



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



PAULO CÉSAR DE PIETRO DOMINGOS

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES  
DIFERENCIÁVEIS

SÃO CARLOS – SP  
2024

PAULO CÉSAR DE PIETRO DOMINGOS

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES  
DIFERENCIÁVEIS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientadora: Profa. Dra. Grazielle Feliciani Barbosa

SÃO CARLOS – SP  
2024

Domingos, Paulo César de Pietro

Uma introdução ao estudo das singularidades de  
aplicações diferenciáveis / Paulo César de Pietro  
Domingos -- 2024.  
54f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,  
campus São Carlos, São Carlos  
Orientador (a): Grazielle Feliciani Barbosa  
Banca Examinadora: Rafael Fernando Barostichi, Selma  
Helena de Jesus Nicola  
Bibliografia

1. Aplicações diferenciáveis. 2. Variedades suaves. 3.  
Germes de aplicações suaves. I. Domingos, Paulo César  
de Pietro. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática  
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver os pré-requisitos para um estudo de teoria de singularidades. Para isso, tratará de conceitos de álgebra linear, cálculo, variedades suaves n-dimensionais, espaço tangente, germes de aplicações diferenciáveis, transversalidade e conjuntos de singularidades de primeira ordem.

**Palavras-chave:** Aplicações diferenciáveis. Variedades suaves. Germes de aplicações suaves.

## ABSTRACT

The present work aims to develop the requirements for a study in singularity theory. To achieve this, it will address concepts of linear algebra, calculus, n-dimensional smooth manifolds, tangent space, germs of smooth mappings, transversality and sets of first-order singularities.

**Keywords:** Smooth mappings. Smooth manifolds. Germs of smooth mappings.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Projecção estereográfica.....	16
Figura 2 – Cúspide .....	24
Figura 3 – Intersecção transversal no ponto $x$ . ....	28
Figura 4 – Ilustrações 1 e 2 - Transversalidade .....	29
Figura 5 – Ilustrações 3 e 4 - Transversalidade .....	29
Figura 6 – Ilustrações 5 e 6 - Transversalidade .....	30
Figura 7 – Ilustrações 7 e 8 - Transversalidade .....	30
Figura 8 – Intersecção transversal em uma esfera .....	31
Figura 9 – $f \pitchfork Q$ e $Q$ é um único ponto .....	32
Figura 10 – Exemplo 6.7 .....	38
Figura 11 – Exemplo 6.9 .....	41
Figura 12 – Exemplo 6.10, com $a = 3$ e $b = 1$ . ....	42
Figura 13 – Conjunto $\Sigma f$ e o conjunto bifurcação de $f$ .....	44
Figura 14 – Exemplo 6.11 - Superfície .....	44
Figura 15 – Exemplo 6.13.....	47
Figura 16 – Ilustração $M = F^{-1}(Q)$ no Lema da Transversalidade.....	48
Figura 17 – Translação de uma função $f$ , no caso em que $Q$ é um ponto.....	50

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	7
<b>2</b>	<b>PRÉ-REQUISITOS</b> .....	8
2.1	RECORDANDO ÁLGEBRA LINEAR .....	8
2.2	FUNÇÕES E DIFERENCIABILIDADE .....	10
<b>3</b>	<b>VARIETADES SUAVES N-DIMENSIONAIS</b> .....	15
3.1	PARAMETRIZAÇÕES E VARIETADES SUAVES .....	15
<b>4</b>	<b>O DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO SUAVE</b> .....	19
4.1	ESPAÇO TANGENTE .....	19
<b>5</b>	<b>GERMES DE UMA APLICAÇÃO</b> .....	23
5.1	GERMES DE UMA FUNÇÃO SUAVE .....	23
<b>6</b>	<b>TRANSVERSALIDADE</b> .....	27
6.1	O TEOREMA DA TRANSVERSALIDADE .....	46
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	52
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	54

# 1 INTRODUÇÃO

O objetivo do trabalho é construir os requisitos necessários para estudar os elementos básicos da teoria de singularidades. Para isso, recordaremos elementos importantes de álgebra linear e cálculo, tais como transformações lineares, Teorema do Núcleo e da Imagem e seu Corolário, determinante jacobiano, Teorema da Função Inversa entre outros. Após esse passo inicial, começaremos o estudo do que são variedades suaves e suas parametrizações, objetos de importância na definição de plano tangente, o qual nos permitirá equipar variedades suaves com ideias de diferenciabilidade e estabelecer o que é um germe de uma aplicação suave.

Em seguida estudaremos conceito de transversalidade, partindo de transversalidade de espaços vetoriais até chegarmos em transversalidade entre funções e variedades suaves. Nos fornecendo condições para estudar o Lema e Teorema da Transversalidade.

Para cumprirmos isso, as principais referências do trabalho serão os textos de (Gibson, 1979), (Lima, 2020) e (Tari, 1999). Indicaremos referências adicionais, caso forem utilizadas.

## 2 PRÉ-REQUISITOS

### 2.1 RECORDANDO ÁLGEBRA LINEAR

Nesta seção recordaremos definições e resultados importantes de Álgebra Linear, que serão empregados para compreensão de conceitos posteriores, ou na demonstração de algum resultado. A principal referência será (Zani, 2020).

**Definição 2.1** (Transformação linear). Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ . A aplicação  $F : U \rightarrow V$  é chamada transformação linear de  $U$  em  $V$  se:

- a)  $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$ , para todo  $u_1, u_2 \in U$ ,
- b)  $F(\alpha u) = \alpha F(u)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e para todo  $u \in U$ .

**Exemplo 2.1.** O operador derivada é uma transformação linear no espaço vetorial das funções. Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis, e a definição da derivada de uma função dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- a)  $(f(x) + g(x))'$   

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$
- b)  $(\alpha f(x))'$   

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

$$= \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \alpha f'(x), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observe que a transformação linear:

$$F(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

é a melhor aproximação de  $f$  em torno de  $a$ .

Dada uma transformação linear, podemos definir a matriz da transformação linear, conforme segue:

**Definição 2.2** (Matriz de uma transformação linear). Dados espaços vetoriais  $U$  e  $V$  de dimensão finita, tomando  $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$  base de  $U$  e  $B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$  base de  $V$ , definimos a matriz da transformação linear  $F : U \rightarrow V$  em relação às bases  $B_1$  e  $B_2$ , como a matriz  $m \times n$ :

$$[F]_{B_1, B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

onde  $F(u_k) = a_{1k}v_1 + \dots + a_{mk}v_m$ , com  $k = 1, \dots, n$ .

**Exemplo 2.2** (Identidade). Tome a transformação linear  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$  em relação à base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , isto é, a transformação identidade em  $\mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} F(1, 0, \dots, 0) &= (1, 0, \dots, 0) = 1(1, 0, \dots, 0) \\ F(0, 1, \dots, 0) &= (0, 1, \dots, 0) = 1(0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ F(0, 0, \dots, 1) &= (0, 0, \dots, 1) = 1(0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

A matriz  $n \times n$  da transformação é:

$$[F]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.3** (Posto de uma matriz). Definiremos o posto de uma matriz, como sendo o seu número de linhas não nulas, quando estiver na forma escalonada reduzida por linhas.

**Exemplo 2.3.** O posto da matriz  $[F]_B$  do exemplo 2.2 é  $n$ .

**Definição 2.4** (Núcleo de uma transformação linear). O núcleo de uma transformação linear  $F : U \rightarrow V$  é definido por  $\mathcal{N} = \{u \in U; F(u) = 0\}$ .

**Exemplo 2.4.** Seja  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear definida por  $F(u, v, w) = (u + 2v, 4u + w, u + v + w - 7)$ . Seu núcleo é dado pela solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} u + 2v = 0 \\ 4u + w = 0 \\ u + v + w - 7 = 0 \end{cases}$$

sendo assim, temos que  $\mathcal{N} = \{(-2, 1, 8)\}$ .

**Teorema 2.1** (Soma de subespaços vetoriais). *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Se  $U$  e  $W$  são subespaços vetoriais de  $V$  então*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

**Teorema 2.2** (Teorema do núcleo e da imagem). *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais de dimensão finita sobre algum corpo e  $F : U \rightarrow V$  uma transformação linear, então:*

$$\dim(U) = \dim(\mathcal{N}(F)) + \dim(F(U)).$$

**Corolário 2.1.** Se  $U$  e  $V$  são espaços vetoriais de mesma dimensão finita, e  $F : U \rightarrow V$  é uma transformação linear não trivial, então:

- a)  $F$  é sobrejetora.
- b)  $F$  é injetora.
- c)  $F$  é bijetora.
- d)  $F$  leva bases de  $U$  em bases de  $V$ .

## 2.2 FUNÇÕES E DIFERENCIABILIDADE

No estudo de funções de uma única variável em cálculo, nos deparamos com propriedades fundamentais que descrevem seu comportamento, entre as quais se destaca a diferenciabilidade. Ao estendermos nosso foco de uma variável para múltiplas variáveis, caracterizamos funções de uma maneira mais geral, e para o fim de descrevermos algumas dessas propriedades, nossa principal referência será (Lima, 2020). Além disso, quando não houver ambiguidade, assumiremos os conjuntos  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  e  $W \subseteq \mathbb{R}^q$  abertos.

**Definição 2.5** (Restrição de uma função). Seja  $f : X \rightarrow Y$  um função e  $Z \subseteq X$  um subconjunto. A função  $f : Z \rightarrow Y$  é chamada de *restrição da função  $f$  ao conjunto  $Z$* .

Chamaremos apenas de restrição de  $f$ , e utilizaremos a seguinte notação:  $f|_Z$ .

**Definição 2.6** (Função suave). Seja  $f : U \rightarrow V$  uma função com componentes  $f_1, \dots, f_p$ , dizemos que  $f$  é suave quando todas as derivadas parciais de  $f$

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

existem e são contínuas.

**Definição 2.7** (Difeomorfismo). Uma função  $f$  é chamada *difeomorfismo* de  $U$  em  $V$  quando é bijetora, e  $f$  e  $f^{-1}$  são suaves.

Se  $f : U \rightarrow V$  é suave, então para cada ponto  $x \in U$ , existe uma transformação linear,  $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  denominada *diferencial de  $f$  em  $x$* .

**Definição 2.8** (Matriz jacobiana). Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função definida pela lei  $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ . A matriz jacobiana de  $f$  em relação ao ponto  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é definida por:

$$Jf(x) := df_x = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

**Proposição 2.1.** Se  $f: U \rightarrow V$  é uma restrição de uma transformação linear  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , então  $f$  é suave e  $Jf(x)$  é a matriz da transformação  $F$  para todo  $x \in U$ .

*Demonstração.* Tome  $f$  conforme o enunciado. Dado  $x \in U$ , vamos calcular  $Jf(x)$ . Considere  $B_n = \{u_1, \dots, u_n\}$  e  $B_m = \{v_1, \dots, v_m\}$  vetores de uma base qualquer de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente. Podemos escrever  $x = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$  ( $x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$ ). Por um lado,  $f$  é restrição de uma transformação linear e leva  $x$  às coordenadas:

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ &= (f_1(x_1u_1 + \dots + x_nu_n), \dots, f_m(x_1u_1 + \dots + x_nu_n)) \\ &= (x_1f_1(u_1) + \dots + x_nf_1(u_n), \dots, (x_1f_m(u_1) + \dots + x_nf_m(u_n))) \end{aligned}$$

Logo, a matriz jacobiana de  $f$  é:

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} f_1(u_1) & \cdots & f_1(u_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(u_1) & \cdots & f_m(u_n) \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, como  $F$  é transformação linear  $F(x) = F(x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n) = x_1F(u_1) + x_2F(u_2) + \dots + x_nF(u_n)$ . E como  $x \in U$  podemos escrever:

$F(x) = x_1(f_1(u_1), \dots, f_m(u_1)) + x_2(f_1(u_2), \dots, f_m(u_2)) + \dots + x_n(f_1(u_n), \dots, f_m(u_n))$ . E, pela Definição de matriz de uma transformação linear, temos que:

$$[F]_{B_n, B_m} = \begin{pmatrix} f_1(u_1) & \cdots & f_1(u_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(u_1) & \cdots & f_m(u_n) \end{pmatrix}.$$

□

**Definição 2.9.** Se  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  e  $h: A \rightarrow C$ , com  $f(A) \subset B$  e  $g \circ f = h$ , então dizemos que o seguinte diagrama comuta, ou que é um diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ A & \xrightarrow{h} & C \end{array}$$

**Teorema 2.3** (Regra da cadeia). Sejam  $f: U \rightarrow V$ ,  $g: V \rightarrow W$  e  $h: U \rightarrow W$ , com  $f(U) \subset V$  e  $g \circ f = h$  conforme o diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc}
 & V & \\
 f \nearrow & & \searrow g \\
 U & \xrightarrow{h} & W
 \end{array}$$

se  $a \in U$  com  $f(a) = b$ , então o seguinte diagrama também comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}^p & \\
 df_a \nearrow & & \searrow dg_a \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{dh_a} & \mathbb{R}^q
 \end{array}$$

