UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hipoelipticidade global para sublaplacianos, perturbações de ordem inferior, resolubilidade e hipoelipticidade global para uma classe de campos vetoriais.

Igor Ambo Ferra

São Carlos - SP
Março de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hipoelipticidade global para sublaplacianos, perturbações de ordem inferior, resolubilidade e hipoelipticidade global para uma classe de campos vetoriais.

Aluno: Igor Ambo Ferra
Orientador: Prof. Dr. Gerson Petronilho
Co-orientador: Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP
Março de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Igor Ambo Ferra, realizada em 16/03/2018:

Prof. Dr. Gerson Petronilho
UFSCar

Prof. Dr. Rafael Fernando Barostichi
UFSCar

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
USP

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
USP

Agradecimentos

À toda a minha família, especialmente aos meus pais pelo apoio incondicional.

Ao professor Gerson pela sua orientação, paciência e dedicação exemplar que foram fundamentais para este trabalho, assim como a orientação do professor Rafael, com quem aprendi muito ao longo desses anos.

Aos professores Paulo Dattori, Sérgio Zani e Paulo Cordaro por terem aceitado estarem na banca de minha defesa e contribuirem com valiosas sugestões para a versão final da tese. Faço também um agradecimento especial ao professor Paulo Cordaro por ter sugerido o tema do segundo capítulo desta tese durante minha qualificação.

À Tatiane pela compreensão e estar sempre presente.

À todos os professores e amigos que fiz nessa caminhada de dez anos pela UFSCar. Todas essas pessoas influenciaram de alguma forma este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Iniciamos este trabalho recordando uma classe de sublaplacianos globalmente hipoelíptico definida no toro N-dimensional introduzido por Cordaro e Himonas em 1994 ([CoHi1]) e estudada por Himonas e Petronilho em 2000 ([HP1]) e consideramos uma nova classe de sublaplacianos que generaliza essa e provamos que é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico se e somente se os coeficientes satisfazem uma condição diophantina que envolve um novo conceito de aproximabilidade simultânea com expoente $\{\omega\}$. Também recordamos a conjectura de Petronilho ([P2]) para a hipoelipticidade C^∞ e apresentamos uma nova classe de sublaplacianos para a qual a conjectura de Petronilho vale no contexto das funções ultradiferenciáveis.

Motivados pelos trabalhos de Petronilho e Zani ([PZ]) e de Chini e Cordaro ([ChC]), consideramos um campo vetorial, no toro 2-dimensional, com coeficientes constantes e reais e analisamos a hipoelipticidade e a resolubilidade global deste campo quando ele é perturbado por um operador pseudodiferencial de ordem negativa. Encontramos uma ordem $\sigma_0 \leq 0$ tal que para todos os operadores de ordem menor do que σ_0, o operador perturbado preserva tanto a resolubilidade quanto a hipoeliticidade global do campo inicial. Este estudo foi feito tanto no caso C^∞ como no caso Gevrey.

Finalmente, generalizamos, para uma classe particular, o trabalho de Petronilho e Zani para o toro N-dimensional. Nosso estudo foi motivado pelo estudo da resolubilidade Gevrey de perturbações por funções Gevrey do sistema de campos vetoriais dado no primeiro nível do complexo estudado por Bergamasco e Petronilho ([BP]).
Palavras-chave: sublaplacianos, hipoelipticidade global, resolubilidade global, toro, aproximabilidade simultânea, funções ultradiferenciáveis do tipo Roumieu, operadores pseudodiferencias, perturbações, Gevrey.

Abstract

We start this work by recalling a class of globally hypoelliptic sublaplacians defined on the N-dimensional torus introduced by Cordaro and Himonas em 1994 ([CoHi1]) and studied by Himonas and Petronilho em 2000 ([HP1]) and we consider a new class of sublaplacians that generalizes this one and prove that it is globally $\{\omega\}$-hypoelliptic if and only if the coefficients satisfy a diophantine condition involving a new concept of simultaneous approximability with exponent $\{\omega\}$. We also recall the Petronilho's conjecture ([P2]) for the smooth hypoellipticity and present a new class of sublaplacians for which the Petronilho's conjecture holds true in the ultradifferentiable functions setup.

Motivated by the works of Petronilho and Zani ([PZ]) and Chini and Cordaro ([ChC]), we considered a vector field in the 2-dimensional torus with constant and real coefficients and we analyze the hypoellipticity and the solvability of this vector field when it is perturbed by a negative-order pseudodifferential operator. We find an order $\sigma_0 \leq 0$ such that for all operators with order less than to σ_0, the perturbed operator preserves both the global hypoellipticity and the global solvability of the initial vector field. This study was done in both the C^∞ case and the Gevrey case.

Finally, we generalize, for a particular class, the work of Petronilho and Zani for the N-dimensional torus. Our study was motivated by the study of the Gevrey solvability of perturbations by Gevrey functions of the vector field system given in the first level of the complex studied by Bergamasco and Petronilho (cite BP).
Key words and phrases: Sublaplacians, global hypoellipticity, global solvability, torus, simultaneous approximability, ultradifferentiable functions of Roumieu type, pseudodifferential operators, perturbations, Gevrey.

Conteúdo

Introdução

Este trabalho está focado em dois objetivos centrais, a saber: hipoelipticidade e resolubilidade global para certas classes de operadores diferenciais.

Com relação a hipoelipticidade global iniciamos o estudo recordando uma classe particular de soma de quadrados, primeiro introduzida por Cordaro e Himonas em 1994 [CoHi1] e subseqüentemente estudado por Himonas e Petronilho em 2000 [HP1]. Mais precisamente, estudamos operadores da forma

$$\Delta_t + \sum_{\ell=1}^{N} X_\ell(t, D_t, D_x)^2$$

em $\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^m$, onde X_ℓ são campos vetorias nas variáveis t, x com coeficientes dependendo somente de t. Motivados pelos trabalhos nos espaços $C^\infty(\mathbb{T}^N), C^\omega(\mathbb{T}^N)$ e $G^s(\mathbb{T}^N)$ investigamos a hipoelipticidade global em uma classe maior de escala de espaços, a saber, no contexto das classes ultradiferenciáveis como introduzida por Braun, Meise e Taylor [BMT]. Aqui, iremos trabalhar no espaço das funções ultradiferenciáveis periódicas do tipo Roumieu, que é denotado por $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ com ω sendo uma função peso (ver definições 1.10 e 1.12). Quando $\omega(t) = t^{1/s}$, com $s \geq 1$ e $t \geq 0$ obtemos o espaço das funções Gevrey periódicas de ordem s. Em particular, quando $s = 1$ obtemos o espaço das funções analíticas periódicas.

Iniciamos este estudo considerando a seguinte classe de sublaplacianos, soma de quadrados, em $\mathbb{T}^{n+m} = \mathbb{T}^n_t \times \mathbb{T}^m_x$:

$$P = -\Delta_t - \sum_{\ell=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t)\partial_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell k}(t)\partial_{t_k} \right)^2, \tag{0.1}$$

sendo $N \in \mathbb{N}$ e $a_{\ell j}, b_{\ell k} \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ funções reais para cada $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, $\ell = 1, \ldots, N$. Ressaltamos que como na expressão de P temos derivadas com relação a variável t, o problema fica mais complicado e interessante do que aquele estudado, por exemplo, em [HP1].

No Teorema 1.5, sob uma certa condição imposta nos coeficientes $b_{\ell k}$, mostramos que esta classe de sublaplacianos é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptica em $\mathbb{T}^{n+m}$ se e somente se seus coeficientes satisfazem uma condição diofantina envolvendo um novo conceito de aproximabilidade simultânea com expoente $\{\omega\}$ (ver Definição 1.2).

Nosso segundo principal resultado desta parte sobre hipoelipticidade global diz respeito à conjectura de Petronilho (veja [P2]). Para a versão ultradiferenciável (do tipo Roumieu) desta conjectura (ver (1.10)) mostramos que ela é verdadeira para uma nova classe de sublaplacianos (ver Teorema 1.9).

Gostaríamos de mencionar que estes resultados descritos acima já foram publicados no Journal of Mathematical Analysis and Applications em 2017 (ver [BFP]).

Em seguida, iniciamos o estudo sobre a resolubilidade global. Motivados pelo trabalho de G. Petronilho e S. L. Zani [PZ], de N. Braun Rodrigues, G. Chinni, P. D. Cordaro e M. R. Jahnke [BCCJ] e de G. Chinni e P. D. Cordaro, [ChC], passamos a focar o nosso estudo na resolubilidade de perturbações de campos vetoriais, em $\mathbb{T}^2$, por operadores pseudodiferenciais. As classes de operadores pseudodiferenciais que introduzimos neste trabalho foram inspiradas nos trabalhos [BCCJ] e [ChC] citados acima.

Para um campo vetorial em $\mathbb{T}^2$, com coeficientes constantes e reais que é globalmente resolúvel (ver [PZ]) consideramos perturbações da forma: $P = L + b(x) + a(x, D)$, sendo que $b(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)\,(G^s(\mathbb{T}^2))$ e $a(x, D) : C^\infty(\mathbb{T}^2) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^2)$ é um operador pseudodiferencial de ordem $\sigma < 0$ (ver Obervação 2.2, no caso C^∞ e Definição 2.39, no caso Gevrey). Em ambos os casos encontramos uma ordem $\sigma_0 \leq 0$ tal que para todos os operadores de ordem menor do que σ_0, o operador perturbado preserva tanto a resolubilidade quanto a hipoeliticidade global do campo inicial

Para atingir este objetivo obtivemos alguns resultados sobre a hipoelipticidade global destes operadores perturbados, e usando uma técnica standard (se o transposto de um operador é globalmente hipoelíptico então o operador é globalmente resolúvel, que demonstramos para as nossas classes de operadores pseudodiferenciais - ver Teorema 2.16) atingimos nossos objetivos. Os resultados sobre a hipoelipticidade têm sua importância por si próprios. Nossos principais resultados são dados pelo Teorema 2.37 (no caso C^∞) e pelo Teorema 2.63 (caso Gevrey).

Gostaríamos de agradecer o Prof. Paulo Domingos Cordaro por ter sugerido este problema no meu exame de qualificação oral realizado no início de agosto de 2017. Também gostaríamos de agradecer o Prof. Paulo Domingos Cordaro por ter sugerido a inclusão, na redação final, das subseções 2.3.1 e 2.4.4.

Finalmente, tivemos como objetivo estender os resultados de Petronilho e Zani [PZ] para dimensões maiores do que dois. Encontramos várias dificuldades para atingir este objetivo, devido principalmente ao problema de divisão de ultradistribuições. Assim, nos restringimos a uma classe particular, mas que engloba o estudo da resolubilidade Gevrey de perturbações por funções Gevrey do sistema de campos vetoriais dado no primeiro nível do complexo estudado em [BP].

Gostaríamos de ressaltar aqui que a passagem da resolubilidade de $\mathbb{T}^2$, feita em [PZ], para $\mathbb{T}^N$ feita no Capítulo 3 possui diversas dificuldades técnicas, não sendo uma generalização imediata dos resultados presentes em [PZ], mesmo no caso em que $\dim \Gamma = 1$. Além dessas dificuldades técnicas, precisamos estabelecer alguns resultados sobre suporte de ultradistribuições, assim como a impossibilidade da divisão da ultradistribuição Delta de Dirac centrada em um ponto $x_0 \in \mathbb{T}$ (ou de combinações lineares de suas derivadas) por uma função flat em x_0 em $D'_s(\mathbb{T})$ (veja as proposições D.3 e D.5). Incluímos essas demonstrações, principalmente a demonstração sobre a impossibilidade de divisão, uma vez que não encontramos, na literatura, as versões que foram aqui utilizadas.

Nossa exposição está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, tratamos da hipoelipticidade global na classe ultradiferenciável e para isto recordamos algumas definições tais como: $\{\omega\}$-hipoelipticidade global, funções peso, espaço das funções ultradiferenciáveis periódicas do tipo Roumieu além de algumas outras definições básicas necessárias para o desenvolvimento do assunto. No capítulo 2, damos a noção de operadores pseudodiferencial tanto no caso C^∞ como no caso Gevrey, além de suas propriedades necessárias para o estudo da resolubilidade de um campo vetorial perturbado por operadores pseudodiferencias. No capítulo 3, apresentamos o estudo da resolubilidade global Gevrey para sistemas de campos vetoriais no toro $\mathbb{T}^N$, perturbados por funções Gevrey, somente nos casos em que a dimensão de $\Gamma = 0$ ou 1 (ver definição de Γ em (3.5)).

Capítulo 1

Hipoelipticidade Global em Classes Ultradiferenciáveis

1.1 Introdução e Principais Resultados

O problema de hipoelipticidade de sublaplacianos, apesar de já ter sido muito estudado por diversos autores, continua sendo uma fonte de diversas questões, já que não existe uma caracterização da hipoelipticidade global de sublaplacianos na sua forma mais geral. Recordamos que dados m campos vetoriais reais $X = \{X_1, \ldots, X_m\}$ no toro $\mathbb{T}^N$, o sublaplaciano associado a eles é definido por $\Delta_X \doteq -(X_1^2 + \cdots + X_m^2)$. Motivados pelos trabalhos desenvolvidos nos espaços $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $C^\omega(\mathbb{T}^N)$ e $G^s(\mathbb{T}^N)$, investigamos a hipoelipticidade global de sublaplacianos definidos no toro $\mathbb{T}^N$ em uma escala maior de espaços, isto é, nas classess de funções ultradiferenciáveis como introduzido por Braun, Meise e Taylor [BMT]. Para alguns artigos sobre estas classes, em particular para conhecer sobre suas histórias, além do trabalho de Braun, Meise e Taylor [BMT] o leitor pode consultar os artigos de Beurling [Beu] e Bonet, Meise e Melikhov [BMM]. Também, para uma leitura mais detalhada sobre o assunto indicamos ao leitor o artigo de Björck [Bj]. Aqui, trabalharemos no espaço das funções ultradiferenciáveis periódicas do tipo Roumieu, que é denotado por $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$, com $\omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função peso (ver Definição 1.10 e 1.12). Recordamos que quando a função peso é dada por $\omega(t) = t^{\frac{1}{s}}$, com $s \geq 1$ e $t \geq 0$, o espaço Roumieu $\mathcal{E}_{\left\{t^{\frac{1}{s}}\right\}}(\mathbb{T}^N)$ é o espaço das funções Gevrey periódicas de ordem s, em particular, quando $s = 1$ o espaço $\mathcal{E}_{\{t\}}(\mathbb{T}^N)$ é precisamente o espaço das funções analíticas periódicas. Também recordamos que um operador diferencial parcial linear P definido em $\mathbb{T}^N$ e com coeficientes em $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^N)(C^\infty(\mathbb{T}^N))$ é dito ser globalmente $\{\omega\}(C^\infty)$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$

se as condições $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ e $Pu \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^N)(C^\infty(\mathbb{T}^N))$ implicam que $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^N)$ $(C^\infty(\mathbb{T}^N))$.

A hipoelipticidade global deve ser constrastada com a $\{\omega\}(C^\infty)$-hipoelipticidade local, que significa que dado um aberto $V \subset \mathbb{T}^N$, temos que $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(V)(C^\infty(V))$ para toda $u \in D'(V)$ satisfazendo $Pu \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(V)(C^\infty(V))$. Note que a $\{\omega\}(C^\infty)$-hipoelipticidade local implica a $\{\omega\}(C^\infty)$-hipoelipticidade global, mas a recíproca nem sempre é válida. Por exemplo, no caso C^∞, o operador $P = \partial_t + \alpha\partial_x$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ um número não Liouville, é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$, mas não é localmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{R}^2$ (veja Greenfield e Wallach [GW]). É bem conhecido que a condição dos colchetes (veja o famoso teorema de Hörmander em [Ho]) implica a hipoelipticidade local (e portanto global) no caso C^∞ de sublaplacianos. Focaremos aqui nossa atenção no caso global.

Gostaríamos de ressaltar ainda que, apesar das demonstrações realizadas aqui se restringirem aos espaços das funções ultradiferenciáveis do tipo Roumieu, as demonstrações dadas podem ser adaptadas para os casos C^∞ ou ultradiferenciável do tipo Beurling que é denotado por $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{T}^N)$.

Nosso primeiro objetivo é estudar a $\{\omega\}$-hipoelipticidade da seguinte classe de sublaplacianos

$$P = -\Delta_t - \sum_{\ell=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t)\partial_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell k}(t)\partial_{t_k} \right)^2, \tag{1.1}$$

sendo que as funções $a_{\ell j}, b_{\ell k} \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ são reais para cada $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, $\ell = 1, \ldots, N$.

Começamos nosso estudo recordando a classe dos operadores de Hörmander no toro N-dimensional $\mathbb{T}^N$ introduzida por Cordaro e Himonas ([CoHi1]) e estudada por Himonas e Petronilho ([HP1]) que é um caso particular do nosso operador P:

$$Q = -\Delta_t - \left(\sum_{j=1}^{m} a_j(t)\partial_{x_j} \right)^2, \tag{1.2}$$

sendo $(t, x) = (t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^m$ e $a_j \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ são a valores reais. A hipoelipticidade global C^∞ em $\mathbb{T}^{n+m}$ foi estudada por Himonas e Petronilho (veja o Teorema 1.1 em [HP1]), enquanto que a hipoelipticidade Gevrey em $\mathbb{T}^{n+m}$, quando $a_j \in C^\omega(\mathbb{T}^n)$, foi analisada por Himonas (veja Teorema 1 em [Hi2]). Para ambas as classes, a hipoelipticidade global é equivalente a condições diofantinas envolvendo a noção de uma coleção de vetores, todos contendo a **mesma** dimensão, ser não simultaneamente aproximável. Mais precisamente, seja k_0 o número de funções linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ entre as funções $(a_1(t), \ldots, a_m(t))$. Assim, após uma possível mudança de variáveis $x_1, \ldots, x_m$ e dos respectivos coeficientes $a_1, \ldots, a_m$, podemos escrever

$$\Big(a_{k_0+1}, \ldots, a_m\Big)^{\perp} = \Big(\lambda_p^r\Big)_{(m-k_0)\times k_0}\Big(a_1, \ldots, a_{k_0}\Big)^{\perp}. \tag{1.3}$$

Podemos considerar, então, a seguinte coleção de vetores $v_p = (\lambda_p^{k_0+1}, \ldots, \lambda_p^m) \in \mathbb{R}^{m-k_0}$, para $p \in \{1, \ldots, k_0\}$. Quando, por exemplo, $0 < k_0 < m$, o operador Q é globalmente G^s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$ se, e somente se, a coleção de vetores v_p, $p \in \{1, \ldots, k_0\}$, é não simultaneamente aproximável com expoente s, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe uma constante $C_\epsilon > 0$ de modo que para cada $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{k_0}) \in \mathbb{Z}^{k_0}$ e cada $\xi \in \mathbb{Z}^{m-k_0}\backslash\{0\}$, existe $j \in \{1, \ldots, k_0\}$ tal que $|\eta_j + v_j \cdot \xi| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}$.

Consideramos, agora, a seguinte classe de sublaplacianos, a qual também é um caso particular da classe P:

$$Q_1 = -\Delta_t - \sum_{\ell=1}^{N} X_\ell^2, \tag{1.4}$$

sendo que $X_\ell = \sum_{j=1}^m a_{\ell j}(t)\partial_{x_j}$, com $a_{\ell j}(t) \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^N)$ a valores reais. Seguindo as ideias de [HP1] e [Hi2], neste caso teremos que lidar, para cada $\ell \in \{1, \ldots, N\}$, com uma coleção de vetores cuja dimensão depende de ℓ. De fato, para $\ell \in \{1, \ldots, N\}$, denotaremos por k^ℓ o número de funções, dentre as funções $a_{\ell 1}, \ldots, a_{\ell m}$, que são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Assim, para cada $\ell \in \{1, \ldots, N\}$, iremos assumir que as funções $a_{\ell j_1^\ell}, \ldots, a_{\ell j_{k^\ell}^\ell}$ são linearmente independentes e geram as funções $a_{\ell 1}, \ldots, a_{\ell m}$. Logo, podemos escrever

$$\Big(a_{\ell\, i_1^\ell}, \ldots, a_{\ell\, i_{d^\ell}^\ell}\Big)^{\perp} = \Big(\lambda_r^{\ell\, i_s^\ell}\Big)_{d^\ell \times k^\ell}\Big(a_{\ell\, j_1^\ell}, \ldots, a_{\ell\, j_{k^\ell}^\ell}\Big)^{\perp} \tag{1.5}$$

sendo que $m = k^\ell + d^\ell$ e $\{1, \ldots, m\} = \Big\{j_1^\ell < \ldots < j_{k^\ell}^\ell\Big\} \cup \Big\{i_1^\ell < \ldots < i_{d^\ell}^\ell\Big\} \doteq \mathcal{A}_\ell \cup \mathcal{B}_\ell$.

Consideraremos a coleção de vetores dada por

$$v_p^\ell = (\lambda_p^{\ell\, i_1^\ell}, \ldots, \lambda_p^{\ell\, i_{d^\ell}^\ell}) \in \mathbb{R}^{d^\ell},\ \text{para } p \in \{1, \ldots, k^\ell\},\ \ell \in \{1, \ldots, N\}. \tag{1.6}$$

Assim, precisamos introduzir uma nova definição do que entendemos por uma coleção de vetores com diferentes dimensões ser ou não simultaneamente aproximável. Para fazermos isso, introduzimos as seguintes notações e definições.

Definição 1.1 *Sejam $m, k, d \in \mathbb{N}$ satisfazendo $k + d = m$. Se*

$$\{1, \ldots, m\} = \{j_1 < \ldots < j_k\} \cup \{i_1 < \ldots < i_d\} \doteq A \cup B \text{ com } A \cap B = \emptyset,$$

então definimos $\pi_A : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^k$ por

$$\pi_A(\xi_1, \ldots, \xi_m) = (\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k}) \doteq \xi', \text{ para todo } \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{Z}^m.$$

Analogamente, definimos também $\pi_B : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^d$ por

$$\pi_B(\xi_1, \ldots, \xi_m) = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_d}) \doteq \xi'', \text{ para todo } \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{Z}^m.$$

Definição 1.2 *Sejam ω uma função peso, $m, N \in \mathbb{N}$ e, para cada $\ell = 1, \ldots, N$, considere $k^\ell, d^\ell \in \mathbb{N}$ tais que $m = k^\ell + d^\ell$, sendo que vamos assumir que existe ao menos um $k^\ell \neq 0$. Se para cada $\ell = 1, \ldots, N$, $\mathcal{A}_\ell = \left\{j_1^\ell < \ldots < j_{k^\ell}^\ell\right\}$ e $\mathcal{B}_\ell = \left\{i_1^\ell < \ldots < i_{d^\ell}^\ell\right\}$, com $\mathcal{A}_\ell \cap \mathcal{B}_\ell = \emptyset$ e $\{1, \ldots, m\} = \mathcal{A}_\ell \cup \mathcal{B}_\ell$, então dizemos que a coleção de vetores $v_1^\ell, \ldots, v_{k^\ell}^\ell \in \mathbb{R}^{d^\ell}$, $\ell = 1, \ldots, N$, é não simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com respeito a coleção de conjuntos $\{A_\ell, B_\ell\}_{\ell=1}^N$, se para cada $\epsilon > 0$, existir $C_\epsilon > 0$ tal que, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$, temos*

$$\left|\xi_{j_p^\ell} + v_p^\ell \cdot \xi''^{(\ell)}\right| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon w(|\xi''^{(\ell)}|)}, \text{ para algum } \ell \in \{1, \ldots, N\} \text{ e para algum } p \in \{1, \ldots, k^\ell\}.$$

Quando esta condição não é satisfeita, dizemos que a coleção de vetores $v_1^\ell, \ldots, v_{k^\ell}^\ell \in \mathbb{R}^{d^\ell}$, $\ell = 1, \ldots, N$, é simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com respeito a coleção de conjuntos $\{\mathcal{A}_\ell, \mathcal{B}_\ell\}_{\ell=1}^N$.

Observação 1.3 *Se $\omega(t) = t^{1/s}$ e $N = 1$, então existem conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que a definição dada acima é equivalente à definição de uma coleção de vetores não simultaneamente aproximáveis com expoente s.*

De fato, para $N = 1$ o operador Q_1 é exatamente o operador Q. Assim, as funções $a_1, \ldots, a_{k_0}$ geram as funções $a_1, \ldots, a_m$ e portanto a coleção de vetores a ser analisada é dada por $v_1, \ldots, v_{k_0} \in \mathbb{R}^d$, com $d = m - k_0$. Definimos $\mathcal{A} = \{1, \ldots, k_0\}$ e $\mathcal{B} = \{k_0 + 1, \ldots, m\}$. Assuma que esta coleção de vetores seja não simultaneamente aproximável com expoente s.

Sejam $\epsilon > 0$ e $\xi \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$ dados. Se $\xi'' = (\xi_{k_0+1}, \ldots, \xi_m) \neq 0$, então segue de nossa hipótese que existe uma constante $C_\epsilon > 0$, independente de ξ, tal que

$$|\xi_p + v_p \cdot \xi''| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon|\xi''|^{1/s}} = C_\epsilon e^{-\epsilon\omega(|\xi''|)}, \text{ para algum } p \in \{1, \ldots, k_0\}.$$

Se $\xi'' = (\xi_{k_0+1}, \ldots, \xi_m) = 0$, temos $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{k_0}) \neq 0$; portanto $\xi_p \neq 0$ para algum $p \in \{1, \ldots, k_0\}$. Logo, obtemos

$$|\xi_p + v_p \cdot \xi''| = |\xi_p| \geq 1 = e^{-\epsilon.0} = e^{-\epsilon\omega(0)} = e^{-\epsilon\omega(|\xi''|)}.$$

Portanto, concluímos que a coleção de vetores $v_1, \ldots, v_{k_0}$ é não simultaneamente aproximável com expoente $\omega(t) = t^{1/s}$, com respeito à coleção de conjuntos $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$.

A demonstração da recíproca é análoga.

Exemplo 1.4 *Considere a classe particular da classe de sublaplacianos Q_1:*

$$Q_2 = -\Delta_t - \sum_{\ell=1}^{m} (a_\ell(t)\partial_{x_\ell})^2 = -\Delta_t - \sum_{\ell=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t)\partial_{x_j} \right)^2 \tag{1.7}$$

sendo que $a_{\ell j}(t) \equiv 0$ para $j \neq \ell$ e $a_{\ell\ell}(t) = a_\ell(t)$. Veremos como a nossa nova definição de vetores simultaneamente aproximáveis fica neste caso.

Quando $m = 1$, esta classe é um caso particular da classe Q dada por (1.2) e, portanto, vamos focar o caso em que $m > 1$. Primeiro vamos assumir que $a_\ell \not\equiv 0$ para todo $\ell = 1, \ldots, m$. Neste caso, prosseguindo como fizemos com o operador Q_1, temos que $k^\ell = 1$, $\mathcal{A}_\ell = \{\ell\}, \mathcal{B}_\ell = \{1, \ldots, \ell-1, \ell+1, \ldots, m\}$ e consideramos os vetores $v_1^\ell = 0 \in \mathbb{R}^{m-1}$, para todo $\ell \in \{1, \ldots, m\}$.

Seja $\xi \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$ dado. Então, existe $p \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\xi_p \neq 0$. Escolhendo $\ell = p$ e $\xi''^{(p)} = (\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_m)$, obtemos

$$\left| \xi_p + v_1^p \cdot \xi''^{(p)} \right| = \left| \xi_p \right| \geq 1 \geq e^{-\epsilon\omega(|\xi''^{(p)}|)},$$

qualquer que seja $\epsilon > 0$. Portanto, concluímos que a coleção de vetores $v_1^\ell \equiv 0$, para $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, é não simultaneamente aproximável com expoente ω, com respeito à coleção de conjuntos $\mathcal{A}_\ell, \mathcal{B}_\ell$.

Por outro lado, vamos supor sem perda de generalidade que $a_1 \equiv 0$ e $a_\ell \not\equiv 0$ para algum $\ell \in \{2, \ldots, m\}$, uma vez que na Definição (1.2) devemos ter $k^\ell \neq 0$.

Escrevemos $L = \{\ell \in \{2, \ldots, m\} : a_\ell \not\equiv 0\} = \{\ell_1, \ldots, \ell_q\}$. Observe que $\ell_p \geq 2$, $\forall\, p \in \{1, \ldots, q\}$. Para $p \in \{1, \ldots, q\}$, definimos

$$\mathcal{A}_p = \{\ell_p\},\ \mathcal{B}_p = \{1, \ldots, \ell_p - 1, \ell_p + 1, \ldots, m\},$$

e

$$\xi'^{(\ell_p)} = \xi_{\ell_p},\ \xi''^{(\ell_p)} = (\xi_1, \ldots, \xi_{\ell_p - 1}, \xi_{\ell_p + 1}, \ldots, \xi_m).$$

Seja $\xi_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^m$. Como $\ell_p \geq 2$ para todo $p \in \{1, \ldots, q\}$, podemos concluir que $\xi_0^{'(\ell_p)} = 0$ para todo $p \in \{1, \ldots, q\}$. Logo, obtemos para $v_1^{\ell_p} = 0 \in \mathbb{R}^{m-1}$,

$$|\xi_0'^{(\ell_p)} + v_1^{\ell_p} \cdot \xi_0^{''(\ell_p)}| = 0,\ \forall\, p = 1, \ldots, q.$$

Dessa forma, neste caso obtemos que a coleção de vetores acima é simultaneamente aproximável com expoente ω, com respeito à coleção de conjuntos $\{A_{\ell_p}, B_{\ell_p}\}_{p=1}^{q}$. Observe que a conclusão desta observação é válida para qualquer função peso ω. ∎

Gostaríamos de ressaltar que a $\{\omega\}$-hipoelipticidade dos operadores Q, dado por (1.2), Q_1, dado por (1.4) e, portanto, do operador Q_2, dado por (1.7), serão casos particulares do nosso principal resultado abaixo.

No próximo teorema, usaremos todas as definições e notações introduzidas na análise do operador Q_1 dado por (1.4).

Teorema 1.5 *Seja ω uma função peso satisfazendo* (1.12) *(ver seção 1.2) e, para $(t, x) \in \mathbb{T}^{n+m}$, considere o operador*

$$P = -\Delta_t - \sum_{\ell=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t) \partial_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell k}(t) \partial_{t_k} \right)^2,$$

sendo que $a_{\ell j}, b_{\ell k} \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ são funções a valores reais para $j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, n,$ $\ell = 1, \ldots, N$ e $\sum_{k=1}^{n} \partial_{t_k} b_{\ell k} \equiv 0$ para todo $\ell = 1, \ldots, N$.

(I) Assuma que exista pelo menos um $k^\ell \neq 0$ e que todo k^ℓ satisfaz $k^\ell < m$. Seja $L = \{\ell \in \{1, \ldots, N\} : 1 \leq k^\ell < m\} = \{\ell_1, \ldots, \ell_q\}$. Então, P é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$ se, e somente se, a coleção de vetores dada pelos k^{ℓ_p} vetores coluna, em $\mathbb{R}^{d^{\ell_p}}$, da matriz $\left(\lambda_r^{\ell_p\, i_s^{\ell_p}}\right)_{d^{\ell_p} \times k^{\ell_p}}$ definida pela igualdade

$$\left(a_{\ell_p\, i_1^{\ell_p}}, \ldots, a_{\ell_p\, i_{d^{\ell_p}}^{\ell_p}}\right)^{\perp} = \left(\lambda_r^{\ell_p\, i_s^{\ell_p}}\right)_{d^{\ell_p} \times k^{\ell_p}} \left(a_{\ell_p\, j_1^{\ell_p}}, \ldots, a_{\ell_p\, j_{k^{\ell_p}}^{\ell_p}}\right)^{\perp} \tag{1.8}$$

é não simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com respeito à coleção de conjuntos $\{A_{\ell_p}, B_{\ell_p}\}$.

(II) Se $k^\ell = 0$ para todo $\ell = 1, \ldots, N$, então P não é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

(III) Se $k^\ell = m$ para algum $\ell \in \{1, \ldots, N\}$, então P é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

Observação 1.6 *Este teorema está dizendo que o operador Q_1 é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$ se, e somente se, P é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$, pois as condições para a $\{\omega\}$-hipoelipticidade global envolvem somente as funções $a_{\ell j}(t)$.*

Observação 1.7 *Gostaríamos de ressaltar também que um difícil problema em aberto é considerar sublaplacianos gerados por perturbações de campos vetoriais $X_\ell = \sum_{j=1}^m a_{\ell j}(t)\partial_{x_j}$ incluindo derivadas com respeito à variável t e com coeficientes dependendo em t, i.e., considerar campos vetoriais da forma $X_\ell = \sum_{j=1}^m a_{\ell j}(t)\partial_{x_j} + \sum_{k=1}^n b_{\ell\, k}(t)\partial_{t_k}$. Este problema geral é difícil de se tratar e esperamos que nosso resultado possa trazer alguma informação importante sobre este problema.*

Observação 1.8 *O Teorema 1.5 generaliza seis resultados já conhecidos. Mais precisamente, o caso C^∞ de nosso Teorema 1.5 generaliza o Teorema 1.1 em [HP1] ($N = 1$ e $b_{1k}(t) \equiv 0$ em $\mathbb{T}^n$), o Teorema 5 em [HP3] ($N = 1 = n$ e $b_{11}(t) \equiv 1$ em $\mathbb{T}^n$), um teorema de [HP2], (veja p.169), ($N = 1$, $n = 2$, $m = 1$ e $b_{11}(t) \equiv 0, b_{12}(t) \equiv 1$ em $\mathbb{T}^n$), o Teorema 3 em [A] ($N = m$ e as funções $a_{\ell j}(t) \equiv 0$ em $\mathbb{T}^n$ para $j \in \{1, \ldots, m\}\backslash\{\ell\}$). Além disso, a versão Gevrey do Teorema 1.5 generaliza o Teorema 1 em [Hi2], (veja a Observação 1.3) e o Teorema 6 em [A] (veja a Observação 1.4).*

Nosso segundo problema sobre hipoelipticidade global é sobre a conjectura de Petronilho, veja [P2]. Começamos relembrando o enunciado desta conjectura: "Seja $X_1, \ldots, X_m$ uma família de campos reais em $\mathbb{T}^N$. Suponha que existam coordenadas y em $\mathbb{T}^N$ nas quais o campo X_1, por exemplo, admite a forma $X_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^N \lambda_k \partial_{y_k}$, sendo que os números $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ satisfazem a seguinte condição Diofantina: existem constantes $C > 0$ e $K > 0$ tais que

$$\Big|\sum_{k=1}^N \lambda_k \eta_k\Big| \geq \frac{C}{|\eta|^K},\ \forall\ \eta \in \mathbb{Z}^N\backslash\{0\}, \tag{1.9}$$

então o operador $P = -\displaystyle\sum_{k=1}^N X_j^2$ é globalmente hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$".

Algumas famílias de campos vetoriais reais que satisfazem as hipóteses dessa conjectura podem ser vistas em [P2], Corolário 3.2, Teorema 3.3 e Corolário 3.5.

Nosso objetivo aqui é verificar que esta conjectura é válida no âmbito das funções ultradiferenciáveis do tipo Roumieu para uma nova classe de sublaplacianos.

Assim, começamos enunciado a versão ultradiferenciável (do tipo Roumieu) da conjectura de Petronilho:

"Sejam ω uma função peso satisfazendo (1.12) e $X_1, \ldots, X_m$ uma família de campos vetoriais reais definida em $\mathbb{T}^N$. Suponha que existam coordenadas y em $\mathbb{T}^N$ nas quais o campo vetorial X_1, por exemplo, admita a forma $X_1 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \partial_{y_k}$, sendo que os números $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ satisfazem a seguinte condição Diofantina: para cada $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\Big|\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \eta_k\Big| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon\omega(|\eta|)}, \ \forall\ \eta \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}\,," \tag{1.10}$$

então o operador $P = -\sum_{k=1}^{N} X_j^2$ é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

Estamos em condições de enunciar nosso segundo principal resultado desta parte do trabalho.

Teorema 1.9 *Seja ω uma função peso que satisfaz* (1.12) *(ver seção 1.2) e, para $(t, x) \in \mathbb{T}^{n+m}$, consideramos o operador*

$$P = -\sum_{\ell=1}^{N} X_\ell^2 \doteq -\sum_{\ell=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t)\partial_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell k}(t)\partial_{t_k}\Big)^2,$$

sendo que $a_{\ell j}, b_{\ell k} \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ são funções a valores reais para cada $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, $\ell = 1, \ldots, N$ e $\sum_{k=1}^{n} \partial_{t_k} b_{\ell k} \equiv 0$ para todo $\ell = 1, \ldots, N$.

Suponha que as seguintes condições são válidas:

(i) os campos vetoriais $\sum_{k=1}^{n} b_{\ell k}(t)\partial_{t_k}$, $\ell = 1, \ldots, N$, geram $T_t(\mathbb{T}^n)$ para cada $t \in \mathbb{T}^n$,

(ii) existe $\ell_0 \in \{1, \ldots, N\}$, que podemos assumir ser $\ell_0 = 1$, tal que

$$X_1 = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\partial_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_{1k}\partial_{t_k},$$

com a_{1j} e b_{1k} números reais para todo $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$ satisfazendo a seguinte condição Diofantina: para cada $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\xi_j + \sum_{k=1}^{n} b_{1k}\tau_k\Big| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon\omega(|(\xi,\tau)|)},\ \forall\ (\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m} \setminus \{0\}\,. \tag{1.11}$$

Então o operador P é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

Para mais resultados sobre o problema da hipoelipticidade C^∞ global sugerimos ao leitor os trabalhos de Amano [Am], Baouendi e Goulaouic [BG], Bell e Mohammed [BM], Fedii [Fe], Fujiwara e Omori [FO], Gramchev, Popivanov e Yoshino [GPY], Greenfield e Wallach [GW], Hanges e Himonas [HH2], Himonas [Hi1], Himonas e Petronilho [HP], [HP1], [HP3], [HP4], Hounie [Hou] e as referências dadas por estes artigos. Com relação à hipoelipticidade analítica global e à hipoelipticidade Gevrey global sugerimos ao leitor os trabalhos de Braun Rodrigues, Chinni, Cordaro e Jahnke [BCCJ], Chinni e Cordaro [ChC], Cordaro e Himonas [CoHi1] e [CoHi2], Hanges e Himonas [HH1], Himonas [Hi2], Himonas, Petronilho e Santos [HPS], Petronilho [P1], Tartakoff [Ta] e as referências dadas por estes trabalhos.

1.2 Propriedades Básicas de Funções Ultradiferenciáveis

Nesta seção recordaremos algumas definições e resultados sobre funções ultradiferenciáveis periódicas.

Definição 1.10 *Uma função crescente e contínua $\omega : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é chamada de função peso quando ela satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Existe $L > 0$ de modo que $\omega(2t) \leq L(\omega(t) + 1)$, para todo $t \geq 0$,*
2. *$\omega(t) = O(t)$ quando $t \longrightarrow \infty$,*
3. *$\log(t) = o(\omega(t))$ quando $t \longrightarrow \infty$,*
4. *A função $\varphi(t) \doteq \omega(e^t)$, definida para $t \geq 0$, é convexa.*

Dizemos que duas funções peso ω_1 e ω_2 são **equivalentes** quando

$$0 < \liminf_{t\longrightarrow\infty} \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} \leq \limsup_{t\longrightarrow\infty} \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} < \infty.$$

Uma função peso ω é equivalente a uma função peso subaditiva se, e somente se, vale a seguinte propriedade:

$$\exists\, D > 0, \exists\, t_0 > 0 \text{ tal que } \forall\ \lambda \geq 1,\ \forall\ t \geq t_0 : \omega(\lambda t) \leq \lambda D \omega(t). \tag{1.12}$$

Dizemos que uma função peso ω é **quase-analítica** se $\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt = \infty$. Se a integral acima for finita, então dizemos que a função peso ω é **não-quase-analítica**.

Exemplo 1.11 *Dado um número real $s \geq 1$ temos que $\omega(t) = t^{1/s}$ define uma função peso equivalente a uma função subaditiva que é quase-analítica se, e somente se, $s = 1$.*

Dada uma função peso ω definimos a **conjugada de Young** φ por $\varphi^*(t) = \sup_{s\geq 0} \{st - \varphi(s)\}$.

Nos resultados que iremos fazer não há perda de generalidade em supor que a função peso ω se anula no intervalo $[0, 1]$. Quando isso ocorre, temos que a conjugada de Young φ^* é uma função convexa e não negativa. Além disso, a função $\frac{\varphi^*(t)}{t}$ é não decrescente e tende a ∞ quando $t \to \infty$, $\varphi^{**} = \varphi$ e $\varphi^*(0) = 0$. Outras propriedade que usaremos sobre a conjugada de Young φ^* é o fato dela ser superaditiva, ou seja, $\varphi^*(x) + \varphi^*(y) \leq \varphi^*(x + y),\ \forall\ x, y \geq 0$. Como estamos interessados em estudar operadores definidos no toro N-dimensional, iremos definir neste trabalho apenas as funções ultradifenciáveis periódicas. O caso não periódico pode ser encontrado nas referências [AJO1], [BMT], [HM]. Mais precisamente temos a

Definição 1.12 *O espaço*

$$\mathcal{E}_{\{\omega\}}\left(\mathbb{T}^N\right) = \left\{f \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right) : \|f\|_\lambda < \infty,\ \textit{para algum}\ \lambda > 0\right\}$$

sendo

$$\|f\|_\lambda = \sup_{x\in\mathbb{T}^N} \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N} |\partial^\alpha f(x)| \exp\big(-\lambda\varphi^*\big(\frac{|\alpha|}{\lambda}\big)\big)$$

é o espaço das funções periódicas ultradiferenciáveis do tipo Roumieu associado à função peso ω. O subespaço de $\mathcal{E}_{\{\omega\}}\left(\mathbb{T}^N\right)$ formado pelas funções tais que

$$\|f\|_\lambda < +\infty,\ \forall\ \lambda > 0$$

é o espaço das funções periódicas ultradiferenciáveis do tipo Beurling associado à função peso ω e é denotado por $\mathcal{E}_{(\omega)}\left(\mathbb{T}^N\right)$.

Em outras palavras, uma função $f \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$ é um elemento de $\mathcal{E}_{\{\omega\}}\left(\mathbb{T}^N\right)$ se, e somente se, existem constantes $C, \lambda > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C e^{\lambda \varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)}, \ \forall\, x \in \mathbb{T}^N, \alpha \in \mathbb{Z}_+^N. \tag{1.13}$$

Se duas funções peso ω_1 e ω_2 forem equivalentes, então $\mathcal{E}_{\{\omega_1\}}\left(\mathbb{T}^N\right) = \mathcal{E}_{\{\omega_2\}}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e $\mathcal{E}_{(\omega_1)}\left(\mathbb{T}^N\right) = \mathcal{E}_{(\omega_2)}\left(\mathbb{T}^N\right)$.

Exemplo 1.13 *Dado um número real $s \geq 1$ se ω é a função peso do Exemplo 1.11, então o espaço $\mathcal{E}_{\{\omega\}}\left(\mathbb{T}^N\right)$ coincide com o espaço $G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$. Em particular, se $\omega(t) = t$, então o espaço $\mathcal{E}_{\{\omega\}}\left(\mathbb{T}^N\right)$ coincide com o espaço das funções analíticas e periódicas $C^\omega\left(\mathbb{T}^N\right)$.*

Como no caso dos espaços Gevrey, temos uma caracterização das funções em $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ em termos da transformada parcial de Fourier. Mais precisamente,

Teorema 1.14 *Seja ω uma função peso e para $(t, x) \in \mathbb{T}^{n+m}$ e seja $\psi \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m})$. Então existem constantes $C, \lambda, \epsilon > 0$ tais que*

$$\left|\partial_t^\alpha \widehat{\psi}(t, \xi)\right| \leq C \exp\left(\lambda \varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda}\right)\right) \exp\left(-\epsilon\omega(|\xi|)\right) \tag{1.14}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^m$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, onde $\widehat{\psi}(t, \xi)$ é a transformada parcial de Fourier de ψ com relação a variável x.

