UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Espectro absolutamente contínuo do operador Laplaciano

Carlos Ronal Mamani Mamani

São Carlos - SP
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Espectro absolutamente contínuo do operador Laplaciano

Carlos Ronal Mamani Mamani

Orientadora: *Prof.ª Dr.ª Alessandra Aparecida Verri*

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

São Carlos - SP
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Carlos Ronal Mamani Mamani, realizada em 06/04/2018:

Profa. Dra. Alessandra Aparecida Verri
UFSCar

Prof. Dr. Cesar Rogerio de Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Marcelo José Dias Nascimento
UFSCar

Prof. Dr. Marcone Correa Pereira
USP

Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho
UFMG

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus e toda a minha família. Um agradecimento especial aos meus pais, Clara Mamani Cornejo e Bernardo Mamani Quispe, pelo apoio e compreensão em todos os momentos e aspectos da minha vida.

A minha orientadora Alessandra Aparecida Verri, pelo apoio e confiança que depositou em mim para a execução deste trabalho.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar.

Aos professores César Rogério de Oliveira, Marcelo José Dias Nascimento, Marcone Corrêa Pereira e Silas Luiz de Carvalho por aceitarem o convite de compor a banca examinadora, pelas criticas e sugestões ao trabalho.

A todos os meus colegas da pós-graduação que me ajudaram e agradeço também a todos meus amigos e amigas que acreditaram em mim durante o doutorado.

Finalmente a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja Ω um tubo periódico em $\mathbb{R}^3$, denote por $-\Delta_D^\Omega$ e $-\Delta_\Omega^N$ os operadores Laplacianos de Dirichlet e Neumann em Ω, respectivamente. Neste trabalho, estudamos o espectro absolutamente contínuo de $-\Delta_\Omega^j$, $j \in \{D, N\}$, sob a condição de que o diâmetro da seção transversal de Ω é suficientemente pequeno. Além disso, investigamos a existência e a localização de lacunas no espectro $\sigma(-\Delta_\Omega^j)$, $j \in \{D, N\}$. Por outro lado, também consideramos o caso em que Ω é apenas um tubo torcido (limitado ou ilimitado), não necessariamente periódico. Nesta situação, considerando o Laplaciano de Neumann $-\Delta_\Omega^N$ em Ω, nosso objetivo é encontrar o operador efetivo quando Ω é "espremido". No entanto, já que neste processo existam autovalores divergentes, consideramos $-\Delta_\Omega^N$ atuando em subespaços específicos do espaço de Hilbert inicial. A estratégia é interessante porque encontramos operadores efetivos diferentes em cada situação. No caso em que Ω é periodicamente torcido e suficientemente fino, obtemos também informações sobre o espectro absolutamente contínuo de $-\Delta_\Omega^N$ (restrito a tais subespaços) e a existência e a localização de lacunas na sua estrutura do seu espectro.

Palavras chaves: Tubos periódicos, Laplaciano de Dirichlet, Laplaciano de Neumann, espectro absolutamente contínuo, Lacunas espectrais.

Abstract

Let Ω be a periodic waveguide in $\mathbb{R}^3$, we denote by $-\Delta_\Omega^D$ and $-\Delta_\Omega^N$ the Dirichlet and Neumann Laplacian operators in Ω, respectively. In this work we study the absolutely continuous spectrum of $-\Delta_\Omega^j$, $j \in \{D, N\}$, on the condition that the diameter of the cross section of Ω is thin enough. Furthermore, we investigate the existence and location of band gaps in the spectrum $\sigma(-\Delta_\Omega^j)$, $j \in \{D, N\}$. On the other hand, we also consider the case where Ω is a twisting waveguide (bounded or unbounded) and not necessarily periodic. In this situation, by considering the Neumann Laplacian operator $-\Delta_\Omega^N$ in Ω, our goal is to find the effective operator when Ω is "squeezed". However, since in this process there are divergent eigenvalues, we consider $-\Delta_\Omega^N$ acting in specific subspaces of the initial Hilbert space. The strategy is interesting because we find different effective operators in each situation. In the case where Ω is periodically twisted and thin enough, we obtain information on the absolutely continuous spectrum of $-\Delta_\Omega^N$ (restricted to that subspaces) and existence and location of band gaps in its structure.

Keywords: Periodic waveguide, Dirichlet Laplacian, Neumann Laplacian, absolutely continuos spectrum, band gaps.

Sumário

Introdução

Seja Λ uma faixa (em $\mathbb{R}^2$) ou um tubo (em $\mathbb{R}^3$). Denote por $-\Delta_\Lambda$ o operador Laplaciano restrito à Λ. Na fronteira $\partial\Lambda$, considere a condição de Dirichlet ou a de Neumman. Durante os últimos anos, o operador $-\Delta_\Lambda$ tem sido estudado sob vários aspectos [3, 5, 18, 20, 22, 29, 31, 32, 34]. Ressaltamos o caso particular em que Λ é uma faixa periódica ou um tubo periódico [3, 5, 26, 27, 33, 34]. Nesse contexto, um assunto interessante é saber sob quais condições o espectro $\sigma(-\Delta_\Lambda)$ é puramente absolutamente contínuo. Por outro lado, já que $\sigma(-\Delta_\Lambda)$ é uma união de bandas, outra questão é sobre a existência e localização de lacunas em sua estrutura.

No caso de uma faixa encurvada periodicamente, a continuidade absoluta foi demonstrada por Sobolev em [33]; os resultados desse trabalho se aplicam considerando a condição de Dirichlet ou a de Neumann na fronteira da faixa.

Em [34] o autor estudou o problema de existência e localização de lacunas no espectro do Laplaciano de Dirichlet em uma faixa periódica em $\mathbb{R}^2$. Numa situação mais particular, em [20] os autores encontraram uma estimativa para os comprimentos das bandas do espectro quando o diâmetro da faixa se aproxima de zero.

No caso de um tubo periódico, a continuidade absoluta foi estudada em [3, 18]. Em [3], foi considerada apenas a condição de Dirichlet na fronteira e além disso, a seção transversal do tubo era um disco $\mathcal{B}_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < \varepsilon\}$. Em [18], as condições na fronteira são mais gerais, no entanto uma condição de simetria na construção do tubo é assumida.

Em [28], o autor mostrou a existência de lacunas no espectro essencial do Laplaciano de Neumann em um tubo periódico.

Neste trabalho, Ω é um tubo periódico em $\mathbb{R}^3$ e denotaremos por $-\Delta_\Omega^D$ e $-\Delta_\Omega^N$ os Laplacianos de Dirichlet e Neumann em Ω, respectivamente. A geometria de Ω é apresentada na Seção 2.1 do Capítulo 2. Nessa mesma seção introduzimos os conceitos de tubo encurvado, tubo torcido e tubo deformado. Na Seção 2.2 deste mesmo capítulo definimos de forma mais precisa os operadores $-\Delta_\Omega^D$ e $-\Delta_\Omega^N$. Um dos objetivos deste trabalho é estudar o espectro absolutamente contínuo de $-\Delta_\Omega^j$, $j \in \{D, N\}$, sob a condição de que o diâmetro da seção transversal do tubo Ω é suficientemente pequeno. Como já comentado, para o operador $-\Delta_\Omega^D$, esse assunto foi estudado em [3] mas apenas para o caso em que a seção transversal de Ω é um disco (este fato exclui o caso em que Ω é torcido); nossa principal contribuição neste assunto é cobrir o caso em que Ω é simultaneamente encurvado e torcido [26]. Para isto, a seção transversal de Ω será um subconjunto aberto, limitado, conexo, com fronteira suave e não vazio de $\mathbb{R}^2$.

Neste trabalho, estudamos também o espectro absolutamente contínuo do Laplaciano de Neumann $-\Delta_\Omega^N$ em um tubo deformado por uma função periódica (veja Seção 2.1 para detalhes da construção deste tipo de tubo). Com relação a este assunto, encontramos na literatura apenas resultados envolvendo condições de simetria na construção do tubo. Não impor essa condição é a nossa contribuição ao tema.

A outra parte do trabalho é destinada a estudar a existência e a localização de lacunas no espectro $\sigma(-\Delta_\Omega^j)$, $j \in \{D, N\}$. Temos resultados afirmativos para ambos os operadores; o caso Dirichlet é discutido em [26]. Para o caso $j = N$, este assunto foi demonstrado em [28] de uma forma mais abstrata. No entanto, apresentamos uma demonstração alternativa baseada nas ideias de Yoshitomi [34]. Além disso, nossa análise mostra explicitamente como a geometria do tubo influencia no resultado final. Destacamos que nossos resultados são demonstrados mediante uma análise do comportamento assintótico das bandas de $\sigma(-\Delta_\Omega^j)$, $j \in \{D, N\}$, desde que o tubo seja suficientemente fino.

Seja agora Ω um tubo reto torcido, limitado ou ilimitado e não necessariamente periódico. Neste trabalho, estudamos também o comportamento do operador $-\Delta_\Omega^N$ quando o diâmetro da seção transversal de Ω se aproxima de zero. Uma questão interessante é conhecer o operador limite neste processo, também chamado de operador efetivo. Embora este assunto já seja bem conhecido, abordamos o problema de uma forma diferente da usual. De fato, quando o tubo Ω é "espremido", existem autovalores divergentes devidos às oscilações transversais em Ω. Assim, consideramos $-\Delta_\Omega^N$ restrito a subespaços específicos do espaço de Hilbert inicial. O ponto interessante é que, quando o diâmetro da seção transversal de Ω se aproxima de zero, encontramos operadores efetivos diferentes em cada situação. Os operadores efetivos que encontramos são novos na literatura. A estratégia usada neste problema é baseada nas ideias de [11]. Nesse trabalho o autor considera o operador Laplaciano com a condição de Dirichlet na fronteira do tubo.

Ainda no contexto do parágrafo anterior, assuma que Ω é periódico no sentido de que o efeito de torção varia periodicamente. No caso em que Ω é suficientemente fino, encontramos informações sobre o espectro absolutamente contínuo de $-\Delta_\Omega^N$ (restrito a tais subespaços) e a existência e localização de lacunas na estrutura do seu espectro, os resultados se encontram em [27].

Este trabalho é dividido em cinco capítulos. No Capítulo 1, apresentamos as principais definições e resultados usados ao longo do trabalho. O Capítulo 2 é divido em três seções; na Seção 2.1, apresentamos a geometria de Ω e os conceitos de tubo encurvado, tubo torcido e tubo deformado. Na Seção 2.2, fazemos uma tradicional mudança de variáveis a fim de trabalharmos sempre com um tubo reto. Na Seção 2.3, mencionamos algumas características do espectro dos operadores Laplaciano de Dirichlet e de Neumann restritos à seção transversal do tubo.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo do operador Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_\Omega^D$ em tubos periódicos e este capítulo é divido em quatro seções; na Seção 3.1 estudamos o seu espectro absolutamente contínuo, na Seção 3.2 realizamos a decomposição de Floquet-Bloch, na Seção 3.3, estudamos o comportamento assintótico dos seus autovalores e as Seções 3.4 e 3.5 são dedicadas ao estudo da existência e localização de lacunas em $\sigma(-\Delta_\Omega^D)$.

No Capítulo 4, estudamos o operador Laplaciano de Neumann $-\Delta_\Omega^N$ em tubos periódicos. Este capítulo é divido em seis seções; a Seção 4.1 é dedicada ao estudo do seu espectro absolutamente contínuo, as Seções 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 são dedicadas às demonstrações de resultados preliminares e a Seção 4.6 trata a existência de lacunas no especto $\sigma(-\Delta_\Omega^N)$.

No Capítulo 5, estudamos o operador Laplaciano de Neumann em um tubo reto e torcido (limitado ou ilimitado). Na Seção 5.1, apresentamos a geometria do tubo e na Seção 5.2, apresentamos a estratégia de estudo e os resultados principais do capítulo. A Seção 5.4 é dedicada às demonstrações de resultados preliminares e de alguns dos resultados principais. A Seção 5.4 é dedicada ao estudo de propriedades espectrais no caso em que Ω é ilimitado e torcido periodicamente.

No final o texto apresentamos um apêndice com resultados que foram usados ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados que serão usados ao longo do trabalho.

1.1 Família analítica de vetores e operadores num espaço de Hilbert

Começamos com algumas definições. Seja D um subconjunto aberto do plano complexo. Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{C}$ é *analítica em* $x \in D$ se existir uma vizinhança $V_x \subset D$ de x de forma que f admita uma representação em séries de potências em V_x; dizemos que f *é analítica em* D se é analítica em cada $x \in D$.

Seja J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Dizemos que uma função $f : J \to \mathbb{R}$ é *analítica em* $x \in J$ se existir uma vizinhança $V_x \subset J$ de x de forma que f admita uma representação em série de potências em V_x. Dizemos que f *é analítica em* J se é analítica em cada $x \in J$.

Agora, seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, em que denotamos por $(\cdot, \cdot)$ o produto interno em $\mathcal{H}$. Novamente, seja J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Uma família de vetores $\{u(x) \in \mathcal{H} : x \in J\}$ é chamada de *família analítica em* J se $(u(x), \eta)$ é uma função analítica em J, para cada $\eta \in \mathcal{H}$.

Seja $\{T(x) \in B(\mathcal{H}) : x \in J\}$ uma família de operadores limitados em $\mathcal{H}$.

Dizemos que $\{T(x) \in B(\mathcal{H}) : x \in J\}$ é uma *família analítica de operadores limitados* se a função $(T(x)\psi, \eta)$ é analítica em J, para cada $\psi, \eta \in \mathcal{H}$.

Uma vez que este trabalho é dedicado ao estudo de operadores autoadjuntos não necessariamente limitados, é preciso introduzir alguns conceitos de analiticidade para esta classe de operadores.

Seja $\{T(x) : x \in J\}$ uma família de operadores autoadjuntos em $\mathcal{H}$ (não necessariamente limitados). Dizemos que $\{T(x) : x \in J\}$ é uma *família analítica de operadores autoadjuntos* se $\{(T(x) - i\mathbf{1})^{-1} \in B(\mathcal{H}) : x \in J\}$ é uma família analítica de operadores limitados; em que $\mathbf{1}$ denota o operador identidade.

1.2 Família analítica do tipo (A)

Uma família $\{T(x) : x \in J\}$ de operadores autoadjuntos atuando num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é chamada de *família analítica do tipo* (A) se são satisfeitas as seguintes condições:

i) dom $T(x) = \mathbf{D}$, ou seja, os domínios dos operadores não dependem de x;

ii) $(T(x)\psi, \eta)$ é uma função analítica em J, para cada $\psi, \eta \in \mathbf{D}$.

Teorema 1.1. *Toda família $\{T(x) : x \in J\}$ analítica do tipo (A) é uma família analítica de operadores autoadjuntos.*

A demonstração do Teorema 1.1 pode ser encontrada em [23].

Sejam $T : \text{dom}\, T \sqsubseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ e $B : \text{dom}\, B \sqsubset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operadores lineares. Dizemos que B é T-limitado se dom $T \subset$ dom B e existem $a, b \geq 0$ tais que

$$\|B\xi\| \leq a\|T\xi\| + b\|\xi\|, \quad \forall \xi \in \text{dom}\, T.$$

O *T-limite de B* é o ínfimo dos a's admissível na desigualdade.

Teorema 1.2. *Sejam $T(0), T_1$ e T_2 operadores atuando num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Para $x \in (-a, a)$, considere a família de operadores*

$$T(x) = T(0) + xT_1 + x^2T_2.$$

Suponha que $T(0)$ é autoadjunto, que para cada $x \in (-a,a)$, o operador $V(x) = xT_1 + x^2T_2$ é simétrico e $V(x)$ é $T(0)$-limitado com $T(0)$-limite de $V(x)$ igual a 0 (zero). Então, $\{T(x) : x \in (-a,a)\}$ é uma família analítica do tipo (A).

Para detalhes da demonstração do Teorema 1.2, veja Teorema 2.6 do Capítulo VII em [23].

Teorema 1.3. *Seja $\{T(x) : x \in J\}$ uma família analítica do tipo (A) e suponha que para algum $x \in J$, $T(x)$ possui resolvente compacto. Então, $T(x)$ possui resolvente compacto para todo $x \in J$.*

Para a demonstração do Teorema 1.3, veja o Teorema 2.4 do Capítulo VII em [23].

Teorema 1.4. *Seja $\{T(x) : x \in J\}$ uma família de operadores autoadjuntos do tipo (A). Além disso, suponha que para algum $x \in J$, $T(x)$ possui resolvente compacto. Então, todos os autovalores de $T(x)$ podem ser representados por funções analíticas em J. Mais precisamente, existem uma sequência de funções reais $\mu_n(x)$ e uma sequência de funções $\varphi_n(x)$ em $\mathcal{H}$, todas analíticas em J, de forma que para cada $x \in J$, $\mu_n(x)$ representa todos os autovalores de $T(x)$ e a sequência $\varphi_n(x)$ forma uma família ortonormal completa de autovetores de $T(x)$.*

A demonstração do Teorema 1.4 também pode ser encontrada no Capítulo VII em [23].

Observação 1.1. *No Teorema 1.4 os autovalores podem ser organizados de forma que $\mu_1(x) \leq \mu_2(x) \leq \cdots \leq \mu_n(x) \leq \cdots$, para todo $x \in J$; neste caso para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(x)$ é uma função contínua e analítica por partes em J, para mais detalhes veja Seção 3 do Capítulo VII em [23].*

1.3 Família analítica de formas do tipo (a) e família analítica de operadores autoadjuntos do tipo (B)

Como na seção anterior, seja J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Consideremos uma família $b(x)$ de formas quadráticas (não necessariamente limitadas) definidas em J. Dizemos que $\{b(x) : x \in J\}$ é uma *família analítica de formas do tipo* (a) se são satisfeitas as seguintes condições:

i) cada $b(x)$ é fechada e limitada inferiormente;

ii) dom $b(x) = \mathbf{d}$, ou seja, não depende de x;

iii) $\mathbf{d}$ é denso em $\mathcal{H}$;

iv) $b(x)(\eta)$ é uma função analítica em $x \in J$, para cada $\eta \in \mathbf{d}$.

O seguinte resultado pode ser encontrado no Capítulo VII em [23].

Teorema 1.5. *Seja $\{b(x) : x \in J\}$ uma família analítica de formas do tipo (a). Para cada $x \in J$, seja $T(x) = T_{b(x)}$ o seu operador autoadjunto associado. Então, $\{T(x) : x \in J\}$ é uma família analítica de operadores autoadjuntos.*

Uma família analítica de operadores autoadjuntos associado a uma família de analítica de formas do tipo (a) (de acordo com o Teorema 1.5) será chamada de *família analítica de operadores autoadjuntos do tipo* (B).

Sejam b_1 e b_2 formas quadráticas densamente definidas, hermitianas e limitadas inferiormente em $\mathcal{H}$. Dizemos que b_2 é b_1-limitado se dom $b_1 \subset$ dom b_2 e existem $a, c \geq 0$ tais que

$$|b_2(\xi)| \leq a|b_1(\xi)| + c\|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \text{dom } b_1.$$

O ínfimo dos a's admissíveis é chamado de *b_1-limite de b_2*.

Teorema 1.6. *Sejam $b(0)$, b_1 e b_2 formas quadráticas densamente definidas num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Para $x \in (-a, a)$, considere a família de formas*

quadráticas
$$b(x) = b(0) + xb_1 + x^2 b_2.$$
Suponha que $b(0)$ é fechada e limitada inferiormente e que, para cada $x \in (-a,a)$ a forma quadrática $q(x) = xb_1 + x^2 b_2$ é $b(0)$-limitada com $b(0)$-limite igual a zero. Então, $\{b(x) : x \in (-a,a)\}$ é uma família analítica de formas do tipo (a).

O Teorema 1.6 é um caso particular do Teorema 4.8 do Capítulo VII em [23].

Teorema 1.7. *Seja $\{T(x) : x \in J\}$ uma família analítica de operadores auto-adjuntos do tipo (B), suponha que para algum $x \in J$, $T(x)$ possui resolvente compacto. Então, $T(x)$ possui resolvente compacto para todo $x \in J$.*

A demostração do Teorema 1.7 pode ser encontrado no Capítulo VII em [23].

Observação 1.2. *As conclusões do Teorema 1.4 são válidas também para uma família de operadores autoadjuntos $\{T(x) : x \in J\}$ do tipo (B) com resolvente compacto. Para mais detalhes sobre esta observação, veja Capítulo VII em [23].*

A Observação 1.1 também vale para uma família analítica do tipo (B); veja Seção 2 do Capítulo VII em [23] para mais detalhes.

1.4 Decomposição de Floquet-Bloch

Nesta seção apresentamos algumas notações e resultados a respeito da decomposição de Floquet-Bloch, os quais podem ser encontrados na Seção XII.16 de [30] com mais detalhes.

Sejam $\mathcal{H}'$ um espaço de Hilbert e (M,μ) um espaço mensurável com μ sendo uma medida σ-finita. Seja $\tilde{\mathcal{H}} := L^2(M, \mathrm{d}\mu, \mathcal{H}')$ o conjunto das funções mensuráveis $f : M \to \mathcal{H}'$ de forma que
$$\int_M \|f(m)\|^2_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(m) < \infty.$$

O conjunto $L^2(M, d\mu, \mathcal{H}')$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$(f, g)_{\oplus} := \int_M (f(m), g(m))_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(m).$$

O espaço $L^2(M, \mathrm{d}\mu, \mathcal{H}')$ é também conhecido como a integral direta com fibras constantes e também é usada a notação

$$\tilde{\mathcal{H}} := \int_M^{\oplus} \mathcal{H}' \,\mathrm{d}\mu.$$

A norma em $\tilde{\mathcal{H}}$ é denotada por $\|\cdot\|_{\oplus}$.

Uma função $A : M \to B(\mathcal{H}')$ é dita mensurável se, para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{H}'$, a função $m \mapsto (\psi, A(m)\psi)_{\mathcal{H}'}$ é mensurável. Denotamos por $L^{\infty}(M, \mathrm{d}\mu, B(\mathcal{H}'))$ o espaço das funções mensuráveis de M em $B(\mathcal{H}')$ com

$$\|A\|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup} \|A(m)\|_{B(\mathcal{H}')} < \infty.$$

Um operador limitado A em $\tilde{\mathcal{H}} = \int_M^{\oplus} \mathcal{H}' \mathrm{d}\mu$ é dito ser decomposto pela integral direta se existe uma função $A(\cdot)$ em $L^{\infty}(M, \mathrm{d}\mu, B(\mathcal{H}'))$ de forma que, para cada $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}$,

$$(A\psi)(m) = A(m)\psi(m).$$

Neste caso também dizemos que A é *decomponível* e escrevemos

$$A = \int_M^{\oplus} A(m)\mathrm{d}\mu(m);$$

os operadores $A(m)$ são chamados de *operadores fibras* de A.

Teorema 1.8. *Se $A(\cdot) \in L^{\infty}(M, \mathrm{d}\mu, B(\mathcal{H}'))$, então existe um único operador decomponível $A \in B(\tilde{\mathcal{H}})$ de forma que*

$$(A\psi)(m) = A(m)\psi(m).$$

Além disso, $\|A\|_{B(\tilde{\mathcal{H}})} = \|A(\cdot)\|_{\infty}$.

A demonstração do Teorema 1.8 pode ser encontrada em [30].

Uma função $A(\cdot)$ de um espaço mensurável (M,μ) no conjunto dos operadores autoadjuntos em $\mathcal{H}'$ (não necessariamente limitados) é chamada de *mensurável* se, e somente se, a função $(A(\cdot)+i\mathbf{1})^{-1}$ é mensurável. Nestas condições, dada uma função mensurável $A(\cdot)$, definimos um operador A em $\mathcal{H} = \int_M^{\oplus} \mathcal{H}' \mathrm{d}\mu$, com domínio

$$\text{dom } A := \left\{ \psi \in \tilde{\mathcal{H}} : \psi(m) \in \text{dom } A(m), \text{ q.t.p.}\, m, \int_M \|A(m)\psi(m)\|^2_{\mathcal{H}'} \mathrm{d}\mu(m) < \infty \right\},$$

por

$$(A\psi)(m) = A(m)\psi(m).$$

Usamos a notação $A = \int_M^{\oplus} A(m)\mathrm{d}\mu$.

Teorema 1.9. *Seja $A = \int_M^{\oplus} A(m)\mathrm{d}\mu$, em que $A(\cdot)$ é mensurável e $A(m)$ é um operador autoadjunto para cada m. Então:*

a) O operador A é autoadjunto.

b) $\lambda \in \sigma(A)$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\{m : \sigma(A(m)) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda - \varepsilon) \neq \emptyset\}\right) > 0.$$

c) λ é um autovalor de A se, e somente se,

$$\mu\left(\{m : \lambda \text{ é um autovalor de } A(m)\}\right) > 0$$

Teorema 1.10. *Seja $(M, \mathrm{d}\mu)$, em que $M = [a,b]$ (um intervalo fechado e limitado) e μ a medida de Lebesgue. Sejam $\mathcal{H}'$ um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e $A = \int_M^{\oplus} A(m)\mathrm{d}\mu(m)$, em que cada $A(m)$ é um operador autoadjunto em $\mathcal{H}'$. Suponha que são dadas funções $\{\psi_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ definidas em $[a,b]$ com valores em $\mathcal{H}'$ e contínuas em $[a,b]$. Suponha também que são dadas funções $\{E_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ com valores reais, analíticas numa vizinhança de $[a,b]$, de forma que:*

i) $E_n(\cdot)$ é não-constante para cada $n = 1, 2, \cdots$;

ii) $A(m)\psi_n(m) = E_n(m)\psi_n(m)$ *para todo* $m \in [a,b]$, $n = 1, 2, \cdots$;

iii) Para cada m*, o conjunto* $\{\psi_n(m)\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma base ortonormal completa para* $\mathcal{H}'$.

Então, A *tem espectro puramente absolutamente contínuo.*

As demostrações dos Teoremas 1.9 e 1.10 podem ser encontrados na Seção XIII.16 em [30]. Também ressaltamos que o teorema continua sendo válido se existir uma partição $\mathcal{P}$ finita do intervalo $[a.b]$ de forma que as funções $\{E_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ sejam analíticas e não-constantes em cada subintervalo de $\mathcal{P}$.

1.5 Laplaciano unidimensional com potencial periódico

Seja $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, ou seja, existe $L > 0$ de forma que $V(s + L) = V(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Considere o operador unidimensional

$$T := -\frac{d^2}{\mathrm{d}s^2} + V.$$

Agora, para cada $\theta \in [-\pi/L, \pi/L]$, considere o operador autoadjunto

$$T(\theta) := \left(-i\frac{d}{\mathrm{d}s} + \theta\right)^2 + V, \quad \text{em} \quad L^2(0, L),$$

em que $\operatorname{dom} T(\theta) = \{w \in H^2(0, L), w(0) = w(L), w'(0) = w'(L)\}$. O espectro de $T(\theta)$ é puramente discreto (veja Seção XIII.16 de [30]). Denotamos por $\nu_n(\theta)$ o seu n-ésimo autovalor contando com a sua multiplicidade. Com estas notações temos o seguinte resultado:

Teorema 1.11. *Suponha que* V *é uma função contínua por partes. Então,*

a) $\sigma(T) = \cup_{n=1}^{\infty} \nu_n([-\pi/L, \pi/L])$, *em que* $\nu_n([-\pi/L, \pi/L]) := \{\nu_n(\theta), \theta \in [-\pi/L, \pi/L]\}$;

b) $\{T(\theta), \theta \in [-\pi/L, \pi/L]\}$ *é uma família analítica do tipo (A);*

c) $\nu_n(\theta) = \nu_n(-\theta)$, *para todo* $\theta \in [-\pi/L, \pi/L]$;

d) *Para cada* $n = 1, 2, \cdots$, $\nu_n(\theta)$ *é analítica em* $(0, \pi/L)$ *e contínua em* $\theta = 0$ *e* $\theta = \pi/L$;

e) *Para* n *ímpar (respectivamente, par),* $\nu_n(\theta)$ *é estritamente crescente (respectivamente, decrescente) quando* θ *está entre* 0 *e* π/L. *Em particular,*

$$\nu_1(0) < \nu_1(\pi/L) \leq \nu_2(\pi/L) < \nu_2(0) \leq \cdots \leq \nu_{2n-1}(0) < \nu_{2n-1}(\pi/L)$$

$$\leq \nu_{2n}(\pi/L) < \nu_{2n}(0) \leq \cdots .$$

Para detalhes da demonstração do Teorema 1.11 veja a Seção XIII.16 em [30].

Capítulo 2

Geometria do tubo

Na parte inicial deste capítulo apresentamos a construção do tubo Ω em $\mathbb{R}^3$ ao qual vamos restringir o operador Laplaciano $-\Delta$, com condições de Dirichlet ou Neumann na fronteira $\partial\Omega$.

Dado Ω, um parâmetro ε é acrescentado em suas seções transversais. Assim, obtemos uma sequência de tubos $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, que no limite $\varepsilon \to 0$, se aproxima de uma curva em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, se $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1\}$ é um tubo cilíndrico em $\mathbb{R}^3$, a sequência $\Omega_\varepsilon = \{(x, \varepsilon y, \varepsilon z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in \Omega\}$ se aproxima de uma reta em $\mathbb{R}^3$ (eixo x) quando $\varepsilon \to 0$. Um ponto interessante é analisar o comportamento do operador Laplaciano nesse limite, ou seja, conhecer o operador limite (também chamado de operador efetivo) nesse processo. Outra questão é obter informações espectrais do operador Laplaciano restrito a Ω.

Na primeira seção deste capítulo construímos detalhadamente a região Ω. De fato, as regiões podem ser bem mais gerais do que tubos cilíndricos. Introduzimos também a definição de tubo deformado, tubo encurvado, tubo torcido e tubo periódico. Na segunda seção trabalhamos com o operador Laplaciano restrito a tais tubos. Definimos o Laplaciano de Dirichlet e o de Neumann. É nessa seção que também realizamos uma tradicional mudança de variáveis a fim de trabalharmos com um "tubo reto". A última seção é destinada a algumas propriedades do operador Laplaciano restrito apenas às seções transversais de Ω.

2.1 Construção do tubo

Seja $I = \mathbb{R}$ ou $I = [a, b]$ um intervalo limitado de $\mathbb{R}$. Considere $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma curva simples de classe C^3 em $\mathbb{R}^3$ e parametrizada pelo comprimento de arco s. A curvatura de r na posição s é $k(s) := \|r''(s)\|$. Os vetores

$$T(s) = \dot{r}(s), \quad N(s) = \frac{1}{k(s)}\dot{T}(s), \quad B(s) = T(s) \times N(s), \tag{2.1}$$

denotam os vetores tangente, normal e binormal à curva no ponto $r(s)$, respectivamente. O conjunto $\{T(s), N(s), B(s)\}$ é chamado de referencial de Frenet.

Para justificar a construção (2.1), assumimos $k > 0$. Por outro lado, se uma parte de r é um pedaço de uma linha reta (ou seja, a curvatura k é identicamente nula nesse pedaço), a construção de um referencial de Frenet de classe C^2 é descrito na Seção 2.1 de [17]. Como uma outra alternativa podemos assumir a Condição 1 de [8]. Assim, é possível combinar referencial de Frenet constantes com (2.1) e obter um referencial de Frenet global de classe C^2.

Em cada uma das situações acima, quando um referencial de Frenet global existe, dizemos que a curva possui um referencial de Frenet apropriado. Este, por sua vez, se desenvolve ao logo da curva satisfazendo as equações de Serret-Frenet:

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

em que $\tau(s)$ é a torção da curva no ponto s, a qual é definida por (2.2).

Ao longo deste trabalho, vamos assumir que a curva r possui um referencial de Frenet apropriado.

Seja S um subconjunto aberto, limitado, conexo, com fronteira suave e não vazio de $\mathbb{R}^2$. O conjunto

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r(s) + y_1 N(s) + y_2 B(s), s \in I, (y_1, y_2) \in S\}$$

é obtido transladando-se S ao longo de r. Este movimento é com relação à

(2.2).