**Teorema 2.4** (Teorema da função inversa). *Se  $f: U \rightarrow V$  é suave, e  $a \in U$  tal que  $df_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é invertível, então existem vizinhanças abertas  $U', V'$  de  $a$  e  $f(a)$  respectivamente, as quais uma restrição de  $f$  é difeomorfismo de  $U'$  em  $V'$ .*

**Teorema 2.5.** *Se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é suave com  $f(0) = 0$  e  $df_0$  de posto  $p$ , então existe um difeomorfismo  $h$  de alguma vizinhança aberta de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}^n$  com  $h(0) = 0$  e  $f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$ .*

*Demonstração.* Necessariamente  $n \geq p$ . Como  $df_0$  tem posto  $p$ , existe uma submatriz de  $df_0$ ,  $p \times p$  invertível. Definimos a função suave  $F: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  sobrejetora à sua imagem, em que  $U' \subset \mathbb{R}^n$  é vizinhança de  $0$ , como:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_p(x), x_{p+1}, \dots, x_n)$$

em que  $f_k, k = 1, \dots, p$  são funções de  $f$ . Perceba que a matriz  $dF_0$  de ordem  $n$  é, sem perda de generalidade, da seguinte forma:

$$dF_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_p}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{p+1}}(0) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(0) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

O determinante de  $dF_0$  pode ser obtido pelo método de cofatores, considere a notação da submatriz  $k \times k$  de  $dF_0$  como  $M_{k \times k}$  conforme:

$$\begin{aligned}
 \det(dF_0) &= 1^{n+n} \det(M_{(n-1) \times (n-1)}) \\
 &= \det M_{(n-1) \times (n-1)} = 1^{(n-1) \times (n-1)} \det(M_{(n-2) \times (n-2)}) = \dots = \det M_{p \times p},
 \end{aligned}$$

e disso, como  $df_0$  tem posto  $p$ ,  $\det dF_0 \neq 0$ , segue pelo Teorema da Função Inversa, que  $F$  tem uma restrição, que chamaremos de  $h$  a qual, é definida sobre uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$ , sobrejetora à sua imagem também em  $\mathbb{R}^n$  com  $h(0) = 0$ . Tomamos a projeção  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  a qual  $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$ . Disso teremos:

$$f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (\pi \circ F) \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \pi \circ (F \circ h^{-1})(x_1, \dots, x_n) = \pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p).$$

□

**Teorema 2.6.** Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma função suave com  $f(0) = 0$  e  $df_0$  de posto  $n$ , então existe um difeomorfismo  $k$  de alguma vizinhança de  $0$  em  $\mathbb{R}^p$ , sobrejetor à sua imagem em  $\mathbb{R}^p$  com  $k(0) = 0$  e  $k \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ .

*Demonstração.* Necessariamente  $n \leq p$ . Como  $df_0$  tem posto  $n$ , então existe uma submatriz de  $df_0$ ,  $n \times n$  invertível. Definimos a função suave  $F : U' \rightarrow \mathbb{R}^p$  sobrejetora à sua imagem, em que  $U' \subset \mathbb{R}^p$  é vizinhança aberta de  $0$  como:

$$F(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_p)$$

Similarmente ao Teorema 2.5  $dF_0$  é invertível e pelo teorema da função inversa, há uma função  $k$  tal que:

$$k \circ f(x_1, \dots, x_n) = k \circ F(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

□

Vamos também relembrar séries de Taylor, mas para isso, precisaremos utilizar integração por partes.

**Definição 2.10.** Se  $u = u(x)$  e  $v = v(x)$  são funções diferenciáveis em algum intervalo real, então para  $x$  neste intervalo teremos:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \quad (2.1)$$

definida como integração por partes.

**Proposição 2.2.** O polinômio de Taylor de uma função real ou complexa infinitamente diferenciável em torno de um valor  $x_0$  de seu domínio é determinado como:

$$f(x) = P_n(x) + (-1)^n \int_{x_0}^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!} (t-x)^n dt$$

com,

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

*Demonstração.* Vamos proceder a indução sobre  $n$ .

Do Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$\int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x) - f(x_0) \implies f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Utilizando 2.10 e fazendo  $v(t) = t - x$ ,  $v'(t) = 1$  e  $u = f'(t)$ , teremos  $P(1)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f'(t) dt &= (t-x)f'(t) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x (t-x)f''(t) dt = \\ &= f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^x (t-x)f''(t) dt. \end{aligned}$$

Assim,  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^x (t-x)f''(t) dt$ .

Suponhamos que seja válido  $P(k)$ , isto é:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \\ &\quad + (-1)^k \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (t-x)^n dt. \end{aligned}$$

Vamos provar que vale  $P(k+1)$

Sejam  $u = f^{(k+1)}$ ,  $v'(t) = \frac{(t-k)^k}{k!}$ , e  $v(t) = \frac{(t-x)^{k+1}}{(k+1)!}$ .

Novamente por 2.10

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f^{(k+1)}(t) \frac{(t-x)^k}{k!} dt &= f^{(k+1)}(t) \frac{(t-x)^{k+1}}{(k+1)!} \Big|_{x_0}^x - \int_x^{x_0} \frac{(t-x)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(t) dt \\ &= - \frac{f^{(k+1)}(x_0)(x_0-x)^{k+1}}{(k+1)!} - \int_x^{x_0} \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!} (t-x)^{k+1} dt \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_x^{x_0} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (t-x)^{n+1} dt. \end{aligned}$$

□

**Definição 2.11.** Se o polinômio de Taylor de uma função  $f$  for infinitamente diferenciável em torno de algum ponto  $x_0$ , podemos definir a série de Taylor dessa função em torno de  $x_0$  como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

### 3 VARIEDADES SUAVES N-DIMENSIONAIS

#### 3.1 PARAMETRIZAÇÕES E VARIEDADES SUAVES.

Queremos aqui determinar o objeto em que trabalharemos, ou seja, conjuntos que serão domínios das funções em que determinamos se há ou não singularidades. Para isso, é importante que seja possível aplicar as ideias de diferenciabilidade que conhecemos do cálculo. Dessa forma, uma ideia é fazer com que cada ponto e uma vizinhança sua em um conjunto se "assemelhe" com algum  $\mathbb{R}^k$ , pois ali conseguiremos aplicar resultados conhecidos. E esta ideia de semelhança se dará por uma função bijetora suave, que denominaremos parametrização. Como referência complementar, utilizamos (Lima Caju, 2013).

**Definição 3.1** (Parametrização n-dimensional). Uma parametrização n-dimensional de um conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^j$  é uma função suave  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^j$  com  $V$  aberto em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\phi(V) = X$  e a função  $\phi : V \rightarrow \phi(V)$  é difeomorfismo.

Diremos parametrização para nos referir a parametrização n-dimensional.

**Definição 3.2** (Vizinhança relativamente aberta). Seja  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $x \in N$ . Uma vizinhança relativamente aberta de  $x \in N$  é um conjunto da forma  $U \cap N$  com  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  um conjunto aberto tal que  $x \in U$ .

**Definição 3.3** (Variedade suave de dimensão n). Chamamos  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  de variedade suave de dimensão n, quando para todo  $x \in N$ , existe uma vizinhança relativamente aberta  $U \cap N$  que admite uma parametrização  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Denominamos  $\phi^{-1} : U \cap N \rightarrow V$  uma carta em  $x$  e as componentes destas coordenadas locais de  $x$ .

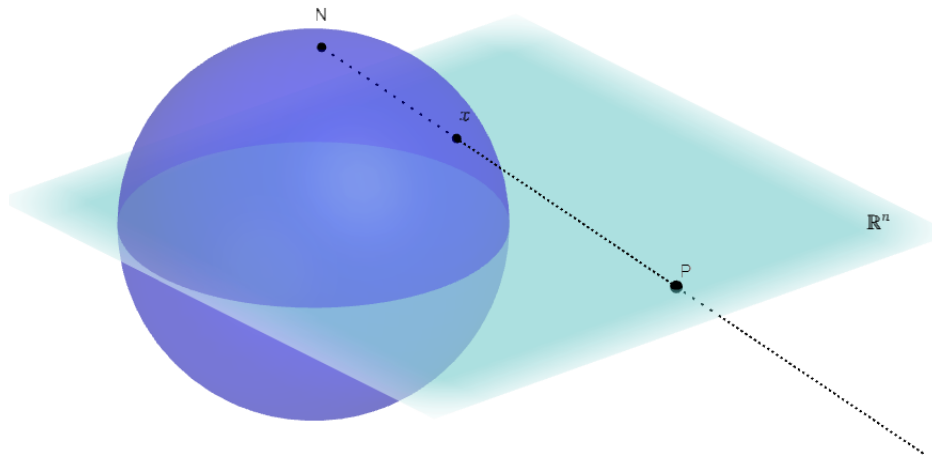
**Exemplo 3.1.** Qualquer subconjunto aberto  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  é uma variedade suave de dimensão  $n$ . De fato, tome  $U = \mathbb{R}^k$ , dessa forma  $U \cap N = N$ . Seja  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  aberto, definimos  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  a função identidade, dessa forma  $\phi(V) = N$ , agora,  $\phi : V \rightarrow N$  possui inversa, também a própria identidade ( $\phi^{-1} \circ \phi = x$ ), como  $\phi$  é polinomial então é suave. Como  $N$  é a própria imagem da função e imediatamente  $\phi(x) = \phi(y) \implies x = y$ ,  $\phi : V \rightarrow N$  é difeomorfismo, segue que  $\forall z \in N$ ,  $N$  é variedade suave de dimensão  $n$ .

**Exemplo 3.2.** Qualquer subespaço vetorial  $N \subseteq \mathbb{R}^p$  de dimensão  $n$ , é uma variedade suave de dimensão  $n$ . De fato, tome  $U = \mathbb{R}^p$ , dessa forma  $U \cap N = N$ . Seja  $V = \mathbb{R}^n$ , escolha  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  qualquer transformação linear, tal que a imagem seja  $N$ . Note que  $\phi$  é suave, pois já provamos que o diferencial de uma transformação linear em um ponto, é a própria transformação linear, isto é,  $dF_x = F(x), \forall x$  no domínio de  $F$ . Como,  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow N$  é sobrejetora por construção, como a dimensão de  $N$  é  $n$ , pelo Corolário 2.1 é injetora, assim pelo mesmo argumento anterior  $F$  e  $F^{-1}$  são suaves, e  $\phi$  é difeomorfismo. Segue que  $\forall z \in N$ ,  $N$  é variedade suave de dimensão  $n$ .

**Exemplo 3.3.**  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  é variedade suave de dimensão  $n$ , em que  $S^n$  é o conjunto dos pontos  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  tais que:  $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$

Queremos construir um difeomorfismo entre  $S^n$  e  $\mathbb{R}^n$ , para isso "levaremos" cada ponto da esfera para o hiperplano  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  por meio de semirretas conforme a figura abaixo.

Figura 1 – Projeção estereográfica.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Sejam  $N = (1, 0, \dots, 0)$  e  $S = (-1, 0, \dots, 0)$  os polos norte e sul respectivamente. Construiremos as semirretas que passam pelo polo norte, os pontos  $x \in S^n$  e em  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ . Considere  $x_0$  a primeira coordenada dos pontos  $x \in S^n$ , para  $t \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$1 + t(x_0 - 1) = 0 \implies t = \frac{1}{1 - x_0}.$$

Tome  $S^n - \{N\}$  e  $S^n - \{S\}$ , sendo assim  $S^n \cap S^n - \{N\} = S^n - \{N\}$  e  $S^n \cap S^n - \{S\} = S^n - \{S\}$ . Definimos as funções:

$$\phi_N : S^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ tal que } \phi_N(x_0, \dots, x_n) = \left( \frac{x_1}{1 - x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_0} \right)$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \phi_S : S^n - \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ tal que} \\ \phi_S(x_0, \dots, x_n) &= \left( \frac{x_1}{1+x_0}, \dots, \frac{x_n}{1+x_0} \right). \end{aligned}$$

Note que  $\phi_N$  e  $\phi_S$  são suaves. Agora precisamos determinar as inversas dessas parametrizações. Fazemos:

$$\begin{aligned} \|N + t(y - N)\| = 1 &\implies \|(1, 0, \dots, 0) + t[(0, y_1, \dots, y_n) - (1, 0, \dots, 0)]\| = 1 \\ &\implies \|(-t + 1, ty_1, \dots, ty_n)\| = 1 \\ &\implies \sqrt{(1-t)^2 + (ty_1)^2 + \dots + (ty_n)^2} = 1 \\ &\implies (1-t)^2 + (ty_1)^2 + \dots + (ty_n)^2 = 1 \\ &\implies t(t - 2 + ty_1^2 + \dots + ty_n^2) = 0. \end{aligned}$$

Tomando  $t \neq 0$

$$t - 2 + ty_1^2 + \dots + ty_n^2 = 0 \implies t + t\|y\|^2 = 2 \implies t = \frac{2}{1 + \|y\|^2}.$$

Disso, podemos definir as inversas:

$$\begin{aligned} \phi_N^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{1 + \|y\|^2} (\|y\|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n) \\ \phi_S^{-1}(y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{1 + \|y\|^2} (1 - \|y\|^2, 2y_1, \dots, 2y_n), \end{aligned}$$

com

$$y = (y_1, \dots, y_n) \text{ e } \|y\|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2.$$

Concluimos  $\phi_N$  e  $\phi_S$  são difeomorfismos que cobrem todo  $S^n$ , sendo assim,  $S^n$  é variedade suave de dimensão  $n$ .