Observação 1.15 *Ressaltamos que não encontramos na literatura uma caracterização de funções dos espaços $\mathcal{E}_{\{\omega\}}$ em termos da transformada parcial de fourier, e por esta razão incluiremos uma prova deste fato neste texto.*

Para provar o Teorema 1.14 necessitamos de alguns resultados auxiliares. Não apresentaremos a demonstração dos dois resultados a seguir, pois podemos encontrar resultados similares em [AJO1].

Lema 1.16 *Sejam $p, k \in \mathbb{Z}_+$, então existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que*

$$\frac{1}{k}\varphi^*(ky) + yp \leq 1 + \frac{1}{m}\varphi^*(ym), \ \forall\, y \geq 0. \tag{1.15}$$

Também precisamos do seguinte resultado, cuja demonstração está feita em [AJO1], desigualdade (2).

Lema 1.17 *Se $\xi \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, então*

$$e^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)} \leq \inf_{N \in \mathbb{Z}_+} |\xi|^{-N} e^{\frac{1}{k}\varphi^*(Nk)} \leq e^{-\frac{1}{k}\omega(|\xi|)+\log|\xi|}.$$

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema 1.14.

Demonstração do Teorema 1.14

Suponha que $\psi \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m})$. Então existem $C > 0$ e $\lambda > 0$ tais que para $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, temos

$$\left|\xi^\beta \partial_t^\alpha \widehat{\psi}(t,\xi)\right| = \frac{1}{(2\pi)^m} \left| \int_{\mathbb{T}^m} e^{-ix\cdot\xi} \partial_x^\beta \partial_t^\alpha \psi(t,x) dx \right| \leq C \exp\left(\lambda \varphi^*\left(\frac{|\alpha| + |\beta|}{\lambda}\right)\right).$$

Agora seja $N \in \mathbb{Z}_+$ e $\xi \in \mathbb{Z}^m$. Escolhemos $i \in \{1, \ldots, m\}$ de tal maneira que $|\xi_i| = \max_{1\leq j\leq m} |\xi_j|$. Se definirmos $\beta = Ne_i$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^m$, então $|\xi|^N \leq m^{N/2}|\xi^\beta|$.

Definindo $C_1 = \max\left\{m^{\frac{1}{2}}, C\right\}$ concluímos que

$$|\xi|^N |\partial_t^\alpha \widehat{\psi}(t,\xi)| \leq C_1^{N+1} \exp\left(\lambda\varphi^*\left(\frac{|\alpha| + N}{\lambda}\right)\right),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{T}^n$ e $\xi \in \mathbb{Z}^m$. Se definirmos $\lambda_0 = \frac{\lambda}{2}$, então pela convexidade de φ^* temos

$$|\xi|^N |\partial_t^\alpha \widehat{\psi}(t,\xi)| \leq C_1^{N+1} \exp\left(\lambda_0\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda_0}\right)\right) \exp\left(\lambda_0\varphi^*\left(\frac{N}{\lambda_0}\right)\right), \tag{1.16}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{T}^n$ e $\xi \in \mathbb{Z}^m$.

Escolhendo $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\frac{1}{\lambda_0} < k$ segue do fato que $\frac{\varphi^*(t)}{t}$ é não decrescente que $\lambda_0\varphi^*\left(\frac{|\alpha|}{\lambda_0}\right) < \frac{1}{k}\varphi^*(k|\alpha|)$ e $\lambda_0\varphi^*\left(\frac{N}{\lambda_0}\right) < \frac{1}{k}\varphi^*(kN)$. Usando este fato em (1.16), usando o Lema 1.16, com $y = N$, e escolhendo $p \in \mathbb{Z}_+$ tal que $C_1 < e^p$, segue existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned}
|\xi|^N |\partial_t^\alpha \widehat{\psi}(t,\xi)| &\leq C_1 e^{Np} \exp\left(\frac{1}{k}\varphi^*\left(|\alpha|k\right)\right) \exp\left(\frac{1}{m}\varphi^*(Nm) + 1 - Np\right) \\
&\leq C_1 e \exp\left(\frac{1}{k}\varphi^*\left(|\alpha|k\right)\right) \exp\left(\frac{1}{m}\varphi^*\left(Nm\right)\right).
\end{aligned}$$

Portanto, se escolhermos $k_0 = \max\{k, m\}$ e usarmos, novamente, o fato que a função $\frac{\varphi^*(t)}{t}$

é não decrescente então obtemos

$$|\xi|^N|\partial_t^\alpha\widehat{\psi}(t,\xi)| \leq C_2 \exp\left(\frac{1}{k_0}\varphi^*\left(|\alpha|k_0\right)\right)\exp\left(\frac{1}{k_0}\varphi^*\left(Nk_0\right)\right), \tag{1.17}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{T}^n$ e $\xi \in \mathbb{Z}^m$, onde C_2 é uma constante positiva.

Usando agora o Lema 1.17, segue de (1.17) que

$$\begin{aligned}|\partial_t^\alpha\widehat{\psi}(t,\xi)| &= \inf_{N\in\mathbb{Z}_+}|\partial_t^\alpha\widehat{\psi}(t,\xi)| \\ &\leq C_2\exp\left(\frac{1}{k_0}\varphi^*\left(|\alpha|k_0\right)\right)\inf_{N\in\mathbb{Z}_+}|\xi|^{-N}\exp\left(\frac{1}{k_0}\varphi^*\left(Nk_0\right)\right) \\ &\leq C_2\exp\left(\frac{1}{k_0}\varphi^*\left(|\alpha|k_0\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{k_0}\omega(|\xi|)+\log(|\xi|)\right). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{1}{k_0}$. Como $\log t = o(\omega(t))$ quando $t \longrightarrow +\infty$, existe $A > 0$ tal que

$$\log|\xi| \leq (\frac{1}{k_0}-\epsilon)\omega(|\xi|),\ \forall\ |\xi| \geq A. \tag{1.19}$$

Assim, concluímos de (1.18) e (1.19) que

$$|\partial_t^\alpha\widehat{\psi}(t,\xi)| \leq C_2\exp\left(\frac{1}{k_0}\varphi^*\left(|\alpha|k_0\right)\right)\exp\left(-\epsilon\omega(|\xi|)\right) \tag{1.20}$$

é válida para todos $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $t \in \mathbb{T}^n$ e $\xi \in \mathbb{Z}^m$ tal que $|\xi| \geq A$. Usando a compacidade do conjunto $|\xi| \leq A$ e o fato de que $\psi \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m})$, pode-se fácilmente mostrar a mesma desigualdade como (1.20) para este caso e portanto a demonstração está agora completa. ∎

1.3 Demonstração do Teorema 1.5

Provaremos apenas o item (I), uma vez que a demonstração de (III) segue as mesmas linhas deste caso e a demonstração de (II) não é difícil de ser feita. Para o item (I), provaremos apenas o caso em que $1 \leq k^\ell < m$ para todo $\ell \in \{1,\ldots,N\}$, pois os demais casos seguem deste.

Demonstração do item (I):

Necessidade.

Suponha que a coleção $v_1^\ell,\ldots,v_{k^\ell}^\ell \in \mathbb{R}^{d^\ell}$, $\ell = 1,\ldots,N$ seja simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com relação à coleção de conjuntos $\{A_\ell, B_\ell\}_{\ell=1}^N$. Então, existe $\epsilon > 0$ de modo que para todo $C > 0$, existe $\xi \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ satisfazendo

$$\left|\xi_{j_p^\ell} + v_p^\ell \cdot \xi''^{(\ell)}\right| < Ce^{-\epsilon\omega(|\xi''^{(\ell)}|)},\ \forall\ \ell \in \{1, \dots, N\} \text{ e } \forall\ p \in \{1, \dots, k^\ell\}. \tag{1.21}$$

Observe que, de (1.21), se $0 < C \leq 1$, então $\xi''^{(\ell)} \neq 0$. Escolhendo $C = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2 \dots$, obtemos que existe uma sequência $\{\xi^k\}_k \subset \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, $(\xi^k)'^{(\ell)} \in \mathbb{Z}^{k^\ell}$, $(\xi^k)''^{(\ell)} \in \mathbb{Z}^{d^\ell}$, com $(\xi^k)''^{(\ell)} \neq 0$, tal que para $k = 1, 2 \dots$ temos

$$\left|\left(\xi^k\right)_{j_p^\ell} + v_p^\ell \cdot \left(\xi^k\right)''^{(\ell)}\right| < e^{-\epsilon\omega(|(\xi^k)''^{(\ell)}|)},\ \forall\ \ell \in \{1, \dots, N\} \text{ e } \forall\ p \in \{1, \dots, k^\ell\}. \tag{1.22}$$

Observamos ainda que a sequência $\{\xi^k\}_k$ acima pode ser escolhida de modo que $\{\xi^k\}$ possui uma infinidade de pontos distintos.

Se $|w| = \max\{|v_p^\ell| : \ell \in \{1, \dots, N\},\ p \in \{1, \dots, k^\ell\}\}$, então segue de (1.22) que

$$|(\xi^k)_{j_p^\ell}| \leq (1 + |w|)|(\xi^k)''^{(\ell)}|,\ \forall\ \ell \in \{1, \dots, N, \},\ \forall\ p \in \{1, \dots, k^\ell\},\ \text{e } k = 1, 2, \cdots,$$

uma vez que $e^{-\epsilon\omega(|(\xi^k)''^{(\ell)}|)} \leq 1 \leq |(\xi^k)''^{(\ell)}|$.

Assim, obtemos

$$|(\xi^k)'^{(\ell)}|^2 \leq \overline{k}(1 + |w|)^2|(\xi^k)''^{(\ell)}|^2,\ \forall\ \ell \in \{1, \dots, N\} \text{ e } k = 1, 2, \cdots,$$

sendo $\overline{k} = \max\{k^\ell : \ell \in \{1, \dots, N\}\}$.

Então, temos

$$|\xi^k| = \left(|(\xi^k)'^{(\ell)}|^2 + |(\xi^k)''^{(\ell)}|^2\right)^{1/2} \leq [1 + \overline{k}(1 + |w|)^2]^{1/2}|(\xi^k)''^{(\ell)}|, \tag{1.23}$$

para todo $\ell \in \{1, \dots, N\}$ e $k \in \mathbb{N}$

Observamos ainda que se a sequência $\{(\xi^k)''^{(\ell)}\}$, para algum $\ell \in \{1, \dots, N\}$, fosse uma sequência limitada, então a sequência $\{\xi^k\}_k$ também seria limitada, o que gera uma contradição com o fato de todo subconjunto limitado de $\mathbb{Z}^m$ ser finito. Logo, existem uma constante $\epsilon > 0$ e uma sequência $\{\xi^k\}_k \subset \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, com $(\xi^k)'^{(\ell)} \in \mathbb{Z}^{k^\ell}$, $(\xi^k)''^{(\ell)} \in \mathbb{Z}^{d^\ell}$, $(\xi^k)''^{(\ell)} \neq 0$, tais que para todo $\ell \in \{1, \dots, N\}$ temos $|(\xi^k)''^{(\ell)}| \to \infty$ quando $k \to \infty$ e, para todo $k = 1, 2, \dots$

$$\left|\left(\xi^k\right)_{j_p^\ell} + v_p^\ell \cdot \left(\xi^k\right)''^{(\ell)}\right| < e^{-\epsilon\omega(|(\xi^k)''^{(\ell)}|)},\ \forall\ \ell \in \{1, \dots, N\} \text{ e } \forall\ p \in \{1, \dots, k^\ell\}. \tag{1.24}$$

Definimos, agora,

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{ix\cdot\xi^k}\in D'(\mathbb{T}^{n+m})\setminus\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m}). \tag{1.25}$$

O próximo passo é mostrarmos que $Pu\in\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m})$. Usando a fórmula (1.8) e recordando que $v_p^\ell=(\lambda_p^{\ell\, i_1^\ell},\dots,\lambda_p^{\ell\, i_{d^\ell}^\ell})$, com $\ell\in\{1,\dots,N\}$ e $p\in\{1,\dots,k^\ell\}$, o operador P pode ser escrito como

$$P=-\Delta_t-\sum_{\ell=1}^{N}\Big(\sum_{q=1}^{k^\ell}a_{\ell j_q^\ell}(t)L_{j_q^\ell}^\ell+\sum_{\nu=1}^{n}b_{\ell\,\nu}(t)\partial_{t_\nu}\Big)^2,$$

sendo que $L_{j_q^\ell}^\ell=\Big(\partial_{x_{j_q^\ell}}+\sum_{p=1}^{d^\ell}(v_q^\ell)_p\partial_{x_{i_p^\ell}}\Big)$, para $\ell\in\{1,\dots,N\}$, $q\in\{1,\dots,k^\ell\}$ e $(v_q^\ell)_p$ é a p-ésima coordenada do vetor v_q^ℓ.

Assim,

$$Pu(t,x)=-\sum_{\ell=1}^{N}\Big(\sum_{q=1}^{k^\ell}a_{\ell j_q^\ell}(t)L_{j_q^\ell}^\ell+\sum_{\nu=1}^{n}b_{\ell\,\nu}(t)\partial_{t_\nu}\Big)\Big(\sum_{q=1}^{k^\ell}a_{\ell j_q^\ell}(t)L_{j_q^\ell}^\ell u(t,x)\Big).$$

É suficiente mostrarmos então que $L_{j_q^\ell}^\ell u(t,x)\in\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m})$ para todo $\ell=1,\dots,N$ e $q=1,\dots,k^\ell$. Como $L_{j_q^\ell}^\ell u(t,x)$ depende apenas de x, definindo $h_q^\ell(x)=L_{j_q^\ell}^\ell u(t,x)$, devemos mostrar que $h_q^\ell\in\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^m)$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}
h_q^\ell(x) &= i\sum_{k=1}^{\infty}\big((\xi^k)_{j_q^\ell}+\sum_{p=1}^{d^\ell}(v_q^\ell)_p(\xi^k)_{i_p^\ell}\big)e^{ix\cdot\xi^k}=i\sum_{k=1}^{\infty}\big((\xi^k)_{j_q^\ell}+v_q^\ell\cdot(\xi^k)''^{(\ell)}\big)e^{ix\cdot\xi^k}\\
&= \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^m\\ \xi=\xi^k}} i\big((\xi)_{j_q^\ell}+v_q^\ell\cdot(\xi)''^{(\ell)}\big)e^{ix\cdot\xi},
\end{aligned}$$

segue que

$$\widehat{h_q^\ell}(\xi)=\begin{cases}0, & \text{se } \xi\neq\xi^k\\ i\big((\xi^k)_{j_q^\ell}+v_q^\ell\cdot(\xi^k)''^{(\ell)}\big), & \text{se } \xi=\xi^k.\end{cases}$$

Obtemos de (1.24) que se $\xi=\xi^k$ então

$$|\widehat{h_q^\ell}(\xi)|\leq e^{-\epsilon\omega(|(\xi^k)''^{(\ell)}|)},\ \forall\ \ell\in\{1,\dots,N\} \text{ e } \forall\ q\in\{1,\dots,k^\ell\}.$$

Para completarmos a demonstração que $h_q^\ell \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^m)$, aplicaremos a Proposição 2.1, item (ii), de [AJ] (ver p. 373). Mas para fazermos isto devemos trocar $\omega(|(\xi^k)''^{(\ell)}|)$ por $\omega(|\xi^k|)$. Segue de (1.23) que existe $L \geq 1$ tal que $|\xi^k| \leq L|(\xi^k)''^{(\ell)}|$ para todo $\ell \in \{1, \ldots, N\}$ e usando o fato de ω ser uma função crescente, obtemos $\omega(|\xi^k|) \leq \omega(L|(\xi^k)''^{(\ell)}|)$.

Recordando agora que ω satisfaz (1.12), ou seja, existem $D > 0$ e $M > 0$ tais que, para todo $|(\xi^k)''^{(\ell)}| \geq M$, vale $\omega(L|(\xi^k)''^{(\ell)}|) \leq LD\omega(|(\xi^k)''^{(\ell)}|)$, podemos concluir que

$$-\epsilon\omega(|(\xi^k)''^{(\ell)}|) \leq -\epsilon\frac{1}{LD}\omega(|\xi^k|), \text{ desde que } |(\xi^k)''^{(\ell)}| \geq M.$$

Como, para todo $\ell \in \{1, \ldots, N\}$, temos que $|(\xi^k)''^{(\ell)}| \to \infty$ quando $k \to \infty$, então podemos assumir, sem perda de generalidade, que todo ξ^k satisfaz $|(\xi^k)''^{(\ell)}| \geq M$. A demonstração da necessidade deste caso está completa. ■

Suficiência. Seja $u \in D'(\mathbb{T}^{n+m})$ tal que

$$Pu = f, \;\; f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m}). \tag{1.26}$$

Aplicando a transformada parcial de Fourier na variável x na igualdade (1.26), obtemos

$$-\Delta_t \hat{u}(t,\xi) - \sum_{\ell=1}^{N} Y_\ell^2 \hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(t,\xi), \text{ para todo } \xi \in \mathbb{Z}^m, \tag{1.27}$$

sendo

$$Y_\ell = i\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t)\xi_j + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell k}(t)\partial_{t_k}, \;\; \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Para cada $\xi \in \mathbb{Z}^m$ fixado, $\hat{u}(t,\xi)$ é um elemento de $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$, uma vez que o operador definido em (1.27) é elíptico em t e $\hat{f}(t,\xi) \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ (aqui usamos a versão periódica do Corolário 3.16 em [AJO2] no caso não-quase-analítica e do Teorema 4.8 em [AJO1] no caso quase-analítica)).

Multiplicamos (1.27) por $\overline{\hat{u}}(t,\xi)$, usamos a hipótese $\sum_{k=1}^{n} \partial_{t_k} b_{\ell k} \equiv 0$ para $\ell = 1, \ldots, N$ e integramos por partes com respeito a $t \in \mathbb{T}^n$ (ver Apêndice A para mais detalhes) para obtermos

$$\sum_{k=1}^{n} \|\partial_{t_k}\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} + \sum_{\ell=1}^{N} \|Y_\ell \hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \int_{\mathbb{T}^n} \hat{f}(t,\xi)\overline{\hat{u}}(t,\xi)dt. \tag{1.28}$$

Introduzimos agora as seguintes funções auxiliares:

$$E_\ell(t,\xi) = \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t)\xi_j\Big)^2,\ \forall\ t\in\mathbb{T}^n, \xi\in\mathbb{Z}^m, \ell=1,\dots,N.$$

Precisaremos do seguinte

Lema 1.18 *Seja $v_1^\ell,\dots,v_{k^\ell}^\ell\in\mathbb{R}^{d^\ell}, \ell=1,\dots,N$ uma coleção de vetores não simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com respeito à coleção de conjuntos $\{A_\ell,B_\ell\}_{\ell=1}^N$. Então existem constantes $\alpha>0$, e $\delta>0$, dependendo apenas dos coeficientes $a_{\ell j}$, tais que para cada $\epsilon>0$ e cada $\xi\in\mathbb{Z}^m\backslash\{0\}$, é possível encontrar um intervalo aberto $I_\xi\subset\mathbb{T}^n$, de modo que, para algum $\ell\in\{1,\dots,N\}$, tem-se*

$$E_\ell(t,\xi)\geq \alpha C_\epsilon e^{-\epsilon\omega(|\xi|)}, \tag{1.29}$$

para todo $t\in I_\xi$. Além disso, $\mathrm{vol}(I_\xi)\geq\delta$*, sendo que C_ϵ é uma constante positiva que depende apenas de ϵ.*

Antes de demonstrarmos o Lema 1.18, mostraremos como a desigualdade (1.29) nos ajuda a mostrar que o operador P é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, (veja [HP1], p. 361, fórmula (2.10)), segue que existe uma constante $C>0$ tal que, para todo subconjunto aberto I de $\mathbb{T}^n$, vale

$$\mathrm{vol}(I)||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}\leq C\Big(\int_I|\varphi(s)|^2ds+\mathrm{vol}(I)\sum_{k=1}^{n}\|\varphi_{t_k}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}\Big), \tag{1.30}$$

qualquer que seja a função $\varphi\in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

A partir de agora, C_ϵ e C representarão constantes que poderão ser modificadas um número finito de vezes.

Segue do Lema 1.18, já que estamos supondo que a coleção de vetores $v_1^\ell,\dots,v_{k^\ell}^\ell\in\mathbb{R}^{d^\ell},\ell=1,\dots,N\}$ é não simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com respeito à coleção de conjuntos $\{A_\ell,B_\ell\}$, e de (1.30) com $\hat{u}(t,\xi)$ no lugar de φ, que dados $\epsilon>0$ e $\xi\in\mathbb{Z}^m\backslash\{0\}$, existe $C_\epsilon>0$ tal que, para algum $\ell\in\{1,\dots,N\}$, vale

$$||\hat{u}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}\ \leq\ C_\epsilon e^{\epsilon\omega(|\xi|)}\Big(\int_{\mathbb{T}^n}E_\ell(t,\xi)|\hat{u}(t,\xi)|^2dt+\sum_{k=1}^{n}\|\hat{u}_{t_k}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}\Big). \tag{1.31}$$

Iremos estimar agora a integral que aparece na última desigualdade.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} E_\ell(t,\xi)|\hat{u}(\cdot,\xi)|^2 dt &= \int_{\mathbb{T}^n} \Big|i\sum_{j=1}^m a_{\ell j}(t)\xi_j\hat{u}(t,\xi)\Big|^2 dt \\ &\leq 2\int_{\mathbb{T}^n}\Big(\big|Y_\ell \hat{u}(t,\xi)\big|^2 + \big|\sum_{k=1}^n b_{\ell k}(t)\hat{u}_{t_k}(t,\xi)\big|^2\Big)dt. \qquad (1.32)\end{aligned}$$

Usando que $\left|\sum_{k=1}^n b_{\ell k}(t)\hat{u}_{t_k}(t,\xi)\right|^2 \leq C\sum_{k=1}^n |\hat{u}_{t_k}(t,\xi)|^2$, segue de (1.31), (1.32) e (1.28) que, para $\epsilon > 0$ dado, existe $C_\epsilon > 0$ tal que, para algum $\ell \in \{1,\ldots,N\}$, tem-se

$$\begin{aligned}\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} &\leq C_\epsilon e^{\epsilon\omega(|\xi|)}\Big(||Y_\ell\hat{u}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} + \sum_{k=1}^n ||\hat{u}_{t_k}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}\Big) \\ &\leq C_\epsilon e^{\epsilon\omega(|\xi|)}\Big(\sum_{\ell=1}^N ||Y_\ell\hat{u}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} + \sum_{k=1}^n ||\hat{u}_{t_k}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}\Big) \\ &= C_\epsilon e^{\epsilon\omega(|\xi|)}\int_{\mathbb{T}^n}\hat{f}(t,\xi)\overline{\hat{u}}(t,\xi)dt,\ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^m\setminus\{0\} \qquad (1.33)\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que para cada $\epsilon > 0$ dado, existe C_ϵ tal que

$$\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq C_\epsilon e^{\epsilon\omega(|\xi|)}\left\|\hat{f}(\cdot,\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{T}^n)},\ \forall\ \xi\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}. \qquad (1.34)$$

Como $f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m})$, segue de (1.34) e do Teorema 1.14 com $\alpha = 0$, que existe $\epsilon' > 0$ e $C > 0$ tais que, se escolhermos $\epsilon = \frac{\epsilon'}{2}$ e definirmos $\epsilon'' = \frac{\epsilon'}{2}$, então

$$\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq C_\epsilon e^{\epsilon\omega(|\xi|)}Ce^{-\epsilon'\omega(|\xi|)} = C_{\epsilon''}e^{-\epsilon''\omega(|\xi|)},\ \forall\ \xi\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}. \qquad (1.35)$$

Usando a fórmula

$$\hat{u}(\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{-it\cdot\tau}\hat{u}(t,\xi)dt$$

e (1.35), obtemos

$$|\hat{u}(\tau,\xi)| \leq C_{\epsilon''}e^{-\epsilon''\omega(|\xi|)},\ \forall\ (\tau,\xi)\in\mathbb{Z}^n\times(\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}). \qquad (1.36)$$

Precisaremos agora do seguinte resultado microlocal: Seja $\tau_0 \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Como P é elíptico em $(t,x,\tau_0,0)$ para todo $(t,x)\in\mathbb{T}^{n+m}$, temos que existem $C>0, c>0, \epsilon>0$ e um cone aberto da forma $\Gamma = \{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{n+m} : |\tau| > c|\xi|\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, contendo $(\tau_0, 0)$ (ver Apêndice B), tais que

$$|\hat{u}(\tau,\xi)| \leq Ce^{-\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)}, \ \forall \ (\tau,\xi) \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^{n+m}. \tag{1.37}$$

Retornamos agora para (1.36). Se $|\tau| < \frac{3}{2}c|\xi|$ e $\xi \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$, então

$$|\xi| = \frac{1}{2}|\xi| + \frac{1}{2}|\xi| > \frac{1}{3c}|\tau| + \frac{1}{2}|\xi| \geq c_1(|\tau| + |\xi|) \geq c_1|(\tau,\xi)|$$

sendo $c_1 = \min\{\frac{1}{3c}, \frac{1}{2}\}$.

Assim, como ω é uma função crescente, isso garante que $\omega(|\xi|) \geq \omega(c_1|(\tau,\xi)|)$.

Já que estamos supondo que ω satisfaz (1.12), segue que existem $D > 0$ e $t_0 > 0$ tais que $\forall \ \lambda \geq 1, \ \forall \ t \geq t_0 : \omega(\lambda t) \leq \lambda D \omega(t)$. Como $0 < c_1 < 1$, utilizamos a última desigualdade com $\lambda = \frac{1}{c_1} > 1$ e $t = c_1|(\tau,\xi)|$ para obtermos

$$\omega(|\xi|) \geq \omega(c_1|(\tau,\xi)|) \geq \frac{c_1}{D}\omega\left(\frac{1}{c_1}c_1|(\tau,\xi)|\right) = \frac{c_1}{D}\omega(|(\tau,\xi)|), \tag{1.38}$$

para todo $|\tau| < \frac{3}{2}c|\xi|$ tal que $|(\tau,\xi)| \geq \frac{1}{c_1}t_0$.

Para $|\tau| < \frac{3}{2}c|\xi|$, definimos

$$L_{\epsilon''} = \max\left\{\max_{|(\tau,\xi)| \leq \frac{1}{c_1}t_0} |\hat{u}(\tau,\xi)|e^{\epsilon''\frac{c_1\omega(|(\tau,\xi)|)}{D}}, C_{\epsilon''}\right\}$$

sendo que $C_{\epsilon''}$ foi obtido em (1.36). Logo, segue de (1.36) e de (1.38) que

$$|\hat{u}(\tau,\xi)| \leq L_{\epsilon''}e^{-\delta\omega(|(\tau,\xi)|}, \ \forall \ |\tau| < \frac{3}{2}c|\xi|, \tag{1.39}$$

com $\delta = \epsilon''\frac{c_1}{D}$. Isso e (1.37) mostram que P é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

Para completar a demonstração da suficiência, devemos demonstrar o Lema 1.18.

Demonstração do Lema 1.18.

Para demonstrarmos esse lema, definimos, para cada $\ell = 1, \ldots, N$,

$$D_\ell(t,\gamma) = \left(\sum_{r=1}^{k^\ell} a_{\ell j_r^\ell}(t)\gamma_r\right)^2, \ \forall \ t \in \mathbb{T}^n, \gamma \in \mathbb{R}^{k^\ell}.$$

Usando o fato que as funções D_ℓ são contínuas e $a_{\ell j_r^\ell}$, $r = 1, \ldots, k^\ell$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, segue que para cada $\ell \in \{1, \dots, N\}$ fixado, existe uma cobertura aberta $\{\mathcal{O}_{\ell\nu}\}_\nu$ da esfera unitária $S^{k^\ell - 1}$ e intervalos abertos correspondentes $\{\mathcal{V}_{\ell\nu}\}_\nu$ de $\mathbb{T}^n$ tais que

$$D_\ell(t, \gamma) \geq \alpha_{\ell\nu} > 0, \ \text{ para } t \in \mathcal{V}_{\ell\nu}, \ \gamma \in \mathcal{O}_{\ell\nu}. \tag{1.40}$$

Como $S^{k^\ell - 1}$ é um espaço compacto, para cada $\ell \in \{1, \dots, N\}$ existe um número finito de abertos $\mathcal{O}_{\ell\nu}, \ \nu = 1, \dots, p_\ell$, que cobrem $S^{k^\ell-1}$. Definimos então $\alpha_\ell = \min\{\alpha_{\ell\nu} : \ 1 \leq \nu \leq p_\ell\} > 0$ e temos que, para cada $\gamma \in S^{k^\ell - 1}$, existe $1 \leq \nu \leq p_\ell$ tal que $D_\ell(t, \gamma) \geq \alpha_\ell > 0$ para cada $t \in \mathcal{V}_{\ell\nu}$.

Definimos agora $\alpha = \min\{\alpha_\ell : \ell \in \{1, \dots, N\}\}$. Segue de (1.40) que, para cada $\gamma \in S^{k^\ell - 1}$, existe $\nu \in \{1, \dots, p_\ell\}$ satisfazendo

$$D_\ell(t, \gamma) \geq \alpha, \ \text{ para } t \in \mathcal{V}_{\ell\nu}. \tag{1.41}$$

Iremos ver agora como essa desigualdade ajuda a demonstrar o Lema 1.18. Seja $\xi \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$. Segue da nossa hipótese que para cada $\epsilon > 0$, existe uma constante $C_\epsilon > 0$ que depende de ξ e existe um índice $\ell_0 \in \{1, \dots, N\}$, $p_0 \in \{1, \dots, k^{\ell_0}\}$ de modo que

$$\left| \xi_{j^{\ell_0}_{p_0}} + v^{\ell_0}_{p_0} \cdot \xi''^{(\ell_0)} \right| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon\omega(|\xi''^{(\ell_0)}|)}. \tag{1.42}$$

Lembrando que $a_{\ell\, i^\ell_q} = \sum_{r=1}^{k^\ell} \lambda_r^{\ell\, i^\ell_q} a_{\ell\, j^\ell_r}$ e $v^\ell_p = (\lambda_p^{\ell\, i^\ell_1}, \dots, \lambda_p^{\ell\, i^\ell_{d^\ell}})$ para $q \in \{1, \dots, d^\ell\}$, $\ell \in \{1, \dots, N\}$, podemos escrever

$$E_{\ell_0}(t, \xi) \ = \ \Big(\sum_{q=1}^{k^{\ell_0}} a_{\ell_0\, j^{\ell_0}_q}(t) \big(\xi_{j^{\ell_0}_q} + v^{\ell_0}_q \cdot \xi''^{(\ell_0)} \big) \Big)^2.$$

Definindo $\beta_\nu = \xi_{j^{\ell_0}_\nu} + v^{\ell_0}_\nu \cdot \xi''^{(\ell_0)}, \ \nu = 1, \dots, k^{\ell_0}$, e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{k^{\ell_0}})$, obtemos

$$E_{\ell_0}(t, \xi) = D_{\ell_0}(t, \beta) = D_{\ell_0}(t, \frac{\beta}{|\beta|}|\beta|) = |\beta|^2 D_{\ell_0}(t, \frac{\beta}{|\beta|}) \geq |\beta_{p_0}|^2 D_{\ell_0}(t, \frac{\beta}{|\beta|}). \tag{1.43}$$

Logo, segue das propriedades da função $D_\ell(t, \gamma)$, de (1.43) e de (1.42) que existe uma família finita de conjuntos abertos $\mathcal{V}_{\ell\nu} \subset \mathbb{T}^n$, com $\ell \in \{1, \dots, N\}$, e $\nu \in \{1, \dots, p_\ell\}$ de modo que para cada $\xi \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$, encontramos ℓ_0 e ν_0 tais que

$$E_{\ell_0}(t, \xi) \geq \alpha C_\epsilon e^{-\epsilon\omega(|\xi|)}$$

para cada $t \in \mathcal{V}_{\ell_0\,\nu_0}$. Com essa desigualdade obtemos o Lema 1.18 se, para $\ell \in \{1,\dots,N\}$, $\nu \in \{1,\dots,p_\ell\}$, considerarmos $\delta = \min\{\mathrm{vol}(\mathcal{V}_{\ell\,\nu})\}$. A demonstração está completa. ∎

Antes de darmos nosso próximo exemplo, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.19 *Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é não expoencialmente Liouville, com expoente $\{\omega\}$, se, para cada $\epsilon > 0$ dado, existir $C_\epsilon > 0$ tal que para cada $\eta \in \mathbb{Z}$ e cada $\xi \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$,*

$$|\eta + v \cdot \xi| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon\omega(|\xi|)}. \tag{1.44}$$

Exemplo 1.20 *Seja ω uma função peso satisfazendo* (1.12) *e, para $(t,x) \in \mathbb{T}^{n+3}$, consideramos o operador*

$$P = -\Delta_t - \sum_{\ell=1}^{2}\Big(\sum_{j=1}^{3} a_{\ell\,j}(t)\partial_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell\,k}(t)\partial_{t_k}\Big)^2$$

sendo que $a_{11}(t) = a(t) \not\equiv 0$, $a_{12}(t) = \alpha a(t)$, $a_{13}(t) = \beta a(t)$, $a_{21}(t) = c(t) \not\equiv 0$, $a_{22}(t) = \frac{1}{2}c(t)$, $a_{23}(t) = \frac{2}{3}c(t)$, e $b_{\ell\,k}(t)$ como no enunciado do Teorema 1.5. Estamos asumindo que $u = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ é não expoencialmente Liouville, com expoente $\{\omega\}$.

Logo, temos $\mathcal{A}_1 = \{1\}, \mathcal{B}_1 = \{2,3\}, \mathcal{A}_2 = \{1\}, \mathcal{B}_2 = \{2,3\}$; portanto, obtemos $k^1 = k^2 = 1, d^1 = d^2 = 2$. Além disso, $v_1^1 = (\lambda_1^{12}, \lambda_1^{13}) = (\alpha,\beta)$, $v_1^2 = (\lambda_1^{22}, \lambda_1^{23}) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.

Mostraremos que a coleção v_1^1, v_1^2 é não simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com respeito à coleção de conjuntos $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$. Considere $\epsilon > 0$ e $\xi \in \mathbb{Z}^3\backslash\{0\}$, com $\xi''^{(1)} = (\xi_2,\xi_3) \neq (0,0)$. Segue do fato de $v_1^1 = (\alpha,\beta)$ ser não exponencialmente Liouville, com expoente $\{\omega\}$, que

$$|\xi_1 + v_1^1 \cdot \xi''^{(1)}| = |\xi_1 + v_1^1 \cdot (\xi_2,\xi_3)| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon\omega(|(\xi_2,\xi_3)|)}.$$

Agora, se $\xi''^{(1)} = (\xi_2,\xi_3) = (0,0)$, então

$$|\xi_1 + v_1^1 \cdot \xi''^{(1)}| = |\xi_1| \geq 1 = e^{-\epsilon 0} = e^{-\epsilon\omega(0)}.$$

A demonstração de nossa afirmação está completa. Assim, por (I) do Teorema 1.5, podemos concluir que o operador P é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{2+3}$.

Corolário 1.21 *Sejam ω e P como no Teorema 1.5 e defina*

$$Q_\ell = -\Delta_t - \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t)\partial_{x_j}\Big)^2,\ \ell = 1,\dots,N.$$

Se existe $\ell_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tal que Q_{ℓ_0} é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$, então P é globalmente $\{\omega\}$-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$.

A demonstração desse resultado pode ser feita seguindo as mesmas linhas da demonstração do Teorema 1.1 em [HP1] junto com a próxima observação.

Observação 1.22 *Considere uma coleção de vetores $v_1^\ell, \ldots, v_{k^\ell}^\ell \in \mathbb{R}^{d^\ell}$, $\ell = 1, \ldots, N$ e uma coleção de conjuntos $\mathcal{A}_\ell = \left\{j_1^\ell < \ldots < j_{k^\ell}^\ell\right\}$ e $\mathcal{B}_\ell = \left\{i_1^\ell < \ldots < i_{d^\ell}^\ell\right\}$ como na Definição 1.2. Se existe $\ell_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tal que a coleção de vetores $v_1^{\ell_0}, \ldots, v_{k^{\ell_0}}^{\ell_0}$ é não simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com relação à coleção de conjuntos $\{A_{\ell_0}, B_{\ell_0}\}$, então a coleção dos vetores $v_1^\ell, \ldots, v_{k^\ell}^\ell \in \mathbb{R}^{d^\ell}$, $\ell = 1, \ldots, N$ é não simultaneamente aproximável com expoente $\{\omega\}$, com relação à coleção de conjuntos $\{A_\ell, B_\ell\}_{\ell=1}^N$.*

1.4 Demonstração do Teorema 1.9

Suponha que $u \in D'(\mathbb{T}^{n+m})$ satisfaz $Pu = f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m})$. Aplicamos a transformada parcial e Fourier na variável x na igualdade $Pu = f$ e concluímos que

$$-\sum_{\ell=1}^{N} Y_\ell^2 \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^m, \tag{1.45}$$

sendo que

$$Y_\ell = i \sum_{j=1}^{m} a_{\ell j}(t) \xi_j + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell k}(t) \partial_{t_k}, \ \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Afirmamos que, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^m$, o operador definido em (1.45) é elíptico com respeito à variável t. De fato, basta usarmos a hipótese (i), já que o símbolo principal desse operador é

$$\sum_{\ell=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{\ell\, k}(t) \tau_k \right)^2$$

Como $\hat{f}(t, \xi) \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ e como o operador definido em (1.45) é elíptico com respeito à variável t, segue que $\hat{u}(t, \xi) \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n)$ para cada $\xi \in \mathbb{Z}^m$ (usamos a versão peródica do Corolário 3.16 em [AJO2] no caso não-quase-analítica e do Teorema 4.8 em [AJO1] no caso quase-analítica). Agora multiplicamos ambos os lados de (1.45) por $\bar{\hat{u}}(t, \xi)$, integramos por partes na variável $t \in \mathbb{T}^n$ e usamos a hipótese $\sum_{k=1}^{n} \partial_{t_k} b_{\ell k} \equiv 0$ para cada $\ell = 1, \ldots, N$ para obtermos (veja os argumentos do Apêndice A)

$$\sum_{\ell=1}^{N} \|Y_\ell \hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \int_{\mathbb{T}^n} \hat{f}(t,\xi)\hat{\bar{u}}(t,\xi)dt. \tag{1.46}$$

Para concluirmos que $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{m+n})$, mostraremos que existem constantes $\epsilon > 0$ e $C > 0$ tais que

$$|\hat{u}(\tau,\xi)| \leq Ce^{-\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)},\ \forall\ (\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m}. \tag{1.47}$$

Graças à hipótese (i), o operador P é elíptico em $(t,x,\tau_0,0)$ para cada $(t,x) \in \mathbb{T}^{n+m}$ e $\tau_0 \neq 0$. Assim, como fizemos na demonstração do Teorema 1.5, podemos concluir que existem constantes positivas L_0, C, ϵ e um cone aberto $\Gamma = \{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{n+m} : |\tau| > L_0|\xi|\}$ contendo $(\tau_0, 0)$ tal que

$$|\hat{u}(\tau,\xi)| \leq Ce^{-\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)},\ \forall\ (\tau,\xi) \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^{n+m}. \tag{1.48}$$

Agora iremos mostrar que a estimativa (1.48) permanece válida para $(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m}$ tal que $(\tau,\xi) \notin \Gamma$, para novas constantes $C, \epsilon > 0$.

Assuma que $(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m} \setminus \Gamma$. Usando a identidade de Parseval obtemos

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} |\hat{u}(\eta,\xi)|^2 \\ &= \sum_{\substack{\eta\in\mathbb{Z}^n \\ |\eta|>L_0|\xi|}} |\hat{u}(\eta,\xi)|^2 + \sum_{\substack{\eta\in\mathbb{Z}^n \\ |\eta|\leq L_0|\xi|}} |\hat{u}(\eta,\xi)|^2 \\ &\doteq S1 + S2. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Na parcela S_1 temos $(\eta,\xi) \in \Gamma$, já que $|\eta| > L_0|\xi|$ e também vale $|\tau| \leq |\eta|$, pois se $|\tau| > |\eta|$, então teríamos $(\tau,\xi) \in \Gamma$.

Usando a desigualdade (1.48), concluímos que existem $\epsilon > 0, C > 0$ tais que

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{\eta\in\mathbb{Z}^n \\ |\eta|>L_0|\xi|}} |\hat{u}(\eta,\xi)|^2 \\ &= e^{-\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)} \sum_{|\eta|>L_0|\xi|} e^{\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)}\, |\hat{u}(\eta,\xi)|^2 \\ &\leq C^2 e^{-\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)} \sum_{|\eta|>L_0|\xi|} e^{\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)} e^{-2\epsilon\omega(|(\eta,\xi)|)}. \end{aligned}$$

Agora usamos que ω é crescente, que em S_1 vale $|\tau| \leq |\eta|$ e que $|(\eta, \xi)| \geq |\eta|$ para obtermos que

$$\begin{aligned} S_1 &\leq C^2 e^{-\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)} \sum_{|\eta|>L_0|\xi|} e^{-\epsilon\omega(|(\eta,\xi)|)} \\ &\leq C^2 e^{-\epsilon\omega(|(\tau,\xi)|)} \sum_{|\eta|>L_0|\xi|} e^{-\epsilon\omega(|\eta|)}, \end{aligned} \tag{1.50}$$

Mostraremos que a série $\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \exp\left(-\epsilon\,\omega(|\eta|)\right)$ é convergente.

De fato, como ω é uma função peso, temos que $\log(t) = o(\omega(t))$ quando $t \longrightarrow \infty$. Em particular, existe $A > 1$ de modo que

$$\log(t) \leq \frac{\epsilon}{n+1}\omega(t),\ \forall\, t \geq A,$$

sendo que n é a dimensão do toro $\mathbb{T}^n$. Com isso obtemos $-(n+1)\log(t) \geq -\epsilon\,\omega(t)$ para todo $t \geq A$. Segue que $\log t^{-(n+1)} \geq -\epsilon\,\omega(t)$ para cada $t \geq A$ e portanto $t^{-(n+1)} \geq e^{-\epsilon\,\omega(t)}$ para todo $t \geq A$. Finalmente obtemos

$$\sum_{|\eta|\geq A} e^{-\epsilon\,\omega(|\eta|)} \leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} \frac{1}{|\eta|^{n+1}} < \infty.$$

A demonstração de que a série $\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \exp\left(-\epsilon\omega(|\eta|)\right)$ converge está completa.

Segue do que acabamos de fazer e de (1.50) que existem constantes $\epsilon > 0, C > 0$ tais que

$$S_1 \leq Ce^{-\epsilon\,\omega(|(\tau,\xi)|)}. \tag{1.51}$$

Observamos que ϵ e C são independentes de τ e ξ.

Agora, para S_2, se considerarmos a transformada de Fourier com relação a t e x em Y_1u obtemos

$$\widehat{Y_1u}(\eta,\xi) = i\left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\xi_j + \sum_{k=1}^{n} b_{1k}\eta_k\right)\hat{u}(\eta,\xi). \tag{1.52}$$

Segue de (1.52) e da nossa hipótese (ii) que para cada $\epsilon' > 0$ dado, existe $C'_\epsilon > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{\substack{\eta\in\mathbb{Z}^n,\\ |\eta|\leq L_0|\xi|}} |\hat{u}(\eta,\xi)|^2 \\
&\leq C_{\epsilon'}^{-2} \sum_{\substack{\eta\in\mathbb{Z}^n,\\ |\eta|\leq L_0|\xi|}} e^{2\epsilon'\omega(|(\eta,\xi)|)}|\widehat{Y_1 u}(\eta,\xi)|^2 \\
&\leq C_{\epsilon'}^{-2} \sum_{\substack{\eta\in\mathbb{Z}^n,\\ |\eta|\leq L_0|\xi|}} e^{2\epsilon'\omega((1+L_0)|\xi|)}|\widehat{Y_1 u}(\eta,\xi)|^2, \qquad (1.53)
\end{aligned}$$

sendo que na última desigualdade usamos que ω é uma função crescente e que $|\eta| \leq L_0|\xi|$.