Agora, seja $\alpha : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e de forma que $\alpha(0) = 0$ se $I = \mathbb{R}$ ou $\alpha(a) = 0$ se $I = [a, b]$. À medida que S se move ao longo de r, podemos exigir que, na posição $r(s)$, S apresente uma rotação de ângulo $\alpha(s)$. Assim, obtemos uma nova região

$$\Omega^{\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r(s) + y_1 N_{\alpha}(s) + y_2 B_{\alpha}(s),\ s \in I,\ (y_1, y_2) \in S\},$$

em que

$$\begin{array}{rcl} N_{\alpha}(s) & := & \cos\alpha(s)N(s) + \operatorname{sen}\alpha(s)B(s), \\ B_{\alpha}(s) & := & -\operatorname{sen}\alpha(s)N(s) + \cos\alpha(s)B(s). \end{array} \tag{2.3}$$

Podemos ainda considerar a seguinte construção. Seja $h : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 satisfazendo

$$0 < c_1 \leq h(s) \leq c_2, \quad \forall s \in I, \tag{2.4}$$

em que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. De uma forma mais geral, definimos a região

$$\Omega^{\alpha,h} := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = r(s) + h(s)y_1 N_{\alpha}(s) + h(s)y_2 B_{\alpha}(s),\ s \in I,\ (y_1, y_2) \in S\},$$

em que $N_{\alpha}(s)$ e $B_{\alpha}(s)$ são definidos em (2.3).

Grosso modo, o tubo $\Omega^{\alpha,h}$ é obtido transladando-se a região S ao longo da curva $r(s)$ e, simultaneamente, realizando uma rotação de ângulo $\alpha(s)$ e uma deformação $h(s)$ na posição $r(s)$. Se h não é uma função constante, chamamos $\Omega^{\alpha,h}$ de *tubo deformado*.

Dizemos que o tubo $\Omega^{\alpha,h}$ é *encurvado* (ou possui um efeito encurvado) se a curva r não é uma reta, ou seja, $k \neq 0$. Dizemos que o tubo $\Omega^{\alpha,h}$ é *torcido* (ou possui um efeito torcido) se S não é invariante por rotação com respeito à origem e $\tau + \alpha' \neq 0$.

Consideremos agora o caso particular em que $I = \mathbb{R}$ e r é uma curva periódica, ou seja, existem $L > 0$ e um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^3$ de forma que

$$r(s + L) = u + r(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Além disso, suponha que α e h são funções periódicas e também com período L, ou seja, $\alpha(s+L)=\alpha(s)$ e $h(s+L)=h(s)$, para todo $s\in\mathbb{R}$. Neste caso, chamamos a região $\Omega^{\alpha,h}$ de *tubo periódico.*

Independente das características geométricas de $\Omega^{\alpha,h}$, adicionamos um parâmetro $\varepsilon>0$ em S e definimos a região

$$\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}:=\{x\in\mathbb{R}^3 : x=r(s)+\varepsilon h(s)y_1N_\alpha(s)+\varepsilon h(s)y_2B_\alpha(s),\ s\in I,\ (y_1,y_2)\in S\}.$$

Obtemos assim uma sequência de tubos $\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}$ que se aproxima da curva $r(s)$ quando $\varepsilon\to 0$.

2.2 Formas quadráticas e mudança de variáveis

Dado $\varepsilon>0$, consideremos as formas quadráticas

$$q_\varepsilon^j(\varphi)=\int_{\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}}|\nabla\varphi|^2dx,\quad j\in\{D,N\},\tag{2.5}$$

com domínios dom $q_\varepsilon^D=\mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon^{\alpha,h})$ e dom $q_\varepsilon^N=\mathcal{H}^1(\Omega_\varepsilon^{\alpha,h})$, respetivamente. Em (2.5), ∇ denota o gradiente de φ nas coordenadas usuais de $\mathbb{R}^3$. Para $j\in\{D,N\}$, denotamos por $-\Delta^j_{\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}}$ o operador autoadjunto associado à forma quadrática q_ε^j; $-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}}$ e $-\Delta^N_{\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}}$ são chamados de *Laplaciano de Dirichlet* e *Laplaciano de Neumann* em $\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}$, respectivamente.

Ao longo de todo este trabalho, as técnicas são voltadas ao estudo da sequência de formas quadráticas $(q_\varepsilon^j)_{\varepsilon>0}$, $j\in\{D,N\}$.

Como em (2.5), a região de integração depende de ε; o objetivo agora é fazer uma mudança de variáveis de modo que tal região não dependa deste parâmetro e também se transforme em uma região mais simples. De fato, passaremos a trabalhar no tubo reto $I\times S$.

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} F_\varepsilon: & I\times S & \to & \Omega_\varepsilon^{\alpha,h} \\ & (s,y_1,y_2) & \mapsto & r(s)+\varepsilon h(s)y_1N_\alpha(s)+\varepsilon h(s)y_2B_\alpha(s) \end{array}.$$

Assumimos que k é uma função limitada. Essa condição irá garantir que, para ε suficientemente pequeno, F_ε seja um difeomorfismo.

De acordo com a mudança de coordenadas acima, passamos a trabalhar num domínio fixo para todo $\varepsilon > 0$. Por outro lado, o preço a pagar é uma métrica Riemanniana $G = G^{\alpha,h}$ não-trivial a qual é induzida pelo difeomorfismo F_ε, ou seja,

$$G = (G_{ij}), \quad G_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

em que

$$e_1 = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial s}, \quad e_2 = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial y_1}, \quad e_3 = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial y_2}.$$

A matriz Jacobiana é dada por

$$J := \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon & \sigma_\varepsilon & \delta_\varepsilon \\ 0 & \varepsilon h \cos\alpha & \varepsilon h \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\varepsilon h \operatorname{sen}\alpha & \varepsilon h \cos\alpha \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon(s,y) &:= 1 - \varepsilon h(s) k(s) \langle z_\alpha(s), y \rangle, \\ \sigma_\varepsilon(s,y) &:= -\varepsilon h(s)(\tau + \alpha')(s) \langle z_\alpha^\perp(s), y \rangle + \varepsilon h'(s) \langle z_\alpha(s), y \rangle, \\ \delta_\varepsilon(s,y) &:= \varepsilon h(s)(\tau + \alpha')(s) \langle z_\alpha(s), y \rangle + \varepsilon h'(s) \langle z_\alpha^\perp(s), y \rangle, \\ z_\alpha(s) &:= (\cos\alpha(s), -\sin\alpha(s)), \\ z_\alpha^\perp(s) &:= (\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)). \end{aligned}$$

A matriz inversa de J é

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon^{-1} & \tilde{\sigma}_\varepsilon & \tilde{\delta}_\varepsilon \\ 0 & (\varepsilon h)^{-1} \cos\alpha & -(\varepsilon h)^{-1} \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & (\varepsilon h)^{-1} \operatorname{sen}\alpha & (\varepsilon h)^{-1} \cos\alpha \end{pmatrix},$$

em que

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon(s,y) := \frac{1}{\beta_\varepsilon} \left[(\tau + \alpha')(s)\, y_2 - \frac{h'(s)}{h(s)} y_1 \right],$$

$$\tilde{\delta}_\varepsilon(s,y) := -\frac{1}{\beta_\varepsilon}\left[(\tau+\alpha')(s)\, y_1 + \frac{h'(s)}{h(s)} y_2\right].$$

Note que $JJ^t = G$ e $\det J = |\det G|^{1/2} = \varepsilon^2 h^2(s)\beta_\varepsilon(s,y)$. Já que k e h são funções limitadas, para ε suficientemente pequeno, β_ε não se anula em $I \times S$. Assim, F_ε é um difeomorfismo local. Assumindo que o tubo não possui autointersecção (para isso basta tomarmos ε suficientemente pequeno), obtemos um difeomorfismo global.

Introduzimos agora a notação

$$\|\psi\|_G^2 := \int_{I\times S} |\psi(s,y)|^2 h^2(s)\beta_\varepsilon(s,y)\mathrm{d}s\mathrm{d}y$$

e consideremos também o operador unitário

$$\begin{array}{rccc} \Psi_\varepsilon : & L^2(\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}) & \to & L^2(\mathbb{R}\times S, h^2\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y) \\ & \psi & \mapsto & \varepsilon\,\psi\circ F_\varepsilon \end{array}.$$

A partir de (2.5) e do operador unitário acima, obtemos uma nova sequência de formas quadráticas

$$b_\varepsilon^j(\psi) = q_\varepsilon^j(\Psi_\varepsilon^{-1}\psi) = \|J^{-1}\nabla\psi\|_G^2, \quad \mathrm{dom}\; b_\varepsilon^j = \Psi_\varepsilon(\mathrm{dom}\; q_\varepsilon^j), j\in\{D,N\},$$

em que $\nabla\psi = (\partial_s\psi, \nabla_y\psi)$, $\partial_s\psi := \partial\psi/\partial s$ e $\nabla_y\psi := (\partial\psi/\partial y_1, \partial\psi/\partial y_2)$.

Assumindo também que τ e α' são funções limitadas, alguns cálculos mostram que

$$b_\varepsilon^j(\psi) = \int_{I\times S}\left(\frac{h^2}{\beta_\varepsilon}\left|\partial_{s,y}^{Rh}\psi(s,y)\right|^2 + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2}\left|\nabla_y\psi(s,y)\right|^2\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}y, \quad j\in\{D,N\},$$

em que $\mathrm{dom}\; b_\varepsilon^D = H_0^1(I\times S)$ e $\mathrm{dom}\; b_\varepsilon^N = H^1(I\times S)$. Aqui, $y := (y_1,y_2)\in S$,

$$\begin{aligned} (\partial_{s,y}^{Rh}\psi)(s,y) &:= \psi'(s,y) + \langle\nabla_y\psi(s,y), R^h(s,y)\rangle, \\ R^h(s,y) &:= (R\,y)\,(\tau+\alpha')(s) - y\frac{h'(s)}{h(s)}, \end{aligned}$$

$\psi' := \partial_s\psi$ e R é a matriz de rotação $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observe que dom b_ε^j, $j \in \{D, N\}$, é um subespaço do espaço de Hilbert $L^2(I \times S, h^2(s)\beta_\varepsilon(s,y)\mathrm{d}s\mathrm{d}y)$.

Denotamos por T_ε^j o operador autoadjunto associado à forma quadrática $b_\varepsilon^j(\psi)$, $j \in \{D, N\}$. De fato, $\Psi_\varepsilon(-\Delta^j_{\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}})\Psi_\varepsilon^{-1}\psi = T_\varepsilon^j\psi$, dom $T_\varepsilon^j = \Psi_\varepsilon(\text{dom }(-\Delta^j_{\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}}))$, para $j \in \{D, N\}$.

2.3 Sobre a seção transversal do tubo

Nesta seção vamos apresentar algumas características do operador Laplaciano restrito à seção transversal S.

Começamos com o Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_S^D$ em S. Especificamente, denotamos por $-\Delta_S^D$ o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$q^D(u) := \int_S |\nabla_y u|^2 \,\mathrm{d}y, \quad \text{dom } q^D := H_0^1(S).$$

O espectro de $-\Delta_D^S$ é puramente discreto e escrevemos

$$\sigma(-\Delta_D^S) = \{\lambda_n^D \in \mathbb{N}\},$$

$$-\Delta_S^D u_n^D = \lambda_n^D u_n^D, \quad u_n^D \in \mathcal{H}_0^1(S),$$

$$0 < \lambda_1^D < \lambda_2^D \leq \lambda_3^D \leq \cdots .$$

As características geométricas de S garantem que o primeiro autovalor λ_1^D é simples. O Princípio Minimax também garante que

$$\int_S |\nabla_y u|^2 \geq \lambda_1^D \int_S |u|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_0^1(S).$$

Os detalhes sobre estas afirmações podem ser encontrados em [25].

Definimos a constante

$$C(S) := \int_S |\langle \nabla_y u_1^D, Ry \rangle|^2 dy \geq 0, \tag{2.6}$$

em que u_1 é a autofunção associada ao autovalor λ_1^D. Lembremos que R é a matriz de rotação $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observe que $C(S)$ depende somente das características geométricas de S. Mais, se S contém a origem, argumentando como na demonstração da Proposição 2.2 de [7], tem-se $C(S) = 0$ se, e somente se, S é um disco.

Agora, consideremos a seguinte forma quadrática

$$q^N(u) := \int_S |\nabla_y u|^2 \, \mathrm{d}y, \quad \operatorname{dom} q^N := H^1(S).$$

Chamamos de Laplaciano de Neumann restrito à S, e denotamos por $-\Delta_S^N$, o operador autoadjunto associado à q^N. Desde que $-\Delta_S^N$ tem resolvente compacto (veja Seção XIII.14 de [30]), o seu espectro $\sigma(-\Delta_S^N)$ é discreto. Denotemos por λ_n^N o n-ésimo autovalor de $-\Delta_S^N$, contando com a sua multiplicidade, e u_n^N a correspondente autofunção normalizada, ou seja,

$$-\Delta_S^N u_n^N = \lambda_n^N u_n^N, \quad u_n^N \in \mathcal{H}^1(S),$$
$$0 = \lambda_1^N < \lambda_2^N \leq \lambda_3^N \leq \cdots .$$

Neste caso, a longo de todo o texto, vamos assumir que cada autovalor λ_n^N é simples; note que u_1^N é uma função constante.

Capítulo 3

Laplaciano de Dirichlet em tubos periódicos

Durante os últimos anos o operador Laplaciano de Dirichlet $-\Delta^D$ restrito à faixas (em $\mathbb{R}^2$) ou à tubos (em $\mathbb{R}^3$) tem sido estudado sobre vários aspectos. Chamamos a atenção para o caso particular em que a geometria dessas regiões é periódica [3, 5, 18, 20, 33, 34]. Nessas situações, um ponto interessante é conhecer sob quais condições o espectro $\sigma(-\Delta^D)$ é puramente absolutamente contínuo. Por outro lado, uma vez que $\sigma(-\Delta^D)$ é uma união de bandas, outra questão é sobre a existência e localização de lacunas em sua estrutura.

No caso de uma faixa plana encurvada periodicamente, um estudo sobre o espectro $\sigma(-\Delta^D)$ foi feito por Sobolev em [33]. Em seu trabalho, Sobolev mostra que $\sigma(-\Delta^D)$ é puramente absolutamente contínuo. A existência e localização de lacunas foi analisada por Yoshitomi em [34]. Nossas principais contribuições sobre o tema são demonstrar resultados similares para o operador Laplaciano de Dirichlet restrito à tubos periódicos em $\mathbb{R}^3$.

Na Seção 3.1 apresentamos os resultados relacionados ao espectro absolutamente contínuo de $-\Delta^D$. Demonstrações e mais detalhes serão apresentados nas Seções 3.2 e 3.3.

Nas Seções 3.4 e 3.5 apresentamos e demonstramos os resultados relacionados à existência e à localização de lacunas em $\sigma(-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}})$, respectivamente.

Ao longo deste capítulo, consideramos o tubo periódico $\Omega_\varepsilon^{\alpha,h}$ definido na

Seção 2.1 com $I = \mathbb{R}$ e $h(s) = 1$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Por simplicidade, vamos denotar essa região por Ω_ε.

3.1 Espectro absolutamente contínuo de $-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon}$

Seja Ω_ε o tubo periódico descrito acima. Consideremos o Laplaciano de Dirichlet $-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon}$ em Ω_ε, ou seja, $-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon}$ é o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$q^D_\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^2 dx, \quad \text{dom } q^D_\varepsilon = \mathcal{H}^1_0(\Omega_\varepsilon).$$

Nesta seção vamos estudar o espectro absolutamente contínuo do operador $-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon}$ no caso em que ε é suficientemente pequeno. Mais precisamente, seja $\lambda^D_1 > 0$ o primeiro autovalor do Laplaciano de Dirichlet $-\Delta^D_S$ em S (devido às características geométricas de S, λ^D_1 é simples). Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Para cada $E > 0$, existe $\varepsilon_E > 0$ de modo que o espectro de $-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon}$ é puramente absolutamente contínuo no intervalo $[0, \lambda^D_1/\varepsilon^2 + E]$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$.*

A demonstração do Teorema 3.1 é um dos resultados principais deste capítulo. Em [3], os autores mostraram o resultado considerando o caso particular em que a seção transversal de Ω_ε é uma bola $\mathcal{B}_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < \varepsilon\}$ (este fato elimina o efeito de tubo torcido). Considerar o caso em que Ω_ε pode ser simultaneamente encurvado e torcido é a nossa principal contribuição ao assunto. Observamos também que em [18] foi provada que $\sigma(-\Delta^N_{\Omega_\varepsilon})$ é puramente absolutamente contínuo, mas sob a condição de simetria $s \mapsto -s$ na construção do tubo.

A seguir, resumimos os principais passos para demonstrar o Teorema 3.1. Em particular, chamamos atenção para o Teorema 3.2 e o Corolário 3.1 os quais são as principais ferramentas para generalizar o resultado de [3]. Muitos detalhes serão omitidos nesta seção, mas serão apresentados nas próximas.

Fixemos um número $c > \|k^2/4\|_\infty$. Denote por $\mathbf{1}$ o operador identidade. Por razões técnicas, vamos estudar o operador $-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon} + c\,\mathbf{1}$.

De acordo com a mudança de variáveis da Seção 2.2, a sequência de formas quadráticas $(q_\varepsilon^D)_{\varepsilon>0}$ se torna $(b_\varepsilon^D)_{\varepsilon>0}$, em que

$$b_\varepsilon^D(\psi) \;=\; \int_{\mathbb{R}\times S} \left(\frac{1}{\beta_\varepsilon} \left|\partial_{s,y}^R \psi(s,y)\right|^2 + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \left|\nabla_y \psi(s,y)\right|^2 + c|\psi(s,y)|^2 \beta_\varepsilon \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y,$$

dom $b_\varepsilon^D = H_0^1(\mathbb{R}\times S)$,

$$\beta_\varepsilon(s,y) \;:=\; 1 - \varepsilon k(s)\langle z_\alpha, y\rangle, \tag{3.1}$$

$$\partial_{sy}^R \psi \;:=\; \psi' + \langle \nabla_y \psi, R\, y\rangle(\tau + \alpha')(s), \tag{3.2}$$

$z_\alpha(s) = (\cos\alpha(s), -\operatorname{sen}\alpha(s))$ e R é a matriz de rotação $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observe que a forma quadrática b_ε^D atua no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}\times S, \beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y)$.

Alguns cálculos mostram que o operador autoajunto associado à forma quadrática b_ε^D é dado por

$$T_\varepsilon^D \psi := -\frac{1}{\beta_\varepsilon}(\partial_{sy}^R \beta_\varepsilon^{-1} \partial_{sy}^R)\psi - \frac{1}{\varepsilon^2 \beta_\varepsilon} \operatorname{div}(\beta_\varepsilon \nabla_y \psi) + c\,\psi, \tag{3.3}$$

em que dom $T_\varepsilon^D \subset$ dom b_ε^D e $\partial_{sy}^R\psi$ possui ação dada por (3.2). Os operadores $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D + c\,\mathbf{1}$ e T_ε^D são unitariamente equivalentes.

Desde que os coeficientes de T_ε^D são todos periódicos com respeito à variável s, usamos a decomposição de Floquet-Bloch em $\mathcal{C} := [-\pi/L, \pi/L]$. Mais precisamente, o Lema 3.2 da Seção 3.2 mostra que T_ε^D é unitariamente equivalente ao operador $\int_{\mathcal{C}}^{\oplus} T_\varepsilon^\theta \, d\theta$, em que

$$T_\varepsilon^\theta \psi := \frac{1}{\beta_\varepsilon}(-i\partial_{sy}^R + \theta)\beta_\varepsilon^{-1}(-i\partial_{sy}^R + \theta)\psi - \frac{1}{\varepsilon^2\beta_\varepsilon}\operatorname{div}(\beta_\varepsilon \nabla_y \psi) + c\,\psi. \tag{3.4}$$

O domínio dom T_ε^θ é um subespaço de $L^2((0,L)\times S, \beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y)$ e, em particular, as funções em dom T_ε^θ satisfazem as condições de contorno $\psi(0,y) = \psi(L,y)$ e $\psi'(0,y) = \psi'(L,y)$ em $L^2(S)$. Além disso, cada operador T_ε^θ é autoadjunto.

Observemos que cada T_ε^θ tem resolvente compacto e é limitado inferiormente. Assim, o espectro $\sigma(T_\varepsilon^\theta)$ é discreto. Denote por $E_n(\varepsilon,\theta)$ o n-ésimo autovalor de

T_ε^θ, contando com a sua multiplicidade, e $\psi_n(\varepsilon,\theta)$ a correspondente autofunção normalizada, ou seja,

$$T_\varepsilon^\theta \psi_n(\varepsilon,\theta) = E_n(\varepsilon,\theta)\psi_n(\varepsilon,\theta), \quad n = 1,2,3,\cdots, \quad \theta \in \mathcal{C}.$$

Além disso, podemos organizar os autovalores de forma que

$$E_1(\varepsilon,\theta) \le E_2(\varepsilon,\theta) \le \cdots \le E_n(\varepsilon,\theta) \le \cdots, \quad \theta \in \mathcal{C}.$$

Nestas condições, temos

$$\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D + c\mathbf{1}) = \cup_{n=1}^{\infty} \{E_n(\varepsilon,\mathcal{C})\}, \tag{3.5}$$

em que $E_n(\varepsilon,\mathcal{C}) := \cup_{\theta\in\mathcal{C}} \{E_n(\varepsilon,\theta)\}$; cada $E_n(\varepsilon,\mathcal{C})$ é chamado de n-ésima *banda* de $\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D + c\mathbf{1})$.

Agora temos o seguinte resultado:

Lema 3.1. *$\{T_\varepsilon^\theta : \theta \in \mathcal{C}\}$ é uma família analítica do tipo A.*

Este lema garante que as funções $E_n(\varepsilon,\theta)$ são contínuas em $\mathcal{C}$ e analíticas por partes em $\mathcal{C}$; consequentemente, cada $E_n(\varepsilon,\mathcal{C})$ ou é um intervalo fechado ou é um conjunto com apenas um ponto. A prova do Lema 3.1 é apresentada na Seção 3.2.

Outro ponto importante para provar o Teorema 3.1 é conhecer o comportamento assintótico dos autovalores $E_n(\varepsilon,\theta)$, quando $\varepsilon \to 0$. Para esta caracterização, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, considere o operador autoadjunto unidimensional

$$T^\theta w := (-i\partial_s + \theta)^2 w + \left[C(S)(\tau+\alpha')^2(s) + c - \frac{k^2(s)}{4}\right] w, \tag{3.6}$$

atuando em $L^2(0,L)$, em que, dom $T^\theta = \{w \in H^2(0,L) : w(0) = w(L), w'(0) = w'(L)\}$. A constante $C(S)$ é definida por (2.6) no Capítulo 2 e depende apenas da seção transversal S.

Por simplicidade, escrevemos $Q := (0,L) \times S$. Lembre-se que $\lambda_1^D > 0$ denota o primeiro autovalor do Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_S^D$ em S e u_1^D a autofunção correspondente. Considere o subespaço fechado $\mathcal{L} := \{w(s)u_1^D(y) : w \in L^2(0,L)\} \subset L^2(Q)$ e o operador unitário $\mathcal{V}_\varepsilon$ definido por (3.10) na Seção 3.3. Um passo importante na determinação do comportamento assintótico de $E_n(\varepsilon,\theta)$ é dado pelo seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Existe um número $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{ \left\| \mathcal{V}_\varepsilon^{-1} \left(T_\varepsilon^\theta - \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} \mathbf{1} \right)^{-1} \mathcal{V}_\varepsilon - ((T^\theta)^{-1} \oplus \mathbf{0}) \right\| \right\} \leq K\,\varepsilon,$$

em que $\mathbf{0}$ denota o operador nulo sobre o subespaço $\mathcal{L}^\perp$.

O espectro de T^θ é puramente discreto (veja Seção 1.5); denotamos por $\kappa_n(\theta)$ o n-ésimo autovalor contando com a sua multiplicidade. Como consequência direta do Teorema 3.2 temos:

Corolário 3.1. *Para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_{n_0} > 0$ de modo que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_0})$,*

$$E_n(\varepsilon,\theta) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon^2} + \kappa_n(\theta) + O(\varepsilon), \tag{3.7}$$

para cada $n = 1, 2, \cdots, n_0$, uniformemente em $\mathcal{C}$.

Em [3], os autores encontraram uma aproximação similar à do Corolário 3.1. No entanto, o resultado foi provado com a hipótese de que a seção transversal era uma bola $\mathcal{B}_\varepsilon$. Em suas demonstrações, foram usados resultados de [16] os quais não podem ser usados para generalizar para o caso de outras seções transversais. Por outro lado, em [6, 13, 24], resultados similares foram provados para outras seções transversais, mas apenas para o caso em que $\theta = 0$. Enfatizamos que em [24], a convergência é estabelecida sem assumir a existência de um referencial de Frenet na curva de referência r.

Com todas estas ferramentas em mãos, temos

Demonstração do Teorema 3.1: Seja $E > 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que, para todo $\theta \in \mathcal{C}$, o espectro de T_ε^θ abaixo de $E + \lambda_1^D/\varepsilon^2$ consiste exatamente de n_0 autovalores $\{E_n(\varepsilon,\theta)\}_{n=1}^{n_0}$. O Lema 3.1 garante que

$E_n(\varepsilon, \theta)$ são funções contínuas e analíticas por partes. Assim, podemos assumir que existe uma partição finita de $\mathcal{C}$, a qual denotamos por $\mathcal{P}$, de forma que cada $E_n(\theta, \varepsilon)$, $n = 1, 2, \cdots, n_0$, é analítica em cada subintervalo dessa partição. Para concluir o teorema, resta mostrar que cada $E_n(\varepsilon, \theta)$ é não-constante em cada intervalo em que $E_n(\varepsilon, \theta)$ é analítica.

Considere as funções $\kappa_n(\theta)$, $\theta \in \mathcal{C}$. Pelo Teorema 1.11 da Seção 1.4 do Capítulo 1, as funções $\kappa_n(\theta)$ são estritamente monótonas em $(-\pi/L, 0)$ e em $(0, \pi/L)$. Pelo Corolário 3.1, existe $\varepsilon_E > 0$ de forma que (3.7) vale para $n = 1, 2, \cdots, n_0$, uniformemente em $\theta \in \mathcal{C}$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$. Note que $\varepsilon_E > 0$ depende de n_0, ou seja, a espessura do tubo depende do comprimento das energias a serem cobertas. Assim, tomando $\varepsilon_E > 0$ suficientemente pequeno, $E_n(\varepsilon, \theta)$ é não-constante em cada subintervalo da partição $\mathcal{P}$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$ e $n = 1, 2, \cdots, n_0$. Pelo Teorema 1.10 da Seção 1.4 do Capítulo 1, segue a conclusão do teorema. $\square$

A longo das próximas seções, o simbolo K é usado para denotar constantes diferentes e nunca depende de θ.

Como já comentado, as Seções 3.2 e 3.3 são dedicadas às demonstrações dos resultados desta seção. Nas Seções 3.4 e 3.5, vamos apresentar e demostrar os resultados relacionados à existência e à localização de lacunas em $\sigma(-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon})$.

3.2 Decomposição de Floquet-Bloch

Já que os coeficientes de T_ε são periódicos com respeito à variável s, nesta seção apresentamos a decomposição de Floquet-Bloch sobre a zona de Brillouin $\mathcal{C} = [-\pi/L, \pi/L]$. Para simplificar as notações, escrevemos $\Omega := \mathbb{R} \times S$,

$$\mathcal{H}_\varepsilon := L^2(\Omega, \beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y), \quad \tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon := L^2(Q, \beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y).$$

Lembre-se que $Q = (0, L) \times S$.

Lema 3.2. *Existe um operador unitário* $\mathcal{U}_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} \tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon \, d\theta$ *de forma que*

$$\mathcal{U}_\varepsilon \, T_\varepsilon \, \mathcal{U}_\varepsilon^{-1} = \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} T_\varepsilon^\theta \, d\theta,$$

em que

$$T_\varepsilon^\theta \psi := \frac{1}{\beta_\varepsilon}(-i\partial_{sy}^R + \theta)\beta_\varepsilon^{-1}(-i\partial_{sy}^R + \theta)\psi - \frac{1}{\varepsilon^2 \beta_\varepsilon}\mathrm{div}(\beta_\varepsilon \nabla_y \psi) + c\,\psi,$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\; T_\varepsilon^\theta \;\; &= \;\; \big\{\psi \in H^2(Q) : \psi(s,y) = 0 \textit{ em } \partial Q \setminus (\{0,L\} \times S), \\ & \qquad \psi(L,\cdot) = \psi(0,\cdot), \psi'(L,\cdot) = \psi'(0,\cdot) \textit{ em } L^2(S)\big\}. \end{aligned}$$

Além disso, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, T_ε^θ *é autoadjunto.*

Demonstração. Baseado em [3], para $(\theta, s, y) \in \mathcal{C} \times Q$, definimos

$$(\mathcal{U}_\varepsilon f)(\theta, s, y) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-inL\theta - i\theta s} f(s + Ln, y). \tag{3.8}$$

Seja $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times S)$ o espaço de Schwarts. Para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathcal{S})$ a série em (3.8) é convergente e $U_\varepsilon f \in \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} \tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon \, d\theta$. Vamos mostrar que $\mathcal{U}_\varepsilon$ é um operador unitário. Pelo Teorema de Fubini e pelo Teorema de Plancherel,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{U}_\varepsilon f\|_\oplus^2 &= \int_{\mathcal{C}} \|(\mathcal{U}_\varepsilon f)(\theta,\cdot,\cdot)\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2 \mathrm{d}\theta \\ &= \int_Q \beta_\varepsilon(s,y) \int_{\mathcal{C}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-inL\theta - i\theta s} f(s+nL,y) \right|^2 \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y \\ &= \int_Q \left[\beta_\varepsilon \left(\sum_{n,j\in\mathbb{Z}} \overline{f(s+nL,y)} f(s+jL,y) \right) \int_{\mathcal{C}} e^{-i(n-j)L\theta} \frac{L}{2\pi} \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}s \, \mathrm{d}y \\ &= \int_Q \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(s+nL,y)|^2 \beta_\varepsilon(s+nL,y) \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &= \int_\Omega |f(s,y)|^2 \beta_\varepsilon(s,y) \, \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

Desde que $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times S)$ é denso em $\mathcal{H}_\varepsilon$, o operador $\mathcal{U}_\varepsilon$ possui uma única extensão isométrica.

Agora, vamos encontrar o seu adjunto $\mathcal{U}_\varepsilon^*$. Para cada $g \in \mathcal{H}$, definimos

$$(\mathcal{U}_\varepsilon^* g)(s+nL,y) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \int_{\mathcal{C}} e^{inL\theta + is\theta} g(\theta,s,y)\,\mathrm{d}\theta, \quad 0<s<L, y \in S, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Um cálculo direto mostra que $\mathcal{U}_\varepsilon^*$ é o adjunto de $\mathcal{U}_\varepsilon$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{U}_\varepsilon^* g\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}^2 &= \int_{\mathbb{R}\times S} |(\mathcal{U}_\varepsilon^* g)(s,y)|^2 \beta_\varepsilon(s,y)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&= \int_Q \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(\mathcal{U}_\varepsilon^* g)(s+nL,y)|^2 \beta_\varepsilon(s+Ln,y)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&= \int_Q \beta_\varepsilon(s,y) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathcal{C}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{inL\theta+is\theta} g(\theta,s,y) \right|^2 \mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&= \int_Q \left(\int_{\mathcal{C}} |g(\theta,s,y)|^2 \mathrm{d}\theta \right) \beta_\varepsilon(s,y)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&= \|g\|_\oplus^2.
\end{aligned}$$

Segue que $\mathcal{U}_\varepsilon^*$ é também uma isometria. Assim, $\mathcal{U}_\varepsilon$ é sobrejetor. Portanto, $\mathcal{U}_\varepsilon$ é um operador unitário.