**Proposição 3.1.** *Se  $M \subseteq \mathbb{R}^j$  e  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  são variedades suaves de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente, então  $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{j+k}$  é variedade suave de dimensão  $m + n$ .*

*Demonstração.* Queremos mostrar que para todo  $(x, y) \in M \times N$  existe vizinhança  $U \cap (M \times N)$  relativamente aberta, que admite parametrização. Como  $M, N$  são variedades suaves, significa que para todo  $x \in M$  existe  $U' = U_1 \cap M \subseteq \mathbb{R}^j$  relativamente aberto que admite parametrização, digamos  $\phi_1 : V_1 \rightarrow M$  e que, para todo  $y \in N$  existe  $U'' = U_2 \cap N \subseteq \mathbb{R}^k$  relativamente aberto que admite parametrização, digamos  $\phi_2 : V_2 \rightarrow N$ . Dessa forma tomamos  $(U_1 \times U_2) \cap (M \times N) \subseteq \mathbb{R}^{j+k}$  relativamente aberto, e a parametrização como:

$$\begin{aligned} \phi : U_1 \times U_2 &\rightarrow M \times N \\ (x, y) &\mapsto (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) \end{aligned}$$

Como  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são difeomorfismos,  $\phi$  é difeomorfismo também. E disso,  $U \times N$  é variedade suave de dimensão  $m + n$ .  $\square$

**Definição 3.4** (Subvariedade suave). Seja  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  uma variedade suave de dimensão  $n$ . Uma subvariedade suave de  $N$  é uma variedade suave  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  de dimensão  $m$ , tal que  $M \subseteq N$ .

**Teorema 3.1.** *Se  $M$  é uma subvariedade suave de dimensão  $m$  de uma variedade  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  de dimensão  $n$ , então para todo ponto  $x \in M$  há uma vizinhança relativamente aberta em  $N$  que possui parametrização  $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^k$  a qual  $\phi(0) = x$  e ainda  $\phi(\mathbb{R}^m \times 0) = \phi(V) \cap M$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\phi$  e  $\lambda$  parametrizações de dimensão  $m$  e  $n$  de vizinhanças relativamente abertas de  $x$  em  $M$  e  $N$  respectivamente, podemos supor que  $\phi(0) = x$  e  $\lambda(0) = x$ , agora tome  $f = \lambda^{-1} \circ \phi$  suave de um aberto de  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $f(0) = 0$ , cujo diferencial em 0 tem posto  $m$ , então pelo Teorema 2.6 há um difeomorfismo  $k$  de uma mesma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$  o qual  $k \circ f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$  e  $\phi = \lambda \circ k^{-1}$  atende as condições da tese.  $\square$

## 4 O DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO SUAVE

### 4.1 ESPAÇO TANGENTE

Definimos o objeto com o qual trabalharemos, isto é, variedades suaves, agora queremos caracterizar o que é uma diferencial de uma função  $f : N \rightarrow P$ , em que  $N, P$  são variedades suaves. Para isso, precisaremos do conceito de *espaço tangente*.

**Definição 4.1** (Espaço tangente). Seja  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  uma variedade suave de dimensão  $n$ , e  $x \in N$ , com  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma parametrização de uma vizinhança relativamente aberta de  $x$  tal que  $\phi(u) = x$ . O espaço tangente em  $x$ , denotado por  $T_x N$ , é definido como a imagem de  $d\phi_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**Proposição 4.1.** A definição de espaço tangente não depende da escolha da parametrização.

*Demonstração.* Considere  $\phi$  e o ponto  $u$ , conforme a definição anterior e seja  $\eta$  outra parametrização de uma vizinhança relativamente aberta de  $x \in N$ , a qual  $\eta(v) = x$ . Logo, fazemos  $\alpha = \eta \circ \phi$ , cujo  $\alpha : U_1 \rightarrow V_1$ , em que  $U_1$  e  $V_1$  são vizinhanças abertas de  $u$  e  $v$  respectivamente

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^k & \\ \phi \nearrow & & \nwarrow \eta \\ U_1 & \xrightarrow{\alpha} & V_1 \end{array}$$

O que implica :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^k & \\ d\phi_u \nearrow & & \nwarrow d\eta_v \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\alpha_u} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

E dessa forma, as imagens dos diferenciais  $d\phi_u$  e  $d\eta_v$  são iguais, ou seja, é o mesmo plano tangente. Concluimos que independente da parametrização, a imagem ou melhor dizendo, o plano tangente a  $N$  no ponto  $x$  será o mesmo.  $\square$

Antes de seguir em resultados importantes sobre espaço tangente, faremos uma outra caracterização do que é uma função suave, que nos auxiliará a provar resultados sobre espaços tangentes.

**Definição 4.2** (Função suave). Dados  $X \subseteq \mathbb{R}^j$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ , diremos que uma função  $f : X \rightarrow Y$  é suave, quando para todo  $x \in X$ , existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  em  $\mathbb{R}^j$  e uma função suave  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  com  $F = f$  em  $U \cap X$ .

Note que nessa definição,  $X$  não precisa ser aberto, tal como na primeira definição de função suave 2.6, entretanto, identificamos a  $f$  como  $F$  conforme a definição, em uma vizinhança relativamente aberta  $U \cap X$ .

**Teorema 4.1.** *Sejam  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  uma variedade suave e  $x \in N$ . O espaço tangente  $T_x N$  é subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^k$  de mesma dimensão  $n$  de  $N$ .*

*Demonstração.* Se  $N$  é variedade suave, então existe  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , tal que  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ , com  $\phi(U) = N$ , é parametrização de uma vizinhança relativamente aberta de  $x \in N$ , com  $\phi(u) = x$  ( $u$  existe e é único, pois  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  é bijeção). Considere  $\phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow U$ , como  $\phi^{-1}$  é suave, pela Definição 4.2, existe uma vizinhança  $W \subseteq \mathbb{R}^k$ , tal que,  $\phi^{-1} = \lambda$  no conjunto  $W \cap \phi(U)$ . Se  $U'$  é a imagem inversa pela  $\phi$  de  $W \cap \phi(U)$ , obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \phi \nearrow & & \searrow \lambda \\ U' & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Em que  $i$  é a função inclusão em  $\mathbb{R}^n$ . E este diagrama, implica o seguinte diagrama de diferenciais:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^k & \\ d\phi_u \nearrow & & \searrow d\lambda_x \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{I_d} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Em que  $I_d$  é a função identidade em  $\mathbb{R}^n$ .  $T_x N$  é a imagem de  $d\phi_u$ , e dessa forma, tem dimensão  $n$ . □

**Definição 4.3** (Funções suaves equivalentes). Dizemos que  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  são equivalentes, quando há difeomorfismos  $h$  e  $k$ , tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ k \uparrow & & \uparrow h \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

Isto é,  $f \circ k(x) = h \circ g(x)$ .

*Observação:* Sejam  $M \subseteq \mathbb{R}^p$  e  $N \subseteq \mathbb{R}^q$  duas variedades suaves de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente. Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função suave,  $x \in M$  e  $y = f(x)$ . Como  $f$  é suave, pela Definição 4.2, há uma vizinhança aberta  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  de  $x$  e uma função  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^q$  com  $F = f$  em  $W \cap M$ . A diferencial de  $F$  é  $dF_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Agora, sejam  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ , e  $\phi' : V \rightarrow \mathbb{R}^q$  parametrizações de vizinhanças relativamente abertas de  $x, y$  respectivamente, em  $M, N$  com  $\phi(u) = x$  e  $\lambda(v) = y$ . Tomando  $U$  conveniente, supomos que  $\phi(U) \subseteq W$ , e disso,  $f \circ \phi(U) \subseteq \lambda(V)$ , e dessa forma  $g : U \rightarrow V$ , em que  $g = \lambda^{-1} \circ f \circ \phi$  é função suave, de maneira que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^q \\ \phi \uparrow & & \uparrow \lambda \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

O que leva ao seguinte diagrama de diferenciais:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^p & \xrightarrow{dF_x} & \mathbb{R}^q \\
 d\phi_u \uparrow & & \uparrow d\lambda_v \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{dg_u} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Com isso, podemos definir:

**Definição 4.4** (Diferencial de  $f$  em  $x$ ). Sejam  $M, N$  variedades suaves de dimensões  $m, n$  respectivamente,  $f : M \rightarrow N$  função suave e  $f(x) = y$ . Dado o diferencial  $df_x : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ , definimos a restrição:  $T_x f : T_x M \rightarrow T_y N$  como o diferencial em  $x$ .

**Definição 4.5** (Gráfico de uma função). Seja  $f : N \rightarrow P$ . Definimos o gráfico de  $f$  como o conjunto:

$$G(f) := \{(x, y) \in N \times P; y = f(x)\}.$$

**Teorema 4.2.** Sejam  $N, P$  variedades suaves e  $f : N \rightarrow P$  suave. Então  $G(f)$  é subvariedade suave de  $N \times P$ , e também em qualquer ponto  $(x, f(x))$  do gráfico, o espaço tangente a  $G(f)$  é igual ao  $G(T_x f)$ .

*Demonstração.* Seja  $G(f) = \{(x, y) \in N \times P; y = f(x)\}$ , é imediato que  $G(f) \subseteq N \times P$ . Queremos mostrar agora que  $G(f)$  é variedade suave, para isso precisamos encontrar uma parametrização que o faça. Considere a função  $F : N \rightarrow G(f)$ , definida como  $F(x) = (x, f(x))$ , ela é bijetora e suave por construção. Note que  $F^{-1} : G(f) \rightarrow N$ , é projeção de  $N \times P \rightarrow N$ , de  $x \in N$  tais que  $x$  pertencem a imagem inversa de  $f$ , disso  $F^{-1}$  é suave. Logo  $F$  é parametrização de  $G(f)$ , e este é uma variedade suave.

Por um lado, o diferencial de  $F$  é  $T_x F = (1, T_x f)$ , por outro lado, o espaço tangente de  $G(f)$  ou  $T_x G(f)$  é imagem do diferencial de alguma parametrização de suas parametrizações, já que independemos da escolha da parametrização, digamos que seja a imagem de  $dF_u$ , em que  $F(u) = x$ , mas a imagem de  $dF_u$  é justamente a imagem de  $T_x G(f)$ .  $\square$

**Proposição 4.2.** Sejam  $M, N$  variedades suaves.  $T_{(x,y)} M \times N = T_x M \times T_y N$ .

*Demonstração.* Considere  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ , parametrizações de  $M, N$  respectivamente. Tomando o diferencial de:

$$\begin{aligned}
 \eta : U \times V &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\
 (x, y) &\mapsto (\phi(x), \lambda(y)) \quad ,
 \end{aligned}$$

obtemos

$$T_{(x,y)} M \times N = \text{Im}(d\eta_{(x,y)}) = \text{Im}(d\phi_x) \times \text{Im}(d\lambda_y) = T_x M \times T_y N. \quad (4.1)$$

E portanto  $T_{(x,y)} M \times N = T_x M \times T_y N$ .

$\square$

Definimos a diferencial para um ponto  $x$  de uma função suave  $f$ . Agora, queremos generalizar a ideia de espaço tangente em uma variedade suave  $N$ .

**Definição 4.6** (Fibrado tangente). O conjunto:

$$TN = \{(x, v) \in N \times \mathbb{R}^k; v \in T_x N\}.$$

é denominado fibrado tangente.

**Proposição 4.3.** *Se  $N \subseteq \mathbb{R}^k$  é uma variedade suave de dimensão  $n$ , então o fibrado tangente  $TN \subseteq \mathbb{R}^{2k}$  é uma variedade suave de dimensão  $2n$ .*

*Demonstração.* Como  $N$  é variedade suave existe  $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}^k$  parametrização de uma vizinhança relativamente aberta de  $N$ . Agora, considere uma vizinhança relativamente aberta de  $(u, x) \in TN$ , e a parametrização  $TN = \{(u, x) \in N \times \mathbb{R}^k; x \in T_x N\}$  e  $\lambda : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  tal que  $\lambda(u, x) = (\phi(u), d\phi_u(x))$ . Como  $U$  tem dimensão  $n$ ,  $\lambda$  é uma parametrização  $2n$ -dimensional de  $TN$ .  $\square$

**Definição 4.7** (Imersão). Sejam  $M$  e  $N$  variedades suaves, uma função diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é dita imersão se para todo ponto  $x \in M$  o diferencial  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  é injetor. Isto é, o posto de  $T_x f$  é sempre igual à dimensão de  $M$ .

**Definição 4.8** (Submersão). Sejam  $M$  e  $N$  variedades suaves, uma função diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é dita submersão se para todo ponto  $x \in M$  o diferencial  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  é sobrejetor. Isto é, o posto de  $T_x f$  é sempre igual à dimensão de  $N$ .