Como ω é uma função peso, segue que existe $L > 0$ satisfazendo

$$\omega(2t) \leq L(\omega(t) + 1),\ \forall\ t \geq 0.$$

Considerando $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{(1 + L_0)} \leq 2^p$ e se aplicarmos a última desigualdade p vezes podemos concluir que $L' = L + L^2 + \cdots + L^p$ é uma constante positiva que satisfaz

$$\omega(\sqrt{1+L_0}|\xi|) \leq L'\omega(|\xi|) + L',\ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^m. \qquad (1.54)$$

Definindo $C_{\epsilon'} = C_{\epsilon'}^{-2} e^{2\epsilon' L'}$ e usando (1.53), (1.54) e a identidade de Parseval podemos concluir que para cada $\epsilon' > 0$, existe $C_{\epsilon'} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq C_{\epsilon'} e^{2\epsilon' L'\omega(|\xi|)} \sum_{\substack{\eta\in\mathbb{Z}^n,\\ |\eta|\leq L_0|\xi|}} |\widehat{Y_1 u}(\eta,\xi)|^2 \\
&\leq C_{\epsilon'} e^{2\epsilon' L'\omega(|\xi|)} \left\|\widehat{Y_1 u}(\cdot,\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \\
&\leq C_{\epsilon'} e^{2\epsilon' L'\omega(|\xi|)} \left(\sum_{\ell=1}^{N} \left\|\widehat{Y_\ell u}(\cdot,\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}\right).
\end{aligned}$$

Agora, usamos (1.46) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz para concluir que para cada $\epsilon' > 0$

dado, existe uma constante $C_{\epsilon'} > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
S_2 &\leq C_{\epsilon'} e^{2\epsilon' L' \omega(|\xi|)} \left| \int_{\mathbb{T}^n} \hat{f}(t,\xi)\hat{u}(t,\xi)dt \right| \\
&\leq C_{\epsilon'} e^{2\epsilon' L' \omega(|\xi|)} \left\| \hat{f}(\cdot,\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \left\| \bar{\hat{u}}(\cdot,\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \\
&\leq \frac{1}{2} C_{\epsilon'}^2 e^{4\epsilon' L' \omega(|\xi|)} \left\| \hat{f}(\cdot,\xi) \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} + \frac{1}{2} \left\| \bar{\hat{u}}(\cdot,\xi) \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}.
\end{aligned} \tag{1.55}
$$

De (1.49), (1.51) e (1.55) concluímos que existem constantes $\epsilon > 0$, $C > 0$ de modo que para cada $\epsilon' > 0$ dado, existe uma constante $C_{\epsilon'} > 0$ satisfazendo

$$
\begin{aligned}
\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} &\leq C e^{-\epsilon\,\omega(|(\tau,\xi)|)} + \frac{1}{2} C_{\epsilon'}^2 e^{4\epsilon' L' \omega(|\xi|)} \left\| \hat{f}(\cdot,\xi) \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \\
&+ \frac{1}{2} \left\| \bar{\hat{u}}(\cdot,\xi) \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}.
\end{aligned}
$$

Concluímos, então, que existem constantes $\epsilon > 0$, $C > 0$ de modo que para cada $\epsilon' > 0$ dado, existe uma constante $C_{\epsilon'} > 0$ satisfazendo

$$
\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq C e^{-\epsilon\,\omega(|(\tau,\xi)|)} + C_{\epsilon'} e^{4\epsilon' L' \omega(|\xi|)} \left\| \hat{f}(\cdot,\xi) \right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)}. \tag{1.56}
$$

Como $f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^{n+m})$, segue do Teorema 1.14 que existem $\epsilon'' > 0$ e $C'' > 0$ tais que

$$
||\hat{f}(\cdot,\xi)||^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq C'' e^{-2\epsilon'' \omega(|\xi|)}, \ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^m. \tag{1.57}
$$

Usando (1.56) e (1.57) obtemos

$$
\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq C e^{-\epsilon\,\omega(|(\tau,\xi)|)} + C_{\epsilon'} e^{4\epsilon' L' \omega(|\xi|)} C'' e^{-2\epsilon'' \omega(|\xi|)}.
$$

Dessa forma, escolhendo $\epsilon' \leq \frac{\epsilon''}{4L'}$, podemos concluir que existem constantes $\epsilon > 0, \epsilon'' > 0, C > 0, C_{\epsilon''} > 0$ tais que

$$
\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq C e^{-\epsilon\,\omega(|(\tau,\xi)|)} + C_{\epsilon''} e^{-\epsilon'' \omega(|\xi|)}, \ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^m. \tag{1.58}
$$

Como $(\tau,\xi) \notin \Gamma$, temos que $|\tau| \leq L_0|\xi|$ e portanto $|(\tau,\xi)| \leq \sqrt{1+L_0^2}|\xi|$. Assim, $\omega(|(\tau,\xi)|) \leq \omega(\sqrt{1+L_0^2}|\xi|) \leq L''\omega(|\xi|) + L''$ (sendo que a constante $L'' > 0$ é obtida da mesma forma como fizemos em (1.54)). Concluímos então que $-\epsilon'' w(|\xi|) \leq \frac{-\epsilon''}{L''}\omega(|(\tau,\xi)|) + \epsilon''$. Agora definimos $2\delta = \min\left\{\epsilon, \frac{\epsilon''}{L''}\right\}$ e $C_\delta^2 = \max\left\{C, C_{\epsilon''} e^{\epsilon''}\right\}$ e segue de (1.58) que existem $\delta > 0$ e $C_\delta > 0$ tais, que para todo $(\tau,\xi)\notin\Gamma$, vale

$$\begin{aligned}\|\hat{u}(\cdot,\xi)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} &\leq Ce^{-\epsilon\,\omega(|(\tau,\xi)|)}+C_{\epsilon''}e^{-\epsilon''\omega(|\xi|)}\\ &\leq Ce^{-\epsilon\,\omega(|(\tau,\xi)|)}+C_{\epsilon''}e^{\frac{-\epsilon''}{L''}\omega(|(\tau,\xi)|)+\epsilon''}\\ &\leq 2C_\delta^2e^{-2\delta\omega(|(\tau,\xi)|)}. \end{aligned}\tag{1.59}$$

Note que

$$|\hat{u}(\tau,\xi)|=\left|\int_{t\in\mathbb{T}^n}e^{-it\cdot\tau}\hat{u}(t,\xi)dt\right|\leq c_0||\hat{u}(\cdot,\xi)||_{L^2(\mathbb{T}^n)}\tag{1.60}$$

sendo que a constante c_0 não depende nem de ξ e nem de τ.

Definindo $C'_\delta=c_0\sqrt{2}C_\delta$ segue de (1.59) e de (1.60) que existem constantes $\delta>0$ e $C'_\delta>0$ satisfazendo

$$|\hat{u}(\tau,\xi)|\leq C'_\delta e^{-\delta\omega(|(\tau,\xi)|)},\ \forall\ (\tau,\xi)\notin\Gamma.$$

Com essa desigualdade e (1.48) a demonstração do Teorema 1.9 está completa. ∎

Exemplo 1.23 *Recorde que, como mencionado anteriormente, com as devidas adaptações, a versão C^∞ do Teorema 1.9 é válida. Para este caso, a fórmula* (1.11) *da condição (ii) é dada por: existem $C>0$ e $K>0$ tais que*

$$\left|\sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j+\sum_{k=1}^n b_{1k}\tau_k\right|\geq\frac{C}{|(\tau,\xi)|^K},\ \forall\ (\tau,\xi)\in\mathbb{Z}^{n+m}\backslash\{0\}.\tag{1.61}$$

Mostraremos uma maneira de obtermos (1.61)*. Seja $X_1=\sum_{j=1}^{n+m}a_j(y)\partial_{y_j}$ definido em $\mathbb{T}^{n+m}$, com $a_j(y)\in C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$ sendo real para todo j. Assuma que ${}^tX_1$ é globalmente C^∞-hipoelíptico em $\mathbb{T}^{n+m}$. Segue do Teorema 1.3 em [CC] que existe um difeomorfismo $\tau:\mathbb{T}^{n+m}\to\mathbb{T}^{n+m}$, $y=\tau(x,t)$ de modo que*

$$\sum_{j=1}^{n+m}a_j(y)\partial_{y_j}=\sum_{p=1}^m a_p\partial_{x_p}+\sum_{k=1}^n b_k\partial_{t_k},$$

sendo que a_p e b_k são números reais satisfazendo a seguinte condição Diofantina: existem $N_0>0$ e $C_0>0$ tais que

$$|\sum_{p=1}^m a_p\xi_p+\sum_{k=1}^n b_k\tau_k|\geq\frac{C_0}{(1+|(\xi,\tau)|)^{N_0}},\ \ \forall\ (\tau,\xi)\in\mathbb{Z}^{n+m}\backslash\{0\}.$$

Agora basta observar que existe $C > 0$ tal que

$$|\sum_{p=1}^{m} a_p\xi_p + \sum_{k=1}^{n} b_k\tau_k| \geq \frac{C_0}{(1+|(\xi,\tau)|)^{N_0}} \geq \frac{C}{|(\xi,\tau)|^{N_0}}, \ \ \forall\ (\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^{n+m}\backslash\{0\}.$$

Observação 1.24 *Até o momento, não temos conhecimento se existe na literatura uma versão Gevrey ou ultradiferenciável do Teorema 1.3 em [CC], mas acreditamos fortemente que isto é verdade em ambas as classes.*

Capítulo 2

Perturbações por Operadores Pseudodiferenciais

2.1 Definições e Propriedades Básicas dos Operadores Pseudodiferenciais

Nesta seção iremos introduzir uma nova classe de operadores pseudodiferenciais C^∞ a qual foi inspirada nos artigos: "N. Braun Rodrigues, G. Chinni, P. D. Cordaro, M. R. Jahnke, *Lower order perturbation and global analytic vectors for a class of globally analytic hypoelliptic operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (12) (2016) 5159-5170 ([BCCJ]) e Chinni, G., Cordaro, P. D., *On Global Analytic and Gevrey Hypoellipticity on the Torus and the Métivier Inequality*, Communications in Partial Differential Equations, **42** (2017), 121-141 ([ChC]).

Dado um operador linear e contínuo $A : C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right) \longrightarrow C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$, vamos considerar $k \in D'\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N\right)$ o seu núcleo distribuição de Schwartz, ou seja, k é a única distribuição periódica que satisfaz

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle k, \psi \otimes \varphi\rangle\,,\ \forall\ \varphi, \psi \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Além disso, denotaremos por $a(x, \eta)$ o símbolo discreto de A, o qual é definido por

$$a(x, \eta) = e^{-ix\cdot\eta}A(e^{ix\cdot\eta}) \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right),\ \forall\ \eta \in \mathbb{Z}^N.$$

Usando séries de Fourier e denotando o operador A por $a(x, D)$ podemos escrever

$$a(x,D)u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi} \Big(\sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} \hat{a}(\xi - \eta, \eta)\hat{u}(\eta) \Big), \tag{2.1}$$

isto é $\widehat{a(x,D)}u(\xi) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} \widehat{a}(\xi - \eta, \eta)\hat{u}(\eta)$.

Observe que

$$\begin{aligned}
\widehat{k}(\xi,\eta) &= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \left\langle k(x,y), e^{-i\langle (x,y),(\xi,\eta)\rangle} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \left\langle k(x,y), e^{-i\langle x,\xi\rangle} \otimes e^{-i\langle y,\eta\rangle} \right\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \left\langle (Ae^{-i\langle \cdot,\eta\rangle})(x), e^{-i\langle x,\xi\rangle} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \left\langle e^{-i\langle x,\eta\rangle} a(x,-\eta), e^{-i\langle x,\xi\rangle} \right\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-i\langle x,(\eta+\xi)\rangle} a(x,-\eta)dx = \frac{1}{(2\pi)^N} \widehat{a}(\eta+\xi,-\eta).
\end{aligned}$$

Assim,

$$(2\pi)^N \widehat{k}(\xi,\eta) = \widehat{a}(\xi+\eta,-\eta), \ \forall\, \xi,\eta \in \mathbb{Z}^N. \tag{2.2}$$

Proposição 2.1 *Fixado $\sigma \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações sobre o símbolo discreto e o núcleo distribuição de um operador linear e contínuo $A : C^\infty(\mathbb{T}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N)$ são equivalentes:*

(i) Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, existe uma constante $C_\alpha > 0$ de modo que

$$|D_x^\alpha a(x,\eta)| \leq C_\alpha (1+|\eta|)^\sigma, \ \forall\, \eta \in \mathbb{Z}^N, x \in \mathbb{T}^N. \tag{2.3}$$

(ii) Dado $M \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_M > 0$ tal que

$$|\hat{a}(\xi,\eta)| \leq \frac{C_M}{(1+|\xi|)^M} (1+|\eta|)^\sigma, \ \forall\, \xi,\eta \in \mathbb{Z}^N. \tag{2.4}$$

(iii) Dado $M \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_M > 0$ tal que

$$\left|\hat{k}(\xi,\eta)\right| \leq \frac{C_M}{(1+|\xi+\eta|)^M} (1+|\eta|)^\sigma, \ \forall\, \xi,\eta \in \mathbb{Z}^N. \tag{2.5}$$

Demonstração. Suponha que (2.3) seja válido e vamos verificar a validade de (2.4). Considere $M \in \mathbb{Z}_+$. Dado $\xi \in \mathbb{Z}^N$, existe $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ de modo que $|\xi|^M \leq c_0^M |\xi^\alpha|$ e $|\alpha| = M$, sendo que c_0 depende apenas da dimensão N. De fato, seja $j \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $\xi_j = \max_{1 \leq k \leq N}\{\xi_k\}$. Se

e_j é o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^N$, consideramos $\alpha = Me_j$ e temos

$$|\xi|^{2M} = \left(|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_N|^2\right)^M \leq N^M |\xi_j|^{2M} = N^M |\xi^\alpha|^2 .$$

A afirmação segue se extrairmos a raiz quadrada nessa desigualdade e se considerarmos $c_0 = N^{1/2}$. Daí, se $B_M = \max_{|\alpha|=M} C_\alpha$, então

$$\begin{aligned} |\xi|^M |\hat{a}(\xi,\eta)| &\leq c_0^M |\widehat{D_x^\alpha a}(\xi,\eta)| = c_0^M (2\pi)^{-N} \Big| \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot\xi} D_x^\alpha a(x,\eta) dx \Big| \\ &\leq c_0^M (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{T}^N} |D_x^\alpha a(x,\eta)|\, dx \leq c_0^M B_M (1+|\eta|)^\sigma, \end{aligned}$$

de onde concluímos (2.4). Reciprocamente, suponha que (2.4) seja válido e vamos mostrar a validade de (2.3). Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha a(x,\eta)| &= |D_x^\alpha \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \hat{a}(\xi,\eta) e^{ix\cdot\xi}| \leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} |\hat{a}(\xi,\eta)|\, |\xi|^{|\alpha|} \\ &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\}} \frac{C_{N+1+|\alpha|}}{(1+|\xi|)^{N+1+|\alpha|}} (1+|\eta|)^\sigma |\xi|^{|\alpha|} \\ &\leq C_{N+1+|\alpha|} \Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\}} \frac{1}{(1+|\xi|)^{N+1}} \Big) (1+|\eta|)^\sigma, \ \forall\, \eta \in \mathbb{Z}^N, x \in \mathbb{T}^N, \end{aligned}$$

e portanto obtemos a estimativa (2.3). A equivalência entre (2.5) e (2.4) segue imediatamente de (2.2) e a demonstração está completa. □

Definição 2.2 *Definimos o conjunto $S^\sigma\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$ como sendo o conjunto dos símbolos discretos $a(x,\eta)$ que satisfazem (2.3) e $\mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ como sendo o espaço dos operadores $a(x,D)$ que possuem ordem σ e cujos símbolos discretos pertencem a $S^\sigma\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$.*

Proposição 2.3 *Sejam $a \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ e $b \in \mathfrak{Dp}_{\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Então, $a(x,D)\circ b(x,D) \in \mathfrak{Dp}_{\sigma+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e o símbolo discreto deste operador é dado por*

$$a\#b(x,\eta) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} a(x,\xi) \hat{b}(\xi-\eta,\eta) \in S^{\sigma+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right).$$

Demonstração.

Mostraremos primeiro que $a\#b$ dado acima define um elemento de $S^{\sigma+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$. Pela Proposição 2.1, conseguimos constantes positivas, $C_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, de modo que, dado $M \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_M > 0$ satisfazendo

$$
\begin{aligned}
|D_x^\alpha(a\#b)(x,\eta)| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\binom{\alpha}{\beta}|\xi-\eta|^{|\beta|}\left|D_x^{\alpha-\beta}a(x,\xi)\right||\hat{b}(\xi-\eta,\eta)| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\binom{\alpha}{\beta}|\xi-\eta|^{|\beta|}C_{\alpha-\beta}(1+|\xi|)^{\sigma}C_M\left(1+|\xi-\eta|\right)^{-M}(1+|\eta|)^{\sigma'} \\
&\leq (1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'}\sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\binom{\alpha}{\beta}(1+|\xi-\eta|)^{|\beta|-M}C_{\alpha-\beta}C_M\frac{(1+|\xi|)^{\sigma}}{(1+|\eta|)^{\sigma}}.
\end{aligned}
$$

Usamos agora a desigualdade

$$
(1+|\xi|)^{\sigma}\leq(1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|}(1+|\eta|)^{\sigma},\ \forall\ \xi,\eta\in\mathbb{Z}^N,
$$

para concluirmos que

$$
|D_x^\alpha(a\#b)(x,\eta)|\leq(1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'}\sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}C_{\alpha-\beta}C_M\binom{\alpha}{\beta}(1+|\xi-\eta|)^{|\beta|-M+|\sigma|}.
$$

Escolhemos $M=|\alpha|+K$, com $K\in\mathbb{N}$ de modo que $-K+|\sigma|\leq -N-1$ e $C'_\alpha=\max_{\beta\leq\alpha}C_\alpha C_M$ e temos

$$
\begin{aligned}
|D_x^\alpha(a\#b)(x,\eta)| &\leq (1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'}\sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}C_{\alpha-\beta}C_M\binom{\alpha}{\beta}(1+|\xi-\eta|)^{|\beta|-M+|\sigma|} \\
&= (1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'}\sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}C_{\alpha-\beta}C_M\binom{\alpha}{\beta}(1+|\xi-\eta|)^{|\beta|-|\alpha|-K+|\sigma|} \\
&\leq 2^{|\alpha|}C'_\alpha(1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^{-N-1}.
\end{aligned}
$$

, Como $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^{-N-1}=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|)^{-N-1}<\infty$, i,sso nos permite concluir que que $a\#b\in S^{\sigma+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\times\mathbb{Z}^N\right)$.

De (2.1), sabemos que $b\widehat{(x,D)}u(\xi)=\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\hat{b}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
a(x,D)\circ b(x,D)u(x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}a(x,\xi)b\widehat{(x,D)}u(\xi)e^{ix\cdot\xi}=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}a(x,\xi)\hat{b}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)e^{ix\cdot\xi} \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}a(x,\xi)\hat{b}(\xi-\eta,\eta)e^{ix\cdot(\xi-\eta)}\big)\hat{u}(\eta)e^{ix\cdot\eta},
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Agora vamos mostrar que se $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$, então o transposto de $a(x,D)$ é um elemento de $\mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$.

O transposto de $a(x,D)$ é o operador $a^t(x,D)$ que satisfaz

$$\langle a(x,D)f,g\rangle = \left\langle f, a^t(x,D)g\right\rangle,\ \forall\ f,g \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ o produto interno em $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{T}^N\right)$. O adjunto formal em L^2 de $a(x,D)$ é o operador $a^*(x,D)$ que satisfaz

$$\langle a(x,D)f,g\rangle_0 = \langle f, a^*(x,D)g\rangle_0,\ \forall\ f,g \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Observe que se $f,g \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$, então

$$\langle f,g\rangle_0 = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)\overline{g(x)}dx = \langle f,\overline{g}\rangle.$$

Dessa forma, como

$$\langle a(x,D)f,g\rangle = \langle a(x,D)f,\overline{g}\rangle_0 = \langle f, a^*(x,D)(\overline{g})\rangle_0 = \left\langle f, \overline{a^*(x,D)(\overline{g})}\right\rangle$$

para todas $f,g \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$, segue que $a^t(x,D)g = \overline{a^*(x,D)\overline{g}}$. Se $g_\xi(x) = e^{-ix\cdot\xi}$, temos que

$$\begin{aligned} a^t(x,\eta) &= e^{-i\langle x,\eta\rangle}a^t(x,D)e^{i\langle x,\eta\rangle} = e^{-i\langle x,\eta\rangle}\overline{a^*(x,D)e^{-i\langle x,\eta\rangle}} \\ &= \overline{e^{i\langle x,\eta\rangle}a^*(x,D)e^{-i\langle x,\eta\rangle}} = \overline{a^*(x,-\eta)}. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \widehat{a^t}(\xi,\eta) &= (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{T}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle}a^t(x,\eta)dx = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{T}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\overline{a^*(x,-\eta)}dx \\ &= \overline{(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{T}^N} e^{i\langle x,\xi\rangle}a^*(x,-\eta)dx} = \overline{\widehat{a^*}(-\xi,-\eta)} \end{aligned}$$

Segue de Cordaro e Chinni [ChC], página 12, que

$$\widehat{a^*}(\xi,\eta) = \overline{\hat{k}(\eta,-(\xi+\eta))},$$

sendo que k é o núcleo distribuição de $a(x,D)$. Logo,

$$\widehat{a^t}(\xi,\eta) = \overline{\widehat{a^*}(-\xi,-\eta)} = \hat{k}(-\eta,\xi+\eta).$$

Como $(2\pi)^N \hat{k}(\xi,\eta) = \hat{a}(\xi+\eta,-\eta)$, concluímos que se $a(x,\xi) \in S^\sigma\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$, então dado $L \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_L > 0$ de modo que

$$\left|\hat{k}(\xi,\eta)\right| = (2\pi)^{-N} \left|\hat{a}(\xi+\eta,-\eta)\right| \leq \frac{C_L}{(1+|\xi+\eta|)^L}(1+|\eta|)^\sigma.$$

Logo, dado $M \in \mathbb{Z}_+$, existe $C_M > 0$ de modo que

$$|\widehat{a^t}(\xi,\eta)| = |\hat{k}(-\eta,\xi+\eta)| \leq \frac{C_M}{(1+|\xi|)^M}(1+|\xi+\eta|)^\sigma.$$

Sabemos que $(1+|\zeta|)^\sigma \leq (1+|\zeta+\tau|)^{|\sigma|}(1+|\tau|)^\sigma$ para todo $\zeta,\tau \in \mathbb{Z}^N$. Consideramos $\zeta = \xi+\eta$ e $\tau = -\eta$ para obtermos

$$(1+|\xi+\eta|)^\sigma \leq (1+|\xi|)^{|\sigma|}(1+|\eta|)^\sigma, \ \forall\ \xi,\eta \in \mathbb{Z}^N.$$

Assim,

$$|\widehat{a^t}(\xi,\eta)| \leq \frac{C_M}{(1+|\xi|)^M}(1+|\xi|)^{|\sigma|}(1+|\eta|)^\sigma,$$

e como M é arbitrária, obtemos que $a^t(x,\xi) \in S^\sigma\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$ e portanto o operador $a^t(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$. □

Proposição 2.4 *Seja $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$. Então, $a(x,D)$ define um operador linear e contínuo de $H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$ em $H^{t-\sigma}\left(\mathbb{T}^N\right)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. A demonstração segue facilmente da definição das normas de Sobolev e da propriedade do símbolo discreto do operador $a(x,D)$. □

2.1.1 Topologias fraca e forte em $D'(\mathbb{T}^N)$

Daremos aqui uma rápida recordação sobre as topologias fraca (weak) e forte (strong) em $D'(\mathbb{T}^N)$, dual do espaço $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Na topologia fraca em $D'(\mathbb{T}^N)$, temos que uma sequência $T_j \to 0$ em $D'(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, a sequência $\langle T_j,\varphi\rangle \to 0$ em $\mathbb{C}$ para qualquer $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Na topologia forte em $D'(\mathbb{T}^N)$, uma sequência $T_j \to 0$ em $D'(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, a sequência $\{\langle T_j, \varphi\rangle\}$ converge para zero uniformemente sobre todo conjunto limitado de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Nota-se que, como todo ponto é um conjunto limitado, então a topologia forte é mais fina do que a topologia fraca e, portanto, se uma sequência convergir na topologia forte então ela também convergirá na topologia fraca.

Como $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é um espaço métrico completo (logo de Baire e, portanto, tonelado) e, pelo teorema de Ascoli, todos seus subconjuntos limitados são relativamente compactos, temos que $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é de Montel. Segue do Corolário 1 da Proposição 34.6 em [T] que em $D'(\mathbb{T}^N)$ toda sequência que converge fracamente também converge fortemente. Assim, podemos concluir que, em $D'(\mathbb{T}^N)$, a convergência fraca e convergência forte são equivalentes.

2.1.2 Continuidade e composição

Começamos recordando o seguinte resultado, que pode ser encontrado em [T] (Corolário após Proposição 19.5):

Observação 2.5 *Sejam E e F dois espaços vetoriais topológicos e u uma aplicação linear contínua de E em F. Então,*

$$^t u : F' \to E'$$

é contínua quando os duais E' e F' estão munidos da topologia fraca (respectivamente com a topologia forte).

Proposição 2.6 *Se $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$, então $a(x,D)$ e $a^t(x,D)$ se estendem a um operador linear e contínuo de $D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ sobre si mesmo.*

Demonstração. Como $a^t(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ então sabemos que: $a^t(x,D) : C^\infty(\mathbb{T}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é contínua e, portanto, segue da Obervação 2.5 que $a(x,D)$ se estende continuamente de $D'(\mathbb{T}^N)$ sobre si mesmo, na topologia fraca que coincide com a topologia forte. Analogamente mostra-se o resultado para o transposto. $\square$

Proposição 2.7 *Sejam $a(x,\xi) \in S^\sigma\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$, $\varphi : \mathbb{T}^N \longrightarrow \mathbb{T}^N$ um difeomorfismo suave e $M : \mathbb{Z}^N \longrightarrow \mathbb{Z}^N$ um isomorfismo dado pela multiplicação de uma matriz inversível de ordem N com coeficientes inteiros. Então, $b(x,\xi) = a(\varphi(x), M\xi) \in S^\sigma\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$.*

Demonstração. A matriz M define um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^N$ sobre si mesmo e então existe $C > 1$ tal que

$$C^{-1}|\xi| \leq |M\xi| \leq C|\xi|, \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Daí, se $\sigma \geq 0$, então

$$(1+|M\xi|)^{\sigma} \leq (1+C|\xi|)^{\sigma} = (C(1/C+|\xi|))^{\sigma} = C^{\sigma}\left(1/C+|\xi|\right)^{\sigma} \leq C^{\sigma}\left(1+|\xi|\right)^{\sigma}.$$

Para $\sigma < 0$, temos

$$(1+|M\xi|)^{\sigma} \leq (1+C^{-1}|\xi|)^{\sigma} = \left(C^{-1}(C+|\xi|)\right)^{\sigma} = C^{-\sigma}\left(C+|\xi|\right)^{\sigma} \leq C^{-\sigma}\left(1+|\xi|\right)^{\sigma}.$$

Recordamos agora a fórmula de Faà di Bruno (ver [CS]): se $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g = (g_1, \dots, g_N) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ são funções de classe C^∞, então para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$ vale

$$\partial^{\alpha}(f \circ g)(x) = \sum_{|\beta|=1}^{|\alpha|} \partial^{\beta} f(g(x)) \sum_{\ell=1}^{|\alpha|} \sum_{P_\ell(\alpha,\beta)} \alpha! \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\left(\partial^{\gamma_j} g(x)\right)^{\sigma_j}}{\sigma_j! \gamma_j!^{|\sigma_j|}},$$

sendo que o conjunto $P_\ell(\alpha,\beta)$ é o conjunto formado pelos elementos $(\sigma_1, \dots, \sigma_\ell, \gamma_1, \dots, \gamma_\ell) \in \left(\mathbb{Z}_+^N\right)^{2\ell}$ que satisfazem $|\sigma_j| > 0$ para todo $j = 1, \dots, \ell$, $\sum_{j=1}^{\ell} \sigma_j = \beta$, $\sum_{j=1}^{\ell} |\sigma_j| \lambda_j = \alpha$ e $0 \prec \gamma_1 \prec \dots \prec \gamma_\ell$. Esta última notação possui o seguinte significado: se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, então $\alpha \prec \beta$ se vale uma das seguintes condições:

(1) $|\alpha| < |\beta|$;

(2) $|\alpha| = |\beta|$ e $\alpha_1 < \beta_1$;

(3) $|\alpha| = |\beta|$ e existe $j_0 \in \{1, \dots, N-1\}$ tal que $\alpha_j = \beta_j$ para todo $j = 1, \dots, j_0$ e $\alpha_{j_0} < \beta_{j_0}$.

Pela fórmula de Faà di Bruno, dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, temos

$$\begin{aligned} |D_x^{\alpha} b(x,\xi)| &= |D_x^{\alpha} a(\varphi(x), M\xi)| \\ &\leq \sum_{|\beta|=1}^{|\alpha|} \left|\partial^{\beta} a(\varphi(x), M\xi)\right| \sum_{\ell=1}^{|\alpha|} \sum_{P_\ell(\alpha,\beta)} \alpha! \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\left|\partial^{\gamma_j} \varphi(x)\right|^{|\sigma_j|}}{\sigma_j! \gamma_j!^{|\sigma_j|}} \end{aligned}$$

Como $\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$, podemos majorar o termo $\sum_{\ell=1}^{|\alpha|} \sum_{P_\ell(\alpha,\beta)} \alpha! \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\left|\partial^{\gamma_j} \varphi(x)\right|^{|\sigma_j|}}{\sigma_j! \gamma_j!^{|\sigma_j|}}$ por uma constante $B_\alpha > 0$ que depende apenas de φ e α. Como $a(x,\xi) \in S^{\sigma}\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{Z}^N\right)$, segue que, para uma nova constante $C_\alpha > 0$, vale

$$|D^\alpha b(x,\xi)| \leq C_\alpha \left(1+|M\xi|\right)^\sigma \leq C'_\alpha (1+|\xi|)^\sigma,\ \forall\, x\in\mathbb{T}^N, \xi\in\mathbb{Z}^N,$$

o que completa a demonstração. $\square$

2.2 Hipoelipticidade global com Perda de Derivadas

Nesta seção, iremos estudar a regularidade global de operadores pseudodiferenciais. Para o caso não periódico sugerimos o leitor ver [Pa].

Definição 2.8 *Dizemos que um operador pseudodiferencial $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas ($0 \leq r < +\infty$) se*

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall u\in D'(\mathbb{T}^N),\ a(x,D)u\in H^t(\mathbb{T}^N) \Longrightarrow u\in H^{t+\sigma-r}(\mathbb{T}^N). \tag{2.6}$$

Quando $0 \leq r < \sigma$, escrevemos $\epsilon = \sigma - r$ e, neste caso, dizemos que o operador $a(x,D)$ é globalmente hipoelíptico com ganho de ϵ derivadas, e (2.6) *toma a seguinte forma*

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall u\in D'(\mathbb{T}^N),\ a(x,D)u\in H^t(\mathbb{T}^N) \Longrightarrow u\in H^{t+\epsilon}(\mathbb{T}^N). \tag{2.7}$$

Para o estudo de classes de operadores com ganho de derivadas sugerimos os artigos [BCCJ] e [ChC].

Proposição 2.9 *Seja $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ um operador pseudodiferencial que é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas. Então, $a(x,D)$ é um operador globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$, ou seja, se $u\in D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ e $a(x,D)u\in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$, então $u\in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$.*

Demonstração. Seja $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ um operador pseudodiferencial que é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas e $u\in D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $a(x,D)u\in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$. Para verificarmos que $u\in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$ vamos mostrar que $u\in H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ fixado. Como $a(x,D)u\in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$, então $a(x,D)u\in H^{t-\sigma+r}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Segue da hipótese de $a(x,D)$ ser globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas que $u\in H^{t-\sigma+r+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right) = H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$. A demonstração está completa. $\square$

Proposição 2.10 *Seja $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ um operador pseudodiferencial que é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas. Se $b(x,D) \in \mathfrak{Dp}_{\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ com $\sigma' < \sigma - r$, então $c(x,D) = a(x,D) + b(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ e é um operador pseudodiferencial globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas.*

Demonstração. Sejam $a(x,D), b(x,D), c(x,D)$ como no enunciado acima, seja $u \in D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $c(x,D)u \in H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$ e seja $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $u \in H^\delta\left(\mathbb{T}^N\right)$. É fácil de ver que a ordem de $c(x,D)$ também é igual a σ e, portanto, devemos mostrar que $u \in H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Note que

$$a(x,D)u = c(x,D)u - b(x,D)u \in H^{s_0}\left(\mathbb{T}^N\right), \tag{2.8}$$

com $s_0 = \min\{t, \delta - \sigma'\}$, já que $c(x,D)u \in H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$ por hipótese e $b(x,D)u \in H^{\delta-\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ pela Proposição 2.4. Se $s_0 = t$, então como $a(x,D)$ é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas e possui ordem σ, temos que $u \in H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$, o que conclui a demonstração. Se $s_0 = \delta - \sigma'$, então $a(x,D)u \in H^{\delta-\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ nos garante que $u \in H^{\delta-\sigma'+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right) = H^{\delta+\sigma-r-\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Segue de (2.8) que $a(x,D)u \in H^{s_1}\left(\mathbb{T}^N\right)$, sendo que $s_1 = \min\{t, \delta+\sigma-r-2\sigma'\}$. Se $s_1 = t$, então pelo mesmo argumento utilizado acima, garantimos que $u \in H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e a demonstração acabou. Caso contrário, $a(x,D)u \in H^{\delta+\sigma-r-2\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e, portanto, $u \in H^{\delta+2\sigma-2r-2\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$.

Como por hipótese $\sigma' < \sigma - r$, obtemos que $\sigma - r - \sigma' > 0$; portanto, repetindo o argumento acima, após um número finito de passos, iremos concluir que $u \in H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e a demonstração está completa. □

Lema 2.11 *Sejam $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ um operador pseudodiferencial que é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas e seja $\sigma' < \sigma - r$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $C = C_t > 0$ de modo que*

$$\|u\|_{t+\sigma-r} \leq C\left(\|a(x,D)u\|_t + \|u\|_{t+\sigma'}\right), \ \forall\, u \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right). \tag{2.9}$$

Demonstração. Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $u \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$ dados. Definimos o conjunto $\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N) = \left\{v \in H^{t+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right) : a(x,D)v \in H^t\left(\mathbb{T}^N\right)\right\}$. Definimos ainda a seguinte norma em $\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$:

$$|||v||| \doteq \|v\|_{t+\sigma'} + \|a(x,D)v\|_t, \ \forall\, u \in \mathcal{F}_t.$$

Mostraremos agora que $\left(\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N), |||\cdot|||\right)$ é um espaço de Banach.

Suponha que $\{u_j\}_j$ seja um sequência de Cauchy em $\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$. Então $\{u_j\}$ e $\{a(x,D)u_j\}$ são sequências de Cauchy em $H^{t+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e em $H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$ respectivamente. Logo, existem $u \in$

$H^{t+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e $v \in H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$ tais que $u_j \longrightarrow u$ em $H^{t+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e $a(x,D)u_j \longrightarrow v$ em $H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$. Em particular, $u_j \longrightarrow u$ e $a(x,D)u_j \longrightarrow v$ em $D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ e, como $a(x,D)u_j \longrightarrow a(x,D)u$ em $D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ (Proposição 2.6), segue da unicidade do limite em $D'(\mathbb{T}^N)$ que $a(x,D)u = v \in H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$. Assim, $u \in \mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$ e como as sequências $\|u_j - u\|_{t+\sigma'}$ e $\|a(x,D)u_j - a(x,D)u\|_t$ convergem a zero em $\mathbb{C}$ então $|||u_j - u||| \longrightarrow 0$ e temos que a sequência $\{u_j\}_j$ converge para u em $\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$. Isso demonstra que $\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$ é um espaço de Banach.

Como $a(x,D)$ é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas, segue que se $u \in \mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$, então $a(x,D)u \in H^t\left(\mathbb{T}^N\right)$ e, portanto, $u \in H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Ou seja, $\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N) \subset H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$.

Mostraremos agora que a inclusão $i : \mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N) \longrightarrow H^{t+\sigma-r}(\mathbb{T}^N)$ é contínua utilizando o Teorema do Gráfico Fechado. Suponha que $u_j \longrightarrow u$ em $\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$ e $i(u_j) = u_j \longrightarrow v$ em $H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Assim, $u \in \mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$ e a convergência $u_j \longrightarrow u$ em $\mathcal{F}_t(\mathbb{T}^N)$ implica que $u_j \longrightarrow u$ em $H^{t+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Logo, $u_j \longrightarrow u$ e $i(u_j) \longrightarrow v$ em $D'\left(\mathbb{T}^N\right)$. Segue da unicidade do limite que $v = u$, ou seja, $i(u) = v$. A demonstração que o gráfico de i é fechado está completa; portanto, i é uma aplicação contínua.

A desigualdade do enunciado é consequência imediata da continuidade da aplicação i definida acima, e a demonstração do lema está completa. $\square$

No que segue, mostraremos um resultado importante para a sequência. Primeiro, recordamos que se $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ é um operador pseudodiferencial que é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas então $a(x,D)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ e, portanto, ker $a(x,D) \subset C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Denotaremos por V *o ortogonal de Ker* $a(x,D)$ *em* $H^{t+\sigma-r}(\mathbb{T}^N)$ *com* $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.12 *Seja* $a(x,D)$ *como no Lema 2.11 e* $t \in \mathbb{R}$ *fixado. Então, existe* $C_1 > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{t+\sigma-r} \leq C_1 \|a(x,D)u\|_t\,,\ \forall\ u \in V \cap C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Demonstração. Suponha que a conclusão da proposição seja falsa. Então dado $c = \ell$, $\ell \in \{1,2,\dots\}$, existe $u_\ell \in V \cap C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $\|u_\ell\|_{t+\sigma-r} > \ell\,\|a(x,D)u_\ell\|_t$. Normalizando $u_\ell \in H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e continuando a chamar a nova sequência por $\{u_\ell\}_\ell$, concluímos que existe uma sequência $\{u_\ell\}_\ell \subset V \cap C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$, $||u_\ell||_{t+\sigma-r} = 1$ de modo que

$$\|a(x,D)u_\ell\|_t < \frac{1}{\ell},\ \forall\ \ell \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Em particular, $a(x,D)u_\ell \longrightarrow 0$ em $D'\left(\mathbb{T}^N\right)$. Além disso, para $\sigma' < \sigma - r$ temos $H^{t+\sigma-r}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow H^{t+\sigma'}(\mathbb{T}^N)$ e $\|u_\ell\|_{t+\sigma-r} = 1$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Então, passando a uma subsequência se necessário, o Lema de Rellich nos garante que existe $u_0 \in H^{t+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $u_\ell \longrightarrow u_0$ em $H^{t+\sigma'}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Em particular, $u_\ell \longrightarrow u_0$ em $D'\left(\mathbb{T}^N\right)$, o que nos dá $a(x,D)u_\ell \longrightarrow a(x,D)u_0$ em $D'\left(\mathbb{T}^N\right)$. Portanto, segue da unicidade do limite em $D'(\mathbb{T}^N)$ que $a(x,D)u_0 = 0$, ou seja, $u_0 \in \ker a(x,D)$.

Por outro lado, usando (2.9), temos

$$\|u_\ell\|_{t+\sigma-r} \leq C\left(\|a(x,D)u_\ell\|_t + \|u_\ell\|_{t+\sigma'}\right).$$

Fazendo $\ell \longrightarrow +\infty$ e usando (2.10), segue que $1 \leq C\|u_0\|_{t+\sigma'}$, o que nos garante que $u_0 \neq 0$. Porém, como $u_\ell \in V$ para todo ℓ e $V \subset H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$ é fechado, segue que $u_0 \in V = (\ker a(x,D))^\perp$ em $H^{t+\sigma-r}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Assim teremos que $u_0 \in \ker a(x,D) \cap (\ker a(x,D))^\perp = \{0\}$, portanto, obtemos uma contradição visto que $u_0 \neq 0$. A demonstração está completa. $\square$

2.2.1 Resolubilidade global

Iremos considerar um operador peseudodiferencial $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ e vamos definir quando este operador é globalmente resolúvel em $D'(\mathbb{T}^N)$. Nosso objetivo é encontrar condições para a tal resolubilidade global de $a(x,D)$, i.é., considerando $a(x,D) : D'(\mathbb{T}^N) \longrightarrow D'(\mathbb{T}^N)$, dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ procuramos $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ tal que $a(x,D)u = f$. É fácil ver que existem condições naturais de compatibilidade sobre f para a solução u existir, mais precisamente

Lema 2.13 *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Se existir $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ tal que $a(x,D)u = f$ então devemos ter*

$$\int_{\mathbb{T}^N} w.f = 0$$

para toda $w \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ satisfazendo ${}^t a(x,D)w = 0$ onde ${}^t a(x,D) : C^\infty(\mathbb{T}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Em vista do lema acima usaremos a seguinte notação:

Definição 2.14 *Seja*

$$\mathcal{E}(a(x,D)) = \Big\{g \in C^\infty(\mathbb{T}^N) : \int_{\mathbb{T}^N} w.g = 0 \text{ para toda}$$

$$w \in C^\infty(\mathbb{T}^N) \text{ tal que } {}^t a(x,D)w = 0\Big\}.$$

Definição 2.15 *Dizemos que $a(x,D)$ é* **globalmente resolúvel em** $D'(\mathbb{T}^N)$, *se para toda $f \in \mathcal{E}(a(x,D))$ existe $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ tal que $a(x,D)u = f$.*

Teorema 2.16 *Seja $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que ${}^t a(x,D)$ é globalmente hipoelíptico com perda de r derivadas. Então, $a(x,D)$ é globalmente resolúvel em $D'(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{E}(a(x,D))$. Definimos

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f(x)\varphi(x)dx, \ \forall\ \varphi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Observe que se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ então para $s \in \mathbb{R}$ definimos $t = -\sigma + r - s$ e obtemos

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{T}^N} |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leq \|f\|_s \|\varphi\|_{-s} = C\,\|\varphi\|_{t+\sigma-r},$$

sendo que $C = \|f\|_s$. Usando a Proposição 2.12 com ${}^t a(x,D)$ no lugar de $a(x,D)$ podemos concluir que

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \leq C\,\|\varphi\|_{t+\sigma-r} \leq C_1 \left\|{}^t a(x,D)\varphi\right\|_t, \ \ \varphi \in V \cap C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right). \tag{2.11}$$

com $C_1 = C_1(||f||_s, \sigma, r) > 0$.

Consideramos o espaço $\{{}^t a(x,D)\varphi : \varphi \in V \cap C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)\}$, sendo V dado antes da Proposição 2.12, munido da topologia induzida por $H^t(\mathbb{T}^N)$ e definimos a forma linear Φ sobre $\{{}^t a(x,D)\varphi : \varphi \in V \cap C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)\}$ dada por

$$\Phi({}^t a(x,D)\varphi) = \langle T_f, \varphi\rangle, \ \varphi \in V \cap C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right).$$

É fácil ver que Φ está bem definida e segue de (2.11) que Φ é contínua.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, podemos estender Φ a um funcional linear contínuo $u : H^t\left(\mathbb{T}^N\right) \longrightarrow \mathbb{C}$ e, portanto, $u \in (H^t(\mathbb{T}^N))' \cong H^{-t}(\mathbb{T}^N) \subset D'(\mathbb{T}^N)$.