O operador $\mathcal{U}_\varepsilon$ é uma modificação do operador do Teorema XIII.88 em [30]. Como consequência, os domínios dos operadores T_ε^θ não dependem de θ.

As demonstrações das outras afirmações serão omitidas neste texto. De fato, uma prova detalhada no caso de faixas periódicas planas pode ser encontrada em [34]. O argumento para tubos periódicos em $\mathbb{R}^3$ é análogo. □

Observação 3.1. Na demonstração acima, usamos o fato de que, para cada $s \in (0,L)$, o conjunto $\{\sqrt{L/2\pi}e^{-inL\theta - is\theta} : n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal completa de $L^2(\mathcal{C})$.

Observação 3.2. Apesar de T_ε^θ atuar no espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$, o operador $\partial_{sy}^R \psi$ tem ação dada por (3.2) e β_ε é dado por (3.1) (veja Seção 3.1). Por simplicidade, mantemos a mesma notação .

Agora, apresentamos a demonstração do Lema 3.1 que foi enunciada na Seção 3.1.

Demonstração do Lema 3.1: Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, escrevemos $T_\varepsilon^\theta = T_\varepsilon^0 + V_\varepsilon^\theta$, em que, para $\psi \in \operatorname{dom} T_\varepsilon^0$,

$$\begin{aligned} V_\varepsilon^\theta \psi &:= (T_\varepsilon^\theta - T_\varepsilon^0)\psi \\ &= (-2i\theta/\beta_\varepsilon^2)\partial_{sy}^R \psi + \left[-i\theta(\partial_{sy}^R \beta_\varepsilon^{-1})/\beta_\varepsilon + \theta^2/\beta_\varepsilon^2\right]\psi. \end{aligned}$$

Afirmamos que V_ε^θ é T_ε^0-limitado com T_ε^0-limite de V_ε^θ igual zero. De fato, denotamos por $R_z = R_z(T_\varepsilon^0) = (T_\varepsilon^0 - z\mathbf{1})^{-1}$. Escolhemos $z \in \mathbb{C}$ com $\operatorname{img} z \neq 0$. Desde que todos os coeficientes de V_ε^θ são limitados, existe $K > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} \|V_\varepsilon^\theta \psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2 &= \int_Q |V_\varepsilon^\theta \psi|^2 \beta_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leq K\left(\langle \psi, T_\varepsilon^0 \psi\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} + \|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2\right) \\ &\leq K\left(\langle R_z(T_\varepsilon^0 - z\mathbf{1})\psi, T_\varepsilon^0 \psi\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} + \|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2\right) \\ &\leq K\left(\langle R_z T_\varepsilon^0 \psi, T_\varepsilon^0 \psi\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} + |z|\langle \psi, R_{\overline{z}} T_\varepsilon^0 \psi\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} + \|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2\right) \\ &\leq K\left(\|R_z T_\varepsilon^0 \psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} \|T_\varepsilon^0 \psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} + |z|\langle \psi, (\mathbf{1} + \overline{z} R_z)\psi\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} + \|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2\right) \\ &\leq K\left[\|R_z\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} \|T_\varepsilon^0 \psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2 + \left(|z| + |z|^2 \|R_z\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} + 1\right)\|\psi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2\right], \end{aligned}$$

para todo $\psi \in \operatorname{dom} T_\varepsilon^0$ e todo $\theta \in \mathcal{C}$. Na primeira estimativa usamos a desigualdade de Minkovski e a propriedade $ab \leq (a^2 + b^2)/2$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Na terceira estimativa, usamos que $R_{\overline{z}} T_\varepsilon^0 = \mathbf{1} + \overline{z} R_z$.

Já que $\|R_z\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} \to 0$, quando $\operatorname{img} z \to \infty$, a afirmação está provada. Logo o resultado segue pelo Teorema 1.2 do Capítulo 1. □

3.3 Comportamento assintótico dos autovalores

Esta seção é dedicada em apresentar os detalhes da demonstração do Teorema 3.2. Alguns passos são muito semelhantes aos de [13] e são necessárias apenas algumas adaptações.

Já que $T_\varepsilon^\theta > 0$ é autoadjunto, existe uma forma sesquilinear fechada $t_\varepsilon^\theta > 0$ de forma que dom $T_\varepsilon^\theta \subset$ dom t_ε^θ (ou seja, dom T_ε^θ é um cerne de dom t_ε^θ) e

$$t_\varepsilon^\theta(\phi, \varphi) = \langle \phi, T_\varepsilon^\theta \varphi \rangle, \quad \forall \phi \in \text{dom } t_\varepsilon^\theta, \forall \varphi \in \text{dom } T_\varepsilon^\theta;$$

para mais detalhes veja Teorema 4.3.1 em [10].

Para $\varphi \in$ dom T_ε^θ, a forma quadrática $t_\varepsilon^\theta(\varphi) := t_\varepsilon^\theta(\varphi, \varphi)$ atua da forma

$$t_\varepsilon^\theta(\varphi) = \int_Q \frac{1}{\beta_\varepsilon} \left| \left(-i\partial_{sy}^R + \theta\right) \varphi \right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_Q \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} |\nabla_y \varphi|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y + c \int_Q \beta_\varepsilon |\varphi|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y.$$

Estamos interessados no estudo da sequência $t_\varepsilon^\theta(\varphi)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Sendo assim, é necessário controlar o termo $(1/\varepsilon^2) \int_Q \beta_\varepsilon |\nabla_y \varphi|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y$, no limite $\varepsilon \to 0$. Já que este fato está relacionado com as oscilações na seção transversal do tubo, procedemos da seguinte forma. Como já comentado na Seção 3.1, seja u_1^D a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1^D do Laplaciano de Dirichlet $-\Delta_S^D$ em S, ou seja,

$$-\Delta_S^D u_1^D = \lambda_1^D u_1^D, \quad u_1^D \geq 0, \quad \int_S |u_1^D|^2 \mathrm{d}y = 1, \quad \lambda_1^D > 0.$$

Devido às características geométricas de S, λ_1^D é um autovalor simples. A estratégia é considerar a sequência de formas quadráticas

$$\begin{aligned} t_\varepsilon^\theta(\varphi) - \frac{\lambda_1^D}{\varepsilon^2} \|\varphi\|_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}^2 &= \int_Q \frac{1}{\beta_\varepsilon} \left| \left(-i\partial_{sy}^R + \theta\right) \varphi \right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &+ \int_Q \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \left(|\nabla_y \varphi|^2 - \lambda_1^D |\varphi|^2 \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y + c \int_Q \beta_\varepsilon |\varphi|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

$\varphi \in$ dom T_ε^θ, a fim de controlar as energias divergentes da seção transversal do tubo, quando $\varepsilon \to 0$; uma discussão detalhada sobre este assunto pode ser encontrada na Seção 1 de [14].

Um ponto importante é que, para cada $\varphi \in$ dom T_ε^θ,

$$\int_S \beta_\varepsilon \left(|\nabla_y \varphi|^2 - \lambda_1^D |\varphi|^2 \right) dy \geq \gamma_\varepsilon(s) \int_S |\varphi|^2 \mathrm{d}y, \quad \text{q.t.p.},$$

em que $\gamma_\varepsilon(s) \to -k^2(s)/4$ uniformemente, quando $\varepsilon \to 0$. A prova desta estimativa pode ser encontrada em [6]. Como consequência, desde que $\|k^2/4\|_\infty < c$, zero pertence ao resolvente $\rho\left(T_\varepsilon^\theta - (\lambda_1^D/\varepsilon^2)\mathbf{1}\right)$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Agora, definimos o operador unitário

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}_\varepsilon : & L^2(Q) & \to & \tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon \\ & \psi & \to & \psi/\beta_\varepsilon^{1/2} \end{array}. \tag{3.10}$$

Com esta transformação, passamos a trabalhar em $L^2(Q)$ com a medida usual de $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, vamos estudar a sequência de formas quadráticas

$$b_\varepsilon^\theta(\psi) := t_\varepsilon^\theta(\mathcal{V}_\varepsilon^\theta\psi) - \frac{\lambda_1^D}{\varepsilon^2}\|\mathcal{V}_\varepsilon^\theta\psi\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon},$$

em que dom $b_\varepsilon^\theta := \mathcal{V}_\varepsilon^{-1}(\text{dom } T_\varepsilon^\theta) \subset L^2(Q)$. É possível mostrar que

$$\begin{aligned} b_\varepsilon^\theta(\psi) &= \int_Q \frac{1}{\beta_\varepsilon^2}\left|-i\left[\partial_{sy}^R\psi + \beta_\varepsilon^{1/2}(\partial_{sy}^R\beta_\varepsilon^{-1/2})\psi\right] + \theta\psi\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &+ \int_Q \frac{1}{\varepsilon^2}\left(|\nabla_y\psi|^2 - \lambda_1^D|\psi|^2\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}y - \int_Q \frac{k^2(s)}{4\beta_\varepsilon^2}|\psi|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y + c\int_Q |\psi|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Os detalhes dos cálculos desta mudança de coordenadas pode ser encontrados no Apêndice A de [13].

Denotamos por B_ε^θ o operador autoadjunto associado ao fecho da foma quadrática $b_\varepsilon^\theta(\psi)$. De fato, dom $B_\varepsilon^\theta =$ dom b_ε^θ e

$$\mathcal{V}_\varepsilon^{-1}\left(T_\varepsilon^\theta - \frac{\lambda_1^D}{\varepsilon^2}\mathbf{1}\right)\mathcal{V}_\varepsilon = B_\varepsilon^\theta.$$

Substituindo o fator $1/\beta_\varepsilon^2$ por 1 na primeira e terceira integral na expressão de $b_\varepsilon^\theta(\psi)$, obtemos a forma quadrática

$$\begin{aligned} d_\varepsilon^\theta(\psi) &:= \int_Q \left|-i\left[\partial_{sy}^R\psi + \beta_\varepsilon^{1/2}(\partial_{sy}^R\beta_\varepsilon^{-1/2})\psi\right] + \theta\psi\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &+ \int_Q \frac{1}{\varepsilon^2}\left(|\nabla_y\psi|^2 - \lambda_1^D|\psi|^2\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}y - \int_Q \frac{k^2(s)}{4}|\psi|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y + c\int_Q |\psi|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

dom d_ε^θ = dom b_ε^θ. Denotamos por D_ε^θ o operador autoadjunto associado ao fecho de $d_\varepsilon^\theta(\psi)$. Temos dom D_ε^θ = dom B_ε^θ e $0 \in \rho(B_\varepsilon^\theta) \cap \rho(D_\varepsilon^\theta)$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Afim de simplificar os cálculos adiante, temos o seguinte resultado

Teorema 3.3. *Existe um número $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{ \|(B_\varepsilon^\theta)^{-1} - (D_\varepsilon^\theta)^{-1}\| \right\} \leq K\,\varepsilon.$$

O ponto principal deste teorema é que $\beta_\varepsilon \to 1$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$. Sua demonstração é muito similar à do Teorema 3.1 em [15] e não será apresentada neste texto.

Consideremos o subespaço fechado $\mathcal{L} := \{w(s)u_1^D(y) : w \in L^2(0, L)\}$ do espaço de Hilbert $L^2(Q)$. Temos a decomposição ortogonal

$$L^2(Q) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp. \tag{3.11}$$

Para $\psi \in$ dom D_ε^θ, podemos escrever $\psi(s, y) = w(s)u_1^D(y) + \eta(s, y)$, em que $w \in H^2(0, L)$ e $\eta \in D_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp$. Além disso, $w(0) = w(L)$.

Lembremos que

$$C(S) = \int_S |\langle \nabla_y u_1^D, Ry\rangle|^2 \mathrm{d}y \geq 0.$$

Por simplicidade, denotamos $V(s) := C(S)(\tau + \alpha')^2(s) + c - k^2(s)/4$ e lembremos também o operador unidimensional

$$T^\theta w = (-i\partial_s + \theta)^2 w + V(s)w,$$

mencionado na Seção 3.1. Temos que dom $T^\theta = \{w \in H^2(0, L) : w(0) = w(L), w'(0) = w'(L)\}$. Com este domínio, T^θ é autoadjunto e, desde que $\|k^2/4\|_\infty < c$, $0 \in \rho(T^\theta)$.

Denotamos por $t^\theta(w)$ a forma quadrática associada à T^θ. Para $w \in \operatorname{dom} T^\theta$,

$$t^\theta(w) = \int_0^L \Big[|(-i\partial_s + \theta)w|^2 + V(s)|w|^2\Big]\mathrm{d}s.$$

Demonstração do Teorema 3.2: A demonstração é dividida em dois passos.

Passo I. Definimos a forma quadrática unidimensional

$$s_\varepsilon^\theta(w) := d_\varepsilon^\theta(wu_1^D) = \int_0^L \Big[|(-i\partial_s + \theta)w|^2 + \left(V(s) + g_\varepsilon(s)\right)|w|^2\Big]\mathrm{d}s,$$

$\operatorname{dom} s_\varepsilon^\theta = \operatorname{dom} T^\theta$, em que

$$g_\varepsilon(s) = \int_S \left\{\beta_\varepsilon(\partial_{sy}^R \beta_\varepsilon^{-1/2})^2 - \left[\beta_\varepsilon^{1/2}(\partial_{sy}^R \beta_\varepsilon^{-1/2})\right]'\right\}|u_1^D|^2\mathrm{d}y \in L^\infty(0, L).$$

De uma forma mais simples, s_ε^θ é a restrição de d_ε^θ ao subespaço $\operatorname{dom} T^\theta = \operatorname{dom} D_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}$.

Denotamos por S_ε^θ o operador autoadjunto associado ao fecho de $s_\varepsilon^\theta(w)$. Temos $\operatorname{dom} S_\varepsilon^\theta = \operatorname{dom} T^\theta$.

De acordo com a definição de β_ε em (3.1) na Seção 3.1, alguns cálculos mostram que existe $K > 0$ de forma que

$$|g_\varepsilon(s)| \leq K\,\varepsilon, \quad \forall s \in (0, L). \tag{3.12}$$

Este fato e a condição $\|k^2/4\|_\infty < c$ garantem que $0 \in \rho(S_\varepsilon^\theta)$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Denote por $\mathbf{0}$ o operador nulo no subespaço $\mathcal{L}^\perp$. Neste passo, vamos mostrar que existe $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{\|(D_\varepsilon^\theta)^{-1} - ((S_\varepsilon^\theta)^{-1} \oplus \mathbf{0})\|\right\} \leq K\,\varepsilon. \tag{3.13}$$

Devido à decomposição em (3.11), para $\psi \in \operatorname{dom} D_\varepsilon^\theta$,

$$\psi(s, y) = w(s)\,u_1^D(y) + \eta(s, y), \quad w \in \operatorname{dom} T^\theta, \quad \eta \in \operatorname{dom} D_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp.$$

Assim,

$$d_\varepsilon^\theta(\psi) = s_\varepsilon^\theta(w) + d_\varepsilon^\theta(wu_1^D, \eta) + d_\varepsilon^\theta(\eta, wu_1^D) + d_\varepsilon^\theta(\eta).$$

Vamos mostrar que existem $c_0 > 0$ e funções $0 \leq q(\varepsilon), 0 \leq p(\varepsilon)$ e $c(\varepsilon)$, de forma que $s_\varepsilon^\theta(w)$, $d_\varepsilon^\theta(\eta)$ e $d_\varepsilon^\theta(wu_1^D, \eta)$ satisfazem as seguintes condições:

$$s_\varepsilon^\theta(w) \geq c(\varepsilon)\|wu_1^D\|_{\mathrm{L}^2(Q)}^2, \quad \forall w \in \mathrm{dom}\ T^\theta, \quad c(\varepsilon) \geq c_0 > 0; \tag{3.14}$$

$$d_\varepsilon^\theta(\eta) \geq p(\varepsilon)\|\eta\|_{\mathrm{L}^2(Q)}^2, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\ D_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp; \tag{3.15}$$

$$|d_\varepsilon^\theta(wu_1^D, \eta)|^2 \leq q(\varepsilon)^2\, s_\varepsilon^\theta(w)\, d_\varepsilon^\theta(\eta), \quad \forall \psi \in \mathrm{dom}\ D_\varepsilon^\theta; \tag{3.16}$$

e

$$p(\varepsilon) \to \infty, \quad c(\varepsilon) = O(p(\varepsilon)), \quad q(\varepsilon) \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.17}$$

Assim, a Proposição 3.1 em [19] garante que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{ \|(D_\varepsilon^\theta)^{-1} - ((S_\varepsilon^\theta)^{-1} \oplus \mathbf{0})\| \right\} \leq p(\varepsilon)^{-1} + K\, q(\varepsilon)\, c(\varepsilon)^{-1},$$

para algum $K > 0$.

Chamamos a atenção que o ponto principal nesta prova é garantir que as funções $c(\varepsilon), p(\varepsilon)$ e $q(\varepsilon)$ não dependam de θ.

Já que $\|k^2/4\|_\infty < c$ e $g_\varepsilon(s) \to 0$ uniformemente, existe $c_1 > 0$ de forma que,

$$s_\varepsilon^\theta(w) \geq c_1 \int_0^L |w|^2 \mathrm{d}s = c_1 \|wu_1^D\|_{L^2(Q)}^2, \quad \forall w \in \mathrm{dom}\ T^\theta,$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Definimos, $c(\varepsilon) := c_1$.

Seja $\lambda_2^D > \lambda_1^D$, o segundo autovalor do operador Laplaciano de Dirichlet em S. O Principio do Minmax garante que

$$\int_S \left(|\nabla_y \eta|^2 - \lambda_1^D |\eta|^2\right) \mathrm{d}y \geq (\lambda_2^D - \lambda_1^D) \int_S |\eta|^2 \mathrm{d}y, \quad \text{q.t.p. } s, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\ D_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp.$$

Assim,

$$d_\varepsilon^\theta(\eta) \geq \frac{(\lambda_2^D - \lambda_1^D)}{\varepsilon^2} \int_Q |\eta|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\ D_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp.$$

Definimos, $p(\varepsilon) := (\lambda_2^D - \lambda_1^D)/\varepsilon^2$.

A prova da estimativa (3.16) é muito semelhante àquela do Apêndice B em [13]. Seguindo os mesmos passos, é possível mostrar que

$$|d_\varepsilon^\theta(wu_1^D, \eta)|^2 \leq K\,\varepsilon^2\, s_\varepsilon^\theta(w)\, d_\varepsilon^\theta(\eta), \quad \forall \psi \in \text{dom } D_\varepsilon^\theta,$$

para algum $K > 0$. Definimos, $q(\varepsilon) := \sqrt{K}\,\varepsilon$. Uma vez que as condições (3.14), (3.15), (3.16) e (3.17) são satisfeitas, vale (3.13) .

Passo II. Por (3.12), para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$|s_\varepsilon^\theta(w) - t^\theta(w)| \leq \|g_\varepsilon\|_\infty \int_0^L |w|^2 \mathrm{d}s \leq K\,\varepsilon \int_0^L |w|^2 \mathrm{d}s, \quad \forall w \in \text{dom } T^\theta, \forall \theta \in \mathcal{C}.$$

Pelo Teorema 3 em [2], para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{ \|(S_\varepsilon^\theta)^{-1} - (T^\theta)^{-1}\| \right\} \leq K\,\varepsilon.$$

Levando em conta o Teorema 3.3 e os passos I e II, concluímos a prova do Teorema 3.2. □

Observação 3.3. Sejam $(h_\varepsilon)_\varepsilon$, $(m_\varepsilon)_\varepsilon$ duas sequências de formas sesquilineares fechadas e positivas num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com dom h_ε = dom $m_\varepsilon = \mathcal{D}$, para todo $\varepsilon > 0$. Denote por H_ε e M_ε os operadores autoadjuntos associados à h_ε e m_ε, respetivamente. Suponha que exista $\zeta > 0$ de forma que $h_\varepsilon, m_\varepsilon > \zeta$, para todo $\varepsilon > 0$, e

$$|h_\varepsilon(\varphi) - m_\varepsilon(\varphi)| \leq j(\varepsilon)\, m_\varepsilon(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \tag{3.18}$$

em que $j(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. O Teorema 3 de [2] implica que existe um número $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\|H_\varepsilon^{-1} - M_\varepsilon^{-1}\| \leq K\, j(\varepsilon). \tag{3.19}$$

Suponha que dom H_ε = dom $M_\varepsilon =: \tilde{\mathcal{D}}$ e que a condição (3.18) seja satisfeita para todo $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}$. Aplicando a mesma demonstração de [2], ainda vale a estimativa (3.19).

A ideia da observação acima pode ser aplicada na Proposição 3.1 em [19]. Por isso, nesta seção, quando trabalhamos com formas quadráticas, restringimos o estudo às suas ações apenas no domínio do seus respectivos operadores autoadjuntos associados.

Demonstração do Corolário 3.1: Escrevemos $\lambda_n(\varepsilon,\theta) := E_n(\varepsilon,\theta) - (\lambda_0/\varepsilon^2)$. O Teorema 3.2 e o Corolário 2.3 de [21] implicam

$$\left| \frac{1}{\lambda_n(\varepsilon,\theta)} - \frac{1}{\kappa_n(\theta)} \right| \leq K\,\varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},\, \forall \theta \in \mathcal{C}, \tag{3.20}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então,

$$|\lambda_n(\varepsilon,\theta) - k_n(\theta)| \leq K\,\varepsilon\,|\lambda_n(\varepsilon,\theta)|\,|k_n(\theta)|, \quad \forall n \in \mathbb{N},\, \forall \theta \in \mathcal{C},$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Uma demonstração semelhante à do Lema 3.1 mostra que $\{T^\theta : \theta \in \mathcal{C}\}$ é uma família analítica do tipo A. Assim, as funções $k_n(\theta)$ são contínuas em $\mathcal{C}$ e consequentemente limitadas. Este fato e a estimativa (3.20) garantem que, para cada $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, existe $K_{\tilde{n}_0} > 0$, de forma que,

$$|\lambda_{\tilde{n}_0}(\varepsilon,\theta)| \leq K_{\tilde{n}_0}, \quad \forall \theta \in \mathcal{C},$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Finalmente, para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $K_{n_0} > 0$ de forma que

$$|\lambda_n(\varepsilon,\theta) - k_n(\theta)| \leq K_{n_0}\,\varepsilon, \quad n = 1, 2 \cdots, n_0, \forall \theta \in \mathcal{C},$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. $\square$

3.4 Existência de lacunas

Sabemos que o espectro de $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$ coincide com uma união de bandas; veja (3.5) na Seção 3.1. É natural a questão sobre a existência de lacunas em sua estrutura. Esse assunto foi estudado em [34]. No entanto, nesse trabalho foi considerada uma faixa encurvada periodicamente no plano $\mathbb{R}^2$. O autor garante a existência de pelo menos uma lacuna no espectro do operador do Laplaciano de Dirichlet e encontra sua localização. O objetivo desta seção é provar resultados similares para o operador $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D$.

Lembremos que $V(s) = C(S)(\tau + \alpha')^2(s) + c - \frac{k^2(s)}{4}$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *Suponha que $V(s)$ não seja uma função constante. Então, existem $n_1 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n_1+1} > 0$ e $C_{n_1} > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_1+1})$,*

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n_1+1}(\varepsilon, \theta) - \max_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n_1}(\varepsilon, \theta) = C_{n_1} + O(\varepsilon). \tag{3.21}$$

O Teorema 3.4 garante a existência de pelo menos uma lacuna no espectro $\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^D)$, desde que $\varepsilon > 0$ seja suficientemente pequeno. Sua demonstração é baseada em argumentos de [4, 34] e serão apresentados nesta seção.

Consideremos o operador unidimensional

$$Tw = -w'' + V(s)w, \quad \text{dom } T = H^2(\mathbb{R}).$$

Denotamos por $\kappa_n(\theta)$ o n-ésimo autovalor (contando a multiplicidade) do operador T^θ; relembremos a definição de T^θ por (3.6) na Seção 3.1. Cada $\kappa_n(\theta)$ é uma função contínua em $\mathcal{C}$. Pela Seção 1.5 do Capítulo 1, temos as seguintes propriedades:

(a) $\kappa_n(\theta) = \kappa_n(-\theta)$, para todo $\theta \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

(b) Para cada n ímpar (respetivamente par), $\kappa_n(\theta)$ é estritamente crescente (respectivamente, decrescente) quando θ esta entre 0 e π/L. Em particular,

$$\kappa_1(0) < \kappa_1(\pi/L) \leq \kappa_2(\pi/L) < \kappa_2(0) \leq \cdots \leq \kappa_{2n-1}(0) < \kappa_{2n-1}(\pi/L)$$

$$\leq \kappa_{2n}(\pi/L) < \kappa_{2n}(0) \leq \cdots .$$

Para $n = 1, 2, 3, \cdots$, definimos

$$B_n := \begin{cases} [\kappa_n(0), \kappa_n(\pi/L)], & \text{para } n \text{ ímpar}, \\ [\kappa_n(\pi/L), \kappa_n(0)], & \text{para } n \text{ par}, \end{cases}$$

e

$$G_n := \begin{cases} (\kappa_n(\pi/L), \kappa_{n+1}(\pi/L)), & \text{para}\, n \text{ ímpar tais que } \kappa_n(\pi/L) \neq \kappa_{n+1}(\pi/L), \\ (\kappa_n(0), \kappa_{n+1}(0)), & \text{para } n \text{ par tais que } \kappa_n(0) \neq \kappa_{n+1}(0), \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.11 do Capítulo 1, temos $\sigma(T) = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ em que B_n é chamado de j-ésima banda de $\sigma(T)$. Dizemos que G_n é uma lacuna de $\sigma(T)$ se $G_n \neq \emptyset$.

Pelo Corolário 3.1, para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon_{n_0} > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_0})$,

$$\max_{\theta \in \mathcal{C}} E_n(\varepsilon, \theta) = \begin{cases} \lambda_0/\varepsilon^2 + \kappa_n(\pi/L) + O(\varepsilon), & \text{para } n \text{ ímpar}, \\ \lambda_0/\varepsilon^2 + \kappa_n(0) + O(\varepsilon), & \text{para } n \text{ par}, \end{cases}$$

e

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_n(\varepsilon, \theta) = \begin{cases} \lambda_0/\varepsilon^2 + \kappa_n(0) + O(\varepsilon), & \text{para } n \text{ ímpar}, \\ \lambda_0/\varepsilon^2 + \kappa_n(\pi/L) + O(\varepsilon), & \text{para } n \text{ par}, \end{cases}$$

vale para cada $n = 1, 2, \cdots, n_0$. Assim, temos

Corolário 3.2. *Para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_{n_0+1} > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_0+1})$,*

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n+1}(\varepsilon, \theta) - \max_{\theta \in \mathcal{C}} E_n(\varepsilon, \theta) = |G_n| + O(\varepsilon),$$

vale para cada $n = 1, 2, \cdots, n_0$, em que $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue.

Demonstração do Teorema 3.4: Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, definimos a transformação unitária $(u_\theta w)(s) = e^{-i\theta s} w(s)$. Em particular, consideremos os operadores $\tilde{T}^0 := u_0 T^0 u_0^{-1}$ e $\tilde{T}^{\pi/L} := u_{\pi/L} T^{\pi/L} u_{\pi/L}^{-1}$ cujos autovalores são dados por $\{\kappa_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\kappa_n(\pi/L)\}_{n \in \mathbb{N}}$, respectivamente. Além disso, o domínio desses operadores são dados por (A.1) (veja Apêndice A); $\tilde{T}^0$ e $\tilde{T}^{\pi/L}$ são chamados de operadores com condição periódica e antiperiódica na fronteira, respectivamente.

Já que $V(s)$ não é constante em $[0, L]$, pelo Teorema de Borg (veja Seção A.1 do Apêndice A), sem perda de generalidade, podemos afirmar que exite $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que $\kappa_{n_1}(0) \neq \kappa_{n_1+1}(0)$. Agora, pelo Corolário 3.2 segue a conclusão do Teorema 3.4.

$\square$

3.5 Localização de lacunas

Com o resultado que apresentaremos nesta seção será possível determinar n_1 para o qual (3.21) vale. No entanto, alguns ajustes serão necessários.

Para $\gamma > 0$, usamos a escala

$$k(s) \mapsto \gamma\, k(s), \quad (\tau + \alpha')(s) \mapsto \gamma\, (\tau + \alpha')(s) \quad \text{e} \quad c \mapsto \gamma^2\, c. \tag{3.22}$$

Assim, obtemos uma nova região $\Omega_{\gamma,\varepsilon}$ e passamos a considerar $-\Delta^D_{\Omega_{\gamma,\varepsilon}}$ em vez de $-\Delta^D_{\Omega_\varepsilon}$. Denote por $T_{\gamma,\varepsilon}$ e $T^\theta_{\gamma,\varepsilon}$ os operadores obtidos substituindo (3.22) em (3.3) e (3.4), respectivamente. Denote por $E_n(\gamma, \varepsilon, \theta)$ o n-ésimo autovalor de $T^\theta_{\gamma,\varepsilon}$, contando com a sua multiplicidade.

Escrevemos a função $V(s)$ como uma série de Fourier, ou seja,

$$V(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{L}} \nu_n e^{2\pi n i s/L} \quad \text{em } L^2(0, L),$$

em que a sequência $\{\nu_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ é chamada de sequência de coeficientes de Fourier de $V(s)$. Já que $V(s)$ é uma função real, $\nu_n = \overline{\nu}_{-n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 3.5. *Suponha que $V(s)$ não é uma função constante e seja $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que $\nu_{n_2} \neq 0$. Então, existem $\gamma > 0$ suficientemente pequeno, $\varepsilon_{n_2+1} > 0$ e*

$C_{\gamma,n_2} > 0$ *de modo que, para todo* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_2+1})$,

$$\min_{\theta\in\mathcal{C}} E_{n_2+1}(\gamma,\varepsilon,\theta) - \max_{\theta\in\mathcal{C}} E_{n_2}(\gamma,\varepsilon,\theta) = C_{\gamma,n_2} + O(\varepsilon).$$

A demonstração do Teorema 3.5 é baseada na demonstração do Teorema 1.3 em [34]. Por este motivo, apenas apresentamos os passos mais importantes. Mais detalhes desta demonstração podem ser encontrados na Seção A.2 do Apêndice A.

Lembremos a definição de T^θ na Seção 3.1. Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, definimos

$$T^\theta_\gamma w := -w'' + \gamma^2\, V(s)w, \quad \operatorname{dom} T^\theta_\gamma = \operatorname{dom} T^\theta.$$

Denotamos $\kappa_n(\gamma,\theta)$ o n-ésimo autovalor de T^θ_γ contando com a sua multiplicidade. Como na Seção 3.4, consideremos as bandas

$$G_n(\gamma) := \begin{cases} (\kappa_n(\gamma,\pi/L), \kappa_{n+1}(\gamma,\pi/L))\,, & \begin{cases}\text{para } n \text{ ímpar de forma que} \\ \quad \kappa_n(\gamma,\pi/L) \neq \kappa_{n+1}(\gamma,\pi/L),\end{cases} \\ (\kappa_n(\gamma,0), \kappa_{n+1}(\gamma,0))\,, & \begin{cases}\text{para } n \text{ par de forma que} \\ \quad \kappa_n(\gamma,0) \neq \kappa_{n+1}(\gamma,0),\end{cases} \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos o seguinte resultado:

Corolário 3.3. *Para cada* $n_3 \in \mathbb{N}$, *existem* $\gamma > 0$ *suficientemente pequeno e* $\varepsilon_{n_3+1} > 0$ *de forma que, para todo* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_3+1})$,

$$\min_{\theta\in\mathcal{C}} E_{n+1}(\gamma,\varepsilon,\theta) - \max_{\theta\in\mathcal{C}} E_{n}(\gamma,\varepsilon,\theta) = |G_n(\gamma)| + O(\varepsilon), \tag{3.23}$$

vale para cada $n = 1, 2, \cdots, n_3$, *em que* $|\cdot|$ *denota a medida de Lebesgue.*

Demonstração do Teorema 3.5: De acordo com a notação da Seção A.2 do Apêndice A, temos $|G_n(\gamma)| = \delta_n(\gamma^2)$, para todo $\in \mathbb{N}$, se considerarmos $\mu = \gamma^2$ e $W(s) = V(s)$. Lembremos que $\{\nu_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ denotam os coeficientes de Fourier de $V(s)$. Já que $V(s)$ não é constante, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ de forma que $\nu_{n_2} \neq 0$. Pelo

Teorema A.3 da Seção A.2,

$$|G_{n_2}(\gamma)| = \frac{2}{\sqrt{L}}\gamma^2|\nu_{n_2}| + O(\gamma^4), \quad \gamma \to 0.$$

Por outro lado, pelo Corolário 3.3, existe $\varepsilon_{n_2+1} > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_2+1})$, vale (3.23). Então, tomando $C_{\gamma,n_2} := |G_{n_2}(\gamma)| > 0$, concluímos o teorema.