## 5 GERMES DE UMA APLICAÇÃO

### 5.1 GERMES DE UMA FUNÇÃO SUAVE

Tendo em mente a definição de uma variedade suave, queremos entender como uma função se comporta numa vizinhança de um ponto de seu domínio, só que, não uma função qualquer, uma função suave, cujo seu domínio é variedade suave. As seguintes definições e proposições são o que determinam a base para a teoria de singularidades no nosso estudo. Como referência complementar utilizamos (Monteiro; Ferreira; Sicuti, 2015).

Sempre que falarmos sobre uma vizinhança qualquer, considere-a uma vizinhança aberta.

**Definição 5.1** (Germes suaves). Sejam  $N, P$  variedades suaves, considere o ponto  $x \in N$ , e o conjunto de todas as função de  $U$  em  $P$ , em que  $U$  é uma vizinhança de  $x$  em  $N$ . Neste conjunto, vamos definir uma relação de equivalência, dados  $U_1, U_2$  vizinhanças de  $x \in N$  e duas funções  $f : U_1 \rightarrow P$  e  $g : U_2 \rightarrow P$ , dizemos  $f \sim g$  quando existe vizinhança  $U_3$  de  $x$  de  $N$ , para qual as restrições  $f|_{U_3}$  e  $g|_{U_3}$  são iguais. As classes de equivalência sobre essa relação, são chamada de germes suaves de funções  $N \rightarrow P$  em  $x$ , chamaremos simplesmente de germes.

Os elementos (funções) que formam classes de equivalência, são denominadas representantes do germe. Em um mesmo germe, dois representantes, digamos,  $f, g$ , tem a mesma imagem em  $x$ , isto é,  $f(x) = g(x)$ , em vista disso, utilizaremos a seguinte notação:

$$f : (N, x) \rightarrow (P, y)$$

em que,  $x$  é chamado de *fonte do germe* e  $y = f(x)$  é chamado *meta do germe*. Em particular quando  $N = P$ , usamos a notação  $1_N : (N, x) \rightarrow (N, x)$ , para o germe em  $x$ .

Podemos definir algumas operações sobre germes, similares a operações com funções.

**Definição 5.2** (Composição de germes). Dados dois germes  $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$  e  $g : (P, y) \rightarrow (R, z)$ , e os representantes  $f : U \rightarrow P$  e  $g : V \rightarrow R$ , em que  $U$  é vizinhança de  $x \in N$  e  $V$  é vizinhança de  $y \in P$ , com  $f(U) \subseteq V$ , podemos fazer a composição  $g \circ f : U \rightarrow R$  em  $x$ , e definimos o germe de  $g \circ f$  como o *germe composição*:  $g \circ f : (N, x) \rightarrow (R, z)$ .

**Definição 5.3** (Germe invertível). Dado o germe  $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ , dizemos que ele é invertível quando existe um germe  $g : (P, y) \rightarrow (N, x)$  o qual  $g \circ f = 1_N$  e  $f \circ g = 1_P$ , e  $g$  é chamado de inversa de  $f$ .

**Definição 5.4** (Diferencial de um germe). Dado um germe  $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ , seja um representante  $f : U \rightarrow P$ , em que  $U$  é vizinhança de  $N$ , tomamos a diferencial de  $f$  em  $x$ ,  $T_x f : T_x N \rightarrow T_y P$ , que é definida como a diferencial de  $x$  de qualquer representante do germe  $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ .

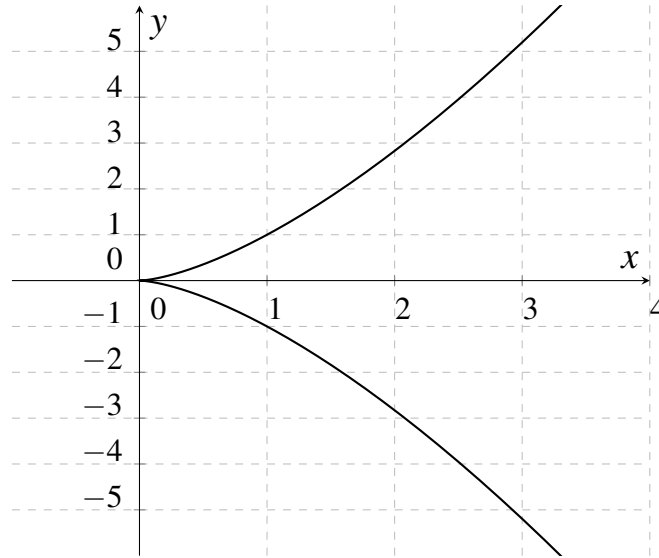
**Definição 5.5** (Posto de um germe). Dado um germe  $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ , o seu posto é definido como sendo o posto da sua diferencial, isto é, posto<sup>1</sup> de  $T_x f : T_x N \rightarrow T_y P$ . Quando o posto de  $f$

<sup>1</sup> Posto também é dimensão da imagem da transformação linear

é igual dimensão de  $N$  o germe é chamado *imersivo*, quando o posto de  $f$  igual a dimensão de  $P$  é chamado *submersivo*. Quando  $f$  não é imersivo nem submersivo é chamado *singular*.

**Exemplo 5.1** (cúspide). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $f(x) = (x^2, x^3)$ . A imagem dessa parametrização é a *cúspide*:

Figura 2 – Cúspide



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Tomando a diferencial de  $f$ , teremos  $T_x f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que,  $T_x f = (2x, 3x^2)$ , e o posto dessa matriz, será 0, somente quando  $x = 0$ , e 1 nos demais casos. Dessa forma o germe de  $f$  é imersivo  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , pois  $\dim T_x f = \dim \mathbb{R} = 1$ . No caso em que  $x = 0$ , o germe de  $f$  é singular.

**Definição 5.6** (germes equivalentes). Sejam  $f : (N_1, x_1) \rightarrow (P_1, y_1)$ ,  $g : (N_2, x_2) \rightarrow (P_2, y_2)$  dois germes, e  $N, P$  variedades suaves, em que  $N_1, N_2 \subseteq N$ , e  $P_1, P_2 \subseteq P$ , se existem germes  $h, k$  invertíveis, tais que:

$$\begin{array}{ccc} (N_1, x_1) & \xrightarrow{f} & (P_1, y_1) \\ h \uparrow & & \uparrow k \\ (N_2, x_2) & \xrightarrow{g} & (P_2, y_2) \end{array}$$

ou seja,  $f \circ h = k \circ g$ . Dessa forma dizemos que os germes  $f$  e  $g$  são equivalentes e que o diagrama acima comuta.

**Exemplo 5.2.** Os germes  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $g(x) = 4x$ ,  $h(x) = 2x$  e  $k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2$ , de  $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  são equivalentes, pois:

$$(f \circ h)(x) = (2x)^2 + 2 = 4x^2 + 2 \text{ e } (k \circ g)(x) = \left(\frac{4x}{2}\right)^2 + 2 = 4x^2 + 2$$

Então obtemos que  $(f \circ h)(x) = (k \circ g)(x)$  e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, 0) \\ h \uparrow & & \uparrow k \\ (\mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}, 0) \end{array}$$

**Exemplo 5.3.** Considere um germe  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  submersivo, e um representante  $f$  deste germe, a imagem de seu diferencial  $T_0f : T_0\mathbb{R}^n \rightarrow T_0\mathbb{R}^p$  tem mesma dimensão de  $\mathbb{R}^p$ , ou seja,  $p$ . Disso, pelo Teorema 2.6, existe difeomorfismo  $h$ , tal que:  $f \circ h^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p) = \pi \circ I_{\mathbb{R}^p}$ , em que  $I_{\mathbb{R}^p}$  é identidade em  $\mathbb{R}^p$ , disso temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ h^{-1} \uparrow & & \uparrow I_{\mathbb{R}^p} \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Ou seja, qualquer germe  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  submersivo em uma vizinhança de 0 é equivalente ao germe da projeção  $\pi$ , em torno de 0.

**Exemplo 5.4.** Considere um germe  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  imersivo, e um representante  $f$  desse germe, a imagem de seu diferencial  $T_0f : T_0\mathbb{R}^n \rightarrow T_0\mathbb{R}^p$  tem dimensão que  $\mathbb{R}^n$ . Disso, pelo Teorema 2.5, existe difeomorfismo  $k$ , tal que:  $k \circ f = i = i \circ I_{\mathbb{R}^n}$ , em que  $i$  é inclusão de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^p$ , disso temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ I_{\mathbb{R}^n} \uparrow & & \uparrow k \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Ou seja, qualquer germe  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  imersivo em uma vizinhança de 0 é equivalente ao germe inclusão em torno de 0.

**Definição 5.7** (Espaço jato). Denominamos de **Espaço-jato**  $J^k(n, p)$  o espaço vetorial de todas as funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  as quais seus componentes são polinômios sem termos livres, de grau menor ou igual que  $k$  nas coordenadas canônicas  $x_1, \dots, x_n$  em  $\mathbb{R}^n$ , os elementos de  $J^k(n, p)$  serão denominados de  $k$ -jatos.

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  uma função suave e  $a \in \mathbb{R}^n$ , e seja a série de Taylor de  $f(x) - f(a)$  na origem, ao omitirmos todos os termos de grau maior que  $k$  podemos considerar o que obtemos como sendo um  $k$ -jato, o qual escrevemos  $j^k f(a)$  e o denominamos como  $k$ -jato do germe de  $f$  em  $a$ .

**Exemplo 5.5.** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \cos(x) + x^2$ . Vamos calcular o 4-jato dessa função em torno da origem. Temos que,  $f'(x) = -\text{sen}(x) + 2x$ ,  $f''(x) = -\cos(x) + 2$ ,  $f^{(3)} = \text{sen}(x)$  e  $f^{(4)} = \cos(x)$ . Sendo assim, pela Definição de polinômio de Taylor 2.11, temos que o 4-jato de  $f$  é em 0:

$$j^4 f(0) = (-\text{sen}(0) + 2 \cdot 0) \cdot x + \frac{(-\cos(0) + 2)}{2!} \cdot x^2 - \frac{\text{sen}(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{\cos(0)}{4!} x^4 \implies$$

$$j^4 f(0) = \frac{1}{2} \left( x^2 + \frac{1}{12} x^4 \right).$$

## 6 TRANSVERSALIDADE

Como referência complementar utilizamos (Lee, 2012), (Manfio, S.d), (Wang, S.d), (Saia, 2011), (Greenblatt, 2015), (Barata, 2024) e (Guillemin; Pollack, 1974).

**Definição 6.1** (Interseção transversal de espaços vetoriais). Dados dois subespaços vetoriais  $V_1$  e  $V_2 \subset V$  dizemos que eles intersectam transversalmente quando  $V_1 + V_2 = V$ .

Notação:  $V_1 \pitchfork V_2$ .

**Exemplo 6.1.** Os subespaços vetoriais  $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^2$ , tais que:  $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$  e  $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$  geram o  $\mathbb{R}^2$ , assim  $V_1 \pitchfork V_2$ .

Vamos fazer algumas observações acerca de transversalidade, conforme a Definição 6.1.

1) Do Teorema da Dimensão de Soma de Subespaços Vetoriais 2.1, se  $U$  e  $W$  são subespaços de  $V$ , então

$$\begin{aligned} \dim(U) + \dim(W) &= \dim(U + W) + \dim(U \cap W) \implies \\ \dim(U) + \dim(W) &\geq \dim(U + W). \end{aligned}$$

Disso podemos dizer que não existem  $U$  e  $W$ , os quais  $\dim(U) + \dim(W) < \dim(U + W)$  e o teorema é atendido. Sendo assim se  $U$  e  $W$  são transversais em  $V$ , isto é  $U + W = V$ , não há como ocorrer:

$$\dim(U) + \dim(W) < \dim(V).$$

**Exemplo 6.2.** Se  $U, W$  fossem duas retas contidas em  $V = \mathbb{R}^3$  que se intersectam, não seria possível gerar todo o espaço  $V$ , porque teríamos  $\dim(U) + \dim(W) = 2 < 3 = \dim(V)$ . Isso significa que ainda haja interseção entre os subespaços vetoriais, se eles estiverem contidos num espaço vetorial suficientemente grande, não ocorre transversalidade.

2) Se  $U$  e  $W$  são subespaços vetoriais de  $V$  com  $U, W$  transversais em  $V$ ,  $U \cap W \neq \emptyset$  e  $\dim(U) + \dim(W) > \dim(V)$ , então  $U \cap W \neq \{0\}$ . (Em que  $0$  é elemento neutro de  $V$ ).

*Demonstração.* Suponha que  $U \cap W = \{0\}$  do Teorema 2.1 teríamos:

$$0 = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W).$$

E da hipótese obtemos:

$$0 = \dim(U) + \dim(W) - \dim(V) > 0.$$

O que é um absurdo. Portanto  $U \cap W \neq \{0\}$ . □

**Exemplo 6.3.** Tome  $U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u = \alpha(1, 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ ,  $W = \mathbb{R}^2$  e  $V = \mathbb{R}^2$ .