Notemos que como $V \oplus \ker {}^t a(x,D) = H^{t+\sigma-r}(\mathbb{T}^N)$ então podemos escrever

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{T}^N) &= C^\infty(\mathbb{T}^N) \cap H^{t+\sigma-r}(\mathbb{T}^N) = \Big(C^\infty(\mathbb{T}^N) \cap V\Big) \oplus \Big(C^\infty(\mathbb{T}^N) \cap \ker {}^t a(x,D)\Big) \\ &= \Big(C^\infty(\mathbb{T}^N) \cap V\Big) \oplus \ker {}^t a(x,D), \end{aligned}$$

pois ${}^t a(x,D)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

Mostraremos, agora, que $u \in D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ satisfaz $a(x,D)u = f$. Se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, então segue da observação acima que podemos escrever $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ com $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^N) \cap V$ e $\varphi_1 \in \ker {}^t a(x,D)$. Usando os fatos de que ${}^t a(x,D)\varphi_1 = 0$ e $\langle T_f, \varphi_1\rangle = 0$, pois $\varphi_1 \in \ker {}^t a(x,D)$

e $f \in \mathcal{E}(a(x,D))$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle a(x,D)u,\varphi\rangle &= \left\langle u,\, {}^t a(x,D)\varphi\right\rangle = \left\langle u,\, {}^t a(x,D)(\varphi_0+\varphi_1)\right\rangle = \left\langle u,\, {}^t a(x,D)\varphi_0\right\rangle \\ &= \Phi({}^t a(x,D)\varphi_0) = \langle T_f,\varphi_0\rangle = \langle T_f,\varphi_0+\varphi_1\rangle = \langle T_f,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle\,;\end{aligned}$$

portanto, concluímos que $a(x,D)u = f$. A demonstração do Teorema 2.16 está completa. □

2.3 Perturbações de Ordem Negativa

Nosso objetivo aqui é considerar a classe dos operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes em $\mathbb{T}^N$, da forma $P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, e estudar a resolubilidade e hipoelipticidade global de perturbações destes operadores por operadores pseudodiferenciais de ordem negativa.

2.3.1 Perturbações dos operadores $P(D)$

Iniciamos esta seção com as seguintes

Definição 2.17 *Seja $a(x,D) \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ com $x \in \mathbb{T}^N$ e $a(x,D) : C^\infty(\mathbb{T}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Dizemos que $a(x,D)$ é globalmente C^∞ resolúvel, se dada $f \in (\ker\, {}^t a(x,D))^\perp$, existe $u \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$ de modo que $a(x,D)u = f$. Aqui, o conjunto*

$$\left(\ker\, {}^t a(x,D)\right)^\perp \doteq \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^N) : \langle w, f\rangle = 0,\ \textit{para toda}\ w \in D'\left(\mathbb{T}^N\right)\ \textit{tal que}\ {}^t a(x,D)w = 0\}.$$

Definição 2.18 *Seja $a(x,D) \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$. Dizemos que $a(x,D) : D'(\mathbb{T}^N) \longrightarrow D'(\mathbb{T}^N)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico, em $\mathbb{T}^N$ se, para toda $u \in D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $a(x,D)u \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$, temos $u \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$.*

Seja

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha,\ a_\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^N \tag{2.12}$$

um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes em $\mathbb{T}^N$. Seu símbolo é dado por

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha,\ \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Segue de Greenfield-Wallach [GW] que o operador $P(D)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ se e somente se existem constantes positivas L, M e C tais que

$$|P(\xi)| \geq L|\xi|^{-M}, \ |\xi| \geq C. \tag{2.13}$$

Como ${}^tP(D) = \sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}a_\alpha D^\alpha$ então $|{}^tP(\xi)| = |P(-\xi)|$ e se assumirmos que o conjunto $S = \{\xi \in \mathbb{Z}^N : P(\xi) = 0\}$ é finito concluímos que vale o seguinte resultado, cuja demonstração será omitida por ser standard.

Proposição 2.19 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) O operador $P(D)$ é globalmente C^∞ resolúvel.

(2) O operador $P(D)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$;

(3) O operador ${}^tP$ é globalmente C^∞ resolúvel.

(4) O operador ${}^tP$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$;

(5) existem $L > 0, M > 0$ tais que $|P(\xi)| \geq L|\xi|^{-M}$, $\xi \notin S$ ("Greenfield-Wallach" [GW]).

O Próximo resultado nos permitirá concluir que o operador $P(D)$ perde $m + M$ derivadas.

Proposição 2.20 *Suponha que $P(D)$ seja globalmente C^∞ resolúvel. Então, existe uma constante $c > 0$ tal que, dado $s \in \mathbb{R}$, existe uma constante $A = A(s) > 0$ satisfazendo*

$$\|u\|_{s-M} \leq c\,\|P(D)u\|_s + A^{k+1}\,\|u\|_{-k}\,, \ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+, \ \forall\ u \in D'\left(\mathbb{T}^N\right), \tag{2.14}$$

sendo $M > 0$ dada no item (5) da Proposição 2.19. Além disso,

$$\|f\|_{s-M} \leq c\,\|P(D)f\|_s\,, \ \forall\ s \in \mathbb{R}, f \in \left(\ker\ {}^tP(D)\right)^\perp. \tag{2.15}$$

Demonstração. Seja $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ tal que $P(D)u \in H^s(\mathbb{T}^N)$. Como $P(D)$ é globalmente C^∞

resolúvel, segue da Proposição 2.19 que, existem constantes $L, M > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{s-M}^2 &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{2(s-M)} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&= \sum_{\xi\notin S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} |\hat{u}(\xi)|^2 + \sum_{\xi\in S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&= \sum_{\xi\notin S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} \frac{|P(\xi)|^2}{|P(\xi)|^2} |\hat{u}(\xi)|^2 + \sum_{\xi\in S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&= \sum_{\xi\notin S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} \frac{1}{|P(\xi)|^2} |\widehat{P(D)u}(\xi)|^2 + \sum_{\xi\in S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq \sum_{\xi\notin S} (1+|\xi|)^{2s} L^{-2} |\widehat{P(D)u}(\xi)|^2 + \sum_{\xi\in S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq L^{-2} \|P(D)u\|_s^2 + \sum_{\xi\in S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} |\hat{u}(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Neste ponto notamos que se $u \in (\ker {}^tP_0)^{\perp}$, então temos que $\hat{u}(\xi) = 0$ para todo $\xi \in S$ e, portanto, segue de (2.16) que $||u||_{s-M} \leq L^{-2}||P(D)u||_s$. Logo, (2.15) está demonstrada

Definindo $A = \max_{\xi\in S}\{(1+|\xi|)^{2(s-M)}, (1+|\xi|)^2\}$ temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{s-M}^2 &\leq L^{-2} \|P(D)u\|_s^2 + \sum_{\xi\in S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&= L^{-2} \|P(D)u\|_s^2 + \sum_{\xi\in S} (1+|\xi|)^{2(s-M)} (1+|\xi|)^{2k} (1+|\xi|)^{-2k} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq L^{-2} \|P(D)u\|_s^2 + A^{k+1} \sum_{\xi\in S} (1+|\xi|)^{-2k} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq L^{-2} \|P(D)u\|_s^2 + A^{k+1} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{-2k} |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&= L^{-2} \|P(D)u\|_s^2 + A^{k+1} \|u\|_{-k}^2,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Corolário 2.21 *Se o operador $P(D)$ é globalmente C^∞ resolúvel, então $P(D)$ e ${}^tP(D)$ são globalmente C^∞ hipoelípticos com perda de $M + m$ derivadas, sendo M dado no item (5) da Proposição 2.19 e m é a ordem do operador $P(D)$.*

Demonstração. Seja $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ de modo que $P(D)u \in H^s(\mathbb{T}^N)$. Como $u \in D'(\mathbb{T}^N)$, existe $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ de modo que $u \in H^{-k_0}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Pela Proposição 2.20, segue que

$$\|u\|_{s-M} \leq c\,\|P(D)u\|_s + A^{k_0}\,\|u\|_{-k_0} < \infty.$$

Isso garante que $u \in H^{s-M}\left(\mathbb{T}^N\right)$ e, como $s - M = s + m - (M + m)$ e a ordem de $P(D)$ é igual a m, segue que $P(D)$ é globalmente hipoelíptico com perda de $M + m$ derivadas.

Para a afirmação sobre ${}^tP(D)$ basta observar que $|{}^tP(\xi)| = |P(-\xi)|$ e que a condição: existem $L > 0, M > 0$ e $C > 0$ tais que $|P(\xi)| \geq L|\xi|^{-M},\ \xi \notin S$ é equivalente a seguinte condição: existem $L > 0, M > 0$ e $C > 0$ tais que $|P(-\xi)| \geq L|\xi|^{-M},\ -\xi \notin S$.

Podemos usar então a Proposição 2.20 com ${}^tP(D)$ no lugar de $P(D)$ e o argumento acima nos permite concluir que ${}^tP(D)$ é globalmente hipoelíptico com perda de $M + m$ derivadas. A demonstração está completa. $\square$

Corolário 2.22 *Suponha que o operador $P(D)$ seja globalmente C^∞ resolúvel e que $a(x, D)$ seja um operador pseudodiferencial de ordem $\sigma < -M$, sendo M dado no item (5) da Proposição 2.19. Então, $Q = P(D) + a(x, D)$ é globalmente hipoelíptico com perda de $M + m$ derivadas. O mesmo vale para ${}^tQ$.*

Demonstração. Segue do Corolário 2.21 e da Proposição 2.10. $\square$

Teorema 2.23 *Sejam $P(D)$ como em (2.12) e $a(x, D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$. Se $P(D)$ é globalmente C^∞ resolúvel e $\sigma < -M$ então o operador $Q = P(D) + a(x, D)$ é um operador globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ e globalmente C^∞ resolúvel.*

Demonstração. Como por hipótese o operador $P(D)$ é globalmente C^∞ resolúvel e a ordem do operador pseudodiferencial $a(x, D)$ é $\sigma < -M$ então segue do Corolário 2.22 que Q e ${}^tQ$ são operadores globalmente hipoelípticos com perda de $M + m$ derivadas.

Mostremos agora que Q é globalmente C^∞ resolúvel em $\mathbb{T}^N$. Para $f \in \left(\ker{}^t Q\right)^\perp$ vê-se facilmente que $f \in \mathcal{E}({}^tQ)$. Como ${}^tQ$ é um operador globalmente hipoelíptico com perda de $M + m$ derivadas então segue do Teorema 2.16 que o operador Q é globalmente resolúvel em $D'(\mathbb{T}^N)$ e portanto existe $u \in D'\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $Qu = f$. Para concluirmos que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ basta lembrarmos que segue da Proposição 2.9 e do fato que o operador Q é globalmente C^∞ hipoelíptico com perda de $M + m$ derivadas que Q é globalmente C^∞ hipoelíptico e portanto podemos concluir que $u \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$ e a demonstração está completa. $\square$

2.3.2 Perturbações do campo vetorial $L = c_1D_{x_1} + c_2D_{x_2}$

Ao longo desta seção, vamos considerar um campo vetorial L da forma

$$L = c_1D_{x_1} + c_2D_{x_2},\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2, \tag{2.16}$$

sendo que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Para o estudo da resolubilidade de L consideramos o seguinte conjunto

$$\Gamma = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2 : \langle \omega, \xi \rangle = 0\}, \tag{2.17}$$

sendo que $\omega = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Note que como $\mathbb{Z}^2$ é um módulo livre, a dimensão de Γ é no máximo igual a 2. Além disso, se a dimensão de Γ for igual a 2, então $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ e, em particular, $(1, 0), (0, 1) \in \Gamma$. Isso nos garante que $c_1 = c_2 = 0$ e, portanto, $L = 0$. Sendo assim, vamos analisar apenas os casos em que a dimensão de Γ é igual a 0 ou 1.

O estudo da resolubilidade e hipoelipticidade global do operador L definido em (2.16), assim como perturbações da forma $L + b(x)$, com $b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C})$ foi realizado em [PZ].

Observação 2.24 *Nesta subseção sempre iremos considerar L globalmente C^∞ resolúvel.*

Recordemos a notação usada em [PZ]: Seja

$$C^\infty(\mathbb{T}^2) = C^\infty_\Gamma(\mathbb{T}^2) \oplus C^\infty_{\Gamma^c}(\mathbb{T}^2),$$

com

$$C^\infty_\Gamma(\mathbb{T}^2) = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^2) : \widehat{f}(\xi) = 0,\ \xi \in \Gamma^c\}$$

e

$$C^\infty_{\Gamma^c}(\mathbb{T}^2) = \{f \in C^\infty(\mathbb{T}^2) : \widehat{f}(\xi) = 0,\ \xi \in \Gamma\}.$$

Para $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ escrevemos $f = f_\Gamma + f_{\Gamma^c}$, com $f_\Gamma \in C^\infty_\Gamma(\mathbb{T}^2)$ e $f_{\Gamma^c} \in C^\infty_{\Gamma^c}(\mathbb{T}^2)$. Do mesmo modo, definimos

$$D'(\mathbb{T}^2) = D'_\Gamma(\mathbb{T}^2) \oplus D'_{\Gamma^c}(\mathbb{T}^2).$$

Redução

Sejam L como dado em (2.16) e $b \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C})$. Como o operador L é globalmente C^∞ resolúvel e $b_{\Gamma^c} \in (\ker\ {}^tL)^\perp$ (ver Lema 2.5 em [PZ]), segue que existe $h \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ de modo que $Lh = b_{\Gamma^c}$.

Proposição 2.25 *Para $x \in \mathbb{T}^2$ o operador $P = L + b(x) + a(x, D)$, com $a(x, D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma(\mathbb{T}^2)$, $\sigma < 0$, é globalmente C^∞ resolúvel se, e somente se, o operador $P_1 = L + b_\Gamma(x) + a_1(x, D)$ é globalmente C^∞ resolúvel, sendo que $a_1(x, D) \doteq e^h a(x, D)e^{-h} \in \mathfrak{Dp}_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que P_1 seja globalmente C^∞ resolúvel e vamos mostrar que P é globalmente C^∞ resolúvel. Seja $f \in (\ker\ {}^tP)^\perp$. Definimos $g = e^h f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e vamos mostrar que $g \in (\ker\ {}^tP_1)^\perp$. Se $w \in D'(\mathbb{T}^2)$, então

$$\langle w, g\rangle = \left\langle e^h w, f\right\rangle;$$

portanto, é suficiente mostrarmos que $e^h w \in \ker\ {}^tP$ se $w \in \ker\ {}^tP_1$. Primeiro, se $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ então

$$\left\langle {}^tP(e^h w), \psi\right\rangle = \left\langle e^h w, P\psi\right\rangle = \left\langle w, e^h P\psi\right\rangle. \tag{2.18}$$

Observe que

$$\begin{aligned} P_1(e^h\psi) &= (L + b_\Gamma(x) + a_1(x, D))\, e^h\psi \\ &= e^h b_{\Gamma^c}(x)\psi + e^h(L\psi) + b_\Gamma(x)e^h\psi + a_1(x, D)(e^h\psi) \\ &= e^h(L + b(x))\psi + e^h a(x, D)\psi \\ &= e^h P\psi. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Observe ainda que as igualdades acima permanecem válidas se trocarmos ψ por uma distribuição $v \in D'(\mathbb{T}^2)$ qualquer. Segue de (2.18), de (2.19) e do fato que $w \in \ker\ {}^tP_1$ que

$$\left\langle {}^tP(e^h w), \psi\right\rangle = \left\langle w, P_1(e^h\psi)\right\rangle = \left\langle {}^tP_1 w, e^h\psi\right\rangle = 0,$$

isto é, $e^h w \in \ker\ {}^tP$ e, portanto, $g \in (\ker\ {}^tP_1)^\perp$.

Como P_1 é globalmente resolúvel, existe $v \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $P_1 v = g$. Definimos $u = e^{-h}v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e temos

$$\begin{aligned} Pu &= (L + b(x) + a(x, D))(e^{-h}v) \\ &= e^{-h}\left(-b_{\Gamma^c}(x)\right)v + e^{-h}Lv + b(x)e^{-h}v + e^{-h}e^h a(x, D)e^{-h}v \\ &= e^{-h}\left(L + b_\Gamma(x) + a_1(x, D)\right)v \\ &= e^{-h}P_1 v = e^{-h}g = f, \end{aligned}$$

o que demonstra que P é globalmente resolúvel.

A demonstração da recíproca é análoga. $\square$

Observação 2.26 *A mesma ideia usada na proposição anterior nos permite concluir que P é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, P_1 é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$.*

2.3.3 O Caso $\Gamma = \{0\}$

Segue da subseção anterior que no caso em que $\Gamma = \{0\}$ temos que estudar o operador

$$P_1 = L + b_0 + a_1(x, D),$$

pois no caso $\Gamma = \{0\}$ temos que $b_\Gamma(x) = \widehat{b}(0) = b_0 \in \mathbb{C}$ é uma constante.

Nesta subseção aplicaremos a teoria desenvolvida na subseção 2.3.1 para o operador com coeficientes constantes dado por $P_0(D) = L + b_0 = c_1 D_{x_1} + c_2 D_{x_2} + b_0$.

O conjunto $S = \{\xi \in \mathbb{Z}^N : P(\xi) = 0\}$ usado no item (5) da proposição 2.19, neste caso é dado por $S = \{\xi \in \mathbb{Z}^2 : \langle \omega, \xi \rangle + b_0 = 0\}$. Observe que se $b_0 = 0$ então $S = \Gamma = \{0\}$. Se $b_0 \neq 0$ então $0 \notin S$. Se $S \neq \varnothing$, então $S = \{\xi_0\}$ para algum $\xi_0 \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{0\}$, pois se $\langle \omega, \xi \rangle + b_0 = \langle \omega, \xi' \rangle + b_0 = 0$, para certos $\xi, \xi' \in \mathbb{Z}^2$, então $\langle \omega, \xi - \xi' \rangle = 0$ e, portanto, $\xi - \xi' \in \Gamma = \{0\}$; isto é, $\xi = \xi'$. A partir de agora iremos denotar $S = \{\xi_0\}$ quando $S \neq \varnothing$.

Observação 2.27 *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e suponha que $S \neq \varnothing$. Então, $f \in (\ker^t P_0(D))^\perp$ se, e somente se, $\hat{f}(\xi_0) = 0$.*

Observação 2.28 *Se $b_0 = 0$ então temos $\xi_0 = 0$.*

Proposição 2.29 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) O operador $L + b(x)$ é globalmente C^∞ resolúvel.

(2) O operador $L + b(x)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$;

(3) O operador $P_0 = L + b_0$ é globalmente C^∞ resolúvel.

(4) O operador $P_0 = L + b_0$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$;

(5) Existem $C > 0$ e $M > 0$ tais que $|\langle \omega, \xi \rangle + b_0| \geq \frac{C}{(1+|\xi|)^M}$ para todo $\xi \notin S$ (Greenfield-Wallach [GW]).

Demonstração. A equivalência entre as condições (1) e (3) e as condições (2) e (4) seguem da Proposição 2.25 e da Observação 2.26, já que naquele momento a dimensão de Γ não foi relevante.

A equivalência entre as condições (3) e (5) e entre (4) e (5) seguem da Proposição 2.19. □

Teorema 2.30 *Sejam L como em (2.16), $b(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C})$ e $a(x, D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma(\mathbb{T}^2)$. Se o campo vetorial L e o operador $L + b(x)$ são globalmente C^∞ resolúveis e $\sigma < -M$ então o operador $P = L + b(x) + a(x, D)$ é um operador globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e globalmente C^∞ resolúvel.*

Demonstração. Como L é globalmente C^∞ resolúvel então o operador $L + b(x)$ é globalmente C^∞ resolúvel se somente se $P_0(D) = L + b_0$ é globalmente C^∞ resolúvel, ver Proposição 2.25 para o caso particular em que $a_1(x, D) = 0$. Assim, segue do Teorema 2.23 que vale o resultado para o operador $L + b_0 + a_1(x, D)$. Pela Proposição 2.25 e Observação 2.26 vale o Teorema para o operador $P = L + b(x) + a(x, D)$. □

2.3.4 O Caso $\dim \Gamma = 1$

Nesta seção, estamos assumindo que $b_\Gamma \not\equiv 0$ e iremos estudar o operador

$$P_1 = L + b_\Gamma(x) + a_1(x, D),$$

supondo que $\dim \Gamma = 1$. Neste caso, conseguimos uma base de $\mathbb{Z}^2$ da forma $\{k^1, v^2\}$, sendo k^1 um gerador de Γ. Considere a mudança de variáveis $\varphi : \mathbb{T}^2_x \longrightarrow \mathbb{T}^2_y$, $y = \varphi(x) = M^t x$, sendo que M é a matriz quadrada de ordem 2 cujas colunas são os vetores k^1 e v^2 nesta ordem. Já sabemos (ver [PZ]) que se $v = v(y) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e $u(x) = v \circ \varphi(x)$, então

$$(L + b_\Gamma(x))u(x) = Rv(\varphi(x)),$$

sendo que R é o operador dado por $(cD_{y_2} + d(y_1))$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in C^\infty(\mathbb{T}; \mathbb{C})$. Vamos ver agora o que ocorre com $a_1(x, D)u(x)$. Primeiro observe que, como a matriz Jacobiana de φ

possui determinante constante igual a 1 ou -1, então fazendo a mudança de variáveis $y = \varphi(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\xi) &= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{T}^2} u(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{T}^2} v((\varphi(x))e^{-i\langle \varphi^{-1}(\varphi(x)),\xi\rangle}dx \\
&= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{T}^2} v(y)e^{-i\langle \varphi^{-1}(y),\xi\rangle}dy = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{T}^2} v(y)e^{-i\langle (M^t)^{-1}y,\xi\rangle}dy \\
&= (2\pi)^{-2}\int_{\mathbb{T}^2} v(y)e^{-i\langle y,(M^{-1}\xi)\rangle}dy \\
&= \hat{v}(M^{-1}\xi).
\end{aligned}$$

Daí, se fizermos a mudança $\eta = M^{-1}\xi$, temos

$$\begin{aligned}
a_1(x,D_x)u(x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} a_1(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} a_1(x,\xi)\hat{v}(M^{-1}\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle} \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^2} a_1(x,M\eta)\hat{v}(\eta)e^{i\langle x,(M\eta)\rangle} = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^2} a_1(x,M\eta)\hat{v}(\eta)e^{i\langle (M^t x),\eta\rangle} \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^2} a_1(\varphi^{-1}(\varphi(x)),M\eta)\hat{v}(\eta)e^{i\langle \varphi(x),\eta\rangle}.
\end{aligned}$$

Se $\tilde{a}(y,D)$ é o operador pseudodiferencial cujo símbolo discreto é $\tilde{a}(y,\eta) = a_1(\varphi^{-1}(y),M\eta)$, então a igualdade acima nos mostra que

$$a_1(x,D)u(x) = \tilde{a}(y,D)v(\varphi(x)).$$

Assim, se $Q = R + \tilde{a}(y,D)$, então

$$\begin{aligned}
P_1(v\circ\varphi)(x) &= (L + b_\Gamma + a_1(x,D))(v\circ\varphi)(x) = (L+b_\Gamma)u(x) + a_1(x,D)u(x) \\
&= (Rv)(\varphi(x)) + (\tilde{a}(y,D)v)(\varphi(x)) = (Qv)(\varphi(x)),\ \forall\ v\in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Analogamente mostra-se que

$$^{t}P_1(v\circ\varphi)(x) = (^{t}Qv)(\varphi(x)),\ \forall\ v\in C^\infty(\mathbb{T}^2). \tag{2.21}$$

Como $u(x) = (v\circ\varphi)(x)$ segue de (2.21) que

$$[(\,^{t}P_1u)\circ\varphi^{-1}](y) = [\,^{t}Q(u\circ\varphi^{-1})](y),\ \forall\ u\in C^\infty(\mathbb{T}^2). \tag{2.22}$$

Agora considerando $v \in D'(\mathbb{T}^2)$ e $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ segue de (2.22), com $u = \psi$, que

$$\begin{aligned}
\langle P_1(v\circ\varphi), \psi\rangle &= \langle v\circ\varphi,\ {}^tP_1\psi\rangle = \langle v, ({}^tP_1\psi)\circ\varphi^{-1}\rangle \\
&= \langle v,\ {}^tQ(\psi\circ\varphi^{-1})\rangle = \langle Qv, \psi\circ\varphi^{-1}\rangle \\
&= \langle (Qv)\circ\varphi, \psi\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, (2.20) também vale para $v \in D'(\mathbb{T}^2)$ e concluímos que

$$P_1(v\circ\varphi) = (Qv)\circ\varphi,\ \forall\ v \in D'\left(\mathbb{T}^2\right).$$

Proposição 2.31 *O operador P_1 é globalmente C^∞ resolúvel se, e somente se, o operador Q é globalmente C^∞ resolúvel.*

Demonstração. Suponha que Q seja globalmente C^∞ resolúvel e vamos mostrar que o operador P_1 é globalmente C^∞ resolúvel. Seja $f \in (\ker\ {}^tP_1)^\perp$. Definimos $g = f\circ\varphi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e vamos mostrar que $g \in (\ker\ {}^tQ)^\perp$. Seja $w \in \ker\ {}^tQ$ e observe que, como a matriz Jacobiana de φ possui determinante constante igual a 1 ou -1, temos que $\langle w, g\rangle = \langle w\circ\varphi, f\rangle$. Assim, é suficiente mostrarmos que $w\circ\varphi \in \ker\ {}^tP_1$. Por (2.20), se $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, vale

$$(P_1\psi)\circ\varphi^{-1} = \big(P_1(\psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi)\big)\circ\varphi^{-1} = Q(\psi\circ\varphi^{-1}). \tag{2.23}$$

Assim, usando (2.23), se $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle {}^tP_1(w\circ\varphi), \psi\right\rangle &= \langle w\circ\varphi, P_1\psi\rangle \\
&= \left\langle w, (P_1\psi)\circ\varphi^{-1}\right\rangle \\
&= \left\langle w, Q(\psi\circ\varphi^{-1})\right\rangle \\
&= \left\langle {}^tQw, \psi\circ\varphi^{-1}\right\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $w \in \ker\ {}^tQ$. Logo, existe $v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ de modo que $Qv = g$. Definimos $u = v\circ\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e segue de (2.20) que

$$P_1u = P_1(v\circ\varphi) = (Qv)\circ\varphi = g\circ\varphi = f,$$

o que completa a demonstração da primeira parte.

A demonstração da recíproca é análoga. □

2.3.5 Hipoelipticidade C^∞ global de P_1

Nesta sub-seção vamos supor que $P_0 = L + b_\Gamma(x)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico.

Aqui iremos analisar a hipoelipticidade C^∞ global do operador P_1 e recordamos que $R = cD_{y_2} + d(y_1)$.

Proposição 2.32 *O operador $P_0 = L + b_\Gamma(x)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ se, e somente, o operador $R = cD_{y_2} + d(y_1)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$. Além disso, o operador $P_1 = P_0 + a_1(x, D)$ é globamente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, o operador $Q = cD_{y_2} + d(y_1) + \tilde{a}(y, D)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$.*

Demonstração. A demonstração desse fato é consequência do seguinte resultado mais geral: suponha que $a(x, D) \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}_\sigma(\mathbb{T}^2)$ e seja $\varphi : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ definido como na seção anterior. Se $b(x, D)$ é um operador pseudodiferencial de modo que $a(x, D)(v \circ \varphi) = (b(y, D)v) \circ \varphi$ para toda $v \in D'(\mathbb{T}^2)$, então $a(x, D)$ é globamente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, $b(y, D)$ é globamente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$. De fato, suponha que $a(x, D)$ seja globalmente C^∞ hipoelíptico e que $b(y, D)v = f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, com $v \in D'(\mathbb{T}^2)$. Seja $u = v \circ \varphi$. Então

$$a(x, D)u = a(x, D)(v \circ \varphi) = (b(y, D)v) \circ \varphi = f \circ \varphi \in C^\infty\left(\mathbb{T}^2\right).$$

A hipoelipticidade C^∞ global de $a(x, D)$ nos garante que $v \circ \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, e o que nos dá que $v = (v \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, e portanto $b(y, D)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$.

A demonstração da recíproca é análoga. □

A hipoelipticidade C^∞ global do operador R é dada pela

Proposição 2.33 *O operador R é globalmente C^∞ hipoelíptico se, e somente se, $c\eta + d(y_1) \neq 0$ para todo $\eta \in \mathbb{Z}$ e $y_1 \in \mathbb{T}$.*

A demonstração desta proposição pode ser vista em [PZ], Teorema 3.11.

A proposição a seguir está demonstrada em [PZ], ver Teorema 5.2, com a hipótese que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Aqui precisamos que $u \in D'(\mathbb{T}^2)$.

Proposição 2.34 *Se R é globalmente C^∞ hipoelíptico, então para cada $s \in \mathbb{R}$, existe $c_s > 0$ tal que*

$$\|u\|_s \leq c_s \|Ru\|_s \,, \ \forall \ u \in D'\left(\mathbb{T}^2\right),$$

sendo que $\|\cdot\|_s$ denota a norma usual em $H^s(\mathbb{T}^2)$.

Demonstração. Para demonstrarmos essa proposição faremos uso do lema abaixo (cuja demonstração está em [PZ], Lema 5.1).

Lema 2.35 *Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \mathbb{Z}$, existe $C_t > 0$ tal que*

$$\|g_\eta\|_t \leq C_t, \ \forall \ \eta \in \mathbb{Z},$$

sendo que $g_\eta(y_1) = \frac{1}{c\eta + d(y_1)}$.

Se $\xi \in \mathbb{Z}^2$, então

$$(1 + |\xi|)^2 = 1 + 2|\xi| + |\xi|^2 \leq 2(1 + |\xi|^2).$$

Além disso,

$$(1 + |\xi|^2) \leq (1 + |\xi|)^2.$$

Assim,

$$(1 + |\xi|^2) \leq (1 + |\xi|)^2 \leq 2(1 + |\xi|^2), \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^2.$$

Em particular, existe $c_t > 0$ de modo que

$$(1 + |\xi|)^{2t} \leq c_t(1 + |\xi|^2)^t, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^2, t \in \mathbb{R}, \tag{2.24}$$

onde $c_t = 2^t$ para $t > 0$ e $c_t = 1$ para $t < 0$.

Da mesma forma obtemos

$$(1 + |\xi|^2)^t \leq c_t(1 + |\xi|)^{2t}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^2, t \in \mathbb{R}, \tag{2.25}$$

onde $c_t^1 = 1$ para $t > 0$ e $c_t^1 = 2^{-t}$ para $t < 0$.

Se $f = Ru$ com $u \in D'(\mathbb{T}^2)$, então aplicando a transformada parcial de Fourier na variável y_2, usando o fato de que R é globalmente C^∞ hipoelítico em $\mathbb{T}^2$ e a Proposição 2.33, concluímos que

$$\hat{u}(y_1, \eta) = \frac{\hat{f}(y_1, \eta)}{c\eta + d(y_1)} = g_\eta(y_1)\hat{f}(y_1, \eta), \ \forall \ y_1 \in \mathbb{T}, \eta \in \mathbb{Z},$$

sendo que $g(y_1) = \frac{1}{c\eta + d(y_1)} \in C^\infty(\mathbb{T})$ para cada $\eta \in \mathbb{Z}$.

Assim, usando (2.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_s^2 &= \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} (1 + |(\xi,\eta)|)^{2s} |\hat{u}(\xi,\eta)|^2 \\
&\leq c_s \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + \xi^2 + \eta^2\right)^s |\hat{u}(\xi,\eta)|^2 \\
&= c_s \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + \xi^2 + \eta^2\right)^s (2\pi)^{-1} \left|\left\langle \hat{u}(y_1,\eta), e^{-iy_1\xi}\right\rangle\right|^2 \\
&= c_s \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + \xi^2 + \eta^2\right)^s (2\pi)^{-1} \left|\left\langle g_\eta(y_1)\hat{f}(y_1,\eta), e^{-iy_1\xi}\right\rangle\right|^2 \\
&= c_s \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + \xi^2 + \eta^2\right)^s \left|\widehat{g_\eta(\cdot)\hat{f}(\cdot,\eta)}(\xi)\right|^2 \\
&= c_s \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + \xi^2 + \eta^2\right)^s \left|\sum_{\theta\in\mathbb{Z}} \hat{g}_\eta(\xi-\theta)\hat{f}(\theta,\eta)\right|^2 \\
&\leq c_s \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + \xi^2 + \eta^2\right)^s \left(\sum_{\theta\in\mathbb{Z}} \left|\hat{g}_\eta(\theta)\hat{f}(\xi-\theta,\eta)\right|\right)^2.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e o Lema 2.35, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_s^2 &\leq c_s \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + \xi^2 + \eta^2\right)^s \sum_{\theta\in\mathbb{Z}} (1+\theta^2)^t |\hat{g}_\eta(\theta)|^2 \sum_{\theta\in\mathbb{Z}} (1+\theta^2)^{-t} \left|\hat{f}(\xi-\theta,\eta)\right|^2 \\
&\leq c_s C_t^2 \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \sum_{\theta\in\mathbb{Z}} \left(1 + \xi^2 + \eta^2\right)^s (1+\theta^2)^{-t} \left|\hat{f}(\xi-\theta,\eta)\right|^2 \\
&= c_s C_t^2 \sum_{\theta\in\mathbb{Z}} \sum_{\theta'\in\mathbb{Z}} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}} \left(1 + (\theta+\theta')^2 + \eta^2\right)^s (1+\theta^2)^{-t} \left|\hat{f}(\theta',\eta)\right|^2.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade $(1 + (\theta+\theta')^2 + \eta^2)^s \leq 2^{|s|}(1+\theta^2)^{|s|} \left(1 + \theta'^2 + \eta^2\right)^s$ para cada $\theta, \theta', \eta \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_s^2 &\leq c_s C_t^2 \sum_{\theta\in\mathbb{Z}} \sum_{\theta'\in\mathbb{Z}} \sum_{\eta\in\in\mathbb{Z}^2} \left(1 + (\theta+\theta')^2 + \eta^2\right)^s (1+\theta^2)^{-t} \left|\hat{f}(\theta',\eta)\right|^2 \\
&\leq c_s 2^{|s|} C_t^2 \sum_{\theta\in\mathbb{Z}} (1+\theta^2)^{|s|-t} \sum_{\theta'\in\mathbb{Z}} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}} \left(1 + \theta'^2 + \eta^2\right)^s \left|\hat{f}(\theta',\eta)\right|^2
\end{aligned}$$

e basta escolhermos t de modo que $|s| - t < -2$ e agora usarmos (2.25) para concluirmos a demonstração da desigualdade desejada. $\square$

Corolário 2.36 *Os operadores R, ${}^tR$, $Q = R + \tilde{a}(y, D)$ e ${}^tQ$, com $\tilde{a}(x, D) \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}_{\sigma'}(\mathbb{T}^2)$ e $\sigma' < 0$, são globalmente C^∞ hipoelípticos com perda de 1 derivada.*

Demonstração. A afirmação sobre R é imediata da Proposição 2.34, já que a ordem de R é igual a 1. Como ${}^tR = -cD_{y_2} + d(y_1)$, a hipoelipticidade C^∞ de R e ${}^tR$ são equivalentes pela Proposição 2.33, já que $c\eta + d(y_1) = 0$ se, e somente se, $-c(-\eta) + d(y_1) = 0$. Assim ${}^tR$ é globalmente C^∞ hipoelíptico e podemos usar a Proposição 2.34 com ${}^tR$ no lugar de R.

As afirmações sobre Q e ${}^tQ$ seguem da Proposição (2.10) com $\sigma = 1$, $r = 1$ e $\sigma' < 0 = \sigma - r$. $\square$

Podemos concluir desta sub-seção que vale o seguinte

Teorema 2.37 *Suponha que a dimensão de Γ seja igual a 1. Se o campo vetorial L é globalmente C^∞ resolúvel e o operador $L + b(x)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ (em particular, $b_\Gamma \not\equiv 0$), então o operador $P = L + b(x) + a(x, D)$, com $a(x, D) \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}_\sigma(\mathbb{T}^2)$, com $\sigma < 0$, é um operador globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e globalmente C^∞ resolúvel.*

Demonstração. Segue da Observação 2.26, com o operador $a(x, D) = 0$, que o operador $L + b(x)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ se e somente se $L + b_\Gamma(x)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$. Agora segue da Proposição 2.32 que $P_0 = L + b_\Gamma$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ se e somente se $R = cD_{y_2} + d(y_1)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$, que por sua vez implica (ver Corolário 2.36) que $Q = R + \tilde{a}(y, D)$ e ${}^tQ$, com $\tilde{a}(x, D) \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}_\sigma(\mathbb{T}^2)$ e $\sigma < 0$, são globalmente hipoelípticos com perda de 1 derivada. Agora, como ${}^tQ$ é globalmente hipoelíptico com perda de 1 derivada, segue do Teorema 2.16 que Q é globalmente D' resolúvel. Também temos que o fato de $Q = R + \tilde{a}(y, D)$ ser globalmente hipoelítico com perda de 1 derivada (ver Proposição 2.9) que Q é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e portanto segue que Q é globalmente C^∞ resolúvel. Finalmente a Proposição 2.31 implica que P_1 é globalmente C^∞ resolúvel que por sua vez, usando a Proposição 2.25, garante que P é globalmente C^∞ resolúvel. Por outro lado temos que Q é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e portanto isto implica (ver Proposição 2.32) que P_1 é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e da Observação 2.26 segue que P é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$. $\square$

2.4 O Caso Gevrey

Nesta seção, introduzimos uma outra classe de operadores pseudodiferenciais, agora no contexto Gevrey a qual generaliza a classe de operadores pseudodiferenciais analítica que foi introduzida nos trabalhos [BCCJ] e [ChC]. Iremos usá-la no estudo da s-resolubilidade global e da s-hipoelipticidade global de perturbações de certas classes de operadores com coeficientes constantes.

2.4.1 Propriedades Básicas de Operadores Pseudodiferenciais Gevrey

Proposição 2.38 *Sejam* $a(x,D) : C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right) \longrightarrow C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right)$ *um operador linear e contínuo,* $k \in D'\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N\right)$ *seu núcleo distribuição e* $a(x,\eta) = e^{-ix\cdot\eta}a(x,D)e^{ix\cdot\eta}$ *seu símbolo discreto. Fixados* $s \geq 1$ *e* $\sigma \in \mathbb{R}$*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) Existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$|D_x^\alpha a(x,\eta)| \leq C^{|\alpha|+1}\alpha!^s\,(1+|\eta|)^\sigma\,,\ \forall\ x \in \mathbb{T}^N, \eta \in \mathbb{Z}^N, \alpha \in \mathbb{Z}_+^N.$$

(2) Existem constantes $C', b > 0$ *tais que*

$$\left|\widehat{k}(\xi,\eta)\right| \leq C' e^{-b|\xi+\eta|^{1/s}}(1+|\eta|)^\sigma,\ \forall\ (\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^{2N}.$$

Em particular,

$$|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| = (2\pi)^N\left|\widehat{k}(\xi,-\eta)\right| \leq C'' e^{-b|\xi-\eta|^{1/s}}(1+|\eta|)^\sigma,\ \forall\ (\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^{2N},$$

para uma constante $C'' > 0$*.*

Demonstração. Suponha que (1) seja válido e vamos demonstrar a validade de (2). Mostraremos primeiro que existe uma constante $C_0 > 0$ de modo que

$$|\xi+\eta|^{n/s}\left|\widehat{k}(\xi,\eta)\right| \leq C_0^{n+1}n!(1+|\eta|)^\sigma,\ \forall\ \xi,\eta \in \mathbb{Z}^N, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, seja $m = [n/s]$, ou seja, m é o menor inteiro maior ou igual do que n/s. Para cada $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^N$ fixados, escolhemos $j \in \{1,\ldots,N\}$ de modo que $|\xi_j+\eta_j| = \max_{1\leq k\leq N}|\xi_k+\eta_k|$.

Se e_j denota o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^N$ e $\beta = me_j$, então

$$\begin{aligned} |\xi+\eta|^{2m} &= \left(|\xi_1+\eta_1|^2+\ldots+|\xi_N+\eta_N|^2\right)^m \\ &\leq N^m|\xi_j+\eta_j|^{2m} \\ &= N^m\left|(\xi+\eta)^\beta\right|^2. \end{aligned}$$

Se $\xi+\eta\neq 0$, então $1\leq|\xi+\eta|$ e obtemos que $|\xi+\eta|^{n/s}\leq|\xi+\eta|^m\leq N^{m/2}\left|(\xi+\eta)^\beta\right|$. Observe ainda que esta desigualdade é trivialmente satisfeita quando $\xi+\eta=0$. Agora, usamos a igualdade (2.2) e observamos que $|\beta|=m$ para obtermos

$$\begin{aligned} |\xi+\eta|^{n/s}|\widehat{k}(\xi,\eta)| &= (2\pi)^{-N}|\xi+\eta|^{n/s}|\widehat{a}(\xi+\eta,-\eta)| \\ &\leq (2\pi)^{-N}N^{m/2}|(\xi+\eta)^\beta||\widehat{a}(\xi+\eta,-\eta)| \\ &= (2\pi)^{-2N}N^{m/2}\left|\int_{\mathbb{T}^N}(\xi+\eta)^\beta e^{-ix\cdot(\xi+\eta)}a(x,-\eta)dx\right| \\ &= (2\pi)^{-2N}N^{m/2}\left|\int_{\mathbb{T}^N}(D_x^\beta e^{-ix\cdot(\xi+\eta)})a(x,-\eta)dx\right| \\ &= (2\pi)^{-2N}N^{m/2}\left|\int_{\mathbb{T}^N}e^{-ix\cdot(\xi+\eta)}D_x^\beta a(x,-\eta)dx\right| \\ &\leq (2\pi)^{-2N}N^{m/2}\int_{\mathbb{T}^N}|D_x^\beta a(x,-\eta)|dx \\ &\leq (2\pi)^{-2N}N^{m/2}(2\pi)^N C^{|\beta|+1}\beta!^s(1+|\eta|)^\sigma \\ &\leq (2\pi)^{-N}N^{m/2}C^{|\beta|+1}|\beta|^{s|\beta|}(1+|\eta|)^\sigma \\ &\leq (2\pi)^{-N}N^{m/2}C^{m+1}m^{sm}(1+|\eta|)^\sigma. \end{aligned} \tag{2.26}$$

A definição de m nos mostra que $m-1<n/s$, e portanto $sm<n+s$. Além disso, $m<n/s+1\leq n+1$. Logo,

$$m^{sm}\leq m^{n+s}\leq(n+1)^{n+s}.$$

Isso nos mostra que

$$m^{sm}\leq(2n)^{n+s}=2^{n+s}n^sn^n\leq 2^{n+s}n^se^nn!,\ \forall\ n=1,2,3,\ldots. \tag{2.27}$$

Para tratarmos o caso $n = 0$, observamos que

$$\begin{aligned}
|\widehat{k}(\xi,\eta)| &= (2\pi)^{-N}|\widehat{a}(\xi+\eta,-\eta)| \\
&= (2\pi)^{-2N}\Big|\int_{\mathbb{T}^N} e^{ix(\xi+\eta)}a(x,-\eta)dx\Big| \\
&\leq (2\pi)^{-2N}\int_{\mathbb{T}^N} |a(x,-\eta)|dx \\
&\leq C(1+|\eta|)^{\sigma},\ \forall\ \xi,\eta\in\mathbb{Z}^N. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Concluímos então, de (2.26), (2.27) e (2.28) que existe $C_1 > 0$ de modo que

$$|\xi+\eta|^{n/s} \leq |\widehat{k}(\xi,\eta)| \leq C_1^{n+1}n!(1+|\eta|)^{\sigma},\ \forall\ n\in\mathbb{Z}_+,\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N. \qquad (2.29)$$

Segue de (2.29) que

$$\frac{((2C_1)^{-1}|\xi+\eta|^{1/s})^n}{n!}|\widehat{k}(\xi,\eta)| \leq C_1(1/2)^n(1+|\eta|)^{\sigma},\ \forall\ n\in\mathbb{Z}_+,\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N.$$

Somando em $n \in \mathbb{Z}_+$ na desigualdade a acima e escolhendo $b = (2C_1)^{-1}$, segue que

$$e^{b|\xi+\eta|^{1/s}}|\widehat{k}(\xi,\eta)| \leq 2C_1(1+|\eta|)^{\sigma},\ \forall\ n\in\mathbb{Z}_+,\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N,$$

e a condição (2) está demonstrada.