$\square$

Capítulo 4

Laplaciano de Neumann em tubos periódicos

Consideremos o Laplaciano de Neumann $-\Delta^N_{\Omega^{\alpha,h}_\varepsilon}$ restrito a um tubo periódico $\Omega^{\alpha,h}_\varepsilon$ em $\mathbb{R}^3$; relembre a definição de $\Omega^{\alpha,h}_\varepsilon$ na Seção 2.1 do Capítulo 2. Este capítulo tem dois objetivos. O primeiro é obter informações sobre o espectro absolutamente contínuo $\sigma_{ac}(-\Delta^N_{\Omega^{\alpha,h}_\varepsilon})$ de $-\Delta^N_{\Omega^{\alpha,h}_\varepsilon}$. O segundo é demonstrar a existência de gaps no espectro $\sigma(-\Delta^N_{\Omega^{\alpha,h}_\varepsilon})$. Este resultado foi provado de uma forma mais abstrata em [28], no entanto, apresentamos neste texto uma demonstração alternativa. Comparando com [28], nossa estratégia mostra explicitamente como a geometria do tubo pode interferir no resultado. Todos os resultados são obtidos sob a condição de que ε é suficientemente pequeno.

Por simplicidade de notação, escrevemos $\Omega_\varepsilon := \Omega^{\alpha,h}_\varepsilon$. Diferente do Capítulo 3, destacamos que aqui $h(s)$ não é necessariamente uma função constante.

Dividimos o capítulo da seguinte forma. A Seção 4.1 é dedicada ao estudo do espectro absolutamente contínuo de $-\Delta^N_{\Omega_\varepsilon}$. Apresentamos nessa seção os principais resultados relacionados. As demonstrações aparecem nas Seções 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5. Na Seção 4.6, assumindo determinadas condições, garantimos a existência de lacunas no especto $\sigma(-\Delta^N_\Omega)$.

4.1 Espectro absolutamente contínuo de $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N$

Seja $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N$ o Laplaciano de Neumann em Ω_ε, ou seja, o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$q_\varepsilon^N(\psi) := \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x, \quad \psi \in H^1(\Omega_\varepsilon). \tag{4.1}$$

Nesta seção vamos estudar o espectro absolutamente contínuo do operador $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N$, para ε suficientemente pequeno. Um dos nossos principais resultados é o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Para cada $E > 0$, existe $\varepsilon_E > 0$ de forma que o espectro de $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N$ é puramente absolutamente contínuo no intervalo $[0, E]$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$.*

Observamos que em [18] os autores mostraram que o espectro $\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N)$ é puramente absolutamente contínuo, mas assumindo uma condição de invariância sob a reflexão $s \mapsto -s$ na construção do tubo Ω_ε

Nesta seção apresentamos as principais ferramentas que serão usadas para demonstrar o Teorema 4.1; os detalhes e as demonstrações serão apresentados nas próximas seções.

Fixemos um número $c > 0$. Por razões técnicas, vamos estudar o operador $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N + c\,\mathbf{1}$; veja Seção 4.5.

A mudança de variáveis apresentada na Seção 2.2 do Capítulo 2 mostra que $-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N + c\,\mathbf{1}$ é unitariamente equivalente ao operador

$$T_\varepsilon\psi := -\frac{1}{h^2\beta_\varepsilon}\left[\left(\partial_s + \mathrm{div}_y R^h\right)\frac{h^2}{\beta_\varepsilon}\partial_{s,y}^{Rh}\psi + \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{div}_y\left(\beta_\varepsilon \nabla_y \psi\right)\right] + c\,\psi,$$

$$\mathrm{dom}\, T_\varepsilon := \left\{\psi \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}\times S) : \frac{\partial^{Rh}\psi}{\partial N} = 0 \quad \text{em} \quad \partial(\mathbb{R}\times S)\right\},$$

atuando no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}\times S, h^2\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y)$. Lembremos que, $y =$

$(y_1, y_2) \in S$, $\mathrm{div_y}$ denota o divergente de um campo vetorial em S,

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon(s,y) &= 1 - \varepsilon h(s)k(s)(y_1 \cos\alpha(s) - y_2 \sin\alpha(s)), \\ (\partial^{Rh}_{s,y}\psi)(s,y) &= \partial_s\psi(s,y) + \langle \nabla_y \psi(s,y), R^h(s,y)\rangle, \qquad (4.2) \\ R^h(s,y) &= (Ry)\,(\tau+\alpha')(s) - y\frac{h'(s)}{h(s)}, \qquad (4.3) \end{aligned}$$

em que $\partial_s\psi = \partial\psi/\partial s$, $\nabla_y\psi = (\partial\psi/\partial y_1, \partial\psi/\partial y_2)$ e R é a matriz de rotação $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{Rh}\psi}{\partial N}(s,y) &:= \frac{h^2(s)}{\beta_\varepsilon(s,y)}\langle R^h(s,y), N(y)\rangle \partial^{Rh}_{s,y}\psi(s,y) \\ &+ \frac{\beta_\varepsilon(s,y)}{\varepsilon^2}\langle \nabla_y\psi(s,y), N(y)\rangle; \qquad (4.4) \end{aligned}$$

N denota um vetor normal (unitário) em ∂S.

Desde que todos os coeficientes de T_ε são periódicos com respeito à variável s, usamos a decomposição de Floquet-Bloch sobre a zona de Brillouin $\mathcal{C} := [-\pi/L, \pi/L]$. Mais precisamente, T_ε é unitariamente equivalente ao operador $\int_{\mathcal{C}}^{\oplus} T_\varepsilon^\theta \, d\theta$, em que

$$\begin{aligned} T_\varepsilon^\theta\psi &:= -\frac{1}{h^2\beta_\varepsilon}\left(\partial_s + \mathrm{div}_y R^h + i\theta\right)\frac{h^2}{\beta_\varepsilon}\left(\partial^{Rh}_{s,y} + i\theta\right)\psi \\ &- \frac{1}{h^2\beta_\varepsilon\varepsilon^2}\mathrm{div}_y(\beta_\varepsilon\nabla_y\psi) + c\,\psi, \qquad (4.5) \end{aligned}$$

com domínio

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\; T_\varepsilon^\theta = \Big\{ & \psi \in \mathcal{H}^2((0,L)\times S) : \\ & \psi(0,\cdot) = \psi(L,\cdot) \quad \text{e} \quad \partial^{Rh}_{s,y}\psi(0,\cdot) = \partial^{Rh}_{s,y}\psi(L,\cdot) \quad \text{em} \quad L^2(S), \\ & \frac{\partial^{Rh}\psi}{\partial N} = -i\theta\frac{h^2}{\beta_\varepsilon}\langle R^h, N\rangle\psi \quad \text{em} \quad L^2((0,L)\times\partial S)\Big\}. \end{aligned}$$

Embora atuando no espaço de Hilbert $L^2((0,L)\times S, h^2\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y)$, $\partial^{Rh}_{s,y}\psi$ e $\partial^{Rh}\psi/\partial N$ tem ações dadas por (4.2), (4.3) e (4.4), respectivamente. Além disso, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, T_ε^θ é autoadjunto; veja Lema 4.1 na Seção 4.2 para detalhes desta decomposição.

Cada T_ε^θ tem resolvente compacto e é limitado inferiormente. Assim, $\sigma(T_\varepsilon^\theta)$ é discreto. Denotamos por $E_n(\varepsilon,\theta)$ o n-ésimo autovalor de T_ε^θ , contando com a sua multiplicidade, e $\psi_n(\varepsilon,\theta)$ a correspondente autofunção, ou seja,

$$T_\varepsilon^\theta \psi_n(\varepsilon,\theta) = E_n(\varepsilon,\theta)\psi_n(\varepsilon,\theta), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \quad \theta \in \mathcal{C}. \tag{4.6}$$

Nestas condições, temos

$$\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N + c\mathbf{1}) = \cup_{n=1}^\infty \{E_n(\varepsilon,\mathcal{C})\}, \tag{4.7}$$

em que $E_n(\varepsilon,\mathcal{C}) := \cup_{\theta\in\mathcal{C}} \{E_n(\varepsilon,\theta)\}$.

Assim, para estudar o espectro $\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N + c\mathbf{1})$, vamos analisar cada $E_n(\varepsilon,\mathcal{C})$ o qual é chamado n-ésima banda de $\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N + c\mathbf{1})$. Além disso, organizamos os autovalores de forma que

$$E_1(\varepsilon,\theta) \le E_2(\varepsilon,\theta) \le \cdots \le E_n(\varepsilon,\theta) \le \cdots, \quad \theta \in \mathcal{C}. \tag{4.8}$$

Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, considere o operador unitário $\mathcal{W}_\theta$ dado por (4.12) na Seção 4.3. Definimos $\tilde{T}_\varepsilon^\theta := \mathcal{W}_\theta T_\varepsilon^\theta \mathcal{W}_\theta^{-1}$, dom $\tilde{T}_\varepsilon^\theta = \mathcal{W}_\theta(\text{dom } T_\varepsilon^\theta)$. Devido à definição de $\mathcal{W}_\theta$, cada domínio dom $\tilde{T}_\varepsilon^\theta$ é independente de θ. Assim, naquela mesma seção, demonstramos que $\{\tilde{T}_\varepsilon^\theta, \theta \in \mathcal{C}\}$ é uma família analítica do tipo A. Este fato garante que as funções $E_n(\varepsilon,\theta)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$, são funções contínuas em $\mathcal{C}$ e analíticas por partes em $\mathcal{C}$. Consequentemente, cada $E_n(\varepsilon,\mathcal{C})$ ou é um intervalo fechado ou um conjunto com apenas um ponto.

Outro fato importante para a demonstração do Teorema 4.1 é conhecer um comportamento assintótico dos autovalores $E_n(\varepsilon,\theta)$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, considere o operador autoadjunto unidimensional

$$T^\theta w := (-i\partial_s + \theta)^2 w + \frac{h''(s)}{h(s)} w + c\, w, \tag{4.9}$$

agindo em $L^2(0,L)$, em que dom $T^\theta = \{w \in H^2(0,L) : w(0) = w(L), w'(0) =$

$w'(L)\}$. Por simplicidade de notação, escrevemos $Q := (0, L) \times S$. Definimos o subespaço fechado $\mathcal{L} := \{w(s)\,1 : w \in L^2(0, L)\} \subset L^2(Q)$. Observe que este subespaço está diretamente relacionado ao fato de que o primeiro autovalor do operador Laplaciano de Neumann numa região limitada é zero e a função constante é a autofunção correspondente.

Considere os operadores unitários $\mathcal{X}_\varepsilon$ e Π_ε definidos por (4.14) e (4.25) na Seção 4.5, respectivamente. Nossa principal ferramenta para encontrar um comportamento assintótico para $E_n(\varepsilon, \theta)$ é dado por pelo seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Existe um número $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{ \left\| \mathcal{X}_\varepsilon^{-1} \left(T_\varepsilon^\theta \right)^{-1} \mathcal{X}_\varepsilon - \left(\Pi_\varepsilon^{-1} (T^\theta)^{-1} \Pi_\varepsilon \oplus \mathbf{0} \right) \right\| \right\} \leq K\, \varepsilon,$$

em que $\mathbf{0}$ denota o operador nulo no subespaço $\mathcal{L}^\perp$.

Observe que o operador efetivo T^θ depende apenas de um potencial induzido pela deformação $h(s)$. Os efeitos encurvado e torcido do tubo não influenciam T^θ. Esta situação muda se considerarmos a condição de Dirichlet na fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$; veja Capítulo 3 para uma comparação dos resultados.

O espectro de T^θ é puramente discreto (veja Seção 1.5 do Capitulo 1), denotamos por $\nu_n(\theta)$ seu n-ésimo autovalor, contando com a sua multiplicidade. Como consequência do Teorema 4.2, temos:

Corolário 4.1. *Para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_{n_0} > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_0})$,*

$$E_n(\varepsilon, \theta) = \nu_n(\theta) + O(\varepsilon), \tag{4.10}$$

para $n = 1, 2, \cdots, n_0$, uniformemente em $\mathcal{C}$.

Finalizamos esta seção apresentando a demonstração do Teorema 4.1.

Demonstração do Teorema 4.1: Dado $E > 0$, suponhamos que, para todo $\theta \in \mathcal{C}$, o espectro de T_ε^θ abaixo de E consista exatamente de n_0 autovalores $\{E_n(\varepsilon, \theta)\}_{n=1}^{n_0}$. Como já comentado, as considerações da Seção 4.3 garantem que $E_n(\varepsilon, \theta)$, $n = 1, 2, \cdots, n_0$, são funções contínuas e analíticas por partes.

Ainda mais, podemos assumir que existe uma partição finita de $\mathcal{C}$, a qual denotamos por $\mathcal{P}$, de forma que cada $E_n(\theta, \varepsilon), n = 1, 2, \cdots, n_0$, é analítica em cada subintervalo dessa partição.

O próximo passo é mostrar que cada $E_n(\varepsilon, \theta), n = 1, 2, \cdots, n_0$ é não-constante em cada subintervalo da partição $\mathcal{P}$. Considere as funções $\nu_n(\theta)$, $\theta \in \mathcal{C}$. Pelo Teorema 1.11 da Seção 1.4, elas são estritamente monótonas em $(-\pi/L, 0)$ e em $(0, \pi/L)$. Pelo Corolário 4.1, existe $\varepsilon_E > 0$ de forma que $E_n(\varepsilon, \theta)$ satisfaz (4.10) para $n = 1, 2, \cdots, n_0$ e uniformemente em $\theta \in \mathcal{C}$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$. Observe que $\varepsilon_E > 0$ depende de n_0, ou seja, a espessura do tubo depende do comprimento dos autovalores a serem cobertos. Tomando $\varepsilon_E > 0$ suficientemente pequeno, podemos garantir que $E_n(\varepsilon, \theta)$ é não-constante em cada subintervalo da partição $\mathcal{P}$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$ e $n = 1, 2, \cdots, n_0$. Pela Seção 1.4, segue a conclusão do teorema. $\square$

4.2 Decomposição de Floquet-Bloch

Já que os coeficientes de T_ε são periódicos com respeito à variável s, usamos a decomposição de Floquet-Bloch sobre a zona de Brillouin $\mathcal{C} = [-\pi/L, \pi/L]$. Para simplificar as notações, escrevemos $\Omega := \mathbb{R} \times S$,

$$\mathcal{H}_\varepsilon := L^2(\Omega, h^2\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}'_\varepsilon := L^2(Q, h^2\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y).$$

Lembre-se que $Q = (0, L) \times S$ e, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, o operador T_ε^θ é dado por (4.5) na Seção 4.1.

Lema 4.1. *Existe um operador unitário $\mathcal{U}_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} \mathcal{H}'_\varepsilon \,\mathrm{d}\theta$ de forma que,*

$$\mathcal{U}_\varepsilon T_\varepsilon \mathcal{U}_\varepsilon^{-1} = \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} T_\varepsilon^\theta \,\mathrm{d}\theta. \tag{4.11}$$

Além disso, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, T_ε^θ é autoadjunto.

Demonstração. Para $(\theta, s, y) \in \mathcal{C} \times (0, L) \times S$ e $f \in \mathcal{H}_\varepsilon$ considere o operador unitário

$$\mathcal{U}_\varepsilon f(\theta, s, y) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-inL\theta - i\theta s} f(s + Ln, y).$$

Cálculos semelhantes aos da demonstração do Lema 3.2, os quais serão omitidos neste texto, conduzem à formula (4.11). Para a justificativa de que cada T_ε^θ é autoadjunto, veja Apêndice B. □

Observação 4.1. Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, a forma quadrática $t_\varepsilon^\theta(\psi)$ associada ao operador T_ε^θ é dada por

$$t_\varepsilon^\theta(\psi) = \int_Q \left(\frac{h^2}{\beta_\varepsilon} |\partial_{s,y}^{Rh}\psi + i\,\theta\psi|^2 + \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2}|\nabla_y \psi|^2 + c\,h^2 \beta_\varepsilon |\psi|^2 \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y,$$

$$\operatorname{dom} t_\varepsilon^\theta = \{\psi \in H^1(Q) : \psi(0,\cdot) = \psi(L,\cdot) \text{ em } L^2(S)\}.$$

Novamente, veja Apêndice B deste trabalho para uma discussão sobre este assunto.

4.3 Propriedades de analiticidade

O objetivo desta seção é garantir que, para cada $n = 1, 2, \cdots$, as funções $E_n(\varepsilon, \theta)$ e $\psi_n(\varepsilon, \theta)$, definidas por (4.6) na Seção 4.1, são funções analíticas por partes em $\mathcal{C}$.

O primeiro passo é fazer uma mudança de variáveis de forma que o domínio $\operatorname{dom} T_\varepsilon^\theta$ seja independente do parâmetro θ.

Lembre-se das definições de $\partial^{Rh}/\partial N$ e R^h dadas por (4.4) e (4.3), respectivamente. Baseados em [18], consideremos $\mu : Q \to \mathbb{R}$ uma função real, suave no conjunto fechado $\overline{Q}$ e satisfazendo:

(1) μ é L-periódica com respeito à variável s, ou seja, $\mu(0, y) = \mu(L, y)$, para todo $y \in S$;

(2) $\dfrac{\partial^{Rh}\mu}{\partial N} = \dfrac{h^2}{\beta_\varepsilon}\langle R^h, N\rangle$ em ∂Q.

Agora, considere o operador unitário

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{W}_\theta : & \mathcal{H}'_\varepsilon & \to & \mathcal{H}'_\varepsilon \\ & \eta & \mapsto & e^{i\theta\mu}\,\eta \end{array}, \tag{4.12}$$

e o operador autoadjunto

$$\tilde{T}^\theta_\varepsilon = \mathcal{W}_\theta T^\theta_\varepsilon \mathcal{W}_\theta^{-1}, \quad \text{dom}\ \tilde{T}^\theta_\varepsilon = \mathcal{W}_\theta(\text{dom}\ T^\theta_\varepsilon).$$

Lembre-se que a ação de $\partial^{Rh}_{s,y}\psi$ é dado por (4.2). Uma substituição direta mostra que

$$\begin{aligned} \tilde{T}^\theta_\varepsilon \psi : \ = \ & -\frac{1}{h^2\beta_\varepsilon}\left(\partial_s + \text{div}_y R^h + i\theta(\mathbf{1} - \partial^{Rh}_{s,y}\,\mu)\right)\frac{h^2}{\beta_\varepsilon}\left(\partial^{Rh}_{s,y} + i\theta(\mathbf{1} - \partial^{Rh}_{s,y}\,\mu)\right)\psi \\ & -\frac{1}{\varepsilon^2 h^2 \beta_\varepsilon}\sum_{j=1}^{2}(\partial_{y_j} - i\theta\partial_{y_j}\mu)\beta_\varepsilon(\partial_{y_j} - i\theta\partial_{y_j}\mu)\psi + c\,\psi, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{dom}\ \tilde{T}^\theta_\varepsilon \ = \ & \Big\{\psi \in \mathcal{H}^2(Q) : \\ & \psi(0,\cdot) = \psi(L,\cdot) \quad \text{e} \quad \partial^{Rh}_{s,y}\,\psi(0,\cdot) = \partial^{Rh}_{s,y}\,\psi(L,\cdot) \quad \text{em} \quad L^2(S), \\ & \frac{\partial^{Rh}\psi}{\partial N} = 0 \quad \text{em} \quad L^2((0,L)\times\partial S)\Big\}. \end{aligned}$$

Já que dom $\tilde{T}^\theta_\varepsilon$ não depende de θ, temos

Lema 4.2. *$\{\tilde{T}^\theta_\varepsilon : \theta \in \mathcal{C}\}$ é uma família analítica do tipo A.*

A demonstração do Lema 4.2 segue os mesmos passos da demonstração do Lema 3.1 na Seção 3.2 do Capítulo 3. Por essa razão, não a repetiremos aqui.

Já que os operadores T^θ_ε e $\tilde{T}^\theta_\varepsilon$ são unitariamente equivalentes, eles possuem o mesmo espectro. Assim, os autovalores de $\tilde{T}^\theta_\varepsilon$ são dados por $E_n(\varepsilon,\theta)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Para cada $n = 1, 2, 3, \cdots$, a autofunção correspondente é dada por

$$\tilde{\psi}_n(\varepsilon,\theta) := e^{i\theta\mu}\psi_n(\varepsilon,\theta).$$

O Lema 4.2 garante que as funções $E_n(\varepsilon,\theta)$, $\tilde{\psi}(\varepsilon,\theta)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ são contínuas e analíticas por partes em $\mathcal{C}$. Consequentemente, $\psi_n(\varepsilon,\theta)$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ são continuas e analíticas por partes em $\mathcal{C}$.

4.4 O problema restrito à seção transversal

Nesta seção, investigamos um problema de Neumann na seção transversal S. Este estudo é necessário para auxiliar a demonstração do Teorema 4.2.

Para cada $s \in (0, L)$ e $\varepsilon > 0$, considere o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\varepsilon^s := L^2(S, \beta_\varepsilon \mathrm{d}y)$ o qual é equipado com o produto interno $(u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon^s} := \int_S \overline{u} v \beta_\varepsilon \mathrm{d}y$. Definimos a forma quadrática

$$q_\varepsilon^s(u) := \int_S |\nabla_y u|^2 \beta_\varepsilon \mathrm{d}y, \quad \mathrm{dom}\ q_\varepsilon^s = H^1(S),$$

e denotamos por Q_ε^s seu operador autoadjunto associado. As características geométricas de S garantem que Q_ε^s tem resolvente compacto. Denotamos por $\lambda_\varepsilon^n(s)$ o n-ésimo autovalor de Q_ε^s contando com a sua multiplicidade e $u_\varepsilon^n(s)$ a correspondente autofunção normalizada, ou seja,

$$0 = \lambda_\varepsilon^1(s) \leq \lambda_\varepsilon^2(s) \leq \lambda_\varepsilon^3(s) \leq \cdots ,$$

e

$$Q_\varepsilon^s u_\varepsilon^n(s) = \lambda_\varepsilon^n(s) u_\varepsilon^n(s), \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Observe que, para cada $s \in (0, L)$ e $\varepsilon > 0$, $\lambda_\varepsilon^1(s) = 0$ e sua autofunção correspondente $u_\varepsilon^1(s)$ é uma função constante.

Introduzimos o operador unitário

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{V}_\varepsilon^s : & L^2(S) & \to & \mathcal{H}_\varepsilon^s \\ & u & \mapsto & \beta_\varepsilon^{-1/2} u \end{array},$$

e definimos

$$\tilde{q}_\varepsilon^s(u) := q_\varepsilon^s(V_\varepsilon^s u), \quad \mathrm{dom}\ \tilde{q}_\varepsilon^s := H^1(S).$$

Alguns cálculos mostram que

$$\tilde{q}_\varepsilon^s(u) := \int_S \left|\nabla_y u - \nabla_y \beta_\varepsilon (2\beta_\varepsilon)^{-1} u\right|^2 \mathrm{d}y, \quad \mathrm{dom}\ \tilde{q}_\varepsilon^s := H^1(S).$$

Seja $-\Delta_S^N$ o operador Laplaciano de Neumann em S, ou seja, o operador autoadjunto associado à forma quadrática

$$q^N(u) = \int_S |\nabla_y u|^2 dy, \quad \mathrm{dom}\ q = H^1(S).$$

Lembremos que λ_n^N denota o n-ésimo autovalor de $-\Delta_S^N$ contando com a sua multiplicidade e u_n^N a correspondente autofunção normalizada, ou seja,

$$0 = \lambda_1^N < \lambda_2^N \leq \lambda_3^N \leq \cdots,$$

e

$$-\Delta_S^N u_N^N = \lambda_n^N u_n^N, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Teorema 4.3. *Fixemos um número $c_1 > 0$. Existe $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

$$\sup_{s\in[0,L)} \left\{\|(\mathcal{V}_\varepsilon^s)^{-1}(Q_\varepsilon^s + c_1\mathbf{1})^{-1}\mathcal{V}_\varepsilon^s - (-\Delta_S^N + c_1\mathbf{1})^{-1}\|\right\} \leq K\,\varepsilon.$$

Demonstração. Adicionamos a constante $c_1 > 0$ apenas por detalhes técnicos. Alguns cálculos mostram que existe um número $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\left|(q_\varepsilon^s(u) + c_1\|u\|_{L^2(S)}) - (q(u) + c_1\|u\|_{L^2(S)})\right| \leq \varepsilon K\,(q(u) + c_1\|u\|_{L^2(S)}),$$

para todo $u \in H^1(S)$, para todo $s \in (0, L)$. Agora, o resultado segue pelo Teorema 3 em [2]. $\square$

Como consequência do Teorema 4.3, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\left|\frac{1}{\lambda_\varepsilon^2(s) + c_1} - \frac{1}{\lambda_2^N + c_1}\right| \leq \varepsilon\,K, \quad \forall s \in (0, L).$$

Então,

$$0 < \gamma(\varepsilon) \leq \lambda_\varepsilon^2(s), \quad \forall s \in (0, L),$$

em que $\gamma(\varepsilon) := (\lambda_2^N - \varepsilon c_1 K(\lambda^2 + c_1))/(1 + \varepsilon K(\lambda_2^N + c_1)) \to \lambda_2^N > 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Assim, existe $\tilde{\gamma} > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$0 < \tilde{\gamma} \leq \gamma(\varepsilon) \leq \lambda_\varepsilon^2(s), \quad \forall s \in (0, L). \tag{4.13}$$

4.5 Comportamento assintótico dos autovalores

Lembremos que $\mathcal{H}'_\varepsilon = L^2(Q, h^2\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y)$. Consideremos agora o espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon := L^2(Q, \beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y)$ equipado com o produto interno $\langle \psi, \varphi \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon} = \int_Q \overline{\psi}\varphi\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y$. Vamos fazer uma mudança de variáveis e passar a trabalhar em $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$. Esta mudança é dada pelo operador unitário

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{X}_\varepsilon : & \tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon & \to & \mathcal{H}'_\varepsilon \\ & \psi & \mapsto & h^{-1}\psi \end{array}. \tag{4.14}$$

Sendo assim, vamos estudar a forma quadrática

$$s_\varepsilon^\theta(\psi) := t_\varepsilon^\theta(\mathcal{X}_\varepsilon(\psi)), \quad \mathrm{dom}\ s_\varepsilon^\theta := \mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(\mathrm{dom}\ t_\varepsilon^\theta).$$

Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned} s_\varepsilon^\theta(\psi) &= \int_Q \frac{h^2}{\beta_\varepsilon} \left|\partial_{s,y}^{Rh}(h^{-1}\psi) + i\theta h^{-1}\psi\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &+ \int_Q \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \left|\nabla_y(h^{-1}\psi)\right|^2 \mathrm{d}s\ dy + c\int_Q \left|h^{-1}\psi\right|^2 h^2\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &= \int_Q \frac{1}{\beta_\varepsilon} \left|\partial_{s,y}^{Rh}\psi + h_\theta(s)\psi\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &+ \int_Q \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2\, h^2} \left|\nabla_y\psi\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y + c\int_Q |\psi|^2 \beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

em que $h_\theta(s) := i\theta - (h'(s)/h(s))$.

Já que h é uma função limitada e periódica com período L,

$$\text{dom } s_\varepsilon^\theta = \{\psi \in H^1(Q) : \psi(0,\cdot) = \psi(L,\cdot) \text{ em } L^2(S)\}.$$

Observe que aqui $H^1(Q)$ é um subespaço do espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$.

Denotamos por S_ε^θ o operador autoadjunto associado à forma quadrática $s_\varepsilon^\theta(\psi)$. De fato, $\text{dom}\, S_\varepsilon^\theta \subset \text{dom}\, s_\varepsilon^\theta$ e

$$\mathcal{X}_\varepsilon^{-1}(T_\varepsilon^\theta)\mathcal{X}_\varepsilon = S_\varepsilon^\theta.$$

Por outro lado, definimos

$$\begin{aligned} m_\varepsilon^\theta(\psi) \;:=\; & \int_Q \beta_\varepsilon \left|\partial_{s,y}^{Rh}\psi + h_\theta(s)\psi\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ + & \int_Q \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2\, h^2} \left|\nabla_y \psi\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y + c\int_Q |\psi|^2 \beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

$\text{dom } m_\varepsilon^\theta := \text{dom } s_\varepsilon^\theta$. Denotamos por M_ε^θ o operador autoadjunto associado à $m_\varepsilon^\theta(\psi)$.

Proposição 4.1. *Existe um número $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{ \|(S_\varepsilon^\theta)^{-1} - (M_\varepsilon^\theta)^{-1}\| \right\} \leq K\varepsilon.$$

O ponto principal na demonstração desta proposição é que $\beta_\varepsilon \to 1$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$. A demonstração é muito parecida com a demonstração do Teorema 3.1 em [12] e por esse motivo será omitida aqui. Passamos a estudar a sequência de operadores M_ε^θ.

Consideremos o subespaço fechado $\mathcal{L} = \{w(s)\,1 : w \in \mathrm{L}^2(0,L)\}$ do espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ e a decomposição ortogonal $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$. Assim, para $\psi \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta$, podemos escrever

$$\psi(s,y) = w(s)\,1 + \eta(s,y), \quad w \in H^1(0,L), \eta \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp. \tag{4.15}$$

Além disso, $w(0) = w(L)$.

Definimos $a_\varepsilon(s) := \int_S \beta_\varepsilon(s,y)\mathrm{d}y$ e introduzimos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{a_\varepsilon} := L^2((0,L), a_\varepsilon \mathrm{d}s)$ equipado com o produto interno $\langle w_1, w_2\rangle_{\mathcal{H}_{a_\varepsilon}} = \int_0^L \overline{w_1} w_2 a_\varepsilon \mathrm{d}s$. Atuando em $\mathcal{H}_{a_\varepsilon}$, considere a forma quadrática unidimensional

$$\begin{aligned} n_\varepsilon^\theta(w) := m_\varepsilon^\theta(w\,1) &= \int_Q \beta_\varepsilon \left(|(\partial_s + h_\theta)w|^2 + c|w|^2\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \\ &= \int_0^L \left(a_\varepsilon(s)|(\partial_s + h_\theta)w|^2 + c\, a_\varepsilon(s)|w|^2\right) \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

dom $n_\varepsilon^\theta := \{w \in \mathcal{H}^1(0,L); w(0) = w(L)\}$. Denotamos por N_ε^θ o operador autoadjunto associado à $n_\varepsilon^\theta(w)$.

