

Jonas Floriano Gomes dos Santos

Mecânica Quântica no Espaço de Fase
Não-Comutativo e Aplicações em Termodinâmica

São Carlos, SP

27 de Novembro de 2017

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Mecânica Quântica no Espaço de Fase
Não-Comutativo e Aplicações em Termodinâmica

Jonas Floriano Gomes dos Santos

Orientador: Alex Eduardo de Bernardini

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de São Carlos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

São Carlos, SP

27 de Novembro de 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Jonas Floriano Gomes dos Santos, realizada em 26/08/2016:

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini
UFSCar

Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa
USP

Prof. Dr. Roberto Menezes Serra
UFABC

Prof. Dr. Raphael Santarelli
UFSCar

Prof. Dr. Vivaldo Leiria Campos Junior
UFSCar

Dedico à minha família.

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos para:

- o Professor Doutor Alex Eduardo de Bernardini, pela orientação, incentivo e paciência durante estes quatro anos de trabalho. Agradeço a ele também por sempre exigir de mim uma postura profissional, o que enriqueceu muito minha formação;

- os meus pais e meu irmão, que sempre se preocuparam comigo;

- todos meus amigos e colegas da pós-graduação em Física;

- meu amigo André Luis Rossi Melzi, pela grande amizade iniciada na graduação, que sempre rendeu bons frutos, e pelas discussões e aprendizados sobre Física, que sem dúvida enriqueceram muito minha vida acadêmica;

- meu amigo Bruno Mendes, pela amizade e companheirismo iniciados desde que cheguei à São Carlos e por todos os momentos agradáveis juntos;

- minha namorada Joana, pela paciência e carinho que me dedica;

- a CAPES, pelo suporte financeiro do trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos aspectos teóricos resultantes do fato de se considerar uma teoria quântica com relações gerais de não-comutatividade. Através do formalismo da mecânica quântica no espaço de fase segundo a prescrição de Wigner-Weyl, obtivemos as funções de Wigner descrevendo o estado do sistema e as respectivas auto-energias. Utilizando o mapa de Seiberg-Witten para descrever sistemas quânticos não-comutativos no espaço de Hilbert convencional, foi possível escrever efeitos não comutativos como potenciais no operador hamiltoniano, onde verificou-se que estes atuam em geral como um campo magnético externo efetivo sobre o sistema. Avaliamos o impacto desta álgebra de Heisenberg-Weyl deformada em alguns sistemas quânticos relevantes por meio de quantificadores da teoria de informação quântica. Por fim, investigamos possíveis assinaturas de efeitos não-comutativos em máquinas térmicas quânticas e as quantificamos através do rendimento termodinâmico para alguns ciclos específicos, a saber, o iso-magnético e o iso-energético. Ainda no âmbito de ciclos termodinâmicos, investigamos efeitos não-comutativos em um ciclo de Carnot e mostramos que neste caso o rendimento não é afetado, reforçando a validade da segunda lei da termodinâmica.

Abstract

In this work we study theoretical aspects arising from the fact of considering a quantum theory with general relations of noncommutativity. Through the quantum mechanics in phase-space formalism in the Wigner-Weyl prescription, we obtained the Wigner function describing the state of the system and the respective eigenvalues. By using the Seiberg-Witten map to describe noncommutative quantum systems in the standard Hilbert space, it was possible to write NC effects as potential terms in the Hamiltonian operator, where it was verified that they act in general like an effective external magnetic field on the system. We quantify the impact of this deformed Weyl-Heisenberg algebra in some relevant quantum systems through the tools of information theory. Finally, we investigate noncommutative effects in quantum heat engines and quantify them by using the thermodynamic efficiency for some specific cycles, the iso-magnetic and the iso-energetic ones. Also considering thermodynamics cycles, we investigated noncommutative effects in a Carnot cycle and one shows in this case that the efficiency is not affected, reinforcing the validity of the second law of thermodynamics.

Conteúdo

Introdução	1
1 Formalismo da Mecânica Quântica no Espaço de Fase	16
1.1 Extensão para o Espaço de Fase Não-Comutativo	23
1.1.1 Necessidade da função de Wigner na MQNC	27
2 Partícula Livre no Espaço de Fase Não-Comutativo	29
2.1 Função de Wigner e auto-energias	31
2.2 Efeito da não-comutatividade sobre a distribuição de momento	32
2.3 Decoerência e recorrência quântica de informação em estados gaussianos no espaço de momento	35
2.4 Discussões	39
3 Oscilador Harmônico no Espaço de Fase Não-Comutativo	41
3.1 Função de Wigner e auto-energias	43
3.2 Batimento quântico e decoerência	45
3.3 Discussões	46
4 Fidelidade Gaussiana Distorcida por Campos Externos	49
4.1 Oscilador harmônico acoplado a campos magnéticos	51
4.2 Sistema de partícula livre	52
4.3 O poço gravitacional quântico	56
4.4 Mapeando efeitos não-comutativos via campo magnético externo	60
4.5 Discussões	60
5 Termodinâmica para Gases num Espaço de Fase Não-Comutativo	62
5.1 Função de partição e variáveis termodinâmicas para um gás de partículas livres	62
5.2 Gás formado por rotores quânticos	66
5.2.1 Função de partição e variáveis termodinâmicas	67
5.2.2 Função de partição e variáveis termodinâmicas para os primeiros estados	74
5.3 Discussões	77

6	Efeitos Não-Comutativos em Máquinas Térmicas Quânticas	80
6.1	Máquinas térmicas geradas por campos magnéticos externos	81
6.2	Máquina térmica operando sobre o ciclo iso-magnético	84
6.3	Máquinas térmicas operando sobre um ciclo iso-energético	86
6.4	Eficiência termodinâmica para o caso de uma orientação oposta do campo magnético	91
6.5	Ciclo de Carnot e efeitos NC	93
6.6	Discussões	96
7	Conclusões e perspectivas futuras	98
A	Outras propriedades do produto de Moyal	106
B	Resolução da equação de autor-valor para a partícula livre	107
C	Trabalho e Calor para um ciclo iso-energético	109
D	Função de partição do capítulo 6	112

Lista de Figuras

- 2.1 Evolução temporal das coordenadas do espaço de fase, $(Q_1(t), \Pi_1(t))$ e $(Q_2(t), \Pi_2(t))$, para o sistema de partícula livre NC, com o parâmetro não-comutativo, γ , sendo escolhido como 1 (linha mais grossa), 1/2, 1/5, 1/20, e 1/500 (linha mais fina), implicando um decréscimo de espessura das linhas. Foi usado uma escala *Azul-Verde-Amarelo* para indicar a evolução temporal, τ , variando de 0 (azul) até π/γ (amarelo). Adotamos $\hbar = m = 1$ e $Q_{1,2}(0) = \Pi_{1,2}(0) = 0.5$. Note que a medida que o valor de γ diminui, as trajetórias no espaço de fase se aproximam de linhas retas. 31
- 2.2 Projeção da distribuição de momento, $|\Phi(\Pi_1; 0)|^2$, sobre a coordenada Π_1 (direção x) para o sistema de partícula livre com números quânticos associados $n = 0$ (primeira linha) e $n = 1$ (segunda linha). A fim de distinguir a distorção introduzida pelo parâmetro NC, γ , foram escolhidos dois valores de coordenadas iniciais para Q_2 , $y = 0$ (primeira coluna) e $y = 4$ (segunda coluna), mantendo π_x arbitrário. Os resultados não dependem de x e π_y . . 34
- 2.3 Evolução temporal da função de Wigner, $\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t)$, para o sistema de partícula livre NC correspondente ao vetor de estado projetado sobre o plano $Q_1 - \Pi_1$. No tempo $\tau = 0$ foi assumido que $\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t)$ está centrada no momento $\pi_x = 1 (= -\pi_y)$, para uma coordenada espacial arbitrária dada por $x = 1/\gamma$ (a qual não é relevante em $t = 0$). Foi considerado intervalos de tempo tais que $\tau = k\pi(8\gamma)^{-1}$, onde k corresponde a valores inteiros de 0 à 8 (para figuras da esquerda para a direita e de cima para baixo), e $m = 1$. O esquema de cores segue a escada *Azul-Verde-Amarelo*, de amarelo (correspondendo à 1) até azul (correspondendo à 0). 37
- 2.4 Informação mútua, I_{12} , em função de γt , para o sistema de partícula livre descrito pelo vetor de estado W_G . Como esperado segundo a Figura 2.3, a informação mútua quantifica a distorção do comportamento estacionário e o caráter oscilante introduzido pelo parâmetro NC, $\gamma(\eta)$ 39

3.1	Evolução temporal das coordenadas (Q_1, Π_1) e (Q_2, Π_2) no espaço de fase, para o oscilador harmônico não-comutativo. O primeiro par de figuras é composto por órbitas elípticas referentes ao caso em que não há efeitos NC, ou seja, $\epsilon = 0$. Em seguida são apresentados resultados para $\epsilon = 1/4, 1/10$ e $1/100$ respectivamente, sendo órbitas fechadas. O caso em que $\epsilon = 1/2\pi$ é mostrado por último como órbitas abertas, pelo fato de ϵ ser um número não inteiro. As órbitas são iniciadas em $(x, \pi_x) = (y, \pi_y) = (1/\sqrt{2}, 0)$. Foi usada uma escala <i>Azul-Verde-Amarelo</i> para indicar a evolução temporal, τ , variado de 0 (azul) até $2\pi/\Omega$ (amarelo). Além disso, foi adotado $\alpha = \beta$ tal que $m\omega = \hbar = 1$	44
3.2	Evolução temporal da função de Wigner para o sub-espaço (Q_1, Π_1) mostrando o efeito de batimento quântico, para $n_y = 2$ e $n_x = 1$ (primeira coluna), 2 (segunda coluna), e 5 (terceira coluna). A função de Wigner está centrada em $(0, 0)$ para o tempo $\tau = 0$, sendo considerados intervalos temporais tais que $\tau = k\pi(8\epsilon\Omega)^{-1}$, com $k = 0, 1, 2, 3$ e 4 afim de reproduzir a evolução temporal em 5 estágios. Foi utilizado a escala <i>Azul-Verde-Amarelo</i> para indicar a intensidade da função de Wigner, tal que Amarelo corresponde a 1, enquanto azul corresponde à 0.	47
4.1	Fidelidade gaussiana em função do tempo, τ , para um estado quântico evoluindo de acordo com a dinâmica do oscilador harmônico na presença de um campo magnético externo. Foi considerado $m = \hbar = 1$ e $x = y = p_{x_0} = p_{y_0} = 1$, com $B_0 = 0, 0.1, 0.5$ e 1. O aumento no valor de B_0 é representado pelo aumento na frequência ω , responsável pelo comportamento de batimento.	53
4.2	Fidelidade gaussiana em função do tempo, τ , para um estado evoluindo de acordo com a dinâmica de uma partícula livre em uma região de campo magnético uniforme. Foi considerado $m = \hbar = 1$ e $x = y = p_{x_0} = p_{y_0} = 1$, com $B_0 = 0, 0.1, 0.5$ e 1. O aumento do valor do campo magnético implica que o comportamento do oscilador harmônico é rapidamente recuperado.	55
4.3	Fidelidade gaussiana em função do tempo, τ , para um estado evoluindo de acordo com a dinâmica do sistema GQW. Foi considerado $m = \hbar = 1$, $g = 2$ e $x = y = p_{x_0} = p_{y_0} = 1$, com $B_0 = 0.1, 0.5$ e 1. O caso em que $B_0 = 0$ é ilustrado através da curva contínua. Aumentando o valor da intensidade do campo magnético, tem-se o aumento da supressão da fidelidade gaussiana.	59
5.1	Energia interna, $U(\sigma)$, capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, e entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, em função de $\sigma = \hbar\gamma/k_B T$, para um gás de partículas livres não-comutativo. O gráfico também ilustra o comportamento assintótico das variáveis (curvas pontilhadas) quando $\sigma \ll 1$, limite clássico.	64

5.2	Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás $2D$ de rotores quânticos (primeira linha), e as variações em relação aos resultados esperados para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ . Foi usada uma escala de tons de azul, com azul escuro correspondendo à zero e azul claro correspondendo à unidade.	69
5.3	Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás $3D$ de rotores quânticos (primeira linha), e as variações em relação aos resultados esperados para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ . Foi usada uma escala de tons de azul, com azul escuro correspondendo à zero e azul claro correspondendo à unidade.	70
5.4	Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e a capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás de rotores quânticos $2D$ em função de σ , e para os seguintes valores de parâmetro de inércia: $\lambda = 0.01$ (curvas pontilhadas), 0.1 (curvas tracejadas) e 1 (curvas sólidas) para sistemas descritos pela MQNC (curvas pretas) e pela mecânica quântica padrão (curvas vermelhas).	72
5.5	Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e a capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás de rotores quânticos $3D$ em função de σ , e para os seguintes valores de parâmetro de inércia: $\lambda = 0.01$ (curvas pontilhadas), 0.1 (curvas tracejadas) e 1 (curvas sólidas) para sistemas descritos pela MQNC (curvas pretas) e pela mecânica quântica padrão (curvas vermelhas).	73
5.6	Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás $2D$ de rotores quânticos para os primeiros estados (primeira linha), e as variações em relação aos resultados esperados para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ . Foi usada uma escala de tons de azul, com azul escuro correspondendo à zero e azul claro correspondendo à unidade.	75
5.7	Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás $3D$ de rotores quânticos para os primeiros estados (primeira linha), e as variações em relação aos resultados esperados para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ . Foi usada uma escala de tons de azul, com azul escuro correspondendo à zero e azul claro correspondendo à unidade.	76

5.8	Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e a capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás de rotores quânticos $2D$ em função de σ e para os seguintes valores de parâmetro de inércia: $\lambda = 0.01$ (curvas pontilhadas), 0.1 (curvas tracejadas) e 1 (curvas sólidas) para sistemas descritos pela MQNC (curvas pretas) e pela mecânica quântica padrão (curvas vermelhas).	78
5.9	Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e a capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás de rotores quânticos $3D$ em função de σ e para os seguintes valores de parâmetro de inércia: $\lambda = 0.01$ (curvas pontilhadas), 0.1 (curvas tracejadas) e 1 (curvas sólidas) para sistemas descritos pela MQNC (curvas pretas) e pela mecânica quântica padrão (curvas vermelhas).	79
6.1	Ilustração dos ciclos iso-magnético (índices romanos) e iso-energéticos (índices arábicos) para um sistema efetivo de dois níveis composto pelo estado fundamental, $(\kappa = 0, \ell = 0)$, e pelo primeiro estado excitado, $(\kappa = 1, \ell = 0)$. O ciclo iso-magnético envolve duas trajetórias iso-magnéticas e duas iso-entrópicas, enquanto o ciclo iso-energético envolve duas trajetórias iso-energéticas e duas iso-entrópicas.	83
6.2	Rendimento, \mathcal{N} , de um ciclo iso-magnético para $N_{\Phi_1}^{(0)} = 4$ (curvas pretas), $N_{\Phi_1}^{(0)} = 10$ (curvas azuis) e $N_{\Phi_1}^{(0)} = 100$ (curvas vermelhas) em função do coeficiente de expansão, α , para $(\theta\eta = 0, \gamma = 0)$ (curvas sólidas), $\theta\eta = 0.1$ (curvas tracejadas), $\theta\eta = 0.5$ (curvas pontilhadas) e para $\gamma = 0.1$ (figura à esquerda) e $\gamma = 0.5$ (figura à direita). Foi considerado $\hbar = 1$ e $\omega = 1$. . .	86
6.3	Rendimento, \mathcal{N} , de um ciclo iso-energético para $N_{\Phi_1}^{(0)} = 4$ (curvas pretas), $N_{\Phi_1}^{(0)} = 10$ (curvas azuis) e $N_{\Phi_1}^{(0)} = 100$ (curvas vermelhas) em função do coeficiente de expansão, α , para $(\theta\eta = 0, \gamma = 0)$ (curvas sólidas), $\theta\eta = 0.1$ (curvas tracejadas), $\theta\eta = 0.5$ (curvas pontilhadas) e para $\gamma = 0.1$ (figura à esquerda) e $\gamma = 0.5$ (figura à direita). Foi considerado $\hbar = 1$ e $\omega = 1$. . .	90
6.4	Rendimento, \mathcal{N} , dos ciclos iso-magnético (primeira linha) e iso-energético (segunda linha) para $N_{\Phi_1}^{(0)} = 4$ (curvas pretas), $N_{\Phi_1}^{(0)} = 10$ (curvas azuis) e $N_{\Phi_1}^{(0)} = 100$ (curvas vermelhas) em função do coeficiente de expansão, α , para $(\theta\eta = 0, \gamma = 0)$ (curvas sólidas), $\theta\eta = 0.1$ (curvas tracejadas), $\theta\eta = 0.5$ (curvas pontilhadas) e para $\gamma = 0.1$ (figura à esquerda) e $\gamma = 0.5$ (figura à direita) e considerando uma orientação oposta para o campo magnético, tal que $B \rightarrow -B$. Foi considerado $\hbar = 1$ e $\omega = 1$	92
6.5	Ilustração de um ciclo de Carnot. As trajetórias isotérmicas, $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$, representam o contato térmico do sistema com os reservatórios térmicos com temperaturas $T_H(T_Q) > T_C(T_F)$ respectivamente. A imagem foi retirada da referência [43].	93

Introdução

O estudo de fenômenos relacionados à física de altas energias possibilita que conceitos oriundos tanto da mecânica quântica quanto da relatividade geral sejam aplicados simultaneamente a um mesmo sistema. Enquanto a relatividade geral de Einstein, formulada em 1915, tem como um dos objetivos ampliar o escopo da física para sistemas envolvendo velocidades próximas a da luz, corpos extremamente massivos e altas densidades de energia, a teoria quântica permite que a física compreenda fenômenos relacionados com a estrutura fundamental da matéria. Entretanto, quando a física adentra em cenários em que ambas as teorias são relevantes para descrever corretamente a natureza, ou ao menos buscar uma descrição apropriada, como, por exemplo, em cosmologia quântica e física de partículas, deve-se abrir mão do caráter individual destas teorias e levar em consideração uma sobreposição de seus conceitos fundamentais. Como consequência, novos conceitos teóricos são elaborados, dentre eles, a proposta de quantização do espaço-tempo, fundamental para o desenvolvimento da presente tese.

Em termos históricos, a ideia de quantização do espaço-tempo foi originalmente sugerida por Snyder [1] como uma tentativa de resolver o problema dos infinitos em teoria quântica de campos, em analogia direta com a introdução da quantidade fundamental conhecida como constante de Planck, h , para resolver o problema chamado *catástrofe do ultravioleta* da radiação de corpo negro. A abordagem de Snyder foi mostrar que a hipótese de que o espaço-tempo é contínuo não é uma condição necessária para garantir a invariância de Lorentz na teoria relativística. Nas próprias palavras de Snyder no artigo, ele diz:

“The principal result in this paper is that there exist a Lorentz invariant space-time in which there is a natural unit of length. We hope that the introduction of such a unit of length will remove many of the divergent troubles of present field theory.”

Após algumas considerações referentes à nova estrutura algébrica resultante da introdução de uma nova constante fundamental na teoria, denominada a no artigo, Snyder mostra matematicamente que devido ao fato das novas relações de não-comutação diferirem daquelas bem conhecidas da mecânica quântica padrão apenas para grandes valores de momento, isso implica que uma teoria quântica baseada na quantização do espaço-tempo irá fornecer os mesmos resultados da mecânica quântica convencional para todos processos que não envolvam grandes valores de

momento, mas proporcionaria resultados diferentes para processos envolvendo grandes valores de momento. Para deixar isso claro, a quantização do espaço-tempo introduzida por Snyder resulta na seguinte alteração no comutador entre variáveis canônicas:

$$[x, p_x] = i\hbar[1 + (a/\hbar)^2 p_x^2],$$

indicando que quando a razão $a/\hbar \rightarrow 0$ os efeitos da quantização do espaço-tempo são desconsiderados.

Snyder finaliza o artigo afirmando que a quantização do espaço-tempo proposta não é suficiente para impactar a descrição de fenômenos atômicos ou mesmo macroscópicos. No entanto, o sucesso da teoria de renormalização [2] em fitar os dados experimentais fez com que a tentativa de quantização do espaço-tempo fosse temporariamente abandonada.

Mais recentemente, com a física experimental de altas energias capaz de observar efeitos que até então eram impossíveis devido à limitação instrumental e, ao mesmo tempo, com o surgimento de diversas propostas com a intenção de unificar a mecânica quântica e a relatividade geral como, por exemplo, a teoria de cordas [3, 4] e a gravidade quântica em loop [5], ficou evidente que em distâncias em torno daquela conhecida como comprimento de Planck, ou seja,

$$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{cm}, \quad (1)$$

a geometria do espaço-tempo deve ser totalmente reformulada em termos de novos conceitos que englobem tanto fundamentos da mecânica quântica quanto da relatividade geral, ou seja, um ponto definido como algo sem dimensão deixa de fazer sentido e passa a ser atribuído a este uma quantidade mínima de incerteza à região do espaço-tempo [6].

A proposta acima de uma incerteza mínima relevante ao tratarmos da física para comprimentos em torno do comprimento de Planck, l_P , pode ser associada à quantização do espaço-tempo sugerida por Snyder se pensarmos em termos da estrutura de espaço de fase. Na mecânica quântica convencional, o espaço de fase construído com as variáveis canônicas posição e momento possui uma região de incerteza mínima cujo comprimento é proporcional à constante de Planck. De forma análoga, ao se estender as regras de não-comutação, associa-se aos novos pares de variáveis que agora não comutam, por exemplo, x e y , uma região de incerteza mínima neste novo espaço de fase, cujo comprimento também estará associado à nova constante introduzida na teoria.

Ao mesmo tempo, com a descrição da teoria quântica feita através do formalismo do espaço de fase [7], onde posição e momento possuem a mesma relevância teórica, passou a se considerar também relações gerais de não-comutatividade no espaço de fase, ou seja, relações do tipo

$$[x_i, x_j] = i\theta_{ij}, \quad \text{e} \quad [p_i, p_j] = i\eta_{ij}, \quad (2)$$

com θ_{ij} e η_{ij} matrizes constantes, incorporadas à teoria quântica padrão. A esta nova teoria dá-se o nome de mecânica quântica não-comutativa (MQNC), enquanto a mecânica quântica com relações de não-comutatividade apenas entre posição e momento é denominada mecânica quântica padrão. O formalismo da mecânica quântica não-comutativa no espaço de fase, usado nesta tese, será detalhadamente explicado posteriormente.

Alguns trabalhos visando impor limites teóricos às duas novas constantes da teoria quântica não-comutativa têm sido publicados. Dentre eles, o estudo do sistema composto por nêutrons ultra-frios interagindo com o campo gravitacional terrestre por meio de estados ligados foi útil para impor limites teóricos inferiores e superiores à η [8, 9]. Estes limites indicam que a MQNC seria válida apenas em regimes de altas energias ou para algum sistema periódico em que os efeitos não-comutativos levariam uma escala de tempo muito grande para poderem ser observados [10]. Entretanto, assim como a mecânica quântica padrão tende de algum modo para a mecânica clássica na medida em que os números quânticos envolvidos tornam-se relativamente grandes, a MQNC deve assumir a forma da mecânica quântica padrão no limite de baixas energias. Esta conexão entre MQNC e mecânica quântica padrão é feita através do chamado mapa de Seiberg-Witten, que conecta as variáveis canonicamente conjugadas das duas teorias por meio de uma transformação linear [11].

A mecânica quântica não-comutativa vem sendo estudada em diversos sistemas físicos conhecidos com o objetivo de se verificar novos efeitos que supostamente poderiam ser testados experimentalmente como, por exemplo, o efeito Hall quântico [12], diversos trabalhos envolvendo osciladores harmônicos [10, 13, 14], o problema de uma partícula em um potencial central [15], entre outros. Isso mostra a alta variedade de cenários em que a MQNC pode ser aplicada e estudada, como meio de testar sua consistência matemática e física. Para além disso, é necessário dizer que a mecânica quântica não-comutativa não deve ser considerada como uma proposta de teoria de unificação, uma vez que ela não engloba em seu âmago conceitos fundamentais da relatividade geral. Ela deve ser considerada algo como um *toy model*, onde é possível compreender melhor as implicações matemáticas e físicas de se considerar novas relações de não-comutação e novas constantes intrínsecas à teoria quântica. Assim, ela cumpre muito bem o papel o qual foi objetivado, averiguar como tais relações afetam sistemas quânticos bem conhecidos e, futuramente, como poderíamos modelar sistemas de modo a quantificar estes efeitos.

Do ponto de vista do formalismo da MQNC no espaço de fase, será utilizado a prescrição de Weyl para transformar um operador em uma função escalar. Neste sentido, a função de Wigner, que é justamente a transformada de Weyl do operador densidade de um sistema físico, será a responsável por descrever o estado do sistema, ao mesmo tempo em que assume o status de uma função de quase-probabilidade, por ser possível assumir valores negativos. Embora existam outros formalismos para descrever fenômenos da mecânica quântica não-comutativa, como pode ser visto em [16], o formalismo no espaço de fase, conhecido em sua forma completa como Wigner-

Weyl-Groenewold-Moyal (WWGM), é o que mais se aproxima de uma descrição clássica dos sistemas físicos que iremos tratar neste trabalho. Além disso, ele possui a vantagem de permitir descrever um dado sistema através da função de Wigner, que contém ao mesmo tempo informação a respeito da posição e momento do sistema, como será detalhado no próximo capítulo. Por fim, uma vez que trataremos de sistemas interagentes, a função de Wigner torna-se conveniente no mesmo sentido em que o operador densidade é mais apropriado para tratar interação no formalismo de operadores da mecânica quântica.

Além dos resultados obtidos ao longo do doutorado, esta tese também apresenta uma descrição detalhada do formalismo da mecânica quântica no espaço de fase segundo a prescrição de WWGM. Embora a função de Wigner seja bem conhecida no contexto de ótica quântica, em particular para visualizar estados quânticos comprimidos no espaço de fase, o formalismo é muito mais abrangente e pode ser utilizado como uma alternativa para a descrição quântica em termos de operadores atuando no espaço de Hilbert. Assim, o primeiro capítulo, juntamente com referências, apresenta um conjunto de informações que permite a qualquer aluno dar os primeiros passos na direção de aprender uma outra abordagem matemática da mecânica quântica.

Esta tese é organizada como se segue. No capítulo 1 é apresentado detalhadamente o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase segundo a prescrição de WWGM. Em seguida, é feita a extensão para o espaço de fase com relações gerais de não-comutatividade, onde é apresentado o mapa de Seiberg-Witten, responsável pela conexão entre os dois espaços de Hilbert distintos. O capítulo 2 é destinado ao tratamento da partícula livre no espaço de fase não-comutativo. O capítulo 3 é voltado para uma revisão de alguns resultados sobre o caso do oscilador harmônico no espaço de fase não-comutativo, onde é apresentado basicamente os mesmos resultados obtidos no capítulo 2, por questão de linearidade da tese. No capítulo 4 apresentamos os resultados sobre o estudo da influência de campos externos sobre alguns sistemas físicos particulares e quantificamos o efeito por meio da fidelidade para estados gaussianos. Aqui, utilizamos do fato de que é possível mapear efeitos não-comutativos como campos magnéticos externos efetivos atuando em um sistema físico. O capítulo 5 é destinado à análise da influência de efeitos não-comutativos sobre a termodinâmica de algumas configurações de gases. Analisamos o efeito sobre gases formados por um *ensemble* de partículas livres, e rotores quânticos. No capítulo 6 apresentamos os resultados sobre possíveis correções não-comutativas na eficiência de máquinas térmicas quânticas operando em dois ciclos particulares. Além disso, é feita também uma análise destas correções sobre o ciclo de Carnot. Finalmente, nossas conclusões são apresentadas no capítulo 7, além de indicarmos futuros trabalhos a serem realizados nesta área.

Ao longo do período de doutorado foram publicados dois trabalhos apresentando nossos resultados e atualmente um se encontra em processo de análise pela revista. Os trabalhos são:

- *Probing phase-space noncommutativity through quantum mechanics and ther-*

modynamics of free particles and quantum rotors, publicado na revista *PhysicaA* em 2015, disponível em [17],

- *Gaussian fidelity distorted by external fields*, publicado na revista *PhysicaA* em 2016, disponível em [18],

- *Quantum engines and the range of the second law of thermodynamics in the noncommutative phase-space*, em submissão.

Capítulo 1

Formalismo da Mecânica Quântica no Espaço de Fase

Neste capítulo iremos apresentar o formalismo teórico e conceitos relevantes para o desenvolvimento do presente trabalho. Primeiramente vamos desenvolver detalhadamente o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase e comentar suas vantagens em relação ao formalismo baseado em operadores. Em seguida uma extensão para o espaço de fase não-comutativo é feita.

O formalismo padrão da mecânica quântica é construído utilizando-se operadores que atuam no chamado espaço de Hilbert. A descrição de um sistema físico é feita por meio de uma função de onda, que pode ser dada na representação de posição ou, através de uma transformada de Fourier, escrita na representação de momento. Ao mesmo tempo, existe uma relação de comutação entre os operadores posição e momento que pode ser expressa por

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.1)$$

A equação (1.1) representa o fato de que é impossível, através de uma medida física, conhecer os valores da posição e momento de uma partícula simultaneamente com precisão arbitrária.

Dentre os formalismos existentes da mecânica quântica, todos devem, de uma forma ou de outra, incorporar a relação (1.1), conhecida como princípio de incerteza de Heisenberg. O formalismo da mecânica quântica no espaço de fase, no qual a função de Wigner desempenha um papel tão importante quanto a função de onda no formalismo apresentado por Heisenberg-Schrodinger, tem a grande vantagem de incorporar simultaneamente informações sobre a posição e momento do sistema quântico [7]. Além disso, uma vez que neste formalismo não se utilizam operadores atuando no espaço de Hilbert, mas sim *c-numbers*, este é o formalismo que mais se aproxima da descrição da mecânica clássica e, portanto, o mais suscetível a se realizar uma transição quântico-clássica de um sistema físico.

O formalismo a ser apresentado detalhadamente aqui começou a ser desenvolvido

por Wigner [19] e foi finalizado com os trabalhos posteriores de Weyl [20], Moyal [21] e Groenewold [22]. Deve ser enfatizado que embora a função de Wigner esteja intimamente associada à função de onda ou ao operador densidade de um sistema quântico, é possível descrever o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase apenas fazendo referência à função de Wigner. Neste sentido, tal descrição é completamente análoga à descrição por meio de operadores e funções de onda. Deste modo, além de apresentarmos nossos resultados, esta tese tem a intenção de mostrar uma alternativa ao formalismo padrão da mecânica quântica, não amplamente divulgada na literatura brasileira e que pode ser útil para futuros estudantes de física.

É conveniente indicarmos também ao leitor duas referências interessantes sobre o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase. Os dois trabalhos foram publicados na revista brasileira de ensino de física e podem ser encontrados em [23, 24].

Transformada de Weyl e função de Wigner

Considere um operador $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$, onde \hat{q} e \hat{p} são os operadores posição e momento respectivamente. O ponto chave aqui é a transformada de Weyl, que converte um operador em uma função escalar de q e p , definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A^W(q, p) &= \int dy e^{-i p y / \hbar} \langle q + y/2 | \hat{A} | q - y/2 \rangle \\ &= \int dy e^{i q y / \hbar} \langle p - y/2 | \hat{A} | p + y/2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.2)$$

tanto na representação de posição quanto na representação de momento, com “W” indicando a transformada de Weyl.

Para elucidar a transformada de Weyl, considere o operador identidade, $\hat{1}$, o operador posição, \hat{q} , e o operador momento, \hat{p} . Suas respectivas transformadas de Weyl são, após um rápido cálculo,

$$\begin{aligned} 1^W &= 1, \\ q^W &= q, \\ p^W &= p. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Considerando agora um sistema físico descrito por um operador densidade $\hat{\rho}$, tal que

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1.4)$$

onde $|\psi\rangle$ são auto-estados do sistema, a função de Wigner é definida justamente como sendo a transformada de Weyl do operador densidade, ou seja, [19],

$$W(q, p) = h^{-1} \rho^W = h^{-1} \int dy e^{-i p y / \hbar} \psi^*(q - y/2) \psi(q + y/2). \quad (1.5)$$

Uma propriedade importante da função de Wigner é que ela deve ser normalizada quando integrada em todo o espaço de fase, ou seja,

$$\int \int W(q, p) dq dp = 1. \quad (1.6)$$

Além disso, a função de Wigner permite obter a distribuição de probabilidade para q e p por meio de sua integração no espaço de fase do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \int dq W(q, p) &= |\phi(p)|^2, \\ \int dp W(q, p) &= |\psi(q)|^2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde $\psi(q)$ é a função de onda do sistema na representação de posição e $\phi_n(p)$ a função de onda do sistema na representação de momento.

A partir da função de Wigner é possível também obter as respectivas funções de onda para o sistema físico. Para ver isso explicitamente, multiplicamos a equação (1.5) por $e^{ipq'/\hbar}$ e integramos sobre a variável p em ambos os lados, de modo que

$$\int e^{ipq'/\hbar} W(q, p) dp = h^{-1} \int \psi^*(q - y/2) \psi(q + y/2) \left[\int e^{-ip(y-q')/\hbar} dp \right] dy. \quad (1.8)$$

Usando a seguinte propriedade da função delta de Dirac,

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ip(x-a)} dp, \quad (1.9)$$

a equação (1.8) pode ser escrita como

$$\int \psi^*(q - y/2) \psi(q + y/2) \delta(q' - y) dy = \int e^{ipq'/\hbar} W(q, p) dp, \quad (1.10)$$

de modo que, definindo $q' = q$ e $q = q/2$, obtém-se

$$\psi(q) = \frac{1}{\psi^*(0)} = \int e^{ipq/2\hbar} W(q/2, p) dp. \quad (1.11)$$

O valor de $\psi^*(0)$ pode ser obtido através da normalização dos estados do sistema. Como exemplo, no caso do oscilador harmônico as funções de Wigner são dadas em termos de polinômios de Laguerre, enquanto as funções de onda são escritas em termos de polinômios de Hermite.