Reciprocamente, suponha que (2) seja válido e vamos demonstrar a validade de (1). Observamos primeiro que, de (2.2) e realizando a mudança $\xi = \eta + \theta$, obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
a(x,\eta) &= \sum_{\theta\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\theta}\widehat{a}(\theta,\eta) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi-\eta)}\widehat{a}(\xi-\eta,\eta) \\
&= (2\pi)^N\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi-\eta)}\widehat{k}(\xi,-\eta). \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Segue de (2.30) e da condição (2) que

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha a(x,\eta)| &= (2\pi)^N \Big|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(\xi-\eta)^\alpha e^{ix\cdot(\xi-\eta)}\widehat{k}(\xi,-\eta)\Big| \\ &\leq (2\pi)^N \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}|(\xi-\eta)^\alpha \widehat{k}(\xi,-\eta)| \\ &\leq (2\pi)^N C(1+|\eta|)^\sigma \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(|\xi-\eta|^{|\alpha|}e^{-b/2|\xi-\eta|^{1/s}})e^{-b/2|\xi-\eta|^{1/s}}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Utilizamos agora a desigualdade $t^p e^{-at^{1/s}} \leq c^p p!^s$ para todo $t \geq 0, p \in \mathbb{Z}_+$, com $c = (s/a)^s$ e obtemos de (2.31) que, para uma certa constante $C' > 0$, vale

$$|D_x^\alpha a(x,\eta)| \leq C'^{|\alpha|+1}(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{-b/2|\xi|^{1/s}})(1+|\eta|)^\sigma |\alpha|!^s,$$

o que termina a demonstração do item (1), já que $|\alpha|! \leq N^{|\alpha|}\alpha!$. $\square$

Definição 2.39 *O espaço dos operadores $a(x,D)$ que satisfazem uma das condições da Proposição 2.38 será denotado por $\mathfrak{Dp}_\sigma^s\left(\mathbb{T}^N\right)$. Definimos ainda*

$$\mathfrak{Dp}^s\left(\mathbb{T}^N\right) = \bigcup_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathfrak{Dp}_\sigma^s\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Para o próximo lema, lembramos que se $s \geq 1$ e $h > 0$, então $G^{s,h}\left(\mathbb{T}^N\right) = \{f \in C^\infty\left(\mathbb{T}^N\right) : \sup_{x\in\mathbb{T}^N}\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N}|\partial^\alpha f(x)|\,\alpha!^{-s}h^{-|\alpha|} < \infty\}$ e

$$\|f\|_{s,h} = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^N}|\partial^\alpha f(x)|\,\alpha!^{-s}h^{-|\alpha|}, f \in G^{s,h}\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Além disso, $G^s\left(\mathbb{T}^N\right) = \bigcup_{h>0} G^{s,h}\left(\mathbb{T}^N\right)$. Mostra-se que se $h < h'$, então a inclusão $G^{s,h}\left(\mathbb{T}^N\right) \subset G^{s,h'}\left(\mathbb{T}^N\right)$ é compacta e consideramos a topologia do limite indutivo em $G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ a partir de uma escolha de uma sequência $\{h_j\}_j$ estritamente crescente e que tende a infinito.

Lema 2.40 *1) Seja $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $G^{s,h}\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $||f_j||_{s,h} \to 0$. Então existe $\epsilon > 0$ dependendo somente de h e $N = \dim\mathbb{T}^N$ e uma sequência de números positivos $\{c_j\}_j$ de modo que*

$$|\widehat{f}_j(\xi)| \leq c_j e^{-\epsilon|\xi|^{1/s}},\ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^N, j \in \mathbb{N},$$

sendo que $c_j \to 0$.

2) Seja $\{g_j\} \subset G^s(\mathbb{T}^N)$ *tal que existe uma sequência de números positivos* $\{d_j\}_j$ *tal que* $d_j \to 0$ *e* $\epsilon_1 > 0$ *tal que*

$$|\widehat{g}_j(\xi)| \leq d_j e^{-\epsilon_1|\xi|^{1/s}}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^N, j \in \mathbb{N}.$$

Então existe $\ell \in \mathbb{R}$ *tal que* $||g_j||_{s,\ell} \to 0$.

Demonstração. 1) Seja $\{f_j\}_j$ uma sequência em $G^{s,h}\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $||f_j||_{s,h} \to 0$. Então temos

$$\|f_j\|_{s,h} = \sup_{x\in\mathbb{T}^N} \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_+} |D^\alpha f_j(x)|\, h^{-|\alpha|}\alpha!^{-s} \to 0, \text{ quando } j \to +\infty.$$

Seja $n \in \mathbb{Z}_+$ e considere $m = [n/s]$. Então, como feito na demonstração da Proposição 2.38, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^N$, existe $\beta \in \mathbb{Z}^N_+$ tal que $|\beta| = m$ e $|\xi|^{n/s} \leq N^{m/2}|\xi^\beta|$. Daí,

$$\begin{aligned} |\xi|^{n/s}|\widehat{f}_j(\xi)| &\leq N^{m/2}|\widehat{D^\beta f_j}(\xi)| \\ &\leq N^{m/2}(2\pi)^{-N}\int_{\mathbb{T}^N}\left|D^\beta f_j(x)\right| dx \\ &\leq N^{m/2}h^m m!^s \|f_j\|_{s,h}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Se $n \geq 1$, então segue de (2.27) e do fato de $e^{-ms} \leq 1$ que $m!^s \leq 2^{n+s}n^s e^n n!$, e portanto concluímos que existe $C_0 > 0$ satisfazendo

$$|\xi|^{n/s}|\widehat{f}_j(\xi)| \leq C_0^{n+1} n!\, \|f_j\|_{s,h}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^N, n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Além disso, por (2.32), obtemos (2.33) também para $n = 0$. Segue que

$$\frac{\left((2C_0)^{-1}|\xi|^{1/s}\right)^n}{n!}|\widehat{f}_j(\xi)| \leq 2^{-n}C_0\,\|f_j\|_{s,h}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^N, n \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathbb{N}$$

e, somando em $n \in \mathbb{Z}_+$, obtemos que, se $\epsilon = \frac{1}{2C_0}$, então $|\widehat{f}_j(\xi)| \leq C_0\,\|f_j\|_{s,h}\, e^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}$. Agora basta escolhermos $c_j = C_0\,\|f_j\|_{s,h}$. A demonstração do item 1) está completa. □

2) Seja $\{g_j\} \subset G^s(\mathbb{T}^N)$ tal que existe uma sequência de números positivos $\{d_j\}_j$, com $d_j \to 0$ e $\epsilon_1 > 0$ satisfazendo

$$|\widehat{g}_j(\xi)| \leq d_j e^{-\epsilon_1|\xi|^{1/s}}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^N, j \in \mathbb{N}.$$

Então, existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$\begin{aligned} |D^\alpha g_j(x)| &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} |\xi|^{|\alpha|}|\widehat{g}_j(\xi)| \leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} d_j(|\xi|^{|\alpha|}e^{-\frac{\epsilon_1}{2}|\xi|^{1/s}})e^{-\frac{\epsilon_1}{2}|\xi|^{1/s}} \\ &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} d_j C_1^{|\alpha|+1}\alpha!^s e^{-\frac{\epsilon_1}{2}|\xi|^{1/s}} \leq d_j C_2^{|\alpha|+1}\alpha!^s. \end{aligned}$$

A desigualdade acima nos mostra que

$$\|g_j\|_{s,C_2} \leq C_2 d_j, \ \forall \ j \in \mathbb{N},$$

o que demonstra que $g_j \in G^{s,\ell}(\mathbb{T}^N)$, com $\ell = C_2$, e $||g_j||_{s,\ell} \longrightarrow 0$. □

Proposição 2.41 *Se $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ e $f \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, então $a(x,D)f \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$. Além disso, a aplicação $a(x,D) : G^s\left(\mathbb{T}^N\right) \longrightarrow G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ é contínua.*

Demonstração. Como $G^s(\mathbb{T}^N)$ está munido da topologia limite indutivo dos espaços de Banach $G^{s,h}(\mathbb{T}^N)$, então, para demonstrarmos a continuidade do operador

$$a(x,D) : G^s\left(\mathbb{T}^N\right) \longrightarrow G^s\left(\mathbb{T}^N\right),$$

é suficiente mostrarmos que dado h existe ℓ tal que

$$a(x,D) : G^{s,h}\left(\mathbb{T}^N\right) \longrightarrow G^{s,\ell}\left(\mathbb{T}^N\right)$$

é contínua.

Para isto, seja $\{f_j\} \subset G^{s,h}(\mathbb{T}^N)$ tal que $f_j \to 0$, isto é $||f_j||_{s,h} \to 0$ em $\mathbb{R}$. Assim segue do item 1) do Lema 2.40 que existe $\epsilon > 0$ e uma sequência de números positivos $\{c_j\}_j$ de modo que

$$|\widehat{f_j}(\xi)| \leq c_j e^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}, \ \forall \ \xi \in \mathbb{Z}^N, j \in \mathbb{N},$$

sendo que $c_j \to 0$.

Agora definimos $g_j(x) \doteq a(x,D)f_j(x)$ e analisemos $\widehat{a(x,D)f_j}(\xi)$. Para isto iremos precisar do seguinte resultado obtido na Proposição 2.38, isto é, existem $C, \epsilon_1 > 0$ tais que

$$|\widehat{a}(\xi,\eta)| \leq Ce^{-\epsilon_1|\xi|^{1/s}}(1+|\eta|)^\sigma, \ \forall \ (\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^{2N}.$$

Temos

$$
\begin{aligned}
\left|(\widehat{a(x,D)}f_j(\xi)\right| &\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\,|\widehat{f}_j(\eta)| \\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} Ce^{-\epsilon_1|\xi-\eta|^{1/s}}(1+|\eta|)^\sigma c_j e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}} \\
&= Cc_j\Big(\sum_{\frac{|\xi|}{2}\leq|\eta|} e^{-\epsilon_1|\xi-\eta|^{1/s}}(1+|\eta|)^\sigma e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}} \\
&+ \sum_{\frac{|\xi|}{2}>|\eta|} e^{-\epsilon_1|\xi-\eta|^{1/s}}(1+|\eta|)^\sigma e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}}\Big) \doteq (Cc_j)(I+II). \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Para estimar a parcela I, observamos que se $\frac{|\xi|}{2}\leq|\eta|$, então $-\frac{\epsilon}{2}|\eta|^{1/s}\leq -\frac{\epsilon}{2^{(1/s)+1}}|\xi|^{1/s}$, e portanto

$$
I \leq \Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\eta|)^\sigma e^{-\frac{\epsilon}{2}|\eta|^{1/s}}\Big)e^{-\frac{\epsilon}{2^{1/s+1}}|\xi|^{1/s}}, \qquad (2.35)
$$

pois usamos o fato que $e^{-\epsilon_1|\xi-\eta|^{1/s}}\leq 1$.

Para estimar a parcela II, observamos que se $\frac{|\xi|}{2}>|\eta|$, então $|\xi|\leq|\xi-\eta|+|\eta|\leq|\xi-\eta|+\frac{|\xi|}{2}$, e portanto $\frac{|\xi|}{2}\leq|\xi-\eta|$. Logo, $-\epsilon_1|\xi-\eta|^{1/s}\leq -\frac{\epsilon_1}{2^{1/s}}|\xi|^{1/s}$. Assim,

$$
II \leq \Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\eta|)^\sigma e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}}\Big)e^{-\frac{\epsilon_1}{2^{1/s}}|\xi|^{1/s}}. \qquad (2.36)
$$

Utilizando (2.34), (2.35) e (2.36), concluímos que

$$
\begin{aligned}
|(\widehat{a(x,D)}f_j)(\xi)| &\leq Cc_j\big[C_1(\sigma,s)e^{-\frac{\epsilon}{2^{1/s+1}}|\xi|^{1/s}}+C_2(\sigma,s)e^{-\frac{\epsilon_1}{2^{1/s}}|\xi|^{1/s}}\big] \\
&\leq d_j e^{-\epsilon_0|\xi|^{1/s}}
\end{aligned}
$$

com $\epsilon_0=\min\{\frac{\epsilon}{2^{1/s+1}},\frac{\epsilon_1}{2^{1/s}}\}$, $d_j=C_0c_j\to 0$ e $C_0>$ depende somente de σ e s.

Assim, do item 2) do Lema 2.40, segue que existe ℓ tal que $||g_j||=||a(x,D)f_j||_{s,\ell}\to 0$ e a demonstração da continuidade está agora completa. □

Para mostrar que se $f\in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ então $a(x,D)f\in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, basta reproduzir a demonstração acima trocando f_j por f e lembrar que se $f\in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, então existem $\epsilon_0>0$ e $C_0>0$ tais que

$$
|\widehat{f}(\xi)|\leq C_0e^{-\epsilon_0|\xi|^{1/s}},\ \forall\,\xi\in\mathbb{Z}^N.
$$

$\square$

Observação 2.42 *O mesmo resultado da Proposição 2.41 é verdadeiro para o transposto do operador $a(x, D)$, isto é o operador ${}^t a(x, D)$ aplica continuamente o espaço $G^s(\mathbb{T}^N)$ sobre si mesmo.*

Proposição 2.43 *Seja $a(x, D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma(\mathbb{T}^N)$. Então, $a(x, D)$ e ${}^t a(x, D)$ se estendem a um operador linear e contínuo de $D'_s(\mathbb{T}^N)$ sobre si mesmo.*

Demonstração. Como $G^s(\mathbb{T})$ é um limite indutivo de espaços de Banach por aplicações compactas e portanto Montel (ver Komatsu [K1]), a demonstração segue como a demonstração da Proposição 2.6. $\square$

Proposição 2.44 *Sejam $a(x, D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma(\mathbb{T}^N)$ e $b \in \mathfrak{Dp}^s_{\sigma'}(\mathbb{T}^N)$. Então, $a(x, D) \circ b(x, D) \in \mathfrak{Dp}^s_{\sigma+\sigma'}(\mathbb{T}^N)$ e o símbolo de $a(x, D) \circ b(x, D)$ é dado por*

$$a\#b(x, \eta) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} a(x, \xi) \widehat{b}(\xi - \eta, \eta).$$

Demonstração. Já sabemos (Proposição 2.3) que o símbolo discreto do operador $a(x, D) \circ b(x, D)$ é dado por

$$a\#b(x, \eta) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} a(x, \xi) \widehat{b}(\xi - \eta, \eta).$$

Para concluir a demonstração é suficiente mostrarmos que $a\#b$ dado acima satisfaz a condição (1) da Proposição 2.38 para $\sigma + \sigma'$ no lugar de σ. Segue da Proposição 2.38 que existem constantes positivas $C > 0$ e $b > 0$ de modo que

$$\begin{aligned}
|D^\alpha_x (a\#b)(x, \eta)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \binom{\alpha}{\beta} |\xi - \eta|^{|\alpha-\beta|} \left| D^\beta_x a(x, \xi) \right| |\widehat{b}(\xi - \eta, \eta)| \\
&\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \binom{\alpha}{\beta} |\xi - \eta|^{|\alpha-\beta|} C^{|\beta|+1} \beta!^s (1 + |\xi|)^\sigma C e^{-b|\xi-\eta|^{1/s}} (1 + |\eta|)^{\sigma'} \\
&\leq C(1 + |\eta|)^{\sigma+\sigma'} \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \binom{\alpha}{\beta} \beta!^s |\xi - \eta|^{|\alpha-\beta|} C^{|\beta|+1} \frac{(1 + |\xi|)^\sigma}{(1 + |\eta|)^\sigma} C e^{-b|\xi-\eta|^{1/s}} \\
&= C^2 (1 + |\eta|)^{\sigma+\sigma'} \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \frac{\alpha! \beta!^{s-1}}{(\alpha - \beta)!} |\xi - \eta|^{|\alpha-\beta|} C^{|\beta|} \frac{(1 + |\xi|)^\sigma}{(1 + |\eta|)^\sigma} e^{-b|\xi-\eta|^{1/s}}.
\end{aligned}$$

Usamos agora a desigualdade

$$(1+|\xi|)^{\sigma} \leq (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|}(1+|\eta|)^{\sigma},\ \forall\ \xi,\eta \in \mathbb{Z}^N$$

para concluirmos que

$$|D_x^{\alpha}(a\#b)(x,\eta)| \leq C^2(1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'} \sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \frac{\alpha!\beta!^{s-1}}{(\alpha-\beta)!}(1+|\xi-\eta|)^{|\alpha-\beta|+|\sigma|}C^{|\beta|}e^{-b|\xi-\eta|^{1/s}}. \quad (2.37)$$

Sabemos que existe $C' \geq 1$ tal que

$$(1+|\xi-\eta|)^{|\alpha-\beta|}e^{-b/2|\xi-\eta|^{1/s}} \leq C'^{|\alpha-\beta|+1}(\alpha-\beta)!^s,\ \forall\ \beta\leq\alpha, \alpha\in\mathbb{Z}_+^N. \quad (2.38)$$

Além disso,

$$\frac{\alpha!\beta!^{s-1}}{(\alpha-\beta)!}(\alpha-\beta)!^s = \alpha!\beta!^{s-1}(\alpha-\beta)!^{s-1} \leq \alpha!\alpha!^{s-1} = (\alpha!)^s. \quad (2.39)$$

Aumentando a constante $C>0$ se necessário, segue de (2.37), (2.38) e (2.39) que

$$\begin{aligned}
|D_x^{\alpha}(a\#b)(x,\eta)| &\leq C^2(1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'} \sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \frac{\alpha!\beta!^{s-1}}{(\alpha-\beta)!}(1+|\xi-\eta|)^{|\alpha-\beta|+|\sigma|}C^{|\beta|}e^{-b|\xi-\eta|^{1/s}} \\
&\leq C^{|\alpha|+1}\alpha!^s(1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'} \sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|}e^{-b/2|\xi-\eta|^{1/s}} \\
&\leq 2^{|\alpha|}\Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi|)^{|\sigma|}e^{-b/2|\xi|^{1/s}}\Big)C^{|\alpha|+1}\alpha!^s(1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'}
\end{aligned}$$

e concluímos que existe constante positiva C_1 tal que

$$|D_x^{\alpha}(a\#b)(x,\eta)| \leq C_1^{|\alpha|+1}\alpha!^s\,(1+|\eta|)^{\sigma+\sigma'},\ \forall\ x\in\mathbb{T}^N, \eta\in\mathbb{Z}^N, \alpha\in\mathbb{Z}_+^N,$$

o que conclui a demonstração. □

2.4.2 Hipoelipticidade global Gevrey

Fixados $s \geq 1$, $\delta,\sigma \in \mathbb{R}$, consideramos $(DG)^s_{\delta,\sigma}\left(\mathbb{T}^N\right)$ o espaço de todos os elementos $u \in D'_s\left(\mathbb{T}^N\right)$ tais que

$$\|u\|^2_{s,\delta,\sigma} \doteq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma}|\widehat{u}(\xi)|^2 < +\infty.$$

Segue da definição acima e do item 3 da proposição abaixo que para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ temos $D'_s\left(\mathbb{T}^N\right) = \bigcap_{\delta<0} (DG)^s_{\delta,\sigma}\left(\mathbb{T}^N\right)$.

A menos que seja dito o contrário, as constantes B e B_j que aparecerão nesta seção serão constantes que não dependem de δ.

Proposição 2.45 *Seja $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(1) $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, existe $\delta > 0$ tal que $u \in (DG)^s_{\delta,\sigma}(\mathbb{T}^N)$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$;

(2) $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, existem $\delta > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ tais que $u \in (DG)^s_{\delta,\sigma}(\mathbb{T}^N)$;

(3) $u \in (DG)^s_{\delta,\sigma}(\mathbb{T}^N)$ para todo $\delta < 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Iniciamos observando que, para demonstrarmos (1) e (2), basta mostrarmos que a condição em (1) é necessária e que a condição em (2) é suficiente.

Necessidade da condição em (1): Suponha que $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Então existem $C, \epsilon > 0$ de modo que

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq Ce^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}, \ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Se $\sigma \in \mathbb{R}$, então

$$\|u\|^2_{s,\epsilon/2,\sigma} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{\epsilon|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma}|\widehat{u}(\xi)|^2 \leq C^2 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma} < +\infty,$$

portanto basta considerarmos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Suficiência da condição em (2): Agora suponha que existam $\delta > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ de modo que $u \in (DG)^s_{\delta,\sigma}(\mathbb{T}^N)$. Como a série $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma}|\widehat{u}(\xi)|^2$ é convergente, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que $e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma}|\widehat{u}(\xi)|^2 \leq C$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$. Assim,

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C^{1/2}(1+|\xi|)^{-\sigma}e^{-\delta|\xi|^{1/s}} = C^{1/2}((1+|\xi|)^{-\sigma}e^{-\delta/2|\xi|^{1/s}})e^{-\delta/2|\xi|^{1/s}} \leq C'e^{-\delta/2|\xi|^{1/s}},$$

o que demonstra que $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Assim, a demonstração dos itens (1) e (2) está completa.

Demonstração do item (3): Dado $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$, fixamos $\delta < 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ e vamos mostrar que $u \in (DG)^s_{\delta,\sigma}(\mathbb{T}^N)$. Como $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$, existe $C > 0$ de modo que $|\widehat{u}(\xi)| \leq Ce^{-\frac{\delta}{2}|\xi|^{1/s}}$ para todo

$\xi \in \mathbb{Z}^N$. Daí, como $\delta < 0$, temos

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma}|\widehat{u}(\xi)|^2 \leq C^2 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma} < +\infty,$$

e a demonstração do item (3) está completa. $\square$

Proposição 2.46 *Seja $f \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Então existem $\delta_0 > 0$ e uma constante $B > 0$ tais que*

$$\|f\|_{s,\delta,k} \leq B^{k+1}k!^s, \ \forall \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

para todo $\delta \leq \delta_0$.

Demonstração. Seja $f \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$. Então existem $\epsilon_1 > 0, B_1 > 0$ satisfazendo $|\widehat{f}(\xi)| \leq B_1 e^{-\epsilon_1|\xi|^{1/s}}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$. Definimos $\delta_0 = \frac{\epsilon_1}{2} > 0$ e para $\delta \leq \delta_0$ temos

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{s,\delta,k} &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k}|\widehat{f}(\xi)|^2 \\ &\leq B_1^2 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{2\delta_0|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k}e^{-2\epsilon_1|\xi|^{1/s}} \\ &\leq B_1^2 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{\epsilon_1|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k}e^{-2\epsilon_1|\xi|^{1/s}} \\ &= B_1^2 \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{2k}e^{-\epsilon_1|\xi|^{1/s}}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Usando o fato de que $t^p e^{-at^{1/s}} \leq (\frac{s}{a})^{sp}p!^s$ obtemos

$$\begin{aligned} (1+|\xi|)^{2k}e^{-\frac{\epsilon_1}{2}|\xi|^{1/s}} &= \sum_{\ell=0}^{2k}\binom{2k}{\ell}|\xi|^\ell e^{-\frac{\epsilon_1}{2}|\xi|^{1/s}} \leq \sum_{\ell=0}^{2k}\binom{2k}{\ell}C_1^\ell \ell!^s \\ &\leq 2^{2k}C_1^{2k}(2k)!^s \leq B_2^{2k+2}k!^{2s}, \end{aligned} \tag{2.41}$$

com C_1, B_2 dependendo somente de s, ϵ_1, e podemos assumir sem perda de generalidade que $C_1 \geq 1, B_2 \geq 1$.

Segue de (2.40) e (2.41) que

$$\|f\|^2_{s,\delta,k} \leq B_1^2 B_2^{2k+2}k!^{2s} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{-\frac{\epsilon_1}{2}|\xi|^{1/s}} \leq B_1^2 B_2^{2k+2}k!^{2s}C^2_{\epsilon_1} \leq B^{2(k+1)}k!^{2s}.$$

Portanto, obtemos que $\|f\|_{s,\delta,k} \leq B^{k+1}k!^s$, e assim a demonstração está completa. $\square$

A próxima desigualdade generaliza a estimativa $||f||_s \leq \delta||f||_t + \delta^{-\frac{s-r}{t-s}}||f||_r,\ f \in H^t(\mathbb{T}^N)$, a qual é válida para todo $\delta > 0$ e r, s e $t \in \mathbb{R}$ tais que $r < s < t$, para ultradistribuições.

Lema 2.47 *Dados $\epsilon > 0$, $\delta < 0$, $s \geq 1$ e $\rho < \sigma < \tau$, vale*

$$\|u\|_{s,\delta,\sigma} \leq \epsilon \|u\|_{s,\delta,\tau} + \epsilon^{-\frac{\sigma-\rho}{\tau-\sigma}} \|u\|_{s,\delta,\rho}\,,\ \forall\ u \in D_s'\left(\mathbb{T}^N\right).$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{s,\delta,\sigma}^2 &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma}|\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&= \sum_{(1+|\xi|)^{2\tau-2\sigma}\epsilon^2\geq 1} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma}|\widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{(1+|\xi|)^{2\tau-2\sigma}\epsilon^2< 1} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\sigma}|\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\doteq (I) + (II).
\end{aligned}$$

Iremos estimar agora os termos (I) e (II). Começamos observando que

$$(I) \leq \sum_{(1+|\xi|)^{2\tau-2\sigma}\epsilon^2\geq 1} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\tau}\epsilon^2|\widehat{u}(\xi)|^2 \leq \epsilon^2 \|u\|_{s,\delta,\tau}^2\,.$$

Para estimar (II), observe que se $(1+|\xi|)^{2\tau-2\sigma}\epsilon^2 < 1$ e $\rho < \sigma < \tau$, então

$$(1+|\xi|)^{2\sigma} = (1+|\xi|)^{2\rho}(1+|\xi|)^{2\sigma-2\rho} = (1+|\xi|)^{2\rho}\left((1+|\xi|)^{2\tau-2\sigma}\right)^{\frac{\sigma-\rho}{\tau-\sigma}} \leq (1+|\xi|)^{2\rho}(\epsilon^{-2})^{\frac{\sigma-\rho}{\tau-\sigma}}.$$

Logo,

$$(II) \leq \sum_{(1+|\xi|)^{2\tau-2\sigma}\epsilon^2< 1} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2\rho}(\epsilon^{-2})^{\frac{\sigma-\rho}{\tau-\sigma}}|\widehat{u}(\xi)|^2 \leq (\epsilon^2)^{-\frac{\sigma-\rho}{\tau-\sigma}} \|u\|_{s,\delta,\rho}^2\,.$$

Concluímos que, se $\rho < \sigma < \tau$, então

$$\|u\|_{s,\delta,\sigma}^2 \leq \epsilon^2 \|u\|_{s,\delta,\tau}^2 + (\epsilon^2)^{-\frac{\sigma-\rho}{\tau-\sigma}} \|u\|_{s,\delta,\rho}^2\,,$$

e basta extrairmos a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade para concluirmos a demonstração. $\square$

Proposição 2.48 *Suponha que $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma^s\left(\mathbb{T}^N\right)$. Seja $\epsilon_0 > 0$ de modo que $|\widehat{a}(\xi,\eta)| \leq$*

$C_0 e^{-2\epsilon_0|\xi|^{1/s}}(1+|\eta|)^{\sigma}$ *para todo* $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^N$ *e alguma constante* $C_0 > 0$. *Então*

$$\|a(x,D)u\|_{s,\delta,k} \leq B\,\|u\|_{s,\delta,k+\sigma} + B^{k+1}k!^s\,\|u\|_{s,\delta,\sigma}\,,$$

para toda $u \in D_s'\left(\mathbb{T}^N\right)$, *todo número* $k \in \mathbb{Z}_+$ *e todo número* $\delta < 0$ *satisfazendo* $-\epsilon_0/2 < \delta < 0$. *Além disso,* $B > 0$ *é uma constante que não depende de* δ *e nem de* $k \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. Durante a demonstração abaixo, B denotará uma constante positiva que não depende de $\delta < 0$ e nem de k e ela será modificada um número finito de vezes. Se $u \in D_s'\left(\mathbb{T}^N\right)$, então

$$\begin{aligned}
\|a(x,D)u\|_{s,\delta,k} &= \Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k}\big|\widehat{a(x,D)u}(\xi)\big|^2\Big)^{1/2}\\
&\leq \Big[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi-\eta|+|\eta|)^k\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\,|\widehat{u}(\eta)|\Big)^2\Big]^{1/2}\\
&= (\bigstar).
\end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Minkowisky para integrais, obtemos

$$\begin{aligned}
(\bigstar) &\leq \Big[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\Big(\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{\delta|\xi|^{1/s}}|\xi-\eta|^{\ell}(1+|\eta|)^{k-\ell}\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\,|\widehat{u}(\eta)|\Big)^2\Big]^{1/2}\\
&\leq \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\Big[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}\Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}|\xi-\eta|^{\ell}(1+|\eta|)^{k-\ell}\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\,|\widehat{u}(\eta)|\Big)^2\Big]^{1/2}. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, segue de (2.42) que

$$\begin{aligned}
(\bigstar) \leq \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\Big[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}\Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}|\xi-\eta|^{2\ell}\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\Big)\\
\times\Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\eta|)^{2(k-\ell)}\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\,|\widehat{u}(\eta)|^2\Big)\Big]^{1/2}
\end{aligned}$$

e usando a estimativa satisfeita pelo símbolo discreto $\widehat{a}(\xi,\eta)$, obtemos

$$(\bigstar) \leq \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \Big[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}} \Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\xi-\eta|^{2\ell} C_0 e^{-2\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\eta|)^{\sigma} \Big)$$
$$\times \Big(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} (1+|\eta|)^{2(k-\ell)} \, |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| \, |\widehat{u}(\eta)|^2 \Big) \Big]^{1/2}. \tag{2.43}$$

Analisamos agora a parcela $\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\xi-\eta|^{2\ell} C_0 e^{-2\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\eta|)^{\sigma}$.

Segue da desigualdade $t^p e^{-at^{1/s}} \leq (\frac{s}{a})^{sp} p!^s$ que

$$(|\xi-\eta|)^{2\ell} e^{-\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} \leq B^{2(\ell+1)} \ell!^{2s}, \ \forall\, \xi,\eta\in\mathbb{Z}^N, \ell\in\mathbb{Z}_+,$$

e portanto, usando a desigualdade $(1+|\eta|)^{\sigma} \leq (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|}(1+|\xi|)^{\sigma}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\xi-\eta|^{2\ell} C_0 e^{-2\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\eta|)^{\sigma} \leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} B^{2(\ell+1)} \ell!^{2s} C_0 e^{-\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\eta|)^{\sigma} \\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} B^{2(\ell+1)} \ell!^{2s} C_0 e^{-\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} (1+|\xi|)^{\sigma} \\
&= C_0 B^{2(\ell+1)} \ell!^{2s} (1+|\xi|)^{\sigma} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{-\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \\
&\leq B^{2(\ell+1)} \ell!^{2s} (1+|\xi|)^{\sigma},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

pois temos que $\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{-\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \leq C_1^s$, com C_1 uma constante positiva.

Agora usamos (2.43) e (2.44) e concluímos que

$$\begin{aligned}
(\bigstar) \ &\leq \ \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^{\ell+1} \ell!^s \Big[\sum_{\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}} (1+|\eta|)^{2k-2\ell} (1+|\xi|)^{\sigma} \, |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| \, |\widehat{u}(\eta)|^2 \Big]^{1/2} \\
&\leq \ \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^{\ell+1} \ell!^s \Big[\sum_{\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}} (1+|\eta|)^{2k-2\ell+\sigma} \times \\
&\qquad\qquad \times (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \, |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| \, |\widehat{u}(\eta)|^2 \Big]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Utilizando novamente as estimativas para o símbolo discreto de $a(x, D)$, segue que

$$(\bigstar) \leq \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^{\ell+1} \ell!^s \Big[\sum_{\xi,\eta \in \mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}} (1+|\eta|)^{2(k-\ell)+2\sigma} \times$$
$$\times (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} e^{-2\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} \left|\widehat{u}(\eta)\right|^2 \Big]^{1/2}. \quad (2.45)$$

Note que $|\eta|^{1/s} \leq |\xi - \eta|^{1/s} + |\xi|^{1/s}$, já que $s \geq 1$. Logo, como $\delta < 0$ temos $2\delta|\eta|^{1/s} \geq 2\delta|\xi - \eta|^{1/s} + 2\delta|\xi|^{1/s}$, e portanto

$$2\delta|\xi|^{1/s} - 2\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s} \leq 2\delta|\eta|^{1/s} - 2(\delta+\epsilon_0)|\xi-\eta|^{1/s}.$$

Lembre ainda que estamos supondo que $\frac{-\epsilon_0}{2} < \delta < 0$. Dessa forma, temos que $\frac{\epsilon_0}{2} - \epsilon_0 < \delta$, o que nos dá $\epsilon_0/2 < \delta + \epsilon_0$. Logo, $-2(\delta+\epsilon_0) < -\epsilon_0$ e obtemos então

$$2\delta|\xi|^{1/s} - 2\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s} \leq 2\delta|\eta|^{1/s} - \epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s} - 2\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} &\leq e^{2\delta|\eta|^{1/s}} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{-\epsilon_0|\xi-\eta|^{1/s}} (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \\
&= e^{2\delta|\eta|^{1/s}} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{-\epsilon_0|\xi|^{1/s}} (1+|\xi|)^{|\sigma|} \\
&= B_1 e^{2\delta|\eta|^{1/s}}. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Obtemos de (2.45) e (2.46) que

$$\begin{aligned}
(\bigstar) &\leq \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^{\ell+1} \ell!^s \Big(\sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\eta|^{1/s}} (1+|\eta|)^{2(k-\ell)+2\sigma} \left|\widehat{u}(\eta)\right|^2 \Big)^{1/2} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^{\ell+1} \ell!^s \left\|u\right\|_{s,\delta,k-\ell+\sigma},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\left\|a(x,D)u\right\|_{s,\delta,k} \leq \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} B^{\ell+1} \ell!^s \left\|u\right\|_{s,\delta,k-\ell+\sigma} = (\bigstar\bigstar).$$

Fixado $1 \leq \ell \leq k-1$, como $\sigma < k - \ell + \sigma < k + \sigma$, podemos aplicar o Lema 2.47 com

$\epsilon_\ell = \binom{k}{\ell}^{-1} \ell!^{-s}(2B)^{-\ell}$ e temos

$$\begin{aligned}
\binom{k}{\ell}\ell!^s B^{\ell+1} \|u\|_{s,\delta,k-\ell+\sigma} &\leq B2^{-\ell}\|u\|_{s,\delta,k+\sigma} + \binom{k}{\ell}\ell!^s B^{\ell+1}\epsilon_\ell^{-\frac{k-\ell}{\ell}}\|u\|_{s,\delta,\sigma} \\
&= B2^{-\ell}\|u\|_{s,\delta,k+\sigma} + \binom{k}{\ell}\ell!^s B^{\ell+1}\epsilon_\ell^{-\frac{k}{\ell}}\epsilon_\ell\|u\|_{s,\delta,\sigma} \\
&= B2^{-\ell}\|u\|_{s,\delta,k+\sigma} + B2^{-\ell}\epsilon_\ell^{-\frac{k}{\ell}}\|u\|_{s,\delta,\sigma}. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades $\frac{k!}{(k-\ell)!} \leq k^\ell$ e $\ell! \leq \ell^\ell$, obtemos

$$\begin{aligned}
\epsilon_\ell^{-\frac{k}{\ell}} &= \left(\binom{k}{\ell}\ell!^s(2B)^\ell\right)^{\frac{k}{\ell}} = \left(\frac{k!}{(k-\ell)!}\ell!^{s-1}(2B)^\ell\right)^{\frac{k}{\ell}} \\
&\leq \left(k^\ell \ell^{\ell(s-1)}(2B)^\ell\right)^{\frac{k}{\ell}} = k^k \ell^{k(s-1)}(2B)^k.
\end{aligned}$$

Agora usando o fato que $k^k \leq k!e^k$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\epsilon_\ell^{-\frac{k}{\ell}} &\leq (2Be)^k k!(k^k)^{s-1} \\
&\leq e^{k(s-1)}(2Be)^k k!^s. \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Segue de (2.47) e (2.48) que

$$\begin{aligned}
(\bigstar\bigstar) &= B\|u\|_{s,\delta,k+\sigma} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,\sigma} + \\
&+ \sum_{\ell=1}^{k-1}\binom{k}{\ell}B^{\ell+1}\ell!\|u\|_{s,\delta,k-\ell+\sigma} \\
&\leq B\|u\|_{s,\delta,k+\sigma} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,\sigma} + \\
&+ B\sum_{\ell=1}^{k-1}2^{-\ell}\|u\|_{s,\delta,k+\sigma} + Be^{k(s-1)}(2eB)^k k!^s\sum_{\ell=1}^{k-1}2^{-\ell}\|u\|_{s,\delta,\sigma}.
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\sum_{\ell=1}^{k-1}2^{-\ell} \leq \sum_{\ell=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^\ell = 2$, podemos concluir que

$$\|a(x,D)u\|_{s,\delta,k} \leq B\|u\|_{s,\delta,k+\sigma} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,\sigma}$$

e a demonstração está completa. $\square$

Definição 2.49 *Seja $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$. Dizemos que $a(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico com perda de r derivadas, com $0 \leq r < +\infty$, se existem $B > 0$, $\delta_0 < 0$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r} \leq B\,\|a(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s\,\|u\|_{s,\delta,k_0}\,,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+, u \in D'_s\left(\mathbb{T}^N\right),$$

para todo δ tal que $\delta_0 < \delta < 0$.

Proposição 2.50 *Seja $s \geq 1$. Se $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ é globalmente s-hipoelíptico com perda de r derivadas, então $a(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico, ou seja, se $u \in D'_s\left(\mathbb{T}^N\right)$ e $a(x,D)u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, então $u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$.*

Demonstração. Suponha que $u \in D'_s\left(\mathbb{T}^N\right)$ e $a(x,D)u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ e mostraremos que $u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$. Como $a(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico com perda de r derivadas, existem $B > 0$, $\delta_0 < 0$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r} \leq B\,\|a(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s\,\|u\|_{s,\delta,k_0}\,,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.49}$$

para todo δ que satisfaz $\delta_0 < \delta < 0$, sendo que a constante B não depende de δ. Pela Proposição 2.46, como $a(x,D)u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, aumentando B se necessário, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|a(x,D)u\|_{s,\delta,k} \leq B^{k+1}k!^s,\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+,\ \forall\ \delta \leq \delta_1.$$

Aumentando novamente B se necessário, concluímos de (2.49) que

$$\|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r} \leq B^{k+1}k!^s\left(1 + \|u\|_{s,\delta,k_0}\right),\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+,\ \forall\ \delta_0 < \delta < 0. \tag{2.50}$$

Além disso, como $\delta < 0$ existe $C_\delta > 0$ (que depende também de σ, r e s que estão fixos), de modo que

$$e^{\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^{-(\sigma-r)} \leq C_\delta,\ \forall\ \xi \in \mathbb{Z}^N\backslash\{0\}. \tag{2.51}$$

Segue de (2.50) e (2.51) que, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^N \backslash \{0\}$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$\begin{aligned} e^{2\delta|\xi|^{1/s}} |\xi|^k \left|\widehat{u}(\xi)\right| &= \left(e^{\delta|\xi|^{1/s}} |\xi|^{-(\sigma-r)} \right) e^{\delta|\xi|^{1/s}} |\xi|^{k+\sigma-r} \left|\widehat{u}(\xi)\right| \\ &\leq C_\delta e^{\delta|\xi|^{1/s}} |\xi|^{k+\sigma-r} \left|\widehat{u}(\xi)\right| \\ &= C_\delta \left(e^{2\delta|\xi|^{1/s}} |\xi|^{2k+2(\sigma-r)} \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_\delta \left\| u \right\|_{s,\delta,k+\sigma-r} \\ &\leq B^{k+1} k!^s C_\delta \left(1 + \left\| u \right\|_{s,\delta,k_0} \right), \end{aligned}$$

de onde concluímos, aumentando a constante $C_\delta > 0$, que

$$e^{(2\delta/s)|\xi|^{1/s}} |\xi|^{k/s} \left|\widehat{u}(\xi)\right|^{1/s} \leq B^{\frac{k+1}{s}} k! C_\delta^{1/s} \left(1 + \left\| u \right\|_{s,\delta,k_0} \right)^{1/s}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

pois esta desigualdade trivialmente vale para $\xi = 0$. Assim,

$$e^{(2\delta/s)|\xi|^{1/s}} \frac{\left(\left(2B^{1/s} \right)^{-1} |\xi|^{1/s} \right)^k}{k!} \left|\widehat{u}(\xi)\right|^{1/s} \leq B^{1/s} 2^{-k} C_\delta \left(1 + \left\| u \right\|_{s,\delta,k_0} \right)^{1/s}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^N, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Somando em $k \in \mathbb{Z}_+$ na última desigualdade, concluímos que

$$e^{\left((2\delta/s) + \frac{1}{2B^{1/s}} \right) |\xi|^{1/s}} \left|\widehat{u}(\xi)\right|^{1/s} \leq B^{1/s} 2 C_\delta^{1/s} \left(1 + \left\| u \right\|_{s,\delta,k_0} \right)^{1/s}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Elevando os termos a s, obtemos

$$e^{\left(2\delta + \frac{s}{2B^{1/s}} \right) |\xi|^{1/s}} \left|\widehat{u}(\xi)\right| \leq B 2^s C_\delta \left(1 + \left\| u \right\|_{s,\delta,k_0} \right), \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Como B não depende de $\delta < 0$, podemos diminuir δ, em módulo e supor que $2\delta + \frac{s}{2B^{1/s}} > 0$. Note ainda que $\left\| u \right\|_{s,\delta,k_0} < +\infty$ pela Proposição 2.45. Assim, a estimativa

$$\left|\widehat{u}(\xi)\right| \leq B 2^s C_\delta \left(1 + \left\| u \right\|_{s,\delta,k_0} \right) e^{-\left(2\delta + \frac{s}{2B^{1/s}} \right) |\xi|^{1/s}}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^N$$

nos mostra que $u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, o que completa a demonstração. $\square$

Proposição 2.51 *Seja $s \geq 1$. Se $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ e é globalmente s-hipoelíptico com perda de r derivadas e $a_0(x,D) \in \mathfrak{Dp}_{\sigma_0}^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, sendo $\sigma_0 < \sigma - r$, então o operador $P = a(x,D) + a_0(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico.*

Demonstração. Ao longo da demonstração, B denotará uma constante positiva que não depende de δ e que será modificada um número finito de vezes. Além disso, a constante $C_\delta > 0$ pode depender de δ, e também será modificada um número finito de vezes. Suponha que $Pu \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, com $u \in D_s'\left(\mathbb{T}^N\right)$, e vamos mostrar que $u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$. Como $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}_\sigma^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ e é globalmente s-hipoelíptico com perda de r derivadas, pela desigualdade triangular, temos que existem constantes $B > 0$, $\delta_0 < 0$ e $k_0 \in \mathbb{R}$ de modo que se $\delta_0 < \delta < 0$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, então

$$\begin{aligned}\|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r} &\leq B\|a(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,k_0}\\ &\leq B\|Pu\|_{s,\delta,k} + B\|a_0(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,k_0}.\end{aligned}$$

Como $a_0(x,D) \in \mathfrak{Dp}_{\sigma_0}^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, existe $\epsilon_0 > 0$ e uma constante positiva C_0 tais que $|\widehat{a}_0(\xi,\eta)| \leq C_0 e^{-2\epsilon_0|\xi|^{1/s}}(1+|\eta|)^{\sigma_0}$ para todo $\xi,\eta \in \mathbb{Z}^N$. Note que, diminuindo ϵ_0 se necessário, podemos supor que $\delta_0 < -\epsilon_0/2$. Se $-\epsilon_0/2 < \delta < 0$, então a Proposição 2.48 nos garante que

$$\begin{aligned}\|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r} &\leq B\|Pu\|_{s,\delta,k} + B\|a_0(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,k_0}\\ &\leq B\|Pu\|_{s,\delta,k} + B^2\|u\|_{s,\delta,k+\sigma_0} + B^{k+2}k!^s\|u\|_{s,\delta,\sigma_0} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,k_0}\\ &\leq B\|Pu\|_{s,\delta,k} + B\|u\|_{s,\delta,k+\sigma_0} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,\sigma_0} + B^{k+1}k!^s\|u\|_{s,\delta,k_0}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Como $\sigma_0 < \sigma - r$, podemos considerar $N_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\sigma_0 < \sigma - r - \frac{1}{N_0}$. Observe que $\sigma_0 - 1 < k + \sigma_0 < k + \sigma - r$.