**Definição 6.2** (Interseção transversal). Sejam  $N$  e  $Q$  duas subvariedades suaves de uma variedade  $P$ . Dizemos que elas intersectam transversalmente em  $x \in N \cap Q$  quando seus espaços tangentes  $T_x N$  e  $T_x Q$  intersectam transversalmente em  $T_x P$ . Quando isso ocorre para todo o ponto  $x$  em  $N \cap Q$  dizemos que  $N$  e  $Q$  intersectam transversalmente em  $P$ .

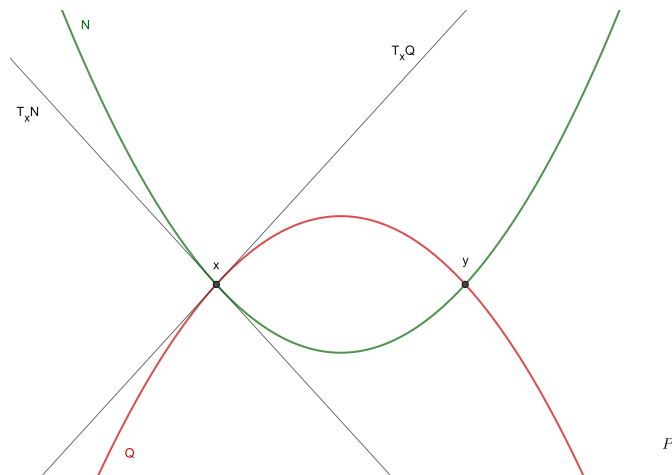
Isto é, se para todo  $x \in N \cap Q$  temos:

$$T_x N + T_x Q = T_x P,$$

então dizemos que  $N \pitchfork Q$  em  $P$ . Se a interseção de  $N$  e  $Q$  é vazia, assumiremos que  $N$  e  $Q$  intersectam transversalmente em  $P$ .

Considere a figura a seguir para a visualização da Definição de interseção transversal:

Figura 3 – Interseção transversal no ponto  $x$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na figura  $N, Q$  são variedades suaves contidas em  $P$ , que intersectam nos pontos  $x$  e  $y$ . Em  $x$ , seus espaços tangentes,  $T_x N$  e  $T_x Q$  geram  $P = T_x P$ , dessa forma dizemos que  $N$  e  $Q$  intersectam transversalmente em  $x$ . De maneira similar intersectam transversalmente em  $y$ , dizemos que  $N$  e  $Q$  intersectam transversalmente em  $P$ .

A seguir veremos algumas figuras que ilustram casos que configuram ou não transversalidade entre variedades suaves.

Figura 4 – Ilustrações 1 e 2 - Transversalidade

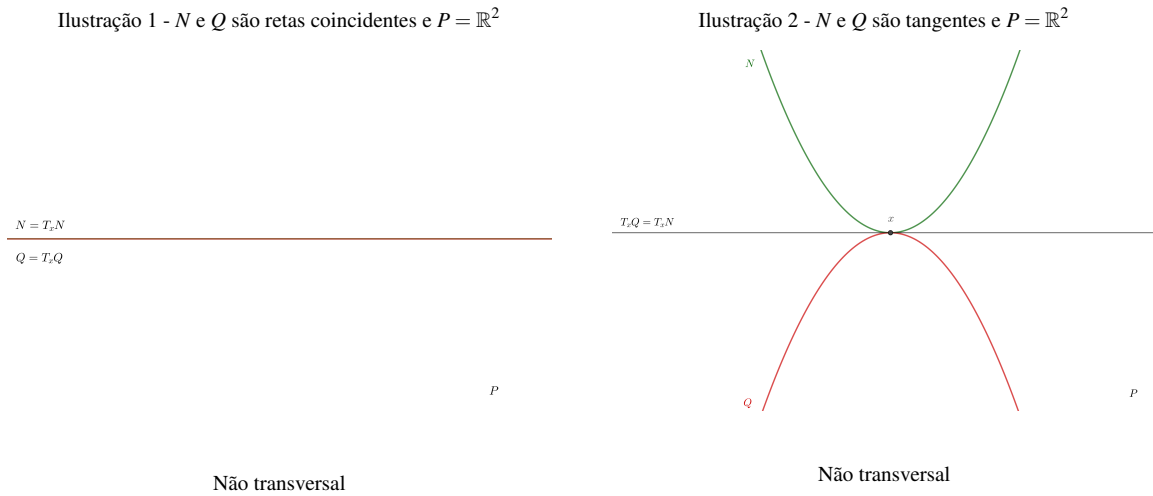
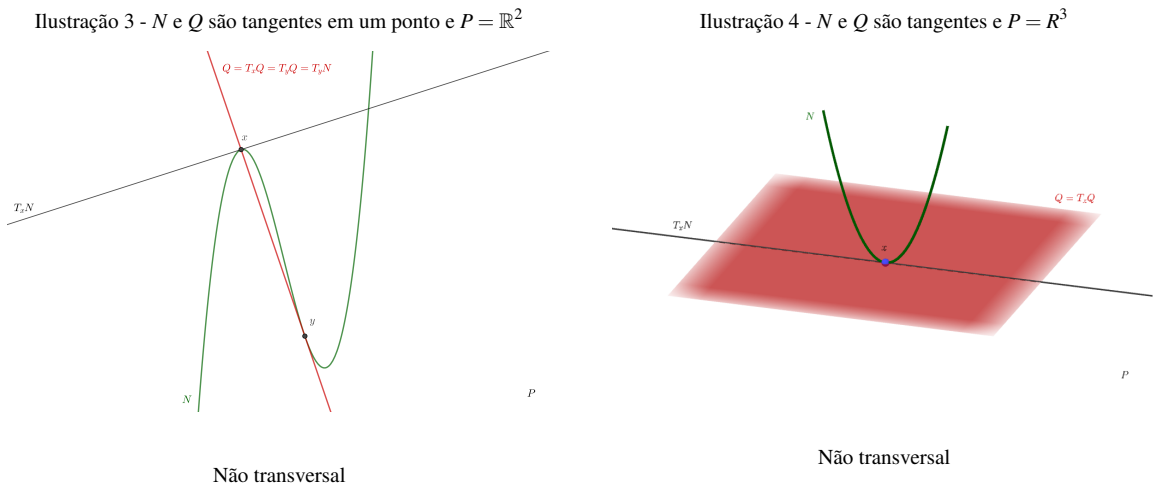


Figura 5 – Ilustrações 3 e 4 - Transversalidade



As variedades apresentadas na Ilustração 1 são retas coincidentes, isso significa que a interseção  $N \cap Q = N = Q$  mais ainda, os espaços tangentes dessas variedades são as próprias variedades, então para todo ponto  $x \in N$  não há como gerar a partir de  $T_x N$  e  $T_x Q$  o espaço  $T_x P = P$ .

Na Ilustração 2 a interseção  $N \cap Q$  é um único ponto  $x$ , analisando os espaços tangentes podemos notar que  $T_x N = T_x Q$  é uma reta, não sendo possível gerar  $T_x P = P$ .

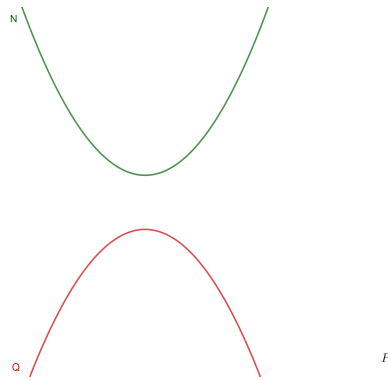
Observe que  $N \cap Q = \{x, y\}$  na Ilustração 3. Apesar de  $N$  e  $Q$  intersectarem transversalmente em  $x$  não é possível dizer a mesma coisa para  $y$ , porque neste ponto as duas variedades são tangentes e ocorre que  $T_y Q = T_y N$  é uma reta, não sendo possível gerar  $T_y P = P = \mathbb{R}^2$ .

A interseção  $N \cap Q$  é um único ponto  $x$  na Ilustração 4. Ali ocorre que a reta  $T_x N$  fica contida no plano  $T_x Q = Q$  dessa forma não é possível que os espaços tangentes de  $Q$  e  $N$  em  $x$

gerem  $T_x P = P$ .

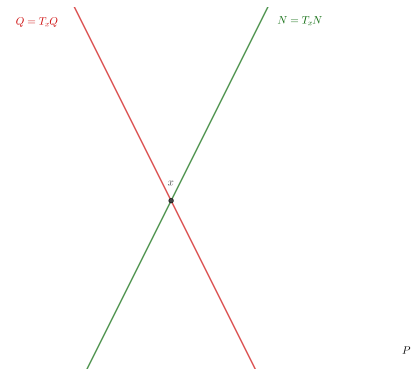
Figura 6 – Ilustrações 5 e 6 - Transversalidade

Ilustração 5 - A interseção de  $N$  e  $Q$  é vazia e  $P = \mathbb{R}^2$



Transversal

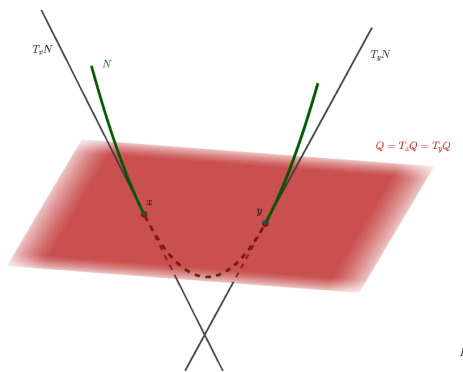
Ilustração 6 -  $N$  e  $Q$  são retas concorrentes e  $P = \mathbb{R}^2$



Transversal

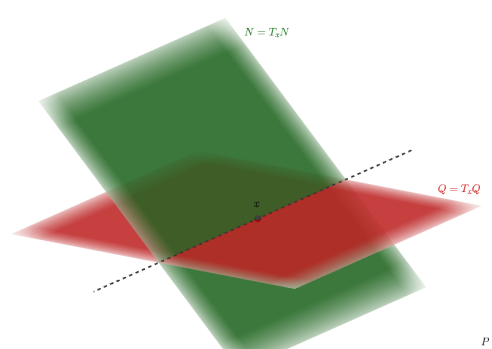
Figura 7 – Ilustrações 7 e 8 - Transversalidade

Ilustração 7 -  $N$  e  $Q$  conforme a figura e  $P = \mathbb{R}^3$



Transversal

Ilustração 8 -  $N$  e  $Q$  conforme a figura e  $P = \mathbb{R}^3$



Transversal

Na ilustração 5, como a interseção de  $N$  e  $Q$  é vazia, assumimos que  $N$  e  $Q$  intersectam transversalmente em  $P$ .

Visto que  $N$  e  $Q$  são retas concorrentes na Ilustração 6 e ocorre que  $N = T_x N$  e  $Q = T_x Q$ , pelo fato de que esses espaços tangentes são retas distintas e não paralelas é possível gerar  $P$  a partir delas. Dessa forma  $N$  e  $Q$  são transversais em  $P$ .

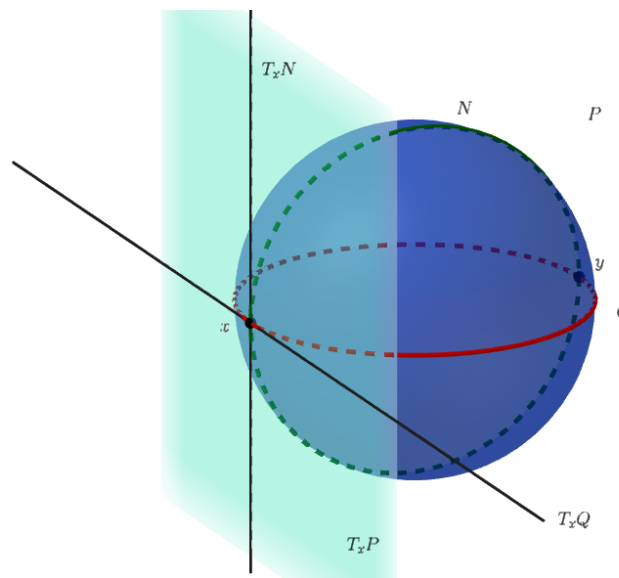
Na Ilustração 7 a interseção  $N \cap Q$  é dada por dois pontos, em ambos ocorrerá que o espaço tangente de  $N$  é uma reta e o espaço tangente de  $Q$  será o próprio plano  $Q$ , também

teremos que essas retas serão secantes ao plano. Nessas condições ocorrerá a transversalidade de  $N$  e  $Q$  em  $P$ .

Por fim, na Ilustração 8 a interseção  $N \cap Q$  é uma reta, ocorre que para todo ponto dessa reta os espaços tangentes de  $N$  e  $Q$  são os próprios  $N$  e  $Q$ , como são planos secantes ocorrerá a transversalidade de  $N$  e  $Q$  em  $P$ .