Deve ser enfatizado que em seu trabalho original, Ref. [20], Weyl tinha como objetivo a transformada inversa da apresentada acima, ou seja, a questão era encontrar uma certa representação em termos de operadores atuando no espaço de Hilbert para uma dada função escalar. Para fazer isso, Weyl introduziu uma regra de asso-

ciação mapeando funções escalares em operadores que deviam obedecer um padrão de ordenamento, este sendo necessário satisfazer a relação de comutação entre os operadores posição e momento da mecânica quântica. Neste sentido, a chamada correspondência de Weyl não é única. Várias outras regras de associação existem e para cada uma existe uma função de quase-probabilidade associada. A extensão deste assunto foge do escopo da presente tese mas pode ser encontrada em mais detalhes em [7].

A transformada de Weyl ainda possui a propriedade de que o traço do produto de dois operadores, \hat{A} e \hat{B} , é dado pela integral no espaço de fase do produto de suas respectivas transformadas de Weyl [25],

$$\text{Tr}[\hat{A}\hat{B}] = h^{-1} \int \int dq dp A^W(q, p) B^W(q, p), \quad (1.12)$$

onde h é a constante de Planck.

Para um sistema descrito pelo operador densidade $\hat{\rho}$ e composto por um observável representado por um operador \hat{O} , é possível usar a equação (1.12) para obter o valor esperado deste observável, tal que

$$\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{O}] = h^{-1} \int \int dq dp \rho^W(q, p) O^W(q, p) = \langle O \rangle. \quad (1.13)$$

Utilizando a equação (1.13) é possível escrever o valor médio de um observável como

$$\langle O \rangle = h^{-1} \int \int dq dp W(q, p) O^W(q, p). \quad (1.14)$$

A equação (1.14) pode ser interpretada como se o valor esperado de O fosse obtido através da média de uma quantidade física, $O^W(q, p)$, no espaço de fase com densidade de probabilidade $W(q, p)$ caracterizando o estado.

Produto de Moyal

Como dito antes, qualquer formalismo da mecânica quântica deve incorporar de alguma maneira o princípio de incerteza de Heisenberg, descrito pela equação (1.1). O formalismo da mecânica quântica no espaço de fase realiza isso por meio do chamado produto de Moyal (\star), definido no espaço de funções comutativas como

$$f \star g = \exp \left[\frac{\Lambda}{2} \epsilon_{ij} \partial_{r_i} \partial_{s_j} \right]_{r=s} f(r) g(s), \quad (1.15)$$

onde Λ é uma constante.

Em termos das variáveis posição e momento, o produto de Moyal pode ser escrito

como [7]

$$\star = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) \right]. \quad (1.16)$$

Assim, considerando dois operadores $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ e $\hat{B}(\hat{q}, \hat{p})$ e suas respectivas transformações de Weyl, $A^W(q, p)$ e $B^W(q, p)$, a correspondência geral entre operadores atuando no espaço de Hilbert e suas respectivas representações em termos de funções comutativas podem ser escritas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) &\leftrightarrow A^W(q, p), \\ \hat{A}(\hat{q}, \hat{p})\hat{B}(\hat{q}, \hat{p}) &\leftrightarrow A^W(q, p) \star B^W(q, p). \end{aligned} \quad (1.17)$$

O produto de Moyal ainda permite escrever a transformada de Weyl de dois operadores como [26]

$$(A(q, p) B(q, p))^W = A(q, p)^W \star B(q, p)^W. \quad (1.18)$$

Ao substituir o produto ordinário pelo representado por (1.16) o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase permite que as variáveis q e p tenham as mesmas interpretações da mecânica clássica e ao mesmo tempo incluam a relação de incerteza de Heisenberg. Vejamos como, considerando a relação de comutação entre as funções escalares q e p utilizando o produto de Moyal:

$$\begin{aligned} [q, p]_{\star} &= q \star p - p \star q \\ &= q \left[1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) + \dots \right] p - p \left[1 + \frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) + \dots \right] q \\ &= qp + \frac{i\hbar}{2} - pq + \frac{i\hbar}{2} = i\hbar. \end{aligned} \quad (1.19)$$

A conexão com a interpretação clássica torna-se mais evidente quando a dinâmica da transformada de Weyl de um dado operador, $\hat{O}(\hat{q}, \hat{p}; t)$, é escrita através do produto de Moyal,

$$\begin{aligned} \dot{O}^W(q, p, t) &= -\frac{i}{\hbar} [O^W(0), H^W(q, p; t)]_{\star} \\ &= \frac{i}{\hbar} (H^W \star O^W - O^W \star H^W), \end{aligned} \quad (1.20)$$

sendo esta equação conhecida como equação de Moyal [7].

Deve ficar claro que a equação de Moyal é a análoga da equação de Heisenberg no formalismo do espaço de fase. Deste modo, assim como na representação de Heisenberg os operadores evoluem no tempo enquanto as funções de onda são independentes do tempo, utilizando a equação de Moyal, as transformadas de Weyl dos operadores possuem dependência temporal, enquanto as funções de Wigner são,

inicialmente, estacionárias. Pode-se clarificar esta relação recorrendo à equação de Heisenberg, ou seja,

$$\dot{\hat{A}}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{A}(t) - \hat{A}(t)\hat{H}), \quad (1.21)$$

onde assumimos por simplicidade que $\partial\hat{A}(t)/\partial t = 0$.

Aplicando a transformada de Weyl de ambos os lados da equação acima e usando a propriedade (1.18), iremos obter exatamente a equação (1.20).

Ao substituir na equação (1.20) as variáveis posição e momento, verificamos que elas satisfazem as equações de Hamilton, isto é,

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{i}{\hbar}[p^W(0), H^W(q, p; t)]_\star = -\vec{\nabla}_q H^W \\ \dot{q} &= -\frac{i}{\hbar}[q^W(0), H^W(q, p; t)]_\star = +\vec{\nabla}_p H^W. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Novamente, deve ser dito que o produto de Moyal faz parte da correspondência Weyl-Wigner-Moyal, no qual um operador atuando sobre o espaço de Hilbert pode ser mapeado em funções escalares através de uma regra de associação que obedece a relação de comutação entre posição e momento, e vice-versa. Para outros conjuntos de regras de associação e funções de quase-probabilidade, naturalmente existem outros produtos internos que em geral são diferentes do produto de Moyal. O Apêndice A apresenta algumas outras propriedades do produto de Moyal.

Equação de auto-valor para a função de Wigner

Para completar o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase, é conveniente escrever uma equação análoga à equação de auto-valor, em que operadores atuam no espaço de Hilbert. Partindo da equação de auto-valor para um dado operador hamiltoniano \hat{H} ,

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (1.23)$$

e aplicando $\langle\psi|$ em ambos os lados da equação (1.23) pela direita,

$$\hat{H}|\psi\rangle\langle\psi| = E|\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1.24)$$

onde estamos assumindo por simplicidade que $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ é o operador densidade de um estado puro.

Ao integrar a equação (1.24) de modo a obtermos as transformadas de Weyl dos operadores de ambos os lados da igualdade, temos

$$\int e^{-ipy/\hbar}\langle q + y/2|\hat{H}\hat{\rho}|q - y/2\rangle dy = E \int e^{-ipy/\hbar}\langle q + y/2|\hat{\rho}|q - y/2\rangle dy, \quad (1.25)$$

onde, após levar em conta a transformada de Weyl de dois operadores, como mos-

trado em (1.18), esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$H^W(q, p) \star W(q, p) = E W(q, p). \quad (1.26)$$

A equação (1.26) permite obter os auto-estados e as auto-energias para um dado sistema físico descrito por uma função comutativa $H^W(q, p)$, que é exatamente a transformada de Weyl de um operador hamiltoniano, $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$. Os auto-estados que descrevem o sistema são agora as funções de Wigner, associadas a um respectivo auto-valor. A equação (1.26) é válida para sistemas com d dimensões, tal que pode ser escrita, de forma mais geral,

$$H^W(q_i, p_i) \star W(q_i, p_i) = E W(q_i, p_i), \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.27)$$

Para um dado sub-espço específico, (q_k, p_k) , a função de Wigner pode ser obtida realizando o traço, ou seja, integrando sobre todo o espaço de fase (q_{d-k}, p_{d-k}) , de modo que

$$W(q_k, p_k) = \int \int W(q_i, p_i) dq^{d-k} dp^{d-k}. \quad (1.28)$$

Evolução temporal da função de Wigner

Finalmente, é importante termos um procedimento para obter a evolução temporal da função de Wigner, uma vez que podemos estar interessados no comportamento do sistema no espaço de fase como função de um parâmetro externo ou mesmo na interação entre sub-sistemas ao longo do tempo. Uma vez conhecida $W(q_i, p_i; 0)$ através da equação de auto-valor (1.27), a evolução temporal da função de Wigner é definida por uma operação unitária escrita como

$$U_\star(q_i, p_i; t) = e^{itH^W/\hbar} = 1 + (it/\hbar)H^W + \frac{(it/\hbar)^2}{2!}H^W \star H^W + \frac{(it/\hbar)^3}{3!}H^W \star H^W \star H^W + \dots, \quad (1.29)$$

onde $H^W(q_i, p_i)$ é a transformada de Weyl do hamiltoniano descrevendo um sistema arbitrário.

Deste modo, partindo de $W(q_i, p_i, t = 0)$, a função de Wigner para um tempo arbitrário t será dada por [7]

$$W(q_i, p_i; t) = U_\star^{-1}(q_i, p_i; t) \star W(q_i, p_i; 0) \star U_\star(q_i, p_i; t). \quad (1.30)$$

Na prática, a evolução temporal da função de Wigner é feita através da evolução temporal das coordenadas do espaço de fase, $q_i(t)$ e $p_i(t)$, obtidas utilizando-se as equações em (1.22). Deste modo, tem-se que

$$W(q_i, p_i; t) = W(q_{i_0}(t), p_{i_0}(t); 0). \quad (1.31)$$

Para ilustrar, considere o oscilador harmônico em uma dimensão, que possui as

seguintes equações de movimento,

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos(\omega t) + p_0 \sin(\omega t) \\ p(t) &= p_0 \cos(\omega t) - q_0 \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (1.32)$$

onde q_0 , p_0 e ω são constantes arbitrárias.

A evolução temporal das coordenadas do oscilador harmônico será descrita por

$$\begin{aligned} q_0 &= q \cos(\omega t) - p \sin(\omega t) \\ p_0 &= p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (1.33)$$

e, conseqüentemente, a evolução temporal da função de Wigner no espaço de fase será dada por

$$W(q, p; t) = W(q \cos(\omega t) - p \sin(\omega t), p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t); 0). \quad (1.34)$$

1.1 Extensão para o Espaço de Fase Não-Comutativo

O formalismo da mecânica quântica apresentado acima será denominado a partir de agora por mecânica quântica padrão, ou seja, descrito pelas seguintes relações de comutação,

$$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = 0, \quad [\hat{Q}_i, \hat{\Pi}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{\Pi}_i, \hat{\Pi}_j] = 0, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.35)$$

onde indicaremos por letras maiúsculas as variáveis da mecânica quântica padrão.

A inclusão de novas relações de comutação, ou seja, a extensão de novos pares de observáveis que não podem ser medidos simultaneamente com precisão arbitrária, se faz com a generalização da álgebra não-comutativa. Denominaremos por mecânica quântica não-comutativa (MQNC) a teoria quântica que satisfaz as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\eta_{ij}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.36)$$

onde indicaremos por letras minúsculas as variáveis da mecânica quântica não-comutativa.

Nas relações de comutação descritas em (1.36), θ_{ij} e η_{ij} representam matrizes reais, anti-simétricas e invertíveis. Tais matrizes podem ser ainda representadas por

$$\theta_{ij} = \theta\epsilon_{ij} \quad \text{e} \quad \eta_{ij} = \eta\epsilon_{ij}, \quad (1.37)$$

onde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, tal que $\epsilon_{12} = 1$, $\epsilon_{21} = -1$ e $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$.

As novas constantes, θ e η , tem um significado completamente análogo à \hbar no que diz respeito à realização de medidas simultâneas de observáveis físicos com precisão arbitrária. Para reforçar a natureza física destas constantes, elas possuem

as seguintes dimensões no sistema internacional:

$$\begin{aligned} [\theta] &= L^2, & [\sqrt{\theta}] &= L, \\ [\eta] &= M^2 L^2 / T^2, & [\sqrt{\eta}] &= ML/T. \end{aligned}$$

Uma propriedade importante de operadores que não comutam é sua relação de incerteza, que pode ser escrita para dois operadores \hat{A} e \hat{B} como

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle}{2}. \quad (1.38)$$

É instrutivo mostrar que para a álgebra da mecânica não-comutativa esta relação também é válida. Considere que $\hat{q}_1 = \hat{x}$ e $\hat{q}_2 = \hat{y}$, tal que $\hat{p}_1 = \hat{p}_x$ e $\hat{p}_2 = \hat{p}_y$. Teremos, então:

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta, \quad \text{e} \quad [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = i\eta, \quad (1.39)$$

e, substituindo estas relações em (1.38), obtemos

$$\Delta \hat{y} \Delta \hat{x} \geq \theta/2, \quad \Delta \hat{p}_y \Delta \hat{p}_x \geq \eta/2, \quad \Delta \hat{p}_x \Delta \hat{x} \geq \hbar/2 = \Delta \hat{p}_y \Delta \hat{y} \geq \hbar/2, \quad (1.40)$$

ou seja, fica claro que θ e η representam a impossibilidade de conhecer com precisão arbitrária os valores dos observáveis que não-comutam de maneira simultânea.

Uma característica fundamental da MQNC é sua possibilidade de ser mapeada na mecânica quântica padrão. Através de estudos focando na estrutura formal da teoria quântica descrita pela álgebra (1.36), esta pode ser mapeada na álgebra da mecânica quântica padrão, equações (1.35), através de uma classe de combinações do tipo

$$\hat{q}_i = \hat{q}_i(\hat{Q}_j, \hat{\Pi}_j), \quad \hat{p}_i = \hat{p}_i(\hat{Q}_j, \hat{\Pi}_j), \quad (1.41)$$

conhecidos como mapa de Seiberg-Witten [3].

Devido às relações (1.41), é possível encontrar uma representação dos operadores não-comutativos como operadores atuando no espaço de Hilbert convencional da mecânica quântica padrão. Isso significa que um sistema descrito na MQNC passa a ser mapeado para a mecânica quântica padrão como um sistema modificado por efeitos não-comutativos presentes no hamiltoniano. Deve ser notado também que o mapa de Seiberg-Witten não é uma transformação canônica, pois ele não preserva as relações de comutação.

O mapa de Seiberg-Witten pode ser escrito como uma combinação linear da seguinte forma [3]:

$$\hat{q}_i = A_{ij} \hat{Q}_j + B_{ij} \hat{\Pi}_j, \quad \hat{p}_i = C_{ij} \hat{Q}_j + D_{ij} \hat{\Pi}_j, \quad (1.42)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes reais e constantes. É considerado também que tais matrizes são invertíveis, de modo que o mapa inverso também é válido.

É possível escrever um conjunto de equações matriciais cujas matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e

\mathbf{D} são soluções. Para isso, substituindo o mapa (1.42) em (1.36) e usando as relações de comutação (1.35), obtemos:

$$\mathbf{A}\mathbf{D}^T - \mathbf{B}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}_{d \times d}, \quad \mathbf{A}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{A}^T = \frac{1}{\hbar}\Theta, \quad \mathbf{C}\mathbf{D}^T - \mathbf{D}\mathbf{C}^T = \frac{1}{\hbar}\mathbf{N}, \quad (1.43)$$

onde o sobre-escrito T representa a matriz transposta e \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , Θ e \mathbf{N} são matrizes com elementos A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , θ_{ij} e η_{ij} respectivamente.

As soluções das equações matriciais em (1.43) determinam a estrutura do mapa de Seiberg-Witten. Podemos considerar elementos matriciais iniciais para A_{ij} e D_{ij} tais que representem a realidade física que estamos interessados, ou seja, que em algum caso limite as variáveis da MQNC tendam às variáveis da mecânica quântica padrão. Assumindo isso, podemos escrever:

$$A_{ij} = \nu\mathbf{I}, \quad D_{ij} = \mu\mathbf{I}, \quad (1.44)$$

onde ν e μ são parâmetros constantes e reais e satisfazem a seguinte condição:

$$\frac{\theta\eta}{4\hbar^2} = \mu\nu(1 - \mu\nu), \quad (1.45)$$

com $\theta\eta \leq \hbar^2$ e com o correspondente jacobiano:

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, \Pi)} = 1 - \frac{\theta\eta}{\hbar^2}. \quad (1.46)$$

O mapa de Seiberg-Witten com estes parâmetros iniciais pode então ser completamente escrito, pois, como solução das equações (1.43), obtêm-se

$$B_{ij} = -\frac{\theta}{2\nu\hbar}\epsilon_{ij}, \quad C_{ij} = \frac{\eta}{2\mu\hbar}\epsilon_{ij}, \quad (1.47)$$

o que resulta no seguinte mapa de Seiberg-Witten:

$$\hat{q}_i = \nu\hat{Q}_i - \frac{\theta}{2\nu\hbar}\epsilon_{ij}\hat{\Pi}_j, \quad \hat{p}_i = \mu\hat{\Pi}_i + \frac{\eta}{2\mu\hbar}\epsilon_{ij}\hat{Q}_j \quad (1.48)$$

É importante notar que uma vez que θ e η tendam a zero, os parâmetros ν e μ tendem automaticamente a 1 e a mecânica quântica padrão é recuperada da MQNC.

Generalização da álgebra para o espaço de fase

No contexto da mecânica quântica não-comutativa descrita no espaço de fase, pode ser escrita uma álgebra comutativa de Heisenberg-Weyl generalizando o produto de Moyal da seguinte forma:

$$[q_i, q_j]_{\star_\theta} = i\theta_{ij}, \quad [q_i, p_j]_{\star_\hbar} = i\hbar\delta_{ij}, \quad [p_i, p_j]_{\star_\eta} = i\eta_{ij}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.49)$$

onde o produto de Moyal generalizado, $\star_{NC} = \star_{\theta} \star_{\hbar} \star_{\eta}$, é representado por

$$\begin{aligned}
\star_{\theta} &= \exp \left[\frac{i\theta_{ij}}{2} \left(\overleftarrow{\nabla}_{q_i} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{q_j} - \overleftarrow{\nabla}_{q_j} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{q_i} \right) \right], \\
\star_{\hbar} &= \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\nabla}_{q_i} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{p_j} - \overleftarrow{\nabla}_{p_j} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{q_i} \right) \right], \\
\star_{\eta} &= \exp \left[\frac{i\eta_{ij}}{2} \left(\overleftarrow{\nabla}_{p_i} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{p_j} - \overleftarrow{\nabla}_{p_j} \cdot \overrightarrow{\nabla}_{p_i} \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Naturalmente, as relações (1.50) satisfazem as relações de comutação para a mecânica quântica não-comutativa no espaço de fase. Assim, existem dois modos de se tratar um sistema descrito pela mecânica quântica não-comutativa. Considerando um operador hamiltoniano $\hat{H}^{NC}(\hat{q}_i, \hat{p}_i)$, a primeira possibilidade é obter a transformada de Weyl deste operador para o espaço de fase não-comutativo e então realizar o mapa de Seiberg-Witten para o espaço de fase da mecânica quântica padrão. A segunda alternativa é realizar o mapa de Seiberg-Witten do hamiltoniano e então obter a transformada de Weyl correspondente no espaço de fase da mecânica quântica padrão:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{NC}(\hat{q}_i, \hat{p}_i) &\longrightarrow_{\star_{NC}} H^{NC}(q_i, p_i) \longrightarrow_{SW} H^W(Q_i, \Pi_i) \\
\hat{H}^{NC}(\hat{q}_i, \hat{p}_i) &\longrightarrow_{SW} \hat{H}(\hat{Q}_i, \hat{\Pi}_i) \longrightarrow_{\star_{\hbar}} H^W(Q_i, \Pi_i).
\end{aligned}$$

Para operadores hamiltonianos simples como, por exemplo, $\hat{p}^2/2m$, ambos os métodos são relativamente diretos. Porém quando o hamiltoniano não-comutativo contém termos mais gerais, utilizar primeiro o produto de Moyal geral pode ser matematicamente mais trabalhoso e por isso é mais conveniente realizar o mapa de Seiberg-Witten sobre o operador hamiltoniano NC e então obter sua transformada de Weyl para o espaço de fase da mecânica quântica padrão. Este método será o utilizado ao longo de todo o trabalho.

Para completar o formalismo da mecânica quântica não-comutativa, alguns trabalhos teóricos têm estudado possíveis valores para as constantes θ e η . Um sistema físico relevante para este fim é a interação entre neutrons ultra frios (*ultra cold neutrons*) e o campo gravitacional da Terra [8, 9]. Neutrons ultra frios [27, 28] são produzidos em laboratório com velocidades relativamente baixas quando comparadas com velocidades relativísticas. Devido ao fato desses neutrons interagirem gravitacionalmente com a Terra do mesmo modo que uma partícula em um poço de potencial na mecânica quântica, este sistema torna-se conveniente para se testar possíveis efeitos gravitacionais em sistemas quânticos.

Comparando dados experimentais de neutrons ultra frios interagindo com o campo gravitacional terrestre [27], foi possível impor limites superiores aos parâmetros não-comutativos η [8, 9] e, por meio de outros estudos teóricos, impor limites ao

parâmetro θ [29]

$$\theta \leq 4 \times 10^{-40} \text{m}^2, \quad \text{e} \quad \eta \leq 1.76 \times 10^{-61} \text{kg}^2 \text{m}^2 \text{s}^{-2}. \quad (1.51)$$

Resumindo o procedimento a ser usado para estudar sistemas quânticos não-comutativos, temos: primeiramente, dado um operador hamiltoniano descrito por meio de variáveis não-comutativas da álgebra de Heisenberg deformada, nós mapeamos ele para o espaço de Hilbert convencional utilizando o mapa de Seiberg-Witten; em seguida, obtemos a transformada de Weyl do hamiltoniano, agora descrito pelo conjunto de variáveis (Q_i, Π_i) ; finalmente, utilizamos a equação de auto-valor (1.26) para obter a função de Wigner e as respectivas auto-energias do sistema.

1.1.1 Necessidade da função de Wigner na MQNC

Uma vez que detalhamos a expansão do formalismo da mecânica quântica no espaço de fase para a álgebra não-comutativa generalizada de Heisenberg-Weyl, é conveniente explicitarmos aqui a necessidade em se utilizar a função de Wigner na descrição de sistemas quânticos no âmbito da mecânica quântica não-comutativa.

Na mecânica quântica padrão, onde existe apenas a relação de comutação entre posição e momento, ou seja,

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1.52)$$

é possível escrever o estado de um sistema quântico por meio de sua representação no espaço de *posição* ou por meio de sua representação no espaço de *momento*, mas não em ambas simultaneamente. Isto decorre justamente devido ao fato de que os elementos do espaço de *posição* não comutam com os elementos do espaço de *momento*, muito embora eles estejam conectados por uma transformada de Fourier e, mais importante, os elementos de cada espaço comutam entre si. No entanto, sempre é possível obter a função de Wigner a partir da função de onda, independente de qual representação estiver sendo utilizada.

Já na mecânica quântica não-comutativa as relações de comutação da teoria são dadas pelas equações (1.36). Tem-se que, desde o início, os elementos do espaço de *posição* não comutam entre si, o mesmo acontecendo com os elementos do espaço de *momento*. Devido a isso, utilizando a álgebra da mecânica quântica não-comutativa, é impossível mantermos o conceito de função de onda em uma das representações. O conceito de função de onda, portanto, falha na MQNC. Para ilustrar, consideremos um caso particular onde temos apenas uma relação de não-comutação extra, ou seja,

$$[q_i, q_j] = i\theta_{ij}, \quad [q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [p_i, p_j] = 0. \quad (1.53)$$

Neste caso, ainda conseguimos uma função de onda na representação de *momento*, embora o conceito não seja válido na representação de *posição* [16]. Deste modo, quando generalizamos a álgebra não-comutativa tal como em (1.36), devemos abrir mão do conceito de função de onda. Apenas quando realizamos o mapa de

Seiberg-Witten e passamos a descrever os operadores não-comutativos em termos de operadores da mecânica quântica padrão podemos voltar a descrever o sistema em termos de funções de onda.

A grande vantagem da função de Wigner reside justamente neste fato, pois ela é válida tanto na álgebra não-comutativa como na álgebra da mecânica quântica padrão, uma vez que ela é, por construção, função da posição e momento do sistema físico em estudo.

Capítulo 2

Partícula Livre no Espaço de Fase Não-Comutativo

Neste capítulo será estudado o comportamento de um sistema composto por partículas livres num espaço de fase não-comutativo. Embora o sistema seja simples do ponto de vista da mecânica quântica padrão, novos efeitos são obtidos ao se considerar relações gerais não-comutativas.

Considere um sistema bi-dimensional composto por uma partícula livre no espaço de fase não-comutativo, cujo hamiltoniano é dado por

$$\hat{H}_{FP}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}, \quad (2.1)$$

onde m é a massa da partícula.

As coordenadas no espaço de fase deste sistema estão sujeitas às relações em (1.36), ou seja,

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = i\theta\epsilon_{ij} \quad , \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}\hbar, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\eta\epsilon_{ij} \quad , \quad i, j = 1, 2, \quad (2.2)$$

onde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$.

Ao aplicar o mapa de Seiberg-Witten (1.48) em (2.1) obtêm-se a seguinte transformada de Weyl do hamiltoniano, descrita em termos de variáveis comutativas:

$$H_{FP}^W(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) = \alpha^2 \mathbf{Q}^2 + \beta^2 \mathbf{\Pi}^2 + \gamma \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} \Pi_i Q_j, \quad (2.3)$$

onde

$$\alpha^2 \equiv \frac{\eta^2}{8m\mu^2\hbar^2}, \quad \beta^2 \equiv \frac{\mu^2}{2m}, \quad \text{e} \quad \gamma \equiv \frac{\eta}{2m\hbar}, \quad (2.4)$$

com $2\alpha\beta = \gamma$. Note que a equação (2.3) não depende de θ e ν uma vez que não foi realizado o mapa nas coordenadas espaciais.

Uma vez que as variáveis Q_i e Π_i em (2.3) satisfazem as equações de movimento de Hamilton, descritas em (1.22), obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}_k &= -\frac{i}{\hbar} [\Pi_k, H_{FP}^W] = -2\alpha^2 Q_k - \gamma \epsilon_{jk} \Pi_j, \\ \dot{Q}_k &= -\frac{i}{\hbar} [Q_k, H_{FP}^W] = 2\beta^2 \Pi_k - \gamma \epsilon_{jk} Q_j, \quad k, j = 1, 2.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Como já mencionado no capítulo anterior, as variáveis aqui podem ser interpretadas classicamente. Reescrevendo as equações acima como duas equações diferenciais de terceira ordem, temos:

$$\begin{aligned}\ddot{\Pi}_k + 4\gamma^2 \dot{\Pi}_k &= 0, \\ \ddot{Q}_k + 4\gamma^2 \dot{Q}_k &= 0,\end{aligned}\quad (2.6)$$

é possível então resolver as equações em (2.6), cujas soluções são:

$$\begin{aligned}Q_1(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(x + \frac{\pi_y}{m\gamma} \right) + \left(x - \frac{\pi_y}{m\gamma} \right) \cos(2\gamma t) + \left(y + \frac{\pi_x}{m\gamma} \right) \sin(2\gamma t) \right], \\ Q_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(y - \frac{\pi_x}{m\gamma} \right) + \left(y + \frac{\pi_x}{m\gamma} \right) \cos(2\gamma t) - \left(x - \frac{\pi_y}{m\gamma} \right) \sin(2\gamma t) \right], \\ \Pi_1(t) &= \frac{1}{2} [(\pi_x - m\gamma y) + (\pi_x + m\gamma y) \cos(2\gamma t) + (\pi_y - m\gamma x) \sin(2\gamma t)], \\ \Pi_2(t) &= \frac{1}{2} [(\pi_y + m\gamma x) + (\pi_y - m\gamma x) \cos(2\gamma t) - (\pi_x + m\gamma y) \sin(2\gamma t)],\end{aligned}\quad (2.7)$$

onde x , y , π_x , e π_y são constantes arbitrárias, e $\gamma = \eta/2m\hbar$ é a frequência característica do sistema.

Note que o sistema descrito por (2.3) é análogo ao hamiltoniano do efeito Zeeman, identificando a intensidade do campo magnético como $B \sim \eta/\hbar q$, onde q é a carga elétrica da partícula. Deve ser enfatizado que a carga aqui é uma mera analogia matemática, pois em nosso sistema original a partícula não possui qualquer carga elétrica. Além disso, quando é tomado o limite $\eta \rightarrow 0$, o efeito de campo magnético é anulado e obtemos as equações de movimento conhecidas para uma partícula livre:

$$\begin{aligned}Q_1(t) &\sim x + \frac{\pi_x}{m}t, \\ Q_2(t) &\sim y + \frac{\pi_y}{m}t, \\ \Pi_1(t) &\sim \pi_x, \\ \Pi_2(t) &\sim \pi_y.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Podemos analisar o efeito da não-comutatividade através da evolução temporal das coordenadas $(Q_1(t), \Pi_1(t))$ e $(Q_2(t), \Pi_2(t))$ da partícula livre no espaço de fase.

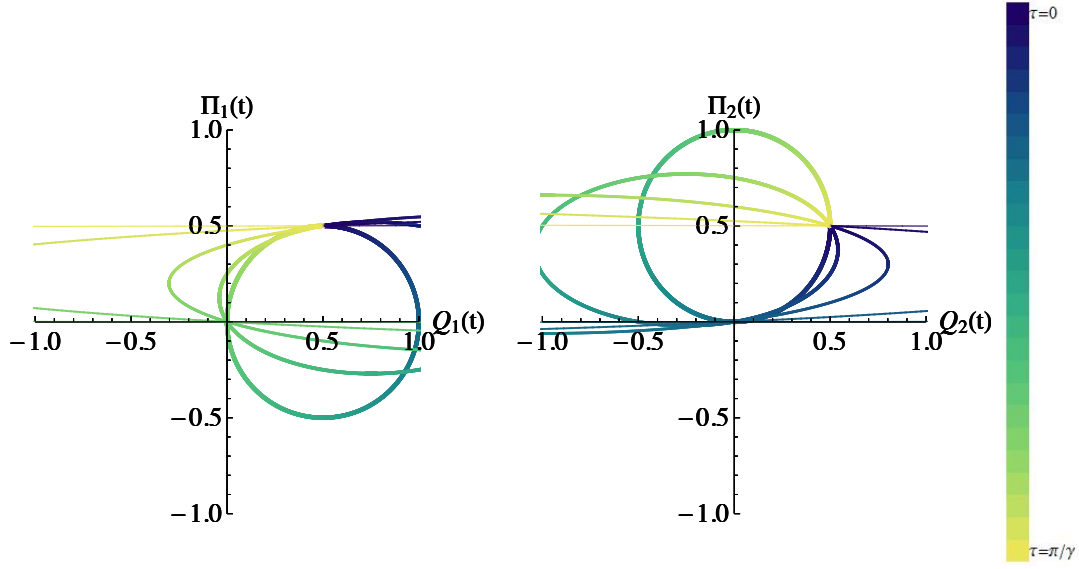


Figura 2.1: Evolução temporal das coordenadas do espaço de fase, $(Q_1(t), \Pi_1(t))$ e $(Q_2(t), \Pi_2(t))$, para o sistema de partícula livre NC, com o parâmetro não-comutativo, γ , sendo escolhido como 1 (linha mais grossa), $1/2$, $1/5$, $1/20$, e $1/500$ (linha mais fina), implicando um decréscimo de espessura das linhas. Foi usado uma escala *Azul-Verde-Amarelo* para indicar a evolução temporal, τ , variando de 0 (azul) até π/γ (amarelo). Adotamos $\hbar = m = 1$ e $Q_{1,2}(0) = \Pi_{1,2}(0) = 0.5$. Note que a medida que o valor de γ diminui, as trajetórias no espaço de fase se aproximam de linhas retas.

A Figura 2.1 mostra a evolução temporal das coordenadas como curvas elípticas, as quais podem ser extrapoladas para linhas retas no limite em que $\gamma \rightarrow 0$. É possível notar aqui claramente a analogia entre o efeito não-comutativo e o campo magnético para uma partícula livre, ao se introduzir um confinamento através do parâmetro γ .

2.1 Função de Wigner e auto-energias

Seguindo o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase para este sistema, pode-se obter a função de Wigner utilizando a equação (1.26). Para a hamiltoniana (2.3), temos:

$$H_{FP}^W \star W_n(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) = E_n W_n(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) \quad (2.9)$$

Para resolver esta equação seguimos o mesmo procedimento utilizado em [10, 15], onde o produto de Moyal e suas derivadas parciais direcionais desempenham papel fundamental. O cálculo detalhado pode ser visto no apêndice B. A função de Wigner obtida para este sistema é escrita como

$$W_n(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) = \mathcal{N} \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \exp[-\Omega/\hbar] L_n^0(\Omega/\hbar), \quad (2.10)$$

onde \mathcal{N} é o fator de normalização, L_n^0 são os polinômios de Laguerre associados, n

é um inteiro não-negativo e

$$\Omega(t) = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{Q}^2(t) + \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{\Pi}^2(t) + 2 \sum_{i,j=1}^2 (\epsilon_{ij} \Pi_i(t) Q_j(t)). \quad (2.11)$$

É importante notar que $\Omega(t)$ é uma variável estacionária, ou seja, substituindo (2.7) em (2.11) obtemos

$$\Omega(t) = \Omega(0) = \frac{\alpha}{\beta} (x^2 + y^2) + \frac{\beta}{\alpha} (\pi_x^2 + \pi_y^2) + 2(\pi_x y - \pi_y x), \quad (2.12)$$

mostrando que $\Omega(t)$ é uma constante de movimento neste caso.