Demonstração do Teorema 4.2: Começamos com algumas observações. Se $\eta \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp$,

$$\int_Q w(s)\eta(s,y)\beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y = 0, \quad \forall w \in \mathcal{L}. \tag{4.16}$$

Consequentemente,

$$\int_S \eta(s,y)\beta_\varepsilon(s,y)\mathrm{d}y = 0 \quad \text{q.t.p.}s, \tag{4.17}$$

e

$$\int_S \beta_\varepsilon(s,y)\partial_s\eta(s,y)\mathrm{d}y = -\int_S \partial_s\beta_\varepsilon(s,y)\eta(s,y)\mathrm{d}y \quad \text{q.t.p.}s. \tag{4.18}$$

Além disso, para cada $s \in (0,L)$, o Princípio do Minimax garante que

$$\int_S |\nabla_y \eta(s,y)|^2 \beta_\varepsilon \mathrm{d}y \geq \lambda_\varepsilon^2(s) \int_S |\eta|^2 \beta_\varepsilon \mathrm{d}y; \tag{4.19}$$

veja Seção 4.4.

Denotamos por $m_\varepsilon^\theta(\psi_1, \psi_2)$ a forma sesquilinear associada à forma quadrática $m_\varepsilon^\theta(\psi)$. Para $\psi \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta$, consideramos a decomposição (4.15) e escrevemos

$$m_\varepsilon^\theta(\psi) = n_\varepsilon^\theta(w) + m_\varepsilon^\theta(w\,1, \eta) + m_\varepsilon^\theta(\eta, w\,1) + m_\varepsilon^\theta(\eta).$$

Vamos verificar que existem funções $c(\varepsilon)$, $0 \le p(\varepsilon)$ e $0 \le q(\varepsilon)$, as quais não dependem de $\theta \in \mathcal{C}$, de forma que $n_\varepsilon^\theta(w)$, $m_\varepsilon^\theta(w\,1, \eta)$ e $m_\varepsilon^\theta(\eta)$ satisfazem as seguintes condições:

$$n_\varepsilon^\theta(w) \ge c(\varepsilon)\|w\|^2_{\mathcal{H}_{a_\varepsilon}}, \quad \forall w \in \text{dom } n_\varepsilon^\theta, \quad c(\varepsilon) \ge c_0; \tag{4.20}$$

$$m_\varepsilon^\theta(\eta) \ge p(\varepsilon)\|\eta\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon}, \quad \forall \eta \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp; \tag{4.21}$$

$$|m_\varepsilon^\theta(w\,1, \eta)|^2 \le q(\varepsilon)^2 n_\varepsilon^\theta(w)\, m_\varepsilon^\theta(\eta), \quad \forall \in \psi \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta; \tag{4.22}$$

em que

$$p(\varepsilon) \to \infty, \quad c(\varepsilon) = O(p(\varepsilon)), \quad q(\varepsilon) \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{4.23}$$

Assim, a Proposição 3.1 de [19], garante que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{ \|(M_\varepsilon^\theta)^{-1} - ((N_\varepsilon^\theta)^{-1} \oplus \mathbf{0})\| \right\} \le p(\varepsilon)^{-1} + K\, q(\varepsilon) c(\varepsilon)^{-1}, \tag{4.24}$$

para algun número $K > 0$. Lembre-se que $\mathbf{0}$ denota o operador nulo no subespaço $\mathcal{L}^\perp$.

Claramente,

$$n_\varepsilon^\theta(w) \ge c\|w\|^2_{\mathcal{H}_{a_\varepsilon}}, \quad \forall w \in \text{dom } n_\varepsilon^\theta.$$

Definimos $c(\varepsilon) := c$ e segue a condição (4.20).

Lembre-se da condição (2.4) na Seção 2.1. Note que

$$m_\varepsilon^\theta(\eta) \ge \frac{1}{\varepsilon^2} \int_Q \frac{\beta_\varepsilon}{h^2} |\nabla_y \eta|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \ge \frac{1}{\varepsilon^2 c_2^2} \int_Q \beta_\varepsilon |\nabla_y \eta|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \quad \forall \eta \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp.$$

Pelas estimativas (4.13) e (4.19), para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$m_\varepsilon^\theta(\eta) \ge \frac{\tilde{\gamma}}{\varepsilon^2 c_2^2} \int_Q |\eta|^2 \beta_\varepsilon \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \quad \forall \eta \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp.$$

Agora, definimos $p(\varepsilon) := \tilde{\gamma}/\varepsilon^2 c_2^2$ e a condição (4.21) é satisfeita.

Pela identidade de polarização,

$$m_\varepsilon^\theta(w\,1,\eta) = \int_Q \beta_\varepsilon \overline{\left(\partial_{s,y}^{Rh} + h_\theta\right) w}(\partial_{s,y}^{Rh} + h_\theta)\eta \,\mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_Q \frac{\beta_\varepsilon}{\varepsilon^2 h^2}\langle \nabla_y w, \nabla_y \eta\rangle \mathrm{d}s\mathrm{d}y,$$

a qual, por (4.16) e (4.17), a expressão é simplificada à

$$m_\varepsilon^\theta(w\,1,\eta) = \int_Q \beta_\varepsilon \overline{(\partial_s w + h_\theta w)}\,\partial_s \eta \,\mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_Q \beta_\varepsilon \overline{(\partial_s w + h_\theta w)}\langle \nabla_y \eta, R^h\rangle \,\mathrm{d}s\mathrm{d}y.$$

Por (4.18), temos

$$m_\varepsilon^\theta(w1,\eta) = -\int_Q \partial_s(\beta_\varepsilon)\overline{(\partial_s w + h_\theta w)}\eta \,\mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_Q \beta_\varepsilon \overline{(\partial_s w + h_\theta w)}\langle \nabla_y \eta, R^h\rangle \,\mathrm{d}s\mathrm{d}y.$$

Observe que existe $K > 0$ de forma que $|\partial(\beta_\varepsilon)(s,y)| \leq \varepsilon K$, para todo $(s,y) \in Q$ e para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Desde que R^h tem coordenadas limitadas, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
|m_\varepsilon^\theta(w\,1,\eta)| &\leq K\left(\varepsilon \int_Q |\partial_s w + h_\theta w|\,|\eta|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_Q |\partial_s w + h_\theta w|\,|\nabla_y \eta|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y\right) \\
&\leq \varepsilon\, K \left(\int_Q |\partial_s w + h_\theta w|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y\right)^{1/2} \left(\int_Q |\eta|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y\right)^{1/2} \\
&+ K\left(\int_Q \beta_\varepsilon |\partial_s w + h_\theta w|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y\right)^{1/2} \left(\int_Q \beta_\varepsilon |\nabla_y \eta|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y\right)^{1/2} \\
&\leq K\left(n_\varepsilon^\theta(w)\right)^{1/2}\left[\varepsilon\left(m_\varepsilon^\theta(\eta)\right)^{1/2} + \left(\int_Q \frac{\beta_\varepsilon}{h^2}|\nabla_y \eta|^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y\right)^{1/2}\right],
\end{aligned}$$

para todo $w \in \text{dom } n_\varepsilon^\theta$, para todo $\eta \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp$, para algum $K > 0$ e para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Agora, podemos ver que

$$|m_\varepsilon^\theta(w\,1,\eta)| \leq K\,\varepsilon\,(n_\varepsilon^\theta(w))^{1/2}(m_\varepsilon^\theta(\eta))^{1/2}, \quad \forall w \in \text{dom } n_\varepsilon^\theta, \forall \eta \in \text{dom } m_\varepsilon^\theta \cap \mathcal{L}^\perp,$$

para algum $K > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Então, considerando-se $q(\varepsilon) := K\,\varepsilon$, verifica-se que as condições (4.22) e (4.23) são satisfeitas. Portanto, terminamos a demonstração de (4.24) em que o limite superior dessa desigualdade é $K\,\varepsilon$ (para algum número $K > 0$).

O próximo passo é estudar a sequência de operadores unidimensionais N_ε^θ. Para trabalhar em $L^2(0, L)$ com a medida usual, definimos o operador unitário

$$\begin{array}{rccc} \Pi_\varepsilon : & L^2(0,L) & \to & \mathcal{H}_{a_\varepsilon} \\ & w & \mapsto & a_\varepsilon^{-1/2} w \end{array}, \tag{4.25}$$

e a forma quadrática

$$\begin{aligned} o_\varepsilon^\theta(w) &:= n_\varepsilon^\theta(\Pi_\varepsilon\, w) \\ &= \int_0^L \left(|\partial_s w + h_\theta w - (2\,a_\varepsilon)^{-1}\partial_s(a_\varepsilon) w|^2 + c|w|^2 \right) \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

dom $o_\varepsilon^\theta = \{w \in \mathcal{H}^1(0,L); w(0) = w(L)\}$. Denotamos por O_ε^θ o operador autoadjunto associado à $o_\varepsilon^\theta(w)$. Temos $O_\varepsilon^\theta = \Pi_\varepsilon^{-1} N_\varepsilon^\theta\, \Pi_\varepsilon$.

Finalmente, definimos

$$t^\theta(w) := \int_0^L \left(|\partial_s w + h_\theta w|^2 + c|w|^2 \right) \mathrm{d}s, \quad \text{dom } t^\theta := \text{dom } o_\varepsilon^\theta.$$

O operador autoadjunto associado à $t^\theta(w)$ é dado por T^θ; veja (4.9) na Seção 4.1.

É possível mostrar que existe $K > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$|o_\varepsilon^\theta(w) - t^\theta(w)| \le K\,\varepsilon\, t^\theta(w), \quad \forall w \in \text{dom } t^\theta, \forall \theta \in \mathcal{C}.$$

Assim, o Teorema 3 de [2] garante que, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\sup_{\theta \in \mathcal{C}} \left\{ \|(O_\varepsilon^\theta)^{-1} - (T^\theta)^{-1}\| \right\} \le K\varepsilon. \tag{4.26}$$

É importante observarmos que todas as constantes K's que aparecem nesta demonstração não dependem de $\theta \in \mathcal{C}$.

Pela Proposição 4.1, estimativas (4.24) e (4.26), segue-se o Teorema 4.2. $\square$

Demonstração do Corolário 4.1: O Teorema 4.2 na Seção 4.1 e o Corolário

2.3 de [21] implicam que

$$\left|\frac{1}{E_n(\varepsilon,\theta)} - \frac{1}{\nu_n(\theta)}\right| \leq K\,\varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathcal{C},$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então,

$$|E_n(\varepsilon,\theta) - \nu_n(\theta)| \leq K\,\varepsilon\,|E_n(\varepsilon,\theta)|\,|\nu_n(\theta)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathcal{C}, \tag{4.27}$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

As funções $\nu_n(\theta)$ são contínuas em $\mathcal{C}$ e consequentemente limitadas (veja Teorema XIII.89 em [30]).

Este fato junto com a estimativa (4.27) garantem que, para cada $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, existe $K_{\tilde{n}_0} > 0$ de forma que,

$$|E_{\tilde{n}_0}(\varepsilon,\theta)| \leq K_{\tilde{n}_0}, \quad \forall \theta \in \mathcal{C},$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Finalmente, para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $K_{n_0} > 0$ de forma que

$$|E_n(\varepsilon,\theta) - \nu_n(\theta)| \leq K_{n_0}\,\varepsilon, \quad n = 1, 2\cdots, n_0, \forall \theta \in \mathcal{C},$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. □

4.6 Existência de lacunas

Da Seção 4.1 observamos que $\sigma(-\Delta^N_{\Omega_\varepsilon} + cI) = \sigma(T_\varepsilon) = \cup_{n=1}^{\infty} \{E_n(\varepsilon,\mathcal{C})\}$ (veja (4.7) e (4.8) para mais detalhes). Assim, o espectro de $-\Delta^N_{\Omega_\varepsilon} + cI$ é uma união de bandas. É natural questionar a existência de lacunas em sua estrutura. Este assunto foi estudado em [28]. Nesse trabalho, o autor garante a existência de lacunas. No entanto, nesta seção apresentamos uma demonstração alternativa para o resultado. Vamos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Existem $n_1 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n_1+1} > 0$ e $C_{n_1} > 0$ de forma que, para todo*

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_1+1})$,

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n_1+1}(\varepsilon, \theta) - \max_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n_1}(\varepsilon, \theta) = C_{n_1} + O(\varepsilon).$$

O Teorema 4.4 garante que pelo menos uma lacuna aparece no espectro $\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^N)$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Chamamos atenção que a deformação na fronteira $\partial\Omega_\varepsilon$ causada por $h(s)$ gera este efeito. A demonstração do Teorema 4.4 é baseada nos argumentos de [4, 34] e é muito semelhante à demonstração do Teorema 3.4. da Seção 3.4 do Capitulo 3.

Antes de apresentar a demonstração do Teorema 4.4, consideramos o operador

$$Tw = -w'' + \frac{h''(s)}{h(s)} w + cw, \quad \text{dom } T = H^2(\mathbb{R}).$$

Lembre-se que denotamos por $\nu_n(\theta)$ o n-ésimo autovalor de T^θ (veja, (4.9) na Seção 4.1). Pelo Teorema XIII.89 em [30], cada $\nu_n(\theta)$ é uma função contínua em $\mathcal{C}$. Além disso,

(a) $\nu_n(\theta) = \nu_n(-\theta)$, para todo $\theta \in \mathcal{C}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

(b) Para n ímpar (respectivamente, par), $\nu_n(\theta)$ é estritamente crescente (respectivamente, decrescente) quando θ está entre 0 e π/L. Em particular,

$$\nu_1(0) < \nu_1(\pi/L) \le \nu_2(\pi/L) < \nu_2(0) \le \cdots \le \nu_{2n-1}(0) < \nu_{2n-1}(\pi/L)$$

$$\le \nu_{2n}(\pi/L) < \nu_{2n}(0) \le \cdots .$$

Agora, par cada $n = 1, 2, 3, \cdots$, definimos

$$B_n := \begin{cases} [\nu_n(0), \nu_n(\pi/L)], & \text{para } n \text{ ímpar}, \\ [\nu_n(\pi/L), \nu_n(0)], & \text{para } n \text{ par}, \end{cases}$$

e

$$G_n := \begin{cases} (\nu_n(\pi/L), \nu_{n+1}(\pi/L)), & \text{para } n \text{ ímpar tal que } \nu_n(\pi/L) \neq \nu_{n+1}(\pi/L), \\ (\nu_n(0), \nu_{n+1}(0)), & \text{para } n \text{ par tal que } \nu_n(0) \neq \nu_{n+1}(0), \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Teorema XIII.90 em [30], temos $\sigma(T) = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$; B_n é chamado de n-ésima banda de $\sigma(T)$ e G_n é chamado de lacuna de $\sigma(T)$ se $B_n \neq \emptyset$.

O Corolário 4.1 implica que para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_{n_0} > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_0})$,

$$\max_{\theta \in \mathcal{C}} E_n(\varepsilon, \theta) = \begin{cases} \nu_n(\pi/L) + O(\varepsilon), & \text{para } n \text{ ímpar}, \\ \nu_n(0) + O(\varepsilon), & \text{para } n \text{ par}, \end{cases}$$

e

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_n(\varepsilon, \theta) = \begin{cases} \nu_n(0) + O(\varepsilon), & \text{para } n \text{ ímpar}, \\ \nu_n(\pi/L) + O(\varepsilon), & \text{para } n \text{ par}, \end{cases}$$

vale para cada $n = 1, 2, \cdots, n_0$. Assim, temos

Corolário 4.2. *Para cada $n_2 \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_{n_2+1} > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n_2+1})$,*

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n+1}(\varepsilon, \theta) - \max_{\theta \in \mathcal{C}} E_n(\varepsilon, \theta) = |G_n| + O(\varepsilon),$$

vale para $n = 1, 2, \cdots, n_2$, em que $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue.

Observação 4.2. Devido às características de h, se h não é uma função constante, então h''/h não é constante. De fato, suponhamos que $h''/h = C$. Sem perda de generalidade, assumimos que $C > 0$. Pela condição (2.4), temos $h'' > 0$, ou seja, h' é estritamente crescente. Mas isso contradiz ao fato de que h' é periódica.

Demonstração do Teorema 4.4: Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, definimos a transformação unitária $(u_\theta w)(s) = e^{-i\theta s} w(s)$. Em particular, consideremos os operadores $\tilde{T}^0 := u_0 T^0 u_0^{-1}$ e $\tilde{T}^{\pi/L} := u_{\pi/L} T^{\pi/L} u_{\pi/L}^{-1}$ cujos autovalores são dados por $\{\nu_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\nu_n(\pi/L)\}_{n \in \mathbb{N}}$, respectivamente. Além disso, os domínios destes operadores são dados por (A.1) no Apêndice A; $\tilde{T}^0$ e $\tilde{T}^{\pi/L}$ são chamados de operadores com condição periódica e antiperiódica na fronteira, respectivamente.

Desde que $h''(s)/h(s)$ não é uma função constante em $[0, L]$, pelo Teorema de Borg, sem perda de generalidade, podemos dizer que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que, $\nu_{n_1}(0) \neq \nu_{n_1+1}(0)$. Agora, o resultado segue pelo Corolário 4.2. $\square$

Observação 4.3. Sobre as condições dos Teoremas 4.1 e 4.4, temos garantida a existência de pelos menos uma lacuna no espectro absolutamente contínuo de $-\Delta^N_{\Omega_\varepsilon}$, para ε suficientemente pequeno. De fato, é suficiente escolher ε suficientemente pequeno e um número $E > 0$ apropriado.

Capítulo 5

Influência dos estados limitados no Laplaciano de Neumann em um tubo torcido

Seja $(\Omega_\varepsilon^\alpha)_{\varepsilon>0}$ uma sequência de tubos torcidos. Neste capítulo estudamos o operador Laplaciano de Neumann $-\Delta_{\Omega_\varepsilon^\alpha}^N$ e o nosso primeiro objetivo é estudar o seu comportamento quando $\varepsilon \to 0$, mais precisamente, encontrar o operador efetivo no limite $\varepsilon \to 0$. No entanto, quando Ω é "espremido", existem autovalores divergentes devido às oscilações transversais. Então, nós consideramos $-\Delta_{\Omega_\varepsilon^\alpha}^N$ restrito à subespaços específicos do espaço de Hilbert inicial. O ponto interessante é que, quando o diâmetro da seção transversal de Ω tende à zero, encontramos operadores efetivos diferentes em cada situação. A saber, o efeito de rotação de ângulo influencia diretamente a ação desses operadores; veja (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11) na Seção 5.2. O segundo objetivo deste capítulo é considerar o caso em que cada $\Omega_\varepsilon^\alpha$ é um tubo periódico no sentido que seu efeito torcido varia periodicamente. Considerando o operador $-\Delta_{\Omega_\varepsilon^\alpha}^N$ restrito aos subespaços escolhidos, encontramos informações sobre o seu espectro absolutamente contínuo e a existência e localização de lacunas em sua estrutura. Nas próximas seções, explicamos o modelo e fornecemos detalhes dos nossos principais resultados.

5.1 Geometria do tubo e mudança de variáveis

Nesta seção, apresentamos a construção de um tubo torcido a partir de um curva que é uma reta (ou um pedaço de uma reta). Embora essa construção possa ser feita de acordo com as considerações da Seção 2.1 do Capítulo 2, preferimos detalhá-la neste momento.

Seja $I = \mathbb{R}$ ou $I = [a, b]$, um intervalo limitado em $\mathbb{R}$. Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto aberto, limitado, conexo e com fronteira suave de $\mathbb{R}^2$; denote por $y := (y_1, y_2)$ um elemento de S. Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2; suponhamos que $\alpha(0) = 0$ se $I = \mathbb{R}$, ou $\alpha(a) = 0$ se $I = [a, b]$. Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos o tubo torcido

$$\Omega_\varepsilon^\alpha := \{\Gamma_\varepsilon^\alpha(s)\mathbf{x}^t, \mathbf{x} = (s, y) \in I \times S\},$$

em que

$$\Gamma_\varepsilon^\alpha(s) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\cos\alpha(s) & -\varepsilon\sin\alpha(s) \\ 0 & \varepsilon\sin\alpha(s) & \varepsilon\cos\alpha(s) \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Seja $-\Delta_{\Omega_\varepsilon^\alpha}^N$ o Laplaciano de Neumann em $L^2(\Omega_\varepsilon^\alpha)$, ou seja, o operador auto-adjunto associado à forma quadrática

$$\tilde{b}_\varepsilon(\psi) = \int_{\Omega_\varepsilon^\alpha} |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x, \quad \mathrm{dom}\ \tilde{b}_\varepsilon = H^1(\Omega_\varepsilon^\alpha). \tag{5.2}$$

Já que vamos usar a técnica de Γ-convergência (veja Apêndice C.2 e [9]), nossa análise é baseada no estudo da sequência $(\tilde{b}_\varepsilon)_\varepsilon$.

Agora, realizamos a usual mudança de variáveis de forma que dom $\tilde{b}_\varepsilon$ se torne independente de ε. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} F_\varepsilon : & I \times S & \to & \Omega_\varepsilon \\ & (s, y_1, y_2) & \mapsto & \Gamma_\varepsilon^\alpha(s)(s, y_1, y_2)^t \end{array},$$

em que $\Gamma_\varepsilon^\alpha(s)$ é dado por (5.1); F_ε será uma difeomorfismo (global) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Nas novas variáveis, dom $\tilde{b}_\varepsilon$ passa a ser $H^1(I \times S)$. Por outro lado, passamos a trabalhar com uma métrica Riemannian $G = G_\varepsilon^\alpha$ a qual é induzida por F_ε. Mais precisamente, $G = (G_{ij})$, $G_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq 3$, em que $e_1 = \partial F_\varepsilon / \partial s$, $e_2 = \partial F_\varepsilon / \partial y_1$, e $e_3 = \partial F_\varepsilon / \partial y_2$. Alguns cálculos mostram que

$$J = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon\alpha'(s)\langle z_\alpha^\perp(s), y\rangle & \varepsilon\alpha'(s)\langle z_\alpha(s), y\rangle, \\ 0 & \varepsilon\cos\alpha(s) & \varepsilon\sin\alpha(s) \\ 0 & -\varepsilon\sin\alpha(s) & \varepsilon\cos\alpha(s) \end{pmatrix},$$

em que

$$z_\alpha(s) := (\cos\alpha(s), -\sin\alpha(s)), \quad z_\alpha^\perp(s) := (\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)).$$

A matriz inversa de J é

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha'(s)y_2 & -\alpha'(s)y_1 \\ 0 & (\cos\alpha(s))/\varepsilon & -(\sin\alpha(s))/\varepsilon \\ 0 & (\sin\alpha(s))/\varepsilon & (\cos\alpha(s))/\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Observe que $JJ^t = G$ e $\det J = |\det G|^{1/2} = \varepsilon^2 > 0$. Assim, F_ε é um difeomorfismo local. Já que o tubo não tem autointersecções, F_ε é injetora. Assim, obtemos um difeomorfismo global.

Introduzindo a transformação unitária

$$\begin{array}{rccc} U_\varepsilon: & L^2(\Omega_\varepsilon^\alpha) & \to & L^2(Q) \\ & \phi & \mapsto & \varepsilon\phi \circ F_\varepsilon \end{array}, \tag{5.3}$$

obtemos a forma quadrática

$$\begin{aligned} \hat{b}_\varepsilon(\psi) &:= \tilde{b}_\varepsilon(U_\varepsilon^{-1}\psi) = \|J^{-1}\nabla\psi\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \int_Q \left(|\psi' + \langle\nabla_y\psi, Ry\rangle\alpha'(s)|^2 + \frac{|\nabla_y\psi|^2}{\varepsilon^2} \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

dom $\hat{b}_\varepsilon = H^1(Q)$, em que $Q := I \times S$, $\psi' := \partial\psi/\partial s$, $\nabla_y\psi := (\partial\psi/\partial y_1, \partial\psi/\partial y_2)$ e

R é a matriz de rotação $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Denotamos por $-\hat{\Delta}^{\varepsilon}$ o operador associado à $\hat{b}^{\varepsilon}$.

Alguns cálculos mostram que $-\hat{\Delta}_{\varepsilon}\psi = U_{\varepsilon}(-\Delta^{N}_{\Omega^{\alpha}_{\varepsilon}})U_{\varepsilon}^{-1}\psi$, em que dom $(-\hat{\Delta}_{\varepsilon}) = U_{\varepsilon}(\text{dom } (-\Delta^{N}_{\Omega^{\alpha}_{\varepsilon}}))$.

5.2 Estados limitados e o operador efetivo

Consideremos a sequência de formas quadráticas atuando em $L^2(Q)$

$$\hat{b}_{\varepsilon}(\psi) = \int_{Q} \left(|\psi' + \langle \nabla_y \psi, Ry \rangle \alpha'(s)|^2 + \frac{|\nabla_y \psi|^2}{\varepsilon^2} \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \tag{5.4}$$

dom $\hat{b}_{\varepsilon} = H^1(Q)$.

Nesta seção, apresentamos a estratégia para estudar a sequência $(\hat{b}_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ quando $\varepsilon \to 0$.

Quando o tubo é "espremido", ou seja, $\varepsilon \to 0$, $-\Delta^{N}_{\Omega^{\alpha}_{\varepsilon}}$ apresenta autovalores divergentes devido às oscilações na seção transversal de $\Omega^{\alpha}_{\varepsilon}$; podemos observar isso pela presença do termo $(1/\varepsilon^2) \int_{Q} |\nabla_y \psi|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y$ em (5.4). Para controlar essa divergência, vamos tomar a seguinte estratégia: como já comentado na Seção 2.3 do Capítulo 2, seja $-\Delta^{N}_{S}$ o operador Laplaciano de Neumann restrito à S, ou seja, o operador autoadjunto associado à forma quadrática $u \mapsto \int_{S} |\nabla_y u|^2 \mathrm{d}y$, $u \in H^1(S)$. Lembre-se que denotamos por λ^{N}_{n} o n-ésimo autovalor de $-\Delta^{N}_{S}$ e por u^{N}_{n} a correspondente autofunção normalizada, ou seja,

$$0 = \lambda^{N}_{1} < \lambda^{N}_{2} < \lambda^{N}_{3} < \cdots, \qquad -\Delta^{N}_{S} u^{N}_{n} = \lambda^{N}_{n} u^{N}_{n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Assumimos que cada autovalor λ^{N}_{n} é simples; note que u^{N}_{1} é uma função constante.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, nossa estratégia é estudar a sequência

$$\hat{b}^{\varepsilon}_{n}(\psi) \;:=\; \hat{b}_{\varepsilon}(\psi) - \frac{\lambda^{N}_{n}}{\varepsilon^2} \|\psi\|^2_{L^2(Q)},$$

dom $\hat{b}^{\varepsilon}_{n} := H^1(Q)$. Denotamos por $\hat{T}^{\varepsilon}_{n}$ o operador autoadjunto associado à $\hat{b}^{\varepsilon}_{n}$;

isso pode ser feito desde que cada forma quadrática $\hat{b}_n^\varepsilon$ seja fechada e limitada inferiormente em $L^2(Q)$. De fato, $\hat{T}_n^\varepsilon = -\hat{\Delta}^\varepsilon - (\lambda_n^N/\varepsilon^2)\mathbf{1}$; $\mathbf{1}$ denota o operador identidade.

Na literatura, é usual considerar apenas o caso em que $n = 1$, ou seja, já que $\lambda_1^N = 0$, estuda-se direitamente a sequência de formas quadráticas $\hat{b}_\varepsilon(\psi)$. A ideia de considerar o caso $n \neq 1$ é baseada em [11]; o autor considera o operador Laplaciano de Dirichlet restrito a um tubo com o objetivo de encontrar o operador efetivo. Naquele caso, a ação do operador efetivo é o mesmo para $n = 1$ e $n \neq 1$ e depende da geometria do tubo.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos os subespaços fechados

$$\mathcal{L}_n := \{w(s)u_n^N(y) : w \in L^2(I)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_n := \{w(s)u_n^N(y) : w \in H^1(I)\}$$

de $L^2(Q)$ e $H^1(Q)$, respectivamente. Temos as decomposições

$$L^2(Q) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3 \oplus \cdots, \quad H^1(Q) = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \mathcal{K}_3 \oplus \cdots,$$

e cada $\mathcal{K}_n$ é um subespaço denso de $\mathcal{L}_n$.

Seja $T_1 w := -w''$ o operador Laplaciano unidimensional com domínio dom $T_1 = H^2(\mathbb{R})$ se $I = \mathbb{R}$, e dom $T_1 = \{w \in H^2(I) : w'(a) = w'(b) = 0\}$ se $I = [a, b]$. Denotamos por $\mathbf{0}$ o operador nulo no subespaço $\mathcal{L}_1^\perp$. No caso particular em que $n = 1$, é conhecido que $\hat{T}_1^\varepsilon \approx T_1 \oplus \mathbf{0}$, quando $\varepsilon \to 0$; veja [32]. Como já comentado anteriormente, podemos notar que o operador efetivo nessa situação não depende da geometria do tubo.

Um dos objetivos deste capítulo é estudar a sequência $(\hat{T}_n^\varepsilon)_\varepsilon$ (para cada $n > 1$ fixado) e caraterizar o operator efetivo quando $\varepsilon \to 0$. No entanto, alguns ajustes serão necessários para que esse limite exista em algum sentido. O fato interessante nessa situação é que encontramos um operador efetivo (para cada n) que depende da geometria do tubo.

Para estudar a sequência $(\hat{T}_n^\varepsilon)_\varepsilon$, serão necessárias algumas considerações. Seja $v(s, y) = w(s)u_j^N(y)$, com $w \in H^1(I)$. Uma simples substituição mostra que

$$\begin{aligned}\hat{b}_n^\varepsilon(v) &= \int_Q |w' u_j^N + \langle \nabla_y u_j^N, Ry\rangle \alpha'(s) w|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_Q \left(|\nabla_y u_j^N|^2 - \lambda_n |u_j^N|^2\right)|w|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \int_Q |w' u_j^N + \langle \nabla_y u_j^N, Ry\rangle \alpha'(s) w|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \frac{(\lambda_j^N - \lambda_n^N)}{\varepsilon^2}\|w\|^2_{L^2(I)},\end{aligned}$$

ou seja, para $j < n$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \hat{b}_n^\varepsilon(v) = -\infty. \tag{5.5}$$

Assim, a sequência $(\hat{b}_n^\varepsilon(v))_\varepsilon$ não é limitada inferiormente. Portanto, para estudar $(\hat{b}_n^\varepsilon)_\varepsilon$, é necessário excluir alguns vetores do domínio dom $\hat{b}_n^\varepsilon$. Baseado em (5.5), o procedimento para este problema é o seguinte. Definimos os espaços de Hilbert

$$\mathcal{H}_n := \begin{cases} L^2(Q), & n = 1, \\ (\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-1})^\perp, & n = 2, 3, \cdots, \end{cases} \tag{5.6}$$

todos equipados com a norma (induzida) de $L^2(Q)$. Consideramos a sequência de formas quadráticas atuando em $\mathcal{H}_n$;

$$\overline{b}_n^\varepsilon(\psi) = \int_Q \left(|\psi' + \langle \nabla_y \psi, Ry\rangle \alpha'(s)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\nabla_y \psi|^2\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}y, \tag{5.7}$$

dom $\overline{b}_n^\varepsilon = H^1(Q) \cap \mathcal{H}_n$. Denotamos por $-\Delta_n^\varepsilon$ o operador autoadjunto em $\mathcal{H}_n$ associado à $\overline{b}_n^\varepsilon$. Finalmente, definimos

$$b_n^\varepsilon(\psi) := \overline{b}_n^\varepsilon(\psi) - \frac{\lambda_n^N}{\varepsilon^2}\|\psi\|^2_{\mathcal{H}_n},$$

dom $b_n^\varepsilon := H^1(Q) \cap \mathcal{H}_n$. Denotamos por T_n^ε o operador autoadjunto associado à b_n^ε a qual é um forma quadrática positiva e fechada; T_n^ε atua no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_n$. Mais, $T_n^\varepsilon = -\Delta_n^\varepsilon - (\lambda_n^N/\varepsilon^2)\mathbf{1}$.