Podemos usar o Lema 2.47, com $\epsilon = \frac{1}{2B}$, para obtermos

$$B\|u\|_{s,\delta,k+\sigma_0} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r} + B\left(\frac{1}{2B}\right)^{-\frac{k+1}{\sigma-r-\sigma_0}}\|u\|_{s,\delta,\sigma_0-1}. \tag{2.53}$$

Afirmamos que $\frac{k+1}{\sigma-r-\sigma_0} \leq N_0(k+1)$. De fato, como $\sigma - r - \sigma_0 > 0$, essa desigualdade equivale a $\frac{1}{N_0} \leq \sigma - r - \sigma_0$ e esta última desigualdade é válida pela escolha de N_0. Dessa forma, supondo sem perda de generalidade que $B > 1$, obtemos

$$\left(\frac{1}{2B}\right)^{-\frac{k+1}{\sigma-r-\sigma_0}} = (2B)^{\frac{k+1}{\sigma-r-\sigma_0}} \leq (2B)^{N_0(k+1)},\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.54}$$

Segue de (2.53) e (2.54) que

$$B\|u\|_{\sigma,\delta,k+\sigma_0} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r} + B(2B)^{N_0(k+1)}\|u\|_{s,\delta,\sigma_0-1},\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.55}$$

Aumentando k_0 de modo que $\sigma_0 \leq k_0$ (e portanto também temos que $\sigma_0 - 1 < k_0$), obtemos de (2.52) e (2.55) que

$$\|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r} \leq B\|Pu\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s \|u\|_{s,\delta,k_0}, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.56}$$

Como $\delta < 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$, que também depende de σ, r (os quais estão fixos), de modo que

$$e^{\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^{-(\sigma-r)} \leq C_\delta, \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^N\backslash\{0\}. \tag{2.57}$$

Usando (2.57) obtemos, para $\xi \in \mathbb{Z}^N\backslash\{0\}$, que

$$\begin{aligned} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^k |\widehat{u}(\xi)| &= \left(e^{\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^{-(\sigma-r)}\right) e^{\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^{k+\sigma-r} |\widehat{u}(\xi)| \\ &\leq C_\delta e^{\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^{k+\sigma-r} |\widehat{u}(\xi)| \\ &= C_\delta \left(e^{2\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^{2k+2(\sigma-r)} |\widehat{u}(\xi)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq C_\delta \|u\|_{s,\delta,k+\sigma-r}. \end{aligned}$$

Agora segue desta desigualdade e de (2.56) que

$$e^{2\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^k |\widehat{u}(\xi)| \leq BC_\delta \|Pu\|_{s,\delta,k} + C_\delta B^{k+1}k!^s \|u\|_{s,\delta,k_0}, \ \xi \in \mathbb{Z}^N\backslash\{0\}.$$

Finalmente, como $Pu \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$, segue da Proposição 2.46 que

$$e^{2\delta|\xi|^{1/s}}|\xi|^k |\widehat{u}(\xi)| \leq B^{k+1}k!^s C_\delta \left(1 + \|u\|_{s,\delta,k_0}\right), \ \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^N\backslash\{0\}.$$

Usando esta última desigualdade podemos mostrar que $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$ e isto é feito exatamente como fizemos para mostrar que a desigualdade (2.50) implica que $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$ na demonstração da Proposição 2.50. $\square$

Observação 2.52 *No resultado anterior podemos supor que $\sigma_0 \leq \sigma - r$ ao invés de $\sigma_0 < \sigma - r$ e assim mostramos que o operador P é globalmente s-hipoelíptico com perda de $r - \epsilon$ derivadas no lugar de r derivadas, para qualquer $\epsilon > 0$.*

Inspirados no Teorema 2.2 de [ChC] apresentaremos abaixo uma aplicação da teoria que desenvolvemos acima. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado o qual generaliza este teorema para a classe das funções Gevrey e seu dual, o espaço das ultradistribuições.

Teorema 2.53 *Seja $P(x,D) = P_0(D) + \sum_{j=1}^{m} a_j(x)P_j(D)$ um operador diferencial parcial linear, sendo que $a_j \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ para todo $j = 1,\dots,m$ e os operadores com coeficientes constantes $P_0(D)$ e $P_j(D)$ satisfazem as seguintes condições:*

(1) Existem $R, C > 0$ e $M \geq 0$ tais que

$$|P_0(\xi)| \geq \frac{C}{(1+|\xi|)^M},\ \forall\ |\xi| \geq R.$$

(2) Para cada $j = 1,\dots,m$, existem $\epsilon_j > 0$ e $c_j > 0$ de modo que $|P_j(\xi)| \leq c_j(1+|\xi|)^{-\epsilon_j}|P_0(\xi)|$.

Seja σ_0 a ordem do operador P_0. Então, $P(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico com perda de $r = \sigma_0 + M$ derivadas e, portanto, é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

Note que sob tais condições o operador $P(x,D)$ acima é de força constante (ver [Ho1]).

Demonstração.

De fato, seja $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$. Observe primeiro que da condição (1), se $k \in \mathbb{Z}_+$ e $\delta < 0$, então

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{s,\delta,k-M} &= \sum_{|\xi|\geq R} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{|\xi|<R} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&= \sum_{|\xi|\geq R} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}\frac{(1+|\xi|)^{2k-2M}}{|P_0(\xi)|^2}|\widehat{P_0u}(\xi)|^2 + \sum_{|\xi|<R} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq C^{-2}\sum_{|\xi|\geq R} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k}|\widehat{P_0u}(\xi)|^2 + \sum_{|\xi|<R} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq C^{-2}\sum_{|\xi|\geq R} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k}|\widehat{P_0u}(\xi)|^2 + (1+R)^{2k}\sum_{|\xi|<R} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2.
\end{aligned}$$

Concluímos assim que

$$\|u\|_{s,\delta,k-M} \leq D\,\|P_0u\|_{s,\delta,k} + D^{k+1}\,\|u\|_{s,\delta,-M}\,, \tag{2.58}$$

sendo $D^2 = \max\{C^{-2},(1+R)^2\}$.

Segue da condição (2) que existem constantes $c_j > 0$ e $\epsilon_j > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|P_j u\|^2_{s,\delta,k} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k}|P_j(\xi)|^2|\widehat{u}(\xi)|^2 \\ &\leq c_j^2 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2\epsilon_j}|P_0(\xi)|^2|\widehat{u}(\xi)|^2 \\ &= c_j^2 \|P_0 u\|^2_{s,\delta,k-\epsilon_j}. \end{aligned}$$

Como $a_j \in G^s(\mathbb{T}^N)$, existem $\tilde{\epsilon_j} > 0$ e $C_j > 0$ tais que $|\widehat{a_j}(\xi)| \leq C_j e^{-\tilde{\epsilon_j}|\xi|^{1/s}}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^N$. Assim, segue da desigualdade triangular e da Proposição 2.48 para cada $a_j(x)$ que é, em particular, um operador pseudodiferencial de ordem 0, que existem constantes positivas B_j tais que

$$\begin{aligned} \|P_0 u\|_{s,\delta,k} &\leq \|P(x,D)u\|_{s,\delta,k} + \sum_{j=1}^m \|a_j(x)P_j u\|_{s,\delta,k} \\ &\leq \|P(x,D)u\|_{s,\delta,k} + \sum_{j=1}^m \Big(B_j \|P_j u\|_{s,\delta,k} + B_j^{k+1}k!^s \|P_j u\|_{s,\delta,0}\Big) \\ &\leq \|P(x,D)u\|_{s,\delta,k} + \sum_{j=1}^m \big(B_j c_j \|P_0 u\|_{s,\delta,k-\epsilon_j} + B_j^{k+1}k!^s c_j \|P_0 u\|_{s,\delta,-\epsilon_j}\big), \end{aligned} \tag{2.59}$$

para todo δ tal que $-\epsilon_0 < \delta < 0$, onde $-\epsilon_0 = \max\{-\frac{\tilde{\epsilon_j}}{4}, j = 1, \dots, m\}$.

Sejam $B = \max\{1, B_j, c_j B_j, j = 1, \dots, m\}$, $-\epsilon_1 = \max\{-\epsilon_j, j = 1.\dots, m\}$. Segue de (2.59) que

$$\begin{aligned} \|P_0 u\|_{s,\delta,k} &\leq \|P(x,D)u\|_{s,\delta,k} + \sum_{j=1}^m \big(B \|P_0 u\|_{s,\delta,k-\epsilon_1} + B^{k+1}k!^s \|P_0 u\|_{s,\delta,-\epsilon_1}\big) \\ &\leq \|P(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B\|P_0 u\|_{s,\delta,k-\epsilon_1} + B^{k+1}k!^s \|P_0 u\|_{s,\delta,-\epsilon_1}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

para todo $-\epsilon_0 < \delta < 0$.

Seja $\epsilon' \in \mathbb{R}$ de modo que $\epsilon' < -\epsilon_1$. Utilizamos agora o Lema 2.47 com $\epsilon = \frac{1}{2B}$ e $\epsilon' < k - \epsilon_1 < k$ para obtermos

$$B\|P_0 u\|_{s,\delta,k-\epsilon_1} \leq \frac{1}{2}\|P_0 u\|_{s,\delta,k} + B\left(\frac{1}{2B}\right)^{-\frac{k-\epsilon_1-\epsilon'}{\epsilon_1}} \|P_0 u\|_{s,\delta,\epsilon'}. \tag{2.61}$$

Como $\epsilon' < -\epsilon_1$ segue de (2.60) e (2.61) que

$$\|P_0 u\|_{s,\delta,k} \leq 2\,\|P(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s\,\|P_0 u\|_{s,\delta,-\epsilon_1} \tag{2.62}$$

Obtemos de (2.58) e (2.62), e supondo, sem perda de generalidade, que as constantes envolvidas são maiores que 1, a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{s,\delta,k-M} \leq B\,\|P(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s\left(\|P_0 u\|_{s,\delta,-\epsilon_1} + \|u\|_{s,\delta,-M}\right). \tag{2.63}$$

Como a ordem de P_0 é σ_0, então

$$\begin{aligned}
\|P_0 u\|^2_{s,\delta,-\epsilon_1} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{-2\epsilon_1}\left|\widehat{P_0 u}(\xi)\right|^2 \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{-2\epsilon_1}\,|P_0(\xi)|^2\,|\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq C\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{-2\epsilon_1+2\sigma_0}\,|\widehat{u}(\xi)|^2 \\
&= C\,\|u\|_{s,\delta,-\epsilon_1+\sigma_0}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Se $k_0 = \max\{-\epsilon_1+\sigma_0, -M\}$ e aumentando $B > 0$ se necessário, então segue de (2.63) e (2.64) que

$$\|u\|_{s,\delta,k-M} \leq B\,\|P(x,D)u\|_{s,\delta,k} + B^{k+1}k!^s\,\|u\|_{s,\delta,k_0}, \text{ para } -\epsilon_0 < \delta < 0$$

e a demonstração está completa. □

2.4.3 Sobre a Resolubilidade em $D'_s(\mathbb{T}^N)$

Teorema 2.54 *Seja $s \geq 1$. Se $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ e é globalmente s-hipoelíptico com perda de r derivadas, $a_0(x,D) \in \mathfrak{Dp}^s_{\sigma_0}\left(\mathbb{T}^N\right)$ com $\sigma_0 < \sigma - r$ e $P = a(x,D) + a_0(x,D)$, então ${}^tP$ é globalmente D'_s resolúvel, ou seja, dada*

$$f \in \mathcal{E}({}^tP)_s \doteq \left\{g \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right) : \int_{\mathbb{T}^N} g(x)h(x)dx = 0,\ \textit{se } Ph = 0,\ \textit{com } h \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)\right\},$$

existe $u \in D'_s\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que ${}^tPu = f$.

Para demonstrarmos esse resultado, basta utilizarmos a Proposição 2.51 e o

Teorema 2.55 *Seja $b(x,D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$. Se $b(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico, então ${}^t b(x,D)$ é globalmente D'_s resolúvel.*

Observação 2.56 *O Teorema 2.55 pode ser demonstrado como o Teorema 2.1 de [AZ] foi demonstrado.*

2.4.4 Perturbações dos operadores $P(D)$ - caso Gevrey

Iniciamos esta seção com a seguinte

Definição 2.57 *Seja $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$ com $x \in \mathbb{T}^N$ e $a(x,D) : G^s(\mathbb{T}^N) \longrightarrow G^s(\mathbb{T}^N)$. Dizemos que $a(x,D)$ é globalmente s-resolúvel, se dada $f \in (\ker\ {}^t a(x,D))^{\perp}_s$, existe $u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ de modo que $a(x,D)u = f$. Aqui, o conjunto*

$$\left(\ker\ {}^t a(x,D)\right)^{\perp}_s \doteq \{f \in G^s(\mathbb{T}^N) : \langle w, f\rangle = 0,\ \text{para toda } w \in D'_s\left(\mathbb{T}^N\right) \text{ tal que } {}^t a(x,D)w = 0\}.$$

Seja

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha,\ a_\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{Z}^N_+ \tag{2.65}$$

um operador diferencial parcial linear com coeficientes constantes em $\mathbb{T}^N$. Seu símbolo é dado por

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha,\ \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Segue de Greenfield-Wallach [GW] que o operador $P(D)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ se e somente se existem constantes positivas L, M e C tais que

$$|P(\xi)| \ge L|\xi|^{-M},\ |\xi| \ge C. \tag{2.66}$$

Também, é fácil mostrar que o operador $P(D)$ é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ se e somente se para cada $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|P(\xi)| \ge e^{-\epsilon|\xi|^{1/s}},\ |\xi| \ge C_\epsilon. \tag{2.67}$$

Como (2.66) implica (2.67) concluímos que se $P(D)$ é globalmente C^∞ hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ então P é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$.

O Próximo resultado nos permitirá concluir que o operador $P(D)$ perde $m + M$ derivadas.

Proposição 2.58 *Suponha que o operador $P(D)$ seja globalmente C^∞ resolúvel, então se $\delta < 0, k \in \mathbb{Z}_+$ e $u \in D'_s(\mathbb{T}^2)$ existem constantes positivas L, M e A tais que*

$$\|u\|^2_{s,\delta,k-M} \leq L^{-2}\|P(D)u\|_{s,\delta,k} + A^{k+1}\|u\|^2_{s,\delta,-(M+1)}, \tag{2.68}$$

isto é, ver Definição 2.49, o operador $P(D)$ e ${}^tP(D)$ são globalmente s-hipoelípticos com perda de $M+m$ derivadas (lembre que a ordem de $P(D)$ é igual a m).

Demonstração. Como $P(D)$ é globalmente C^∞ resolúvel segue da Proposição 2.19, que

$$\text{existem } L>0, M>0 \text{ tais que } |P(\xi)| \geq L|\xi|^{-M},\ \forall\, \xi \notin S,\ \ S \text{ finito}.$$

Assim, se $\delta < 0, k \in \mathbb{Z}_+$ e $u \in D'_s(\mathbb{T}^2)$, temos

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{s,\delta,k-M} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^2} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2\\
&= \sum_{\xi\notin S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{\xi\in S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2\\
&= \sum_{\xi\notin S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}\frac{|P(\xi)|^2}{|P(\xi)|^2}|\widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{\xi\in S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2\\
&= \sum_{\xi\notin S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}\frac{1}{|P(\xi)|^2}|\widehat{P(D)u}(\xi)|^2 + \sum_{\xi\in S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2\\
&\leq L^{-2}\sum_{\xi\notin S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k}|\widehat{P(D)u}(\xi)|^2 + \sum_{\xi\in S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{2k-2M}|\widehat{u}(\xi)|^2\\
&\leq L^{-2}\|P(D)u\|_{s,\delta,k} + A^{k+1}\sum_{\xi\in S} e^{2\delta|\xi|^{1/s}}(1+|\xi|)^{-2(M+1)}|\widehat{u}(\xi)|^2\\
&\leq L^{-2}\|P(D)u\|_{s,\delta,k} + A^{k+1}\|u\|^2_{s,\delta,-(M+1)}.
\end{aligned}$$

onde $A = \max_{\xi\in S}\{(1+|\xi|)^2\}$ e também usamos o fato que $\frac{1}{|P(\xi)|^2} \leq L^{-2}|\xi|^{2M} \leq L^{-2}(1+|\xi|)^{2M}$.

Note que da mesma forma mostra-se que o mesmo vale para ${}^tP(D)$. $\square$

Corolário 2.59 *Suponha que o operador $P(D)$ seja globalmente C^∞ resolúvel e que $a(x,D)$ seja um operador pseudodiferencial Gevrey de ordem $\sigma < -M$, sendo M dado no item (5) da Proposição 2.19. Então, $Q = P(D) + a(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico com perda de $M+m$ derivadas. O mesmo vale para ${}^tQ$.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.51 e da Proposição 2.58. $\square$

Teorema 2.60 *Sejam $P(D)$ como em (2.65) e $a(x,D) \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^N\right)$. Se $P(D)$ é globalmente C^∞ resolúvel e $\sigma < -M$ então o operador $Q = P(D) + a(x,D)$ é um operador globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ e globalmente s-resolúvel.*

Demonstração. Como por hipótese o operador $P(D)$ é globalmente C^∞ resolúvel e a ordem do operador pseudodiferencial Gevrey $a(x,D)$ é $\sigma < -M$ então segue do Corolário 2.59 que Q e ${}^tQ$ são operadores globalmente s-hipoelípticos com perda de $M+m$ derivadas.

Mostremos agora que Q é globalmente s-resolúvel em $\mathbb{T}^N$. Para $f \in \left(\ker^t Q\right)^\perp_s$ vê-se facilmente que $f \in \mathcal{E}({}^tQ)_s$. Como ${}^tQ$ é um operador globalmente s-hipoelíptico com perda de $M+m$ derivadas então segue da Proposição 2.50 que ${}^tQ$ é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ e segue do Teorema 2.55 que o operador Q é globalmente resolúvel em $D'_s(\mathbb{T}^N)$ e portanto existe $u \in D'_s\left(\mathbb{T}^N\right)$ tal que $Qu = f$. Para concluirmos que $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$ basta lembrarmos que segue da Proposição 2.50 e do fato que o operador Q é globalmente s-hipoelíptico com perda de $M+m$ derivadas que Q é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^N$ e portanto podemos concluir que $u \in G^s\left(\mathbb{T}^N\right)$ e a demonstração está completa. $\square$

2.4.5 Perturbações do campo vetorial $L = c_1D_{x_1} + c_2D_{x_2}$ - caso Gevrey

Iniciamos com uma redução do problema.

Redução

Para $b \in G^s(\mathbb{T}^2)$, escrevemos o operador $L + b(x)$ como $L + b_\Gamma(x) + b_{\Gamma^c}(x)$ e se o campo vetorial L é globalmente s-resolúvel e como $b_{\Gamma^c} \in (\ker\ {}^tL)^\perp$ (veja Lema 2.5 em [PZ]), existe $h \in G^s\left(\mathbb{T}^2\right)$ de modo que $Lh = b_{\Gamma^c}$.

Proposição 2.61 *Se o campo vetorial L é globalmente s-resolúvel então o operador $P = L + b(x) + a(x,D)$, com $a(x,D) \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^2\right)$, $\sigma < 0$, é globalmente s-resolúvel se, e somente se, o operador $P_1 = L + b_\Gamma(x) + a_1(x,D_x)$ é globalmente s-resolúvel, sendo que $a_1(x,D_x) \doteq e^h a(x,D_x)e^{-h} \in \mathfrak{D}\mathfrak{p}^s_\sigma\left(\mathbb{T}^2\right)$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que P_1 seja globalmente s-resolúvel e vamos mostrar que P é globalmente s-resolúvel. Seja $f \in (\ker\ {}^tP)^\perp_s$. Definimos $g = e^h f \in G^s\left(\mathbb{T}^2\right)$ e vamos mostrar que $g \in (\ker\ {}^tP_1)_s^{\perp}$. Se $w \in D'_s(\mathbb{T}^2)$, então

$$\langle w, g\rangle = \left\langle e^h w, f\right\rangle,$$

e portanto é suficiente mostrarmos que $e^h w \in \ker\ {}^tP$ se $w \in \ker\ {}^tP_1$. Primeiro, se $\psi \in G^s(\mathbb{T}^2)$, então

$$\left\langle {}^tP(e^h w), \psi\right\rangle = \left\langle e^h w, P\psi\right\rangle = \left\langle w, e^h P\psi\right\rangle. \tag{2.69}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} P_1(e^h\psi) &= (L + b_\Gamma(x) + a_1(x, D_x))\, e^h\psi \\ &= e^h b_{\Gamma^c}(x)\psi + e^h(L\psi) + b_\Gamma(x)e^h\psi + a_1(x, D_x)(e^h\psi) \\ &= e^h(L + b(x))\psi + e^h a(x, D_x)\psi \\ &= e^h P\psi. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Observe ainda que as igualdades acima permanecem válidas se trocarmos ψ por uma ultradistribuição $v \in D'_s(\mathbb{T}^2)$ qualquer. Segue de (2.69), (2.70) e do fato que $w \in \ker\ {}^tP_1$ que

$$\left\langle {}^tP(e^h w), \psi\right\rangle = \left\langle w, P_1(e^h\psi)\right\rangle = \left\langle {}^tP_1 w, e^h\psi\right\rangle = 0,$$

isto é, $e^h w \in \ker P$ e portanto $g \in (\ker\ {}^tP_1)_s^{\perp}$.

Como P_1 é globalmente s-resolúvel, existe $v \in G^s(\mathbb{T}^2)$ tal que $P_1 v = g$. Definimos $u = e^{-h}v \in G^s(\mathbb{T}^2)$ e temos

$$\begin{aligned} Pu &= (L + b(x) + a(x, D_x))(e^{-h}v) \\ &= e^{-h}\left(-b_{\Gamma^c}(x)\right)v + e^{-h}Lv + b(x)e^{-h}v + e^{-h}e^h a(x, D_x)e^{-h}v \\ &= e^{-h}\left(L + b_\Gamma(x) + a_1(x, D_x)\right)v \\ &= e^{-h}P_1 v = e^{-h}g = f, \end{aligned}$$

o que demonstra que P é globalmente s-resolúvel.

Reciprocamente, vamos supor que P é globalmente s-resolúvel e vamos mostrar que P_1 é globalmente s-resolúvel. Seja $f \in (\ker\ {}^tP_1)_s^{\perp}$ e defina $g = e^{-h}f \in G^s(\mathbb{T}^2)$. Como antes, para mostrarmos que $g \in (\ker\ {}^tP)_s^{\perp}$, é suficiente mostrarmos que se $w \in D'_s(\mathbb{T}^2)$ e $w \in \ker\ {}^tP$, então $e^{-h}w \in \ker\ {}^tP_1$. Isso segue das seguintes igualdades: se $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^2)$, usamos (2.70) com

$\psi = e^{-h}\varphi$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle {}^tP_1(e^{-h}w), \varphi \right\rangle &= \left\langle w, e^{-h}P_1\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle w, P(e^{-h}\varphi) \right\rangle \\
&= \left\langle {}^tPw, e^{-h}\varphi \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Como estamos supondo P globalmente s-resolúvel, segue existe $v \in G^s(\mathbb{T}^2)$ de modo que $Pv = g$. Definimos $u = e^h v \in G^s(\mathbb{T}^2)$ e temos

$$\begin{aligned}
P_1 u &= (L + b_\Gamma(x) + a_1(x, D))\, e^h v \\
&= e^h b_{\Gamma^c}(x)v + e^h Lv + b_\Gamma(x)e^h v + e^h a(x, D)v \\
&= e^h Pv = e^h g = f
\end{aligned}$$

e a demonstração está completa. □

Observação 2.62 A mesma ideia usada na proposição anterior nos permite concluir que se o campo vetorial L é globalmente G^s resolúvel então P é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, P_1 é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$. De fato, suponha que P_1 seja globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e que $Pu = f \in G^s(\mathbb{T}^2)$, com $u \in D'_s(\mathbb{T}^2)$. Se $v = e^h u$, então segue de (2.70) que $P_1 v = e^h Pu = e^h f \in G^s(\mathbb{T}^2)$. Logo $v = e^h u \in G^s(\mathbb{T}^2)$, o que nos garante que $u \in G^s(\mathbb{T}^2)$.

Reciprocamente, suponha que P seja globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e que $P_1 u = f \in G^s(\mathbb{T}^2)$, com $u \in D'_s(\mathbb{T}^2)$. Se $v = e^{-h}u$, então segue de (2.70) que $Pv = P(e^{-h}u) = e^{-h}P_1 u = e^{-h}f \in G^s(\mathbb{T}^2)$. Logo, $v \in G^s(\mathbb{T}^2)$, e portanto $u \in G^s(\mathbb{T}^2)$. □

2.4.6 O Caso $\Gamma = \{0\}$

Segue da subseção anterior que no caso em que $\Gamma = \{0\}$ temos que estudar o operador

$$P_1 = L + b_0 + a_1(x, D),$$

pois no caso $\Gamma = \{0\}$ temos que $b_\Gamma(x) = \widehat{b}(0) = b_0 \in \mathbb{C}$ é uma constante.

Nesta subseção aplicaremos a teoria desenvolvida na subseção 2.4.4 para o operador com coeficientes constantes dado por $P_0(D) = L + b_0 = c_1 D_{x_1} + c_2 D_{x_2} + b_0$.

Nosso principal resultado é o seguinte

Teorema 2.63 *Sejam* $L = \sum_{j=1}^{2} c_j D_{x_j}$, $c_j \in \mathbb{R}$, $b(x) \in G^s(\mathbb{T}^2;\mathbb{C})$, $a(x,D) \in \mathfrak{Dp}^s_\sigma(\mathbb{T}^2)$ *com* $\sigma < -M$ *e* $\Gamma = \{0\}$, *onde* M *é dado em* (2.66). *Suponha que o campo vetorial* L *e o operador* $L + b(x)$ *sejam globalmente* C^∞ *resolúveis. Então o operador* $P = L + b_0 + a(x,D) = P_0(D) + a(x,D)$ *é globalmente* s*-hipoelíptico em* $\mathbb{T}^2$ *e globalmente* s*-resolúvel.*

Demonstração. Como o campo vetorial L é globalmente C^∞ resolúvel então, como visto anteriormente, temos que L é globalmente s- resolúvel e portanto segue da Proposição 2.61 e Observação 2.62 que é suficiente mostrarmos que $P_1 = L + b_\Gamma(x) + a_1(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e globalmente s-resolúvel. Lembre que no caso em que $\Gamma = \{0\}$, o operador P_1 é dado por $P_1 = L + b_0 + a_1(x,D) = P_0(D) + a_1(x,D)$, sendo $b_0 = \widehat{b}(0) \in \mathbb{C}$ uma constante e $P_0(D) = L + b_0$.

Como o operador $L + b(x)$ é globalmente C^∞ resolúvel então segue da Proposição 2.29 que $P_0(D) = L + b_0$ é globalmente C^∞ resolúvel e como $\sigma < -M$ então segue do Teorema 2.60 que $P = L + b_0 + a(x,D) = P_0(D) + a(x,D)$ é globalmente s-hipoelíptico em $\mathbb{T}^2$ e globalmente s-resolúvel. $\square$

Capítulo 3

Resolubilidade Global no Toro $\mathbb{T}^N$

3.1 Motivação

No trabalho "Global s-solvability and global s-hypoellipticity for certain perturbations of zero order of systems of constant real vector fields"escrito por Petronilho-Zani, [PZ], é considerado um sistema de campos vetorias com coeficientes reais, dado por por

$$L_j = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} D_{x_k}, \ j = 1, \ldots, m,$$

onde $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$ e $a_{jk} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, 2,$. Assumindo que este sistema é globalmente resolúvel no espaço de Gevrey $G^s(\mathbb{T}^2)$, $s \geq 1$, eles procuram condições para que o sistema perturbado

$$P_j = L_j + b_j(x),$$

onde $b_j \in G^s(\mathbb{T}^2; \mathbb{C})$, também seja globalmente resolúvel em $G^s(\mathbb{T}^2)$.

Motivados por este trabalho procuramos estender os resultados de [PZ] para o toro com dimensão maior do que dois.

Iniciaremos considerando o seguinte operador:

$$X = d_t + a(t) \wedge \partial_x, \ x \in \mathbb{T} \ t \in \mathbb{T}^n$$

sendo que $a(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) dt_j$ é uma forma fechada, isto é, $\partial_{t_j} a_k(t) = \partial_{t_k} a_j(t), \ j, k = 1, \ldots, n$ e $a_j \in G^s(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. A família correspondente de n campos vetoriais reais, que comutam entre si, associados ao operador X é dada por

$$M_j = \partial_{t_j} + a_j(t)\partial_x,\ j = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

(ver [BCM]). É fácil ver que a família $\{M_j\}_1^n$ é transformada simultaneamente na família $\{\partial_{s_j} + a_{j0}\partial_y\}_1^n$ se definirmos um difeomorfismo de $\mathbb{T}^{n+1}$ em $\mathbb{T}^{n+1}$ dado por $y = x - h(t), s = t$, sendo que h satisfaz $\partial_{t_j} h(t) = a_j(t) - a_{j0}$, com $a_{j0} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} a_j(t)dt$. Verifica-se que a função $h(t) = \int_0^{t_1} a_1(s, t_2, \ldots, t_n)ds - a_{10}t_1 + \cdots + \int_0^{t_n} a_n(0, \ldots, 0, s)ds - a_{n0}t_n$ satisfaz as condições exigidas sobre a função $h(t)$.

Por simplicidade vamos nos referir aos campos vetoriais reais constantes $\partial_{s_j} + a_{j0}\partial_y$ por $M_{j0} = \partial_{t_j} + a_{j0}\partial_x$.

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a resolubilidade global Gevrey do sistema $\mathcal{M} \doteq \{M_j\}_1^n$ e de suas perturbações por termos de ordem zero.

Não é difícil ver que dadas $f_j \in G^s(\mathbb{T}^n \times S^1)$ tais que existe $u \in G^s(\mathbb{T}^n \times S^1)$ satisfazendo $M_j u = f_j$, $j = 1, \ldots, n$, então devemos ter $M_j f_k = M_k f_j$, $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, e, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $\langle w, f_j\rangle = 0$ para toda $w \in \bigcap_{\ell=1}^n \ker {}^tM_\ell$.

Assim, para o estudo da resolubilidade global Gevrey vamos nos restringir às funções Gevrey $f_1, \ldots, f_n$ satisfazendo as condições acima. Mais precisamente, definimos o seguinte conjunto

$$\mathcal{G}^s(\mathcal{M}) = \Big\{(f_1, \ldots, f_n) : f_j \in G^s(\mathbb{T}^n \times S^1),\ M_k f_j = M_j f_k, \forall j, k = 1, \ldots, n \text{ e}$$

$$f_j \in \left(\cap_{k=1}^n \ker {}^tM_k\right)^\perp, \forall j = 1, \ldots, n\Big\}.$$

Definição 3.1 *Dizemos que o sistema $\mathcal{M}$ é globalmente s-resolúvel se para quaisquer $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{G}^s(\mathcal{M})$ existe $u \in G^s(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$ tal que $M_j u = f_j$, $j = 1, \ldots, n$.*

Observação 3.2 *O sistema $\mathcal{M}$ é globalmente s-resolúvel se e somente se o sistema $\mathcal{M}_0 \doteq \{M_{j0}\}_1^n$ é globalmente s-resolúvel.*

De fato, definimos

$$S : G^s(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1) \longrightarrow G^s(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1),$$

por

$$Su = v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}(t, k)e^{ikx},$$

com $\widehat{v}(t, k) = e^{ikh(t)}\widehat{u}(t, k),\ k \in \mathbb{Z}$.

Então S define um automorfismo de $S : G^s(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1) \longrightarrow G^s(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1)$ e S é também um isomorfismo entre $G^s(\mathcal{M})$ e $G^s(\mathcal{M}_0)$. Além disso, vale a seguinte relação de conjugação

$$SM_jS^{-1} = M_{j0},\ j = 1, \dots, n.$$

Utilizando estas informações pode se provar que o sistema $\mathcal{M}$ é globalmente s-resolúvel se e somente se o sistema $\mathcal{M}_0$ é globalmente s-resolúvel. ■

Associamos ao sistema de campos vetoriais $\mathcal{M}_0$ dado por $M_{j0} = \partial_{t_j} + a_{j0}\partial_x$, onde $a_{j0} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} a_j(t)dt,\ j = 1, \dots, n$, os seguintes vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\omega^j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, \underbrace{0}_{n}, a_{j0}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Também definimos os seguintes conjuntos que desempenharão um papel importante em nosso estudo:

$$\Gamma(\mathcal{M}_0) \doteq \{(\tau, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \langle \omega^j, (\tau, \xi)\rangle = \tau_j + a_{j0}\xi = 0, j = 1, \dots, n\} \text{ e}$$

$$\Gamma^c(\mathcal{M}_0) = \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \Gamma(\mathcal{M}_0).$$

Uma análise mais cuidadosa do conjunto $\Gamma(\mathcal{M}_0)$

Começamos com o seguinte

Lema 3.3 *Se existe $j^* \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{j^*0} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $\Gamma(\mathcal{M}_0) = \{0\}$.*

Demonstração. De fato, a igualdade $\tau_{j^*} + a_{j^*0}\xi = 0$ nos dá que $\xi = 0$, de onde obtemos que $\tau_{j^*} = 0$. Como $\xi = 0$ segue da definição de $\Gamma(\mathcal{M}_0)$ que $\tau_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. □

Assim, para termos a dimensão de $\Gamma(\mathcal{M}_0)$ diferente de zero, devemos ter que os coeficientes a_{j0} são números racionais, isto é,

$$a_{j0} = \frac{p_j}{q_j}, p_j \in \mathbb{Z}, q_j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, j = 1, \dots, n, \tag{3.2}$$

com $\text{mdc}(p_j, q_j) = 1$ para cada $j = 1, \dots, n$, sendo que mdc denota o máximo divisor comum.

Proposição 3.4 *Quando os coeficientes a_{j0} são racionais então existe $\zeta \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tal que*

$$\Gamma(\mathcal{M}_0) = \zeta\mathbb{Z}.$$

Em particular, a dimensão de $\Gamma(\mathcal{M}_0)$ *é* 1.

Demonstração. Como os coeficientes a_{j0} são racionais, podemos escrever

$$a_{j0} = \frac{p_j}{q_j}, p_j \in \mathbb{Z}, q_j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, j = 1, \ldots, n,$$

com $\text{mdc}(p_j, q_j) = 1$ para cada $j = 1, \ldots, n$.

Caso 1: $p_j \neq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Seja $q_0 = \text{mmc}(q_1, \ldots, q_n)$, sendo que mmc denota o mínimo múltiplo comum. Assim, podemos escrever

$$q_0 = m_j q_j, j = 1, \ldots, n,$$

com $m_j \in \mathbb{N}$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Definimos

$$\zeta = (p_1 m_1, \ldots, p_n m_n, -q_0) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Se $(\tau, \xi) = (\tau_1, \ldots, \tau_n, \xi) = N\zeta$ para algum $N \in \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned} \tau_j + a_{j0}\xi &= N p_j m_j - \frac{p_j}{q_j} N q_0 \\ &= N p_j m_j - \frac{p_j}{q_j} N m_j q_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Logo, $\zeta\mathbb{Z} \subset \Gamma(\mathcal{M}_0)$. Reciprocamente, suponha que $(\tau, \xi) = (\tau_1, \ldots, \tau_n, \xi) \in \Gamma(\mathcal{M}_0)$. Então

$$\tau_j + \frac{p_j}{q_j}\xi = 0, \ \forall \ j = 1, \ldots, n,$$

ou seja, $\tau_j q_j = -p_j \xi$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Como $\text{mdc}(p_j, q_j) = 1$ e q_j divide $\tau_j q_j = -p_j \xi$, segue que q_j divide ξ para todo j. Em particular, como $q_0 = \text{mmc}(q_1, \ldots, q_n)$, segue que $\xi = N q_0$ para algum $N \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} \tau_j q_j &= -p_j \xi = -p_j N q_0 \\ &= (-N) p_j m_j q_j \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Então podemos concluir que $\tau_j = (-N) m_j p_j$. Portanto,

$$(\tau_1, \dots, \tau_n, \xi) = (-N)(m_1 q_1, \dots, m_n q_n, (-q_0)) = (-N)\zeta,$$

e obtemos que $\zeta\mathbb{Z} \supset \Gamma(\mathcal{M}_0)$.

Caso 2: existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p_j = 0$.

Se $p_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, então podemos definir $\zeta = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Suponha, então, $p_j \neq 0$ para algum j. Os conjuntos

$$A \doteq \{j \in \{1, \dots, n\} : p_j = 0\} \text{ e } B \doteq \{i \in \{1, \dots, n\} : p_i \neq 0\}$$

são diferentes do conjunto do vazio e $A \cap B = \varnothing$. Seguindo as mesmas linhas do que fizemos no **Caso 1**, obtemos o seguinte: definimos $q_0 = \operatorname{mmc}(q_{j_1}, \dots, q_{j_k})$, sendo $B = \{j_1 < \dots < j_k\}$ e escrevemos

$$q_0 = m_\ell q_{j_\ell}, \ell = 1, \dots, k.$$

Agora definimos $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n, -q_0)$ colocando $\zeta_i = 0$ se $i \in A$ e $\zeta_i = p_{j_\ell} m_\ell$ se $i = j_\ell$ e temos que $\zeta\mathbb{Z} = \Gamma(\mathcal{M}_0)$. A demonstração está completa. $\square$

Lema 3.5 *Se $\alpha = (a_{01}, \dots, a_{0n}) \in \mathbb{Q}^n$ então os conjuntos*

$$G_j \doteq \{m + a_{0j} n, m, n \in \mathbb{Z}\}, j = 1, \dots, n \tag{3.3}$$

são discretos em $\mathbb{R}$, ou seja, existem constantes $c_j \in \mathbb{R}$ tais que $G_j \subset c_j \mathbb{Z}$.

Demonstração. De fato, note que

$$\begin{aligned} m + a_{0j} n &= m + \frac{p_j}{q_j} n \\ &= \frac{q_j}{q_j} m + \frac{p_j}{q_j} n \\ &= (q_j m + p_j n) \frac{1}{q_j}. \end{aligned}$$

Segue que $G_j \subset \frac{1}{q_j}\mathbb{Z}$. Isso nos mostra que G_j é discreto. $\square$

Com base nestas informações, iremos estudar uma classe mais geral de sistemas que incluirá o nosso exemplo $\mathcal{M}_0$, a saber, para $s \geq 1$ definimos o seguinte sistema de campos vetoriais com coeficientes constantes reais

$$L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} D_{x_k},\ j = 1, \dots, m \tag{3.4}$$

agindo em $G^s(\mathbb{T}^N)$, com $a_{jk} \in \mathbb{R}$. Denotaremos o sistema L_j, $j = 1, \dots, m$ por $\mathcal{L}$.

Como antes diremos que $\mathcal{L}$ é globalmente s-resolúvel se para qualquer $(f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{G}^s(\mathcal{L})$ existe $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$ tal que $L_j u = f_j$, $j = 1, \dots, m$.

Associamos, ao sistema de campos vetoriais $\mathcal{L}$ dado por (3.4), os seguintes vetores em $\mathbb{R}^N$

$$\omega^j = (a_{j1}, \dots, a_{jN}),\ j = 1, \dots, m.$$

Também definimos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}^N$

$$\Gamma \doteq \{\xi \in \mathbb{Z}^N : \langle \omega^j, \xi \rangle = 0,\ j = 1, \dots, m\} \text{ e } \Gamma^c = \mathbb{Z}^N \backslash \Gamma. \tag{3.5}$$

Sejam

$$G^s(\mathbb{T}^N) = G^s_\Gamma(\mathbb{T}^N) \oplus G^s_{\Gamma^c}(\mathbb{T}^N),$$

onde

$$G^s_\Gamma(\mathbb{T}^N) = \{f \in G^s(\mathbb{T}^N) : \widehat{f}(\xi) = 0, \xi \in \Gamma^c\}$$

e

$$G^s_{\Gamma^c}(\mathbb{T}^N) = \{f \in G^s(\mathbb{T}^N) : \widehat{f}(\xi) = 0, \xi \in \Gamma\}.$$

Para $f \in G^s(\mathbb{T}^N)$ escrevemos $f = f_\Gamma + f_{\Gamma^c}$, com $f_\Gamma \in G^s_\Gamma(\mathbb{T}^N)$ e $f_{\Gamma^c} \in G^s_{\Gamma^c}(\mathbb{T}^N)$.

Da mesma forma, introduzimos

$$\mathcal{D}'_s(\mathbb{T}^N) = \mathcal{D}'_{s,\Gamma}(\mathbb{T}^N) \oplus \mathcal{D}'_{s,\Gamma^c}(\mathbb{T}^N).$$

Segue da definição da s-resolubilidade global que o estudo do núcleo do transposto dos campos vetoriais L_j será útil no que segue. Usando séries de Fourier, podemos facilmente provar o seguinte

Lema 3.6 *Seja $w \in \mathcal{D}'_s(\mathbb{T}^N)$. Então $w \in \cap_{j=1}^m \ker {}^tL_j$ se e somente se*

$$w(x) = \sum_{\xi \in \Gamma} \widehat{w}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle}.$$

3.2 Perturbações por Termos de Ordem Zero

Agora estamos interessados em estudar o seguinte sistema perturbado $\mathcal{P}$ dado por:

$$P_j = L_j + b_j(x),\ j = 1, \dots, m$$

com $b_j \in G^s(\mathbb{T}^N; \mathbb{C})$.

3.2.1 Resolubilidade Global Gevrey

Nesta sub-seção iremos sempre assumir que o sistema $\mathcal{L}$ **é globalmente s-resolúvel**.

Para o caso de um único campo $L = \sum_{k=1}^{N} a_k D_{x_k}$, a s-resolubilidade global do campo perturbado $P = L + b(x)$ é equivalente à s-resolubilidade global do operador $Q = L + b_\Gamma(x)$, pois segue do Lema 3.6 que $b_{\Gamma^c} \in (\ker {}^tL)^\perp$ e como L é globalmente s-resolúvel então existe $g \in G^s(\mathbb{T}^N)$ tal que $Lg = b_{\Gamma^c}$ (veja [PZ]).

Assim, a partir de agora iremos supor que o sistema $\mathcal{L}$ é globalmente s-resolúvel, $b_j \in G^s(\mathbb{T}^N)$ e $(b_{1\Gamma^c}, \dots, b_{m\Gamma^c}) \in \mathcal{G}^s(\mathcal{L})$.