A equação (2.9) também fornece as auto-energias do sistema, que são dadas por

$$E_n = \hbar\gamma(2n + 1). \quad (2.13)$$

Deve ser enfatizado que as auto-energias obtidas em (2.13) são exclusivamente devido ao efeito não-comutativo da álgebra de Heisenberg-Weyl generalizada mapeada via mapa de Seiberg-Witten. Tais energias representam o confinamento imposto pelo parâmetro não-comutativo γ sobre a partícula livre.

2.2 Efeito da não-comutatividade sobre a distribuição de momento

A função de Wigner (2.10), permite que a distribuição de momento seja estudada em termos do parâmetro não-comutativo γ . Para proceder com a integração da função de Wigner no espaço de fase, deve ser notado que, analogamente ao problema encontrado na função de onda descrevendo uma partícula livre, deve-se impor uma localização espacial sobre a função de Wigner. Isto nos garante um valor finito para o fator de normalização \mathcal{N} . Assim, no caso da integração de (2.10) sobre o espaço de fase, o cálculo sobre as coordenadas espaciais será feito tal que $Q_{1,2} \in (-a, +a)$. Para obter a distribuição de momento, for exemplo, para Π_1 , devemos primeiramente realizar a integração de (2.10) sobre as coordenadas (Q_2, Π_2) e em seguida integrar a função de Wigner referente ao sub-espaço (Q_1, Π_1) na coordenada espacial. Integrando sobre Q_2 e Π_2 , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{+a} dQ_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_2 W_n(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; 0) &= \tilde{W}_n^{(1)}(Q_1, \Pi_1; 0) \\ &= \tilde{W}_n^{(1)}(Q_1, \Pi_1; 0) \equiv (2a)^{-1} |\Phi(\Pi_1; 0)|^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A última passagem acima foi obtida notando-se que $\tilde{W}_n^{(1)}(Q_1, \Pi_1; 0)$ não depende

de Q_1 , ou seja:

$$\int_{-a}^{+a} dQ_1 \tilde{W}_n^{(1)}(Q_1, \Pi_1; 0) = 2a \tilde{W}_n^{(1)}(Q_1, \Pi_1; 0) = |\Phi(\Pi_1; 0)|^2. \quad (2.15)$$

A Figura 2.2 apresenta a distribuição de momento estacionária, $|\Phi(\Pi_1; 0)|^2$, para os números quânticos $n = 0$ e $n = 1$, com $y = 0$ e $y = 4$ e para uma escolha arbitrária de $a = 3$. É importante notar que a distribuição não depende de x e π_y e \mathcal{N} foi escolhido de modo a garantir que

$$\int_{-a}^{+a} dQ_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_1 \tilde{W}_n^{(1)}(Q_1, \Pi_1; 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_1 |\Phi(\Pi_1; 0)|^2 = 1. \quad (2.16)$$

Os resultados mostram a distorção introduzida pelo parâmetro não-comutativo $\gamma(\eta)$ sobre a distribuição de momento.

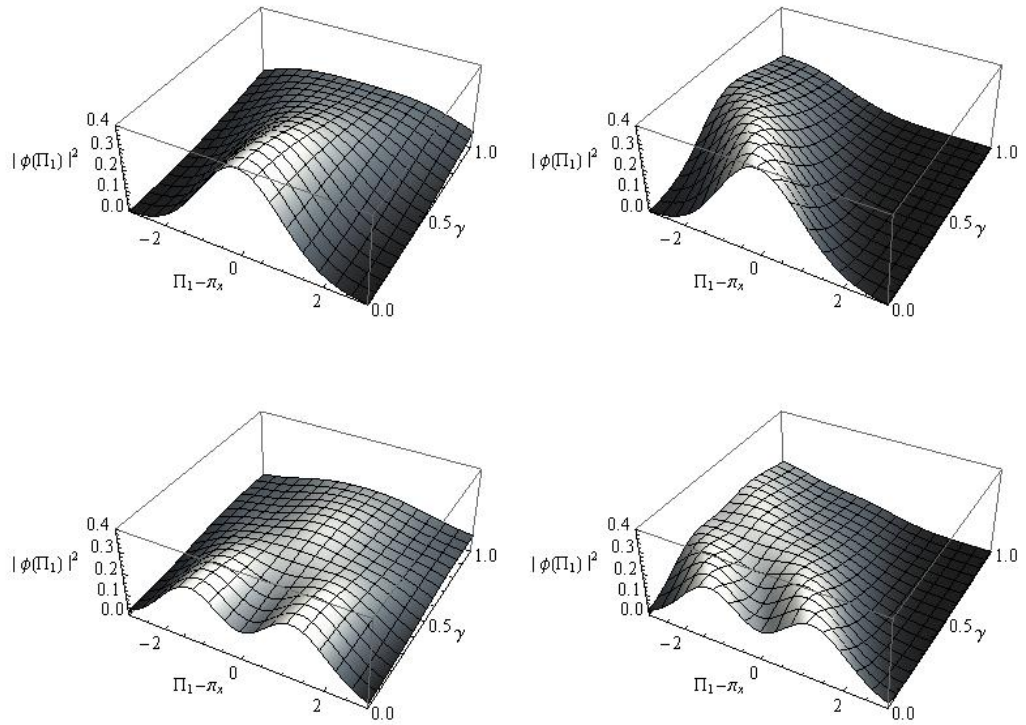


Figura 2.2: Projeção da distribuição de momento, $|\Phi(\Pi_1; 0)|^2$, sobre a coordenada Π_1 (direção x) para o sistema de partícula livre com números quânticos associados $n = 0$ (primeira linha) e $n = 1$ (segunda linha). A fim de distinguir a distorção introduzida pelo parâmetro NC, γ , foram escolhidos dois valores de coordenadas iniciais para Q_2 , $y = 0$ (primeira coluna) e $y = 4$ (segunda coluna), mantendo π_x arbitrário. Os resultados não dependem de x e π_y .

2.3 Decoerência e recorrência quântica de informação em estados gaussianos no espaço de momento

A função de Wigner (2.10) para o sistema de partícula livre é estacionária, não sendo possível estudar efeitos de perda de informação dependentes da não-comutatividade em termos de sua evolução temporal. Para este fim, é útil construir um envelope gaussiano no espaço de momento, Π_1 e Π_2 , tal que possíveis distorções devido ao parâmetro não-comutativo possam ser verificadas. O formalismo apresentado no capítulo 1 garante que a evolução temporal da função de Wigner seja dada por [25]

$$W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t) \equiv W_G(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{\pi}_x(t), \tilde{\pi}_y(t); 0), \quad (2.17)$$

onde $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$, $\tilde{\pi}_x(t)$ e $\tilde{\pi}_y(t)$ correspondem à solução inversa de (2.7) para obter, por exemplo, $\tilde{\pi}_{x,y}(t) \equiv \tilde{\pi}_{x,y}(Q_1, \Pi_1, Q_2, \Pi_2; t)$, que governam o movimento de $W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)$.

Um envelope gaussiano no espaço de momento pode ser escrito como

$$W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t) = \frac{1}{4\pi a^2} \exp \left[- \left((\tilde{\pi}_x(t) - \pi_x)^2 + (\tilde{\pi}_y(t) - \pi_y)^2 \right) \right], \quad (2.18)$$

onde, novamente, o fator de normalização é dependente da localização espacial tal que $Q_{1,2} \in (-a, +a)$.

De acordo com a dinâmica das variáveis $\tilde{\pi}_{x,y}(t) \equiv \tilde{\pi}_{x,y}(Q_1, \Pi_1, Q_2, \Pi_2; t)$, realizando a inversão das equações (2.7), pode-se obter explicitamente a evolução temporal para o vetor de estado descrito em (2.18). Note que para a mecânica quântica padrão, sem efeitos não-comutativos, $W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)$ ainda é estacionário, pois $\tilde{\pi}_{x,y}(t) \equiv \Pi_{1,2} = \pi_{x,y}$. O mesmo não acontece no caso da dinâmica não-comutativa.

Deve ser ressaltado que durante a evolução temporal não há perda de informação como um todo. A informação oscila entre os sub-espacos (Q_1, Π_1) e (Q_2, Π_2) . Isto fica claro quando calculamos a pureza do sistema, que se mantém inalterada, ou seja,

$$\int \int W(Q_i, \Pi_i)^2 dQ_i d\Pi_i = \text{constante}. \quad (2.19)$$

Para mostrar como a não-comutatividade afeta o vetor de estado descrito por W_G , estudamos a evolução temporal da função de Wigner correspondente aos sub-espacos (Q_1, Π_1) e (Q_2, Π_2) do espaço de fase. As funções de Wigner nestes sub-

espaços são definidas como

$$\begin{aligned}\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t) &= Tr_{\{2\}} [W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)] \\ &= \int_{-a}^{+a} dQ_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_2 W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t),\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}_G^{(2)}(Q_2, \Pi_2; t) &= Tr_{\{1\}} [W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)] \\ &= \int_{-a}^{+a} dQ_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_1 W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t).\end{aligned}\tag{2.21}$$

As expressões acima significam que, integrando W_G sobre Q_i e Π_i obtemos a função de Wigner correspondente ao sub-espaço (Q_j, Π_j) , para $i, j = 1, 2$. Por uma escolha arbitrária, vamos analisar a evolução temporal dos vetores de estado ao longo da direção x , ou seja, através de $\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t)$.

Os resultados são mostrados na Figura 2.3. Pode ser notado que o parâmetro não-comutativo, γ , introduz um tipo de distorção periódica sobre o comportamento estacionário inicial tal que o vetor de estado, $\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t)$, recupera seu padrão original de $\tau = 0$ após um tempo $\tau = \pi/\gamma$. De forma mais específica, $\gamma \neq 0$ modifica o comportamento padrão do problema da partícula livre comutativa, introduzindo um comportamento de espalhamento ao caráter de localização da função de Wigner, que também exhibe um efeito de rotação no espaço de fase ao longo de sua evolução temporal. Os resultados são obtidos para intervalos temporais múltiplos de $\pi(8\gamma)^{-1}$.

Além do resultado mostrado acima, é possível quantificar o efeito do parâmetro não-comutativo, γ , sobre a evolução temporal do envelope gaussiano (2.18) através da informação mútua. A informação mútua é uma medida de correlação entre dois subsistemas de um estado quântico. No presente caso, estamos interessados em correlações geradas exclusivamente pelo parâmetro NC, γ , o que significa que para o caso onde $\gamma = 0$, $W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)$ reproduz o produto de dois estados puros não relacionados, ou seja, o vetor de estado evolui como um estado puro estacionário.

A informação mútua é definida como

$$I_{12}(t) = S_1(t) + S_2(t) - S_{12}(t) = I_{21}(t),\tag{2.22}$$

onde $S_1(t)$, $S_2(t)$ e $S_{12}(t)$ são as entropias lineares, também conhecida como impureza e definida de maneira mais geral como

$$S_L = \frac{d}{d-1} (1 - Tr[\rho^2]),\tag{2.23}$$

onde d é a dimensão do operador densidade, ρ , tal que quando $S_L = 0$ temos um estado completamente puro. A motivação para se escrever a informação mútua como função da entropia linear (impureza) é justamente medir a correlação entre os sub-espaços, na medida em que estamos interessados em correlações exclusivamente devido aos efeitos não-comutativos.

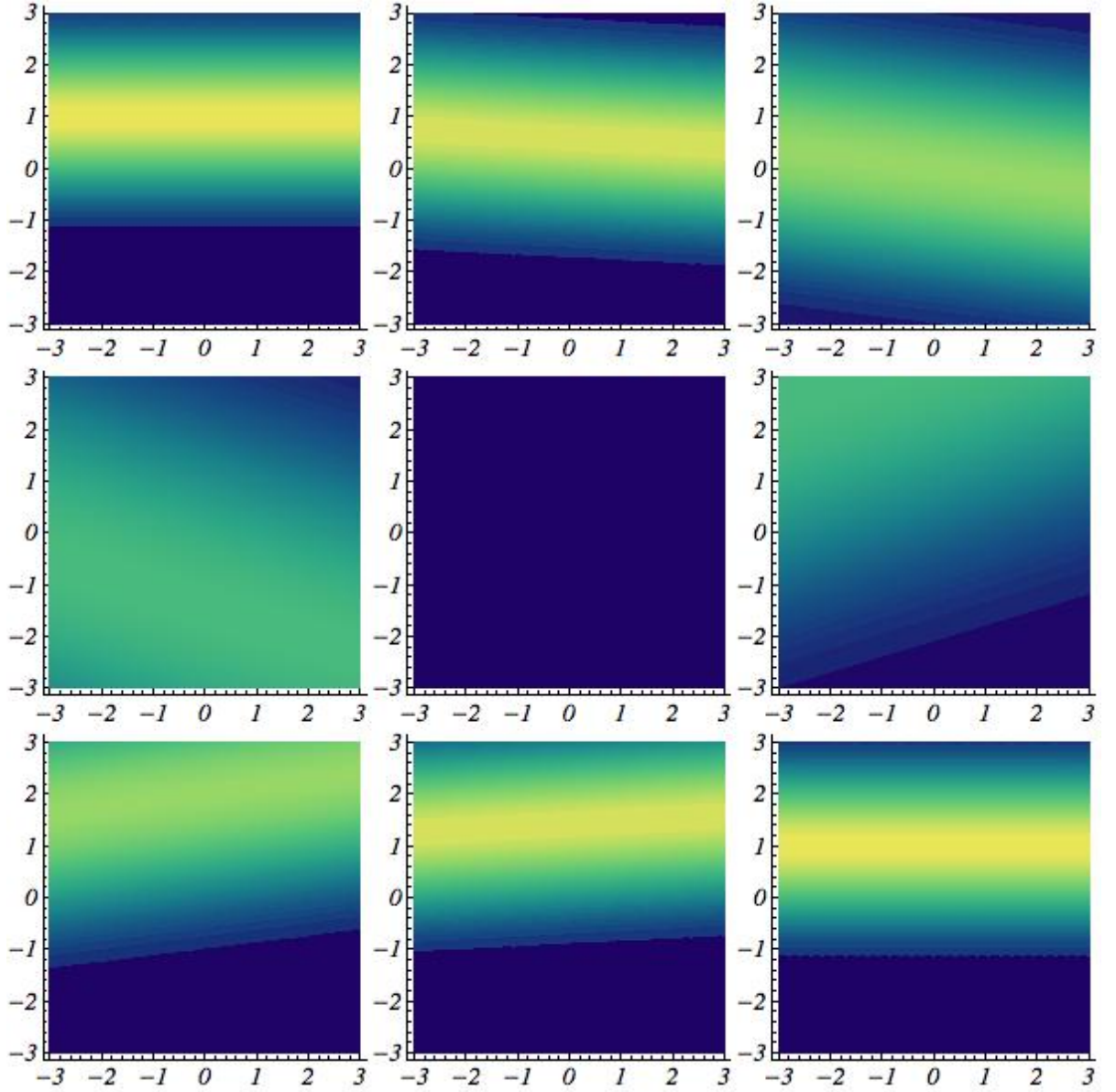


Figura 2.3: Evolução temporal da função de Wigner, $\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t)$, para o sistema de partícula livre NC correspondente ao vetor de estado projetado sobre o plano $Q_1 - \Pi_1$. No tempo $\tau = 0$ foi assumido que $\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t)$ está centrada no momento $\pi_x = 1 (= -\pi_y)$, para uma coordenada espacial arbitrária dada por $x = 1/\gamma$ (a qual não é relevante em $t = 0$). Foi considerado intervalos de tempo tais que $\tau = k\pi(8\gamma)^{-1}$, onde k corresponde a valores inteiros de 0 à 8 (para figuras da esquerda para a direita e de cima para baixo), e $m = 1$. O esquema de cores segue a escada *Azul-Verde-Amarelo*, de amarelo (correspondendo à 1) até azul (correspondendo à 0).

Para o caso do sistema de partícula livre NC, obtemos:

$$\begin{aligned}
S_1(t) &= 1 - \frac{2a\sqrt{2\pi}}{\hbar} \text{Tr}_{\{1\}} \left[\left(\text{Tr}_{\{2\}} [W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)] \right)^2 \right] \\
&= 1 - \frac{2a\sqrt{2\pi}}{\hbar} \text{Tr}_{\{1\}} \left[\left(\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t) \right)^2 \right] \\
&= 1 - |\cos(\gamma t)|, \\
S_2(t) &= 1 - \frac{2a\sqrt{2\pi}}{\hbar} \text{Tr}_{\{2\}} \left[\left(\text{Tr}_{\{1\}} [W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)] \right)^2 \right] \\
&= 1 - \frac{2a\sqrt{2\pi}}{\hbar} \text{Tr}_{\{2\}} \left[\left(\tilde{W}_G^{(2)}(Q_2, \Pi_2; t) \right)^2 \right] \\
&= 1 - |\cos(\gamma t)|, \\
S_{12}(t) &= 1 - \frac{8\pi a^2}{\hbar^2} \text{Tr}_{\{1\}} \left[\text{Tr}_{\{2\}} [(W_G(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t))]^2 \right] \\
&= 1 - \cos(\gamma t)^2.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Substituindo os resultados (2.24) em (2.22) obtemos a seguinte expressão para a informação mútua:

$$I_{12}(t) = (1 - |\cos(\gamma t)|)^2. \tag{2.25}$$

A Figura 2.4 apresenta o resultado para a informação mútua e quantifica a correlação entre os estados $x(\leftrightarrow 1)$ e $y(\leftrightarrow 2)$ exclusivamente devido a efeitos não-comutativos. Pode ser visto que o parâmetro NC, $\gamma(\eta)$, atua como o principal agente responsável por introduzir desvios no comportamento estacionário do envelope gaussiano, W_G . É importante notar também a relação entre as Figuras 2.3 e 2.4 no que diz respeito à evolução temporal do envelope gaussiano no espaço de momento.

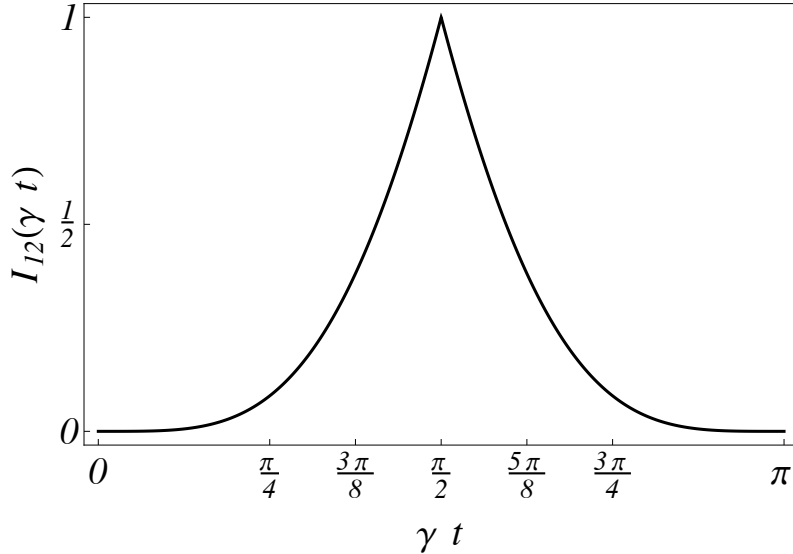


Figura 2.4: Informação mútua, I_{12} , em função de γt , para o sistema de partícula livre descrito pelo vetor de estado W_G . Como esperado segundo a Figura 2.3, a informação mútua quantifica a distorção do comportamento estacionário e o caráter oscilante introduzido pelo parâmetro NC, $\gamma(\eta)$.

2.4 Discussões

Neste capítulo foram consideradas relações gerais de não-comutatividade no sistema de partícula livre. Embora seja um sistema simples, sua descrição feita através da mecânica quântica não-comutativa e o posterior mapeamento para a mecânica quântica padrão através do mapa de Seiberg-Witten mostrou desvios do comportamento tradicional devido a efeitos não-comutativos. Neste sistema, o efeito NC é caracterizado pelo parâmetro $\gamma(\eta)$, o qual introduz um comportamento similar ao efeito Zeeman, que é bem conhecido quando uma partícula é sujeita a um campo magnético externo uniforme. Tais efeitos podem ser vistos na Figura 2.1 onde, para $\gamma(\eta) \sim 0$, o comportamento da partícula livre dado em termos das variáveis da mecânica quântica padrão é recuperado.

Para estudar o efeito não-comutativo na evolução temporal do sistema, foi considerado uma função de Wigner gaussiana nas variáveis (Π_1, Π_2) . A evolução temporal da respectiva função de Wigner gaussiana para o sub-espço (Q_1, Π_1) está intimamente conectada com o comportamento da informação mútua do sistema. Estes resultados são visualizados nas Figuras 2.3 e 2.4, em particular para o caso em que $\tau\gamma = \pi/2$, implicando uma máxima informação mútua entre os dois sub-espços. O comportamento estacionário de $\tilde{W}_G^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t)$ sofre uma distorção devido ao parâmetro NC, $\gamma(\eta)$, além de introduzir uma rotação no espaço de fase. No capítulo 6, dedicado ao estudo de efeitos não-comutativos em variáveis termodinâmicas, ire-

mos retomar brevemente o sistema de partícula livre e estudar o comportamento de um gás $2D$ e $3D$. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados na revista *PhysicaA* e podem ser visualizados em [17].

Capítulo 3

Oscilador Harmônico no Espaço de Fase Não-Comutativo

Este capítulo tem como objetivo tratar o oscilador harmônico no espaço de fase não-comutativo. Os resultados aqui apresentados não são novos e foram estudados com maior ou menor detalhe em [10, 15]. A ideia de introduzir este capítulo é proporcionar uma apresentação de resultados de forma linear e mais completa, uma vez que no capítulo sobre fidelidade para estados gaussianos incluímos o oscilador harmônico dentre os três sistemas estudados.

De forma análoga ao capítulo anterior, vamos considerar um oscilador harmônico bi-dimensional de massa m e frequência ω no espaço de fase não-comutativo, ou seja, descrito pelas variáveis (\hat{q}_i, \hat{p}_i) como

$$\hat{H}(\hat{q}_i, \hat{p}_i) = \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}_i^2, \quad (3.1)$$

onde, para lembrar, as variáveis não-comutativas obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\eta_{ij}, \quad i = 1, \dots, 2. \quad (3.2)$$

Para descrever o oscilador harmônico em (3.1) em termos dos operadores da mecânica quântica padrão, \hat{Q}_i e $\hat{\Pi}_i$, é necessário utilizar o mapa de Seiberg-Witten, dado por

$$\hat{q}_i = \nu\hat{Q}_i - \frac{\theta}{2\nu\hbar}\epsilon_{ij}\hat{\Pi}_j, \quad \hat{p}_i = \mu\hat{\Pi}_i + \frac{\eta}{2\mu\hbar}\epsilon_{ij}\hat{Q}_j. \quad (3.3)$$

Após aplicar o mapa de Seiberg-Witten em (3.1), a transformada de Weyl do operador hamiltoniano descrevendo o oscilador harmônico na mecânica quântica padrão pode ser escrito como

$$H_{OH}^W(Q_i, \Pi_i) = \alpha^2 Q_i^2 + \beta^2 \Pi_i^2 + \gamma \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_{ij} \Pi_i Q_j, \quad (3.4)$$

onde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, e

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{\nu^2 m \omega^2}{2} + \frac{\eta^2}{8m\mu^2\hbar^2} \\ \beta^2 &= \frac{\mu^2}{2m} + \frac{m\omega^2\theta^2}{8\nu^2\hbar^2} \\ \gamma &= \frac{\theta}{2\hbar}m\omega^2 + \frac{\eta}{2m\hbar}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Deve ser notado a semelhança entre a estrutura da hamiltoniana do oscilador harmônico mapeada, equação (3.4), e a obtida utilizando o mesmo procedimento para caso da partícula livre, equação (2.3). Aqui, a impossibilidade de escrever a relação $2\alpha\beta = \gamma$ torna as equações de movimento diferentes das obtidas para caso da partícula livre, como iremos ver em seguida.

Uma vez que as variáveis Q_i e Π_i , agora comutativas, satisfazem as equações de movimento de Hamilton, por meio de (3.4) é possível obter um conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem dado por

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}_k &= -\frac{i}{\hbar}[\Pi_k, H_{OH}^W] = -2\alpha^2 Q_k - \gamma\epsilon_{ij}\Pi_j, \\ \dot{Q}_k &= -\frac{i}{\hbar}[Q_k, H_{OH}^W] = 2\alpha^2 \Pi_k - \gamma\epsilon_{ij}Q_j.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Como já mencionado, o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase permite que as variáveis Q_i e Π_i sejam interpretadas como variáveis dinâmicas clássicas. O conjunto de equações em (3.6) pode ser reescrito como duas equações diferenciais desacopladas de quarta ordem, ou seja,

$$\begin{aligned}\ddot{\ddot{\Pi}}_k &= -2(\gamma^2 + 4\alpha^2\beta^2)\ddot{\Pi}_k + (\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^2)\Pi_k, \\ \ddot{\ddot{Q}}_k &= -2(\gamma^2 + 4\alpha^2\beta^2)\ddot{Q}_k + (\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^2)Q_k,\end{aligned}\quad (3.7)$$

cujas soluções são dadas por

$$\begin{aligned}Q_1(t) &= x \cos(\Omega t) \cos(\gamma t) + y \cos(\Omega t) \sin(\gamma t) + \frac{\beta}{\alpha}[\pi_y \sin(\Omega t) \sin(\gamma t) + \pi_x \sin(\Omega t) \cos(\gamma t)], \\ Q_2(t) &= y \cos(\Omega t) \cos(\gamma t) - x \cos(\Omega t) \sin(\gamma t) - \frac{\beta}{\alpha}[\pi_x \sin(\Omega t) \sin(\gamma t) - \pi_y \sin(\Omega t) \cos(\gamma t)], \\ \Pi_1(t) &= \pi_x \cos(\Omega t) \cos(\gamma t) + \pi_y \cos(\Omega t) \sin(\gamma t) - \frac{\alpha}{\beta}[y \sin(\Omega t) \sin(\gamma t) + x \sin(\Omega t) \cos(\gamma t)], \\ \Pi_2(t) &= \pi_y \cos(\Omega t) \cos(\gamma t) - \pi_x \cos(\Omega t) \sin(\gamma t) + \frac{\alpha}{\beta}[x \sin(\Omega t) \sin(\gamma t) - y \sin(\Omega t) \cos(\gamma t)],\end{aligned}\quad (3.8)$$

onde x , y , π_x e π_y são parâmetros arbitrários, e

$$\Omega = 2\alpha\beta = \omega \sqrt{(2\mu\nu - 1)^2 + \xi^2}, \quad (3.9)$$

sendo

$$\xi = \frac{1}{2\hbar} \left[m\omega\theta + \frac{\eta}{m\omega} \right], \quad (3.10)$$

resultando em $\gamma = \omega\xi$.

Pode ser visto que quando os efeitos não-comutativos são nulos, ou seja, quando $\xi = 0$, as equações de movimento em (3.8) tornam-se as mesmas que para dois osciladores desacoplados,

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= x \cos(\omega t) + \frac{\pi_x}{m\omega} \sin(\omega t), \\ Q_2(t) &= y \cos(\omega t) + \frac{\pi_y}{m\omega} \sin(\omega t), \\ \Pi_1(t) &= \pi_x \cos(\omega t) - m\omega x \sin(\omega t), \\ \Pi_2(t) &= \pi_y \cos(\omega t) - m\omega y \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

O efeito da não-comutatividade na dinâmica do oscilador harmônico pode ser analisado através da evolução temporal das coordenadas $(Q_1(t), \Pi_1(t))$ e $(Q_2(t), \Pi_2(t))$ no espaço de fase. Com este objetivo, foi considerado um parâmetro auxiliar, ϵ , tal que

$$\epsilon = \frac{\gamma}{\Omega} = \frac{\xi}{\sqrt{(2\mu\nu - 1)^2 + \xi^2}}. \quad (3.12)$$

A Figura 3.1 mostra a evolução temporal das equações de movimento (3.8) no espaço de fase. De modo a quantificar o efeito não-comutativo sobre o sistema, foram escolhidos os valores $\epsilon = 0, 1/4, 1/10$ e $1/100$, tal que $\epsilon = 0$ representa dois osciladores harmônicos desacoplados sem efeitos NC. Para cada valor de ϵ as coordenadas evoluem no tempo no intervalo $[0, 2\pi/\Omega]$. A Figura 3.1 também apresenta o caso em que $\epsilon = 1/2\pi$, com a intenção de evidenciar o fato de que para a escolha de ϵ como um número racional as órbitas são fechadas, o mesmo não acontecendo quando ϵ é um número irracional.

3.1 Função de Wigner e auto-energias

Utilizando o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase, é possível escrever a seguinte equação de auto-valor para o oscilador harmônico não-comutativo,

$$H_{OH}^W(Q_i, \Pi_i) \star W_{n_1, n_2}(Q_i, \Pi_i) = E_{n_1, n_2} W_{n_1, n_2}(Q_i, \Pi_i), \quad (3.13)$$

onde $H_{OH}^W(Q_i, \Pi_i)$ é dado por (3.4).

Para resolver a equação (3.13) usa-se um método completamente análogo ao apresentado no apêndice B, com a diferença que neste caso teremos duas soluções do tipo mostrado no apêndice, sendo uma para cada oscilador, pois aqui não é

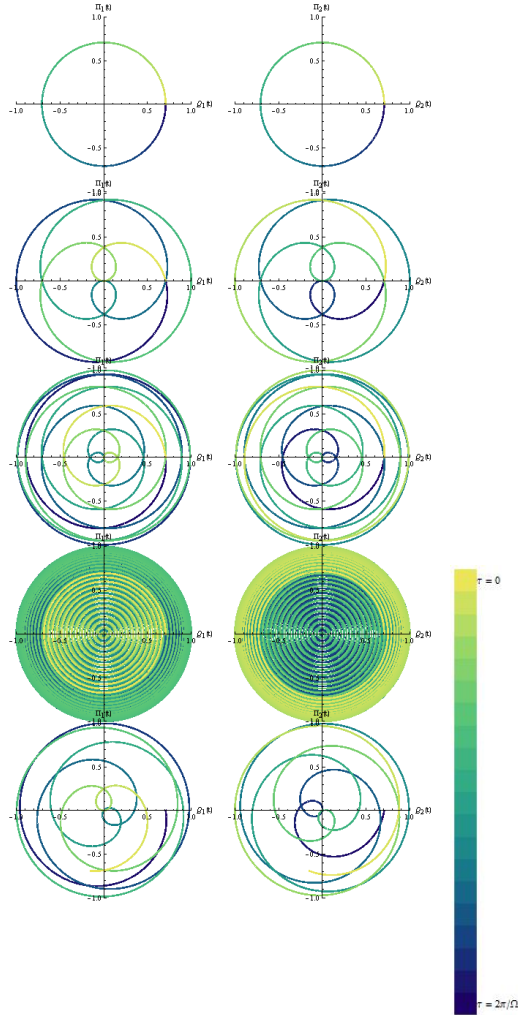


Figura 3.1: Evolução temporal das coordenadas (Q_1, Π_1) e (Q_2, Π_2) no espaço de fase, para o oscilador harmônico não-comutativo. O primeiro par de figuras é composto por órbitas elípticas referentes ao caso em que não há efeitos NC, ou seja, $\epsilon = 0$. Em seguida são apresentados resultados para $\epsilon = 1/4, 1/10$ e $1/100$ respectivamente, sendo órbitas fechadas. O caso em que $\epsilon = 1/2\pi$ é mostrado por último como órbitas abertas, pelo fato de ϵ ser um número não inteiro. As órbitas são iniciadas em $(x, \pi_x) = (y, \pi_y) = (1/\sqrt{2}, 0)$. Foi usada uma escala *Azul-Verde-Amarelo* para indicar a evolução temporal, τ , variado de 0 (azul) até $2\pi/\Omega$ (amarelo). Além disso, foi adotado $\alpha = \beta$ tal que $m\omega = \hbar = 1$

possível escrever $2\alpha\beta = \gamma$. A função de Wigner para o sistema é dada por

$$W_{n_1, n_2}(Q_i, \Pi_i) = \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{\pi^2 \hbar^2} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \left(\frac{\alpha}{\beta} Q_i^2 + \frac{\beta}{\alpha} \Pi_i^2 \right) \right] L_n^0[\Omega_+/\hbar] L_n^0[\Omega_-/\hbar], \quad (3.14)$$

onde L_n^0 são os polinômios de Laguerre associados, n_1 e n_2 são números inteiros não negativos, e

$$\Omega_{\pm} = \frac{\alpha}{\beta} Q_i^2 + \frac{\beta}{\alpha} \Pi_i^2 \mp 2 \sum_{i,j=1}^2 (\epsilon_{ij} \Pi_i Q_j). \quad (3.15)$$

A equação (3.13) também fornece as auto-energias do sistema, escritas como

$$E_{n_1, n_2} = \hbar[2\alpha\beta(n_1 + n_2 + 1) + \gamma(n_1 - n_2)] \quad (3.16)$$

Novamente, uma vez que os efeitos não-comutativos sejam considerados nulos, as auto-energias assumem a expressão bem conhecida para dois osciladores harmônicos desacoplados.