Portanto, vamos estudar a sequência $(T_n^\varepsilon)_\varepsilon$ em vez de $(\hat{T}_n^\varepsilon)_\varepsilon$. Como uma nota, seja U_ε o operador unitário definido em (5.3) na Seção 5.1. O operador $-\Delta_n^\varepsilon = T_n^\varepsilon + (\lambda_n/\varepsilon^2)\mathbf{1}$ é unitariamente equivalente ao operador Laplaciano com domínio U_ε(dom T_n^ε) no espaço de Hilbert $U_\varepsilon^{-1}(\mathcal{H}_n)$. Neste sentido, dizemos que trabalhamos com o operador Laplaciano de Neumann restrito a subespaços específicos do espaço de Hilbert $L^2(\Omega_\varepsilon^\alpha)$.

No caso particular em que $n = 1$, $\hat{T}_1^\varepsilon = T_1^\varepsilon$ é unitariamente equivalente ao operador Laplaciano de Neumann no tubo torcido.

Seja b_n a forma quadrática unidimensional

$$b_n(w) := b_n^\varepsilon(wu_n^N) = \int_Q |w'u_n^N + \langle \nabla_y u_n^N, Ry\rangle \alpha'(s)w|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y,$$

dom $b_n = H^1(I)$. De fato, b_n é a restrição de b_n^ε ao subespaço $\mathcal{K}_n$. Denotamos por T_n o operador autoadjunto associado à b_n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos as constantes

$$C_n^1(S) := \int_S |\langle \nabla_y u_n^N, Ry\rangle|^2 \mathrm{d}y, \quad C_n^2(S) := \int_S u_n^N \langle \nabla_y u_n^N, Ry\rangle \mathrm{d}y, \tag{5.8}$$

e o potencial real

$$V_n(s) := C_n^1(S)(\alpha'(s))^2 - C_n^2(S)\alpha''(s). \tag{5.9}$$

Pelas considerações no Apêndice C.1,

$$T_n w = -w'' + V_n(s)w, \tag{5.10}$$

em que dom $T_n = H^2(\mathbb{R})$ se $I = \mathbb{R}$ e

$$\text{dom } T_n = \left\{ w \in H^2(I) : \begin{array}{c} w'(a) = -C_n^2(S)\alpha'(a)w(a) \\ w'(b) = -C_n^2(S)\alpha'(b)w(b) \end{array} \right\} \tag{5.11}$$

se $I = [a, b]$. No ultimo caso, para $n > 1$ temos a condição Robin em dom T_n. Por outro lado, para $n = 1$, $C_1^1(S) = C_1^2(S) = 0$ e dom $T_1 = \{w \in H^2(I) : w'(a) = w'(b) = 0\}$, ou seja, T_1 é o operador Laplaciano de Neumann unidimensional.

Enfatizamos que, para $n > 1$, em ambos os casos, $I = \mathbb{R}$ ou $I = (a, b)$, as constantes $C_n^1(S)$ e $C_n^2(S)$ controlam os efeitos de α em T_n.

Agora, apresentamos o primeiro resultado deste capítulo.

Teorema 5.1. *(A) Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a sequência de operadores auto-adjuntos T_n^ε converge no sentido forte dos resolventes para T_n em $\mathcal{L}_n$, quando $\varepsilon \to 0$. Isto é,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_{-\lambda}(T_n^\varepsilon)\zeta = R_{-\lambda}(T_n)P_n\zeta, \quad \forall \zeta \in \mathcal{H}_n, \forall \lambda > 0,$$

em que P_n é a projeção ortogonal em $\mathcal{L}_n$.

(B) Além disso, suponha que $I = [a, b]$ é um intervalo limitado. Denotamos por $\mu_j(\varepsilon)$ (respectivamente, μ_j) o j-ésimo autovalor de $-\Delta_n^\varepsilon$ (respectivamente. T_n) contando com sua multiplicidade. Então, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\mu_j = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mu_j(\varepsilon) - \frac{\lambda_n^N}{\varepsilon^2}\right). \tag{5.12}$$

A demonstração do Teorema 5.1 é baseada nos argumentos de [6, 11]. Nesses trabalhos, os autores consideraram o Laplaciano de Dirichlet em um tubo fino. Nós realizamos os ajustes necessários para trabalhar no espaço de Sobolev $H^1(Q)$.

No caso particular em que $n = 1$, $\hat{T}_1^\varepsilon = T_1^\varepsilon$ é unitariamente equivalente ao operador Laplaciano de Neumann $-\Delta_{\Omega_\varepsilon^\alpha}^N$ em $L^2(\Omega_\varepsilon^\alpha)$. Teorema 5.1 mostra que o operador efetivo neste caso é o operador Laplaciano de Neumann unidimensional. Este problema foi estudado em [32]. Portanto, nossa principal contribuição no assunto é o caso $n > 1$.

A demonstração do Teorema 5.1 é apresentada na Seção 5.3 a seguir.

5.3 Resultados preliminares e demonstração do Teorema 5.1

Esta seção é dedicada à demonstração do Teorema 5.1. A estratégia é baseada no estudo da sequência de formas quadráticas $(b_n^\varepsilon)_\varepsilon$ e alguns resultados preliminares serão necessários. Começamos com algumas considerações. Denote por $[u_1^N, u_2^N, \ldots, u_k^N]$ o subespaço de $L^2(S)$ gerado por $\{u_1^N, u_2^N, \ldots, u_k^N\}$. Desde que $U_k := [u_1^N, u_2^N, \ldots, u_k^N]^\perp$ é invariante sobre o operador $-\Delta_S^N$, a restrição

$-\Delta_S^N|_{U_k}$ está bem definida e seu primeiro autovalor é λ_{k+1}^N. Denotamos por q_k a forma quadrática associada à $-\Delta_S^N|_{U_k}$. Temos que

$$q_k(v) \geq \lambda_{k+1}^N \|v\|_{L^2(S)}^2, \quad \forall v \in U_k \cap H^1(S). \tag{5.13}$$

Para estudar a sequência $(b_n^\varepsilon)_\varepsilon$, vamos usar a técnica de Γ-convergência; veja Apêndice C.2. Então, precisamos estender b_n^ε a todo o espaço $\mathcal{H}_n$ definindo (usamos a mesma notação)

$$b_n^\varepsilon(v) = \begin{cases} b_n^\varepsilon(v), & \text{se}\, v \in \operatorname{dom} b_n^\varepsilon \\ +\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

De forma semelhante, estendemos b_n em todo o espaço $\mathcal{H}_n$;

$$b_n(v) = \begin{cases} b_n(w), & \text{se } v = wu_n^N, \text{ com } w \in \operatorname{dom} b_n \\ +\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Lema 5.1. *Se $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em $\mathcal{H}_n$ e $(b_n^\varepsilon(v_\varepsilon))_\varepsilon$ é uma sequência limitada, então $(v_\varepsilon')_\varepsilon$ e $(\nabla_y v_\varepsilon)_\varepsilon$ são sequências limitadas em $\mathcal{H}_n$. Além disso, $v_\varepsilon' \rightharpoonup v'$, $\nabla_y v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v$ e $v \in H^1(Q)$.*

Demonstração. Uma vez que $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ e $(b_n^\varepsilon(v_\varepsilon))_\varepsilon$ são sequências limitadas, existe um número $K > 0$ de forma que,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_Q |v_\varepsilon' + \langle \nabla_y v_\varepsilon, Ry\rangle \alpha'(s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) < K,$$

e

$$\begin{aligned} &\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_Q |\nabla_y v_\varepsilon|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ =\; &\limsup_{\varepsilon\to 0} \left(\int_Q \left(|\nabla_y v_\varepsilon|^2 - \lambda_n |v_\varepsilon|^2\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_Q \lambda_n |v_\varepsilon|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \right) \\ \leq\; &\limsup_{\varepsilon\to 0} K\varepsilon^2 + \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_Q \lambda_n |v_\varepsilon|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y < K. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Essas estimativas, junto com o fato de que $\alpha'(s)$ e Ry são funções limitadas, mostram que $(v'_\varepsilon)_\varepsilon$ e $(\nabla_y v_\varepsilon)_\varepsilon$ são sequências limitadas em $L^2(Q)$. Portanto, $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ é uma sequência limitada em $H^1(Q)$. Assim, existe $\psi \in H^1(Q)$ e uma subsequência de $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, também denotado por $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, de forma que $v_\varepsilon \rightharpoonup \psi$ em $H^1(Q)$ (lembre-se que este espaço de Hilbert é reflexivo). Como $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em $\mathcal{H}_n$, segue que $v = \psi$, $v'_\varepsilon \rightharpoonup v'$, $\nabla_y v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v_\varepsilon$, em $\mathcal{H}_n$ e $v \in H^1(Q)$. $\square$

Lema 5.2. *Seja $v_\varepsilon \to v$ em $\mathcal{H}_n$ de forma que exista o limite $\lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$. Então, $v(s,y) = w(s)u_n^N(y)$, com $w \in H^1(I)$ (ou seja, $v \in \mathcal{K}_n$).*

Demonstração. De fato, pelo Lema 5.1, $\nabla_y v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v$ fracamente em $L^2(Q)$. Pela semicontinuidade fraca (inferior) da norma em L^2, da estimativa (5.14) e da convergência forte de $(v_\varepsilon)_\varepsilon$, temos

$$\int_Q |\nabla_y v|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_Q |\nabla_y v_\varepsilon|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \lambda_n \int_Q |v_\varepsilon|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y = \lambda_n \int_Q |v|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y.$$

Agora, definimos a função $f_n(s) := \int_S \left(|\nabla_y v(s,y)|^2 - \lambda_n |v(s,y)|^2\right) \mathrm{d}y$. A estimativa acima mostra que $f_n(s) \le 0$. Entretanto, (5.13) garante que $f_n(s) \ge 0$. Logo, $f_n = 0$ q.t.p.. Concluímos que $v(s,\cdot) \in U_{n-1} \cap H^1(S)$ e também é uma autofunção do operador $-\Delta_S^N|_{U_{n-1}}$ cujo autovalor associado é λ_n^N. Desde que λ_n^N é simples, $v(s,\cdot)$ é proporcional a u_n^N. Assim, escrevemos $v(s,y) = w(s)u_n^N(y)$ com $w \in H^1(I)$, já que $v \in H^1(Q)$. $\square$

Proposição 5.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência de formas quadráticas b_n^ε Γ-converge fortemente a b_n, quando $\varepsilon \to 0$.*

Demonstração. Temos que verificar os itens (i) e (ii) de acordo com a definição de Γ-convergência forte apresentada no Apêndice C.2.

Seja $v \in \mathcal{H}_n$ e $v_\varepsilon \to v$ em $\mathcal{H}_n$. Se $\liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = +\infty$, então $b_n(v) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon)$. Suponhamos $\liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$.

O Lema 5.1 garante que $v'_\varepsilon \rightharpoonup v'$, $\nabla_y v_\varepsilon \rightharpoonup \nabla_y v$ fracamente em $L^2(Q)$, e $v \in H^1(Q)$. Já que α' é uma função limitada,

$$v'_\varepsilon + \langle \nabla_y v_\varepsilon, Ry\rangle \alpha' \rightharpoonup v' + \langle \nabla_y v, Ry\rangle \alpha'$$

fracamente em $L^2(Q)$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_Q |v' + \langle \nabla_y v, Ry\rangle \alpha'(s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_Q |v'_\varepsilon + \langle \nabla_y v_\varepsilon, Ry\rangle \alpha'(s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Pelo Lema 5.2, podemos escrever $v(s,y) = w(s)u_n^N(y)$, com $w \in H^1(I)$. Assim,

$$b_n(v) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon).$$

Portanto, verificamos o item (i).

Agora, vamos mostrar que para cada $v \in \mathcal{H}_n$, existe uma sequência $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ em $\mathcal{H}_n$ de forma que $v_\varepsilon \to v$ em $\mathcal{H}_n$ e $\lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = b_n(v)$. Primeiramente, consideramos o caso particular em que $v(s,y) = w(s)u_n^N(y)$, com $w \in H^1(I)$. Seja $v_\varepsilon := v$, para todo $\varepsilon > 0$. Note que $b_n^\varepsilon(v) = b_n(w)$ e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = b_n(v).$$

Por outro lado, se $v \in \mathcal{H}_n \setminus \{w(s)u_n^N(y) : w \in H^1(I)\}$, temos que $b_n(v) = +\infty$. Seja $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ uma sequência de forma que, $v_\varepsilon \to v$ em $\mathcal{H}_n$. Neste caso, $\lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = +\infty$. De fato, suponhamos que $\lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$. Pelos Lemas 5.1 e 5.2 deveríamos ter $v = wu_n^N$, com $w \in H^1(I)$, o que não ocorre. Portanto, $\lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = +\infty = b_n(v)$. Logo, o item (ii) é verificado. □

Proposição 5.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência de formas quadráticas b_n^ε Γ-converge fracamente à b_n, quando $\varepsilon \to 0$.*

Demonstração. A princípio, vamos verificar a condição (i) da definição de Γ-convergência, ou seja, $b_n(v) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} b_n(v_\varepsilon)$, para toda sequência $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em $\mathcal{H}_n$. Assim, assumimos a convergência fraca $v_\varepsilon \rightharpoonup v$. Inicialmente, consideramos o caso em que $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ não pertence a $\mathcal{H}_n \cap H^1(Q)$. Então, $b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = +\infty$, para todo $\varepsilon > 0$, e a estimativa é verificada. Agora, assumimos que $(v_\varepsilon)_\varepsilon \subset \mathcal{H}_n \cap H^1(Q)$. Suponhamos que $v = wu_n^N$, com $w \in H^1(I)$. Por definição $b_n(v) < +\infty$. Se $\liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = +\infty$ a estimativa é verificada. Agora, suponhamos que $\liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) < +\infty.$$

Como na demonstração da proposição anterior,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) &\geq \int_Q |v' + \langle \nabla_y v, Ry\rangle \alpha'(s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &=: b_n(w).\end{aligned}$$

Agora, suponhamos que v não pertença ao subespaço $\{wu_n : w \in H^1(I)\}$. Vamos mostrar que necessariamente $\liminf_{\varepsilon\to 0} b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) = +\infty$. De fato, seja $P_{n+1}^\perp$ a projeção ortogonal sobre $\mathcal{H}_{n+1}$. Temos $\|P_{n+1}^\perp v\| > 0$. Já que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em $\mathcal{H}_n \cap H^1(Q)$, temos $P_{n+1}^\perp v_\varepsilon \rightharpoonup P_{n+1}^\perp v$ e

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \|P_{n+1}^\perp v_\varepsilon\| \geq \|P_{n+1}^\perp v\| > 0. \tag{5.16}$$

Notemos também que

$$b_n^\varepsilon(v_\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_Q \left(|\nabla_y v_\varepsilon|^2 - \lambda_n |v_\varepsilon|^2\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y. \tag{5.17}$$

A estratégia é estimar o termo do lado direito desta desigualdade.

Para $\psi \in H^1(S) \cap [u_1^N, u_2^N, \ldots, u_{n-1}^N]^\perp$, denotamos por ψ^n a componente de ψ em $[u_n^N]$ e por Q_{n+1} a projeção ortogonal sobre $[u_1^N, u_2^N, \ldots, u_n^N]^\perp$ em $H^1(S)$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^2}\int_Q \left(|\nabla_y v_\varepsilon|^2 - \lambda_n |v_\varepsilon|^2\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \Big(\|\nabla_y v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)} - \lambda_n \|v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)}\Big)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \Big(\|v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{H^1(S)} - (\lambda_n+1) \|v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)}\Big)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \Big(\|Q_{n+1} v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{H^1(S)} + \|v^n_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{H^1(S)} \\
&- (\lambda_n+1) \|v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)}\Big)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \Big(\|\nabla_y Q_{n+1} v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)} + \|Q_{n+1} v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)} \\
&+\|\nabla_n v^n_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)} + \|v^n_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)} \\
&- (\lambda_n+1) \|v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)}\Big)\,\mathrm{d}s \\
&\geq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I \Big(\lambda_{n+1}\|Q_{n+1} v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)} + \lambda_n\|v^n_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{H^1(S)} \\
&- \lambda_n \|v_\varepsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2(S)}\Big)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_I (\lambda_{n+1}-\lambda_n)|Q_{n+1}v_\varepsilon|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&= \frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}{\varepsilon^2}\|P^\perp_{n+1} v_\varepsilon\|^2 \\
&\geq \frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}{\varepsilon^2}\|P^\perp_{n+1} v\|^2.
\end{aligned}
$$

Essas desigualdades, (5.16), (5.17) e o fato de que $\lambda_{n+1} > \lambda_n$, implicam que $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} b^\varepsilon_n(v_\varepsilon) = +\infty$.

Finalmente, a condição (ii) da definição de Γ-convergência pode ser comprovada de uma forma semelhante à demonstração da Proposição 5.1. □

Agora temos condições de demonstrar o Teorema 5.1.

Demonstração do Teorema 5.1: (A) Este item segue das Proposições 5.1 e 5.2 acima e da Proposição C.1 do Apêndice C.2.

(B) Temos que verificar os itens $a), b)$, e $c)$ da Proposição C.2 do Apêndice C.2. O item $a)$ segue das Proposições 5.1 e 5.2. Já que o operador T_n tem resolvente compacto, o item $b)$ é satisfeito. Resta mostrar que o item $c)$ é satisfeito. Consideremos o subespaço $\mathcal{K} := \{\mathcal{K}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{K}_{n-1}\}^{\perp}$. Pelo Teorema Rellich-Kondrachov [25], $\mathcal{K}$ pode ser compactamente mergulhado em $\mathcal{H}_n$. Assim, se $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_n$ e $(b_n^\varepsilon(v_\varepsilon))_\varepsilon$ é também limitada, uma demonstração semelhante à do Lema 5.1 mostra que $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ é um subconjunto limitado de $\mathcal{K}$. Logo, o item $c)$ é satisfeito. Pela Proposição C.2 do Apêndice C.2, $(T_n^\varepsilon)_\varepsilon$ converge no sentido da norma dos resolventes a T_n em $\mathcal{L}_n$. Pelo Corolário 2.3 em [21], temos o comportamento assintótico dos autovalores dado por (5.12). $\square$

5.4 Propriedades espectrais no caso em que o tubo é periódico

Nesta seção consideramos a região $\Omega_\varepsilon^\alpha$ no caso particular em que $I = \mathbb{R}$ e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica de classe C^2, ou seja, existe $L > 0$ de forma que, $\alpha(s + L) = \alpha(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Neste contexto, o objetivo desta seção é encontrar informações sobre o espectro do operador $-\Delta_n^\varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, estudamos o espectro absolutamente contínuo $\sigma_{ac}(-\Delta_n^\varepsilon)$ e a existência e localização de lacunas em $\sigma(-\Delta_n^\varepsilon)$.

5.4.1 Resultados preliminares

Devido às características periódicas de $-\Delta_n^\varepsilon$, podemos usar a decomposição de Floquet-Bloch sobre a zona de Brillouin $\mathcal{C} = [-\pi/L, \pi/L]$. Mais precisamente, definimos $Q_L := (0, L) \times S$, $\mathcal{L}_n^L := \{w(s)u_n^N(y) : w \in L^2(0, L)\}$, $n \in \mathbb{N}$, e

$$\mathcal{H}_n^L := \begin{cases} L^2(Q_L), & n = 1 \\ (\mathcal{L}_1^L \oplus \mathcal{L}_2^L \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-1}^L)^{\perp}, & n = 2, 3, \cdots \end{cases}.$$

Considere a família de formas quadráticas atuando em $\mathcal{H}_n^L$:

$$\overline{b}_n^\varepsilon(\theta)(\varphi) = \int_{Q_L} \left(|\varphi' + i\theta\varphi + \langle \nabla_y \varphi, Ry \rangle \alpha'(s)|^2 + \frac{|\nabla_y \varphi|^2}{\varepsilon^2} \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \qquad (5.18)$$

para cada $\theta \in \mathcal{C}$, dom $\overline{b}_n^\varepsilon(\theta) = \{\varphi \in H^1(Q_L) \cap \mathcal{H}_n^L; \varphi(0,\cdot) = \varphi(L,\cdot) \,\mathrm{em}\, L^2(S)\}$. Denotamos por $-\Delta_n^\varepsilon(\theta)$ o operador autoadjunto associado à $\overline{b}_n^\varepsilon(\theta)$.

Lema 5.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{-\Delta_n^\varepsilon(\theta), \theta \in \mathcal{C}\}$ é uma família analítica do tipo (B).*

Demonstração. Primeiramente, observemos que dom $\overline{b}_n^\varepsilon(\theta)$ não depende de θ. Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, escrevemos $\overline{b}_n^\varepsilon(\theta) = \overline{b}_n^\varepsilon(0) + c_n^\varepsilon(\theta)$, em que, para $\varphi \in$ dom $\overline{b}_n^\varepsilon(0)$,

$$\begin{aligned} c_n^\varepsilon(\theta)(\varphi) &:= \overline{b}_n^\varepsilon(\theta)(\varphi) - \overline{b}_n^\varepsilon(0)(\varphi) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(\int_{Q_L} \overline{(\varphi' + \langle \nabla_y \varphi, R_y \rangle \alpha'(s))}(i\theta\varphi)\mathrm{d}s\mathrm{d}y\right) + \theta^2 \int_{Q_L} |\varphi|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Afirmamos que $c_n^\varepsilon(\theta)$ é $\overline{b}_n^\varepsilon(0)$-limitado com índice limite igual zero. De fato, dado $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} |c_n^\varepsilon(\theta)(\varphi)| &\leq 2\int_{Q_L} |\varphi' + \langle \nabla_y \varphi, Ry \rangle \alpha'(s)|\, |i\theta\varphi| \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \theta^2 \int_{Q_L} |\varphi|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &\leq \delta \int_{Q_L} |\varphi' + \langle \nabla_y \varphi, Ry \rangle \alpha'(s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \theta^2(1/\delta + 1) \int_{Q_L} |\varphi|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &\leq \delta\, \overline{b}_n^\varepsilon(0)(\varphi) + (\pi/L)^2 (1/\delta + 1) \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_n^L}, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in$ dom $\overline{b}_n^\varepsilon(0)$, para todo $\theta \in \mathcal{C}$. Desde que $\delta > 0$ é arbitrário, a afirmação é verificada. Pelo Teorema 1.6 do Capítulo 1, $\{\overline{b}_n^\varepsilon(\theta) : \theta \in \mathcal{C}\}$ é uma família analítica do tipo (a). Consequentemente, $\{-\Delta_n^\varepsilon(\theta), \theta \in \mathcal{C}\}$ é uma família analítica do tipo (B). □

Lema 5.4. *Existe um operador unitário $\mathcal{U}_n : \mathcal{H}_n \to \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} \mathcal{H}_n^L \,\mathrm{d}\theta$ de forma que,*

$$\mathcal{U}_n(-\Delta_n^\varepsilon)\mathcal{U}_n^{-1} = \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} -\Delta_n^\varepsilon(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Demonstração. Para $(\theta, s, y) \in \mathcal{C} \times Q_L$, definimos

$$(\mathcal{U}_n f)(\theta, s, y) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{-ikL\theta - i\theta s} f(s + Lk, y), \quad \mathrm{dom}\, \mathcal{U}_n = \mathcal{H}_n,$$

o qual é um operador bijetivo em $\int_{\mathcal{C}}^{\oplus} \mathcal{H}_n^L \, \mathrm{d}\theta$; a definição de $\mathcal{U}_n$ é baseada em [3, 30] (veja também a demonstração do Lema 3.2).

Recordemos a forma quadrática $\overline{b}_n^{\varepsilon}$; veja (5.7) na Seção 5.2. Definimos

$$q_n^{\varepsilon}(\varphi) := \overline{b}_n^{\varepsilon}(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi), \qquad \operatorname{dom} q_n^{\varepsilon} := \mathcal{U}_n(\operatorname{dom} \overline{b}_n^{\varepsilon}).$$

Observe que q_n^{ε} é uma forma quadrática fechada e limitada inferiormente no espaço de Hilbert $\int_{\mathcal{C}}^{\oplus} \mathcal{H}_n^L \, \mathrm{d}\theta$ e $\mathcal{U}_n(-\Delta_n^{\varepsilon})\mathcal{U}_n^{-1}$ é o seu operador autoadjunto associado.

Para $(s,y) \in Q_L$ e $k \in \mathbb{Z}$,

$$(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi)(s+Lk,y) = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{ikL\theta+is\theta} \varphi(\theta,s,y) \, \mathrm{d}\theta,$$

$$(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi)'(s+Lk,y) = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{ikL\theta+is\theta} (\varphi'(\theta,s,y) + i\theta\varphi(\theta,s,y)) \, \mathrm{d}\theta,$$

e

$$\nabla_y(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi)(s+Lk,y) = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{ikL\theta+is\theta} \nabla_y\varphi(\theta,s,y) \, \mathrm{d}\theta.$$

Já que α' é uma função periódica, pela Identidade de Parseval, e pelo Teorema de Fubini, temos

$$
\begin{aligned}
& q_n^\varepsilon(\varphi) = \overline{b}_n^\varepsilon(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi) \\
= \;& \int_Q \left(\left|(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi)' + \langle \nabla_y(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi), Ry\rangle \alpha'(s)\right|^2 + \frac{|\nabla_y(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi)|^2}{\varepsilon^2}\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
= \;& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{Q_L} \left|(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi)'(s+Lk,y) + \langle \nabla_y(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi)(s+Lk,y), Ry\rangle \alpha'(s)\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
+ \;& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{Q_L} \frac{1}{\varepsilon^2} \left|\nabla_y(\mathcal{U}_n^{-1}\varphi)(s+Lk,y)\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
= \;& \int_{Q_L} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathcal{C}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{ikL\theta + is\theta} (\varphi'(\theta,s,y) + i\theta\varphi(\theta,s,y) + \langle \nabla_y\varphi(\theta,s,y), Ry\rangle\alpha'(s))\mathrm{d}\theta \right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
+ \;& \int_{Q_L} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\varepsilon^2} \left| \int_{\mathcal{C}} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} e^{ikL\theta+is\theta} \nabla_y\varphi(\theta,s,y)\mathrm{d}\theta \right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
= \;& \int_{Q_L} \left(\int_{\mathcal{C}} |(\varphi'(\theta,s,y) + i\theta\varphi(\theta,s,y) + \langle \nabla_y\varphi(\theta,s,y), Ry\rangle\alpha'(s))|^2 \,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
+ \;& \int_{Q_L} \left(\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla_y\varphi(\theta,s,y)d\theta|^2 \,\mathrm{d}\,\theta \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
= \;& \int_{\mathcal{C}} \left(\int_{Q_L} |(\varphi'(\theta,s,y) + i\theta\varphi(\theta,s,y) + \langle \nabla_y\varphi(\theta,s,y), Ry\rangle\alpha'(s))|^2 \,\mathrm{d}s\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\theta \\
+ \;& \int_{\mathcal{C}} \left(\int_{Q_L} \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla_y\varphi(\theta,s,y)d\theta|^2 \,\mathrm{d}s\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\theta \\
=: \;& \int_{\mathcal{C}} \overline{b}_n^\varepsilon(\theta)(\varphi(\theta))\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Então, $\varphi \in \mathrm{dom}\; q_n^\varepsilon$ se, e somente se, $\varphi(\theta) \in \mathrm{dom}\; \overline{b}_n^\varepsilon(\theta)$, q.t.p. θ, e $\varphi \in \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} \mathcal{H}_n^L \mathrm{d}\theta$.

Agora, consideremos o operador autoadjunto

$$
Q_n^\varepsilon := \int_{\mathcal{C}}^{\oplus} -\Delta_n^\varepsilon(\theta)\, d\theta,
$$

em que

$$
\mathrm{dom}\; Q_n^\varepsilon := \{\varphi : \varphi(\theta) \in \mathrm{dom}\; (-\Delta_n^\varepsilon(\theta)), \text{q.t.p.}\, \theta, \int_{\mathcal{C}} \|-\Delta_n^\varepsilon(\theta)\varphi(\theta)\|^2_{\mathcal{H}_n^L} \mathrm{d}\theta < +\infty\}.
$$

Para cada $\varphi \in \mathrm{dom}\; q_n^\varepsilon$ e para cada $\eta \in \mathrm{dom}\; Q_n^\varepsilon$, pela identidade de polarização, temos

$$\begin{aligned} q_n^\varepsilon(\varphi,\eta) &= \int_{\mathcal{C}} \overline{b}_n^\varepsilon(\theta)\,(\varphi(\theta),\eta(\theta))\;d\theta. \\ &= \int_{\mathcal{C}} \langle \varphi(\theta), -\Delta_n^\varepsilon(\theta)\eta(\theta)\rangle_{\mathcal{H}_n^L}\,d\theta. \\ &= \int_{\mathcal{C}} \langle \varphi(\theta), (Q_n^\varepsilon\eta)(\theta)\rangle_{\mathcal{H}_n^L}\,d\theta. \\ &= \langle \varphi, Q_n^\varepsilon \eta\rangle\,. \end{aligned}$$

Portanto, Q_n^ε é o operador autoadjunto associado à q_n^ε e, por unicidade, $Q_n^\varepsilon = \mathcal{U}_n(-\Delta_n^\varepsilon)\mathcal{U}_n^{-1}$. □

5.4.2 Comportamento assintótico dos autovalores de $-\Delta_n^\varepsilon(\theta)$ quando $\varepsilon \to 0$

Desde que $-\Delta_n^\varepsilon(\theta)$ tem resolvente compacto e é limitado inferiormente, seu espectro é discreto. Denotamos por $E_{n,j}(\varepsilon,\theta)$ o j-ésimo autovalor de $-\Delta_n^\varepsilon(\theta)$, contando com a sua multiplicidade, e por $\psi_{n,j}(\varepsilon,\theta)$ a correspondente autofunção normalizada, ou seja,

$$-\Delta_n^\varepsilon(\theta)\psi_{n,j}(\varepsilon,\theta) = E_{n,j}(\varepsilon,\theta)\psi_{n,j}(\varepsilon,\theta), \quad j = 1,2,3,\cdots, \quad \theta \in \mathcal{C}.$$

Além disso, podemos organizar os autovalores de forma que

$$E_{n,1}(\varepsilon,\theta) \leq E_{n,2}(\varepsilon,\theta) \leq \cdots \leq E_{n,j}(\varepsilon,\theta) \leq \cdots, \quad \theta \in \mathcal{C},$$

$$\sigma(-\Delta_n^\varepsilon) = \cup_{j=1}^\infty \{E_{n,j}(\varepsilon,\mathcal{C})\}, \quad \text{em que} \quad E_{n,j}(\varepsilon,\mathcal{C}) := \{E_{n,j}(\varepsilon,\theta) : \theta \in \mathcal{C}\};$$

cada $E_{n,j}(\varepsilon,\mathcal{C})$ é chamado de j-ésima banda de $\sigma(-\Delta_n^\varepsilon)$.

O Lema 5.3 garante que as funções $E_{n,j}(\varepsilon,\theta)$ são funções contínuas em $\mathcal{C}$ e analíticas por partes em $\mathcal{C}$; consequentemente, cada $E_{n,j}(\varepsilon,\mathcal{C})$ ou é um intervalo fechado ou um conjunto formado por apenas um elemento.

O objetivo desta seção é encontrar um comportamento assintótico para os autovalores $E_{n,j}(\varepsilon,\theta)$, quando $\varepsilon \to 0$.

Com base na discussão da Seção 5.2, começamos a estudar a sequência

$$b_n^\varepsilon(\theta)(\psi) := \overline{b}_n^\varepsilon(\theta)(\psi) - \frac{\lambda_n}{\varepsilon^2}\|\psi\|^2_{\mathcal{H}_n^L}, \tag{5.19}$$

dom $b_n^\varepsilon(\theta) :=$ dom $\overline{b}_n^\varepsilon(\theta)$. O operador autoadjunto associado à $b_n^\varepsilon(\theta)$ é $T_n^\varepsilon(\theta) := -\Delta_n^\varepsilon(\theta) - (\lambda_n/\varepsilon^2)\mathbf{1}$.

