_2} = \alpha E_{12}$, e qualquer outro monômio de f_2 com esta substituição se torna nulo. De fato, se o monômio $\alpha y_{i_1} \dots y_{i_t} z y_{j_1} \dots y_{j_{n-t}}$ tem $i_t \geq s+1$, temos à esquerda de z o produto $E_{11}E_{22} = 0$; já se, $\alpha y_{i_1} \dots y_{i_t} z y_{j_1} \dots y_{j_{n-t}}$ tem $i_t < s$, temos à direita de z o produto $E_{11}E_{22} = 0$. Portanto, $f_2 = M_{f_2}$, e por f_2 ser identidade polinomial graduada de A, temos $\alpha = 0$, uma contradição com a suposição do monômio M_{f_2} ser não-nulo. Assim, $f_2 = 0$ $(mod\ I)$, e temos demonstrado o resultado. □

Definição 5.3.4. Consideremos $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n - r$. Seja $W_{\lambda,\mu}$ o $S_r \times S_{n-r}$-módulo irredutível associado a multipartição (λ, μ) de n.

Observação 5.3.5. Pelo já discutido na Seção 7.2, temos que $W_{\lambda,\mu} \cong \mathbb{F}(S_r \times S_{n-r})e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$ com e_{T_λ} e e_{T_μ} sendo os semi-idempotentes associados aos tableaux T_λ e T_μ, respectivamente. (Para maior clareza, relembre a Definição 2.7.36)

Teorema 5.3.6. *Seja* $\chi_n{}^{gr}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\lambda \vdash r, \mu \vdash n-r} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$ *o n-ésimo cocaracter graduado de A com $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica. Então,*

a) $m_{\lambda,\mu} = q + 1$ *se* $\lambda = (p + q, q)$ *e* $\mu = (1)$*;*

b) $m_{(n),\emptyset} = 1$*;*

c) $m_{\lambda,\mu} = 0$ *em todos os demais casos.*

Demonstração. Antes de começarmos a demonstração em si, lembremos da Definição 2.7.1. Agora, por estarmos considerando A com $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica, temos que $A_0 = \mathbb{F}E_{11} + \mathbb{F}E_{22}$ e $A_1 = \mathbb{F}E_{12}$. Donde, dim $A_0 = 2$ e dim $A_1 = 1$. Pelo Lema 3.1.1 e pela ação de $S_r \times S_{n-r}$, sabemos que qualquer polinômio alternante em três indeterminadas de grau zero ou qualquer polinômio alternante em duas indeterminadas de grau um se anulam em A. Portanto, da forma geral dos elementos e_{T_λ}, e_{T_μ} segue que $m_{\lambda,\mu} = 0$ se ou $l(\lambda) > 2$ ou $l(\mu) > 1$.

Além disso, pela Proposição 5.3.2 e pelo Teorema 5.3.3, temos que para qualquer indeterminada x, $z_1xz_2 \in \langle z_1z_2, [y_1, y_2]\rangle^{T_2} = Id^{gr}(A)$. Isto implica que $m_{\lambda,\mu} = 0$ sempre que $|\mu| \geq 2$.

Assumamos então que $|\mu| \leq 1$. Suponhamos primeiramente que $\mu = \emptyset$. Então, por $[y_1, y_2]$ ser identidade polinomial graduada de A, temos que $y_1y_2 \dots y_n$ é uma base de $P_{n,0}$ $(mod\ Id^{gr}(A))$. Portanto, $0 < m_{(n),\emptyset} \leq$ dim $M_{T_{(n),\emptyset}} =$ dim $M_{T_{(n)}} = 1$, ou seja, $m_{(n),\emptyset} = 1$ (Consequência do Teorema 2.7.59, da Proposição 2.7.54 e do Teorema 2.7.64). Caso $\lambda \neq (n)$, $m_{\lambda,\emptyset} = 0$. (Até o presente momento provamos b) e c)).

Seja agora $l(\lambda) \leq 2$ e $\mu = (1)$. Consideremos $\lambda = (p+q, p)$, $p \geq 0$, $q \geq 0$ e $\mu = (1)$. Nestas condições, queremos provar que $m_{\lambda,\mu} = q+1$. (E assim, conseguirmos o afirmado no item a)).