3.2 Batimento quântico e decoerência

Nesta seção é apresentada uma análise sobre a evolução temporal de uma função de Wigner representando dois osciladores harmônicos inicialmente desacoplados mas que, a partir da dinâmica das equações de movimento em (3.8), tornam-se acoplados e exibem propriedades de batimento e decoerência. Para ver isso, note que a função de Wigner (4.14) é estacionária, uma vez que das equações de movimento em (3.8) obtém-se

$$\sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} Q_i(t)^2 + \frac{\beta}{\alpha} \Pi_i^2 \right) + \epsilon_{ij} Q_i(t) \Pi_j(t) = \frac{\alpha}{\beta} (x^2 + y^2) + \frac{\beta}{\alpha} (\pi_x^2 + \pi_y^2) + x\pi_y - y\pi_x. \quad (3.17)$$

Entretanto, em [10] mostra-se que é possível construir uma função de Wigner descrevendo o estado de dois osciladores inicialmente desacoplados mas que obedecem à dinâmica das equações de movimento em (3.8). Guardadas as devidas diferenças no que diz respeito ao sistema físico, o procedimento aqui é análogo ao realizado no caso da partícula livre, onde analisamos a evolução temporal de uma função de Wigner gaussiana no espaço de momento. A função de Wigner neste caso pode ser escrita como

$$W_{n_x, n_y}(Q_i, \Pi_i; t) = W_{n_x}(\xi_x^2) W_{n_y}(\xi_y^2) \rightarrow W_{n_x}(Q_i, \Pi_i; t) W_{n_y}(Q_i, \Pi_i; t), \quad (3.18)$$

onde $n_y = n - n_x$, com $n = n_1 + n_2$,

$$W_{n_x, y}(\xi_{x,y}^2) = \frac{1}{\pi \hbar} \exp \left[-\xi_{x,y}^2 / \hbar \right] L_{n_x, y}^0[2\xi_{x,y}^2 / \hbar], \quad (3.19)$$

e

$$\xi_x^2 = \frac{\alpha}{\beta}x^2 + \frac{\beta}{\alpha}\pi_x^2, \quad \xi_y^2 = \frac{\alpha}{\beta}y^2 + \frac{\beta}{\alpha}\pi_y^2. \quad (3.20)$$

A função de Wigner (3.18) é inicialmente estacionária. Porém, ao obtermos a relação inversa das equações de movimento (3.8), ou seja, equações para x , y , π_x e π_y , e substituímos em (3.20), temos que

$$\begin{aligned} \xi_x^2 &\sim \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}Q_1^2 + \frac{\beta}{\alpha}\Pi_1^2 \right) \cos(\gamma t)^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta}Q_2^2 + \frac{\beta}{\alpha}\Pi_2^2 \right) \sin(\gamma t)^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta}Q_1Q_2 + \frac{\beta}{\alpha}\Pi_1\Pi_2 \right) \sin(2\gamma t) \right], \\ \xi_y^2 &\sim \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}Q_1^2 + \frac{\beta}{\alpha}\Pi_1^2 \right) \sin(\gamma t)^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta}Q_2^2 + \frac{\beta}{\alpha}\Pi_2^2 \right) \cos(\gamma t)^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta}Q_1Q_2 + \frac{\beta}{\alpha}\Pi_1\Pi_2 \right) \sin(2\gamma t) \right], \end{aligned}$$

o que evidencia o fato de (3.18) não ser mais estacionária e agora ter uma dependência temporal associada à γ . Naturalmente, para $\gamma = 0$, a função de Wigner volta a ser estacionária.

Para visualizar como a não-comutatividade afeta o comportamento de um sistema composto por dois osciladores harmônicos inicialmente desacoplados, podemos obter a função de Wigner em um sub-espaço particular e depois acompanhar sua evolução temporal no espaço de fase. A função de Wigner para os sub-espaços (Q_1, Π_1) e (Q_2, Π_2) são obtidas via

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{n_x, n_y}^{(1)}(Q_1, \Pi_1; t) &= Tr_{\{2\}} [W_{n_x, n_y}(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dQ_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_2 W_{n_x, n_y}(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{n_x, n_y}^{(2)}(Q_2, \Pi_2; t) &= Tr_{\{1\}} [W_{n_x, n_y}(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dQ_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_1 W_{n_x, n_y}(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}; t). \end{aligned} \quad (3.22)$$

A Figura 3.2 ilustra o comportamento da função de Wigner no espaço de fase para o sub-espaço (Q_1, Π_1) em função do tempo, τ . Para $\tau = 0$ (primeira linha) a função de Wigner assume o comportamento de um oscilador harmônico estacionário uni-dimensional com número quântico n_x . O efeito de batimento quântico devido ao parâmetro não-comutativo, γ , pode ser visualizado através de intervalos de tempo múltiplos de $\pi(8\epsilon\Omega)^{-1}$.

3.3 Discussões

Neste capítulo apresentamos resultados já existentes na literatura sobre a inclusão de efeitos não-comutativos em um sistema composto por dois osciladores harmônicos inicialmente desacoplados, sendo a não-comutatividade responsável por mediar o acoplamento entre eles. A evolução temporal das coordenadas e da função de Wigner

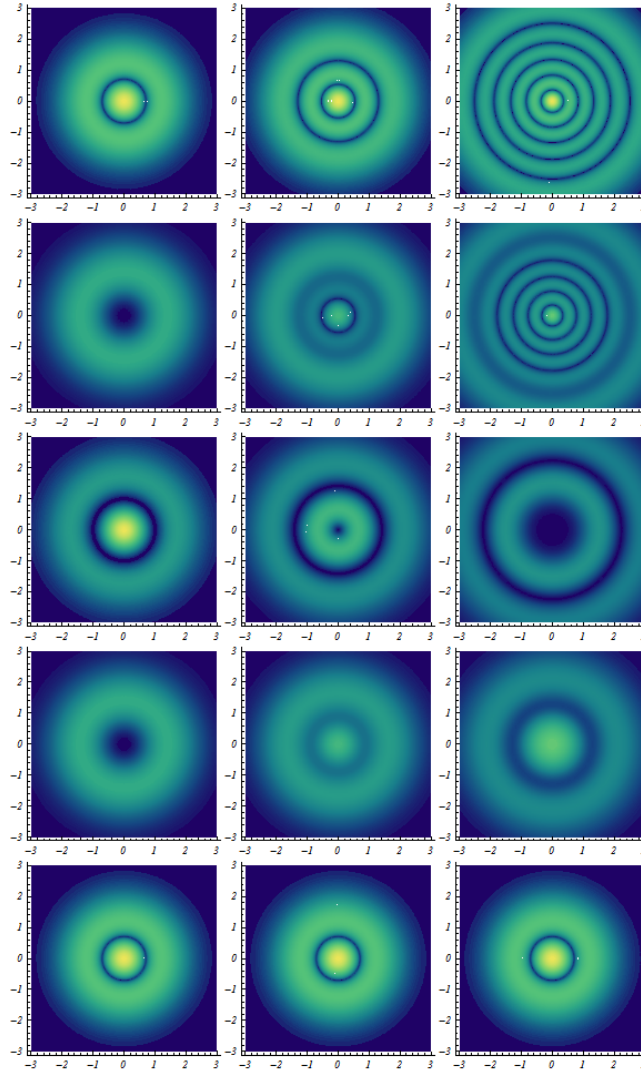


Figura 3.2: Evolução temporal da função de Wigner para o sub-espço (Q_1, Π_1) mostrando o efeito de batimento quântico, para $n_y = 2$ e $n_x = 1$ (primeira coluna), 2 (segunda coluna), e 5 (terceira coluna). A função de Wigner está centrada em $(0, 0)$ para o tempo $\tau = 0$, sendo considerados intervalos temporais tais que $\tau = k\pi(8\epsilon\Omega)^{-1}$, com $k = 0, 1, 2, 3$ e 4 afim de reproduzir a evolução temporal em 5 estágios. Foi utilizado a escala *Azul-Verde-Amarelo* para indicar a intensidade da função de Wigner, tal que Amarelo corresponde a 1, enquanto azul corresponde à 0.

em um dos sub-espacos foi ilustrada, bem como o fen4meno de batimento qu4ntico devido 4 n4o-comutatividade.

Os resultados deste cap4tulo s4o 4teis a n4vel de complementar os resultados obtidos ao longo da pesquisa de doutorado, uma vez que utilizamos o sistema de dois osciladores harm4nicos como exemplo para investigar a fidelidade para estados gaussianos na presen7a de campos externos, cap4tulo 4. Para maiores detalhes, a t4cnica de se analisar o sistema aqui apresentado pode ser visualizada em [13, 14], respectivamente para osciladores bi-dimensional e tri-dimensional. Para estudo sobre o limite termodin4mico e implica74es em informa74o qu4ntica, 4 indicado [10].

Capítulo 4

Fidelidade Gaussiana Distorcida por Campos Externos

Este capítulo é dedicado ao estudo da influência de campos externos sobre o comportamento de estados gaussianos para três sistemas físicos particulares utilizando-se um grandeza comum em informação quântica, a fidelidade, F . Como é bem conhecido na literatura, correlações quânticas gaussianas são importantes do ponto de vista de informação quântica envolvendo variáveis contínuas. A relevância de estados gaussianos é evidente também no estudo de estados de vácuo, estados térmicos e estados coerentes [30], além de serem fundamentais em ótica quântica, sistemas de baixa dimensionalidade, e na descrição de *ensembles* atômicos [31]. Finalmente, de um ponto de vista fenomenológico, funções de Wigner gaussianas podem ser parametricamente manipuladas para descrever a transição quântico-clássica de sistemas físicos [33, 34], bem como atuar como indicadores de caos quântico [35].

Os sistemas físicos que foram estudados utilizando-se estados gaussianos são: o oscilador harmônico, já descrito no capítulo 3; o sistema de partícula livre, analisado no capítulo 1; e por último o poço gravitacional quântico. A inclusão de campos externos nestes sistemas torna-se relevante como fonte para se estudar efeitos de decoerência e dissipação [34]. Tais efeitos sobre sistemas específicos podem ser implementados e quantificados através de simulação quântica, onde um sistema controlável é frequentemente usado para estudar outro sistema que por alguma razão não é controlável como, por exemplo, limites nas escalas de energia do experimento [44]. Já foi mostrado nesta tese que, ao se mapear a MQNC na mecânica quântica padrão via mapa de Seiberg-Witten, efeitos NC são incluídos no hamiltoniano do sistema como campos magnéticos externos efetivos. Deste modo, ao se considerar campos externos nos sistemas mencionados, deve ser dito que estamos interessados em realizar uma correspondência entre o campo externo considerado e efeitos de não-comutatividade.

A fidelidade é uma medida comumente usada para comparar estados de entrada e saída através de um canal quântico [30, 36, 37], assim como pode ser útil atuando como uma função quantificadora de decoerência. Em certo sentido, quando a fide-

lidade tende a 1, isso significa que o estado de saída é muito similar ao estado de entrada em um dado canal, enquanto que se F tende a zero, o estado de saída é completamente diferente do estado de entrada. Em termos efetivos para o propósito desta tese, a fidelidade mede a projeção, com variação $0 \leq F \leq 1$, de um estado dependente do tempo sobre um estado inicial.

A fidelidade quântica é definida como [30]:

$$F(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = \left[\text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_1} \hat{\rho}_2 \sqrt{\hat{\rho}_1}}) \right]^2, \quad (4.1)$$

onde $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ são dois estados do sistema quântico.

Lembrando da transformada de Weyl de um operador e da propriedade do traço do produto de dois operadores, equação (1.12), é possível escrever

$$\text{Tr}[(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2)^{1/2}] = \int \int (\rho_1^W \rho_2^W)^{1/2} dq dp, \quad (4.2)$$

e usando a definição da função de Wigner, equação (1.5), temos

$$\text{Tr}[(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2)^{1/2}] = \int \int (W_1 W_2)^{1/2} dq dp, \quad (4.3)$$

o que nos permite escrever a expressão original para a fidelidade como:

$$F = \left[\int \int (W_1 W_2)^{1/2} dq dp \right]^2. \quad (4.4)$$

A equação (4.4) pode ser escrita para um espaço de fase quadri-dimensional da seguinte forma:

$$F = \left[\int \int \int \int W_1(q_1, p_2, q_2, p_2) W_2(q_1, p_1, q_2, p_2) dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 \right]^2. \quad (4.5)$$

Para investigar efeitos de decoerência devido a campos externos, será denominado por W_1 a função de Wigner gaussiana inicial do sistema, ou seja, o estado quântico imediatamente antes do campo externo ser ligado. Então, inserindo as equações de movimento referente a cada sistema estudado em W_1 , é possível estudar quão diferente este novo estado quântico, agora denominado W_2 , será do estado original. Para os três sistemas será considerada a seguinte função de Wigner gaussiana:

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t) = \frac{1}{\pi^2} \exp \left[- \left((x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 \right) \right] \exp \left[- \left((p_x(t) - p_{x_0})^2 + (p_y(t) - p_{y_0})^2 \right) \right]. \quad (4.6)$$

onde as coordenadas canônicas são identificadas por $\mathbf{q} \sim \{x, y\}$ e $\mathbf{p} \sim \{p_x, p_y\}$.

4.1 Oscilador harmônico acoplado a campos magnéticos

Considere o caso de um oscilador harmônico $2D$ de massa m , frequência ω_0 e carga q , em uma região de campo magnético uniforme B_0 perpendicular ao plano $2D$. O hamiltoniano deste sistema, já visto no capítulo 3, é dado por [10, 15, 45]:

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{qB_0}{2m} L_z + \frac{q^2 B_0^2}{8m} (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) + \frac{m\omega_0^2}{2} (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2), \quad (4.7)$$

onde B_0 é a intensidade do campo magnético, L_z é a componente do momento angular na direção \hat{z} , perpendicular ao movimento do oscilador.

Definindo $\omega = qB_0/2m$ como sendo a frequência de acoplamento e os novos parâmetros dados por [10, 15]

$$\lambda^2 = \frac{m}{2}(\omega^2 + \omega_0^2), \quad \kappa^2 = \frac{1}{2m}, \quad (4.8)$$

a transformada de Weyl do operador hamiltoniano, como já feito anteriormente, pode ser escrita como

$$H^W(q_i, p_i) = \lambda^2 q_i^2 + \kappa^2 p_i^2 + \omega \epsilon_{ij} p_i q_j. \quad (4.9)$$

As equações (1.22) são usadas para obter o seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= -\frac{i}{\hbar} [p_k, H^W] = -2\lambda^2 q_k - \omega \epsilon_{jk} p_j, \\ \dot{q}_k &= -\frac{i}{\hbar} [q_k, H^W] = 2\kappa^2 p_k - \omega \epsilon_{jk} q_j, \quad k, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Reescrevendo as equações em (4.10) como duas equações diferenciais desacopladas de quarta ordem, tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{p}}_k &= -2(\omega^2 + 4\lambda^2 \kappa^2) \ddot{p}_k + (\omega^2 - 4\lambda^2 \kappa^2) p_k, \\ \ddot{\ddot{q}}_k &= -2(\omega^2 + 4\lambda^2 \kappa^2) \ddot{q}_k + (\omega^2 - 4\lambda^2 \kappa^2) q_k, \end{aligned} \quad (4.11)$$

cujas soluções são [10]:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= x_0 \cos(\Omega t) \cos(\omega t) + y_0 \cos(\Omega t) \sin(\omega t) + \frac{\kappa}{\lambda} [p_{y_0} \sin(\Omega t) \sin(\omega t) + p_{x_0} \sin(\Omega t) \cos(\omega t)], \\ q_2(t) &= y_0 \cos(\Omega t) \cos(\omega t) - x_0 \cos(\Omega t) \sin(\omega t) - \frac{\kappa}{\lambda} [p_{x_0} \sin(\Omega t) \sin(\omega t) - p_{y_0} \sin(\Omega t) \cos(\omega t)], \\ p_1(t) &= p_{x_0} \cos(\Omega t) \cos(\omega t) + p_{y_0} \cos(\Omega t) \sin(\omega t) - \frac{\lambda}{\kappa} [y_0 \sin(\Omega t) \sin(\omega t) + x_0 \sin(\Omega t) \cos(\omega t)], \\ p_2(t) &= p_{y_0} \cos(\Omega t) \cos(\omega t) - p_{x_0} \cos(\Omega t) \sin(\omega t) + \frac{\lambda}{\kappa} [x_0 \sin(\Omega t) \sin(\omega t) - y_0 \sin(\Omega t) \cos(\omega t)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde x_0, y_0, p_{x_0} e p_{y_0} são constantes arbitrárias iniciais e

$$\Omega = 2\lambda\kappa = (\omega^2 + \omega_0^2)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Utilizando o mesmo procedimento para o oscilador harmônico não-comutativo descrito no capítulo 3 [10, 15], é possível obter a função de Wigner para o presente sistema, apenas alterando apropriadamente os parâmetros, sendo dada por

$$W_{n_1, n_2}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{\pi^2 \hbar^2} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \left(\frac{\lambda}{\kappa} \mathbf{q}^2 + \frac{\kappa}{\lambda} \mathbf{p}^2 \right) \right] L_{n_1}^0(\Omega_+/\hbar) L_{n_2}^0(\Omega_-/\hbar), \quad (4.14)$$

onde L_n^0 são os polinômios associados de Laguerre, n_1 e n_2 são inteiros positivos, e

$$\Omega_{\pm} = \frac{\lambda}{\kappa} \mathbf{q}^2 + \frac{\kappa}{\lambda} \mathbf{p}^2 \mp 2 \sum_{i,j=1}^2 (\epsilon_{ij} q_i p_j). \quad (4.15)$$

As funções de Wigner em (4.14) são estacionárias. Entretanto, inserindo as equações de movimento de (4.12) na função de Wigner gaussiana (4.6), é possível quantificar a fidelidade entre um estado gaussiano inicial, o qual evolui no tempo como um estado acoplado ao campo magnético externo. Integrando a equação (4.5) para o oscilador harmônico acoplado a campos magnéticos, obtêm-se a seguinte expressão para a fidelidade,

$$F(\omega, t) = \exp \left[(p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2 + x_0^2 + y_0^2)(-1 + \cos(t) \cos(\omega t)) + 2(p_{y_0} x - p_{x_0} y) \sin(t) \sin(\omega t) \right], \quad (4.16)$$

onde foi considerado por simplicidade $\omega_0 = 1$.

A Figura 4.1 ilustra a fidelidade gaussiana para o oscilador harmônico de acordo com a equação (4.16) para três casos, $\omega = 0.1, 0.5, 1$ e para o caso em que não há campo magnético, $\omega = 0$.

4.2 Sistema de partícula livre

O próximo sistema que foi estudado do ponto de vista da função de Wigner gaussiana (4.6) foi o sistema de partícula livre, já estudado com outro viés no capítulo 2. As equações de movimento neste caso podem ser recuperadas das equações para o oscilador harmônico da seção anterior simplesmente impondo que a frequência do oscilador seja nula, ou seja, $\omega_0 = 0$. Após manipulações matemáticas, obtêm-se as

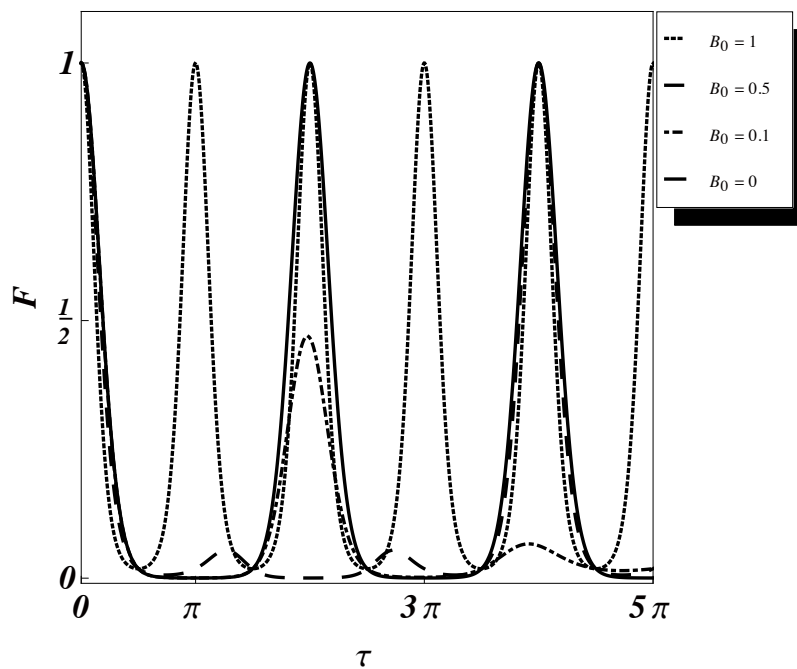


Figura 4.1: Fidelidade gaussiana em função do tempo, τ , para um estado quântico evoluindo de acordo com a dinâmica do oscilador harmônico na presença de um campo magnético externo. Foi considerado $m = \hbar = 1$ e $x = y = p_{x_0} = p_{y_0} = 1$, com $B_0 = 0, 0.1, 0.5$ e 1 . O aumento no valor de B_0 é representado pelo aumento na frequência ω , responsável pelo comportamento de batimento.

mesmas equações do capítulo 1,

$$\begin{aligned}
q_1(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(x_0 + \frac{p_{y_0}}{m\omega} \right) + \left(x_0 - \frac{p_{y_0}}{m\omega} \right) \cos(2\omega t) + \left(y_0 + \frac{p_{x_0}}{m\omega} \right) \sin(2\omega t) \right], \\
q_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(y_0 - \frac{p_{x_0}}{m\omega} \right) + \left(y_0 + \frac{p_{x_0}}{m\omega} \right) \cos(2\omega t) - \left(x_0 - \frac{p_{y_0}}{m\omega} \right) \sin(2\omega t) \right], \\
p_1(t) &= \frac{1}{2} [(p_{x_0} - m\omega y_0) + (p_{x_0} + m\omega y_0) \cos(2\omega t) + (p_{y_0} - m\omega x_0) \sin(2\omega t)], \\
p_2(t) &= \frac{1}{2} [(p_{y_0} + m\omega x_0) + (p_{y_0} - m\omega x_0) \cos(2\omega t) - (p_{x_0} + m\omega y_0) \sin(2\omega t)], \quad (4.17)
\end{aligned}$$

sendo as funções de Wigner estacionárias deste sistema escritas como

$$W_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{N} \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \exp[-\Omega/\hbar] L_n^0(\Omega/\hbar), \quad (4.18)$$

onde

$$\Omega(t) = \frac{\lambda}{\kappa} \mathbf{q}^2(t) + \frac{\kappa}{\lambda} \mathbf{p}^2(t) + 2 \sum_{i,j=1}^2 (\epsilon_{ij} p_i(t) q_j(t)). \quad (4.19)$$

De maneira análoga ao procedimento feito no caso do oscilador harmônico, estudamos o efeito de decoerência via fidelidade gaussiana para o sistema de partícula livre. A Figura 4.2 apresenta os resultados da fidelidade gaussiana para este sistema.

As Figuras 4.1 e 4.2 mostram que, para $\omega \neq 0$, a fidelidade Gaussiana assume um comportamento periódico em função da frequência do campo externo.

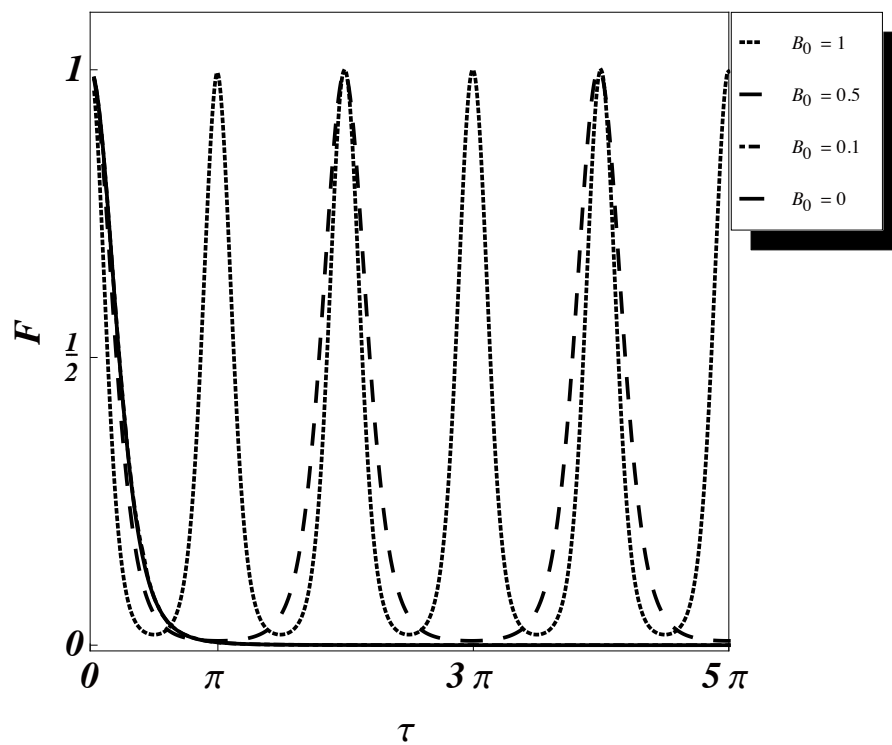


Figura 4.2: Fidelidade gaussiana em função do tempo, τ , para um estado evoluindo de acordo com a dinâmica de uma partícula livre em uma região de campo magnético uniforme. Foi considerado $m = \hbar = 1$ e $x = y = p_{x_0} = p_{y_0} = 1$, com $B_0 = 0, 0.1, 0.5$ e 1 . O aumento do valor do campo magnético implica que o comportamento do oscilador harmônico é rapidamente recuperado.

4.3 O poço gravitacional quântico

O poço gravitacional quântico (GQW) para neutrons ultra-frios (UCN) é um sistema considerado importante devido a sua potencialidade para se testar a mecânica quântica através de estados ligados via um potencial clássico, ou seja, devido ao acoplamento gravitacional entre a Terra e neutrons ultra-frios [27, 28, 46, 47, 48, 49]. Por este motivo ele é o terceiro sistema a ser considerado do ponto de vista da função de Wigner gaussiana. O hamiltoniano para uma partícula em um potencial gravitacional é dado por

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 + mg\hat{y}, \quad (4.20)$$

onde, através das equações de Hamilton, obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{p_{x0}}{m}t, \\ y(t) &= y_0 - \frac{p_{y0}}{m}t - \frac{g}{2}t^2, \\ p_x(t) &= p_{x0}, \\ p_y(t) &= p_{y0} - mgt. \end{aligned} \quad (4.21)$$

A função de Wigner do sistema pode ser obtida através da separação da transformada de Weyl do operador hamiltoniano em duas partes, uma em relação a coordenada x , a qual exibe um comportamento de partícula livre, e outra parte relativa a coordenada y , dada por

$$H_y^W = \frac{p_y^2}{2m} + mgy, \quad (4.22)$$

e a equação de auto-valor escrita como

$$H_y^w \star W_y = E_y W_y. \quad (4.23)$$

Através da atuação do produto de Moyal na equação acima, obtêm-se a seguinte forma para a equação diferencial,

$$\left[\xi - \frac{\hbar^2 mg^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - E_y \right] W_y(\xi) = 0, \quad (4.24)$$

onde definimos a nova variável

$$\xi = \frac{p_y^2}{2m} + mgy. \quad (4.25)$$

A solução para a equação (4.24) é dada em termos das funções de Airy, $Ai(\xi)$, e

pode ser escrita como,

$$W_y(y, p_y) = A_n Ai \left[\left(\frac{8}{mg^2 \hbar^2} \right)^{1/3} \left(\frac{p_y^2}{2m} + mgy - E_{n_y} \right) \right], \quad (4.26)$$

onde as auto-energias são determinadas pelos zeros da função de onda e expressas da seguinte forma:

$$E_{n_y} = - \left(\frac{mg^2 \hbar^2}{2} \right)^{1/3} \lambda_{n_y}, \quad (4.27)$$

com λ_{n_y} sendo as raízes da função de Airy, além da unitariedade da função de Wigner permitir escrever o fator de normalização como

$$A_n = \left[\int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dp_y Ai \left[\left(\frac{8}{mg^2 \hbar^2} \right)^{1/3} \left(\frac{p_y^2}{2m} + mgy - E_{n_y} \right) \right] \right]^{-1}. \quad (4.28)$$

Por outro lado, para a coordenada x a partícula comporta-se como uma partícula livre e a transformada de Weyl do operador hamiltoniano neste sub-sistema é dada por

$$H_x^W = \frac{1}{2m} p_x^2, \quad (4.29)$$

e a localização é feita através de uma gaussiana $G(x, p_x; t)$ no espaço de fase.

Deste modo é possível escrever a função de Wigner completa para o sistema como

$$\begin{aligned} W(x, p_x, y, p_y; t) &= W(x, p_x; t) W(y, p_y; t) \\ &= A_n G(x, p_x; t) Ai \left[\left(\frac{8}{mg^2 \hbar^2} \right)^{1/3} \left(\frac{p_y^2}{2m} + mgy - E_{n_y} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

A relevância em se considerar o acoplamento gravitacional em sistemas quânticos está em gerar novas possibilidades para se medir desvios na mecânica quântica em escalas de altas energias. Como exemplo, assinaturas de decoerência podem ser detectados através da distorção da fidelidade para estados quânticos gaussianos sujeitos à perturbações oriundas de campos externos. Neste sentido, o sistema GQW pode ser útil para se estimar correções não-comutativas na mecânica quântica padrão [8, 9].

A maneira que utilizamos para estudar esta característica do sistema foi introduzir um campo magnético externo, o que permite escrever a hamiltoniana como

$$H_{GQW}^W(q_i, p_i) = \lambda^2 q_i^2 + \kappa^2 p_i^2 + \omega(p_1 q_2 - p_2 q_1) + m g q_2, \quad (4.31)$$

onde λ , κ and ω são os mesmos parâmetros introduzidos na seção sobre o sistema de partícula livre.

A hamiltoniana (4.31) permite que seja escrita duas equações diferenciais de

terceira ordem desacopladas para as equações de movimento, dadas por

$$\begin{aligned}\ddot{p}_k + 4\omega^2 \dot{p}_k + 2mg\omega^2 \delta_{2k} &= 0, \\ \ddot{q}_k + 4\omega^2 \dot{q}_k + 2g\omega \delta_{1k} &= 0,\end{aligned}\tag{4.32}$$

o que resulta no seguinte conjunto de soluções:

$$\begin{aligned}q_1(t) &= \frac{1}{2} \left[-\frac{gt}{\omega} + \left(x_0 + \frac{p_{y_0}}{m\omega} \right) + \left(x_0 - \frac{p_{y_0}}{m\omega} \right) \cos(2\omega t) + \left(y_0 + \frac{p_{x_0}}{m\omega} + \frac{g}{2\omega^2} \right) \sin(2\omega t) \right] \\ q_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(y_0 - \frac{p_{x_0}}{m\omega} - \frac{g}{2\omega^2} - g t^2 \right) + \left(y_0 + \frac{p_{x_0}}{m\omega} + \frac{g}{2\omega^2} \right) \cos(2\omega t) - \left(x_0 - \frac{p_{y_0}}{m\omega} \right) \sin(2\omega t) \right] \\ p_1(t) &= \frac{1}{2} \left[(p_{x_0} - m\omega y_0) + (p_{x_0} + m\omega y_0) \cos(2\omega t) + (p_{y_0} - m\omega x_0) \sin(2\omega t) \right] \\ p_2(t) &= \frac{1}{2} \left[-2mgt + (p_{y_0} + m\omega x_0) + (p_{y_0} - m\omega x_0) \cos(2\omega t) - (p_{x_0} + m\omega y_0) \sin(2\omega t) \right],\end{aligned}$$

onde pode ser notado a partir da solução acima que, no limite em que $\omega \rightarrow 0$, recuperamos a solução de uma partícula em um potencial gravitacional, equações (4.21).

Seguindo o mesmo procedimento adotado nas duas seções anteriores, as equações de movimento acima são inseridas na função de Wigner gaussiana (4.6) com o objetivo de analisar o comportamento de decoerência introduzido pelo campo magnético externo sobre o sistema GQW. Os resultados são ilustrados na Figura 4.3. Como esperado, o próprio efeito do potencial gravitacional é o principal responsável pelo distanciamento do estado quântico do seu perfil gaussiano original, causando assim uma queda nas curvas de fidelidade. Entretanto, a inclusão de um campo magnético externo torna este decaimento das curvas mais acentuado, como pode ser notado.

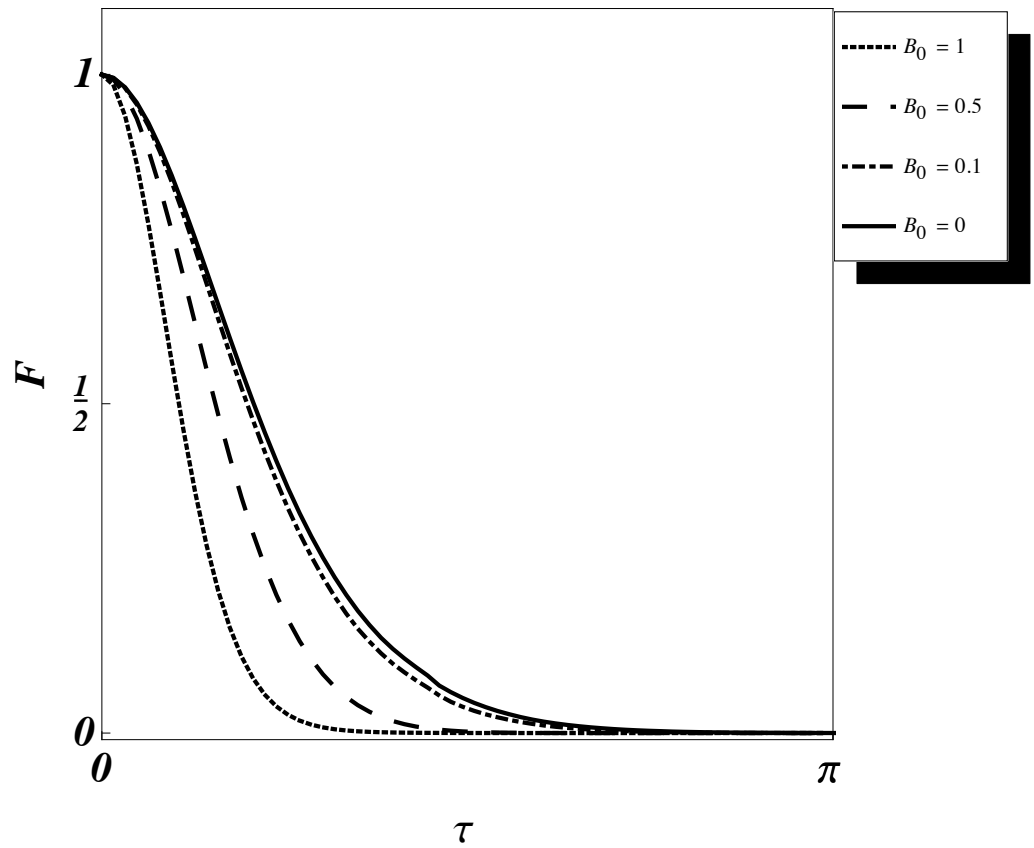


Figura 4.3: Fidelidade gaussiana em função do tempo, τ , para um estado evoluindo de acordo com a dinâmica do sistema GQW. Foi considerado $m = \hbar = 1$, $g = 2$ e $x = y = p_{x_0} = p_{y_0} = 1$, com $B_0 = 0.1, 0.5$ e 1 . O caso em que $B_0 = 0$ é ilustrado através da curva contínua. Aumentando o valor da intensidade do campo magnético, tem-se o aumento da supressão da fidelidade gaussiana.