Vale a pena ressaltar que em todos as ilustrações ocorreu  $P = T_x P$  para  $x \in N \cap Q$ , entretanto isso não é verdade sempre, conforme a figura a seguir:

Figura 8 – Interseção transversal em uma esfera



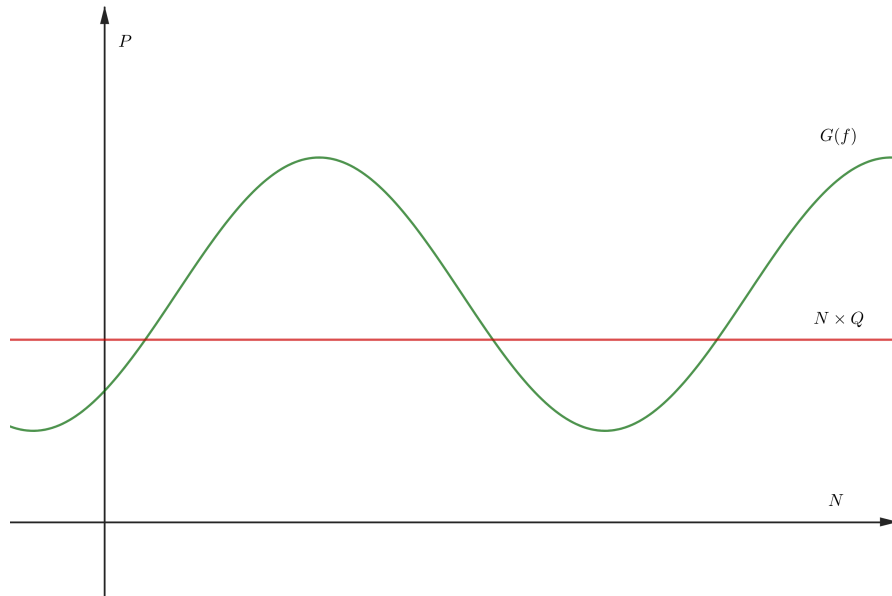
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Neste caso temos que  $P = S^2$  com  $N$  e  $Q$  variedades suaves contidas em  $P$  as quais  $N \cap Q = \{x, y\}$ . Note que  $T_x P$  é um plano e temos que  $T_x N$  e  $T_x Q$  são retas que geram  $T_x P$ , isso também acontece em  $y$ , então concluímos que  $N$  e  $Q$  são transversais em  $P$  e  $T_x P \neq P$ .

Comparando a ilustração 2 da figura 4 e a figura 3 podemos notar que se na primeira imagem as variedades  $N$  ou  $Q$  fossem minimamente deslocadas, assumiriam a condição de transversais em  $P$ . Isso nos leva a sugerir que pequenos deslocamentos podem garantir transversalidade e essa ideia será apresentada posteriormente no Teorema da Transversalidade. Com isso concluímos as observações.

**Definição 6.3** ( $f \pitchfork Q$ ). Seja  $f: N \rightarrow P$  uma função suave e  $Q \subset P$  uma subvariedade suave de  $P$ . Temos também que  $G(f)$  e  $N \times Q$  são subvariedades de  $N \times P$ . Dizemos que  $f$  é transversal a  $Q$  quando  $G(f) \pitchfork (N \times Q)$  em  $N \times P$ . Escrevemos  $f \pitchfork Q$ .

A seguir, uma ilustração da Definição 6.3 quando  $Q$  é um único ponto.

Figura 9 –  $f \pitchfork Q$  e  $Q$  é um único ponto

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

**Proposição 6.1.** *Seja  $f: N \rightarrow P$  uma função suave e que as dimensões de  $N$  e  $P$  são respectivamente  $n$  e  $p$  e também  $Q \subset P$  subvariedade de  $P$ . Uma equivalência para a Definição de  $f \pitchfork Q$  é  $\forall x \in N$  com  $y = f(x) \in Q$  temos:*

$$T_x f(T_x N) + T_y Q = T_y P.$$

*Demonstração.* Pela Definição 6.3 é necessário que para todo ponto  $z = (x, y) \in G(f) \cap N \times Q$  essas variedades sejam transversais, isto é, conforme a Definição 6.2 para todo ponto  $(x, f(x))$  com  $f(x) \in Q$ :

$$T_z(G(f)) + T_z(N \times Q) = T_z(N \times P).$$

De acordo com o Teorema 4.2 teremos que  $T_z(G(f)) = G(T_x f)$  e da Proposição 4.2 obtemos  $T_z(N \times Q) = T_x N \times T_y Q$ , sendo assim reescrevemos a sentença anterior como:

$$\begin{aligned} G(T_x f) + T_x N \times T_y Q &= T_x N \times T_y P \implies \\ T_x N \times T_x f(T_x N) + T_x N \times T_y Q &= T_x N \times T_y P. \end{aligned}$$

Omitindo a primeira coordenada,

$$T_x f(T_x N) + T_y Q = T_y P.$$

Agora, queremos mostrar que dada a condição de transversalidade  $T_x f(T_x N) + T_y Q = T_y P$  ocorre que  $T_z(G(f)) + T_z(N \times Q) = T_z(N \times P)$ .

Para isso, tome um vetor  $(w, v) \in T_x N \times T_y P$ , a condição de transversalidade nos diz que se

$v \in T_y P$ , então ele pode ser escrito como  $v = (T_x f(w_1) + u)$  em que  $w_1 \in T_x N$  e  $u \in T_y Q$ , podemos decompor  $w = w_1 + w_2$  e com isso escrevemos  $(w, v) = (w_1, T_x f(w_1)) + (w_2, u)$ .

Agora, considerando um vetor  $(w, v) \in T_z(G(f)) + T_z(N \times Q)$ , podemos escrever  $(w, v) = (w', v') + (w'', v'')$  em que  $(w', v') \in T_z(G(f))$  e  $(w'', v'') \in T_x N \times T_y Q$ , novamente, como  $T_z(G(f)) = G(T_x f)$  obtemos que  $(w', v') \in (T_x N, T_x f(T_x N))$ , sendo assim  $(w, v) = (w', v') + (w'', v'') \in T_z(N \times P)$ . Portanto  $T_z(G(f)) + T_z(N \times Q) = T_z(N \times P)$ .  $\square$

Observação: utilizaremos a partir desse momento a notação  $T_x f = df_x$  para evitar confusão quando falamos do diferencial.

**Proposição 6.2.** *Se  $f: N \rightarrow P$  é suave e  $Q$  é subvariedade de  $P$ ,  $f \pitchfork Q$  e existe  $x \in N$  tal que  $y = f(x) \in Q$ , então  $\dim N \geq \text{codim } Q$ .*

*Demonstração.* Da Proposição 6.3  $f \pitchfork Q$  implica  $df_x(T_x N) + T_y Q = T_y P$ . Calculando a dimensão em ambos os lados, obtemos:

$$\dim(df_x(T_x N) + T_y Q) = \dim T_y P.$$

Observe que  $df_x(T_x N) \subseteq T_y P$  e  $T_y Q \subseteq T_y P$ , dessa forma podemos aplicar o Teorema 2.1 de soma de dimensão de subespaços e dessa forma:

$$\dim df_x(T_x N) + \dim T_y Q - \dim(df_x(T_x N) \cap T_y Q) = \dim T_y P \implies$$

$$\dim df_x(T_x N) + \dim T_y Q \geq \dim T_y P \implies$$

$$\dim df_x(T_x N) \geq \dim T_y P - \dim T_y Q. \quad (6.1)$$

Do Teorema 2.2 e da aplicação diferencial  $df_x: T_x N \rightarrow T_y P$ , obtemos:

$$\dim(T_x N) = \dim(\mathcal{N}(df_x)) + \dim(df_x(T_x N)) \implies$$

$$\dim(T_x N) \geq \dim(df_x(T_x N)). \quad (6.2)$$

Agora, o Teorema 4.1 nos diz que  $\dim N = \dim T_x N$ ,  $\dim Q = \dim T_y Q$  e  $\dim P = \dim T_y P$ . Substituindo essas informações nas equações (6.1) e (6.2) e fazendo a combinação delas, podemos dizer que:

$$\dim N = \dim T_x N \geq \dim df_x(T_x N) \geq \dim T_y P - \dim T_y Q = \dim P - \dim Q = \text{codim } Q$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\dim N \geq \text{codim } Q.$$

$\square$

**Proposição 6.3.** *Se  $f: N \rightarrow P$  é suave e  $Q$  é subvariedade de  $P$ ,  $f \pitchfork Q$  e  $\text{codim } Q > \dim N$ , então  $\text{Im}(f) \cap Q = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $Im(f) \cap Q \neq \emptyset$ , isto é, existe  $x \in N$  tal que  $f(x) \in Q$ , pela proposição 6.2 isso implica que  $dim N \geq codim Q$ , o que é um absurdo. Portanto,  $Im(f) \cap Q = \emptyset$ .  $\square$

**Proposição 6.4.** *Se  $f: N \rightarrow P$  é uma submersão e  $Q$  é subvariedade de  $P$ , então  $f$  será transversal à  $Q$ .*

*Demonstração.* Seja  $f: N \rightarrow P$ ,  $Q \subseteq P$  subvariedade suave e  $x \in N$  tal que  $y = f(x) \in Q$ . Como  $Q \subseteq P$  temos  $T_y P + T_y Q = T_y P$ . Agora, já que  $f$  é uma submersão, isso nos diz que  $df_x: T_x N \rightarrow T_{f(x)} P$  é sobrejetora, o que significa que  $df_x(T_x N) = T_{f(x)} P = T_y P$ . Dessa forma podemos substituir  $T_y P$  na sentença inicial, da seguinte maneira,

$$T_y P + T_y Q = T_y P = df_x(T_x N) = df_x(T_x N) + T_y Q.$$

E pela Proposição 6.1, obtemos  $f \pitchfork Q$ .  $\square$

**Proposição 6.5.** *Sejam  $f_1$  e  $f_2$  funções suaves equivalentes conforme o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{f_1} & P_1 \\ h \uparrow & & \uparrow k \\ N_2 & \xrightarrow{f_2} & P_2 \end{array}$$

Em que  $N_1, N_2, P_1, P_2$  são variedades suaves e ainda  $Q_1$  é subvariedade de  $P_1$  e  $Q_2$  é subvariedade de  $P_2$ . Nessa condições temos que  $f_1 \pitchfork Q_1 \iff f_2 \pitchfork Q_2$ .

*Demonstração.* Da Definição de funções suaves equivalentes, obtemos que  $h: N_2 \rightarrow N_1$  e  $k: P_2 \rightarrow P_1$  são difeomorfismos, os quais  $f_1 \circ h = k \circ f_2$  e também  $h^{-1}: N_1 \rightarrow N_2$  e  $k^{-1}: P_1 \rightarrow P_2$  são difeomorfismos os quais  $k^{-1} \circ f_1 = f_2 \circ h^{-1}$ . (Observe o diagrama para ilustração)

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{f_1} & P_1 \\ h^{-1} \downarrow & & \downarrow k^{-1} \\ N_2 & \xrightarrow{f_2} & P_2 \end{array}$$

Da Definição de transversalidade 6.3 se  $f \pitchfork Q_1$ , então para  $x \in N_1$  tal que  $f_1(x) \in Q_1$  temos

$$d(f_1)_x(T_x N_1) + T_{f_1(x)} Q_1 = T_{f_1(x)} P_1 \quad (6.3)$$

e queremos obter  $f \pitchfork Q_2$ , isto é, para  $y \in N_2$  tal que  $f_2(y) \in Q_2$  ocorra:

$$d(f_2)_y(T_y N_2) + T_{f_2(y)} Q_2 = T_{f_2(y)} P_2.$$

Para isso, tome o seguinte diferencial

$$d(k^{-1})_{f_1(x)}: T_{f_1(x)} P_1 \rightarrow T_{k^{-1}(f_1(x))} P_2.$$

Vamos aplicá-lo em (6.3), obtendo

$$d(k^{-1})_{f_1(x)}(d(f_1)_x(T_x N_1) + T_{f_1(x)} Q_1) = d(k^{-1})_{f_1(x)}(T_{f_1(x)} P_1).$$

E pelo fato de que a diferenciabilidade em  $\mathbb{R}^n$  é transformação linear, segue que:

$$d(k^{-1})_{f_1(x)}(d(f_1)_x(T_x N_1)) + d(k^{-1})_{f_1(x)}(T_{f_1(x)} Q_1) = d(k^{-1})_{f_1(x)}(T_{f_1(x)} P_1). \quad (6.4)$$

Como  $d(k^{-1})_{f_1(x)}$  é isomorfismo e  $k^{-1} \circ f_1 = f_2 \circ h^{-1}$  temos  $d(k^{-1})_{f_1(x)}(T_{f_1(x)} P_1) = T_{k^{-1}(f_1(x))} P_2 = T_{f_2(h^{-1}(x))} P_2$ . Novamente por ser isomorfismo  $d(k^{-1})_{f_1(x)}(T_{f_1(x)} Q_1) = T_{k^{-1}(f_1(x))} Q_2$ . Dessa forma, (6.4) é igual à

$$d(k^{-1})_{f_1(x)}(d(f_1)_x(T_x N_1)) + T_{k^{-1}(f_1(x))} Q_2 = T_{f_2(h^{-1}(x))} P_2. \quad (6.5)$$

Da comutatividade do diagrama temos  $k^{-1} \circ f_1 = f_2 \circ h^{-1}$  e  $f_2(h^{-1}(x)) = f_2(y)$ . Sendo assim, reescrevemos (6.5) como

$$d(k^{-1})_{f_1(x)}(d(f_1)_x(T_x N_1)) + T_{f_2(y)} Q_2 = T_{f_2(y)} P_2. \quad (6.6)$$

Novamente do diagrama se  $k^{-1} \circ f_1 = f_2 \circ h^{-1}$ , então

$$d(k^{-1})_{f_1(x)} \circ d(f_1)_x = d(f_2)_y \circ d(h^{-1})_x. \quad (6.7)$$

Substituindo (6.7) em (6.6), obtemos:

$$d(f_2)_y(d(h^{-1})_x(T_x N_1)) + T_{f_2(y)} Q_2 = T_{f_2(y)} P_2. \quad (6.8)$$

Como o diferencial  $d(h^{-1})_x: T_x N_1 \rightarrow T_y N_2$  é isomorfismo, obtemos que

$$d(h^{-1})_x(T_x N_1) = T_y N_2. \quad (6.9)$$

Dessa forma, substituindo (6.9) em (6.8), obtemos:

$$d(f_2)_y(T_y N_2) + T_{f_2(y)} Q_2 = T_{f_2(y)} P_2.$$

Isto é,  $f_2 \pitchfork Q_2$ . A demonstração de  $f_2 \pitchfork Q_2 \implies f_1 \pitchfork Q_1$  é similar.  $\square$

**Definição 6.4** (Valor regular e ponto crítico). Seja  $f: N \rightarrow P$  uma função suave e  $Q \subset P$  é um único ponto, isto é,  $Q = \{y\}$  é uma subvariedade 0-dimensional de  $P$ .