Para todo $i = 0, \ldots, q$ definamos os seguintes tableaux:

$$T_\lambda{}^{(i)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline i+1 & i+2 & \cdots & i+p & 1 & 2 & \cdots & i & i+2p+2 & \cdots & n \\ \hline i+p+2 & i+p+3 & \cdots & i+2p+1 \\ \cline{1-4} \end{array}$$

$$T_\mu{}^{(i)} = \begin{array}{|c|}\hline i+p+1 \\ \hline \end{array}$$

Associemos a $T_\lambda{}^{(i)}$ e $T_\mu{}^{(i)}$ o polinômio

$$a_{p,q}{}^{(i)}(y_1, y_2, z) = y_1{}^i \underbrace{\overline{y_1} \ldots \tilde{y_1}}_{p} z \underbrace{\overline{y_2} \ldots \tilde{y_2}}_{p} y_1{}^{q-i},$$

onde ¯ e ˜ significam permutações nos elementos correspondentes.

Observemos que o polinômio $a_{p,q}{}^{(i)}$ é obtido pelos semi-idempotentes correspondentes ao par de tableaux $(T_\lambda{}^{(i)}, T_\mu{}^{(i)})$ identificando todos os elementos de cada linha de λ. Isto é, a ação dos semi-idempotentes nos seguintes tableaux:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline y_1 & y_1 & \cdots & y_1 & y_1 & y_1 & \cdots & y_1 & y_1 & \cdots & y_1 \\ \hline y_2 & y_2 & \cdots & y_2 \\ \cline{1-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline z \\ \hline \end{array}$$

Provaremos que $(mod\ Id^{gr}(A))$ os $q+1$ polinômios $a_{p,q}{}^{(i)}(y_1, y_2, z)$, $i = 0, \ldots, q$, são linearmente independentes sobre $\mathbb{F}$.

Suponhamos por absurdo que não são. Consideremos uma combinação linear

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i a_{p,q}{}^{(i)}(y_1, y_2, z) = 0 \ (mod\ Id^{gr}(A)), \text{ com } \alpha_i \in \mathbb{F},$$

e, seja $t = \max \{i : \alpha_i \neq 0\}$. Separando $a_{p,q}{}^{(t)}$ dos demais e lembrando que $\alpha_i = 0$ para $i > t$, temos

$$\alpha_t a_{p,q}{}^{(t)}(y_1, y_2, z) + \sum_{i<t} \alpha_i a_{p,q}{}^{(i)}(y_1, y_2, z) = 0 \ (mod\ Id^{gr}(A)).$$

Substituindo y_1 por $y_1 + y_3$, conseguimos

$$\alpha_t(y_1+y_3)^t\overline{(y_1+y_3)}\ldots\widetilde{(y_1+y_3)}z\overline{y_2}\ldots\widetilde{y_2}(y_1+y_3)^{q-t}+$$

$$+\sum_{i<t}\alpha_i(y_1+y_3)^i\overline{(y_1+y_3)}\ldots\widetilde{(y_1+y_3)}z\overline{y_2}\ldots\widetilde{y_2}(y_1+y_3)^{q-i}=0\ (mod\ Id^{gr}(A)).$$

Consideremos a componente homogênea de grau $t+p$ em y_1 e de grau $q-t$ em y_3. Façamos a substituição graduada: $y_1 = E_{11}$, $y_2 = y_3 = E_{22}$ e $z = E_{12}$, de modo a obtermos $\alpha_t E_{12} = \alpha_t = 0$, uma contradição com a escolha de t. Como $y_1 \mapsto y_1 + y_3$ é um automorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$, conseguimos por meio desta contradição, que os polinômios ${a_{p,q}}^{(i)}(y_1, y_2, z)$, $i = 0, \ldots, q$ são linearmente independetes $(mod\ Id^{gr}(A))$.

Lembrando do Processo de Linearização (Exemplo 3.2.2), vemos que para todo i, ${e_{T_\lambda}}^{(i)}{e_{T_\mu}}^{(i)}(y_1, \ldots, y_{n-1}, z)$ é a linearização completa dos ${a_{p,q}}^{(i)}(y_1, y_2, z)$. Portanto, temos que os polinômios ${e_{T_\lambda}}^{(i)}{e_{T_\mu}}^{(i)}(y_1, \ldots, y_{n-1}, z)$, $i = 0, \ldots, q$, são linearmente independentes $(mod\ Id^{gr}(A))$ e assim, $m_{\lambda,\mu} \geq q + 1$ (por discussão análoga a feita no terceiro parágrafo desta demonstração).

Busquemos mostrar que $m_{\lambda,\mu} = q+1$ para $\lambda = (p+q, p)$ e $\mu = (1)$. Para tal, sejam T_λ e T_μ quaisquer dois tableaux, e, $f = e_{T_\lambda}e_{T_\mu}(y_1, \ldots, y_{n-1}, z)$ o polinômio correspondente.