4.4 Mapeando efeitos não-comutativos via campo magnético externo

Uma vez que foi analisada a influência de campos magnéticos externos sobre a evolução temporal de estados gaussianos segundo a dinâmica dos três sistemas considerados, pode ser realizado um mapeamento, já descrito anteriormente em outros capítulos, para interpretar efeitos não-comutativos como um campo magnético efetivo. Em outras palavras, ao aplicar o mapa de Seiberg-Witten no hamiltoniano NC de um sistema e descrevê-lo através de variáveis da mecânica quântica padrão, temos a inclusão de um termo de campo magnético efetivo no hamiltoniano representado por

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\theta, \eta). \quad (4.33)$$

Esta analogia pode ser feita de maneira explícita associando a frequência do campo magnético aos parâmetros não-comutativos do sistema em análise.

Para a dinâmica do oscilador harmônico, esta comparação resulta em

$$\frac{q B_0}{2m} \sim \frac{\theta}{2\hbar} m \omega_0^2 + \frac{\eta}{2m \hbar}, \quad (4.34)$$

ou, evidenciando a intensidade do campo magnético,

$$B_0 \sim \frac{m^2 \omega_0^2 \theta}{q \hbar} + \frac{\eta}{q \hbar}. \quad (4.35)$$

Já para a dinâmica da partícula livre, descrita pelo hamiltoniano NC, $H = p_i^2/2m$, pode ser notado que o parâmetro θ é irrelevante, sendo os efeitos não-comutativos simulados através da relação

$$B_0 \sim \frac{\eta}{q \hbar}. \quad (4.36)$$

Por fim, para o terceiro sistema considerado, o poço gravitacional quântico, pode ser visto que as equações de movimento são muito similares àquelas referentes ao sistema de partícula livre NC, com algumas modificações devido ao fato de que na direção \hat{y} a partícula está interagindo com um potencial linear.

Deste modo, a analogia entre a frequência do campo magnético externo e os efeitos não-comutativos é essencialmente a mesma que para o caso da partícula livre não-comutativa, o que pode ser verificado também ao se tomar o caso limite em que $g \rightarrow 0$.

4.5 Discussões

Neste capítulo foi estudado, através da fidelidade, o efeito de decoerência causado pela inclusão de campos magnéticos externos sobre a dinâmica de três sistemas físicos

específicos, a saber, o oscilador harmônico, o sistema de partícula livre e o potencial gravitacional quântico. Partindo de uma função de Wigner gaussiana inicial com comportamento estacionário, o cálculo da fidelidade em função do tempo mostrou a alteração na função de Wigner inicial a partir da consideração de um campo externo na dinâmica do sistema.

Uma vez que, ao mapear o hamiltoniano não-comutativo de um sistema para a mecânica quântica padrão via mapa de Seiberg-Witten, efeitos NC possam ser descritos no novo hamiltoniano como um campo magnético efetivo $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\theta, \eta)$, este capítulo mostrou como se realizar a analogia entre efeitos NC e campos magnéticos externos nos três sistemas considerados. Em particular para o poço gravitacional quântico não-comutativo, ele já foi usado para estimar limites para o valor de η . Deste modo, sua relevância em ser um sistema onde se pode estudar novas propostas de formulação quântica a partir de um acoplamento gravitacional é comprovada.

Por fim, do ponto de vista de simulação quântica, os resultados sugerem a possibilidade de construir sistemas controláveis que podem exibir um comportamento não-comutativo segundo a analogia com campos magnéticos externos, de modo a entender melhor a dinâmica NC.

Capítulo 5

Termodinâmica para Gases num Espaço de Fase Não-Comutativo

Este capítulo tratará do estudo da influência da não-comutatividade na termodinâmica de gases. Primeiramente serão analisadas as propriedades termodinâmicas de um gás formado por um *ensemble* de partículas livres, tanto na configuração $2D$ quanto $3D$. Logo após voltaremos a atenção para um gás formado por rotores quânticos, também nas configurações $2D$ e $3D$, e analisaremos suas propriedades termodinâmicas.

5.1 Função de partição e variáveis termodinâmicas para um gás de partículas livres

Para o sistema de partícula livre não-comutativo estudado no capítulo 2, convém lembrar que através da equação de auto-valor,

$$H_{FP}^W \star W_n(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) = E_n W_n(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}), \quad (5.1)$$

foi obtida a função de Wigner estacionária do sistema,

$$W_n(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) = \mathcal{N} \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \exp[-\Omega/\hbar] L_n^0(\Omega/\hbar), \quad (5.2)$$

onde

$$\Omega(t) = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{Q}^2(t) + \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{\Pi}^2(t) + 2 \sum_{i,j=1}^2 (\epsilon_{ij} \Pi_i(t) Q_j(t)), \quad (5.3)$$

além das seguintes auto-energias,

$$E_n = \hbar \gamma (2n + 1). \quad (5.4)$$

Ao considerar um gás formado por partículas livres em contato térmico com um reservatório à temperatura T , estamos tratando de um *ensemble* canônico de partículas. Uma vez que, para uma gás $2D$ de partículas livres, os micro-estados ocupados pelo sistema obedecem as propriedades NC da mecânica quântica, eles são descritos em termos de (5.2), onde (5.4) denotam as auto-energias do sistema em um dado micro-estado discreto indexado pelo parâmetro n .

Para se estudar a variáveis termodinâmicas de um gás, é mister que a função de partição do sistema seja obtida. Formalmente, a função de partição é obtida através do traço expresso em termos do vetor de estado coerente, W_n , ou seja,

$$\begin{aligned} Z(\sigma) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dQ_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dQ_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_2 \exp \left[-\frac{H^W}{k_B T} \right] W_n \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{E_n}{k_B T} \right] = \exp[-\sigma] \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-2n\sigma] \\ &= \frac{1}{2 \sinh(\sigma)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

o qual é consistente com a condição de normalização em (5.2), sendo introduzido o parâmetro $\sigma = \hbar\gamma/k_B T$, responsável pelo efeito não-comutativo através de $\gamma = \eta/2m\hbar$.

Iremos quantificar o gás de partículas livres não-comutativo através das seguintes quantidades termodinâmicas: a energia interna, $U(\beta)$, a entropia de Boltzmann, $S_k(\beta)$, e a capacidade térmica à volume constante, $C_v(\beta)$, sendo $\beta = 1/k_B T$. Usando a relação de que $\sigma = \beta \hbar\gamma$, podemos escrever as quantidades termodinâmicas como

$$U(\sigma) = -\hbar\gamma \frac{\partial}{\partial \sigma} \ln [Z(\sigma)], \quad (5.6)$$

$$S_k(\sigma) = k_B \{ \ln [Z(\sigma)] + \sigma U(\sigma)/\hbar\Omega \}, \quad (5.7)$$

$$C_v = k_B \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln [Z(\sigma)]. \quad (5.8)$$

Ao substituir a função de partição (5.5) nas expressões acima, obtém-se:

$$U(\sigma) = \hbar\gamma \coth(\sigma), \quad (5.9)$$

$$S_k(\sigma) = -k_B (\ln [2 \sinh(\sigma)] - \sigma \coth(\sigma)), \quad (5.10)$$

e

$$C_v = k_B \left(\frac{\sigma}{\sinh(\sigma)} \right)^2. \quad (5.11)$$

Da definição $\sigma = \hbar\gamma/k_B T$, fica evidente que efeitos não-comutativos em um gás de partículas livres $2D$ poderiam ter uma assinatura mais considerável no limite em que $\sigma \rightarrow \infty$. Nesta condição temos os comportamentos assintóticos das quantidades

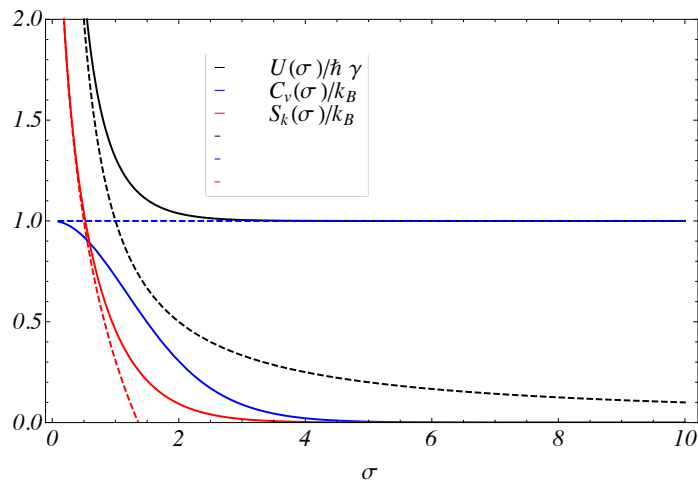


Figura 5.1: Energia interna, $U(\sigma)$, capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, e entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, em função de $\sigma = \hbar\gamma/k_B T$, para um gás de partículas livres não-comutativo. O gráfico também ilustra o comportamento assintótico das variáveis (curvas pontilhadas) quando $\sigma \ll 1$, limite clássico.

termodinâmicas,

$$\begin{aligned}
 U(\sigma)/\hbar\gamma &\sim 1, \\
 S_k/k_B &\sim 0, \\
 C_k/k_B &\sim 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

que são ilustrados na Figura 5.1 e estão de acordo com a interpretação do limite em que $T \rightarrow 0$. A figura também ilustra o comportamento do gás quando consideramos seu limite clássico, ou seja, $\sigma \ll 1$, representado pelas curvas pontilhadas. Uma vez que o teorema da equipartição de energia é válido apenas para a mecânica estatística clássica, este limite está de acordo com os resultados para um gás $2D$ clássico de partículas livres. Outro fato importante é que este limite é válido apenas quando a temperatura absoluta é relativamente alta, no sentido em que o espaçamento de energia ΔE entre os níveis de energia são pequenos comparados à energia térmica, $k_B T$, ou seja, $\Delta E \ll k_B T$, significando no gráfico que as curvas assintóticas são válidas para valores pequenos de σ , o que de fato pode ser verificado pela concordância das curvas sólidas e pontilhadas para pequenos valores de σ no gráfico.

Após considerar as quantidades termodinâmicas de um gás $2D$ de partículas livres e verificar a influência do parâmetro não-comutativo, $\gamma(\eta)$, sobre tais quantidades, veremos qual a importância em se considerar uma terceira dimensão ao sistema, ou seja, fornecendo mais um grau de liberdade.

Um gás $3D$ de partículas livres não-comutativo é representado pelo seguinte

hamiltoniano:

$$\hat{H}_{3D}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2. \quad (5.13)$$

Escrevendo a versão $3D$ da relação de comutação para os momentos,

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\epsilon_{ijk}\eta_k, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.14)$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor de Levi-Cevita e $\eta_i = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, é possível escrever uma versão $3D$ do mapa de Seiberg-Witten para o momento como sendo

$$\hat{p}_i = \hat{\Pi}_i + \frac{1}{2\hbar}\epsilon_{ijk}\eta_j \hat{Q}_k, \quad (5.15)$$

onde foi escolhido $\mu = 1$ por simplicidade.

Ao substituir (5.15) no hamiltoniano (5.14), obtemos

$$\begin{aligned} H_{3D}^W(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) &= \frac{1}{2m} \left[\mathbf{\Pi} + \frac{1}{2\hbar} (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{Q}) \right]^2 \\ &= \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + \frac{1}{2m\hbar} \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{\Pi}) + \frac{1}{8m\hbar^2} (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{Q})^2 \\ &= \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + \frac{1}{2m\hbar} \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{\Pi}) + \frac{1}{8m\hbar^2} [\boldsymbol{\eta}^2 \mathbf{Q}^2 - (\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{Q})^2]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Como já mencionado ao longo da tese, em especial no capítulo 2, ao introduzir não-comutatividade sobre o hamiltoniano descrevendo uma partícula livre e utilizar o mapa de Seiberg-Witten para descrevê-lo em termos das variáveis comutativas, o resultado é um hamiltoniano semelhante ao que descreve o efeito Zeeman. Seguindo este fato, será escolhido uma representação apropriada para os operadores tal que $\boldsymbol{\eta} = \eta_3 \hat{z} = \eta \hat{z}$, de modo que o sistema aqui tenha uma simetria axial tal como no efeito Zeeman. Ao fazer isso, o hamiltoniano pode ser escrito do seguinte modo,

$$H_{3D}^W(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) = \sum_{i=1}^2 \frac{\Pi_i^2}{2m} + \frac{\eta}{2m\hbar} (\Pi_2 Q_1 - \Pi_1 Q_2) + \sum_{i=1}^2 \frac{\eta^2}{8m\hbar^2} Q_i^2 + \frac{\Pi_3^2}{2m}. \quad (5.17)$$

Para obter a função de partição para um gás $3D$ de partículas livres não-comutativo, portanto, deve ser notado que excetuando-se pela componente $i = 3$ em (5.17), o hamiltoniano é o mesmo usado para descrever um gás $2D$ de partículas livres. Deste modo, a função de partição será dada por

$$\begin{aligned} Z^{3D}(\sigma) &= Z(\sigma) \left(\frac{1}{h} \int_{-a}^{+a} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\Pi_3 \exp \left[-\frac{\Pi_3^2}{2mk_B T} \right] \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\hbar} Z(\sigma) \sqrt{m k_B T}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde foi usado que $\hat{q}_3 = \hat{Q}_3$ e, de (5.15), $\hat{p}_3 = \hat{\Pi}_3$.

Da função de partição em (5.18), pode ser notado que a única contribuição em se adicionar uma terceira dimensão é o aumento de mais um grau de liberdade. No entanto, isto não afeta a influência do efeito não-comutativo sobre o sistema.

5.2 Gás formado por rotores quânticos

Na seção anterior foi analisado o comportamento termodinâmico de gases $2D$ e $3D$ não-comutativos formados por partículas livres. Nesta seção serão estudadas as quantidades termodinâmicas de gases formados por rotores quânticos. A importância em se tratar rotores é que as partículas livres podem possuir mais graus de liberdade além do translacional, ou seja, graus de liberdade associados a rotações, por exemplo. Neste sentido, estamos estendendo o estudo da influência da não-comutatividade para outros graus de liberdade possíveis de partículas livres.

Primeiramente, será descrito o hamiltoniano para um gás $2D$ de rotores quânticos e suas auto-energias serão obtidas. Então, o formalismo será estendido para um gás $3D$. Ao considerar rotores, devemos aplicar o seguinte vínculo,

$$R^2 = \sum_{i=1}^2 Q_i^2 = Q_1^2 + Q_2^2, \quad (5.19)$$

no hamiltoniano $2D$ que descreve o sistema, ou seja,

$$H_{2D}^W(\mathbf{Q}, \mathbf{\Pi}) = \sum_{i=1}^2 \frac{\Pi_i^2}{2m} + \frac{\eta}{2m\hbar} (\Pi_2 Q_1 - \Pi_1 Q_2) + \sum_{i=1}^2 \frac{\eta^2}{8m\hbar^2} Q_i^2. \quad (5.20)$$

Ao fazer isso, usando a relação $\eta = 2m\hbar\gamma$ e introduzindo o momento angular L_z , o hamiltoniano acima pode ser reescrito como

$$H_{2D}^W(L_z) = \frac{L_z^2}{2mR^2} + \gamma L_z + \frac{mR^2}{2} \gamma^2. \quad (5.21)$$

Note que os efeitos não-comutativos são contabilizados através do parâmetro γ . Para obter as auto-energias, necessárias para calcular a função de partição, podemos fazer uso da equação de auto-valor

$$H_{2D}^W(L_z) \star W_{m_z} = E_{m_z}^{2D(R)} W_{m_z}. \quad (5.22)$$

É possível obter as auto-energias através do procedimento análogo via equação de auto-valor para os operadores no formalismo padrão da mecânica quântica. As auto-energias são dadas por

$$E_{m_z}^{2D(R)} = \frac{\hbar^2 m_z^2}{2mR^2} + \hbar\gamma m_z + \frac{mR^2 \gamma^2}{2}. \quad (5.23)$$

Por conveniência, vamos definir um parâmetro de inércia adimensional do seguinte modo:

$$\lambda = \frac{2mR^2\gamma}{\hbar} = \frac{R^2\eta}{\hbar^2}, \quad (5.24)$$

o que permite reescrever (5.23) como

$$E_{m_z}^{2D(R)} = \hbar\gamma \left[\frac{m_z^2}{\lambda} + m_z + \frac{\lambda}{4} \right]. \quad (5.25)$$

Estendendo o formalismo para um gás $3D$, o hamiltoniano pode ser escrito como

$$H_{3D}^W(L^2, L_z) = \frac{L^2}{2mR^2} + \gamma L_z + \frac{1}{2}mR^2\gamma^2, \quad (5.26)$$

onde, através da seguinte equação de auto-valor,

$$H_{3D}^W(L_z) \star \rho_{m_z, \ell}^W = E_{m_z, \ell}^{3D(R)} \rho_{m_z, \ell}^W, \quad (5.27)$$

obtém-se as auto-energias para o sistema, já em termos do parâmetro de inércia:

$$E_{m_z, \ell}^{3D(R)} = \hbar\gamma \left[\frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} + m_z + \frac{\lambda}{4} \right]. \quad (5.28)$$

Algumas observações relevantes sobre as auto-energias (5.25) e (5.28): nestas expressões, a não-comutatividade é contabilizada via parâmetro de inércia, definido em (5.24). Além disso, os efeitos não-comutativos são anulados nas auto-energias quando tomamos o limite $\gamma \rightarrow 0$.

5.2.1 Função de partição e variáveis termodinâmicas

Para analisar a influência da não-comutatividade no comportamento de um gás formado por rotores quânticos, devemos obter a função de partição para o sistema, que possibilitará calcular as seguintes variáveis termodinâmicas: energia interna $U(\sigma)$, capacidade térmica $C_v(\sigma)$ e entropia de Boltzmann $S_k(\sigma)$. Para isso, devemos somar sobre todos os estados possíveis, ou seja, $m_z = (-\infty, \infty)$ e $\ell = (0, \infty)$. Consequentemente a função de partição para o gás $2D$ pode ser escrita como

$$Z^{2D(R)}(\beta) = \sum_{m_z=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{E_{m_z}^{2D}}{k_B T} \right], \quad (5.29)$$

que pode ser reescrita como função de σ :

$$Z_{NC}^{2D(R)}(\sigma) = \sum_{m_z=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\sigma \left(\frac{m_z^2}{\lambda} + m_z + \frac{\lambda}{4} \right) \right]. \quad (5.30)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos a função de partição para o gás $3D$ de rotores quânticos como sendo

$$\begin{aligned} Z_{NC}^{3D(R)}(\sigma) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m_z=-\ell}^{\ell} \exp \left[-\sigma \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} + m_z + \frac{\lambda}{4} \right) \right] \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} [\cosh(\ell\sigma) + \coth(\sigma/2) \sinh(\ell\sigma)] \exp \left[-\sigma \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Assim como foi feito no caso do gás de partículas livres, é possível tomar o limite em que $\gamma \rightarrow 0$ e obter expressões para as funções de partição (5.30) e (5.31) em acordo com a descrição da mecânica quântica padrão. Ao tomar o limite, obtemos

$$Z^{2D(R)}(\sigma) = \sum_{m_z=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\sigma \frac{m_z^2}{\lambda} \right], \quad (5.32)$$

e

$$Z^{3D(R)}(\sigma) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \exp \left[-\sigma \frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} \right]. \quad (5.33)$$

A partir das equações (5.30), (5.31), (5.32) e (5.33) é possível obter as quantidades termodinâmicas relevantes de um gás de rotores quânticos, comparando os resultados em termos do parâmetro não-comutativo com aqueles para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$). A Figura 5.2 mostra a energia interna, U , a entropia de Boltzmann, S_k , e a capacidade térmica, C_v , para um gás quântico $2D$ não-comutativo (primeira linha), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ , e também ilustra as quantidades $\Delta Q = Q^{(NC)} - Q^{(Stand)}$ (segunda linha), com $Q = U, S_k, C_v$, comparando os resultados não-comutativos e os resultados segundo a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$). A Figura 5.3 mostra os mesmos resultados para um gás quântico $3D$ não-comutativo.

As Figuras 5.2 e 5.3 ilustram qualitativamente o comportamento das variáveis termodinâmicas em função dos parâmetros termodinâmico, σ , e de inércia, λ , bem como o desvio destas variáveis em relação aos valores para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$). Como pode ser notado nas figuras, o desvio máximo ocorre para valores próximos à $\sigma \sim 5$ para rotores quânticos $2D$ e em uma região entre $\sigma \sim 2-4$ para rotores quânticos $3D$. Também pode ser notado das figuras que o aumento do parâmetro de inércia até um certo valor arbitrário causa um aumento no desvio entre as variáveis termodinâmicas para um gás não-comutativo em relação às mesmas variáveis para um gás quântico obedecendo a mecânica quântica padrão. Outra informação que podemos obter das figuras é que, ao ser introduzida uma terceira dimensão, tem-se uma amplificação dos efeitos NC em relação à temperatura, ou seja, os efeitos tornam-se maiores para menores valores de σ . Uma vez que $\sigma =$

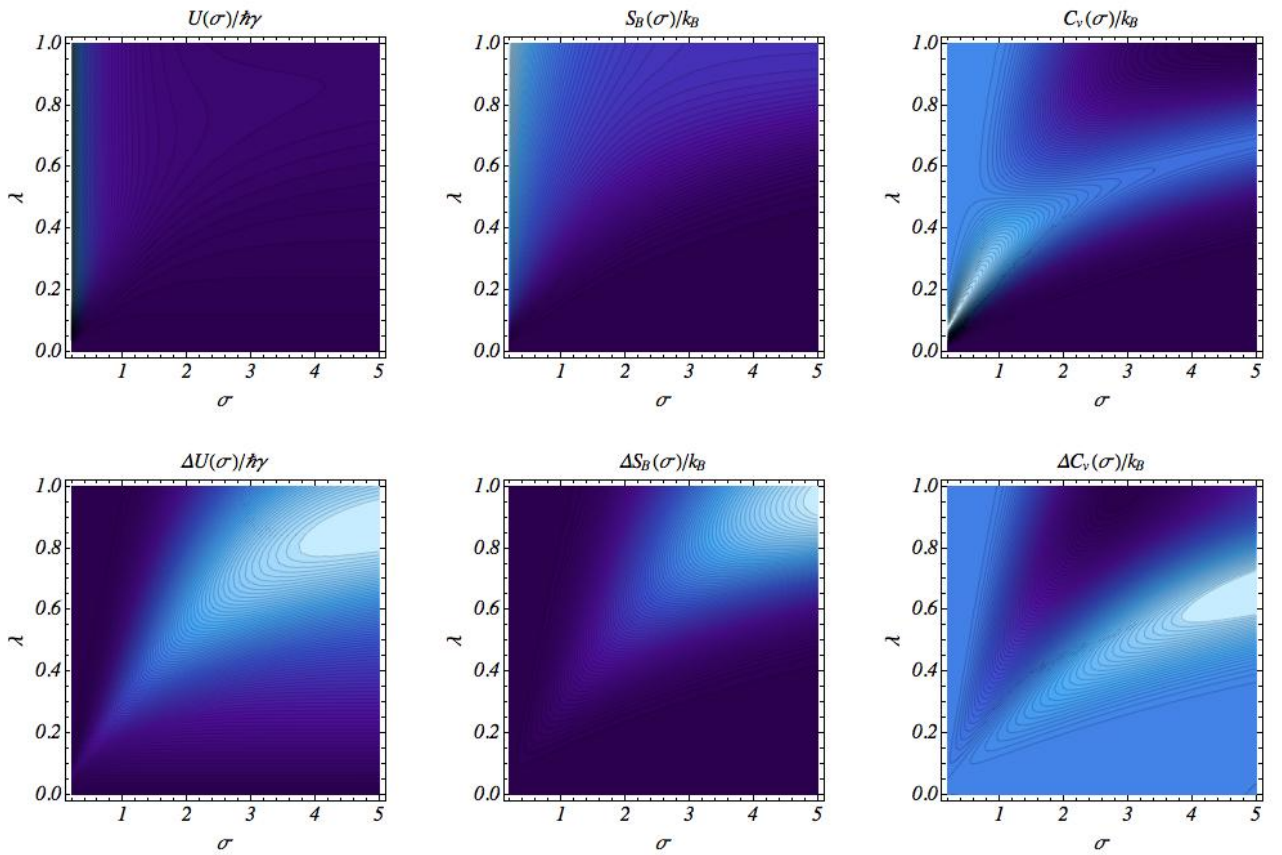


Figura 5.2: Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás $2D$ de rotores quânticos (primeira linha), e as variações em relação aos resultados esperados para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ . Foi usada uma escala de tons de azul, com azul escuro correspondendo à zero e azul claro correspondendo à unidade.

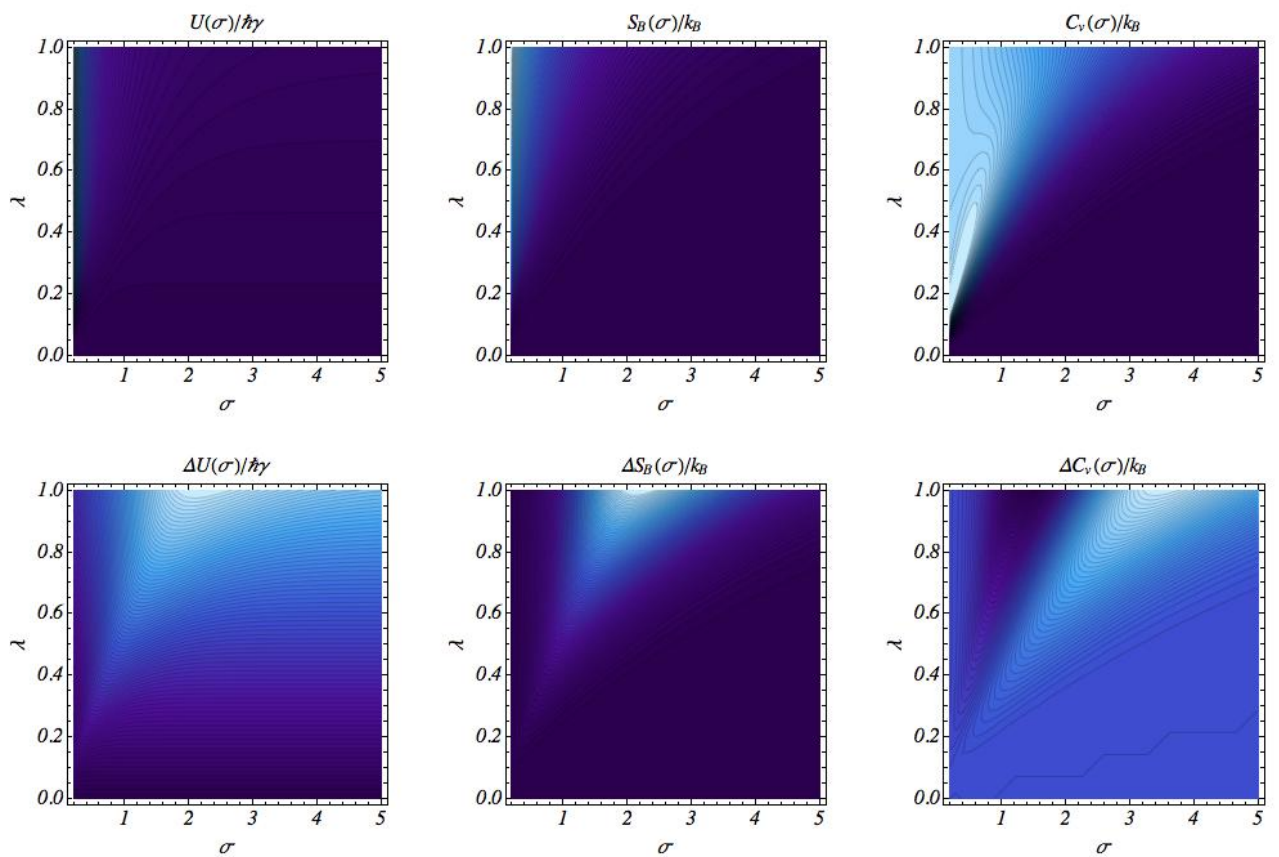


Figura 5.3: Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás $3D$ de rotores quânticos (primeira linha), e as variações em relação aos resultados esperados para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ . Foi usada uma escala de tons de azul, com azul escuro correspondendo à zero e azul claro correspondendo à unidade.

$\hbar\gamma/k_B T$, nota-se que experimentalmente um gás formado por rotores quânticos $3D$ é mais apropriado para se visualizar efeitos não-comutativos.

As variáveis termodinâmicas para gases não-comutativos também foram analisadas quantitativamente em função do parâmetro de inércia, λ . As Figuras 5.4 e 5.5 mostram os resultados (curvas pretas) para os seguintes valores de λ : 0.01, 0.1 e 1, para gases nas configurações $2D$ e $3D$ respectivamente, onde também é feita a comparação com os resultados segundo a mecânica quântica padrão, ou seja, no limite em que $\gamma \rightarrow 0$ (curvas vermelhas). Os resultados mostram mais uma vez que efeitos não-comutativos são mais evidentes para maiores valores de λ e σ . Em particular para a energia interna, pode ser notado que a introdução de efeitos não-comutativos resulta em um *plateau* a medida que o valor de σ aumenta, indicando a existência de um mínimo de energia no sistema, devido exclusivamente ao efeito não-comutativo.

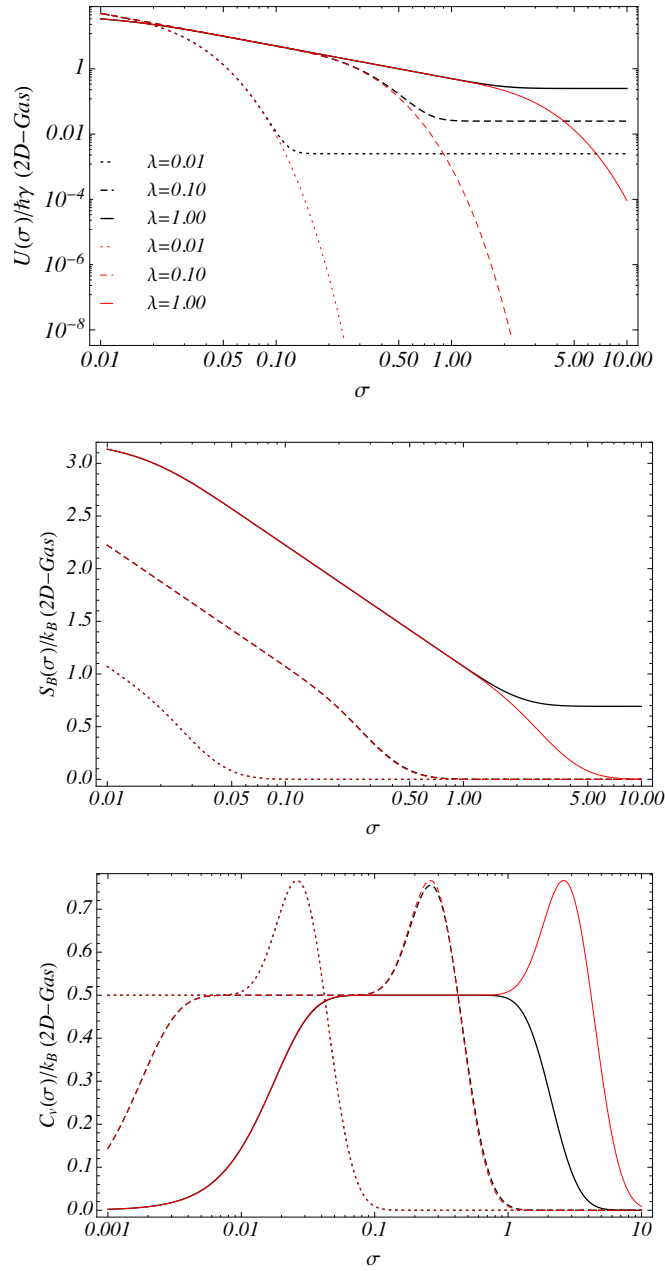


Figura 5.4: Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e a capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás de rotores quânticos $2D$ em função de σ , e para os seguintes valores de parâmetro de inércia: $\lambda = 0.01$ (curvas pontilhadas), 0.1 (curvas tracejadas) e 1 (curvas sólidas) para sistemas descritos pela MQNC (curvas pretas) e pela mecânica quântica padrão (curvas vermelhas).