Definimos a forma quadrática unidimensional

$$\begin{aligned} b_n(\theta)(w) &:= b_n^\varepsilon(\theta)(wu_n^N) \\ &= \int_{Q_L} |w'(s)u_n^N(y) + i\theta w(s)u_n^N(y) + \langle \nabla_y u_n^N, Ry\rangle \alpha'(s)w(s)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

dom $b_n(\theta) := \{w \in H^1(0,L) : w(0) = w(L)\}$. Denotamos por $T_n(\theta)$ seu operador autoadjunto associado. De fato,

$$T_n(\theta)w := (-i\partial_s + \theta)^2 w + V_n w,$$

dom $T_n(\theta) = \{w \in H^2(0,L) : w(0) = w(L), w'(0) = w'(L)\}$, em que V_n é definido por (5.9) na Seção 5.2.

Denotamos por $k_{n,j}(\theta)$ o j-ésimo autovalor de $T_n(\theta)$ contando com a sua multiplicidade. Com estas notações temos o seguinte teorema:

Teorema 5.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\theta \in \mathcal{C}$ fixado, a sequência de operadores autoadjuntos $T_n^\varepsilon(\theta)$ converge no sentido uniforme dos resolventes a $T_n(\theta)$ em $\mathcal{L}_n^L$, quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, para $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathcal{C}$ fixado, temos*

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(E_{n,j}(\varepsilon,\theta) - \frac{\lambda_n^N}{\varepsilon^2}\right) = k_{n,j}(\theta).$$

A demonstração do Teorema 5.2 é semelhante à demonstração do Teorema 5.1 e por este motivo será omitida aqui.

Como consequência do Teorema 5.2, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $j \in \mathbb{N}$, temos*

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(E_{n,j}(\varepsilon,\theta) - \frac{\lambda_n^N}{\varepsilon^2}\right) = k_{n,j}(\theta), \tag{5.20}$$

uniformemente em $\theta \in \mathcal{C}$.

Demonstração. O Teorema 5.2 e o Corolário 2.3 de [21] implicam que (5.20) vale para cada $j \in \mathbb{N}$ e cada $\theta \in \mathcal{C}$. Por outro lado, se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, então $b_n^{\varepsilon_2}(\theta)(\psi) \leq b_n^{\varepsilon_1}(\theta)(\psi)$, para todo $\psi \in \operatorname{dom} b_n^{\varepsilon}(\theta)$ e para todo $\theta \in \mathcal{C}$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ e cada $\theta \in \mathcal{C}$, a sequência $(E_{n,j}(\varepsilon,\theta) - \lambda_n^N/\varepsilon^2)$ é decrescente em ε. Agora, o resultado segue pelo Teorema de Dini. □

5.4.3 Espectro absolutamente contínuo do operador $-\Delta_n^{\varepsilon}$

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 5.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $E > 0$, existe $\varepsilon_E > 0$ de forma que o espectro de $-\Delta_n^{\varepsilon}$ é puramente absolutamente contínuo no intervalo $[0, E + \lambda_n^N/\varepsilon^2]$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$.*

A demonstração do Terema 5.3 é uma consequência dos resultados apresentados nas Seções 5.4.1 e 5.4.2.

Demonstração do Teorema 5.3: Dado $E > 0$, sem perda de generalidade, podemos supor que, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, o espectro de $-\Delta_n^{\varepsilon}(\theta)$ abaixo de $E + \lambda_n/\varepsilon^2$ consiste exatamente de j_0 autovalores $\{E_{n,j}(\varepsilon,\theta)\}_{j=1}^{j_0}$. O Lema 5.3 garante que $E_{n,j}(\varepsilon,\theta)$ e $\psi_{n,j}(\varepsilon,\theta)$ são funções contínuas e analíticas por partes em $\mathcal{C}$.

O Teorema 1.11 da Seção 1.4 garante que as funções $k_{n,j}(\theta)$ são estritamente monótonas em $(-\pi/L, 0)$ e em $(0, \pi/L)$, respectivamente. Pelo Corolário 5.1, existem $\varepsilon_E > 0$ e $K(\varepsilon) > 0$ de forma que, $|E_{n,j}(\varepsilon,\theta) - (\lambda_n^N/\varepsilon^2) - \kappa_{n,j}(\theta)| < K(\varepsilon)$, para todo $\theta \in \mathcal{C}$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$, para todo $j = 1, 2, \cdots, j_0$, e $K(\varepsilon) \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Consequentemente a função $E_{n,j}(\varepsilon,\theta)$ não é constante em cada intervalo em que é analítica, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_E)$ e $j = 1, 2, \cdots, j_0$. Observamos que $\varepsilon_E > 0$ depende de j_0, ou seja, a espessura do tubo depende do comprimento das energias a serem cobertas. Agora, pela Seção 1.4, segue a conclusão do teorema. □

5.4.4 Existência de lacunas

Lembremos que $\sigma(-\Delta_n^\varepsilon) = \cup_{j=1}^{\infty}\{E_{n,j}(\varepsilon,\mathcal{C})\}$, ou seja, o espectro de $-\Delta_n^\varepsilon$ é uma união de bandas. Sendo assim, é natural estudar a existência de lacunas em sua estrutura. Nesta seção tratamos deste assunto. Mais precisamente demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 5.4. *Suponha que $V_n(s)$ não seja uma função constante. Para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, existe $j \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon_j > 0$, de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j)$, o espectro do operador $-\Delta_n^\varepsilon$ tem pelo menos uma lacuna.*

Considere o operador unidimensional

$$\tilde{T}_n w := -w'' + V_n w, \quad \text{dom}\, \tilde{T}_n = H^2(\mathbb{R}). \tag{5.21}$$

Denotamos por $k_{n,j}(\theta)$ o j-ésimo autovalor (contando com a sua multiplicidade) do operador $T_n(\theta)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $k_{n,j}(\theta)$ é função analítica em $(0, \pi/L)$ e contínua em $\theta = 0$ e $\theta = \pi/L$. Pelo Teorema 1.11 da Seção 1.5, temos as seguintes propriedades:

(a) $k_{n,j}(\theta) = k_{n,j}(-\theta)$ para todo $\theta \in \mathcal{C}$, $j = 1, 2, 3, \cdots$.

(b) Para j ímpar (respectivamente, par), $k_{n,j}(\theta)$ é estritamente crescente (respectivamente, decrescente) quando θ está entre 0 e π/L. Em particular,

$$k_{n,1}(0) < k_{n,1}(\pi/L) \leq k_{n,2}(\pi/L) < k_{n,2}(0) \leq \cdots \leq k_{n,2j-1}(0) < k_{n,2j-1}(\pi/L)$$

$$\leq k_{n,2j}(\pi/L) < k_{n,2j}(0) \leq \cdots .$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, definimos

$$B_{n,j} := \begin{cases} [k_{n,j}(0), k_{n,j}(\pi/L)], & \text{para } j \text{ ímpar}, \\ [k_{n,j}(\pi/L), k_{n,j}(0)]\,, & \text{para } j \text{ par}, \end{cases}$$

e

$$G_{n,j} := \begin{cases} (k_{n,j}(\pi/L), k_{n,j+1}(\pi/L)), & \begin{array}{c}\text{para } j \text{ ímpar tal que,} \\ k_{n,j}(\pi/L) \neq k_{n,j+1}(\pi/L),\end{array} \\ (k_{n,j}(0), k_{n,j+1}(0)), & \begin{array}{c}\text{para } j \text{ par tal que,} \\ k_{n,j}(0) \neq k_{n,j+1}(0),\end{array} \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, pelo Teorema XIII.90 em [30], temos $\sigma(\tilde{T}_n) = \cup_{j=1}^{\infty} B_{n,j}$, em que $B_{n,j}$ é chamado de j-ésima banda de $\sigma(\tilde{T}_n)$, e $G_{n,j}$ é um gap de $\sigma(\tilde{T}_n)$ se $G_{n,j} \neq \emptyset$.

Pelo pelo argumento exposto na demonstração do Corolário 5.1, desde que $E_{n,j}(\varepsilon, \theta)$ é uma sequência decrescente em ε, para cada $j \in \mathbb{N}$ e para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\max_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n,j}(\varepsilon, \theta) \leq \begin{cases} \lambda_n^N/\varepsilon^2 + k_{n,j}(\pi/L), & \text{para } j \text{ ímpar,} \\ \lambda_n^N/\varepsilon^2 + k_{n,j}(0), & \text{para } j \text{ par} \end{cases}.$$

Se $G_{n,j} \neq \emptyset$, novamente pelo Corolário 5.1, existe $\varepsilon_j > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j)$,

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n,j+1}(\varepsilon, \theta) \geq \begin{cases} \lambda_n^N/\varepsilon^2 + k_{n,j+1}(\pi/L) - |G_{n,j}|/2, & \text{para } j \text{ ímpar,} \\ \lambda_n^N/\varepsilon^2 + k_{n,j+1}(0) - |G_{n,j}|/2, & \text{para } j \text{ par,} \end{cases}$$

em que $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue. Assim, temos

Corolário 5.2. *Se $G_{n,j} \neq \emptyset$, existe $\varepsilon_j > 0$ de forma que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j)$,*

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n,j+1}(\varepsilon, \theta) - \max_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n,j}(\varepsilon, \theta) \geq \frac{1}{2}|G_{n,j}|.$$

Com este resultado estamos prontos para demonstrar o Teorema 5.4.

Demonstração do Teorema 5.4: Considere $W(s) = V_n(s)$ no Teorema de Borg. O operador $T_n(0)$ (respectivamente, $T_n(\pi/L)$) é unitariamente equivalente ao operador T^+ (resp. T^-) da Seção A.1 do Apêndice A; de fato, basta considerar o operador unitário $(u_\theta w)(s) := e^{-i\theta s}w(s)$ em que $\theta = 0$ (respectivamente, $\theta = \pi/L$). Lembre-se que $\{k_{n,j}(0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ (respectivamente. $\{k_{n,j}(\pi/L)\}_{j\in\mathbb{N}}$) são os autovalores de $T_n(0)$ (respectivamente, de $T_n(\pi/L)$).

Desde que $V_n(s)$ não é uma função constante em $[0, L]$, pelo Teorema de Borg, sem perda de generalidade, podemos afirmar que exite $j \in \mathbb{N}$ de forma que $k_{n,j}(0) \neq k_{n,j+1}(0)$. Agora, a afirmação do Teorema 5.4 se segue Corolário 5.2. $\square$

5.4.5 Localização de lacunas

Nesta seção, vamos encontrar a localização no $\sigma(-\Delta_n^\varepsilon)$ em que o Teorema 5.4 vale. Para este propósito, usamos a escala

$$\alpha \mapsto \gamma\alpha, \tag{5.22}$$

em que $\gamma > 0$ é uma parâmetro suficientemente pequeno. Assim, obtemos o tubo $\Omega_{\varepsilon,\gamma}^\alpha := \Omega_\varepsilon^{\gamma\alpha}$. Consideremos $-\Delta_{\Omega_{\varepsilon,\gamma}^\alpha}^N$ em vez de $-\Delta_{\Omega_\varepsilon^\alpha}^N$ na Seção 5.2. Denotamos por $\overline{b}_n^{\varepsilon,\gamma}$ e $\overline{b}_n^{\varepsilon,\gamma}(\theta)$ as formas quadráticas obtidas substituindo (5.22) em (5.7) e (5.18), respectivamente. Os operadores autoadjuntos associados à estas formas quadráticas são denotados por $-\Delta_n^{\varepsilon,\gamma}$ e $-\Delta_n^{\varepsilon,\gamma}(\theta)$, respectivamente. Denotamos por $E_{n,j}(\gamma, \varepsilon, \theta)$ o j-ésimo autovalor de $-\Delta_n^{\varepsilon,\gamma}(\theta)$, contando com a sua multiplicidade.

Definimos

$$W_n(s) := C_n^1(S)(\alpha')^2(s)$$

e escrevemos esta função como uma série de Fourier, ou seja,

$$W_n(s) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{L}} w_n^j e^{2\pi jis/L} \quad \text{em} \quad L^2(0, L).$$

A sequência $\{w_n^j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ são os coeficientes de Fourier de W_n. Sendo W_n uma função real, $w_n^j = \overline{w_n^{-j}}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Temos

Teorema 5.5. *Suponha que $V_n(s)$ não seja uma função constante e que $W_n(s)$ seja não nula. Seja $j \in \mathbb{N}$ de forma que, $w_n^j \neq 0$. Então, existem $\gamma > 0$ suficientemente pequeno, $\varepsilon_{n,j+1} > 0$ e $C_{n,j}(\gamma) > 0$, de forma que para todo*

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n,j+1})$,

$$\min_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n,j+1}(\gamma, \varepsilon, \theta) - \max_{\theta \in \mathcal{C}} E_{n,j}(\gamma, \varepsilon, \theta) \geq C_{n,j}(\gamma).$$

Para demonstrar o Teorema 5.5 usaremos uma estratégia adotada em [34]. Apresentamos aqui apenas os passos mais importantes; para uma explicação mais detalhada veja Apêndice A.2. No entanto, nosso problema requer alguns ajustes os quais são explicados nos próximos parágrafos.

Problema auxiliar. Para cada $\gamma > 0$ e $\theta \in \mathcal{C}$, considere a forma quadrática unidimensional

$$s_n^\gamma(\theta)(w) := \int_0^L \left(|w' + i\theta w|^2 + \gamma^2 W_n(s)|w|^2 \right) \mathrm{d}s,$$

dom $s_n^\gamma(\theta) := \{w \in H^1(0, L) : w(0) = w(L)\}$. O operador autoadjunto associado à $s_n^\gamma(\theta)$ é dado por

$$S_n^\gamma(\theta)w := (-i\partial_s + \theta)^2 w + \gamma^2 W_n(s)w,$$

dom $S_n^\gamma(\theta) := \{w \in H^2(0, L) : w(0) = w(L), w'(0) = w'(L)\}$. Denotamos por $\nu_{n,j}(\gamma, \theta)$ o j-ésimo autovalor de $S_n^\gamma(\theta)$ contando com a sua multiplicidade.

Agora, consideremos

$$b_n^\gamma(\theta)(w) := b_n^{\varepsilon,\gamma}(\theta)(wu_n) = \int_0^L \left(|w' + i\theta w|^2 + V_n^\gamma(s)|w|^2 \right) \mathrm{d}s,$$

dom $b_n^\gamma(\theta) := \{w \in H^1(0, L) : w(0) = w(L)\}$, em que $V_n^\gamma(s) := \gamma^2 W_n(s) - \gamma C_n^2(S)\alpha''(s)$. O operador autoadjunto associado à $b_n^\gamma(\theta)$ é

$$T_n^\gamma(\theta)w := (-i\partial_s + \theta)^2 w + V_n^\gamma(s)w,$$

dom $T_n^\gamma(\theta) := \{w \in H^2(0, L) : w(0) = w(L), w'(0) = w'(L)\}$. Denotamos por $k_{n,j}(\gamma, \theta)$ o j-ésimo autovalor de $T_n^\gamma(\theta)$ contando com a sua multiplicidade.

Seja $c > \max\{\|V_n\|_\infty, \|W_n\|_\infty\}$. Alguns cálculos mostram que existe $K > 0$

de forma que,

$$|\,(b_n^\gamma(\theta)+c)\,(w)-(s_n^\gamma(\theta)+c)\,(w)|\leq K\,\gamma\,|\,(b_n^\gamma(\theta)+c)\,(w)|, \tag{5.23}$$

para todo $w\in\operatorname{dom} b_n^\gamma(\theta)$, para todo $\theta\in\mathcal{C}$, e $\gamma>0$ suficientemente pequeno.

A estimativa (5.23), o Teorema 2 em [2], e o Corolário 2.3 em [21] implicam o seguinte resultado:

Corolário 5.3. *Para cada $j\in\mathbb{N}$, existe $\gamma_j>0$ de forma que, para todo $\gamma\in(0,\gamma_j)$,*

$$k_{n,j}(\gamma,\theta)=\nu_{n,j}(\gamma,\theta)+O(\gamma),$$

uniformemente em $\mathcal{C}$.

Algumas estimativas. I. Definimos

$$G_{n,j}(\gamma):=\begin{cases}(k_{n,j}(\gamma,\pi/L),k_{n,j+1}(\gamma,\pi/L)), & \begin{array}{c}\text{para } j \text{ ímpar tal que,}\\ k_{n,j}(\gamma,\pi/L)\neq k_{n,j+1}(\gamma,\pi/L),\end{array}\\ (k_{n,j}(\gamma,0),k_{n,j+1}(\gamma,0)), & \begin{array}{c}\text{para } j \text{ par tal que,}\\ k_{n,j}(\gamma,0)\neq k_{n,j+1}(\gamma,0),\end{array}\\ \emptyset, & \text{caso contrário.}\end{cases}.$$

Se $G_{n,j}(\gamma)\neq\emptyset$, $G_{n,j}(\gamma)$ é chamado de um gap no espectro $\sigma(T_n^\gamma)$, em que

$$T_n^\gamma w:=-w''+V_n^\gamma(s)w,\quad \operatorname{dom} T_n^\gamma=H^2(\mathbb{R}).$$

De forma similar às considerações da Seção 5.4.4 e Corolário 5.2, temos:

Corolário 5.4. *Se $G_{n,j}(\gamma)\neq\emptyset$, existe $\gamma_j>0$ e $\varepsilon_j>0$ de forma que, para todo $\gamma\in(0,\gamma_j)$ e para todo $\varepsilon\in(0,\varepsilon_j)$,*

$$\min_{\theta\in\mathcal{C}}E_{n,j+1}(\gamma,\varepsilon,\theta)-\max_{\theta\in\mathcal{C}}E_{n,j}(\gamma,\varepsilon,\theta)\geq\frac{1}{2}|G_{n,j}(\gamma)|. \tag{5.24}$$

II. Agora, considere

$$\tilde{G}_{n,j}(\gamma) := \begin{cases} (\nu_{n,j}(\gamma,\pi/L), \nu_{n,j+1}(\gamma,\pi/L)), & \begin{array}{c}\text{para } j \text{ ímpar tal que,}\\ \nu_{n,j}(\gamma,\pi/L) \neq \nu_{n,j+1}(\gamma,\pi/L),\end{array} \\ (\nu_{n,j}(\gamma,0), \nu_{n,j+1}(\gamma,0)), & \begin{array}{c}\text{para } j \text{ par tal que,}\\ \nu_{n,j}(\gamma,0) \neq \nu_{n,j+1}(\gamma,0),\end{array} \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $\tilde{G}_{n,j}(\gamma) \neq \emptyset$, $\tilde{G}_{n,j}(\gamma)$ é chamado de um gap no espectro $\sigma(S_n^\gamma)$, em que

$$S_n^\gamma w := -w'' + \gamma^2 W_n(s) w, \quad \text{dom } S_n^\gamma = H^2(\mathbb{R}).$$

Como na demonstração do Teorema 5.4, consideramos o operador unitário $(u_\theta w)(s) = e^{-i\theta s} w(s)$. Definimos os operadores autoadjuntos $\tilde{S}_n^\gamma(0) := u_0 S_n^\gamma(0) u_0^{-1}$ e $\tilde{S}_n^\gamma(\pi/L) := u_{\pi/L} S_n^\gamma(\pi/L) u_{\pi/L}^{-1}$, cujos autovalores são dados por $\{\nu_{n,j}(\gamma,0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{\nu_{n,j}(\gamma,\pi/L)\}_{j\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Além disso, os domínios destes operadores são dados por (A.2) e (A.3) no Apêndice A.2, respectivamente. Assim, podemos observar que $|\tilde{G}_{n,j}(\gamma)| = \delta_j(\gamma^2)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, se considerarmos $\mu = \gamma^2$ e $W(s) = W_n(s)$ no Teorema A.3 do Apêndice B.

Com as notas dos parágrafos anteriores, temos condições para demonstrar o teorema principal desta seção.

Demonstração do Teorema 5.5: Lembre-se que denotamos por $\{w_n^j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ os coeficientes de Fourier de W_n. Desde que W_n não é uma função constante, existe $j \in \mathbb{N}$ de forma que $w_n^j \neq 0$. Pelo Teorema A.3,

$$|\tilde{G}_{n,j}(\gamma)| = \frac{2}{\sqrt{L}} \gamma^2 |w_n^j| + O(\gamma^4), \quad \gamma \to 0.$$

Esta estimativa junto com o Corolário 5.3 implicam que $|G_{n,j}(\gamma)| > 0$, para todo $\gamma > 0$ suficientemente pequeno. Pelo Corolário 5.4, considerando $C_{n,j}(\gamma) := |G_{n,j}(\gamma)|/2 > 0$ temos o resultado do teorema. □

Observação 5.1. Já que assumimos que $V_n(s)$ não é uma função nula, se $W_n(s) = 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, podemos considerar $\tilde{W}_n(s) := C_n^2(S)\alpha''(s)$ em vez de $W_n(s)$ nesta seção. Todos os resultados apresentados acima valem neste caso; as demonstrações são muito semelhantes e não serão apresentadas aqui.

Apêndice A

Neste apêndice, reunimos os principais resultados que usamos ao longo do texto relacionados à existência e localização de lacunas no espectro dos operadores estudados.

A.1 Teorema de Borg

O teorema abaixo é devido à Borg [4]. Com ele, é possível garantir a existência de lacunas no espectro de determinados operadores lineares. Veja, por exemplo Teorema 3.4 deste trabalho.

Teorema A.1. *(Borg) Suponha que W seja uma função real e contínua por partes em $[0, L]$. Seja $\lambda_n^{\pm}$ o n-ésimo autovalor, contando com a sua multiplicidade, do operador dado, respectivamente, por*

$$T^{\pm} := -\frac{d^2}{ds^2} + W(s), \quad \textit{em} \quad L^2(0, L),$$

com domínio

$$\operatorname{dom} T^{\pm} := \{w \in H^2(0, L); w(0) = \pm w(L), w'(0) = \pm w'(L)\}. \tag{A.1}$$

Suponha que

$$\lambda_n^+ = \lambda_{n+1}^+, \quad \textit{para todo } n \textit{ par},$$

e

$$\lambda_n^- = \lambda_{n+1}^-, \quad \textit{para todo } n \textit{ ímpar}.$$

Então, W é constante em $[0, L]$.

A.2 Comportamento assintótico dos autovalores de uma pertubação analítica

Garantida a existência de uma lacuna, o próximo passo é tentar descobrir a sua localização. Para isso serão necessários algumas definições e resultados preliminares.

Seja $W \in L^2(0, L)$ uma função real. Definimos os operadores

$$T_0^+ w := -w'', \quad \text{em} \quad L^2(0, L),$$

com domínio

$$\text{dom } T_0^+ := \{w \in H^2(0, L) : w(0) = w(L), w'(0) = w'(L)\}, \tag{A.2}$$

e

$$T_0^- w := -w'', \quad \text{em} \quad L^2(0, L),$$

com domínio

$$\text{dom } T_0^- := \{w \in H^2(0, L) : w(0) = -w(L), w'(0) = -w'(L)\}. \tag{A.3}$$

Para cada $\mu \in \mathbb{C}$, consideremos os operadores

$$\begin{aligned} T^+(\mu)w &:= T_0^+ w + \mu W(s)w \\ &= -w'' + \mu W(s)w, \end{aligned} \tag{A.4}$$

em que dom $T^+(\mu) :=$ dom T_0^+ e

$$\begin{aligned} T^-(\mu)w &:= T_0^- w + \mu W(s)w \\ &= -w'' + \mu W(s)w, \end{aligned} \tag{A.5}$$

em que dom $T^-(\mu) :=$ dom T_0^-.

Dizemos que T_0^+ e T_0^- são operadores não perturbados e μW é uma pertubação. Para $\mu \in \mathbb{R}$, denotamos por $\{l_n^+(\mu)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{l_n^-(\mu)\}_{n\in\mathbb{N}}$ os autovalores de $T^+(\mu)$ e $T^-(\mu)$, contando com as suas multiplicidades, respectivamente. Abaixo descrevemos os autovalores e autofunções dos operadores não perturbados T_0^+ e T_0^-.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos as funções

$$\psi_0(s) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \psi_{n,1}(s) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i2\pi ns}{L}}, \quad \psi_{n,2}(s) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{i2\pi ns}{L}}. \tag{A.6}$$

Tem-se que $\{\psi_0, \psi_{n,1}, \psi_{n,2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal completa de $L^2(0, L)$ e ainda

$$T_0^+\psi_0 = 0, \quad T_0^+\psi_{n,1} = \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \psi_{n,1}, \quad T_0^+\psi_{n,2}(s) = \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \psi_{n,2}, \tag{A.7}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, temos

$$l_0^+(0) = 0, \quad l_{2n}^+(0) = l_{2n+1}^+(0) = \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A.8}$$

Em seguida, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos

$$\varphi_{n,1}(s) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(n-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{L}s}, \quad \varphi_{n,2}(s) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i(n-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{L}s}. \tag{A.9}$$

Então, $\{\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal completa de $L^2(0, L)$ e

$$T_0^-\varphi_{n,1} = \frac{4\pi^2}{L^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \varphi_{n,1}, \quad T_0^-\varphi_{n,2}(s) = \frac{4\pi^2}{L^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \varphi_{n,2}, \tag{A.10}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$l_{2n}^-(0) = l_{2n+1}^-(0) = \frac{4\pi^2}{L^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A.11}$$

Para cada $\mu \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\delta_n^+(\mu) := l_{2n+1}^+(\mu) - l_{2n}^+(\mu) \tag{A.12}$$

e

$$\delta_n^-(\mu) := l_{2n}^-(\mu) - l_{2n-1}^-(\mu). \tag{A.13}$$

Finalmente definimos

$$\delta_{2n-1}(\mu) := \delta_n^-(\mu) \quad \text{e} \quad \delta_{2n}(\mu) := \delta_n^+(\mu).$$

Vamos analisar o comportamento assintótico de $\delta_n(\mu)$ quando $\mu \to 0$. Para isso, enunciamos um teorema sobre pertubação analítica devido à Kato e Rellich. Tal teorema é reescrito adequadamente para a nossa situação (veja Capítulo VII e Teorema 2.6 no Capítulo XIII em [23]).

Teorema A.2. *(Kato e Rellich) Seja T_0 um operator autoadjunto num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponha que E_0 é um autovalor de T_0 com multiplicidade m e que existe $\varepsilon > 0$ de forma que, $\sigma(T_0) \cap (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon) = \{E_0\}$. Seja $\{\Phi_1, \cdots \Phi_m\}$ um sistema ortonormal de autovetores de T_0 associados ao autovalor E_0:*

$$\Phi_j \in \operatorname{dom} T_0, \quad T_0\Phi_j = E_0\Phi_j, \quad \textit{para } 1 \leq j \leq m,$$

$$(\Phi_i, \Phi_j)_{\mathcal{H}} = \delta_{ij} \quad \textit{para } 1 \leq i, j \leq m.$$

Seja V um operator simétrico e T_0-limitado. Para $\mu \in \mathbb{C}$, definimos

$$T(\mu) := T_0 + \mu V \quad \textit{atuando em } \mathcal{H} \textit{ com domínio } \operatorname{dom} T(\mu) = \operatorname{dom} T_0.$$

Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ todos os autovalores da matriz $((V\Phi_i, \Phi_j)_{\mathcal{H}})_{1 \leq i,j \leq m}$ contados com a sua multiplicidade. Então, existem m funções analíticas $\lambda_1(\mu), \cdots, \lambda_m(\mu)$ em $\mu \in \mathbb{C}$ numa vizinhança de 0, de forma que, $\lambda_1(\mu), \cdots, \lambda_m(\mu)$ são todos os autovalores de $T(\mu)$, contados com a sua multiplicidade, em $\{E \in \mathbb{C} : |E - E_0| <$

$\varepsilon/2\}$, para $\mu \in \mathbb{C}$ numa vizinhança de 0. Ainda mais,

$$\lambda_j(\mu) = E_0 + \lambda_j \mu + O(\mu^2), \quad \mu \to 0, \tag{A.14}$$

para $1 \leq j \leq m$.

Como uma consequência deste teorema, no caso particular em que $m = 2$ temos o seguinte resultado.

Corolário A.1. *Seja $m = 2$ no enunciado do teorema acima. Então, temos*

$$(\lambda_1(\mu) - \lambda_2(\mu))^2 = \left\{[(V\Phi_1, \Phi_1)_{\mathcal{H}} - (V\Phi_2, \Phi_2)_{\mathcal{H}}] + 4|(V\Phi_1, \Phi_2)_{\mathcal{H}}|^2\right\} \mu^2 + O(|\mu|^3).$$

Demonstração. De acordo com (A.14), é suficiente calcular $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Desde que λ_1 e λ_2 sejam autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} (V\Phi_1, \Phi_1)_{\mathcal{H}} & (V\Phi_1, \Phi_2)_{\mathcal{H}} \\ (V\Phi_2, \Phi_1)_{\mathcal{H}} & (V\Phi_2, \Phi_2)_{\mathcal{H}} \end{pmatrix},$$

λ_1 e λ_2 são as raízes da seguinte equação quadrática em t:

$$\begin{aligned} & t^2 - ((V\Phi_1, \Phi_1)_{\mathcal{H}} - (V\Phi_2, \Phi_2)_{\mathcal{H}})\, t \\ & \quad + (V\Phi_1, \Phi_1)_{\mathcal{H}}(V\Phi_2, \Phi_2)_{\mathcal{H}} - (V\Phi_1, \Phi_2)_{\mathcal{H}}(V\Phi_2, \Phi_1)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Temos

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (V\Phi_1, \Phi_1)_{\mathcal{H}} + (V\Phi_2, \Phi_2)_{\mathcal{H}}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= (V\Phi_1, \Phi_1)_{\mathcal{H}}(V\Phi_2, \Phi_2)_{\mathcal{H}} - (V\Phi_1, \Phi_2)_{\mathcal{H}}(V\Phi_2, \Phi_1)_{\mathcal{H}} \\ &= (V\Phi_1, \Phi_1)_{\mathcal{H}}(V\Phi_2, \Phi_2)_{\mathcal{H}} - |(V\Phi_1, \Phi_2)_{\mathcal{H}}|^2. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}(\lambda_1-\lambda_2)^2 &= (\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2\\ &= [(V\Phi_1,\Phi_1)_{\mathcal{H}}+(V\Phi_1,\Phi_1)_{\mathcal{H}}]^2\\ &\quad -4[(V\Phi_1,\Phi_1)_{\mathcal{H}}(V\Phi_2,\Phi_2)_{\mathcal{H}}-|(V\Phi_1,\Phi_2)_{\mathcal{H}}|^2]\\ &= [(V\Phi_1,\Phi_1)_{\mathcal{H}}-(V\Phi_2,\Phi_2)_{\mathcal{H}}]^2+4|(V\Phi_1,\Phi_2)_{\mathcal{H}}|^2.\end{aligned}$$

Assim, demonstramos o Corolário A.1. □

Com o Corolário A.1, é possível obter um comportamento assintótico para $\delta_n(\mu)$ quando $\mu \to 0$. A princípio, seja $\{\omega_n\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ os coeficientes de Fourier de $W(s)$. Mais precisamente, podemos escrever

$$W(s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{L}}\omega_n e^{2n\pi is/L} \quad \text{em } L^2(0,L). \tag{A.16}$$

Desde que $W(s)$ é uma função real, temos

$$\omega_n=\overline{\omega_{-n}}, \quad \text{para cada} \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{A.17}$$

Segue o seguinte resultado.