Se $f \notin \langle z_1z_2, [y_1, y_2]\rangle^{T_2}$, então quaisquer duas indeterminadas alternantes em f devem estar em lados diferentes de z. Como f é uma combinação linear $(mod\ Id^{gr}(A))$ de polinômios que são alternantes em p pares de $y_i's$, obtemos que f é uma combinação linear dos polinômios ${e_{T_\lambda}}^{(i)}{e_{T_\mu}}^{(i)}(y_1, \ldots, y_{n-1}, z)$, $i = 0, \ldots, q$. Portanto, $m_{\lambda,\mu} = q + 1$. (Terminando assim o item a), único que faltava). □

5.4 $Exp^{gr}(A)$

Para esta última seção, suponhamos que A é uma superálgebra satisfazendo uma identidade polinomial não-trivial, isto é, A é uma PI-álgebra graduada. Como já vimos na Observação 5.2.1, as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas coincidem com as Φ-identidades sendo Φ um automorfismo de ordem dois de A. Pelo Lema 4.7 de [13], temos que ${c_n}^{gr}(A) \leq 2^n c_n(A)$. Juntando, temos

$$c_n(A) \leq {c_n}^{gr}(A) \leq 2^n c_n(A). \tag{5.1}$$

Com a intenção de capturarmos o comportamento exponencial da sequência de codimensões graduadas definimos:

Definição 5.4.1. Para A uma superálgebra, consideramos

$$Exp^{gr}(A) = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{{c_n}^{gr}(A)}.$$

A título de curiosidade, apresentaremos uma outra sequência numérica que podemos associar a uma superálgebra, relembremos da Definição 3.1.22, e:

Definição 5.4.2. Seja A uma superálgebra, $\chi_n{}^{gr}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\lambda \vdash r, \mu \vdash n-r} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$ a decomposição do n-ésimo cocaracter graduado de A, então definimos o *n-ésimo cocomprimento graduado de A* como

$$l_n{}^{gr}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\lambda \vdash r, \mu \vdash n-r} m_{\lambda,\mu}.$$

No próximo corolário, nosso último resultado da dissertação, calcularemos $Exp^{gr}(UT_2)$ considerando UT_2 com $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica. Para tanto,

Definição 5.4.3. Para uma partição $\lambda \vdash n$, seja $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o grau do S_n-caracter irredutível χ_λ (consulte Proposição 2.6.7).

Pelo já discutido na Seção 7.2, sabemos que se $d_{\lambda,\mu} = \chi_{\lambda,\mu}(1)$ é o grau do H_n-caracter irredutível correspondente ao par (λ, μ), onde $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash n - r$, então $d_{\lambda,\mu} = \binom{n}{r} d_\lambda d_\mu$. Chegamos então:

Corolário 5.4.4.

$$Exp^{gr}(UT_2) = 2.$$

Demonstração. As codimensões de UT_2 são já conhecidas e podem ser deduzidas de [24]. Nós apenas usaremos este fato. Assim, $c_n(UT_2) = \alpha n^t 2^n$, para algumas constantes α, t. Por outro lado, lembrando que as multiplicidades $m_{\lambda,\mu}$ são limitadas polinomialmente (Teorema 5.3.6 e [24]), conseguimos

$$c_n(UT_2) \leq c_n{}^{gr}(UT_2) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu} \leq a n^\nu \sum_{|\lambda|+|mu|=n,\ l(\lambda)\leq 2,\ \mu_1 \leq 1,\ \mu_2=0} d_{\lambda,\mu} =$$

$$= \alpha n^\nu \sum_{|\lambda|+|\mu|=n,\ l(\lambda)\leq 2,\ \mu_1\leq 1,\ \mu_2=0} \binom{n}{|\lambda|} d_\lambda d_\mu \leq \alpha n^{\nu+1} \sum_{\lambda \vdash n,\ l(\lambda)\leq 2} d_\lambda \leq \alpha' n^{\nu'} 2^n,$$

onde a penúltima e a última desigualdade seguem da Fórmula do Gancho, das possibilidades de preenchimento do Diagrama (Teorema 2.7.64 e Teorema 5.3.6), de $d_\mu \leq 1$, e de (5.1).

Portanto, lembrando que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, e que para $a > 0$, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, temos

$$Exp^{gr}(UT_2) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n{}^{gr}(UT_2)} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha' n^{\nu'} 2^n} = 2,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(UT_2)} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha n^t 2^n} = 2,$$

e,

$$c_n(UT_2) \leq c_n{}^{gr}(UT_2).$$

Donde, $2 \leq Exp^{gr}(UT_2) \leq 2$, e então, $Exp^{gr}(UT_2) = 2$ como queríamos. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur, J.Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449-463, (1950).