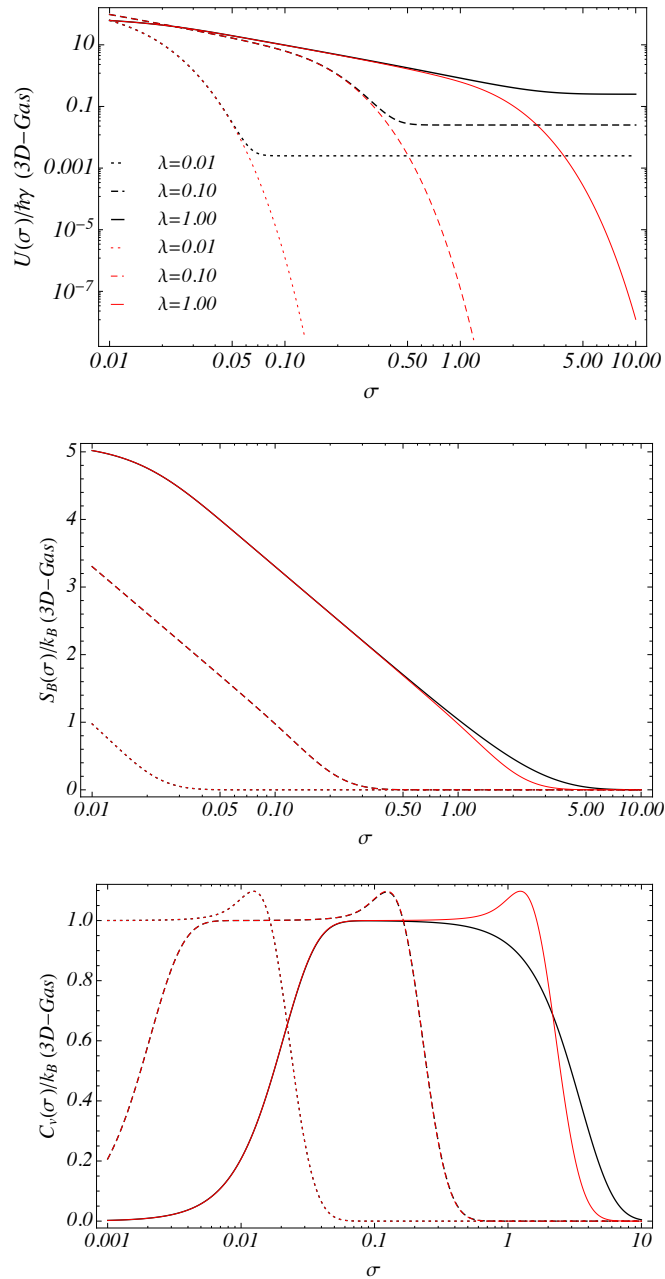


Figura 5.5: Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e a capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás de rotores quânticos 3D em função de σ , e para os seguintes valores de parâmetro de inércia: $\lambda = 0.01$ (curvas pontilhadas), 0.1 (curvas tracejadas) e 1 (curvas sólidas) para sistemas descritos pela MQNC (curvas pretas) e pela mecânica quântica padrão (curvas vermelhas).

5.2.2 Função de partição e variáveis termodinâmicas para os primeiros estados

Nesta seção será feito um tratamento completamente análogo ao da seção anterior, porém iremos focar nos primeiros estados possíveis do gás formado por rotores quânticos, ou seja, estaremos agora interessados em $m_z = (-1, 1)$ e $\ell = (0, 1)$. A razão para isso é analisar o efeito não-comutativo exclusivamente nestes estados, que são ocupados mais densamente no regime de baixas temperaturas. Neste caso, as funções de partição para os gases $2D$ e $3D$ de rotores quânticos são dadas por:

$$Z_{NC}^{2D(R)}(\sigma) = \sum_{m_z=-1}^1 \exp \left[-\sigma \left(\frac{m_z^2}{\lambda} + m_z + \frac{\lambda}{4} \right) \right] \quad (5.34)$$

para um gás de rotores quânticos $2D$, e

$$Z_{NC}^{3D(R)}(\sigma) = \sum_{\ell=0}^1 \sum_{m_z=-1}^1 \exp \left[-\sigma \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} + m_z + \frac{\lambda}{4} \right) \right] \quad (5.35)$$

para um gás de rotores quânticos $3D$.

A partir das equações (5.34) e (5.35) é possível obter as variáveis termodinâmicas para um gás formado por rotores quânticos. Utilizando ainda as equações (5.32) e (5.33), com as devidas restrições para os estados acessíveis, obtém-se as funções de partição para um gás de rotores quânticos segundo a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$),

$$Z^{2D(R)}(\sigma) = \sum_{m_z=-1}^1 \exp \left[-\sigma \frac{m_z^2}{\lambda} \right], \quad (5.36)$$

e

$$Z^{3D(R)}(\sigma) = \sum_{\ell=0}^1 (2\ell+1) \exp \left[-\sigma \frac{\ell(\ell+1)}{\lambda} \right]. \quad (5.37)$$

para rotores quânticos $2D$ e $3D$ respectivamente.

As Figuras 5.6 e 5.7 ilustram qualitativamente o comportamento da energia interna, U , a entropia de Boltzmann, S_k , e a capacidade térmica, C_v , em função dos parâmetros termodinâmico, σ , e de inércia, λ , para gases de rotores quânticos não-comutativos $2D$ (Fig. 5.6) e $3D$ (Fig. 5.7) (primeira linha de cada figura). As figuras também mostram as quantidades $\Delta \mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{(NC)} - \mathcal{Q}^{(Stand)}$ (segunda linha), com $\mathcal{Q} = U, S_k, C_v$, comparando os resultados não-comutativos e os resultados segundo a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$) para os primeiros estados.

Como pode ser notado das Figuras 5.6 e 5.7, o maior desvio entre as variáveis

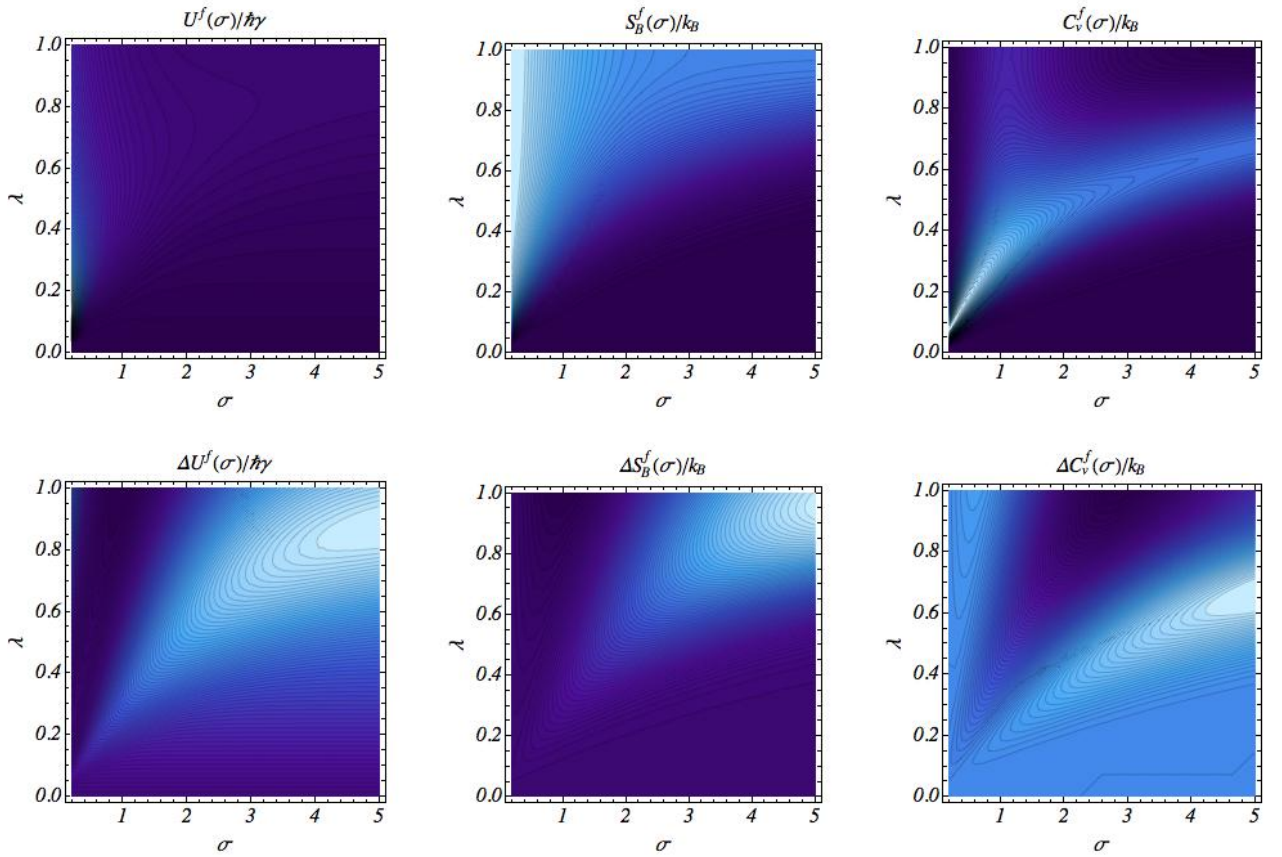


Figura 5.6: Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás $2D$ de rotores quânticos para os primeiros estados (primeira linha), e as variações em relação aos resultados esperados para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ . Foi usada uma escala de tons de azul, com azul escuro correspondendo à zero e azul claro correspondendo à unidade.

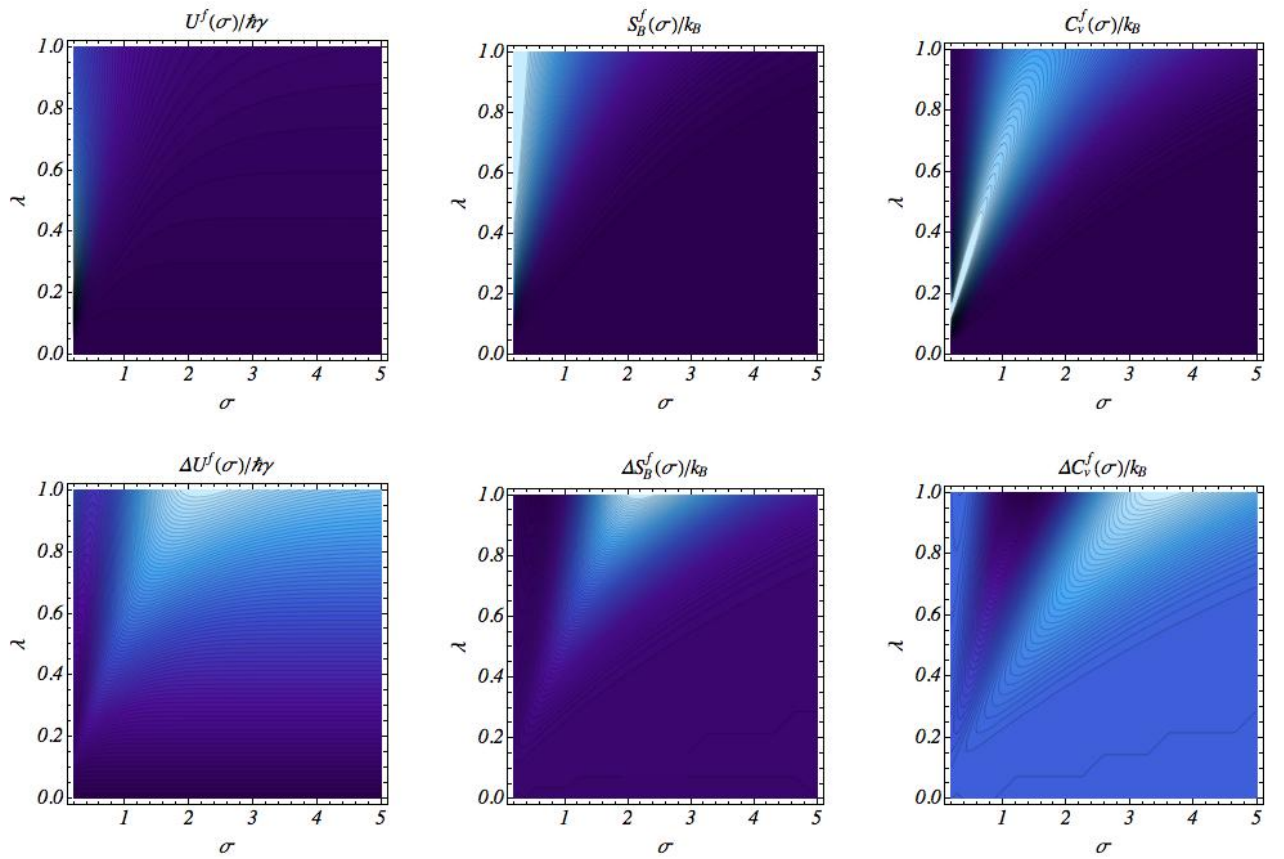


Figura 5.7: Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás 3D de rotores quânticos para os primeiros estados (primeira linha), e as variações em relação aos resultados esperados para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$), em função dos parâmetros termodinâmico e de inércia, σ e λ . Foi usada uma escala de tons de azul, com azul escuro correspondendo à zero e azul claro correspondendo à unidade.

termodinâmicas para gases descritos pela MQNC e a mecânica quântica padrão ocorre aproximadamente em $\sigma \sim 4 - 5$ para rotores quânticos $2D$ e em $\sigma \sim 2 - 3$ para rotores quânticos $3D$. Novamente, o desvio é diretamente proporcional ao aumento do valor do parâmetro de inércia, ao passo que a inclusão de uma terceira dimensão também causa uma amplificação dos efeitos não-comutativos em relação à temperatura.

Quantitativamente, os efeitos não-comutativos foram analisados para gases de rotores quânticos $2D$ e $3D$ em termos do parâmetro de inércia, λ . As Figuras 5.8 e 5.9 apresentam o comportamento das variáveis termodinâmicas para diferentes valores do parâmetro de inércia para gases de rotores quânticos $2D$ e $3D$ para os primeiros estados. Os resultados também comparam as variáveis termodinâmicas calculadas em função de efeitos não-comutativos (curvas pretas) com aqueles obtidos para a mecânica quântica padrão ($\gamma \rightarrow 0$) (curvas vermelhas). Os resultados mostram novamente que efeitos não-comutativos são mais evidentes para maiores valores de σ e λ , em concordância com o fato de que para pequenos valores de σ , os resultados não-comutativos tendem àqueles descritos pela mecânica quântica padrão.

5.3 Discussões

Neste capítulo foi estudado o efeito da não-comutatividade sobre sistemas descrevendo gases em configurações $2D$ e $3D$. Após tratar o caso de um gás formado por partículas livres NC, analisamos o caso da influência de efeitos não-comutativos sobre outros graus de liberdade de partículas com uma certa estrutura interna, ao considerar gases formados por rotores quânticos. Estes resultados também foram comparados com gases descritos pela mecânica quântica padrão, ao se tomar o limite em que $\gamma \rightarrow 0$.

No caso de um gás formado por rotores quânticos, verificou-se que o desvio das variáveis termodinâmicas relativo aos esperados pela mecânica quântica padrão é intensificado ao se aumentar os parâmetros termodinâmico, σ , e de inércia, λ . Uma vez que $\sigma = \hbar\gamma/k_B T$, considerar maiores valores de σ pode ser entendido como tomar menores valores de temperatura T para o reservatório térmico ao qual o gás está em contato térmico. Além disso, ao se introduzir uma terceira dimensão aos gases em geral os o desvio é amplificado. Estes dois resultados indicam que efeitos não-comutativos poderiam ser mais apropriadamente verificados para gases em uma configuração $3D$ e em um regime de baixas temperaturas.

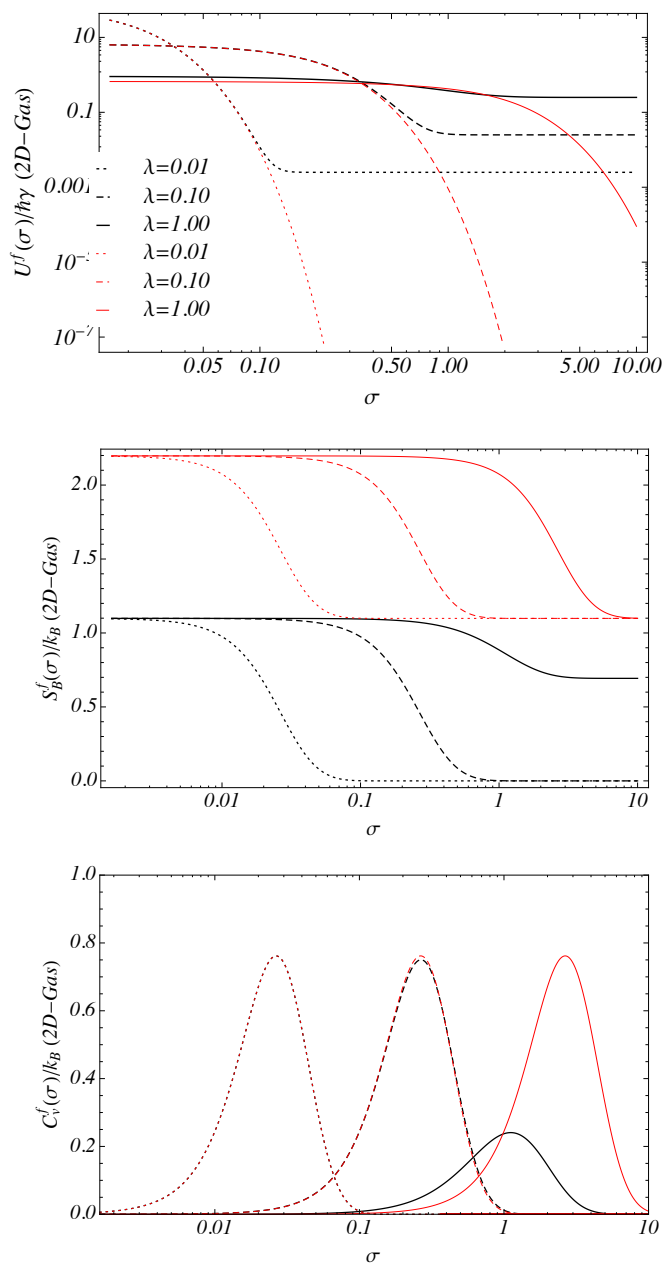


Figura 5.8: Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e a capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás de rotores quânticos 2D em função de σ e para os seguintes valores de parâmetro de inércia: $\lambda = 0.01$ (curvas pontilhadas), 0.1 (curvas tracejadas) e 1 (curvas sólidas) para sistemas descritos pela MQNC (curvas pretas) e pela mecânica quântica padrão (curvas vermelhas).

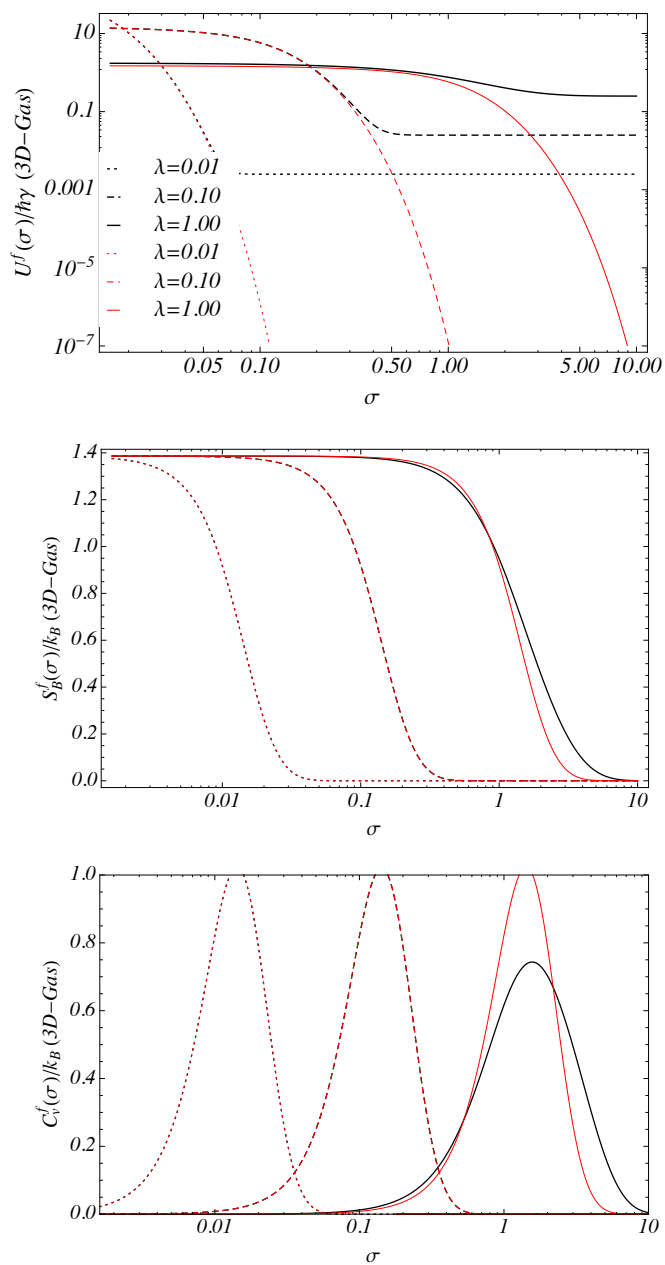


Figura 5.9: Energia interna, $U(\sigma)$, entropia de Boltzmann, $S_k(\sigma)$, e a capacidade térmica, $C_v(\sigma)$, para um gás de rotores quânticos 3D em função de σ e para os seguintes valores de parâmetro de inércia: $\lambda = 0.01$ (curvas pontilhadas), 0.1 (curvas tracejadas) e 1 (curvas sólidas) para sistemas descritos pela MQNC (curvas pretas) e pela mecânica quântica padrão (curvas vermelhas).

Capítulo 6

Efeitos Não-Comutativos em Máquinas Térmicas Quânticas

Este capítulo visa abordar efeitos não-comutativos em máquinas térmicas quânticas, estendendo a aplicação da não-comutatividade para a área de estudo denominada *Termodinâmica Quântica*. Tal área tem recebido grande atenção nos últimos anos por permitir relacionar as leis básicas da termodinâmica com os postulados da mecânica quântica e suas consequências. Recentes estudos de como as leis da termodinâmica são aplicáveis no regime quântico [40, 50], ou mesmo como sistemas quânticos podem ser construídos para atuar como máquinas térmicas [41] mostram a relevância desta área de pesquisa tanto experimental quanto teoricamente.

Sendo a termodinâmica quântica uma área de pesquisa interdisciplinar dentro da física, a possibilidade em se analisar conceitos fundamentais dentro de seu contexto é muito grande. Neste sentido, o conceito de irreversibilidade, tão presente em sistemas macroscópicos, tem sido testado experimentalmente também em sistemas microscópicos no âmbito da termodinâmica quântica como, por exemplo, em [51]. Além disso, a termodinâmica quântica permitiu o estudo teórico e prático de teoremas de flutuação envolvendo processos fora do equilíbrio em conexão com a segunda lei da termodinâmica, cujo trabalho pioneiro de Jarzynski [52] foi seguido por diversos outros envolvendo os mais variados sistemas quânticos em que tais teoremas são possíveis de serem testados.

Dentre outras diversas aplicações desta área, destacam-se as máquinas térmicas quânticas, no qual focamos nossa atenção ao longo deste capítulo. Máquinas térmicas quânticas geralmente usam sistemas físicos específicos como fluídos de trabalho como, por exemplo, átomos em cavidade [41], spins em campos magnéticos [42], íons aprisionados [53] etc, e dois (ou mais) reservatórios para transformar calor em trabalho. Considerando o fato de que efeitos não-comutativos são mapeados no hamiltoniano de um sistema como um campo magnético externo efetivo, que pode ser representado por $\mathcal{B}(\theta, \eta)$, foi estudado, do ponto de vista da MQNC, uma máquina térmica construída como uma partícula em um campo magnético, onde a variação do campo magnético é responsável pela realização dos ciclos termodinâmicos que foram

analisados, a saber, um ciclo iso-magnético e um ciclo iso-energético. A proposta da configuração mencionada acima para uma máquina térmica quântica foi originalmente proposta em [43], onde basicamente quantificou-se a eficiência da máquina térmica para um ciclo iso-energético para diferentes valores de campos magnéticos iniciais. O capítulo termina com uma discussão sobre efeitos não-comutativos para uma máquina térmica operando em um ciclo de Carnot.

6.1 Máquinas térmicas geradas por campos magnéticos externos

Antes de ser introduzido os ciclos que foram analisados, vamos descrever o formalismo geral de uma máquina térmica operando através da variação de um campo magnético externo. Para isso, considere um sistema quântico composto por uma partícula confinada em um potencial cilíndrico de frequência característica ω e sobre a influência de um campo magnético externo uniforme ao longo do eixo z ,

$$\mathbf{B} = B\hat{z}, \quad (6.1)$$

onde foi adotado o *gauge* simétrico

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-q_2, q_1, 0). \quad (6.2)$$

Para este sistema, o hamiltoniano pode ser escrito como

$$\hat{H}(q_i, p_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\omega_B}{2}(q_2 p_1 - q_1 p_2), \quad (6.3)$$

onde m é a massa da partícula, $\omega_B = qB/m$ é a frequência associada ao campo magnético, e foi definido uma frequência efetiva Ω tal que

$$\Omega^2 = \frac{\omega_B^2}{4} + \omega^2. \quad (6.4)$$

Uma vez que supomos que o hamiltoniano em (6.3) descreve o sistema para uma álgebra de Weyl-Heisenberg não-comutativa que estamos estudando ao longo da tese, ou seja,

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\eta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2 \quad (6.5)$$

podemos mapear (6.3) para a mecânica quântica padrão via mapa de Seiberg-

Witten,

$$\begin{aligned}\hat{q}_1 &= \nu \hat{Q}_1 - \frac{\theta}{2\nu\hbar} \hat{\Pi}_2, & \hat{p}_1 &= \mu \hat{\Pi}_1 + \frac{\eta}{2\mu\hbar} \hat{Q}_2, \\ \hat{q}_2 &= \nu \hat{Q}_2 + \frac{\theta}{2\nu\hbar} \hat{\Pi}_1, & \hat{p}_2 &= \mu \hat{\Pi}_2 - \frac{\eta}{2\mu\hbar} \hat{Q}_1,\end{aligned}\quad (6.6)$$

escrito novamente para facilitar a leitura do capítulo.

Após realizar o mapa e organizar os termos, o hamiltoniano pode ser reescrito como

$$\hat{H}(Q_i, \Pi_i) = \tilde{\alpha}^2(Q_1^2 + Q_2^2) + \tilde{\beta}^2(\Pi_1^2 + \Pi_2^2) + \left(\frac{\omega_B}{2} + \gamma\right)(\Pi_1 Q_2 - \Pi_2 Q_1), \quad (6.7)$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}^2 &= \frac{\nu^2 m \Omega^2}{2} + \frac{\eta^2}{8m\mu^2\hbar^2} + \frac{\nu \omega_B \eta}{\mu 4\hbar}, \\ \tilde{\beta}^2 &= \frac{\mu^2}{2m} + \frac{m\Omega^2\theta^2}{8\nu^2\hbar^2} + \frac{\mu \omega_B \theta}{\nu 4\hbar}, \\ \gamma &= \frac{\theta}{2\hbar} m \Omega^2 + \frac{\eta}{2m\hbar}.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Sobre o hamiltoniano (6.7) deve ser notado que, excetuando-se pelos parâmetros $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, ele ainda possui a mesma estrutura do hamiltoniano para uma partícula em um campo magnético uniforme. Observa-se ainda que γ atua como um campo magnético efetivo, como já visto ao longo da tese. A diferença fundamental entre ω_B e γ é que, ao contrário do primeiro, que é permitido variar para se gerar um ciclo termodinâmico, γ é um parâmetro fixo ao longo de todo o processo. Através da equação de auto-valor da mecânica quântica padrão, vê-se que as funções de onda do sistema são dadas em termos dos polinômios de Laguerre e as auto-energias são

$$E_{\kappa, \ell} = 2\hbar \tilde{\alpha}\tilde{\beta}(2\kappa + |\ell| + 1) - \hbar \left(\frac{\omega_B}{2} + \gamma\right) \ell. \quad (6.9)$$

Com a finalidade de garantir que a variação quase-estática da intensidade do campo magnético seja o único responsável por induzir transições quânticas e assim gerar uma máquina térmica, é necessário impor a seguinte regra de seleção,

$$\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \propto \int d\phi e^{i(\ell_1 - \ell_2)\phi} = \delta_{\ell_1, \ell_2}, \quad (6.10)$$

onde $\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}$ é chamada amplitude de probabilidade de transição, e significa que a componente do momento angular, L_z , é conservada ao longo dos quatro processos referentes a um ciclo específico, e $\ell_1 = \ell_2$, ou seja, só há transição entre estados com o mesmo momento angular. Além disso, por simplicidade, iremos considerar somente o estado fundamental ($\kappa = 0, \ell = 0$) e o primeiro estado excitado ($\kappa = 1, \ell = 0$) como

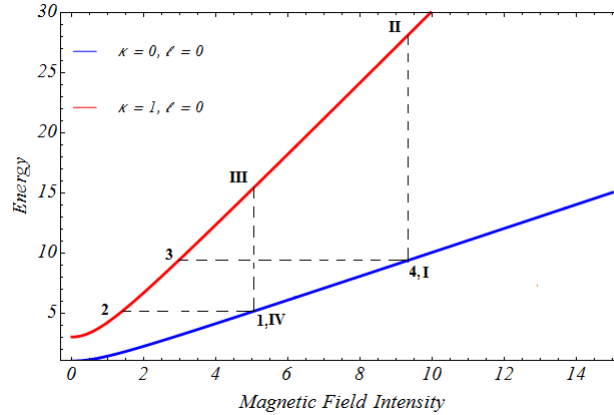


Figura 6.1: Ilustração dos ciclos iso-magnético (índices romanos) e iso-energéticos (índices arábicos) para um sistema efetivo de dois níveis composto pelo estado fundamental, ($\kappa = 0, \ell = 0$), e pelo primeiro estado excitado, ($\kappa = 1, \ell = 0$). O ciclo iso-magnético envolve duas trajetórias iso-magnéticas e duas iso-entrópicas, enquanto o ciclo iso-energético envolve duas trajetórias iso-energéticas e duas iso-entrópicas.

responsáveis por compor ciclos termodinâmicos. Ainda sobre esta regra de transição, uma vez que desejamos que a componente do momento angular na direção \hat{z} seja conservada durante uma transição de estados, devemos ter

$$[\hat{H}, L_z] = 0. \quad (6.11)$$

A Figura 6.1 ilustra os dois ciclos considerados. O primeiro deles é o ciclo iso-magnético, composto por duas trajetórias iso-magnéticas e duas iso-entrópicas, e representado por algarismos romanos *I*, *II*, *III* e *IV*. Por ser matematicamente mais simples, será o primeiro a ser analisado. O segundo ciclo é chamado iso-energético, composto por duas trajetórias iso-energéticas e duas iso-entrópicas, e representado pelos algarismos arábicos 1, 2, 3 e 4. Este último tem sido estudado sobre outras configurações como, por exemplo, em [54]. A orientação dos processos termodinâmicos é o sentido crescente dos números em ambos os ciclos. Além disso, em ambos os ciclos, consideramos um *ensemble* estatístico de partículas como nosso sistema.

Para estudar efeitos não-comutativos em máquinas térmicas quânticas, é mais conveniente reescrever as auto-energias (6.9) explicitamente como função dos parâmetros não-comutativos θ e η . Substituindo as relações (6.8) em (6.9) obtemos

$$E_{\kappa, \ell} = \sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi}^2} (2\kappa + |\ell| + 1) - \hbar \left(\frac{\omega_B}{2} + \gamma \right) \ell, \quad (6.12)$$

onde \mathcal{F}_Φ^2 é definido como

$$\mathcal{F}_\Phi^2 = \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_B^2}{4} + \gamma \omega_B + \gamma^2 \right), \quad (6.13)$$

e σ é uma função dos parâmetros NC, θ and η ,

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{\theta \eta}{\hbar^2}}. \quad (6.14)$$

Notando que ao tomarmos o limite de $\gamma \rightarrow 0$ e $\sigma \rightarrow 1$ os efeitos não-comutativos são anulados e a descrição do sistema segundo a mecânica quântica padrão é obtida, \mathcal{F}_Φ torna-se $\omega_B/2\omega$. Esta quantidade é identificada como $N_\Phi = \omega_B/2\omega$ na Ref. [43] e denominada como *número de fluxo de quanta*. Nossa nova definição desta quantidade, portanto, envolve tanto efeitos magnéticos quanto não-comutativos.

6.2 Máquina térmica operando sobre o ciclo isomagnético

Será considerado nesta seção uma máquina térmica operando sobre o ciclo isomagnético. O ciclo se inicia no ponto I do estado fundamental do sistema. Ao longo da trajetória $I \rightarrow II$, o trabalho realizado pela máquina é zero, pois o campo magnético é mantido constante. Deste modo, o calor trocado entre o sistema e o reservatório é devido à variação de energia de

$$E_{0,0}(B_I) = \sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_I}^2}, \quad (6.15)$$

para

$$E_{1,0}(B_I) = 3\sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_I}^2}, \quad (6.16)$$

onde

$$\mathcal{F}_{\Phi_I}^2 = \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_{B_I}^2}{4} + \gamma \omega_{B_I} + \gamma^2 \right). \quad (6.17)$$

Consequentemente, o calor neste processo é dado por

$$Q_{I \rightarrow II} = \Delta E = E_{1,0}(B_I) - E_{0,0}(B_I) = 2\sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_I}^2} > 0. \quad (6.18)$$

O próximo processo é realizado ao longo da trajetória $II \rightarrow III$, sendo caracterizado por ser um processo iso-entrópico onde não há troca de calor entre sistema e reservatório. No entanto, uma vez que há uma mudança no campo magnético e por consequência na frequência associada ao campo, o sistema sofre uma alteração

no que é chamado radio efetivo de Landau, definido por

$$\ell_B = \sqrt{\hbar/(m\omega_B)}. \quad (6.19)$$

Durante este processo o sistema sofre a mudança $\ell_{B_I} \rightarrow \ell_{B_{III}}$, o que permite escrever um coeficiente de expansão, α , como

$$\alpha = \ell_{B_{III}}/\ell_{B_I}, \quad (6.20)$$

tal que a relação entre as frequências inicial e final neste processo seja dada por

$$\omega_{B_{III}} = \omega_{B_I}/\alpha^2. \quad (6.21)$$

O terceiro processo, $III \rightarrow IV$, ocorre novamente através de uma trajetória iso-magnética, onde acontece a transição de

$$E_{1,0}(B_{III}) = 3\sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_{III}}^2}, \quad (6.22)$$

para

$$E_{0,0}(B_{III}) = \sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_{III}}^2}, \quad (6.23)$$

com

$$\mathcal{F}_{\Phi_{III}}^2 = \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_{B_I}^2}{4\alpha^4} + \frac{\gamma \omega_{B_I}}{\alpha^2} + \gamma^2 \right). \quad (6.24)$$

O calor trocado entre o sistema e o reservatório durante este processo é dado por

$$Q_{III \rightarrow IV} = \Delta E = E_{0,0}(B_{III}) - E_{1,0}(B_{III}) = -2\sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_{III}}^2} < 0. \quad (6.25)$$

Para completar o ciclo, uma trajetória iso-entrópica é necessária de IV para I .