- Um ponto  $x \in N$  é chamado ponto regular de  $f$  se o diferencial  $df_x$  é sobrejetor.
- Um ponto  $y \in P$  de  $f$  é chamado valor regular de  $f$  se  $df_x$  é sobrejetor para qualquer  $x \in f^{-1}(y)$ .
- Um ponto  $x \in N$  é chamado de ponto crítico de  $f$  se  $y = f(x)$  não é regular e nesse caso,  $y = f(x)$  é denominado de valor crítico.

d) Se  $y \notin \text{Im}(f)$ , então  $y$  é valor regular de  $f$ .

Para verificar se o diferencial, que é uma transformação linear é sobrejetivo ou não, precisamos analisar a matriz Jacobiana. Podemos ou conferir se ela é quadrada e invertível, ou verificar o posto de  $Jf(x)$ . O posto é importante, pois dado um diferencial  $df_x: T_xN \rightarrow T_yP$  teremos  $\text{posto}(df_x) = \dim(\text{Im}(df_x))$  e também, caso ocorra  $\dim(\text{Im}(df_x)) = \dim(T_yP)$  a sobrejetividade é garantida, e assim determinados os valores regulares em questão.

**Exemplo 6.4.** Tome a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 4x_1x_2)$ . Veja que,  $df_{(x_1, x_2)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dado por:

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 4x_2 & 4x_1 \end{pmatrix}.$$

E seu determinante  $\det Jf_{(x_1, x_2)} = 8x_1^2 + 8x_2^2 = 8(x_1^2 + x_2^2)$ . Para que  $df_{(x_1, x_2)}$  seja sobrejetor, é necessário que  $\det(Jf_{(x_1, x_2)}) \neq 0$ , entretanto, isso só acontece quando  $x_1 = x_2 = 0$ . O que nos diz que todo ponto  $x \in \mathbb{R}^2$ , exceto  $x = (0, 0)$  é valor regular de  $f$ . Dessa forma, chamamos  $x = (0, 0)$  de ponto crítico e  $y = f(0, 0) = (0, 0)$  de valor crítico.

**Exemplo 6.5.** Tome a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . Veja que  $df_{(x_1, x_2)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por:

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso vamos analisar o posto dessa matriz. Para que ocorra a sobrejetividade, precisamos que o posto seja 1, o único caso em que ele não o é, é quando  $x_1 = x_2 = 0$ . O que nos diz que todo ponto  $x \in \mathbb{R}^2$ , exceto  $x = (0, 0)$  é valor regular de  $f$ . Chamamos então  $x = (0, 0)$  de ponto crítico e  $y = f(0, 0) = 0$  de valor crítico.

**Exemplo 6.6.** Tome a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2)$ . Veja que  $df_{(x_1, x_2)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dado por:

$$Jf(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Suponha que queremos verificar para o valor  $y = (1, 1)$  se ele é regular ou não. Sendo assim, precisamos verificar sua imagem inversa, isto é,  $f^{-1}(1, 1)$ .

$$f^{-1}(1, 1) \implies (x_1^2, x_2^2) = (1, 1) \implies x = (1, 1), (-1, 1), (1, -1) \text{ e } (-1, -1).$$

Substituindo esses valores em  $Jf(x_1, x_2)$ , obtemos:

$$Jf(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Jf(-1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Jf(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, Jf(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma  $df_{(x_1, x_2)}$  é sobrejetor para todos os valores de  $x \in f^{-1}(y)$ , pois o posto de  $Jf(x)$  é 2. Poderíamos, no lugar de  $y = (1, 1)$  realizar para o cálculo de  $y = (y_1, y_2)$ , vamos fazê-lo no exemplo à seguir:

$$f^{-1}(y_1, y_2) \implies (x_1^2, x_2^2) = (y_1, y_2) \implies \\ x = (\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}), (-\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}), (\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}) \text{ e } (-\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}).$$

Substituindo esses valores em  $Jf(x_1, x_2)$ , obtemos:

$$Jf(\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{y_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{y_2} \end{pmatrix}, Jf(-\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{y_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{y_2} \end{pmatrix}, \\ Jf(\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{y_1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{y_2} \end{pmatrix}, Jf(-\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{y_1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{y_2} \end{pmatrix}$$

O posto desses jacobianos será menor do que 2 quando  $\sqrt{y_1} = 0$  ou  $\sqrt{y_2} = 0$ , sendo assim podemos dizer que  $y$  é valor regular para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , exceto  $x = (0, 0)$ ,  $x = (0, x_2)$  e  $x = (x_1, 0)$ .

**Proposição 6.6.** *Seja  $f: N \rightarrow P$  suave,  $Q = \{y\}$  é subvariedade 0 – dimensional de  $P$  e  $df_x: T_x N \rightarrow T_y P$ . Então,  $y \in P$  é valor regular de  $f \iff f \pitchfork \{y\}$ .*

*Demonstração.* Se  $y \in P$  é valor regular de  $f$ , então  $df_x$  é sobrejetor para qualquer  $x \in f^{-1}(y)$ , isso significa que para esses valores de  $x$ ,  $df_x(T_x N) = T_y P$ , assim obtemos trivialmente a relação  $df_x(T_x N) + T_y Q = T_y P$  e logo  $f \pitchfork \{y\}$ .

Agora, se  $f \pitchfork \{y\}$ , se ocorre que  $G(f) \cap \{y\} = \emptyset$ , então  $y \notin \text{Im}(f)$  e por definição  $y$  é valor regular de  $f$ . Caso contrário, temos  $df_x(T_x N) + T_y Q = T_y P$ , entretanto, como  $Q = \{y\}$  é um único ponto seu espaço tangente será  $T_y Q = \{0\}$ , dessa maneira, reescrevemos a Definição de transversalidade como

$$df_x(T_x N) + T_y Q = T_y P \implies df_x(T_x N) + \{0\} = T_y P \implies df_x(T_x N) = T_y P.$$

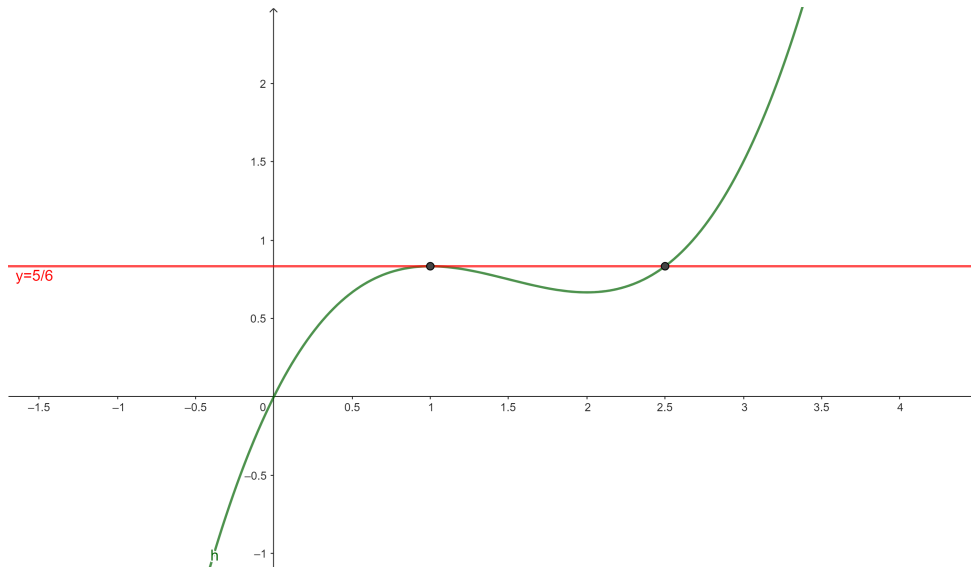
Isto é, a imagem do diferencial é o próprio contra-domínio e logo o diferencial é sobrejetor e por definição  $y \in P$  é valor regular de  $f$ .  $\square$

Observação: se  $y$  é valor crítico de  $f$ , não necessariamente o conjunto  $f^{-1}(y)$  é formado somente por valores críticos.

**Exemplo 6.7.** *Seja a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ . A derivada da função é  $f'(x) = x^2 - 3x + 2$ , que podemos reescrever como  $Jf(x) = (x^2 - 3x + 2)$ , para que o diferencial da função seja sobrejetor, basta que a única entrada da matriz Jacobiana seja não nula, isto é  $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \implies x \neq 1$  e  $x \neq 2$ . Então  $x = 1$  e  $x = 2$  são os únicos pontos críticos*

de  $f$ , considere o valor crítico  $f(1) = \frac{5}{6}$ , calculando  $f^{-1}(\frac{5}{6})$  obtemos  $\frac{5}{6} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \implies f^{-1}(y) = \{1, \frac{5}{2}\}$ . Note que  $x = 1$  é valor crítico, enquanto  $x = \frac{5}{2}$  não é. Note também que no ponto  $x = 1$ ,  $f$  não é transversal à  $y = \frac{5}{6}$ .

Figura 10 – Exemplo 6.7



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

**Teorema 6.1.** *Se  $f: N \rightarrow P$  é suave, com  $N, P$  variedades suaves de dimensão  $n, p$  respectivamente e também  $Q$  de dimensão  $q$  é subvariedade de  $P$  e  $f \pitchfork Q$ , então  $M = f^{-1}(Q)$  é uma subvariedade de  $N$  e possui a mesma codimensão de  $Q$  ou é o conjunto vazio. E ainda, para todo ponto  $x \in N$  com  $y = f(x) \in Q$  vale que  $T_x M = df_x^{-1}(T_y Q)$ .*

*Demonstração.* Para primeira parte, vamos mostrar que para todo  $x \in M$  há uma vizinhança relativamente aberta cuja interseção com  $M$  define uma variedade de dimensão  $r = p - q$ . Fixemos  $y = f(x) \in P$ , podemos supor que  $N$  e  $P$  são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^p$ , isto é,  $f$  é da forma  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  e mais, que  $x = 0$  e  $y = 0$ , o Teorema 3.1 nos permite assumir que  $Q = P \cap \mathbb{R}^q \times 0^{p-q}$ , ou seja, estamos completando  $Q$  com zeros. Considere a projeção  $\pi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-q}$  e também a composição  $\pi \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p-q}$ , a condição de transversalidade nos diz que  $\pi \circ f$  tem posto  $r$  em torno de 0 e o Teorema 2.5 nos diz que existe um difeomorfismo  $k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\pi \circ f \circ k^{-1}: (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_r)$  por fim, a imagem inversa de 0 sobre essa parametrização é um conjunto aberto de  $0 \times \mathbb{R}^{n-r}$ , correspondente a  $h$  sobre  $M$  que mostra que  $M$  é subvariedade de dimensão  $r = p - q$ .