Como em [PZ], mostra-se que o sistema $\mathcal{P} \doteq \{P_j = L_j + b_j(x)\}$ é globalmente s-resolúvel se e somente se o sistema $\mathcal{Q} \doteq \{Q_j = L_j + b_{j\Gamma}(x)\}$ é globalmente s-resolúvel.

Observacao: Nas condições acima o sistema dado por $P_j = L_j + b_j, j = 1, \dots, m$ satisfaz $P_j P_\ell = P_\ell P_j$ para todo $j, \ell = 1, \dots, m$.

De fato, observe que se $u \in D'_s\left(\mathbb{T}^N\right)$, então

$$\begin{aligned} P_j(P_\ell u) &= (L_j + b_j)(L_\ell u + b_\ell u) \\ &= L_j L_\ell u + (L_j b_\ell)u + b_\ell(L_j u) + b_j(L_\ell u) + b_j b_\ell u. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$P_\ell(P_j u) = L_\ell L_j u + (L_\ell b_j)u + b_j(L_\ell u) + b_\ell(L_j u) + b_\ell b_j u.$$

Comparando as expressões acima, como $L_j L_\ell = L_\ell L_j$ para todo $j, \ell = 1, \dots, m$, para concluirmos que $P_j P_\ell = P_\ell P_j$ basta mostrarmos que

$$L_j b_\ell = L_\ell b_j,\ \forall\ j, \ell = 1, \dots, m. \tag{3.6}$$

A hipótese $(b_{1\Gamma^c},\dots,b_{m\Gamma^c}) \in \mathcal{G}^s(\mathcal{L})$ nos garante que $L_j b_{\ell\Gamma^c} = L_\ell b_{j\Gamma^c}$ para todo $j,\ell = 1,\dots,m$. Além disso, aplicando a transformada de Fourier, obtemos que $L_j b_{\ell\Gamma} = 0$ para todo $j,\ell = 1,\dots,m$, já que $\widehat{b_{\ell\Gamma}}(\xi) = 0$ se $\xi \notin \Gamma$ e $\langle \omega, \xi\rangle = 0$ se $\xi \in \Gamma$. Assim,

$$
\begin{aligned}
L_j b_\ell &= L_j b_{\ell\Gamma} + L_j b_{\ell\Gamma^c} = L_j b_{\ell\Gamma^c} \\
&= L_\ell b_{j\Gamma^c} = L_\ell b_{j\Gamma} + L_\ell b_{j\Gamma^c} \\
&= L_\ell b_j,
\end{aligned}
$$

o que demonstra (3.6). $\square$

3.2.2 O caso $\Gamma = \{0\}$

Neste caso temos que $b_{j\Gamma}(x) = \widehat{b_{j\Gamma}}(0) \doteq c$ com $c \in \mathbb{C}$. Assim, neste caso, o estudo da s-resolubilidade global é simples e a conclusão é dada pelo próximo resultado cuja demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.29.

Teorema 3.7 *Suponha que $\Gamma = \{0\}$. Então, o sistema $\mathcal{Q}$ é globalmente s-resolúvel se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ dado, existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que, para cada $\xi \neq 0$ em $\mathbb{Z}^N$, existe $j \in \{1,\dots,m\}$ satisfazendo*

$$
\left|\left\langle w^j, \xi \right\rangle + c\right| \geq C_\epsilon e^{-\epsilon|\xi|^{1/s}}.
$$

Observação 3.8 *Para o exemplo do sistema $\mathcal{M}_0$ o caso $\Gamma = \{0\}$ corresponde ao caso em que existe $j* \in \{1,\dots,m\}$ tal que $a_{j*0} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

3.2.3 O caso $0 < \dim \Gamma < N$.

Usaremos a notação $d = \dim \Gamma$ para a dimensão de Γ e $r = N - d$. Seja $B = \left\{k^1,\dots,k^d\right\}$ uma base de Γ, com $k^j = (k_1^j,\dots,k_N^j), j = 1,\dots,d$. Como estamos em $\mathbb{Z}^N$, podemos completar B a uma base $B' = B \cup \left\{v^{d+1},\dots,v^N\right\}$ de $\mathbb{Z}^N$ (ver [P1], [DGY]). Iremos denotar $v^i = (v_1^i,\dots,v_N^i), i = d+1,\dots,N$.

Seja M a matriz de ordem N cujas colunas são formadas pelos vetores

$$
k^1,\dots,k^d,v^{d+1},\dots,v^N
$$

nesta ordem. Segue que M^t induz um automorfismo de $\mathbb{T}^N$ dado por $y = M^t x$ (veja [P1], página 85).

Agora iremos escrever Q_j nas novas variáveis. Para isto, notamos que se $v(y) = v(M^t x) = u(x)$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\partial_{x_k}u(x) &= \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\Big(\sum_{i=1}^{N} \partial_{y_i}v(y)\left(M^t\right)_{ik}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\left(M^t\right)_{ik}\right)\partial_{y_i}v(y) \\
&= \sum_{i=1}^{N} c_{ji}\partial_{y_i}v(y), \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

com $c_{ji} = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\left(M^t\right)_{ik}$.

Observe que $c_{ji} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\left(M^t\right)_{ik}$ é o produto interno de w^j com o i-ésimo vetor coluna da matriz M. Pela definição de Γ e de M, segue que $c_{ji} = 0$ para $j = 1, \ldots, m$ e $i = 1, \ldots d$.

Podemos mostrar, como foi feito em [PZ], que para cada $j = 1, \ldots, m$, as funções $b_{j\Gamma}((M^t)^{-1}(y))$ só dependem das variáveis $y_1, \ldots, y_d$. Denotando

$$d_j(y_1, \ldots, y_d) = b_{j\Gamma}(\left(M^t\right)^{-1}(y))$$

e $(y_1, \ldots, y_N) = (y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_r) = (y, z)$, podemos reescrever, nas novas variáveis, os operadores Q_j da seguinte forma

$$R_j = \sum_{k=1}^{r} c_{jk}D_{z_k} + d_j(y),\ j = 1, \ldots, m.$$

É fácil provar a seguinte

Proposição 3.9 *O sistema $\mathcal{Q}$ é globalmente s-resolúvel se, e somente se, o sistema $\mathcal{R} \doteq \{R_j\}$ é globalmente s-resolúvel.*

Recordando que para o nosso exemplo inicial, o sistema $\mathcal{M}_0$, quando todos os coeficientes são racionais temos $\dim \Gamma(\mathcal{M}_0) = 1$ então nos concentraremos no caso em que $\dim \Gamma = 1$.

3.3 O Caso $\dim \Gamma = 1$

Segue da teoria desenvolvida na seção anterior que, para dim $\Gamma = 1$, podemos escrever o nosso sistema $\mathcal{R}$ da seguinte forma:

$$R_j = \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk} D_{z_k} + d_j(y), j = 1, \ldots m,$$

sendo $d_j(y) \in G^s(\mathbb{T})$.

Também motivados pelo fato que os conjuntos $G_j \doteq \{m + a_{0j}n, m, n \in \mathbb{Z}\}, j = 1, \ldots, n$ associados ao sistema $\mathcal{M}_0$ são discretos, ver Lema 3.5, trabalheremos aqui com a hipótese que para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ o conjunto

$$G_j = \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k : \eta_1, \ldots, \eta_{N-1} \in \mathbb{Z} \right\}$$

é discreto, isto é, existe constante real c_j tais que

$$G_j \subset c_j \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

Note, por exemplo, que quando os coeficientes a_{jk} dos campos vetoriais L_j são racionais, então segue do fato que $c_{ji} = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \left(M^t\right)_{ik}$ que os coeficientes c_{ji} dos operadores R_j também são racionais e portanto podemos encontrar as constantes c_j acima descritas. De fato, se temos $c_{jk} = \frac{p_{jk}}{q_{jk}}$, $p_{jk} \in \mathbb{Z}, q_{jk} \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ então temos

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k = \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{N-1} q_{j\ell}} \Big(\sum_{k=1}^{N-1} p_{jk} \prod_{\ell=1,\ell\neq k}^{N-1} q_{j\ell}\eta_k \Big) \subset c_j' \mathbb{Z}$$

onde $c_j' = \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{N-1} q_{j\ell}}$ e, portanto, G_j é discreto.

Sob as **hipóteses acima**, estudaremos agora a s-resolubilidade global do sistema $\mathcal{R}$.

Iremos denotar a imagem da função d_j por $R(d_j)$ e teremos que analisar alguns casos separados.

Caso 1: Existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $R(d_{j_0}) \cap G_{j_0} = \varnothing$.

Neste caso, dada $f = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}^s(\mathcal{R})$, podemos definir

$$\widehat{u}(\eta_1, \ldots, \eta_{N-1}, y) = \frac{\widehat{f}_{j_0}(\eta_1, \ldots, \eta_{N-1}, y)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} c_{j_0 k}\eta_k + d_{j_0}(y)}.$$

Como $R(d_{j_0})$ é um compacto e G_{j_0} é um fechado e eles são disjuntos, então existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha \doteq d\left(G_{j_0}, R(d_{j_0})\right) > 0.$$

Portanto, temos que

$$\left|\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k + d_{j_0}(y)\right| \geq \alpha,\ \forall\ y \in \mathbb{T}, \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{N-1}) \in \mathbb{Z}^{N-1}.$$

Para mostrar que $u(z, y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^{N-1}} \widehat{u}(\eta, y) e^{i\langle z, \eta\rangle} \in G^s(\mathbb{T}^N)$ precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.10 *Sejam $s \geq 1$ um número real, A um subconjunto de $\mathbb{Z}^N$, $U \subset \mathbb{R}$ e $f_\eta, \eta \in A$, uma família de funções suaves em U, não necessariamente periódicas, satisfazendo*

$$\left|f_\eta^{(k)}(y)\right| \leq C_0^{k+1} k!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}},\ \forall\ \eta \in A, k \in \mathbb{Z}_+, y \in U,$$

para certas constantes $C_0, \epsilon > 0$. Se $g_\eta, \eta \in A$, também é uma família de funções suaves em U de modo que existe $B > 0$ satisfazendo

$$B^{-1} \leq |g_\eta(y)|,\ \forall\ \eta \in A, y \in U$$

e

$$\left|g_\eta^{(k)}(y)\right| \leq D^{k+1} k!^s,\ \forall\ \eta \in A, y \in U, k = 1, 2, 3, \ldots,$$

para alguma constante $D > 0$, então

$$\left|\left(\frac{f_\eta}{g_\eta}\right)^{(k)}(y)\right| \leq C_1^{k+1} k!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}},\ \forall\ \eta \in A, k \in \mathbb{Z}_+, y \in U,$$

para uma constante $C_1 > 0$ dependendo apenas de C_0, D e B.

Demonstração. A demonstração é simplesmente usar o Lema 3.7 de [PZ] e a regra de Leibniz.
□

Como as derivadas de $\left(\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k + d_{j_0}(y)\right)$ não dependem de η, e $d_j \in G^s(\mathbb{T})$, podemos usar o Lema 3.10 para concluirmos que $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Aplicando a transformada de Fourier nas igualdades $R_j f_{j_0} = R_{j_0} f_j$ podemos concluir que $R_j u = f_j$ para cada $j = 1, \dots, m$. Assim a demonstração deste caso está completa. $\square$

Caso 2: $R(d_j) \cap G_j \neq \varnothing$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Iremos dividir este caso em dois sub-casos:

Caso 2.1: Para todo $j \in \{1, \dots, m\}$, a função d_j é constante. Pela definição de G_j, neste caso temos que existem $\eta_1^j, \dots, \eta_{N-1}^j \in \mathbb{Z}$ tais que

$$d_j(y) = \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k^j, \ \forall \ j = 1, \dots, m, y \in \mathbb{T}.$$

Logo, os operadores R_j tornam-se

$$R_j = \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk} D_{z_k} + \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k^j, \ \forall \ j = 1, \dots, m.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, definimos

$$A_j = \left\{(\eta_1, \dots, \eta_{N-1}) \in \mathbb{Z}^{N-1} : -\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k = \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k^j\right\}.$$

Agora podemos definir u: seja $\eta \in \mathbb{Z}^{N-1}$ e suponha que exista j^η tal que $\eta \notin A_{j^\eta}$. Então definimos

$$\widehat{u}(\eta_1, \dots, \eta_{N-1}, y) = \frac{\widehat{f}_{j^\eta}(\eta_1, \dots, \eta_{N-1}, y)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} c_{j^\eta k}\eta_k + \sum_{k=1}^{N-1} c_{j^\eta k}\eta_k^{j_\eta},} \in G^s(\mathbb{T}). \tag{3.9}$$

Caso contrário, se $\eta \in A_j$ para todo $j = 1, \dots, m$, então definimos $\widehat{u}(\eta, y) = 0$ para cada $y \in \mathbb{T}$. Assim, temos $\widehat{u}(\eta, \cdot) \in G^s(\mathbb{T})$ para cada $\eta \in \mathbb{Z}^{N-1}$ e devemos mostrar que

$$u(z, y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^{N-1}} \widehat{u}(\eta, y) e^{i\eta\cdot z} \in G^s(\mathbb{T}^N)$$

e $R_j u = f_j$ para todo $j = 1, \dots, m$. Primeiro vamos verificar que $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$, ou seja, existem constantes $\epsilon > 0$, $C > 0$ tais que

$$|D_y^k \hat{u}(\eta, y)| \leq C^{k+1} k!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}}, \ \forall\ \eta \in \mathbb{Z}^{N-1}, y \in \mathbb{T}, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.10}$$

Da definição de $\hat{u}(\eta, y)$, precisamos verificar (3.10) apenas para $\eta \in \mathbb{Z}^{N-1}$ tal que $\eta \notin A_{j^\eta}$ para algum $j^\eta \in \{1, \dots, m\}$. Observe que como $c_{ji} = \langle \omega^j, v^i \rangle$, para $i \in \{2, \dots, N\}$ e os vetores $v^i, i = 2, \dots, N$ não pertencem a Γ então $c_{ji} \neq 0$ para algum $i \in \{2, \dots, N\}$; isto garante que c_j (ver (3.8)) são diferentes de zero. Portanto, temos que existe α tal que $0 < \alpha < \min\{|c_1|, \dots, |c_m|\}$ e vale

$$\left| \sum_{k=1}^{N-1} c_{j^\eta k} \eta_k^{j_\eta} + \sum_{k=1}^{N-1} c_{j^\eta k} \eta_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{N-1} c_{j^\eta k} \big(\eta_k^{j_\eta} + \eta_k \big) \right| > \alpha,$$

pois $\sum_{k=1}^{N-1} c_{j^\eta k} \big(\eta_k^{j_\eta} + \eta_k \big) \in G_{j^\eta} \backslash \{0\}$.

Como $f_j \in G^s(\mathbb{T}^N)$ para todo $j = 1, \dots, m$, segue do Lema 3.10 e de (3.9) que vale (3.10).

Agora iremos provar que $R_j u = f_j$ para todo $j = 1, \dots, m$. Aplicando a transformada parcial de Fourier na variável z podemos concluir que $R_j u = f_j$ para cada $j = 1, \dots, m$ se, e somente se,

$$\left(\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk} \eta_k + d_j(y) \right) \hat{u}(\eta, y) = \hat{f}_j(\eta, y), \ \forall\ j = 1, \dots, m, \ \forall\ \eta \in \mathbb{Z}^{N-1}.$$

Para $\eta \in A_j$ para todo $j = 1, \dots, m$, devemos provar que $\hat{f}_j(\eta, \cdot) \equiv 0$ para todo $j = 1, \dots, m$. Para vermos isso definimos, para $y_0 \in \mathbb{T}$,

$$w = e^{-i\langle \eta, z \rangle} \otimes \delta_{y_0} \in D'_s(\mathbb{T}^N)$$

e observamos que $w \in \cap_{j=1}^m \ker {}^t R_j$. De fato, uma vez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk} \eta_k + d_j(y_0) = 0$ para todo $j = 1, \dots, m$, obtemos

$$\langle {}^t R_j w, \varphi \rangle \ = \ \langle w, R_j \varphi \rangle = (2\pi)^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk} \eta_k + d_j(y_0) \right) \hat{\varphi}(\eta, y_0) = 0.$$

Logo, para $y_0 \in \mathbb{T}$ arbritrário, temos

$$(2\pi)^{N-1} \hat{f}_j(\eta, y_0) = \langle w, f_j \rangle = 0, \ \forall\ j = 1, \dots, m.$$

Para terminarmos a demonstração deste caso devemos ver que para $\eta \notin A_{j^\eta}$ temos $\widehat{R_j u}(\eta, y) = \widehat{f}_j(\eta, y)$ para todo $j \neq j^\eta$ e para isto basta usarmos as condições de compatibilidade $R_j f_{j^\eta} = R_{j^\eta} f_j$.

Caso 2.2: Existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$, o qual iremos supor ser igual a 1, tal que d_{j_0} é não constante.

Como cada d_j é uma função contínua e G_j é um subconjunto discreto de $\mathbb{R}$, podemos escrever

$$R(d_j) \cap G_j = \left\{-\eta_1^j c_j, \ldots, -\eta_{N_j}^j c_j\right\},$$

sendo que $\eta_\ell^j \in \mathbb{Z}$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ e $\ell \in \{1, \ldots, N_j\}$. Considere (denotamos $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{N-1})$)

$$A = \left\{\eta \in \mathbb{Z}^{N-1} : \forall\ j = 1, \ldots, m, \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k = \eta_p^j c_j,\ \text{para algum } p \in \{1, \ldots, N_j\}\right\}.$$

Observação 3.11 *Quando $N > 2$ e os números c_{jk} são todos racionais, cada ponto da forma $\eta_p^j c_j$ em G_j pode ser escrito de uma infinidade de maneiras diferentes como uma soma da forma $\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k$ para $\eta \in A$. Isso torna o problema da resolubilidade do sistema $\mathcal{R}$ mais difícil de ser estudada do que feito em [PZ], onde $N = 2$, já que ao excluirmos os índices em A, ficamos com apenas uma quantidade finita de $\eta \in \mathbb{Z}$ para analisarmos.*

Se $\eta \in \mathbb{Z}^{N-1} \setminus A$, então existe $j = j_\eta \in \{1, \ldots, m\}$ satisfazendo

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_{j_\eta k}\eta_k + d_{j_\eta}(y) \neq 0,\ \forall\ y \in \mathbb{T}.$$

Estudaremos o caso em que $\eta \in A$. Definimos

$$Z_\eta \doteq \left\{y \in \mathbb{T} : \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k + d_j(y) = 0,\ \forall\ j = 1, \ldots, m\right\}.$$

e, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ e $k \in \{1, \ldots, N_j\}$,

$$r_{jk}(y) = \eta_k^j c_j + d_j(y), y \in \mathbb{T}.$$

Seja L o conjunto de todos os $J = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}^m$, com $1 \leq k_j \leq N_j$ para cada $j = 1, \ldots, m$

de modo que existe $\eta \in A$ tal que $\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k = \eta^j_{k_j} c_j$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Definimos, para $J \in L$,

$$\mathcal{F}_J = \left\{ y \in \mathbb{T} : r_{jk_j} \text{ é flat em } y,\ \forall\ j = 1, \ldots, m \right\}.$$

Com essas notações estabelecidas podemos enunciar nosso resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.12 *O sistema $\mathcal{R}$ é globalmente s-resolúvel se, e somente se, $\mathcal{F}_J = \varnothing$ para todo $J \in L$.*

Demonstração. *Suficiência:*

Se $\eta \notin A$, então a função $\sum_{k=1}^{N-1} c_{1k}\eta_k + d_1(y)$ não possui zeros para algum $j_\eta \in \{1, \ldots, m\}$. Note que como $d_j(\mathbb{T})$ é um compacto, $G_j \setminus d_j(\mathbb{T})$ é fechado e eles são disjuntos, então $\alpha_j = d(d_j(\mathbb{T}), G_j \setminus d_j(\mathbb{T})) > 0$. Em particular, $\alpha_{j_\eta} \leq \left| \sum_{k=1}^{N-1} c_{j_\eta k}\eta_k + d_{j_\eta}(y) \right|$ para todo $\eta \notin A$ e $y \in \mathbb{T}$. Definimos ainda

$$\hat{u}_1(\eta, y) = \frac{\hat{f}_{j_\eta}(\eta, y)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} c_{j_\eta k}\eta_k + d_{j_\eta}(y)}, y \in \mathbb{T}, \eta \notin A. \tag{3.11}$$

Além disso, consideramos

$$\alpha = \min_{j=1,\ldots,m} d\left(R(d_j), G_j \setminus R(d_j)\right) > 0,$$

e, então, temos que para $\eta \in \mathbb{Z}^{N-1} \backslash A$ existe $j_\eta \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$\alpha \leq \left| \sum_{k=1}^{N-1} c_{j_\eta k}\eta_k + d_{j_\eta}(y) \right|,\ \forall\ y \in \mathbb{T}.$$

Logo, podemos usar o Lema 3.10 para concluirmos que

$$u_1(z, y) = \sum_{\eta \in (\mathbb{Z}^{N-1} \backslash A)} \hat{u}_1(\eta, y) e^{i\eta \cdot z} \in G^s(\mathbb{T}^N).$$

Iremos definir $\hat{u}(\eta, y)$, quando $\eta \in A$, de modo que $\hat{u}(\eta, \cdot) \in G^s(\mathbb{T})$ e, então, iremos verificar que

$$u_2(z, y) = \sum_{\eta \in A} \hat{u}(\eta, y) e^{iz \cdot \eta} \in G^s(\mathbb{T}^N).$$

Uma vez feito isso, vamos verificar que $u = u_1 + u_2 \in G^s(\mathbb{T}^N)$ resolve $R_j u = f_j$ para cada $j = 1, \ldots, m$, sendo u_1 a função definida em (3.11).

Fixamos, então, $\eta \in A$. Se $y \in \mathbb{T} \setminus Z_\eta$, então é possível encontrar $j = j_{\eta,y}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_{j_{\eta,y}k}\eta_k + d_{j_{\eta,y}}(y) \neq 0.$$

Neste caso, definimos

$$\hat{u}(\eta, y) = \frac{\hat{f}_{j_{\eta,y}}(\eta, y)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} c_{j_{\eta,y}k}\eta_k + d_{j_{\eta,y}}(y)}. \tag{3.12}$$

Agora vamos definir $\hat{u}(\eta, y)$ para $y \in Z_\eta$. Afirmamos primeiro que o conjunto Z_η é finito. De fato, sejam $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ de modo que $\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k = \eta^j_{k_j} c_j$ para cada $j = 1, \ldots, m$ e defina $J = (k_1, \ldots, k_m)$, o qual pertence ao conjunto L. Nossa hipótese garante que $\mathcal{F}_J = \varnothing$ e, portanto, se $y \in Z_\eta$ então existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que y é um zero de ordem finita de r_{jk_j}. Isso garante que Z_η é finito. Escrevemos

$$Z_\eta = \left\{ y_1^\eta, \ldots, y_{q_\eta}^\eta \right\}.$$

Observe que se mudarmos $\eta \in A$, então o conjunto Z_η também pode mudar. No entanto, para cada $\eta \in A$, temos que a função $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k + d_j(x)$ coincide com uma das funções $r_{jp}, j \in \{1, \ldots, m\}$ e $p \in \{1, \ldots, N_j\}$. Como existe um número finito de funções r_{jp}, segue que $\displaystyle\bigcup_{\eta \in A} Z_\eta$ é finito.

Fixamos agora $y \in Z_\eta$. Como fizemos acima, para cada $j = 1, \ldots, m$ existe um único $k_j \in \{1, \ldots, N_j\}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k = c_j \eta^j_{k_j} \tag{3.13}$$

e definimos $J = (k_1, \ldots, k_m) \in L$. Como, por hipótese, $\mathcal{F}_J = \varnothing$ para todo $J \in L$, segue que existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que r_{jk_j} não é flat em y. Assim, se $M_{j,k_j}(y)$ denota a ordem do zero y da função r_{jk_j}, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, então

$$0 < M_0 \doteq M_{0k_j}(y) \doteq \min_{1 \le j \le m} M_{j,k_j}(y) < +\infty.$$

Recorde ainda que, por (3.13), M_0 depende também de η. Seja $r_{j_0 k_{j_0}}$ uma das funções, dentre as funções r_{jk_j}, tal que a ordem do zero y da função $r_{j_0k_{j_0}}$ é M_0. Definimos

$$\hat{u}(\eta, y) = \frac{\partial_y^{M_0} \hat{f}_{j_0}(\eta, y)}{r_{j_0k_{j_0}}^{(M_0)}(y)}. \tag{3.14}$$

Tendo definido $\hat{u}(\eta, y)$ para cada $\eta \in A$, iremos provar que $\hat{u}(\eta, y)$ é uma função em G^s. Afirmamos que se $y \in \mathbb{T} \setminus Z_\eta$ e se $j' \in \{1, \ldots, m\}$ satisfazem

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_{j'k}\eta_k + d_{j'}(y) \neq 0,$$

então

$$\hat{u}(\eta, y) = \frac{\hat{f}_{j'}(\eta, y)}{\sum_{k=1}^{N-1} c_{j'k}\eta_k + d_{j'}(y)}. \tag{3.15}$$

Em outras palavras estamos provando que (3.12) não depende do índice $j = j_{\eta,y}$ desde que $\sum_{k=1}^{N-1} c_j\eta_k + d_j(y) \neq 0$. De fato, já que $(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}^s(R)$, segue que $R_{j_{\eta,y}} f_{j'} = R_{j'} f_{j_{\eta,y}}$. Aplicando a transformada parcial de Fourier, obtemos

$$\left(\sum_{k=1}^{N-1} c_{j_{\eta,y}k}\eta_k + d_{j_{\eta,y}}(y)\right) \hat{f}_{j'}(\eta, y) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} c_{j'k}\eta_k + d_{j'}(y)\right) \hat{f}_{j_{\eta,y}}(\eta, y),$$

de onde concluímos nossa afirmação. Segue que se $y \in \mathbb{T} \setminus Z_\eta$, então podemos usar o mesmo índice $j_{\eta,y}$ na definição de $\hat{u}(\eta, y')$ para todo y' próximo de y. Assim, $\hat{u}(\eta, \cdot)$ é, em uma vizinhança de y, o quociente de duas funções em G^s, sendo que o denominador não se anula. Segue que $\hat{u}(\eta, \cdot)$ pertence a G^s em uma vizinhança de $y \in \mathbb{T} \setminus Z_\eta$.

Vamos provar agora que $\hat{u}(\eta, \cdot)$ pertence ao espaço G^s em uma vizinhança de $y_0 \in Z_\eta$. Sejam j_0, k_{j_0} e M_0 como em (3.14). Como M_0 é finito, segue que existe uma vizinhança U_0 de y_0 em $\mathbb{T}$ tal que o único zero de $r_{j_0k_{j_0}}$ em U_0 é y_0. Assim, se $y \in U_0 \setminus \{y_0\}$, então $y \in \mathbb{T} \setminus Z_\eta$. Em particular, por (3.15), podemos concluir que

$$\hat{u}(\eta, y) = \begin{cases} \frac{\hat{f}_{j_0}(\eta, y)}{r_{j_0k_{j_0}}(y)}, & \text{se} \quad y \in U_0 \setminus \{y_0\}, \\ \frac{\partial_y^{M_0} \hat{f}_{j_0}(\eta, y_0)}{r_{j_0k_{j_0}}^{(M_0)}(y_0)}, & \text{se} \quad y = y_0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Precisaremos agora de alguns resultados auxiliares. O primeiro é dado pelo

Lema 3.13 *O ponto $y_0 \in Z_\eta$, $\eta \in A$, é um zero de ordem no mínimo M_0 da função $f_j(\eta, \cdot)$ para todo $j = 1, \ldots, m$.*

Demonstração. Dado $0 \leq M < M_0$, seja

$$w_M \doteq e^{-i\langle z,\eta\rangle} \otimes \delta_{y_0}^{(M)} \in D_s'(\mathbb{T}^N),\ z \in \mathbb{T}^{N-1}, \eta \in \mathbb{Z}^{N-1}.$$

Observe que para cada $j = 1, \ldots, m$ temos,

$$\begin{aligned} \left\langle {}^tR_j w_M, \varphi \right\rangle &= \langle w_M, R_j\varphi\rangle \\ &= \left\langle \delta_{y_0}^{(M)}, \widehat{R_j\varphi}(\eta, \cdot) \right\rangle \\ &= \left\langle \delta_{y_0}^{(M)}, r_{jk_j}\hat{\varphi}(\eta, \cdot) \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

sendo que usamos que $M < M_0$ e que M_0 é a menor ordem de anulamento do ponto y_0 entre as funções r_{jk_j}. Portanto, $w_M \in \cap_{\ell=1}^m \ker {}^tR_\ell$ e como $f_j \in \left(\cap_{\ell=1}^m \ker {}^tR_\ell\right)^\perp$ então

$$(2\pi)^{N-1}\partial_y^M \widehat{f}_j(\eta, y_0) = \langle w_M, f_j\rangle = 0,\ \ j = 1, \ldots, m$$

e a demonstração está completa. □

O segundo resultado é dado por

Lema 3.14 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $F \in G^s(I)$, $l \in \mathbb{N}$ e $y_0 \in I$ tais que $F^{(j)}(y_0) = 0$ para cada $j = 0, \ldots, l-1$ (em outras palavras, y_0 é um zero de ordem no mínimo l de F). Então*

$$F(y) = (y - y_0)^l F_l(y),$$

sendo que

$$F_l(y) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 t_1 \cdot t_2^2 \cdot \ldots \cdot t_{l-1}^{l-1} F^{(l)}\left(\psi_l\left(t_1, \ldots, t_l, y\right)\right) dt_1 \ldots dt_l$$

e $\psi_m : [0,1]^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida indutivamente por

$$\psi_1(t_1, y) = t_1 y + (1 - t_1)y_0$$

e

$$\psi_m(t_1, \ldots, t_m, y) = t_m \psi_{m-1}(t_1, \ldots, t_{m-1}, y) + (1 - t_m) y_0, m > 1.$$

Em particular,

$$F_l(y_0) = \frac{F^{(l)}(y_0)}{l!}.$$

Demonstração. (ver Apêndice C) $\square$

Voltamos para a demonstração do teorema principal. Utilizando as notações do lema anterior e escrevendo $(\widehat{f_j}(\eta, \cdot))_{M_0}(y) \doteq \left(\hat{f}_{j_0}\right)_{M_0}(\eta, y)$, podemos escrever (3.16) como

$$\hat{u}(\eta, y) = \frac{\left(\hat{f}_{j_0}\right)_{M_0}(\eta, y)}{\left(r_{j_0 k_{j_0}}\right)_{M_0}(y)}, y \in U_0. \tag{3.17}$$

Como M_0 é a ordem de y_0 como zero de $r_{j_0 k_{j_0}}$, segue que $\left(r_{j_0 k_0}\right)_{M_0}(y_0) \neq 0$ pelo Lema 3.14. Assim, novamente temos o quociente de duas funções em G^s e, portanto, $\hat{u}(\eta, \cdot)$ pertence ao espaço G^s em uma vizinhança de y_0. Da compacidade de $\mathbb{T}$ podemos concluir que, para cada $\eta \in A$, $\hat{u}(\eta, \cdot) \in G^s(\mathbb{T})$.

Para terminarmos a demonstração devemos exibir constantes $C > 0$ e $\epsilon > 0$ de modo que

$$\left|\partial_y^k \hat{u}(\eta, y)\right| \leq C^{k+1} k!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}}, \ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+, \eta \in A, y \in \mathbb{T}. \tag{3.18}$$

Para realizar essas estimativas vamos usar as notações do Lema 3.14 e iremos encontrar uma expressão para as derivadas das funções F_l. Pela definição de $\psi_l\left(t_1, \ldots, t_l, y\right)$, o único termo de ψ_l em que aparece a variável y é da forma $t_1 \cdot \ldots \cdot t_l \cdot y$. Logo,

$$F_l^{(j)}(y) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 t_1^{j+1} \cdot t_2^{2+j} \cdot \ldots \cdot t_{l-1}^{l-1+j} t_l^j F^{(l+j)}\left(\psi_l\left(t_1, \ldots, t_l, y\right)\right) dt_1 \ldots dt_l.$$

Como existem constantes $C_0 > 0$ e $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$\left|\partial_y^j \hat{f}_j(\eta, y)\right| \leq C_0^{j+1} j!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}}, \ \forall\ y \in \mathbb{T}, j \geq 0, \eta \in \mathbb{Z}^{N-1}, j = 1, \ldots, m$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left|\partial_y^j \left(\hat{f}_{j_0}\right)_{M_0}(\eta,y)\right| &\leq \int_0^1 \cdots \int_0^1 t_1^j \cdot t_2^{2+j} \cdot \ldots \cdot t_{M_0-1}^{M_0-1+j} t_{M_0}^j \times \\
&\times \left|\partial_y^{j+M_0} \hat{f}(\eta, (\psi_{M_0}(t_1,\ldots,t_{M_0},y)))\right| dt_1 \ldots dt_{M_0} \\
&\leq C_0^{j+M_0+1}(j+M_0)!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}} \times \\
&\times \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 t_1^j \cdot t_2^{2+j} \cdot \ldots \cdot t_{M_0-1}^{M_0-1+j} t_{M_0}^j dt_1 \ldots dt_{M_0}\right) \\
&\leq C_0^{j+M_0+1} 2^{s(j+M_0)} M_0!^s j!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}} \\
&\leq C_1^{j+1} j!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}},
\end{aligned}$$

sendo que a constante $C_1 > 0$ não depende de j, mas depende da ordem M_0. Agora escrevemos

$$\bigcup_{\eta\in A} Z_\eta = \{y_1,\ldots,y_q\}.$$

Lembremos (ver (3.17)) que se $1 \leq \ell \leq q$ e $\eta \in A$ é tal que $y_\ell \in Z_\eta$, então existe um intervalo U_ℓ centrado em y_ℓ tal que para cada $y \in U_\ell$ vale

$$\hat{u}(\eta,y) = \frac{\left(\hat{f}_{j_\ell}\right)_{M_\ell}(\eta,y)}{\left(r_{j_\ell k_{j_\ell}}\right)_{M_\ell}(y)},$$

sendo que o denominador nunca se anula em U_ℓ e tendo j_ℓ, k_{j_ℓ} e M_ℓ os papéis de j_0, k_{j_0} e M_0 respectivamente. Note que apesar de termos infinitos $\eta \in A$, existe apenas um número finito de funções r_{jk} e estamos analisando apenas um número finito de pontos $y \in \bigcup_{\eta\in A} Z_\eta$. Logo, as ordens M_0 usadas em (3.14) formam um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ quando variamos $\eta \in A$. Usando o Lema 3.14, concluímos que $\left(r_{j_\ell k_{j_\ell}}\right)_{M_\ell}(y_\ell) \neq 0$, e então podemos encontrar uma constante $\alpha_1 > 0$ (após mudarmos U_ℓ se necessário) tal que

$$\alpha_1 \leq \left|(r_{j_\ell k_\ell})_{M_\ell}(y)\right|,\ \forall\ y \in U_\ell, \ell = 1,\ldots,q.$$

Ainda para $\ell \in \{1,\ldots,q\}$ fixado, temos que se $\eta \in A$ é tal que $y_\ell \notin Z_\eta$, então existe $j = j_{y,\eta}$ de modo que

$$\hat{u}(\eta,y) = \frac{f_j(\eta,y)}{\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k + d_j(y)} \tag{3.19}$$

para todo y em uma vizinhança U_y de y_ℓ. Como $y_\ell \in Z_{\eta_0}$ para algum $\eta_0 \in A$, segue que

$$0 < \min\{|c_1|, \dots, |c_m|\} \leq \left| \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k + d_j(y_\ell) \right|, \ \forall\, \eta \in A \text{ tal que } y_\ell \notin Z_\eta.$$

Dessa forma, diminuindo U_ℓ se necessário, podemos supor que existe $\alpha_1' > 0$ de modo que

$$\alpha_1' < \left| \sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k + d_j(y) \right|, \ \forall\, \eta \in A \text{ tal que } y_\ell \notin Z_\eta, y \in U_\ell.$$

Em outras palavras, encontramos uma vizinhança U_ℓ de cada y_ℓ de modo que $\hat{u}(\eta, \cdot)$ é escrito como um quociente de duas funções de classe G^s, sendo que os denominadores são limitados por baixo (uniformemente em $\eta \in A$). Para podermos usar o Lema 3.10, precisamos garantir que as derivadas do denominador possuem estimativas do tipo G^s uniformemente em η. Note que no caso em que $y_\ell \in Z_\eta$, para $\eta \in A$, o denominador é dado por $(r_{j_\ell k_{j_\ell}})_{M_\ell}$. A expressão de $(r_{j_\ell k_{j_\ell}})_{M_\ell}$ dada pelo Lema 3.14, junto com a finitude das ordens M_ℓ, nos garante que as derivadas de $(r_{j_\ell k_{j_\ell}})_{M_\ell}$ independem de η. Já no caso em que $y_\ell \notin \eta$, a expressão dada em (3.19) nos garante que as derivadas do denominador também não dependem de η. Segue do Lema 3.10 que podemos encontrar constantes $C_1 > 0$ e $\lambda_1 > 0$ satisfazendo

$$\left|\partial_y^k \hat{u}(\eta, y)\right| \leq C_1^{k+1} k!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}}, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+, \eta \in A, y \in U_\ell, \ell = 1, \dots q. \tag{3.20}$$

Agora, para cada $y_0 \in \mathbb{T} \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^{q} U_\ell \right)$, temos (veja (3.12))

$$\hat{u}(\eta, y) = \frac{\hat{f}_{j_{\eta,y_0}}(\eta, y)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} c_{j_{\eta,y_0}k}\eta_k + d_{j_{\eta,y_0}}(y)}$$

para y em uma vizinhança V_{y_0} de y_0. Além disso, como já feito anteriormente, diminuindo V_{y_0} se necessário, existe uma constante $\alpha_2 > 0$ tal que

$$\alpha_2 < \left| \sum_{k=1}^{N-1} c_{j_{\eta,y_0}k}\eta_k + d_{j_{\eta,y_0}}(y) \right|$$

para todo $\eta \in A$ e $y \in V_{y_0}$. Do Lema 3.10 segue que existem constantes $C_2 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ tais que

$$\left|\partial_y^k \hat{u}(\eta, y)\right| \leq C_2^{k+1} k!^s e^{-\epsilon|\eta|^{1/s}}, \ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+, \eta \in A, y \in V_{y_0}, j = 1, \ldots q. \tag{3.21}$$

Da compacidade de $\mathbb{T} \setminus \left(\bigcup_{\ell=1}^{q} U_\ell\right)$, de (3.20) e (3.21) concluímos que vale (3.18). Portanto,

$$u(z, y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^{N-1}} \hat{u}(\eta, y) e^{i\eta \cdot z} \in G^s(\mathbb{T}^N).$$

As equações de compatibilidade $R_j f_k = R_k f_j$ nos mostram que $\widehat{R_j u}(\eta, y) = \hat{f}_j(\eta, y)$ para cada $\eta \in \mathbb{Z}_+^{N-1}$ e $y \in \mathbb{T}$ tais que que existe j_0 satisfazendo

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_{j_0 k} \eta_k + d_{j_0}(y) \neq 0.$$

Quando tal j_0 não existe, então $\eta \in A$ e $y_0 \in Z_\eta$. Pelo Lema 3.13, concluímos $\hat{f}_j(\eta, y_0) = 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$ e neste caso a igualdade $\widehat{R_j u}(\eta, y) = \hat{f}_j(\eta, y)$ também é válida. Em outras palavras, $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$ e $R_j u = f_j$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Isso completa a demonstração da suficiência.

Necessidade: Vamos provar que se $\mathcal{F}_J \neq \varnothing$ para algum $J = (k_1, \ldots, k_m) \in L$, então $\mathcal{R}$ não é globalmente s-resolúvel. Se $\mathcal{F}_J \neq \varnothing$ para algum $J \in L$, então $s > 1$ e existem $\eta^0 = (\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0) \in A$ e $y_0 \in Z_{\eta^0}$ tais que as funções

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{jk} \eta_k^0 + d_j(y) = c_j \eta_{k_j}^j + d_j(y) = r_{jk_j}(y)$$

são flat em y_0 para cada $j = 1, \ldots, m$. Observe que $\mathcal{F}_J$ é um subconjunto fechado e próprio de $\mathbb{T}$, uma vez que d_1 é não constante. Como $\mathbb{T}$ é conexo, segue que $\mathcal{F}_J$ não é um subconjunto aberto de $\mathbb{T}$. Assim, garantimos a existência de $y' \in \partial \mathcal{F}_J$. Como $\mathcal{F}_J$ é fechado, temos que $y' \in \mathcal{F}_J$.

Afirmamos que existem $y_1 \in (y' - 1, y' + 1) \cap \mathcal{F}_J^c$ e $j_1 \in \{1, \ldots, m\}$ de modo que $r_{j_1 k_{j_1}}(y_1) \neq 0$. De fato, se essa afirmação fosse falsa, então para todo $y \in (y' - 1, y' + 1) \cap \mathcal{F}_J^c$ e todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, teríamos $r_{jk_j}(y) = 0$. Note que como $y' \in \partial \mathcal{F}_J$, existe $\overline{y} \in (y' - 1, y' + 1) \cap \mathcal{F}_J^c$ e este conjunto é aberto. Assim, existe $\delta > 0$ de modo que $(\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta) \subset (y' - 1, y' + 1) \cap \mathcal{F}_J^c$ e, em particular, a nossa hipótese nos garante que $r_{jk_j}(y) = 0$ para todo $y \in (\overline{y} - \delta, \overline{y} + \delta)$. Isso mostra que r_{jk_j} é flat em $\overline{y}$ para todo $j = 1, \ldots, m$, o que garante que $\overline{y} \in \mathcal{F}_J$, o que nos dá uma contradição, já que $\overline{y} \in \mathcal{F}_J^c$. Assim, a existência de tais y_1 e $j_1 \in \{1, \ldots, m\}$ estão garantidas. Considere $\delta_1 = \min\left(d(y_1, \mathcal{F}_J)/2, 1/2\right)$. Repetindo o argumento acima, conseguimos encontrar $y_2 \in (y' - \delta_1, y' + \delta_1) \cap \mathcal{F}^c$, $y_2 \neq y_1$, e $j_2 \in \{1, \ldots, m\}$ de modo que $r_{j_2 k_{j_2}}(y_2) \neq 0$.