Teorema A.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$\delta_n(\mu)=\frac{2}{\sqrt{L}}|\omega_n||\mu|+O(|\mu|^2), \quad \mu\to 0,\ \mu\in\mathbb{R}. \tag{A.18}$$

Demonstração. Primeiramente, demonstramos (A.18) para o caso em que o índice é par. Lembre-se de (A.6), (A.7) e (A.8). Aplicamos o Teorema de Kato e Rellich e o Corolário A.1 considerando

$$\begin{gathered}\mathcal{H}\equiv L^2(0,L), \quad T_0\equiv T_0^+, \quad V\equiv W, \quad m\equiv 2,\\ E_0\equiv l_{2n}^+(0)=l_{2n+1}^+(0)=\left(\tfrac{2\pi n}{L}\right)^2,\\ \Phi_1\equiv\psi_{n,1}=\tfrac{1}{\sqrt{L}}e^{\frac{i2\pi ns}{L}}, \quad \Phi_2\equiv\psi_{n,2}=\tfrac{1}{\sqrt{L}}e^{\frac{i2\pi ns}{L}}, \quad \text{para cada } n\in\mathbb{N}.\end{gathered} \tag{A.19}$$

Sejam $\lambda_1(\mu)$ e $\lambda_2(\mu)$ como no teorema anterior sob a situação (A.19). Então,

$$\begin{aligned}(\delta_n^+(\mu))^2 &= (l_{2n+1}^+(\mu) - l_{2n}^+(\mu))^2 \\ &= (\lambda_1(\mu) - \lambda_2(\mu))^2 \\ &= \{[(W\psi_{n,1}, \psi_{n,1})_{\mathcal{H}} - (W\psi_{n,2}, \psi_{n,2})]^2 \\ &\quad +4|(W\psi_{n,1}, \psi_{n,2})|^2\}\mu^2 + O(|\mu|^3), \quad \mu \to 0, \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alguns cálculos mostram que

$$\begin{aligned}&[(W\psi_{n,1}, \psi_{n,1})_{\mathcal{H}} - (W\psi_{n,2}, \psi_{n,2})]^2 + 4|(W\psi_{n,1}, \psi_{n,2})|^2 \\ &= \frac{1}{L^2}\left(\int_0^L W(s)\mathrm{d}s - \int_0^L W(s)\mathrm{d}s\right)^2 + 4\left|\frac{1}{L}\int_0^L W(s)e^{\frac{i4\pi ns}{L}}\mathrm{d}s\right|^2 \\ &= 4\left|\frac{1}{\sqrt{L}}\omega_{-2n}\right|^2 = \frac{4}{L}|\omega_{2n}|^2,\end{aligned}$$

usamos (A.16) na terceira linha e (A.17) na quarta passagem. Assim, temos

$$\begin{aligned}(\delta_{2n}(\mu))^2 &= (\delta_n^+(\mu))^2 \\ &= \frac{4}{L}|\omega_{2n}|^2\mu^2 + O(|\mu|^2), \quad \mu \to 0, \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{A.20}$$

Observe que $\lambda_1(\mu) - \lambda_2(\mu)$ é uma função analítica em $\mu \in \mathbb{C}$ numa vizinhança da origem e

$$\delta_n^+(\mu) = |\lambda_1(\mu) - \lambda_2(\mu)|, \quad \text{para } \ \mu \in \mathbb{R}, \text{numa vizinhança de } \ 0.$$

Então, (A.20) implica

$$\delta_{2n}(\mu) = \delta_n^+(\mu) = \frac{4}{\sqrt{L}}|\omega_{2n}||\mu| + O(|\mu|^2), \quad \mu \to 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

Agora, vamos a demostrar (A.18) para o caso em que o índice é ímpar.

Lembre-se de (A.9),(A.10), (A.11) e (A.13). Como no caso anterior, temos

$$\begin{aligned}
(\delta_n^-(\mu))^2 &= (l_{2n}^-(\mu) - l_{2n-1}^-(\mu))^2 \\
&= \{[(W\varphi_{n,1}, \varphi_{n,1})_{\mathcal{H}} - (W\varphi_{n,2}, \varphi_{n,2})_{\mathcal{H}}]^2 \\
&\quad +4|(W\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2})_{\mathcal{H}}|^2\}\mu^2 + O(|\mu|^3), \quad \mu \to 0, \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&[(W\varphi_{n,1}, \varphi_{n,1})_{\mathcal{H}} - (W\varphi_{n,2}, \varphi_{n,2})_{\mathcal{H}}]^2 + 4|(W\varphi_{n,1}, \varphi_{n,2})_{\mathcal{H}}|^2 \\
&= \frac{1}{L^2}\left(\int_0^L W(s)\mathrm{d}s - \int_0^L W(s)\mathrm{d}s\right)^2 + 4\left|\frac{1}{L}\int_0^L W(s)e^{-i(2n-1)\frac{2\pi}{L}s}\mathrm{d}s\right|^2 \\
&= 4\left|\frac{1}{\sqrt{L}}\omega_{-(2n-1)}\right|^2 = \frac{4}{L}|\omega_{2n-1}|^2,
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\delta_{2n-1}(\mu) &= \delta_n^-(\mu) \\
&= \frac{2}{\sqrt{L}}|\omega_{2n-1}||\mu| + O(|\mu|^2), \quad , \mu \to 0, \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, completamos a demonstração do Teorema A.3. □

Apêndice B

B.1 Formas quadráticas

Seja $\mathcal{J}$ um espaço de Hilbert e $b : \text{dom}\, b \times \text{dom}\, b \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear em $\mathcal{J}$. Denotamos por $b(\psi) = b(\psi, \psi)$ a sua forma quadrática associada. Dizemos que $b(\psi)$ é limitada inferiormente se existe $\beta \in \mathbb{R}$ de forma que, $b(\psi) \geq \beta \|\psi\|^2$, para todo $\psi \in \text{dom}\, b$. Se $\beta > 0$, b é chamada de positiva. Uma forma sesquilinear b é chamada hermitiana se $b(\psi, \eta) = \overline{b(\eta, \psi)}$, para todo $\psi, \eta \in \text{dom}\, b$.

Seja b uma forma hermitiana e $(\psi_n) \subset \text{dom}\, b$ (aqui b não é necessariamente positiva). Esta sequência é chamada de sequência de Cauchy com respeito à b (ou em $(\text{dom}\, b, b)$) se $b(\psi_n - \psi_m) \to 0$, quando $n, m \to \infty$. Dizemos que (ψ_n) converge à ψ com respeito à b (ou em $(\text{dom}\, b, b)$) se $\psi \in \text{dom}\, b$ e $b(\psi_n - \psi) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Uma forma sesquilinear b é fechada se para cada sequência de Cauchy (ψ_n) em $(\text{dom}\, b, b)$ com $\psi_n \to \psi$ em $\mathcal{J}$, tem-se $\psi \in \text{dom}\, b$ e $\psi_n \to \psi$ em $(\text{dom}\, b, b)$.

Dada uma forma sesquilinear b, com $\text{dom}\, b$ denso em $\mathcal{J}$, o operador T_b associado à b é definido por

$$\begin{aligned} \text{dom}\, T_b &:= \{\psi \in \text{dom}\, b : \exists \zeta \in \mathcal{J} \text{ com } b(\eta, \psi) = \langle \eta, \zeta \rangle, \forall \eta \in \text{dom}\, b\}, \\ T_b \psi &:= \zeta, \quad \psi \in \text{dom}\, T_b. \end{aligned}$$

Assim, $b(\eta, \psi) = \langle \eta, T_b \psi \rangle$, para todo $\eta \in \text{dom}\, b$, para todo $\psi \in \text{dom}\, T_b$. Esse operador está bem definido já que $\text{dom}\, b$ é denso em $\mathcal{J}$.

Lembre-se da forma quadrática $t_\varepsilon^\theta(\psi)$ e do operador T_ε^θ definidos na Seção 4.2. O objetivo é justificar que T_ε^θ é o operador autoadjunto associado à $t_\varepsilon^\theta(\psi)$. A demonstração é separada em dois passos. Primeiro, vamos demonstrar que $t_\varepsilon^\theta(\psi)$ é uma forma quadrática fechada. Assim, pelo Teorema 4.2.6 em [10], existe um operador autoadjunto, denotado por $T_{t_\varepsilon^\theta}$, de forma que,

$$t_\varepsilon^\theta(\eta,\psi) = \langle \eta, T_{t_\varepsilon^\theta}\psi\rangle, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^\theta, \forall \psi \in \mathrm{dom}\ T_{t_\varepsilon^\theta}.$$

Em seguida, vamos demonstrar que $T_{t_\varepsilon^\theta} = T_\varepsilon^\theta$.

Proposição B.1. *Para cada $\theta \in \mathcal{C}$, a forma quadrática $t_\varepsilon^\theta(\psi)$ é fechada.*

Demonstração. Vamos considerar o caso particular em que $\theta = 0$ e $k(s) = 0$, ou seja, $\beta_\varepsilon(s,y) = 1$. O caso geral é similar.

Seja (ψ_n) uma sequência de Cauchy em $(\mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0)$ tal que $\psi_n \to \psi$ em $L^2(Q, h^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y)$. Em particular, sendo h uma função limitada, (ψ_n) é uma sequência de Cauchy em $L^2(Q)$. Notemos também que

$$\int_Q |\nabla_y(\psi_n - \psi_m)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \le \varepsilon^2\, t_\varepsilon^0(\psi_n - \psi_m),$$

e

$$\begin{aligned}
\int_Q |\partial_s(\psi_n - \psi_m)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y &\le \frac{1}{(\inf h(s))^2}\int_Q h^2 |\partial_s(\psi_n - \psi_m)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&\le \frac{2}{(\inf h(s))^2}\int_Q h^2 \left|\partial_{s,y}^{Rh}(\psi_n - \psi_m)\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&+ 2\int_Q \left|\langle \nabla_y(\psi_n - \psi_m), R^h\rangle\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&\le K\left(t_\varepsilon^0(\psi_n,\psi_m) + \int_Q \left(|\nabla_y(\psi_n - \psi_m)|^2 + |\psi_n - \psi_m|^2\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}y\right),
\end{aligned}$$

para algum $K > 0$.

Com estas estimativas, podemos observar que (ψ_n) é uma sequência de Cauchy no espaço de Hilbert $\mathcal{H}^1(Q)$. Assim, existe $\eta \in \mathcal{H}^1(Q)$ de forma que $\psi_n \to \eta$ em $\mathcal{H}^1(Q)$. Concluímos que $\eta = \psi$ em $L^2(Q)$. Além disso, $\partial_s\psi_n \to \partial_s\psi$, $\nabla_y\psi_n \to \nabla_y\psi$ em $L^2(Q)$.

Agora, vamos mostrar que $\psi(0,y)=\psi(L,y)$ em $L^2(S)$. Definimos

$$V_n(y) := \int_0^L \partial_s \psi_n(s,y)\mathrm{d}s, \quad V(y) := \int_0^L \partial_s \psi(s,y)\mathrm{d}s,$$

e notemos que

$$\begin{aligned}\int_S |V_n(y) - V(y)|\mathrm{d}y &\leq \int_Q |\partial_s\psi_n - \partial_s\psi|\mathrm{d}s\mathrm{d}y \\ &\leq |Q|^{1/2}\left(\int_Q |\partial_s\psi_n - \partial_s\psi|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}y\right)^{1/2} \to 0, \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Assim, $V_n \to V$ em $\mathrm{L}^1(S)$. Portanto, existe uma subsequência (V_{n_k}) de (V_n) de forma que, $V_{n_k}(y)\to V(y)$, q.t.p.. Mais exatamente,

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^L \partial\psi_{n_k}(s,y)\mathrm{d}s = \int_0^L \partial_s\psi(s,y)\mathrm{d}s, \quad \text{q.t.p.}\, y.$$

Já que $\psi_{n_k}(L,y)=\psi_{n_k}(0,y)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$0 = \lim_{k\to\infty}(\psi_{n_k}(L,y)-\psi_{n_k}(0,y)) = \psi(L,y)-\psi(0,y), \quad \text{q.t.p. em } y.$$

Assim, $\psi \in \operatorname{dom} t_\varepsilon^0$.

Finalmente, podemos observar que existe $K>0$ de forma que,

$$t_\varepsilon^0(\psi_n - \psi) \leq K\|\psi_n-\psi\|^2_{\mathcal{H}^1(Q)} \to 0, \quad n\to\infty,$$

ou seja, $\psi_n\to\psi$ em $(\operatorname{dom} t_\varepsilon^0, t_\varepsilon^0)$. □

Proposição B.2. *Para cada $\theta\in\mathcal{C}$, $T_\varepsilon^\theta = T_{t_\varepsilon}^\theta$.*

Demonstração. De novo, consideramos o caso particular em que $\theta=0$ e $k(s)=0$. Escrevemos $R^h=(R_1^h,R_2^h)$, denotamos por $N=(N_1,N_2)$ o campo vectorial normal à S e $\mathrm{d}A$ a medida em ∂S.

Pela identidade de polarização, obtemos a forma sesquilinear $t_\varepsilon^0(\eta,\psi)$ associada à forma quadrática $t_\varepsilon^0(\psi)$. De fato,

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon^0(\eta,\psi) &= \int_Q \left(h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \overline{\eta}\, \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi + \frac{1}{\varepsilon^2}\langle \nabla_y \overline{\eta}, \nabla_y \psi\rangle \right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&= \int_Q h^2 \partial_s \overline{\eta}\, \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_Q h^2 \langle \nabla_y \overline{\eta}, R^h\rangle \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&+ \int_Q \frac{1}{\varepsilon^2}\langle \nabla_y \overline{\eta}, \nabla_y \psi\rangle \mathrm{d}s\mathrm{d}y + c\int_Q h^2 \overline{\eta}\psi\, \mathrm{d}s\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Para cada $\eta \in \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0$ e $\psi \in \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0 \cap H^2(Q)$, o Teorema de Fubini e uma integração por partes mostra que

$$\begin{aligned}
&\int_Q h^2 \partial_s \overline{\eta}\, \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi \mathrm{d}s\mathrm{d}y = -\int_Q \overline{\eta}\, \partial_s \left(h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_S \left(\overline{\eta}\, h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi\right)|_0^L\, \mathrm{d}y = \\
-&\int_Q \overline{\eta}\, \partial_s \left(h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_S \overline{\eta}(0,y) h^2(0) \left(\partial_{s,y}^{Rh}\psi(L,y) - \partial_{s,y}^{Rh}\psi(0,y)\right) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\int_Q h^2 \langle \nabla_y \overline{\eta}, R^h\rangle \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi \mathrm{d}s\mathrm{d}y = \\
&\int_Q (\partial_{y_1}\overline{\eta}) R_1^h h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_Q (\partial_{y_2}\overline{\eta}) R_2^h h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi \mathrm{d}s\mathrm{d}y = \\
&-\int_Q \overline{\eta}\, \partial_{y_1} \left(R_1^h h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_0^L \int_{\partial S} \overline{\eta}\, R_1^h h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi N_1\, dA\mathrm{d}s \\
&-\int_Q \overline{\eta} \partial_{y_2} \left(R_2^h h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_0^L \int_{\partial S} \overline{\eta}\, R_2^h h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi N_2\, dA\mathrm{d}s = \\
&-\int_Q \overline{\eta}\, \mathrm{div}_y \left(R^h h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_0^L \int_{\partial S} \overline{\eta} \langle R^h, N\rangle h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\, \psi\, dA\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

e

$$\int_Q \frac{1}{\varepsilon^2}\langle \nabla_y \eta, \nabla_y \psi\rangle\, \mathrm{d}s\mathrm{d}y = -\int_Q \frac{1}{\varepsilon^2}\overline{\eta}\, \Delta_y \psi\, \mathrm{d}s\mathrm{d}y + \int_0^L \int_{\partial S} \frac{1}{\varepsilon^2}\overline{\eta}\langle \nabla_y \psi, N\rangle\, dA\mathrm{d}s.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon^0(\eta,\psi) \quad &= \quad -\int_Q \overline{\eta}\left[\left(\partial_s + \mathrm{div}_y R^h\right) h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\,\psi + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_y\psi\right] \mathrm{d}s\mathrm{d}y \\
&+ \quad \int_S \overline{\eta}(0,y)h^2(0)\left(\partial_{s,y}^{Rh}\psi(L,y) - \partial_{s,y}^{Rh}\psi(0,y)\right)\,\mathrm{d}y \\
&+ \quad \int_0^L \int_{\partial S} \overline{\eta}\left(h^2\langle R^h, N\rangle \partial_{s,y}^{Rh}\,\psi + \frac{1}{\varepsilon^2}\langle\nabla_y\psi, N\rangle\right) dA\mathrm{d}s + c\int_Q h^2\overline{\eta}\psi\mathrm{d}s\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Para cada $\psi \in \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0 \cap H^2(Q)$, definimos

$$Z_\varepsilon^0\psi := -\frac{1}{h^2}\left[\left(\partial_s + \mathrm{div}_y R^h\right) h^2 \partial_{s,y}^{Rh}\,\psi + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_y\psi\right] + c\psi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
t_\varepsilon^0(\eta,\psi) \quad &= \quad \langle \eta, Z_\varepsilon^0\psi\rangle_{\mathcal{H}} + \int_S \overline{\eta}(0,y)h^2(0)\left(\partial_{s,y}^{Rh}\psi(L,y) - \partial_{s,y}^{Rh}\psi(0,y)\right)\,\mathrm{d}y \\
&+ \quad \int_0^L \int_{\partial S} \overline{\eta}\frac{\partial^{Rh}\psi}{\partial N}\,dA\mathrm{d}s, \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

para todo $\eta \in \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0$, para todo $\psi \in \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0 \cap H^2(Q)$.

Passo 1: Dado $\psi \in \mathrm{dom}\ T_\varepsilon^0$, temos $(\partial^{Rh}\psi/\partial N) = 0$ em $(0,L)\times\partial S$ e

$$t_\varepsilon^0(\eta,\psi) = \langle \eta, T_\varepsilon^\theta\psi\rangle_{\mathcal{H}'_\varepsilon}, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0.$$

Assim, $\psi \in \mathrm{dom}\ T_{t_\varepsilon^0}$ e $T_{t_\varepsilon^0}\psi = T_\varepsilon^0\psi$.

Passo 2: Agora, seja $\psi \in \mathrm{dom}\ T_{t_\varepsilon^0} \subset \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0$. Então, existe $\zeta \in \mathcal{H}$ de forma que

$$t_\varepsilon^0(\eta,\psi) = \langle \eta, \zeta\rangle_{\mathcal{H}'_\varepsilon}, \quad \forall \eta \in \mathrm{dom}\ t_\varepsilon^0.$$

Como consequência, tem-se $\psi \in H^2(Q)$ (veja Capítulo 7 em [1]). Por (B.1),

$$\langle \eta, \zeta - Z_\varepsilon^0\psi\rangle_{\mathcal{H}'_\varepsilon} = \int_S \overline{\eta}(0,y)h^2(0)\left(\partial_{s,y}^{Rh}\psi(L,y) - \partial_{s,y}^{Rh}\psi(0,y)\right)\,\mathrm{d}y + \int_0^L \int_{\partial S} \overline{\eta}\frac{\partial^{Rh}\psi}{\partial N}\,dA\mathrm{d}s.$$

Em particular,

$$\langle \eta, \zeta - Z_\varepsilon^0 \psi \rangle_{\mathcal{H}'_\varepsilon} = 0, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(Q) \subset \text{dom } t_\varepsilon^0.$$

Portanto, $\zeta = Z_\varepsilon^0 \psi$. Resta mostrar que $\psi \in \text{dom } T_\varepsilon^0$.

Já sabemos que $\psi(0,y) = \psi(L,y)$ em $L^2(S)$. Por outro lado, desde que $\zeta = Z_\varepsilon^0 \psi$,

$$\int_S \overline{\eta}(0,y) h^2(0) \left(\partial_{s,y}^{Rh} \psi(L,y) - \partial_{s,y}^{Rh} \psi(0,y) \right) \text{d}y + \int_0^L \int_{\partial S} \overline{\eta} \frac{\partial^{Rh} \psi}{\partial N} \, dA \text{d}s = 0,$$

para todo $\eta \in \text{dom } t_\varepsilon^0$. Em particular, para $\eta(s,y) = w(s)u(y)$, de forma que $w \in C_0^\infty(0,L)$ e $u \in H^1(S)$, tem-se

$$\int_0^L w(s) \int_{\partial S} u(y) \frac{\partial^{Rh} \psi}{\partial N} \, dA \text{d}s = 0.$$

Como esta igualdade vale para todo $w \in C_0^\infty(0,L)$ e para todo $u \in H^1(S)$, temos então

$$\frac{\partial^{Rh} \psi}{\partial N} = 0, \quad \text{em} \quad L^2((0.L) \times \partial S). \tag{B.2}$$

Consequentemente,

$$\int_S \overline{\eta}(0,y) h^2(0) \left(\partial_{s,y}^{Rh} \psi(L,y) - \partial_{s,y}^{Rh} \psi(0,y) \right) \text{d}y = 0, \quad \forall \eta \in \text{dom } t_\varepsilon^0.$$

Escolhendo η de forma adequada, é possível mostrar que

$$\partial_{s,y}^{Rh} \psi(L,y) = \partial_{s,y}^{Rh} \psi(0,y), \quad \text{em} \quad L^2(S). \tag{B.3}$$

O fato de que $\psi(0,y) = \psi(L,y)$ em $L^2(S)$ junto com as condições (B.2) e (B.3) garantem que $\psi \in \text{dom } T_\varepsilon^0$. $\square$

Observação B.1. Lembre-se da forma quadrática $b_\varepsilon^N(\psi)$, definida na Seção 2.2 e do operador T_ε definida na Seção 4.1. Analogamente, é possível mostra que $b_\varepsilon^N(\psi)$ é uma forma quadrática fechada e T_ε é seu operador autoadjunto associado.

Apêndice C

C.1 Forma quadrática

Lembremos da forma quadrática

$$b_n(w) = \int_Q |w'(s)u_n^N(y) + \langle \nabla_y u_n^N(y), Ry\rangle \alpha'(s)w(s)|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

dom $b_n = H^1(I)$, definida na Seção 5.2 deste trabalho. O objetivo desta seção é mostrar que o operador T_n, definido por (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11) é o operador autoadjunto associado à b_n.

Consideremos o caso particular em que $I = [a, b]$ é um intervalo limitado. Alguns cálculos mostram que

$$b_n(w) = \int_a^b \left(|w'(s)|^2 + V_n(s)|w(s)|^2\right) \mathrm{d}s + C_n^2(S)\alpha'(b)|w(b)|^2 - C_n^2(S)\alpha'(a)|w(a)|^2,$$

em que $V_n(s) = C_n^1(S)(\alpha'(s))^2 - C_n^2(S)\alpha''(s)$; as constantes $C_n^1(S)$ e $C_n^2(S)$ são definidas em (5.8).

Seja $b_n(w, u)$ a forma sesquilinear associada à $b_n(w)$. Temos

$$b_n(w, u) = \langle w, T_n u\rangle, \quad \forall w \in \text{dom } b_n, \forall v \in \text{dom } T_n.$$

Sendo assim, T_n é o operador autoadjunto associado à b_n. O caso $I = \mathbb{R}$ pode ser demonstrado de forma semelhante.

C.2 Γ-convergência

Neste apêndice definimos o conceito de Γ-convergência e mostramos sua relação com a convergência de operadores no sentido dos resolventes.

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert (real or complexo), $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e $f_\varepsilon : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma sequência de funcionais. Dizemos que a sequência f_ε Γ-converge fortemente a $f : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ (denotamos, $f_\varepsilon \xrightarrow{S\Gamma} f$) se, as seguintes condições são satisfeitas:

i) Para cada $v \in \mathcal{H}$ e toda sequência $v_\varepsilon \to v$ em $\mathcal{H}$, tem-se

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq f(v).$$

ii) Para cada $v \in \mathcal{H}$, existe uma sequência $v_\varepsilon \to v$ em $\mathcal{H}$ de forma que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(v_\varepsilon) = f(v).$$

Observação C.1. *Se em vez da convergência forte $v_\varepsilon \to v$ for considerada a convergência fraca $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ em i) e ii), então dizemos que f_ε Γ-converge fracamente a f e denotamos $f_\varepsilon \xrightarrow{W\Gamma} f$.*

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [9], onde é demonstrada a versão para espaços de Hilbert reais; a generalização para espaços de Hilbert complexos é apresentada em [11].

Proposição C.1. *Sejam d_ε, d formas sesquilineares fechadas e positivas em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e D_ε, D os respectivos operadores autoadjuntos associados. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $d_\varepsilon \xrightarrow{S\Gamma} d$ *e, para cada* $\zeta \in \mathcal{H}$, *tem-se* $d(\zeta) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon(\zeta_\varepsilon)$, *para toda sequência* $\zeta_\varepsilon \to \zeta$ *em* H;

b) $d_\varepsilon \xrightarrow{S\Gamma} d$ *e* $d_\varepsilon \xrightarrow{W\Gamma} d$;

c) D_ε converge a D no sentido forte dos resolvente em $H_0 = \overline{\text{dom } D} \subset \mathcal{H}$, ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} R_{-\lambda}(D_\varepsilon)\zeta = R_{-\lambda}(D)P_0\zeta, \qquad \forall \zeta \in \mathcal{H}, \forall \lambda > 0,$$

em que P_0 é a projetor ortogonal em H_0.

O seguinte resultado é apresentado em [11].

Proposição C.2. *Sejam $d_\varepsilon, d \geq \beta > -\infty$ formas sesquilinear fechadas e $D_\varepsilon, D \geq \beta$ os respetivos operadores autoadjuntos associados. Seja $\overline{\text{dom } D} = \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$. Assuma que as seguintes condições são satisfeitas:*

a) $d_\varepsilon \xrightarrow{S\Gamma} d$ e $d_\varepsilon \xrightarrow{W\Gamma} d$;

b) O operador resolvente $R_\lambda(D)$ é compacto em H_0 para algum número real $\lambda > |\beta|$;

c) Existe um espaço de Hilbert $\mathcal{K}$, compactamente mergulhado em $\mathcal{H}$, de forma que se a sequência (ψ_ε) é limitada em $\mathcal{H}$ e $(d_\varepsilon(\psi_\varepsilon))$ e também limitada, então (ψ_ε) é uma sequência limitada em $\mathcal{K}$.

Então, D_ε converge no sentido da norma dos resolvente a D em $\mathcal{H}_0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Observação C.2. Em ambas proposições acima, o domínio de D não é assumido denso em $\mathcal{H}$ mas é necessário que img $D \subset \mathcal{H}_0$; dizemos que D é autoadjunto em $\mathcal{H}_0$.

Referências Bibliográficas

[1] Baiocchi, C. e Capelo, A.: Variational and quasivariational inequalities: applications to free boundary problems, Published by John Wiley & Sons Ltd (1984)

[2] Bedoya, R., de Oliveira, C. R. e Verri, A. A.: Complex Γ-convergence and magnetic Dirichlet Laplacian in bounded thin tubes, J. Spectr. Theory **4**, 621–642 (2014).

[3] Bentosela,F., Duclos, P. e Exner, P.: Absolute continuity in periodic thin tubes and strongly coupled leaky wires, Lett. in Math. Phys. **65**, 75–82 (2003).

[4] Borg, G.: Eine Umkehrung der Sturm–Liouvillschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. **78**, 1–96 (1946).

[5] Borisov, D. e Pankrashkin, K.: Quantum waveguides with small periodic perturbations: gaps and edges of Brillouin zones, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 235203 (18pp) (2013).

[6] Bouchitté, G., Mascarenhas, M. L. e Trabucho, L.: On the curvature and torsion effects in one dimensional waveguides, ESAIM, Control Optim. Calc. Var. **13**, 793–808 (2007).

[7] Briet, P., Kovařík, H., Raikov, G e Soccorsi, E.: Eigenvalue asymptotics in a twisted waveguide, Comm. Partial Differential Equations **34**, 818-836 (2009).

[8] Chenaud, B., Duclos, P., Freitas, P. e Krejčířik, D.: Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes, Differential Geom. Appl. **23**, 95-105 (2005).

[9] Dal Maso, G. An introduction to Γ-convergence, Edition 1. Birkhäuser, Basel (1993).

[10] de Oliveira, C. R.: Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics, Birkhäuser, 2009.

[11] de Oliveira. C. R.: Quantum singular operator limits of thin Dirichlet tubes via Γ -convergence, Reports on Mathematical Physics, **67**, 1-32 (2011).

[12] de Oliveira, C. R. e Verri, A. A.: Asymptotic spectrum for Dirichlet Laplacian in thin Deformed tubes with scaled geometry. J. Phys. A: Math. and Theor., **45**, p.435201 (2005).

[13] de Oliveira, C. R. e Verri, A. A.: Norm resolvent convergence of Dirichlet Laplacian in unbounded thin waveguides, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **46**, 139–158 (2015).

[14] de Oliveira, C. R. e A. A. Verri, A. A.: On norm resolvent and quadratic form convergences in asymptotic thin spatial waveguides, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser, Basel, **224**, 253–276 (2012).

[15] de Oliveira, C. R, e Verri, A. A.: On the spectrum and weakly effective operator for Dirichlet Laplacian in thin deformed tubes, J. Math. Anal. Appl. **381**, 454–468 (2011).

[16] Duclos, P. e Exner, P.: Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions, Rev. Math. Phys. **07**, 73–102 (1995).

[17] Ekholm, T., Kovarik, H. e Krečířik, D. A Hardy inequality in twisted waveguides, Arch. Ration. Mech. Anal. **188**, 245-265 (2008).

[18] Friedlander, L.: Absolute continuity of the spectra of periodic waveguides, Contemp. Math. **339**, 37-42 (2003).

[19] Friedlander, L. e Solomyak, M.: On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow infinite strip, Amer. Math. Soc. Transl. **225**, 103–116 (2008).

[20] Friedlander, L. e Solomyak, M.: On the spectrum of narrow periodic waveguide, Russ. J. Math. Phys. **15**, 238–242 (2008).

[21] Gohberg, I. C. e Kreĭn, M. G.: Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Translations of Mathematical Monographs **18**, American Mathematical Society, (1969).

[22] Hale, J. K. e Raugel, G.: Reaction-diffusion equation in thin domains, J. Math. pures et appl. 71, 33–95 (1992).

[23] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, (1995).

[24] Krejčiřík, D. e Sedivakova, H.: The effective Hamiltonian in curved quantum waveguides under mild regularity assumptions, Rev. Math. Phys. **24**, 1250018 (2012).

[25] Lawrence, C. E.: Partial Differential Equations, AMS, Providence, (1998).

[26] Mamani, Carlos R. e Verri, Alessandra A.: Absolute Continuity and Band Gaps of the Spectrum of the Dirichlet Laplacian in Periodic Waveguides, Aceito para publicação em Bulletin Brazilian Mathematical Society.

[27] Mamani, Carlos R. e Verri, Alessandra A.: Influence of the bound states in the Neumann Laplacian in a thin waveguide, Aceito para publicação em Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[28] Nazarov, S. A.: A Gap in the Essential Spectrum of the Neumann Problem for an Elliptic System in a Periodic Domaim. Functional Analysis and Its Applications, **43**, No. 3, 239–241 (2009). Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, **43**. No. 3, 92-95 (2009).

[29] Prizzi, M.e Rybakowski, K. P.: The Effect of domain squeezing upon the dynamics of reaction-diffusion equations, J. Differ. Equations 173, 273–320 (2001) m Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, **43**, No. 3, 92–95 (2009).

[30] Reed, M. e Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of Operators, Academic Press, New York, (1978).

[31] Schatzman, M.: On the eigenvalues of the Laplace operator on a thin set with Neumann Boundary conditions, Applicable Analysis, **61** 293–306 (1996).

[32] Silva, R. P.: A note on resolvent convergence on a thin domain, Bull. Austral. Math. Soc., **89**, 141–148 (2014).

[33] Sobolev, A. V. e Walthoe, J.: Absolute continuity in periodic waveguides, Proc. London Math. Soc. **85**, 717–741 (2002).

[34] Yoshitomi, K.: Band gap of the spectrum in periodically curved quantum waveguides, J. Differ. Equations **142**, 123–166 (1998).