[2] A. Berele, *Cocharacteres of* $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$*-graded algebras*, Israel Journal of Mathematics **61**, 225-234, (1988).

[3] H. Boerner, *Representations of groups*, 2nd ed. North-Holland, Amsterdan, 1967, 1970.

[4] S. Bondari, *Constructing the polynomial identities and central identities of degree* < 9 *of* 3×3 *matrices*, Linear Algebra Appl. **258**, 233–249, (1997).

[5] A. P. Brandão Junior, *Notas de aula.*

[6] M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra*, Switzerland: Springer, 2014.

[7] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, Math. Ann. **85**, 184-194, (1922), (in German).

[8] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of* $M_{1,1}(E)$, Israel Journal of Mathematics **80**, 323-335, (1992).

[9] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*, Sigapore: Springer-Verlag, 2000.

[10] V. Drensky, E. Formaneck, *Polynomial Identity Ring*, Springer Basel AG, 2004.

[11] W. Fulton, J.Harris, *Representation Theory: A first course*, New York: Springer-Verlag, 1991.

[12] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev, *Group actions and asymptotic behaviour of graded polynomial identities*, J. London Math. Soc. **66**, 295-312, (2002).

[13] A. Giambruno, A. Regev, *Wreath products and P.I. algebras*, J. Pure Appl. Algebra **35**, 133-149, (1985).

[14] D. J. Gonçalves, *A-identidades Polinomiais em Álgebras Associativas*, 2009.

[15] A. Henke, A. Regev, *Explicit decompositions of the group algebras* $\mathbb{F}S_n$ *and* $\mathbb{F}A_n$, in "Polynomial identities and combinatorial methods"(Pantelleria, 2001), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **235** (2003), 329-357, Dekker, New York.

[16] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, 1974.

[17] G. D. James, *The representation theory of the symmetric group*, Lecture Notes in Mathematics **628** (1978), Springer, Berlin.

[18] I. Kaplansky, *Rings with a polynomial identity*, Bull. Amer. Math. Soc. **54 220**, 496-500, (1948).

[19] A. R. Kemer, *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*, Math. USSR Izv. **25**, 359-374, (1985).

[20] A. R. Kemer, *T-ideals with power growth of the codimensions are Specht*, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal **19**, 54-69, (1978), (in Russian)(English translation: Siberian Math. J. **19**, 37-48, (1978)).

[21] A. R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras*, Algebra and Logic **26**, 362-397, (1987).

[22] A. R. Kemer, *Ideals of identities of associatives algebras*, American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs **87**, Providence, RI, 1-79, (1991).

[23] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181**, 429-438, (1973).

[24] V. N. Latyshev, *Complexity of non matrix varieties of associative algebras*, Algebra i Logica **16**, 149-183, (1997), (in Russian) (English translation: Algebra i Logica **16**, 98-122, (1997)).

[25] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a T-ideal*, Sibirsk. Matem. Zh. 4, No. **5**, 1122-1126, (1963), (in Russian).

[26] K. C. Mundim e M. S. P. Mundim, *Álgebra de Grassmann e a Teoria Quântica*, Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, 209-233, (1997).

[27] A. P. Popov, *Identities of the tensor square of the Grassmann algebra*, Algebra e Logic **21**, 293-316, (1983).

[28] A. Regev, *The polynomial identities of matrices in characteristic zero*, Commun. Algebra **8**, 1417-1467, (1980).

[29] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel J. Math. **11**, 131-152, (1972).

[30] B. E. Sagan, *The symmetric group, representations, combinatorial algorithms, and summetric functions*,Wadsworth & Brooks / Cole Mathematics Series, 1991.

[31] K. C. O. Souza, *Álgebras verbalmente primas e polinônios de Amitsur-Capelli*, 2012.

[32] W. Schützer, *Notas de aula do curso Tópicos de Álgebra I*, 2016.

[33] W. Specht, *Gesetze in ringen*, Math. Zeitschrift **52**, 557-589, (1950).

[34] A. Valenti, *The graded identities of upper triangular matrices of size two*, Journal of Pure and Applied Algebra **172**, 325-335, (2002).

[35] A. Valenti, M. Zaicev, *Abelian gradings on upper-triangular matrices*, Arch. Math. **80**, 12-17, (2003).

[36] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme*, Math. Ann. **113**, 528-567, (1936), (in German).

Índice Remissivo