Prosseguindo com esse argumento, obtemos uma sequência $\{y_p\}_p$ que converge a y' de modo que $y_p \neq y_{p'}$ se $p \neq p'$ e $r_{j_p k_{j_p}}(y_p) \neq 0$. Como os índices j_p percorrem o conjunto finito $\{1, \ldots, m\}$, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ de modo que $r_{j_0 k_{j_0}}(y_p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Como r_{jk_j} é flat em y', segue que

$$r_{jk_j}(y) = g(y) h_j(y), \ \forall\, j = 1, \ldots, m,$$

sendo que $g(y) = 1 - \cos(y - y')$ e $h_1, \ldots, h_m \in G^s(\mathbb{T})$ são flat em $y = y'$ (veja Lema 3.6 de [PZ]). Como $r_{j_0 k_{j_0}}(y_p) \neq 0$ para cada $p \in \mathbb{N}$, segue que

$$h_{j_0}(y_p) \neq 0, \ \forall\, p = 1, 2, 3, \ldots.$$

Agora, definimos

$$f_j(z, y) = h_j(y) e^{i\langle \eta^0, z\rangle} \in G^s(\mathbb{T}^N), j = 1, \ldots, m.$$

Afirmamos que $(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}(R)$. Observamos primeiro que

$$\begin{aligned}
R_\ell f_j(z, y) &= \left(\sum_{i=1}^{N-1} c_{\ell i} D_{z_i} + d_\ell(y)\right)\left(h_j(y) e^{i\langle \eta^0, z\rangle}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{N-1} c_{\ell i} \eta_i^0 + d_\ell(y)\right)\left(h_j(y) e^{i\langle \eta^0, z\rangle}\right) \\
&= r_{\ell k_\ell}(y) h_j(y) e^{i\langle \eta^0, z\rangle} \\
&= g(y) h_\ell(y) h_j(y) e^{i\langle \eta^0, z\rangle} \\
&= g(y) h_j(y) h_\ell(y) e^{i\langle \eta^0, z\rangle} \\
&\ \ \vdots \\
&= R_j f_\ell(z, y).
\end{aligned}$$

Seja $w \in \cap_{j=1}^m \ker {}^t R_j$ e vamos mostrar que $\langle w, f_j\rangle = 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Aplicando a transformada de Fourier em ${}^{t}R_j w = 0$, obtemos

$$\left(-\sum_{k=1}^{N-1} c_{jk}\eta_k + d_j(y)\right)\hat{w}(\eta, y) = 0,\ \forall\ \eta \in \mathbb{Z}^{N-1}.$$

Considerando $\eta = -\eta^0$, temos

$$r_{jk_j}(y)\hat{w}(-\eta^0, y) = 0,\ \forall\ j = 1, \ldots, m.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\langle w, f_j\rangle &= (2\pi)^{N-1} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^{N-1}} \left\langle \hat{w}(-\eta, y), \hat{f}_j(\eta, y)\right\rangle \\
&= (2\pi)^{N-1} \left\langle \hat{w}(-\eta^0, y), \hat{f}_j(\eta^0, y)\right\rangle \\
&= (2\pi)^{N-1} \left\langle \hat{w}(-\eta^0, y), h_j(y)\right\rangle \\
&= (2\pi)^{N-1} \left\langle h_j(y)\hat{w}(-\eta^0, y), 1\right\rangle.
\end{aligned}$$

Se verificarmos que $h_j(y)\hat{w}(-\eta^0, y) = 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$, então poderemos concluir que $\langle w, f_j\rangle = 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Observe que

$$g(y)h_j(y)\widehat{w}(-\eta^0, y) = r_{jk_j}(y)\hat{w}(-\eta^0, y) = 0,\ \forall\ j = 1, \ldots, m,$$

e como $g(y) = 1 - \cos(y - y')$, segue que o suporte da ultradistribuição $h_j(y)w(-\eta^0, y)$ está contido em $\{y'\}$. Para completarmos a nossa demonstração, começamos recordando o seguinte resultado (veja [D], página 7).

Proposição 3.15 *Seja* $u \in D'_s(\mathbb{T})$ *de modo que* $\operatorname{supp} u = \{x_0\}$. *Então*

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n \delta_{x_0}^{(n)},$$

para certas constantes $a_n \in \mathbb{C}$.

Como no nosso caso a ultradistribuição $h_j(y)w(-\eta^0, y)$ está multiplicada por g, usando a Proposição 3.16 abaixo (para a demonstração, veja Proposição D.3 no Apêndice D), segue que existem $A_{0j}, A_{1j} \in \mathbb{C}$ tais que

$$h_j(y)\omega(-\eta^0, y) = A_{0j}\delta_{y'} + A_{1j}\delta'_{y'},\ \forall\ j = 1, \ldots, m. \tag{3.22}$$

Proposição 3.16 *Seja $T \in D'_s(\mathbb{T})$. Se $g(x) = 1 - \cos(x - x_0)$ para algum $x_0 \in \mathbb{T}$ e $gT = 0$, então*

$$T = a_0\delta_{x_0} + a_1\delta'_{x_0}$$

para certos $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. Aqui, δ_{x_0} denota a ultradistribuição Delta de Dirac periódica em $D'_s(\mathbb{T})$ centrada em x_0.

Lembrando que h_j é flat em y' e (3.22), se algum dos coeficientes $A_{ij} \neq 0$, então estaríamos dividindo $\delta_{y'}$ (ou combinação linear de suas derivadas) por uma função flat em y', o que não pode ocorrer pelo

Teorema 3.17 *Seja $f \in G^s(\mathbb{T})$ uma função flat em $x_0 \in \mathbb{T}$. Se $fT = a_0\delta_{x_0} + a_1\delta'_{x_0}$, com $T \in D'_s(\mathbb{T})$, então $a_0 = a_1 = 0$.*

Como na literatura só encontramos este resultado para o caso em que x_0 é um zero isolado de f (Teorema 2.3 de [D]), resolvemos incluir a demonstração do Teorema 3.17 no Apêndice D (Teorema D.5).

Segue então do Teorema 3.17 que $A_{0j} = A_{1j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$, o que nos permite concluir que $h_j(y)w(-\eta^0, y) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$ e a demonstração que $(f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{G}^s(R)$ está completa.

Se $\mathcal{R}$ fosse globalmente s-resolúvel, então existiria $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$ tal que $R_j u = f_j$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Tomando a transformada de Fourier em $R_j u = f_j$ nos pontos $\eta = \eta^0$ e $y = y_p$, para $j = j_0$, obtemos

$$r_{j_0 k_{j_0}}(y_p)\hat{u}(\eta^0, y_p) = \hat{f}_{j_0}(\eta^0, y_p).$$

Como $r_{jk_j}(y) = g(y)h_j(y)$, $\hat{f}_j(\eta^0, y) = h_j(y)$ e $h_{j_0}(y_p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ e todo $j = 1, \ldots, m$, então

$$g(y_p)\hat{u}(\eta^0, y_p) = 1 \ \forall\ p \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $p \longrightarrow \infty$, temos que $g(y_p) \longrightarrow 0$ e isso gera uma contradição com o fato $u \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Portanto, $\mathcal{R}$ não é globalmente s-resolúvel e a demonstração está completa. □

Apêndice A

A Igualdade (1.28)

Para demonstrar (1.28) começamos calculando Y_ℓ^2 :

$$Y_\ell^2 = \big(i\sum_{j=1}^m a_{\ell j}(t)\xi_j + \sum_{k=1}^n b_{\ell k}(t)\partial_{t_k}\big)\big(i\sum_{p=1}^m a_{\ell p}(t)\xi_p + \sum_{q=1}^n b_{\ell q}(t)\partial_{t_q}\big) = -\sum_{j=1}^m\sum_{p=1}^m \xi_j\xi_p a_{\ell j}(t)a_{\ell p}(t)$$

$$+ \quad i\sum_{j=1}^m\sum_{q=1}^n \xi_j a_{\ell j}(t) b_{\ell q}(t)\partial_{t_q} + i\sum_{k=1}^m\sum_{p=1}^m \left[\xi_p b_{\ell k}(t)\left(\partial_{t_k} a_{\ell q}\right)(t) + \xi_p a_{\ell p}(t) b_{\ell k}(t)\partial_{t_k}\right]$$

$$+ \quad \sum_{k=1}^n\sum_{q=1}^n \left[b_{\ell k}(t)\left(\partial_{t_k} b_{\ell q}(t)\right)\partial_{t_q} + b_{\ell k}(t) b_{\ell q}(t)\partial_{t_k}\partial_{t_q}\right].$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n}\left(Y_\ell^2\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt \quad &= \quad -\sum_{j=1}^m\sum_{p=1}^m \xi_j\xi_p\int_{\mathbb{T}^n} a_{\ell j}(t)a_{\ell p}(t)\left|\hat{u}(t,\xi)\right|^2 dt + \\
&+ \quad i\sum_{j=1}^m\sum_{q=1}^n \xi_j\int_{\mathbb{T}^n} a_{\ell j}(t) b_{\ell q}(t)\left(\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt \\
&+ \quad i\sum_{k=1}^m\sum_{p=1}^m\Bigg[\xi_p\int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t)\left(\partial_{t_k} a_{\ell q}\right)(t)\hat{u}(t,\xi)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt + + \\
&+ \quad \xi_p\int_{\mathbb{T}^n} a_{\ell p}(t) b_{\ell k}(t)\left(\partial_{t_k}\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt\Bigg] \\
&+ \quad \sum_{k=1}^n\sum_{q=1}^n\Bigg[\int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t)\left(\partial_{t_k} b_{\ell q}(t)\right)\left(\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt + \\
&+ \quad \int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t) b_{\ell q}(t)\left(\partial_{t_k}\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt\Bigg].
\end{aligned}$$

Agora usamos integração por partes nos termos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t)\left(\partial_{t_k} b_{\ell q}\right)(t)\hat{u}(t,\xi)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt$ e $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t)\left(\partial_{t_k} b_{\ell q}(t)\right)\left(\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt$ e, usando que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\partial_{t_k} b_{\ell k} \equiv 0$ para todo $\ell = 1,\dots,N$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n}\left(Y_\ell^2\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt &= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\xi_j\xi_p\int_{\mathbb{T}^n} a_{\ell j}(t)a_{\ell p}(t)\left|\hat{u}(t,\xi)\right|^2 dt \\
&+ i\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\xi_j\int_{\mathbb{T}^n} a_{\ell j}(t)b_{\ell q}(t)\left(\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt \\
&- i\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\xi_p\int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t)a_{\ell q}(t)\hat{u}(t,\xi)\left(\partial_{t_k}\overline{\hat{u}(t,\xi)}\right)dt + \\
&- \sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t)\partial_{t_k} b_{\ell q}(t)\left(\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\left(\partial_{t_k}\overline{\hat{u}(t,\xi)}\right)dt.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left\|Y_\ell\hat{u}(\cdot,\xi)\right\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n)} &= \int_{\mathbb{T}^n}\overline{Y_\ell\hat{u}(t,\xi)}Y_\ell\hat{u}(t,\xi)dt \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\left(-i\sum_{j=1}^{m}a_{\ell j}(t)\xi_j\overline{\hat{u}(t,\xi)} + \sum_{k=1}^{n}b_{\ell k}(t)\left(\overline{\partial_{t_k}\hat{u}(t,\xi)}\right)\right)\times \\
&\times\left(i\sum_{p=1}^{m}a_{\ell p}(t)\xi_p\hat{u}(t,\xi) + \sum_{q=1}^{n}b_{\ell q}(t)\left(\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\right)dt \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\xi_j\xi_p\int_{\mathbb{T}^n} a_{\ell j}(t)a_{\ell p}(t)\left|\hat{u}(t,\xi)\right|^2 dt \\
&- i\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\xi_j\int_{\mathbb{T}^n} a_{\ell j}(t)b_{\ell q}(t)\left(\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\overline{\hat{u}(t,\xi)}dt \\
&+ i\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{m}\xi_p\int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t)a_{\ell q}(t)\hat{u}(t,\xi)\left(\partial_{t_k}\overline{\hat{u}(t,\xi)}\right)dt \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_{\mathbb{T}^n} b_{\ell k}(t)\partial_{t_k} b_{\ell q}(t)\left(\partial_{t_q}\hat{u}(t,\xi)\right)\left(\partial_{t_k}\overline{\hat{u}(t,\xi)}\right)dt.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Segue de (1.1) e (1.2) que

$$\int_{\mathbb{T}^n} \left(Y_\ell^2 \hat{u}(t,\xi)\right) \overline{\hat{u}(t,\xi)} dt = - \left\| Y_\ell \hat{u}(\cdot,\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 .$$

Usando integração por partes novamente, obtemos

$$\int_{\mathbb{T}^n} \left(\Delta_t \hat{u}(t,\xi)\right) \overline{\hat{u}(t,\xi)} dt = - \sum_{k=1}^{n} \left\| \partial_{t_k} \hat{u}(\cdot,\xi) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 .$$

As duas últimas igualdades fornecem (1.28).

Apêndice B

Elipticidade no Toro

Proposição B.1 *Seja* $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ *um operador diferencial parcial linear com* $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^m)$. *Suponha que* $u \in D'_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^m)$ *satisfaz* $Pu = f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^m)$ *e que* $p_m(t, x, \tau, 0) \neq 0$ *para todo* $\tau \neq 0$, *isto é o operador* P *é elíptico nestes pontos. Então existe um cone em* $\mathbb{R}^{n+m}$, $\Gamma = \{(\tau, \xi) : |\tau| > c|\xi|\}$, *para algum* $c > 0$ *e constantes positivas* C_0 *e* ϵ_0 *tais que*

$$|\hat{u}(\tau, \xi)| \leq C_0 e^{-\epsilon_0\omega(|(\tau,\xi)|)},\ \forall\ (\tau, \xi) \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^{n+m}.$$

Demonstração. Definimos

$$A = \left\{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |\tau|^2 = 1, \xi = 0\right\}.$$

Usando o fato que $f \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^m)$, a elipticidade de P em pontos de A e a compacidade de A, obtemos cones abertos em $\mathbb{R}^{n+m}$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ de modo que $A \subset \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_N$ e constantes $C_0, \epsilon_0 > 0$ de modo que

$$|\hat{u}(\tau, \xi)| \leq C_0 e^{-\epsilon_0\omega(|(\tau,\xi)|)},\ \forall\ (\tau, \xi) \in \Gamma_j \cap \mathbb{Z}^{n+m}, j = 1, \ldots, N.$$

Como A é um subconjunto compacto disjunto do conjunto fechado $\Gamma_1^c \cap \ldots \cap \Gamma_N^c$, segue que

$$0 < \alpha \doteq d(A, \Gamma_1^c \cap \ldots \cap \Gamma_N^c).$$

Em particular, se $d((\tau, \xi), A) < \alpha$, então $(\tau, \xi) \in \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_N$. Agora afirmamos que existe $c > 0$ suficientemente grande de modo que se $(\tau, \xi) \in S^{n+m-1}$ e $|\tau| > c|\xi|$, então $d((\tau, \xi), A) < \alpha$. De fato, vamos supor aqui que $\xi \neq 0$, pois caso contrário teríamos $(\tau, \xi) \in A$ pela definição de A e, portanto, $d((\tau,\xi),A)=0<\alpha$. Note que se $(\tau,\xi)\in S^{n+m-1}$ e $|\tau|>c|\xi|$, então $|\tau|^2+|\xi|^2=1$ e

$$c^2|\xi|^2<|\tau|^2=1-|\xi|^2.$$

Logo, $|\xi|^2<\frac{1}{1+c^2}$. Além disso,

$$|\tau|^2=1-|\xi|^2>1-\frac{1}{1+c^2}=\frac{c^2}{1+c^2}.$$

Em particular, $|\tau|>\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$. Podemos encontrar $c>0$ tal que

$$|\xi|^2=1-|\tau|^2<1-\frac{c^2}{1+c^2}\leq\frac{\alpha^2}{2}. \tag{2.1}$$

Usaremos o fato que

$$(1-|\tau|)^2\leq 1-|\tau|^2<\frac{\alpha^2}{2}, \tag{2.2}$$

o qual segue do fato que $\xi\neq 0$ e, portanto, $|\tau|<1$.

Consideramos agora $\tau_0=\frac{\tau}{|\tau|}$ e temos que $(\tau_0,0)\in A$. Usando a desigualdade (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} d((\tau,\xi),A)^2 &\leq |(\tau,\xi)-(\tau_0,0)|^2=|\tau-\tau_0|^2+|\xi|^2\\ &= \left|\tau-\frac{\tau}{|\tau|}\right|^2+|\xi|^2<\left|\left(1-\frac{1}{|\tau|}\right)\tau\right|^2+\frac{\alpha^2}{2}. \end{aligned}$$

E agora usando a desigualdade (2.2) podemos concluir que

$$\begin{aligned} d((\tau,\xi),A)^2 &< \left|\left(1-\frac{1}{|\tau|}\right)\tau\right|^2+\frac{\alpha^2}{2}\\ &= \left[\left(\frac{1}{|\tau|}-1\right)|\tau|\right]^2+\frac{\alpha^2}{2}=(1-|\tau|)^2+\frac{\alpha^2}{2}\\ &\leq \alpha^2. \end{aligned}$$

A afirmação está demonstrada. Fixe agora $(\tau,\xi)\in\mathbb{Z}^{n+m}$ de modo que $|\tau|>c|\xi|$. Definimos $\lambda=\frac{1}{|(\tau,\xi)|}$ e $(\tau',\xi')=\lambda(\tau,\xi)$. Segue que $(\tau',\xi')\in S^{n+m-1}$ e $|\tau'|>c|\xi'|$. Isso nos mostra que $(\tau',\xi')\in A$, e portanto existe $j\in\{1,\ldots,N\}$ de modo que $(\tau',\xi')\in\Gamma_j$. Como Γ_j é um cone, segue que $(\tau,\xi)\in\Gamma_j\cap\mathbb{Z}^{n+m}$, o que nos dá

$$|\hat{u}(\tau,\xi)|\leq C_0e^{-\epsilon_0\omega(|(\tau,\xi)|)}.$$

□

Apêndice C

Fatoração de funções com zeros

Lema C.1 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $F \in G^s(I)$, $l \in \mathbb{N}$ e $y_0 \in I$ tais que $F^{(j)}(y_0) = 0$ para cada $j = 0, \ldots, l-1$ (em outras palavras, y_0 é um zero de ordem no mínimo l de F). Então*

$$F(y) = (y - y_0)^l F_l(y),$$

sendo que

$$F_l(y) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 t_1 \cdot t_2^2 \cdot \ldots \cdot t_{l-1}^{l-1} F^{(l)} \left(\psi_l \left(t_1, \ldots, t_l, y\right)\right) dt_1 \ldots dt_l$$

e $\psi_m : [0,1]^m \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida indutivamente por

$$\psi_1(t_1, y) = t_1 y + (1 - t_1) y_0$$

e

$$\psi_m(t_1, \ldots, t_m, y) = t_m \psi_{m-1}(t_1, \ldots, t_{m-1}, y) + (1 - t_m) y_0, m > 1.$$

Em particular,

$$F_l(y_0) = \frac{F^{(l)}(y_0)}{l!}.$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução em l. O caso $l = 1$ é consequência imediata do Teorema Fundamental do Cálculo. Agora vamos supor que o resultado é válido para $l \geq 1$ e iremos mostrar que ele permanece válido para $l+1$. Usando o caso $l = 1$ podemos escrever

$$F(y) = (y - y_0) \int_0^1 F'\left(t_1 y + (1 - t_1) y_0\right) dt_1.$$

Definindo

$$G_{t_1}(y) = F'\left(t_1 y + (1-t_1)y_0\right),$$

temos

$$G_{t_1}^{(j)}(y) = t_1^j F^{(j+1)}\left(t_1 y + (1-t_1)y_0\right).$$

Assim, podemos aplicar a hipótese de indução na função G_{t_1} para obtermos

$$G_{t_1}(y) = (y-y_0)^l \int_0^1 \dots \int_0^1 s_1 \cdot s_2^2 \cdot \ldots \cdot s_{l-1}^{l-1} G_{t_1}^{(l)}\left(\psi_l\left(s_1, \ldots, s_l, y\right)\right) ds_1 \ldots ds_l.$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(y) &= (y-y_0)\int_0^1 G_{t_1}(y)dt_1 \\ &= (y-y_0)^{l+1}\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 s_1 \cdot s_2^2 \ldots \cdot s_{l-1}^{l-1} G_{t_1}^{(l)}\left(\psi_l\left(s_1, \ldots, s_l, y\right)\right) ds_1 \ldots ds_l dt_1. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} G_{t_1}^{(l)}\left(\psi_l\left(s_1, \ldots, s_l, y\right)\right) &= t_1^l F^{(l+1)}\left(t_1 \psi_l\left(s_1, \ldots, s_l, y\right) + (1-t_1)y_0\right) \\ &= t_1^l F^{(l+1)}\left(\psi_{l+1}\left(s_1, \ldots, s_l, t_1, y\right)\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$F(y) = (y-y_0)^{\ell+1}\int_0^1 \dots \int_0^1 s_1 s_2^2 \ldots s_{\ell-1}^{\ell-1} t_1^{\ell} F^{(\ell+1)}\left(\psi_{\ell+1}(s_1, \ldots, s_\ell, t_1, y)\right) ds_1 \ldots ds_\ell dt_1$$

e a demonstração da primeira parte está feita.

Agora, para concluirmos que

$$F_l(y_0) = \frac{F^{(l)}(y_0)}{l!},$$

afirmamos que para $l \geq 1$ vale

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 t_1 \cdot t_2^2 \ldots \cdot t_{l-1}^{l-1} dt_1 \ldots dt_l = \frac{1}{l!}.$$

De fato, primeiro definimos $I_l = \int_0^1 \ldots \int_0^1 t_1 \cdot t_2^2 \ldots \cdot t_{l-1}^{l-1} dt_1 \ldots dt_l$. Para $l = 1$ temos

$$I_1 = \int_0^1 dt_1 = 1.$$

Usando indução novamente, vamos supor que o resultado vale para $l - 1 \geq 0$ e então

$$\begin{aligned}
I_l &= \int_0^1 \ldots \int_0^1 t_1 \cdot t_2^2 \ldots \cdot t_{l-1}^{l-1} dt_1 \ldots dt_l \\
&= \int_0^1 \ldots \int_0^1 t_1 \cdot t_2^2 \ldots \cdot t_{l-1}^{l-1} dt_1 \ldots dt_{l-1} \\
&= \int_0^1 \ldots \int_0^1 t_1 \cdot t_2^2 \ldots \cdot t_{l-2}^{l-2} dt_1 \ldots dt_{l-2} \cdot \int_0^1 t_{l-1}^{l-1} dt_{l-1} \\
&= \int_0^1 \ldots \int_0^1 t_1 \cdot t_2^2 \ldots \cdot t_{l-2}^{l-2} dt_1 \ldots dt_{l-1} \cdot \int_0^1 t_{l-1}^{l-1} dt_{l-1} \\
&= I_{l-1} \cdot \frac{1}{l} \\
&= \frac{1}{l!}.
\end{aligned}$$

A igualdade $F_l(y_0) = \frac{F^{(l)}(y_0)}{l!}$ segue então da expressão obtida para $F_l(y)$ e da igualdade $\psi_m(t_1, \ldots, t_m, y_0) = y_0$. A demonstração está completa. $\square$

Apêndice D

Divisão

A demonstração da proposição abaixo no caso não periódico está feita em Droste [D].

Proposição D.1 *Seja* $u \in D'_s(\mathbb{T})$ *de modo que* $\operatorname{supp} u = \{0\}$. *Então*

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n \delta^{(n)},$$

para certas constantes $a_n \in \mathbb{C}$.

Lema D.2 *Para todo* $n \geq 1$ *e todo* $1 \leq k \leq n$, *vale*

$$\binom{n+2}{k+2} \leq \binom{n}{k}\binom{n+2}{2}$$

Demonstração. A desigualdade acima é equivalente à seguinte desigualdade:

$$\frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!} \leq \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(n+2)!}{2!n!},$$

ou seja,

$$\frac{1}{(k+2)(k+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Esta última desigualdade é válida, já que $k \geq 1$. $\square$

Proposição D.3 *Sejam* $s > 1$ *e* $T \in D'_s(\mathbb{T})$. *Se* $g(x) = 1 - \cos(x - x_0)$ *para algum* $x_0 \in \mathbb{T}$ *e* $gT = 0$, *então*

$$T = a_0\delta_{x_0} + a_1\delta'_{x_0}$$

para certos $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. Aqui, δ_{x_0} denota a ultradistribuição Delta de Dirac periódica em $D'_s(\mathbb{T})$ centrada em x_0.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$. Como $gT = 0$, segue que $\operatorname{supp} T = \{0\}$. Obtemos, da proposição D.1, que

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^{(n)},$$

para certas constantes $a_n \in \mathbb{C}$, sendo que aqui estamos denotando por δ a ultradistribuição periódica Delta de Dirac centrada em 0. Iremos mostrar que para todo $N > 1$, é possível encontrarmos $f_N \in G^s(\mathbb{T})$ satisfazendo $(gf_N)^{(n)}(0) = 0$ se $n \neq N$ e $(gf_N)^{(N)}(0) \neq 0$. Com isso a demonstração fica completa, já que teremos

$$0 = \langle gT, f_N \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^{(n)}, gf_N \right\rangle = (-1)^N a_N (gf_N)^{(N)}(0).$$

Se $N > 2$, então podemos escolher $f_N^{(n)}(0) = 0$ para todo $n = 0, 1, \ldots, N-3$, já que $g(0) = g'(0) = 0$ e, para $n \geq 2$, tem-se

$$(gf_N)^{(n)}(0) = \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} g^{(j)}(0) f_N^{(n-j)}(0) \tag{4.1}$$

e, portanto, $a_N = 0$ para todo $N \geq 2$. Logo $T = a_0\delta + a_1\delta'$.

Para $N > 1$ arbitrário, usamos (4.1) com $n = N$ para obtermos

$$(gf_N)^{(N)}(0) = \sum_{j=2}^{N} \binom{N}{j} g^{(j)}(0) f_N^{(N-j)}(0) = \binom{N}{2} g^{(2)}(0) f_N^{(N-2)}(0).$$

Logo, podemos considerar $f_N^{(N-2)}(0) = 1$. Agora temos que definir $f_N^{(n)}(0)$ para $n > N-2$ e faremos isto indutivamente em n. Vamos supor que $f_N^{(j)}(0)$ já foi definido para todo $0 \leq j \leq n-1$ e observamos que

$$(gf_N)^{(n+2)}(0) = \sum_{j=2}^{n+2} \binom{n+2}{j} g^{(j)}(0) f_N^{(n+2-j)}(0).$$

Como $g^{(2)}(0) = 1$ e queremos que $(gf_N)^{(n+2)}(0) = 0$ se $n > N-2$, devemos ter

$$f_N^{(n)}(0) = -\binom{n+2}{2}^{-1} \sum_{j=3}^{n+2} \binom{n+2}{j} g^{(j)}(0) f_N^{(n+2-j)}(0). \tag{4.2}$$

Para garantirmos a existência de uma tal f_N em $G^s(\mathbb{T})$, devemos mostrar que existe uma constante $C > 0$ satisfazendo (veja [HHP])

$$\left| f_N^{(n)}(0) \right| \leq C^{n+1} n!^s, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.3}$$

Sabemos que existe uma constante $A > 1$ tal que

$$\left| g^{(n+2)}(0) \right| \leq A^{n+1} n!^s, \ \forall \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Afirmamos que, para $N > 1$ fixado, existe uma constante $B > 1$ de tal modo que

$$\left| f_N^{(n)}(0) \right| \leq (AB)^{n+1} n!^s, \ \forall \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.4}$$

A desigualdade (4.4) será demonstrada por indução em $n \geq N-2$ pois a estimativa é claramente válida se $n \leq N-2$ se $AB > 1$. Portanto, iremos supor que $B > \frac{1}{A}$. Agora, supondo que a desigualdade (4.4) é válida para $0 \leq j \leq n-1$, mostraremos que ela permanece válida para n. Pelo Lema D.2 segue que, para $B > 1$,

$$\begin{aligned}
\left| f_N^{(n)}(0) \right| &\leq \binom{n+2}{2}^{-1} \sum_{j=3}^{n+2} \binom{n+2}{j} \left| g^{(j)}(0) \right| \left| f_N^{(n+2-j)}(0) \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+2}{k+2} \binom{n+2}{2}^{-1} \left| g^{(k+2)}(0) \right| \left| f_N^{(n-k)}(0) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} k!^s (AB)^{n-k+1} (n-k)!^s \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} n!^s A^{n+1} AB^{n-k+1} \\
&\leq (AB)^{n+1} n!^s A \sum_{k=1}^{\infty} B^{-k}
\end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} B^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} B^{-k} - 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}\left|f_N^{(n)}(0)\right| &\leq (AB)^{n+1} n!^s \left[A\left(\sum_{k=0}^{\infty} B^{-k} - 1\right)\right] \\ &= (AB)^{n+1} n!^s A\left(\frac{1}{1-1/B} - 1\right) \\ &= (AB)^{n+1} n!^s A\left(\frac{1}{B-1}\right).\end{aligned}$$

Aumentando B se necessário, podemos supor que $A\left(\frac{1}{B-1}\right) < 1$ e a demonstração está completa. □

Lema D.4 (Lema de Ramis-Sibuya) *Sejam $s > 1$ e $f \in G^s(\mathbb{R})$ flat em 0. Então existem constantes $C, c > 0$ tais que*

$$\left|f^{(j)}(x)\right| \leq C^{j+1} j!^s e^{-\frac{c}{|x|^{1/(s-1)}}},\ \forall\ |x| \leq 1, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.5}$$

Demonstração. Como f é flat em 0 e pertence ao espaço $G^s(\mathbb{R})$, segue do Teorema de Taylor que existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left|f^{(j)}(x)\right| \leq A^{j+N+1} j!^s N!^{s-1} |x|^N,\ \forall\ |x| \leq 1, j, N \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.6}$$

No que segue, $[s]$ denota o menor inteiro maior que s. Seja $M \in \mathbb{N}$ dado. Consideramos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{M}{s-1} < N \leq \frac{M}{s-1} + 1$. Então $(s-1)N \leq M + s - 1$ e temos

$$\begin{aligned}N!^{s-1}|x|^N &\leq N^{(s-1)N}|x|^N \leq N^{M+s-1}|x|^N \leq \left(\frac{M+s-1}{s-1}\right)^{M+s-1} |x|^N \\ &= \frac{(M+s-1)^{M+s-1}}{(s-1)^{M+s-1}}|x|^N \leq \frac{(M+[s])^{M+[s]}}{(s-1)^{M+s-1}}|x|^N \leq \frac{e^{M+[s]}(M+[s])!}{(s-1)^{M+s-1}}|x|^N \\ &\leq \frac{e^{M+[s]}2^{M+[s]}M![s]!}{(s-1)^{M+s-1}}|x|^N \leq C_0^{M+1} M! |x|^{\frac{M}{s-1}},\end{aligned}$$

sendo $C_0 = \max\left\{2^{[s]}e^{[s]}[s]!(s-1)^{1-s}, \frac{2e}{s-1}\right\}$. Usando as últimas desigualdades e (4.6), concluímos que

$$\left|f^{(j)}(x)\right| \leq A^{j+1} j!^s C_0^{M+1} M! |x|^{M/(s-1)},\ \forall\ |x| \leq 1, j, M \in \mathbb{Z}_+.$$

Logo,

$$\left|f^{(j)}(x)\right| \frac{\left(\frac{1}{2C_0|x|^{1/(s-1)}}\right)^M}{M!} \leq \frac{C_0}{2^M} A^{j+1} j!^s,\ \forall\ M \in \mathbb{Z}_+, |x| \leq 1.$$

Portanto,

$$\left|f^{(j)}(x)\right| e^{\frac{1}{2C_0|x|^{1/(s-1)}}} \leq 2C_0 A^{j+1} j!^s,\ \forall\ |x| \leq 1, j \in \mathbb{Z}_+.$$

A demonstração está completa. □

Teorema D.5 *Sejam $s > 1$ e $f \in G^s(\mathbb{T})$ uma função flat em $x_0 \in \mathbb{T}$. Se $fT = a_0\delta_{x_0} + a_1\delta'_{x_0}$, com $T \in D'_s(\mathbb{T})$, então $a_0 = a_1 = 0$.*

Demonstração. Podemos supor que $x_0 = 0$. Pelo Lema D.4, existem $C, c > 0$ tais que

$$\left|f^{(j)}(x)\right| \leq C^{j+1} j!^s e^{-\frac{c}{|x|^{1/(s-1)}}},\ \forall\ |x| \leq 1, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Seja $\psi_0(x) = e^{\frac{-1}{x^{1/(s-1)}}}$ se $x > 0$ e $\psi_0(x) = 0$ se $x \leq 0$. Sabemos que $\psi_0 \in G^s(\mathbb{R})$. Se definirmos $\psi(x) = \psi_0\left((4/c)^{s-1}x\right)$, com $c > 0$ então $\psi \in G^s(\mathbb{R})$ e ψ é dada por

$$\psi(x) = e^{\frac{-c/4}{x^{1/(s-1)}}} \text{ se } x > 0 \text{ e } \psi(x) = 0 \text{ se } x \leq 0.$$

Agora definimos $\psi_n(x) = \psi(x+1/n)\psi(-x+1/n)$. Segue que $\psi_n \in G^s(\mathbb{R})$ e $\operatorname{supp}\psi \subset [-1/n, 1/n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, existe $A > 0$ tal que

$$\left|\psi^{(j)}(x)\right| \leq A^{j+1} j!^s,\ \forall\ j \in \mathbb{Z}_+, x \in [0, 2].$$

Se $x \in \operatorname{supp}\psi_n$, então $|x| \leq 1/n$. Logo, $-1/n \leq x \leq 1/n$ e segue que $0 \leq x + 1/n \leq 2$ e $0 \leq -x + 1/n \leq 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\psi_n^{(j)}(x)\right| &\leq \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \left|\psi^{(k)}(x+1/n)\right| \left|\psi^{(j-k)}(-x+1/n)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^{k+1} k!^s A^{j-k+1} (j-k)!^s \\
&\leq \sum_{k=0}^{j} j!^s A^{j+2} \\
&\leq (2A)^j A^2 j!^s,\ \forall\ x \in \operatorname{supp}\psi_n.
\end{aligned}$$

Portanto, conseguimos uma constante $C_1 > 0$ satisfazendo

$$\left|\psi_n^{(j)}(x)\right| \leq C_1^{j+1} j!^s, \ \forall\, j \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Agora definimos $A_n = \psi_n(0) = e^{\frac{-c/2}{(1/n)^{1/(s-1)}}}$ e $\varphi_n(x) = A_n^{-1}\psi_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então $\varphi_n(0) = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\varphi_n^{(j)}(x)\right| \leq A_n^{-1} C_1^{j+1} j!^s, \ \ \forall\ j \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

e $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [-1/n, 1/n]$. Estendemos φ_n periodicamente para obtermos uma função em $G^s(\mathbb{T})$ que coincide com φ_n em $[-\pi, \pi]$. Essa função também será denotada por φ_n.

Caso 1: $a_1 = 0$.

Se $a_0 \neq 0$, então

$$|a_0| = |a_0|\varphi_n(0) = |\left\langle a_0\delta, \varphi_n\right\rangle| = |\left\langle T, f\varphi_n\right\rangle|.$$

Mostraremos que $f\varphi_n$ converge a 0 em $G^s(\mathbb{T})$ e teremos uma contradição, já que T é contínua e $0 < |a_0|$. Observe que para $|x| \leq 1/n$ vale

$$e^{\frac{-c}{|x|^{1/(s-1)}}} \leq e^{\frac{-c}{(1/n)^{1/(s-1)}}} = A_n^2.$$

Podemos supor ainda que $C_1/C < 1$. Observando que a desigualdade abaixo deve ser feita em $\operatorname{supp}\varphi_n$, podemos supor que $|x| \leq 1/n$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|(f\varphi_n)^{(j)}(x)\right| &\leq \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^{k+1} k!^s e^{\frac{-c}{|x|^{1/(s-1)}}} A_n^{-1} C^{j-k+1} (j-k)!^s \\
&\leq j!^s \sum_{k=0}^{j} C_1^{k+1} e^{\frac{-c}{|x|^{1/(s-1)}}} A_n^{-1} C^{j-k+1} \\
&\leq j!^s \sum_{k=0}^{j} C_1^{k+1} A_n^2 A_n^{-1} C^{j-k+1} \\
&\leq A_n j!^s C_1 C^{j+1} \sum_{k=0}^{\infty} (C_1/C)^k \\
&\leq A_n j!^s C_0^{j+1},
\end{aligned}$$

sendo $C_0 = \max\left\{C, A\sum_{k=0}^{\infty}(A/C)^k\right\}$. Logo, $f\varphi_n \in G^{s,C_0}(\mathbb{T})$ para cada n e $\|f\varphi_n\|_{G^{s,C_0}} \leq C_0 A_n$.

Como $\lim A_n = 0$, a demonstração deste caso está completa.

Caso 2: $a_1 \neq 0$**.**

Neste caso redefinimos φ_n, utilizando $x\psi_n(x)$ no lugar de $\psi_n(x)$. Sendo assim, teremos $\varphi_n(0) = 0$ para cada n e $\varphi_n'(x) = \psi_n(x) + x\psi_n'(x)$. Segue que $\varphi_n'(0) = A_n$ e o resultado segue como no primeiro caso, uma vez que $f\varphi_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ em $G^s(\mathbb{T})$. $\square$

Bibliografia

[A] Albanese, A. A., *On the global C^∞ and Gevrey hypoellipticity on the torus of some classes of degenerate elliptic operators*, Note Mat. **31** (2011), 1-13.

[AJ] Albanese, A. A. e Jornet, D, *Global regularity in ultradifferentiable classes*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **193** (2014), 369-387.

[AJO1] Albanese, A. A., Jornet, D. e Oliaro, A. *Quasianalytic Wave Front Sets for Solutions of Linear Partial Differential Operators*, Integral Equations Operator Theory **66** (2010), 153-181.

[AJO2] Albanese, A. A., Jornet, D. e Oliaro, A. *Wave front sets for ultradistributions solutions of linear partial differential operators with coefficients in non-quasianalytic classes*, Math. Nachr. **285** No.4 (2012), 411-425.

[AZ] Albanese, A. A. e Zanghirati, L., *Global hypoellipticity and global solvability in Gevrey classes on the n-dimensional torus*, J. Differential Equations **199** (2004), 256-268.

[Am] Amano, K., *The Global Hypoellipticity of a class of degenerate elliptic-parabolic operators*, Proc. Japan Acad. **60 (4)** (1984), 312-314.

[BG] Baouendi, M. S. e Goulaouic, C., *Nonanalytic-hypoellipticity for some degenerate elliptic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **78**, (1972), 483–486.

[BFP] Barostichi, R. F., Ferra, I. A. e Petronilho, G., *Global hypoellipticity and simultaneous approximability in ultradifferentiable classes*, J. Math. Anal. Appl. **453** (2017), 104-124.

[BM] Bell, D. R. e Mohammed, S. A., *An extension of Hörmander's theorem for infinitely degenerate second-order operators*, Duke Math. J. **78** (1995), 453-475.

[BCM] Bergamasco, A. P., Cordaro, P. D. e Malagutti, P. A., *Globally hypoelliptic system of vector fields*. J. Funct. Anal. **114** No. 2 (1993), 267-285.

[BP] Bergamasco, A. P. e Petronilho, G., *Global solvability of a class of involutive systems*, J. Math. Anal. Appl. **233** (1999), 314–327.

[Beu] Beurling, A., *Quasi-analyticity and general distributions*, Lecture 4 and 5, AMS Summer Institute, Standford, 1961.

[Bj] Björck, G., *Linear partial differential operators and generalized distribution*, Ark. Mat. 6 (1966), 351-407.

[BMM] Bonet, J., Meise, R. e Melikhov, S. N., *A comparison of two different ways to define classes of ultradifferentiable functions*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **14** (2007), 425-444.

[BMT] Braun, R. W., Meise, R. e Taylor, B. A., *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results Math. **17** 1990, 206–237.

[BCCJ] Braun Rodrigues, N., Chinni, G., Cordaro, P. D. e Jahnke, M. R., *Lower order perturbation and global analytic vectors for a class of globally analytic hypoelliptic operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (12) (2016), 5159-5170.

[CC] Chen, W. e Chi, M. Y., *Hypoelliptic vector fields and almost periodic motions on the torus* $\mathbb{T}^n$, Comm. Partial Differential Equations **25** (2000), 337-354.

[ChC] Chinni, G. e Cordaro, P. D., *On Global Analytic and Gevrey Hypoellipticity on the Torus and the Métivier Inequality*, Comm. Partial Differential Equations **42** (2017), 121-141.

[CS] Constantine, G. M. e Savits, T. H., *A Multivariate FAA Di Bruno Formula With Applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** No. 2 (1996), 503–520.

[CoHi1] Cordaro P. D. e Himonas A. A., *Global analytic hypoellipticity for a class of degenerate elliptic operators on the torus*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 501-510.

[CoHi2] Cordaro P. D. e Himonas, A. A., *Global analytic regularity for sums of squares of vector fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 4993-5001.

[DGY] Dickinson, D., Gramchev, T. e Yoshino, M., *Perturbations of vector fields on tori: Resonant normal forms and Diophantine phenomena*, Proc. Edinb. Math. Soc. **45** 2002, 731-759.

[D] Droste. B., *Beitrag Zum Divisionsproblem for Ultradistributionen und ein Fortsetzungssatz*, Manuscripta Math. **27** (1979), 259-278.

[Fe] Fedii, V. S., *Estimates in H^s norms and hypoellipticity*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **193** (2) (1970), 940-942.

[FO] Fujiwara, D. e Omori, H., *An example of a globally hypoelliptic operator*, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 293-297.

[GPY] Gramchev, T., Popivanov, P. e Yoshino, M., *Global properties in spaces of generalized functions on the torus for second order differential operators with variable coefficients*, Rend. Sem. Mat. Pol. Torino **51** (2) (1993), 145-172.

[GW] Greenfield, S. J. e Wallach, N. R., *Global hypoellipticity and Liouville numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. **31** (1972), 112–114.

[HH1] Hanges, N. e Himonas, A. A., *Singular solutions for sums of squares of vector fields*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 1503-1511.

[HH2] Hanges, N. e Himonas, A. A., *Non-analytic hypoellipticity in the presence of symplecticity*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 405-409.

[HHP] Hannah, H., Himonas, A. A. e Petronilho, G., *Gevrey Regularity of the periodic gKdV equation*, J. Differential Equations **250** (2011), 2581-2600.

[HM] Heinrich, T. e Meise, R., *A support theorem for quasianalytic functionals*, Math. Nachr. **280** No. 4 (2007), 364–387.

[Hi1] Himonas A. A., *On degenerate elliptic operators of infinite type*, Math. Z. **220** (1995), 449-460.

[Hi2] Himonas, A. A. *Global analytic and Gevrey hypoellipticity of sublaplacians under diophantine conditions*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** No. 7 (2000), 2061–2067.

[HP] Himonas A. A. e Petronilho, G., *On global hypoellepticity of degenerate elliptic operators*, Math. Z. **230** (1999), 241-257.

[HP1] Himonas, A. A. e Petronilho, G., *Global hypoellipticity and simultaneous approximability*, J. Funct. Anal., **170** (2000), 356-365.

[HP2] Himonas, A. A. e Petronilho, G., *Global Hypoellipticity for Sublaplacians*, Matemática Contemporânea **8** (2000), 167-184.

[HP3] Himonas, A. A. e Petronilho, G., *Propagation of regularity and global hypoellipticity*, Michigam Math. J., **50** (2002), 471-481.

[HP4] Himonas A. A. e Petronilho, G., *On C^∞ and Gevrey Regularity of Sublaplacians*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (11) (2006), 4809-4820.

[HPS] Himonas, A. A., Petronilho, G. e dos Santos, L. A. C., *Regularity of a class of subLaplacians on the 3-dimensional torus*, J. Funct. Anal. **240** (2006), 568-591.

[Ho] Hörmander, L., *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[Ho1] Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag II (1983).

[Hou] Hounie, J. G., *Globally hypoelliptic vector fields on compact surfaces*, Comm. Partial Differential Equations **7** (4) (1982), 343-370.

[K1] Komatsu, H., *Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces*, J. Math. Soc. Japan **19** No. 3, 366-383 (1967).

[Pa] Parmeggiani, A., *A remark on the stability of C^∞-hypoellipticity under lower-order perturbations*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. **6** (2015), 227-235.

[P1] Petronilho, G., *Global s-solvability, global s-hypoellipticity and Diophantine phenomena*, Indag. Math. (N.S.) **16** (2005), 67-90.

[P2] Petronilho, G., *Simultaneous reduction of a family of commuting real vector fields and global hypoellipticity*, Israel J. of Math., **155** (2006), 81-92.

[PZ] Petronilho, G. e Zani, S. L., *Global s-solvability and global s-hypoellipticity for certain perturbations of zero order of systems of constant real vector fields*, J. Differential Equations **244** (2008), 2372–2403.

[Ta] Tartakoff, D. S., Global (and local) analyticity for second order operators constructed from rigid vector fields on products of tori, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (7) (1996), 2577-2583.

[T] Treves, F., Topological Vector Spaces, Distriutions and Kernels, Dover Publications Inc., Mineola, (2006).