A fim de analisar o efeito não-comutativo sobre máquinas térmicas operando sobre o ciclo iso-magnético descrito acima, calculamos a influência NC sobre o rendimento termodinâmico do ciclo, dado por

$$\mathcal{N} = 1 - \left| \frac{Q_{III \rightarrow IV}}{Q_{I \rightarrow II}} \right|. \quad (6.26)$$

A Figura 6.2 mostra os resultados para \mathcal{N} em função do coeficiente de expansão, α , e em termos de um parâmetro auxiliar representando o campo magnético inicial, $N_{\Phi_1}^{(0)} = \omega_{B_I}/2\omega$. Os efeitos não-comutativos são quantificados por meio da escolha de alguns valores para $\theta\eta$ e γ , com $\gamma = 0.1$ (figura à esquerda) e $\gamma = 0.5$ (figura à direita).

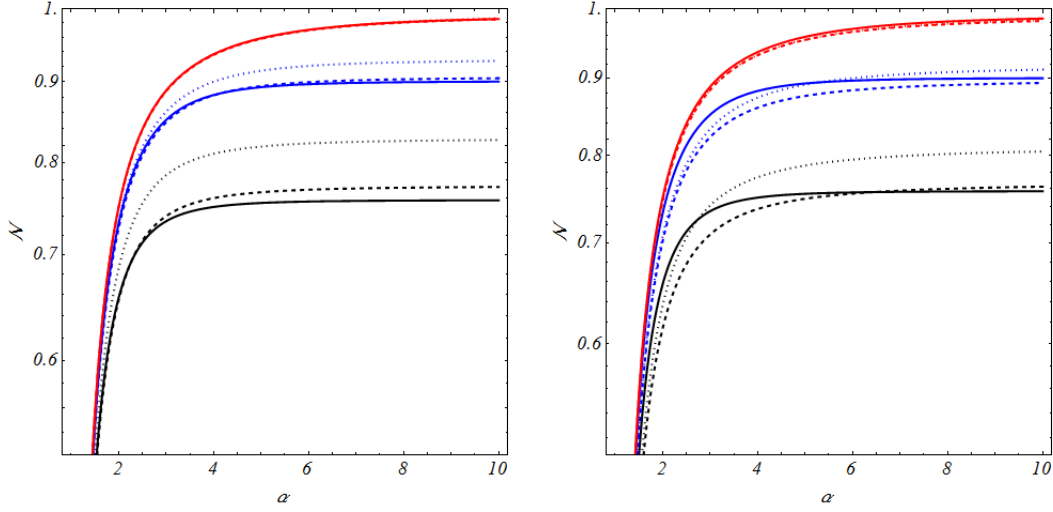


Figura 6.2: Rendimento, \mathcal{N} , de um ciclo iso-magnético para $N_{\Phi_1}^{(0)} = 4$ (curvas pretas), $N_{\Phi_1}^{(0)} = 10$ (curvas azuis) e $N_{\Phi_1}^{(0)} = 100$ (curvas vermelhas) em função do coeficiente de expansão, α , para $(\theta\eta = 0, \gamma = 0)$ (curvas sólidas), $\theta\eta = 0.1$ (curvas tracejadas), $\theta\eta = 0.5$ (curvas pontilhadas) e para $\gamma = 0.1$ (figura à esquerda) e $\gamma = 0.5$ (figura à direita). Foi considerado $\hbar = 1$ e $\omega = 1$.

6.3 Máquinas térmicas operando sobre um ciclo iso-energético

O próximo ciclo em que estudamos efeitos não-comutativos sobre uma máquina térmica como descrita anteriormente foi o ciclo iso-energético, composto por duas trajetórias iso-energéticas e duas iso-entrópicas, sendo representado na Figura 6.1 pelos pontos 1, 2, 3 e 4. Antes de descrevermos o ciclo como fizemos na seção anterior, é conveniente detalhar a obtenção das expressões para o trabalho e calor ao longo de cada trajetória aqui considerada.

Uma vez que a intensidade do campo magnético é a única maneira de se alterar o sistema, a variação total de energia pode ser escrita como [43, 55]

$$dE = \sum_{\kappa, \ell} p_{\kappa, \ell}(B) dE_{\kappa, \ell}(B) + \sum_{\kappa, \ell} dp_{\kappa, \ell}(B) E_{\kappa, \ell}(B), \quad (6.27)$$

onde $p_{\kappa, \ell}(B)$ corresponde à probabilidade do sistema estar no estado quântico $\psi_{\kappa, \ell}(B)$. O primeiro termo do lado direito da Eq. (6.27) representa um processo iso-entrópico, enquanto o segundo termo representa um processo iso-energético. Deve ser enfatizado que a relação acima para a variação total de energia é válida para processos quase-estáticos.

Para a trajetória iso-entrópica o coeficiente de probabilidade, $p_{\kappa, \ell}(B)$, é constante e o trabalho infinitesimal ao longo deste processo pode ser calculado utilizando-se a

magnetização M , ou seja,

$$dW = -MdB. \quad (6.28)$$

A magnetização considerada para variar o campo magnético de um valor inicial $B = B_a$ até um valor final $B = B_b$ é dada por

$$M = -(\partial E / \partial B). \quad (6.29)$$

Utilizando as informações acima é possível obter a seguinte expressão para o trabalho ao longo de um processo iso-entrópico para um ciclo iso-energético,

$$W_{a \rightarrow b} = \sum_{\kappa, \ell} p_{\kappa, \ell}(B_a) [E_{\kappa, \ell}(B_b) - E_{\kappa, \ell}(B_a)], \quad (6.30)$$

cujas obtenção de forma detalhada pode ser vista no apêndice C.

Por outro lado, uma trajetória iso-energética é caracterizada pela energia constante, $E_{\kappa, \ell}$. Além disso, a primeira lei da termodinâmica diz que em um processo iso-energético tem-se

$$\Delta E = W_{a \rightarrow b} + Q_{a \rightarrow b} = 0, \quad (6.31)$$

o que implica $Q_{a \rightarrow b} = -W_{a \rightarrow b}$.

Esta última relação permite que o calor trocado entre o sistema e o reservatório em um processo iso-energético seja obtido e dado por

$$Q_{a \rightarrow b} = - \sum_{\kappa, \ell} \int_{B_a}^{B_b} E_{\kappa, \ell} \frac{dp_{\kappa, \ell}(B)}{dB} dB, \quad (6.32)$$

onde a obtenção detalhada de (6.32) também pode ser encontrada no apêndice C. Na expressão acima, B varia de B_a para B_b e $p_{\kappa, \ell}(B)$ satisfaz a seguinte condição de normalização:

$$\text{Tr} \hat{\rho} = \sum_{\kappa, \ell} p_{\kappa, \ell}(B) = 1, \quad (6.33)$$

com $\hat{\rho}$ sendo o operador matriz densidade e lembrando que na auto-base de energia o operador matriz densidade no equilíbrio térmico é diagonal.

Para completar, ao longo de um processo iso-energético, a energia satisfaz a condição

$$\sum_{\kappa, \ell} p_{\kappa, \ell}(B) E_{\kappa, \ell}(B) = \sum_{\kappa, \ell} p_{\kappa, \ell}(B_a) E_{\kappa, \ell}(B_a), \quad (6.34)$$

que combinada com a condição de normalização (6.33), permite obter

$$p_{0,0}(B) = \frac{E_{1,0}(B_a) - E_{1,0}(B)}{E_{0,0}(B) - E_{1,0}(B)} + \frac{E_{0,0}(B_a) - E_{1,0}(B_a)}{E_{0,0}(B) - E_{1,0}(B)} p_{0,0}(B_a). \quad (6.35)$$

Através das equações (6.32) e (6.35) é possível obter uma expressão analítica

para o calor durante um processo iso-energético, dado por

$$Q_{a \rightarrow b} = \{E_{1,0}(B_a) + [E_{0,0}(B_a) - E_{1,0}(B_a)]p_{0,0}(B_a)\} \times \ln \left[\frac{E_{0,0}(B_b) - E_{1,0}(B_b)}{E_{0,0}(B_a) - E_{1,0}(B_a)} \right], \quad (6.36)$$

o que completa o apêndice C.

Estamos agora em condições de iniciar a descrição de uma máquina térmica operando sobre um ciclo iso-energético. A partir da ilustração na Figura 6.1, o ciclo se inicia com uma expansão iso-energética de ℓ_{B_1} para ℓ_{B_2} , onde se assume que o sistema inicialmente está em um determinado estado tal que

$$p_{0,0}(B_1) = 1, \quad (6.37)$$

e podemos escrever $\ell_{B_2} = \alpha_1 \ell_{B_1}$, onde α_1 é um coeficiente de expansão para este processo.

Para este processo iso-energético, a Figura 6.1 deixa claro que o sistema sofre uma mudança de energia de

$$E_{0,0}(B_1) = \sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_1}^2}, \quad (6.38)$$

para

$$E_{1,0}(B_2) = 3\sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_2}^2}, \quad (6.39)$$

onde

$$\mathcal{F}_{\Phi_1}^2 = \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_{B_1}^2}{4} + \gamma \omega_{B_1} + \gamma^2 \right), \quad (6.40)$$

$$\mathcal{F}_{\Phi_2}^2 = \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_{B_1}^2}{4\alpha_1^4} + \frac{\gamma \omega_{B_1}}{\alpha_1^2} + \gamma^2 \right). \quad (6.41)$$

Uma vez que o processo é iso-energético, podemos usar a condição $E_{0,0}(B_1) = E_{1,0}(B_2)$ para encontrar uma expressão para o coeficiente de expansão, α_1 . Ao fazer isso, é obtido

$$\alpha_1 = \left[\frac{3\omega^2 N_{\Phi_1}^{(0)2}}{\sqrt{\omega^2 N_{\Phi_1}^{(0)2} (\gamma^2 + 2\omega\gamma N_{\Phi_1}^{(0)} + \omega^2 (N_{\Phi_1}^{(0)2} - 8\sigma^2)) - 3\omega\gamma N_{\Phi_1}^{(0)}}} \right]^{1/2}. \quad (6.42)$$

O próximo processo é uma trajetória iso-entrópica $2 \rightarrow 3$, onde não há troca de calor entre sistema e reservatório. Este processo inicia-se com a condição

$$p_{1,0}(B_2) = 1, \quad (6.43)$$

e realiza uma expansão iso-entrópica tal que podemos escrever

$$\ell_{B_3} = \alpha \ell_{B_2} = \alpha \alpha_1 \ell_{B_1}, \quad (6.44)$$

onde α é um coeficiente de expansão.

O terceiro processo sobre o sistema é uma compressão iso-energética no qual

$$\ell_{B_3} \rightarrow \ell_{B_4} < \ell_{B_3}, \quad (6.45)$$

e podemos escrever uma relação de igualdade a partir de um coeficiente de compressão iso-energética, α_3 ,

$$\ell_{B_4} = \alpha_3 \ell_{B_3} = \alpha_1 \alpha_3 \alpha \ell_{B_1}. \quad (6.46)$$

Analogamente ao caso da expansão iso-energética, na compressão iso-energética tem-se a igualdade

$$\begin{aligned} E_{1,0}(B_3) &= E_{0,0}(B_4) \\ 3\sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_3}^2} &= \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi_4}^2}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$(6.48)$$

onde

$$\mathcal{F}_{\Phi_3}^2 = \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_{B_1}^2}{4(\alpha_1 \alpha)^4} + \frac{\gamma \omega_{B_1}}{(\alpha_1 \alpha)^2} + \gamma^2 \right), \quad (6.49)$$

$$\mathcal{F}_{\Phi_4}^2 = \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_{B_1}^2}{4(\alpha_1 \alpha \alpha_3)^4} + \frac{\gamma \omega_{B_1}}{(\alpha_1 \alpha \alpha_3)^2} + \gamma^2 \right). \quad (6.50)$$

Ao resolver a equação (6.48), obtém-se a seguinte expressão para α_3 :

$$\alpha_3 = \left[\frac{\omega^2 N_{\Phi_1}^{(0)2}}{\sqrt{\omega^2 N_{\Phi_1}^{(0)2} (18\omega_d (\alpha \alpha_1)^2 \gamma N_{\Phi_1}^{(0)} + 9\omega^2 N_{\Phi_1}^{(0)2} + (\alpha \alpha_1)^4 (9\gamma^2 + 8\sigma^2 \omega^2)) - \omega (\alpha \alpha_1)^2 \gamma N_{\Phi_1}^{(0)}}} \right]^{1/2}. \quad (6.51)$$

Deve ser notado que as equações (6.42) e (6.51), para α_1 e α_3 respectivamente, são funções tanto do campo magnético inicial, representado por $N_{\Phi_1}^{(0)}$, como dos parâmetros não-comutativos, σ e γ . Para uma máquina térmica no qual um campo magnético externo é o único agente atuando sobre o sistema, como descrito, e operando sobre um ciclo iso-energético, o rendimento será dado por

$$\mathcal{N} = 1 - \left| \frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{Q_{1 \rightarrow 2}} \right|. \quad (6.52)$$

As expressões para os calores trocados entre sistema e reservatórios são obtidas de (6.36) para cada processo iso-energético e são dados por

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \{E_{1,0}(B_1) + [E_{0,0}(B_1) - E_{1,0}(B_1)]p_{0,0}(B_1)\} \times \ln \left[\frac{E_{0,0}(B_2) - E_{1,0}(B_2)}{E_{0,0}(B_1) - E_{1,0}(B_1)} \right], \quad (6.53)$$

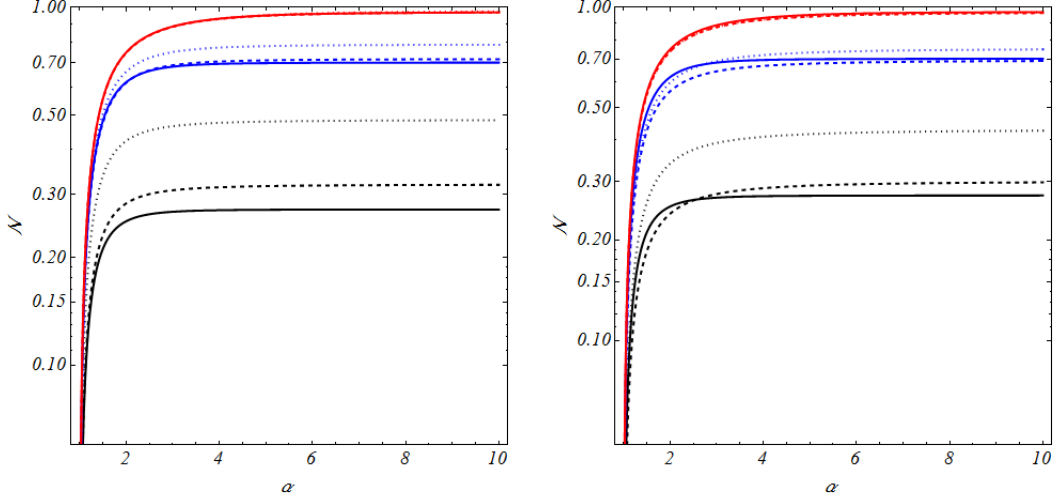


Figura 6.3: Rendimento, \mathcal{N} , de um ciclo iso-energético para $N_{\Phi_1}^{(0)} = 4$ (curvas pretas), $N_{\Phi_1}^{(0)} = 10$ (curvas azuis) e $N_{\Phi_1}^{(0)} = 100$ (curvas vermelhas) em função do coeficiente de expansão, α , para $(\theta\eta = 0, \gamma = 0)$ (curvas sólidas), $\theta\eta = 0.1$ (curvas tracejadas), $\theta\eta = 0.5$ (curvas pontilhadas) e para $\gamma = 0.1$ (figura à esquerda) e $\gamma = 0.5$ (figura à direita). Foi considerado $\hbar = 1$ e $\omega = 1$.

para a expansão iso-energética, e

$$Q_{3 \rightarrow 4} = \{E_{1,0}(B_3) + [E_{0,0}(B_3) - E_{1,0}(B_3)]p_{0,0}(B_3)\} \times \ln \left[\frac{E_{0,0}(B_4) - E_{1,0}(B_4)}{E_{0,0}(B_3) - E_{1,0}(B_3)} \right], \quad (6.54)$$

para a compressão iso-energética.

Ao substituir (6.53) e (6.54) em (6.52) e utilizando o mesmo procedimento matemático feito na referência [43], é possível obter uma expressão analítica para o rendimento, dada por

$$\mathcal{N}(N_{\Phi_1}^{(0)}, \sigma, \gamma, \alpha) = 1 - 3 \frac{\Theta(\alpha\alpha_1)}{\Theta(1)} \frac{\ln \left[\frac{\Theta(\alpha\alpha_1\alpha_3)}{\Theta(\alpha\alpha_1)} \right]}{\ln \left[\frac{\Theta(1)}{\Theta(\alpha_1)} \right]}, \quad (6.55)$$

onde foi definido

$$\Theta(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_{B_1}^2}{4x^4} + \frac{\gamma \omega_{B_1}}{x^2} + \gamma^2 \right)}. \quad (6.56)$$

A Figura 6.3 ilustra quantitativamente o rendimento de uma máquina térmica operando sobre um ciclo iso-energético em função da intensidade do campo magnético inicial, com os efeitos não-comutativos sendo quantificados através de σ e γ , com $\gamma = 0.1$ (figura à esquerda) e $\gamma = 0.5$ (figura à direita).

As Figuras 6.2 e 6.3 mostram a influência de efeitos não-comutativos no rendimento termodinâmico para os ciclos iso-magnético e iso-energético respectivamente. De forma geral, os efeitos não-comutativos tendem a aumentar o rendimento dos ciclos, embora nota-se que ao variar o valor de γ de 0.1 para 0.5 há uma supressão dos efeitos NC. A explicação para isso deve ser acompanhada do fato de que ao aumentarmos o campo magnético, a razão γ/ω_B torna-se cada vez menor e a influência do campo magnético predomina sobre os efeitos NC. Isto fica claro ao notarmos que para $N_{\Phi_1}^{(0)} = 100$ o sistema atinge um maior rendimento para $\theta\eta = 0$.

Em particular para o ciclo iso-energético, o limite assintótico do rendimento (6.52) para grandes valores de campo magnético é dado por

$$\mathcal{N}(N_{\Phi_1}^{(0)}, \sigma, \gamma, \alpha) \rightarrow 1 - 1/\alpha^2, \quad (6.57)$$

o qual coincide com o resultado da Ref. [43]. Isto indica que efeitos não-comutativos não afetam o rendimento máximo de uma máquina térmica operando sobre um ciclo iso-energético, como ilustra também as Figuras 6.2 e 6.3.

6.4 Eficiência termodinâmica para o caso de uma orientação oposta do campo magnético

Com a finalidade de melhor analisar os efeitos não-comutativos sobre a máquina térmica, consideramos aqui os ciclos iso-magnéticos e iso-energéticos para o caso de uma orientação oposta do campo magnético, tal que $\omega_B \rightarrow -\omega_B$. Este caso é útil para evidenciar o fato de que efeitos NC podem, dependendo da escolha inicial da orientação do campo magnético, diminuir o rendimento dos ciclos. Os resultados, após a reorientação de \vec{B} nas equações adequadas, podem ser vistos na Fig. 6.4.

Além disso, pode ser levantada a questão sobre qual valor de ω_B é necessário para anular os efeitos não-comutativos, representados pelo parâmetro γ . Para responder a isso, consideremos $\omega_B \rightarrow -\omega_B$ na equação (6.12), o que resulta em:

$$E_{\kappa, \ell} = \sigma \hbar \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\Phi}^2} (2\kappa + |\ell| + 1) - \hbar \left(-\frac{\omega_B}{2} + \gamma \right) \ell, \quad (6.58)$$

onde \mathcal{F}_{Φ}^2 é agora dado por

$$\mathcal{F}_{\Phi}^2 = \frac{1}{\sigma^2 \omega^2} \left(\frac{\omega_B^2}{4} - \gamma \omega_B + \gamma^2 \right). \quad (6.59)$$

Deste modo, ao impor que $\mathcal{F}_{\Phi}^2 = 0$, é obtida a condição de que $\omega_B = 2\gamma$, sendo este o valor da frequência associada ao campo magnético tal que efeitos não-comutativos sejam cancelados.

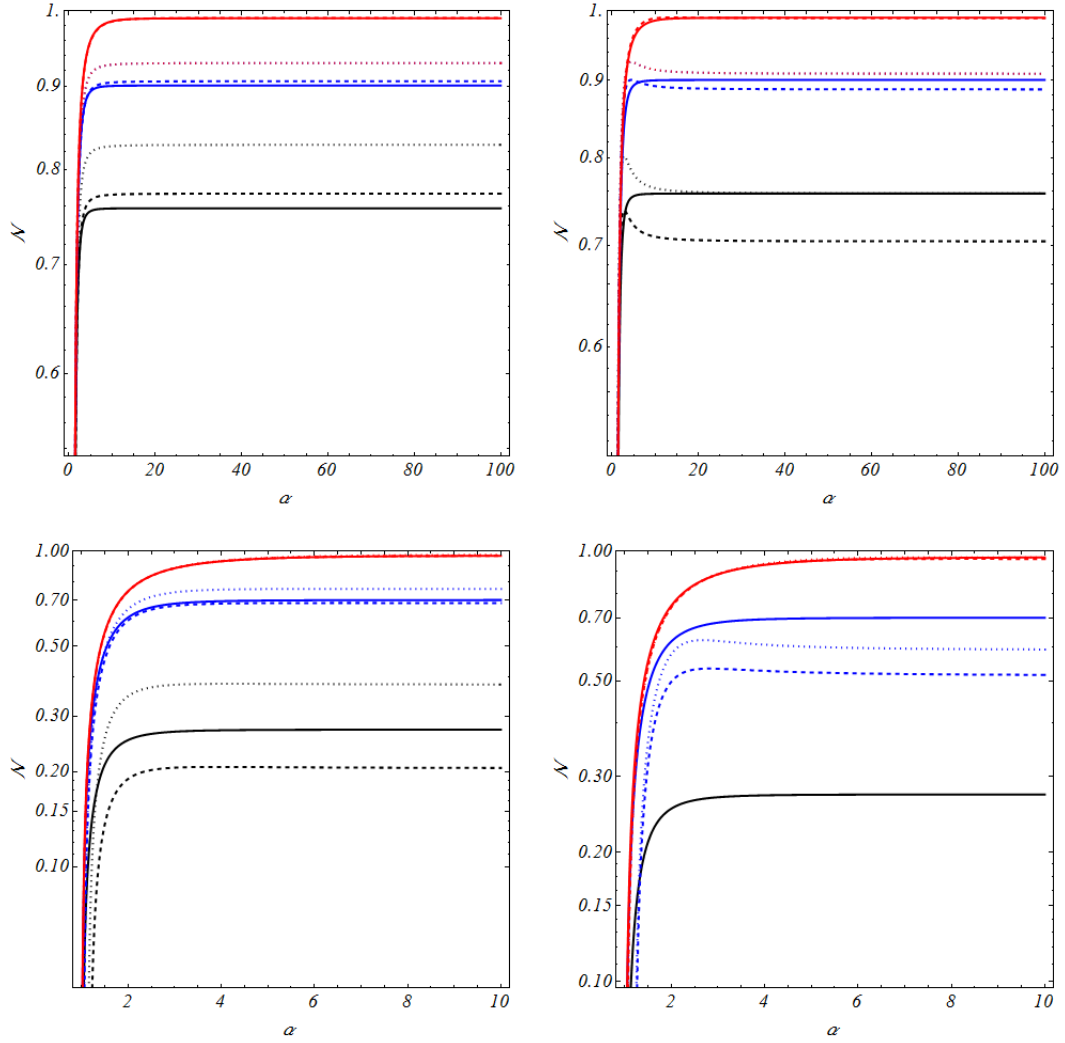


Figura 6.4: Rendimento, \mathcal{N} , dos ciclos iso-magnético (primeira linha) e iso-energético (segunda linha) para $N_{\Phi_1}^{(0)} = 4$ (curvas pretas), $N_{\Phi_1}^{(0)} = 10$ (curvas azuis) e $N_{\Phi_1}^{(0)} = 100$ (curvas vermelhas) em função do coeficiente de expansão, α , para $(\theta\eta = 0, \gamma = 0)$ (curvas sólidas), $\theta\eta = 0.1$ (curvas tracejadas), $\theta\eta = 0.5$ (curvas pontilhadas) e para $\gamma = 0.1$ (figura à esquerda) e $\gamma = 0.5$ (figura à direita) e considerando uma orientação oposta para o campo magnético, tal que $B \rightarrow -B$. Foi considerado $\hbar = 1$ e $\omega = 1$.

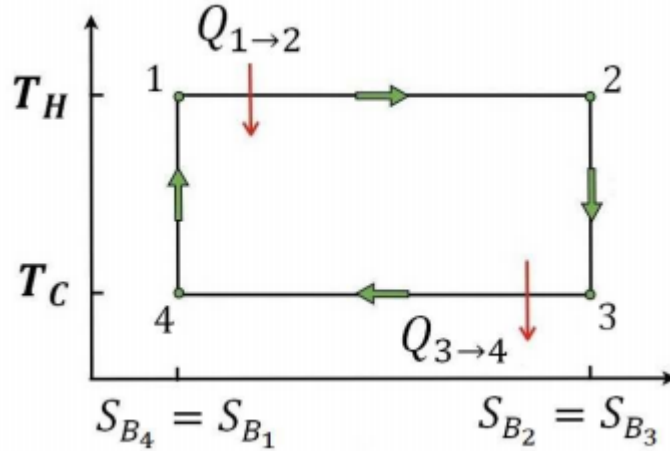


Figura 6.5: Ilustração de um ciclo de Carnot. As trajetórias isotérmicas, $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$, representam o contato térmico do sistema com os reservatórios térmicos com temperaturas $T_H(T_Q) > T_C(T_F)$ respectivamente. A imagem foi retirada da referência [43].

6.5 Ciclo de Carnot e efeitos NC

Nesta seção estudaremos a influência de efeitos não-comutativos sobre uma versão quântica do ciclo de Carnot. Este é um ciclo termodinâmico teórico que impõe um limite superior sobre a eficiência de qualquer ciclo termodinâmico clássico durante um processo objetivando converter energia térmica em trabalho. A questão levantada é: efeitos não-comutativos mapeados efetivamente como um campo magnético externo podem afetar o rendimento de um ciclo de Carnot? A Figura 6.5 apresenta uma ilustração do ciclo de Carnot, onde as trajetórias isotérmicas representam o contato térmico entre o sistema físico e os reservatórios térmicos. O sistema considerado é um *ensemble* estatístico de partículas que utilizamos para construir uma máquina térmica no início do capítulo.

Durante o primeiro estágio do ciclo, o sistema é colocado em contato com um reservatório térmico à temperatura T_Q . Uma vez que condições isotérmicas sejam satisfeitas durante o processo, ou seja, que o sistema esteja isolado da vizinhança (menos do reservatório) e que o processo ocorra lento o suficiente para permitir que o sistema se ajuste continuamente à temperatura do reservatório, o sistema sofrerá uma expansão que será caracterizada por

$$\ell_{B_1} \longrightarrow \ell_{B_2}. \quad (6.60)$$

Considerando ainda que o equilíbrio térmico entre sistema e reservatório é mantido ao longo de todo o processo, a probabilidade de encontrar o sistema em um

auto-estado $|\psi_{k,\ell}(B)\rangle$ será dada por [56]:

$$p_{\kappa,\ell}(B, \beta_Q) = \frac{1}{Z(B, \beta_Q)} e^{-\beta_Q E_{\kappa,\ell}(B)}, \quad (6.61)$$

conhecida como distribuição de Boltzmann, onde $Z(B, \beta)$ é a função de partição e $\beta = (k_B T)^{-1}$.

A obtenção da função de partição para este sistema esta detalhada no apêndice D e é dada por

$$Z(B, \beta) = \sum_{\kappa,\ell} e^{-\beta E_{\kappa,\ell}(B)} = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta \hbar \bar{\omega}_+}{2})} \frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta \hbar \bar{\omega}_-}{2})}, \quad (6.62)$$

onde

$$\omega_{\pm} = \sigma \omega \sqrt{1 + \mathcal{F}_{\phi}^2} \pm \left(\frac{\omega_B}{2} + \gamma \right). \quad (6.63)$$

Para a verificação sobre a influência não-comutativa sobre o ciclo de Carnot, analisamos a eficiência termodinâmica do ciclo, que é dada por

$$\mathcal{N}^C = 1 - \left| \frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{Q_{1 \rightarrow 2}} \right|, \quad (6.64)$$

onde $Q_{3 \rightarrow 4}$ e $Q_{1 \rightarrow 2}$ estão representados na Figura 6.5.

Utilizando a definição da função de partição em (6.62) obtém-se expressões analíticas para o calor absorvido pelo sistema, $Q_{1 \rightarrow 2}$, e o calor cedido pelo sistema, $Q_{3 \rightarrow 4}$, ou seja,

$$\begin{aligned} Q_{1 \rightarrow 2} &= \int_{B_1}^{B_2} \sum_{\kappa,\ell} E_{\kappa,\ell}(B) \frac{dp_{\kappa,\ell}(B, \beta)}{dB} dB \\ &= E(B_2, \beta_Q) - E(B_1, \beta_Q) + \beta^{-1} \ln \left[\frac{Z(B_2, \beta_Q)}{Z(B_1, \beta_Q)} \right], \end{aligned} \quad (6.65)$$

e

$$\begin{aligned} Q_{3 \rightarrow 4} &= \int_{B_3}^{B_4} \sum_{\kappa,\ell} E_{\kappa,\ell}(B) \frac{dp_{\kappa,\ell}(B, \beta)}{dB} dB \\ &= E(B_4, \beta_F) - E(B_3, \beta_F) + \beta^{-1} \ln \left[\frac{Z(B_4, \beta_C)}{Z(B_3, \beta_F)} \right]. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Nas expressões (6.65) e (6.66) a energia em cada ponto do ciclo é obtida através

da função de partição, tal que

$$\begin{aligned} E(B, \beta) &= -\frac{\partial Z(B, \beta)}{\partial \beta} \\ &= \frac{\beta \hbar \omega_+}{2} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega_+}{2}\right) + \frac{\beta \hbar \omega_-}{2} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega_-}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.67)$$

As características do ciclo de Carnot ainda nos permite encontrar uma relação entre as energias dos diferentes estágios através da entropia de von Neumann, definida como [56]

$$S = -k_B \text{Tr}[\hat{\rho}] \ln[\hat{\rho}]. \quad (6.68)$$

Assumindo equilíbrio térmico entre sistema e reservatório nos quatro estágios, o operador matriz densidade é diagonal e (6.68) pode ser escrito como

$$S(B) = -k_B \sum_{\kappa, \ell} p_{\kappa, \ell} \ln[p_{\kappa, \ell}]. \quad (6.69)$$

Ao substituir a distribuição de Boltzmann (6.61) em (6.69) obtemos a seguinte relação:

$$S(B, \beta) = k_B(\beta E(B, \beta) + \ln[Z(B, \beta)]), \quad (6.70)$$

o que fornece o valor de entropia para os estágios do ciclo de Carnot e também permite obter a variação de entropia entre os processos $2 \rightarrow 3$ e $4 \rightarrow 1$, ou seja,

$$\Delta_{2 \rightarrow 3} = S(B_3, \beta_F) - S(B_2, \beta_Q), \quad (6.71)$$

e

$$\Delta_{4 \rightarrow 1} = S(B_1, \beta_Q) - S(B_4, \beta_C). \quad (6.72)$$

Agora, usando o fato de que ao completar o ciclo de Carnot a soma das entropias nos quatro processos é zero, temos que

$$\Delta_{2 \rightarrow 3} = -\Delta_{4 \rightarrow 1}, \quad (6.73)$$

e, substituindo (6.70) na relação acima, o resultado é a condição:

$$\begin{aligned} &\beta_F [E(B_3, \beta_F) - E(B_4, \beta_F)] + \ln \left[\frac{Z(B_3, \beta_F)}{Z(B_4, \beta_F)} \right] \\ &= -\beta_Q [E(B_1, \beta_Q) - E(B_2, \beta_Q)] + \ln \left[\frac{Z(B_1, \beta_Q)}{Z(B_2, \beta_Q)} \right]. \end{aligned} \quad (6.74)$$

A relação (6.74) permite escrever, por exemplo, a expressão analítica para $Q_{1 \rightarrow 2}$, equação (6.65), em termos das energias e funções de partição para B_3 , B_4 e β_Q . Ao

fazer isso, a eficiência do ciclo de Carnot pode ser escrita como:

$$\mathcal{N}^C = 1 - \left| \frac{Q_{3 \rightarrow 4}}{Q_{1 \rightarrow 2}} \right| = 1 - \frac{\beta_Q}{\beta_F} = 1 - \frac{T_F}{T_Q}. \quad (6.75)$$

Este resultado mostra que efeitos não-comutativos não alteram a eficiência termodinâmica do ciclo de Carnot. Este fato já era esperado uma vez que, como já mencionado, efeitos não-comutativos são mapeados como um campo magnético externo efetivo no hamiltoniano, e a Ref. [43] mostra que o mesmo ciclo de Carnot não tem sua eficiência alterada por um campo magnético externo atuando como gerador do ciclo. No entanto, é importante mostrar que tanto para o ciclo iso-energético quanto para o ciclo de Carnot, correções não-comutativas obedecem o limite máximo da eficiência nestes ciclos.

6.6 Discussões

Neste capítulo foi estudado uma extensão da proposta de se gerar uma máquina térmica controlada por um campo magnético externo, onde quantificamos possíveis assinaturas NC através do cálculo do rendimento termodinâmico para dois ciclos particulares, um iso-magnético e um iso-energético. Além disso, uma breve discussão sobre a influência dos parâmetros não-comutativos sobre o rendimento do ciclo de Carnot foi realizada.

Os resultados mostram que para os ciclos iso-magnético e iso-energético, ao considerar uma álgebra de Heisenberg-Weyl deformada e realizar o mapa de Seiberg-Witten, efeitos NC podem aumentar o rendimento termodinâmico dos ciclos estudados. Entretanto, para grandes valores de intensidade do campo magnético externo aplicado sobre o sistema os efeitos NC deixam de ser relevantes e o rendimento passa a se comportar assintoticamente como em outros trabalhos sobre o ciclo iso-energético, ou seja, $\mathcal{N}(N_{\Phi_1}^{(0)}, \sigma, \gamma, \alpha) \rightarrow 1 - 1/\alpha^2$. Por outro lado, ao ser tomado o limite $B_1 \rightarrow 0$, ou seja, ao desligarmos o campo magnético externo afim de visualizar no rendimento alguma assinatura exclusivamente devido aos efeitos NC, nota-se a ausência de qualquer efeito residual devido a não-comutatividade. Isso pode ser explicado pelo fato de que, embora γ atue como um campo magnético efetivo no hamiltoniano do sistema, ele é de fato um parâmetro fixo durante todo o ciclo. Além disso, da equação (6.56) é possível ver que γ^2 não depende do coeficiente de expansão, α .

Em relação às assinaturas NC sobre o ciclo de Carnot, é útil lembrar que ao mapear a álgebra de Heisenberg-Weyl deformada para a álgebra padrão da mecânica quântica, efeitos NC podem ser escritos no hamiltoniano como um campo magnético efetivo $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\beta, \eta)$. Isto permitiu adotar o mesmo procedimento utilizado em [43] para mostrar que o rendimento de uma máquina térmica operando sobre o ciclo de Carnot através de dois reservatórios térmicos com temperaturas T_Q e T_F se mantém independente dos parâmetros não-comutativos, ou seja, $\mathcal{N}^C = 1 - T_F/T_Q$. Partindo

do ponto de que relações gerais de não-comutatividade são esperadas em escalas de altas energias, onde as teorias da relatividade geral e da mecânica quântica devem ser consideradas, este resultado indica que a segunda lei da termodinâmica continua válida mesmo nesta escala de energia, reforçando assim a robustez da termodinâmica no que tange processos termodinâmicos entre sistema e reservatório térmico.

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas futuras

Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo principal contribuir para um melhor entendimento de uma proposta de generalização da mecânica quântica padrão, denominada mecânica quântica não-comutativa (MQNC). Como indicado na introdução, existem razões teóricas que suportam a ideia de que em determinada escala de energia, denominada escala de Planck, o espaço-tempo passa a se comportar de modo diferente daquele suposto pela mecânica quântica padrão, assumindo um caráter quantizado ao invés de contínuo. Esta consequência leva naturalmente ao desenvolvimento de uma teoria quântica mais geral no que diz respeito às relações de comutação, possuindo assim uma álgebra de Heisenberg-Weyl deformada. Através de uma estrutura matemática denominada mapa de Seiberg-Witten, ou seja, um conjunto de transformações lineares desenvolvido no âmbito de teoria quântica de campos, é possível mapear toda a estrutura algébrica da mecânica quântica não-comutativa para o espaço de Hilbert da mecânica quântica padrão. Isto permite que os efeitos oriundos de novas relações não-comutativas possam ser analisados como termos de potenciais no novo hamiltoniano mapeado. Utilizando esta consequência, nosso trabalho focou em analisar alguns casos particulares de aplicação da mecânica quântica não-comutativa.

No capítulo 1 estudamos o hamiltoniano descrevendo uma partícula livre no contexto da MQNC. Através do mapa de Seiberg-Witten, analisamos o sistema e verificamos que a não-comutatividade atua efetivamente como um campo magnético externo perpendicular ao movimento da partícula. Utilizando o formalismo da mecânica quântica no espaço de fase, obtivemos as auto-energias e os auto-estados do sistema, agora descritos em termos da função de Wigner. Através da construção de um estado inicial formado por uma função de Wigner gaussiana no espaço de momento, quantificamos a informação mútua entre os sub-espacos do sistema em função do tempo, uma vez que imputamos na função de Wigner a dinâmica do sistema por meio das equações de movimento. Em resumo, mostrou-se que, embora o sistema de partícula livre seja simples do ponto de vista da mecânica quântica padrão, o

mesmo não o é em geral quando tratamos o problema no escopo da MQNC.

Já no capítulo 3, apresentamos alguns resultados já obtidos na literatura para o caso do oscilador harmônico no espaço de fase não-comutativo, onde obtivemos alguns resultados análogos daqueles do capítulo 1, como a evolução temporal de uma função de Wigner construída inicialmente como dois osciladores desacoplados mas que, após a inserção da dinâmica do sistema, pôde ser verificado o fenômeno de batimento e decoerência de informação entre os sub-espacos.

O capítulo 4 tratou da influência de campos externos sobre alguns sistemas físicos específicos, a saber, o oscilador harmônico, o sistema de partícula livre e o potencial gravitacional quântico. Utilizando o conceito de fidelidade quântica através do formalismo da mecânica quântica no espaço de fase, construímos um estado inicial gaussiano estacionário onde, por meio da dinâmica para cada sistema em particular, foi possível quantificar quão longe o estado final do sistema poderia estar do estado inicial. A motivação para esta análise foi que para os sistemas estudados, o mapa de Seiberg-Witten permite escrever efeitos não-comutativos como campos magnéticos externos efetivos. Diante disso, ao quantificar a influência de campos externos, podemos interpretar estes efeitos como de origem não-comutativa e quantificar sua contribuição utilizando a fidelidade. Além disso, este capítulo é útil como uma outra maneira de medir correções não-comutativas, uma vez que tais sistemas já foram estudados por outros métodos na literatura.

No capítulo 5 foi estudada a influência de efeitos não-comutativos sobre alguns tipos de gases. Aqui, obtivemos algumas variáveis termodinâmicas relevantes ao nosso estudo para um gás formado por um conjunto de partículas livres, e gases formados por rotores quânticos. Os resultados obtidos no contexto da MQNC foram comparados com aqueles previstos pela mecânica quântica padrão. De fato, estes últimos são recuperados quando se toma o limite em que $\gamma \rightarrow 0$, com $\sigma = \hbar\gamma/k_B T$, sendo γ o parâmetro responsável pelas correções não-comutativas. Além disso, ainda foi possível estimar os intervalos dos valores do parâmetro termodinâmico, σ , e do parâmetro de inércia, λ , de modo a obtermos uma maior diferença entre os resultados da mecânica quântica padrão e aqueles da MQNC. No que diz respeito à verificação experimental destes efeitos, ficou evidente que um gás na configuração $3D$ é mais susceptível do que o mesmo gás na configuração $2D$, uma vez que a inclusão de uma dimensão adicional amplifica os efeitos não-comutativos.

Finalmente, no capítulo 6, apresentamos uma análise da influência de possíveis efeitos não-comutativos sobre o rendimento termodinâmico de máquinas térmicas quânticas operando através de dois ciclos, o iso-magnético e o iso-energético. Uma vez que os ciclos são realizados por meio da variação da intensidade de um campo magnético externo, utilizamos novamente o fato de efeitos NC poderem ser mapeados como campos magnéticos efetivos para quantificar os efeitos. Além disso, uma breve discussão sobre efeitos NC sobre máquinas térmicas operando através do ciclo de Carnot foi feita. Nossos resultados mostram que para o ciclo iso-energético, a medida em que aumentamos o campo magnético externo, a eficiência termodinâmica assume o limite assintótico tal que $\mathcal{N}(N_{\Phi_1}^{(0)}, \sigma, \gamma, \alpha) \rightarrow 1 - 1/\alpha^2$, ou seja, independente

de parâmetros não-comutativos. Além disso, através de manipulações algébricas, pôde ser verificado que a eficiência do ciclo de Carnot não é afetada por correções não-comutativas. Este último fato é útil para indicar a robustez da segunda lei da termodinâmica, que restringe a quantidade de calor que pode ser transformada em trabalho durante um ciclo termodinâmico. Ao que se sabe até o presente momento, relacionar mecânica quântica não-comutativa com termodinâmica quântica é algo novo e nosso trabalho pode ser útil a outros pesquisadores no que diz respeito a analisarem efeitos não-comutativos a outros sistemas termodinâmicos operando através de outros ciclos.

Esta tese mostrou que ao se considerar relações gerais de não-comutatividade em sistemas bem conhecidos na mecânica quântica padrão, novos fenômenos podem surgir e alterar as estruturas matemática e física do sistema. O mapa de Seiberg-Witten é o responsável pela conexão entre o espaço de Hilbert da mecânica quântica padrão e o espaço vetorial da MQNC. Foi visto que para um sistema com seus sub-espacos inicialmente desacoplados, o mapa de Seiberg-Witten gera uma interação entre estes sub-espacos, tendo como consequências o fenômeno de batimento quântico e decoerência nos sub-espacos do sistema físico considerado, embora a informação não seja perdida do como um todo.

Sobre a verificação experimental de possíveis correções não-comutativas em sistemas físicos, nossos resultados indicam que tais efeitos seriam mais susceptíveis de serem verificados em um gás de rotores quânticos na configuração $3D$. Além disso, uma vez que podemos mapear efeitos não-comutativos como campos magnéticos externos, a possibilidade de realizar simulação quântica de sistemas físicos exibindo efeitos NC torna-se uma boa maneira de compreender melhor as consequências de se impor relações gerais de não-comutatividade.

Finalmente, o estudo sobre mecânica quântica não-comutativa e suas implicações é importante para compreendermos possíveis formas de generalizar o escopo da teoria quântica. Além disso, esta tese preocupou-se em apresentar os conceitos básicos para se iniciar os estudos no formalismo da mecânica quântica no espaço de fase, tendo a função de Wigner um papel chave na descrição do estado de um sistema quântico. Para interessados em desenvolver estudos em teoria quântica através do formalismo apresentado, o conteúdo do primeiro capítulo é um bom começo, com as referências do capítulo indicando como proceder para outras aplicações.

Perspectivas futuras

Máquinas térmicas quânticas e correções NC

O presente trabalho tratou de efeitos não-comutativos em alguns casos específicos de gases. Além disso, estudamos correções NC na eficiência termodinâmica de máquinas térmicas quânticas operando através dos ciclos iso-magnéticos e iso-energéticos. Pretendemos ampliar o estudo neste cenário, considerando novas possibilidades de ciclos termodinâmicos. Uma vez que obtivemos no capítulo 6 a função de partição

para os sistemas estudados, foi possível calcular a energia interna, U , a capacidade térmica a volume constante, C_v e a entropia de Boltzmann, S_k . Usando estas quantidades também é possível obter a pressão para um dado gás. Através destes resultados, estamos interessados em ampliar o estudo de efeitos não-comutativos sobre máquinas térmicas quânticas, utilizando como fluido de trabalho sistemas formados por gases de partículas livres, osciladores harmônicos, rotores quânticos, tanto na configuração $2D$ quanto $3D$. As correções não-comutativas podem ser quantificadas através da eficiência termodinâmica destes gases para ciclos específicos.

Hamiltonianos dependentes do tempo

Outro aspecto da mecânica quântica que devemos explorar é quando temos hamiltonianos dependentes do tempo. O ponto é supor que as novas constantes da natureza, θ_{ij} e η_{ij} , são agora dependentes do tempo e obedecem as seguintes relações de comutação,

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = i\theta_{ij}(t), \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\eta_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, 2 \quad (7.1)$$

onde a dependência temporal fica explícita no hamiltoniano quando realizamos o mapa de Seiberg-Witten.

Em [57] foi utilizado o método dos invariantes de Lewis e Riesenfeld para obter as funções de onda para o caso de um oscilador harmônico $2D$ não-comutativo obedecendo as relações (7.1). O trabalho tratou da análise das variâncias dos valores esperados para a posição e momento para alguns casos particulares na dependência temporal. Pretendemos estender o tratamento, considerando, por exemplo, a análise de informação mútua entre os sub-sistemas quando há dependência temporal do tipo (7.1). Além disso, estamos interessados em utilizar outras técnicas para o tratamento de hamiltonianos dependentes do tempo como, por exemplo, a recém desenvolvida transformação de Arnold quântica [58].

Bibliografia

- [1] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1946).
- [2] J. C. Collins, arXiv:hep-th/0602121 (2006).
- [3] N. Seiberg e E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999).
- [4] M.R. Douglas e N.A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001).
- [5] D. Chiou, Int. J. Mod. Phys. **D 24**, 1530005 (2015).
- [6] A. P. Balachandran , A. Ibort, G. Marmo e M. Martone, SIGMA **6**, 052 (2010).
- [7] C. K. Zachos, D. B. Fairlie e T. L. Curtright, Quantum Mechanics in Phase-Space: An Overview with Selected Papers, (World Scientific, (World Scientific, Singapore, 2005).
- [8] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. Aragão, P. Castorina, e D. Zappalà, Phys. Rev. **D72**, 025010 (2005).
- [9] R. Banerjee, B. D. Roy e S. Samanta, Phys. Rev. **D74**, 045015 (2006).
- [10] A. E. Bernardini e O. Bertolami, Phys. Rev. **A88**, 012101 (2013).
- [11] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias e J. N. Prata, Phys. Rev. **D78**, 023516 (2008).
- [12] R. Prange e S. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, (Springer, New York, 1987).
- [13] A. Smailagic e E. Spalluci, Phys, Rev. **D65**, 107701 (2002).
- [14] A. Smailagic e E. Spalluci, J. Phys. **A35** (2002).
- [15] M. Rosenbaum e J. David Vergara, Gen. Rel. Grav. **38**, 607 (2006).
- [16] L. Gouba, Disponível em: <http://arxiv.org/pdf/1603.07176v1.pdf>.
- [17] J. F. G. Santos, A. E. Bernardini e C. Bastos, Physica **A**, 438 (2015).
- [18] J. F. G. Santos e A. E. Bernardini, Physica **A**, 445, (2016).

- [19] E. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
- [20] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, New York, 1931).
- [21] J. Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. **45**, 99 (1949).
- [22] H. Groenewold, Physica **12**, 405 (1946).
- [23] M. A. Marchioli, Rev. Bras. Ens. Fís. **24**(4), 421 (2002).
- [24] M. Novaes, Rev. Bras. Ens. Fís. **24**(5), 437 (2002).
- [25] W. B. Case, Am. J. Phys. **76**, 937 (2008).
- [26] T. Dereli, T. Hakioglu e A. Tegmen, Int. J. Mod. Phys. **A24**, 4573 (2009).
- [27] V. Nesvizhevsky, H. G. Börner, A. K. Petukhov, H. Abele, S. Baeßler, F. J. Rueß, T. Stöferle, A. Westphal, A. M. Gagarski, G. A. Petrov e A. V. Strelkov, Nature **415**, (2002).
- [28] G. Ichikawa, S. Komamiya, Y. Kamiya, Y. Minami, M. Tani, P. Geltenbort, K. Yamamura, M. Nagano, T. Sanuki, S. Kawasaki, M. Hino e M. Kitaguchi, Phys. Rev. Lett. **112**, 071101 (2014).
- [29] S.M. Carroll, J.A. Harvey, V.A. Kostelecký, C.D. Lane e T. Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001).
- [30] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. Garcia-Patron, N. J. Cerf, J. H. Shapiro e S. Lloyd, Rev. Mod. Phys. **84** (2012).
- [31] M. M. Wolf, G. Giedke e J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **96**, 080502 (2006).
- [32] M. M. Wolf, G. Giedke e J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. **96**, 080502 (2006).
- [33] P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, S. Osnaghi, T. Meunier, M. Brune, J. M. Raimond e S. Haroche, Phys. Rev. Lett **89**, 200402 (2002).
- [34] D. Giulim, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I. O. Stamatescu e H. D. Zeh, Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory, (Springer, Heidelberg, 1996).
- [35] A. Kowalewska-Kudlaszyk, J. K. Kalaga e W. Leonski, Phys. Rev. **E78**, 066219 (2008).
- [36] F. Pellegrini e S. Montagero, Phys. Rev. **A76**, 052327 (2007).
- [37] H. T. Quan e F. M. Cucchietti, Phys. Rev. **E79**, 031101 (2009).

- [38] G. Adesso, D. Girolami e A. Serafini, Phys. Rev. Lett. **110**, 219901 (2013).
- [39] P. Sadeghi, S. Khademi e A. H. Darooneh, Phys. Rev. **A86**, 012119 (2012).
- [40] H.T. Quan, Yu-xi Liu, C. P. Sun e Franco Nori, Phys. Rev. **E76**, 031105 (2007).
- [41] B. Gardas e S. Deffner, Phys. Rev. **E92**, 042126 (2015).
- [42] b, Phys. Rev. **E92**, 022142 (2015).
- [43] E. Muñoz e F. J. Peña, Phys. Rev. **E89**, 052107 (2014).
- [44] I. M. Georgescu, S. Ashhab e F. Nori, Rev. Mod. Phys. **86** (2014).
- [45] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics: a Modern Development*, pp. 633 (World Scientific, 1998).
- [46] S. Baeßler, J. Phys. **G36**, 104005, (2009).
- [47] H. Yoshiki, K. Sakai, M. Ogura, T. Kawai, Y. Masuda, T. Nakajima, T. Takayama, S. Tanaka e A. Yamaguchi, Phys. Rev. Lett. **68**, (1992).
- [48] M. Kitaguchi, H. Funahashi, T. Nakura, M. Hino e H. M. Shimizu, Phys. Rev. **A67**, 033609 (2003).
- [49] J. S. Nico, M. S. Dewey, D. M. Gilliam, F. E. Wietfeldt, X. Fei, W. M. Snow, G. L. Greene, J. Pauwels, R. Eykens, A. Lamberty, J. Van Gestel e R. D. Scott, Phys. Rev. **C71**, 055502 (2005).
- [50] M. Lostaglio, K. Korzekwa, D. Jennings e T. Rudolph, Phys. Rev. **X5**, 021001 (2015).
- [51] T. B. Batalhão, A. M. Souza, R. S. Sarthour, I. S. Oliveira, M. Paternostro, E. Lutz, and R. M. Serra Phys. Rev. Lett. **115**, 190601 (2015).
- [52] C. Jarzynski, Phys. Rev. Lett. **78**, 2690 (1997).
- [53] H. T. Quan, Phys. Rev. **E79**, 041129 (2009).
- [54] C. M. Bender, D. C. Brody e B. K. Meister, Proc. R. Soc. **A458**, 1519 (2002).
- [55] J. Gemmer, M. Michel e G. Mahler, Quantum Thermodynamics (Springer, BerlinHeidelberg, 2009).
- [56] J. von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995).
- [57] S. Dey e A. Fring, Phys. Rev. **D90**, 084005 (2014).

[58] V. Aldaya, F. Cossío, J. Guerrero e F. F. López-Ruiz, *J. Phys.: Math. Theor.* **44**, 065302 (2011).

[59] T. L. Curtright e C. K. Zachos, *Asia Pac. Phys. News.*, **01** (2012).

Apêndice A

Outras propriedades do produto de Moyal

Este apêndice apresenta algumas outras propriedades do produto de Moyal que podem ser interessantes para futuros interessados no formalismo da mecânica quântica no espaço de fase. As propriedades e uma história mais detalhada do formalismo podem ser visualizadas em [59]. Considere duas variáveis comutativas q e p representando a posição e momento de um determinado sistema físico, com a, b, A, B, α e β números reais. As seguintes propriedades são válidas:

1) *Não-comutatividade*

$$e^{aq+bp} \star e^{Aq+Bp} = e^{(a+A)q+(b+B)p} e^{aB-bA} e^{i\hbar/2}, \quad (\text{A.1})$$

enquanto

$$e^{Aq+Bp} \star e^{aq+bp} = e^{(a+A)q+(b+B)p} e^{Ab-Ba} e^{i\hbar/2}, \quad (\text{A.2})$$

mostrando que

$$e^{aq+bp} \star e^{Aq+Bp} \neq e^{Aq+Bp} \star e^{aq+bp}. \quad (\text{A.3})$$

2) *Associatividade*

$$(e^{aq+bp} \star e^{Aq+Bp}) \star e^{\alpha q+\beta p} = e^{aq+bp} \star (e^{Aq+Bp} \star e^{\alpha q+\beta p}). \quad (\text{A.4})$$

3) *Traço de duas funções*

$$\int \int dqdp f(q,p) \star g(q,p) = \int \int dqdp f(q,p) g(q,p) = \int \int dqdp g(q,p) f(q,p) = \int \int dqdp g(q,p) \star f(q,p). \quad (\text{A.5})$$

4) *Funções gaussianas*

$$\exp \left[-\frac{a}{\hbar} (q^2 + p^2) \right] \star \exp \left[-\frac{b}{\hbar} (q^2 + p^2) \right] = \frac{1}{1+ab} \exp \left[-\frac{a+b}{(1+ab)\hbar} (q^2 + p^2) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Resolução da equação de autor-valor para a partícula livre

Neste apêndice é resolvida detalhadamente a equação de auto-valor para a partícula livre, onde obtemos a função de Wigner e as respectivas auto-energias do sistema.

Escrevendo o hamiltoniano (2.3) em termos dos seguintes operadores levantamento e abaixamento:

$$\hat{a}_i^\dagger = \frac{\alpha}{\sqrt{\hbar\gamma}}\hat{Q}_i - i\frac{\beta}{\sqrt{\hbar\gamma}}\hat{\Pi}_i, \quad \hat{a}_i = \frac{\alpha}{\sqrt{\hbar\gamma}}\hat{Q}_i + i\frac{\beta}{\sqrt{\hbar\gamma}}\hat{\Pi}_i, \quad (\text{B.1})$$

obtemos

$$\hat{H}(\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i) = \hbar\gamma(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + 1) - i\hbar\gamma(\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2\hat{a}_1^\dagger). \quad (\text{B.2})$$

Em seguida introduzimos o seguinte conjunto de operadores:

$$\hat{A}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 \mp i\hat{a}_2), \quad \hat{A}_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^\dagger \pm i\hat{a}_2^\dagger), \quad (\text{B.3})$$

com as relações de comutação dadas por

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\pm, \hat{A}_\pm] &= [\hat{A}_\pm, \hat{A}_\mp] = 0 \\ [\hat{A}_\pm^\dagger, \hat{A}_\pm^\dagger] &= [\hat{A}_\pm^\dagger, \hat{A}_\mp^\dagger] = 0 \\ [\hat{A}_\pm, \hat{A}_\pm^\dagger] &= [\hat{A}_\mp, \hat{A}_\mp^\dagger] = 1 \\ [\hat{A}_\mp, \hat{A}_\pm^\dagger] &= [\hat{A}_\pm, \hat{A}_\mp^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Reescrevendo a equação (B.2) em termos destes operadores, obtemos

$$\hat{H}(\hat{A}_+^\dagger, \hat{A}_+) = \hbar\gamma(2\hat{A}_+^\dagger\hat{A}_+ + 1). \quad (\text{B.5})$$

Note que a equação foi simplificada pelo fato de $2\alpha\beta = \gamma$. O próximo passo é

determinar a transformada de Weyl de (B.5). Para fazer isso, devemos escrever o produto de Moyal em função destas novas variáveis que, após algum cálculo, é dado por

$$\star = \exp \left[\frac{1}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_{A_+} \overrightarrow{\partial}_{A_+^\dagger} - \overleftarrow{\partial}_{A_+^\dagger} \overrightarrow{\partial}_{A_+} \right) \right], \quad (\text{B.6})$$

onde denotamos por A_+ e A_+^\dagger as transformadas de Weyl dos operadores \hat{A}_+ e \hat{A}_+^\dagger respectivamente.

Notando que o produto de Moyal entre as variáveis A_+^\dagger e A_+ é dado por

$$A_+^\dagger \star A_+ = A_+^\dagger A_+ - \frac{1}{2}, \quad (\text{B.7})$$

é possível escrever a transformada de Weyl do hamiltoniano (B.5) na forma,

$$H^W(A_+^\dagger, A_+) = 2\hbar \gamma A_+^\dagger A_+. \quad (\text{B.8})$$

Escrevendo a equação de auto-valor para o sistema, temos:

$$H^W(A_+^\dagger, A_+) \star W_n(A_+^\dagger, A_+) = E_n W_n(A_+^\dagger, A_+), \quad (\text{B.9})$$

onde, aplicando o produto de Moyal:

$$2\hbar \gamma \left[A_+^\dagger A_+ + \left(A_+^\dagger \frac{\partial}{\partial A_+^\dagger} - A_+ \frac{\partial}{\partial A_+} \right) - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial A_+^\dagger \partial A_+} \right] W_n(A_+^\dagger, A_+) = E_n W_n(A_+^\dagger, A_+) \quad (\text{B.10})$$

Definindo uma nova variável $\xi = A_+^\dagger A_+$, reescrevemos a equação acima como

$$\left[\xi - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) - \epsilon \right] W_n(\xi) = 0, \quad (\text{B.11})$$

onde $\epsilon = E_n / (2\hbar \gamma)$.

A solução da equação diferencial (B.11) é dada em termos dos polinômios de Laguerre associados, ou seja:

$$W_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-2\xi} L_n^{(0)}(4\xi), \quad (\text{B.12})$$

além de obtermos as seguintes auto-energias:

$$E_n = \hbar \gamma (2n + 1). \quad (\text{B.13})$$

Apêndice C

Trabalho e Calor para um ciclo iso-energético

Neste apêndice será mostrado detalhadamente como obter expressões analíticas para o trabalho e o calor em um ciclo iso-energético. Foi visto que a variação total de energia neste ciclo é dada por

$$dE = \sum_{\kappa,\ell} p_{\kappa,\ell}(B) dE_{\kappa,\ell}(B) + \sum_{\kappa,\ell} dp_{\kappa,\ell}(B) E_{\kappa,\ell}(B), \quad (\text{C.1})$$

onde o primeiro termo do lado direito é referente a um processo iso-entrópico e o segundo a um processo iso-energético, $p_{\kappa,\ell}$ representa a probabilidade do sistema estar em um estado particular $|\psi_{\kappa,\ell}(B)\rangle$, e o operador matriz densidade, $\hat{\rho}$, obedece a seguinte condição de normalização

$$\text{Tr} \hat{\rho} = \sum_{\kappa,\ell} p_{\kappa,\ell}(B) = 1. \quad (\text{C.2})$$

Um processo iso-entrópico é definido por $p_{\kappa,\ell}$ ser constante ao longo do processo. Considerando condições quase-estáticas, o trabalho realizado ao variar o campo magnético B está relacionado à magnetização M do sistema por

$$dW = -MdB, \quad (\text{C.3})$$

onde M é dado por

$$M = - \left(\frac{\partial E}{\partial B} \right)_S. \quad (\text{C.4})$$

Integrando (C.3) e utilizando (C.1) obtemos

$$W_{a \rightarrow b} = \sum_{\kappa,\ell} p_{\kappa,\ell}(B) \int_{B_a}^{B_b} \frac{\partial E_{\kappa,\ell}(B)}{\partial B} dB. \quad (\text{C.5})$$

Uma vez que $p_{\kappa,\ell}(B_a) = p_{\kappa,\ell}(B_b)$, conclui-se que o trabalho ao longo de um processo iso-entrópico é

$$W_{a \rightarrow b} = \sum_{\kappa,\ell} p_{\kappa,\ell}(B_a) [E_{\kappa,\ell}(B_b) - E_{\kappa,\ell}(B_a)]. \quad (\text{C.6})$$

Para obter o calor em um processo iso-energético durante um ciclo iso-energético, deve-se notar que a energia é mantida constante, de forma que a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como

$$dE = \delta W_{a \rightarrow b} + \delta Q_{a \rightarrow b} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Integrando (C.7) e utilizando (C.1) para um processo iso-energético, obtém-se

$$Q_{a \rightarrow b} - \sum_{\kappa,\ell} \int_{B_a}^{B_b} E_{\kappa,\ell}(B) \frac{dp_{\kappa,\ell}(B)}{dB} dB \quad (\text{C.8})$$

Para obter uma expressão analítica para (C.8), deve ser considerado a condição de normalização

$$\text{Tr} \hat{\rho} = \sum_{\kappa,\ell} p_{\kappa,\ell}(B) = p_{0,0}(B) + p_{1,0}(B) = 1, \quad (\text{C.9})$$

e que, para um processo iso-energético,

$$\sum_{\kappa,\ell} p_{\kappa,\ell}(B) E_{\kappa,\ell}(B) = \sum_{\kappa,\ell} p_{\kappa,\ell}(B_a) E_{\kappa,\ell}(B_a). \quad (\text{C.10})$$

Inserindo (C.9) em (C.10):

$$p_{0,0}(B) = \frac{E_{1,0}(B_a) - E_{1,0}(B)}{E_{0,0}(B) - E_{1,0}(B)} + \frac{E_{0,0}(B_a) - E_{1,0}(B_a)}{E_{0,0}(B) - E_{1,0}(B)} p_{0,0}(B_a). \quad (\text{C.11})$$

Em seguida, introduzindo a variável

$$u = E_{0,0}(B) - E_{1,0}(B), \quad (\text{C.12})$$

a equação (C.8) pode ser reescrita como

$$Q_{a \rightarrow b} = - \int_{u_a}^{u_b} u \frac{dp_{0,0}(B)}{dB} \frac{du}{u}, \quad (\text{C.13})$$

com $u_a = E_{0,0}(B_a) - E_{1,0}(B_a)$ e $u_b = E_{0,0}(B_b) - E_{1,0}(B_b)$.

Após inserir (C.11) em (C.13) obtemos

$$Q_{a \rightarrow b} = - \int_{u_a}^{u_b} \left[\left(-\frac{dE_{1,0}(u)}{du} + \frac{E_{1,0}(u)}{u} \right) - \frac{E_{1,0}(B_a)}{u} - \frac{u_a p_{0,0}(B_a)}{u} \right] du. \quad (\text{C.14})$$

Considerando variações quase-estáticas do campo magnético, o primeiro termo dentro da integral, entre parênteses, é nulo. Realizando a integração sobre os dois termos restantes, obtemos

$$Q_{a \rightarrow b} = \{E_{1,0}(B_a) + [E_{0,0}(B_a) - E_{1,0}(B_a)]p_{0,0}(B_a)\} \ln \left[\frac{E_{0,0}(B_b) - E_{1,0}(B_b)}{E_{0,0}(B_a) - E_{1,0}(B_a)} \right], \quad (\text{C.15})$$

que é a expressão para o calor trocado entre sistema e reservatório ao longo de um processo iso-energético durante um ciclo iso-energético.

Apêndice D

Função de partição do capítulo 6

Neste apêndice é apresentado detalhadamente a obtenção da função de partição mostrada na seção sobre o ciclo de Carnot no capítulo 6. Considere as auto-energias do sistema físico em questão, dadas por

$$E_{\kappa,\ell}(B) = \sigma\hbar\omega\sqrt{1 + \mathcal{F}_\phi^2}(2\kappa + |\ell| - \ell) - \hbar\left(\frac{\omega_B}{2} + \gamma\right)\ell. \quad (\text{D.1})$$

Definindo um par de números inteiros em função dos números quânticos κ e ℓ como

$$n_+ = \frac{1}{2}(2\kappa + |\ell| - \ell), \quad \text{e} \quad n_- = \frac{1}{2}(2\kappa + |\ell| + \ell), \quad (\text{D.2})$$

teremos que

$$2\kappa + |\ell| = n_+ + n_-, \quad \text{e} \quad \ell = n_- - n_+. \quad (\text{D.3})$$

A equação (D.1) pode ser reescrita como

$$E_{n_+,n_-}(B)\sigma\hbar\omega\sqrt{1 + \mathcal{F}_\phi^2}(n_+ + n_- + 1) - \hbar\left(\frac{\omega_B}{2} + \gamma\right)(n_- - n_+). \quad (\text{D.4})$$

Define-se agora duas frequências associadas aos números quânticos n_+ e n_- como

$$\omega_\pm = \sigma\omega\sqrt{1 + \mathcal{F}_\phi^2} \pm \left(\frac{\omega_B}{2} + \gamma\right), \quad (\text{D.5})$$

tal que

$$\sqrt{1 + \mathcal{F}_\phi^2} = \frac{1}{2}(\omega_+ + \omega_-), \quad \text{e} \quad \left(\frac{\omega_B}{2} + \gamma\right) = (\omega_+ - \omega_-). \quad (\text{D.6})$$

Isto permite reescrever (D.4) como

$$E_{n_+,n_-}(B) = \hbar\omega_+(n_+ + 1/2) + \hbar\omega_-(n_- + 1/2). \quad (\text{D.7})$$

A função de partição pode ser obtida somando-se sobre todos os estados, ou seja,

$$Z(B, \beta) = \sum_{\kappa, \ell} e^{-\beta E_{\kappa, \ell}(B)} = \sum_{n_+=0}^{\infty} \sum_{n_-=0}^{\infty} e^{-\beta E_{n_+, n_-}(B)}. \quad (\text{D.8})$$

O resultado é, portanto, dado por

$$Z(B, \beta) = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta \hbar \bar{\omega}_+}{2})} \frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta \hbar \bar{\omega}_-}{2})}. \quad (\text{D.9})$$