Para a segunda parte vamos mostrar que  $T_x M = df_x^{-1}(T_y Q)$ . Para isso, considere o diagrama determinado pela hipótese

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & P \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ M & \xrightarrow{f|_M} & Q \end{array}$$

Que implica,

$$\begin{array}{ccc} T_x N & \xrightarrow{df_x} & T_y P \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ T_x M & \xrightarrow{df_x|_{T_x M}} & T_y Q \end{array}$$

Veja que  $df_x^{-1}(T_y Q) = \{v \in T_x N; df_x(v) \in T_y Q\}$  e  $M = f^{-1}(Q) = \{x \in N; f(x) \in Q\}$ , em primeiro lugar  $T_x M \subseteq T_x N$  pela inclusão, em segundo lugar por  $M$  ser definido como imagem inversa de  $f$  sobre  $Q$  quando tomamos um vetor  $v \in T_x M$  certamente  $df_x(v) \in T_y Q$ , então dessa forma  $T_x M \subseteq df_x^{-1}(T_y Q)$ . Para provar que  $T_x M = df_x^{-1}(T_y Q)$ , vamos mostrar que suas dimensões são iguais. Considere o diferencial  $df_x|_{df_x^{-1}(T_y Q)}: df_x^{-1}(T_y Q) \rightarrow T_y Q$ , sua imagem será  $T_y Q \cap df_x(T_x N)$  e afirmamos que  $\mathcal{N}(df_x) = \mathcal{N}(df_x|_{df_x^{-1}(T_y Q)})$ . Segue que, se  $v \in \mathcal{N}(df_x)$ , então  $df_x(v) = 0$  e como  $0 \in T_y Q$ , isso significa que  $v \in \mathcal{N}(df_x|_{df_x^{-1}(T_y Q)})$ . Agora, se  $v \in \mathcal{N}(df_x|_{df_x^{-1}(T_y Q)})$ , isso significa que  $df_x(v) = 0$  e  $v \in \mathcal{N}(df_x)$ . Concluimos que  $\mathcal{N}(df_x) = \mathcal{N}(df_x|_{df_x^{-1}(T_y Q)})$ . Pelo Teorema do Núcleo e Imagem,

$$\dim df_x^{-1}(T_y Q) = \dim(\mathcal{N}(df_x|_{df_x^{-1}(T_y Q)}) + \dim(T_y Q \cap df_x(T_x N))).$$

Pela igualdade dos núcleos

$$\dim df_x^{-1}(T_y Q) = \dim \mathcal{N}(df_x) + \dim(T_y Q \cap df_x(T_x N)). \quad (6.10)$$

A condição de transversalidade  $f \pitchfork Q$ , nos diz,

$$df_x(T_x N) + T_y Q = T_y P.$$

Aplicando a dimensão em ambos os lados, temos:

$$\dim df_x(T_x N) + \dim T_y Q - \dim(T_y Q \cap df_x(T_x N)) = \dim T_y P. \quad (6.11)$$

Novamente pelo teorema do núcleo e imagem, agora aplicado no diferencial  $df_x$ ,

$$\dim T_x N = \dim \mathcal{N}(df_x) + \dim df_x(T_x N). \quad (6.12)$$

Substituindo a equação (6.11) na equação (6.10), obtemos:

$$\dim df_x^{-1}(T_y Q) = \dim \mathcal{N}(df_x) + \dim df_x(T_x N) + \dim T_y Q - \dim T_y P. \quad (6.13)$$

Substituindo a equação (6.12) em (6.13),

$$\dim df_x^{-1}(T_y Q) = \dim T_x N - \dim df_x(T_x N) + \dim df_x(T_x N) + \dim T_y Q - \dim T_y P.$$

Que implica,

$$\dim df_x^{-1}(T_y Q) = \dim T_x N + \dim T_y Q - \dim T_y P = n + q - p.$$

Agora, note que pela primeira parte do teorema a codim  $M = \text{codim } Q$ , isto é  $n - m = p - q \implies m = n + q - p$ . Portanto, pelo Teorema 4.1 provamos que  $\dim df_x^{-1}(T_y Q) = \dim T_x M$  e por consequência que  $T_x M = df_x^{-1}(T_y Q)$ .  $\square$

**Exemplo 6.8.** Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz invertível  $n \times n$  e uma função suave  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ . Veja que temos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Disso,

$$\langle Ax, x \rangle = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)x_1 + \cdots + (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)x_n$$

Podemos expandir essa soma da seguinte forma,

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1x_1 & + & a_{21}x_2x_1 & + & \cdots & + & a_{n1}x_nx_1 & + \\ a_{12}x_1x_2 & + & a_{22}x_2x_2 & + & \cdots & + & a_{n2}x_nx_2 & + \\ \vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots & + \\ a_{12}x_1x_2 & + & a_{2n}x_2x_n & + & \cdots & + & a_{n1}x_nx_n & + \end{array}$$

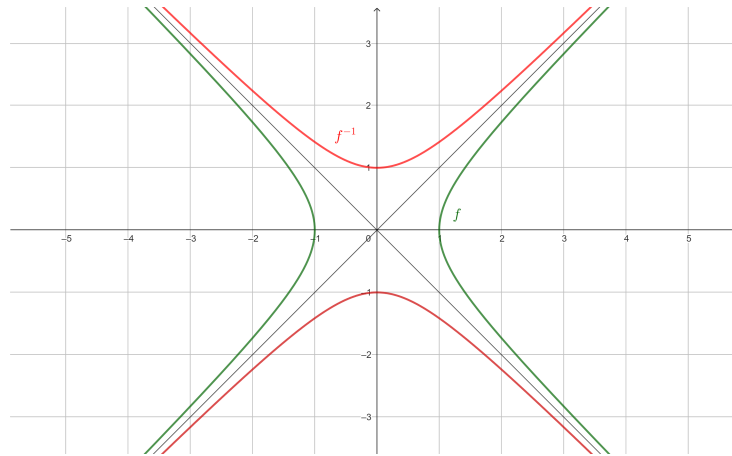
e entendê-la como sendo o seguinte somatório:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

. O diferencial dessa função é  $df_x(v) = 2\langle Ax, v \rangle$ , como  $A$  é uma matriz quadrada invertível ela não é nula, a única forma de que o produto interno seja nulo é quando  $x = 0$  quando isso ocorre temos  $f(0) = 0$ , dessa forma todos os outros valores de  $f(x)$  são regulares, em particular o 1. Logo, pelo teorema 6.1  $f^{-1}(1)$  é subvariedade suave. Por esse fato, se  $A$  é matriz identidade então  $\langle Ax, x \rangle = \langle x, x \rangle$  é o conjunto  $S^{n-1}$  e subvariedade de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 6.9.** (Extraído de Gibson e das notas de aula de Wang Zuoqin) Considere uma função suave  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a qual o diferencial tem posto 1 em todo ponto  $f^{-1}(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) o Teorema 6.1 nos diz que  $f^{-1}(t)$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^2$  de dimensão 1. Tome como exemplo a função

Figura 11 – Exemplo 6.9



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x,y) = x^2 - y^2$  e  $t = 1$ . Essa função é suave e sua derivada tem posto 1 para todo ponto  $t \neq 0$ .

Calculando  $f^{-1}(1) \implies x^2 - y^2 = 1 \implies f_1^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  e  $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$ . Pelo teorema citado temos que  $f^{-1}(1)$  é variedade suave

**Exemplo 6.10.** Considere uma função suave  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a qual o diferencial tem posto 1 em todo ponto  $f^{-1}(0)$ . Seja  $F: \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x,y,z) = f(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ . Afirmção: o diferencial de  $F$  tem posto 1 em  $F^{-1}(0)$ . Segue pela regra da cadeia e tomando  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$  as derivadas parcial de  $F$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \implies \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

similarmente,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Assim, temos:

$$JF = \left( \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

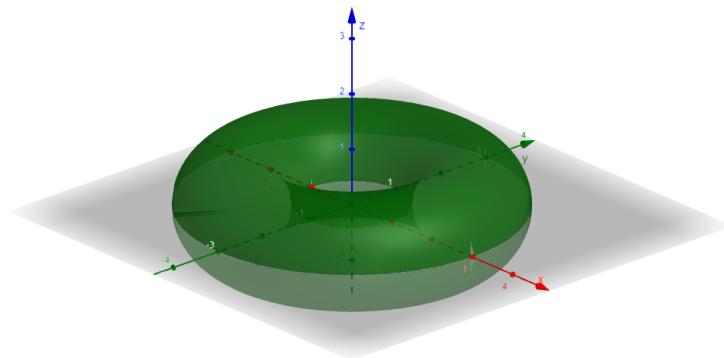
Ainda que acontecesse  $x = 0$  ou  $y = 0$  pelo fato de que  $f^{-1}(0)$  tem posto 1, ocorre que  $JF$  terá pelo menos um valor não nulo.

Pelo Teorema 6.1  $F^{-1}(0)$  é subvariedade de  $\mathbb{R}^3$  de dimensão 2. Ilustrando este exemplo, tome  $a > b > 0$  números reais e  $f$  dada por  $f(y,z) = (y - a)^2 + z^2 - b^2$ . O diferencial de  $f$  é dado

por  $J_{f(y,z)} = (2y, -2a + 2z)$  e  $f^{-1}(0) \implies (y - a)^2 + z^2 = b^2$ . Isto é, no eixo  $y \times z$ ,  $f^{-1}(0)$  é uma circunferência centrada em  $(a, 0)$  de raio  $b$ , dessa forma  $y = 0$  nunca ocorre, por conta da condição  $a > b > 0$ . Sendo assim, a diferencial de  $f$  tem posto 1 em todo ponto  $f^{-1}(0)$ . A superfície de revolução  $F^{-1}(0)$  é um toro e sua equação é determinada pelo cálculo:

$$\begin{aligned} F^{-1}(0) &\implies (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - b^2 = 0 \implies \\ x^2 + y^2 + 2(-\sqrt{x^2 + y^2}a) + a^2 + z^2 - b^2 &= 0 \implies \\ (x^2 + y^2 + a^2 + z^2 - b^2)^2 &= 4a^2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Figura 12 – Exemplo 6.10, com  $a = 3$  e  $b = 1$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

**Proposição 6.7.** *Se  $A$  e  $B$  são subvariedades de dimensão  $a$  e  $b$  respectivamente de uma variedade  $C$  de dimensão  $c$  e também  $A \pitchfork B$  em  $C$ , então  $A \cap B$  será vazia ou uma subvariedade de  $C$  de dimensão  $a + b - c$ .*

*Demonstração.* Tome a inclusão  $\iota_A : A \rightarrow C$ , que é uma função suave, vamos mostrar que  $\iota_A \pitchfork B$ . O diferencial  $d\iota : T_x A \rightarrow T_x C$  é a própria inclusão, dessa forma para qualquer vetor  $v$  em  $T_x A$  ocorre  $d\iota(v) = v$ , sendo assim  $d\iota(T_x A) = T_x A$ , isso somado ao fato de que  $A \pitchfork B$  obtemos:

$$d\iota(T_x A) + T_{\iota(x)} B = T_x A + T_x B = T_x C.$$

Como  $\iota_A \pitchfork B$ , segue do teorema 6.1, que  $\iota_A^{-1}(B) = \{x \in A; \iota_A(x) \in B\} = A \cap B$  é o conjunto vazio ou variedade suave. Pelo mesmo teorema a codimensão de  $A \cap B$  é a mesma codimensão

de  $B$  e assim:

$$\text{codim}(A \cap B) = \text{codim} B \implies a - \dim(A \cap B) = c - b \implies \dim(A \cap B) = a + b - c.$$

□

**Definição 6.5** (Conjunto singular). Um ponto singular de uma função  $f: N \rightarrow P$  é um ponto  $x \in N$  onde o posto germe é menor que  $\min(\dim(N), \dim(P))$ , isso significa que não é imersível nem submersível, portanto singular. O conjunto singular de  $f$ , denotado por  $\Sigma f$  é o conjunto de todos os seus pontos singulares. A imagem de  $\Sigma f$  é denominada conjunto de bifurcação.

**Exemplo 6.11.** A cúspide de Whitney, dada pela função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $f(x, y) = (x, y^3 - xy)$ . O  $Jf$  é dado por:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y & 3y^2 - x \end{pmatrix}.$$

Para obter o conjunto singular dessa função, precisamos obter o conjunto de pontos em que o posto de  $Jf$  é menor do que 2, nunca ocorre do posto ser 0, porém quando  $3y^2 - x = 0$ , é 1 pois obteremos um coluna nula e portanto a segunda linha será redutível. Dessa forma  $\Sigma f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 3y^2\}$ . Agora, para determinar o conjunto de bifurcação, substituiremos esses valores de  $x$  em  $f(x, y)$ .

$$f(3y^2, y) = (3y^2, y^3 - 3y^2y) = (3y^2, -2y^3).$$

Tome  $u = 3y^2$  e  $v = -2y^3$ . Vamos obter uma relação direta entre essas duas variáveis.

$$u = 3y^2 \implies y = \pm \sqrt{\frac{u}{3}} \tag{6.14}$$

$$v = -2y^3 \tag{6.15}$$

Substituindo (6.14) em (6.15), obtemos:

$$v = -2y^3 = 2 \left( \sqrt{\frac{u}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \implies v^2 = 4 \frac{u^3}{27} \implies 4u^3 - 27v^2 = 0.$$

O que significa que o conjunto de bifurcação é uma cúspide no plano  $u \times v$ . Além disso, podemos visualizar essa curva de outra forma, por meio da da construção superfície determinada por  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  em que  $g(x, y) = (u, v, w) = (x, y^3 - xy, y)$  nos eixos coordenados  $x, y, z$ .

Figura 13 – Conjunto  $\Sigma f$  e o conjunto bifurcação de  $f$

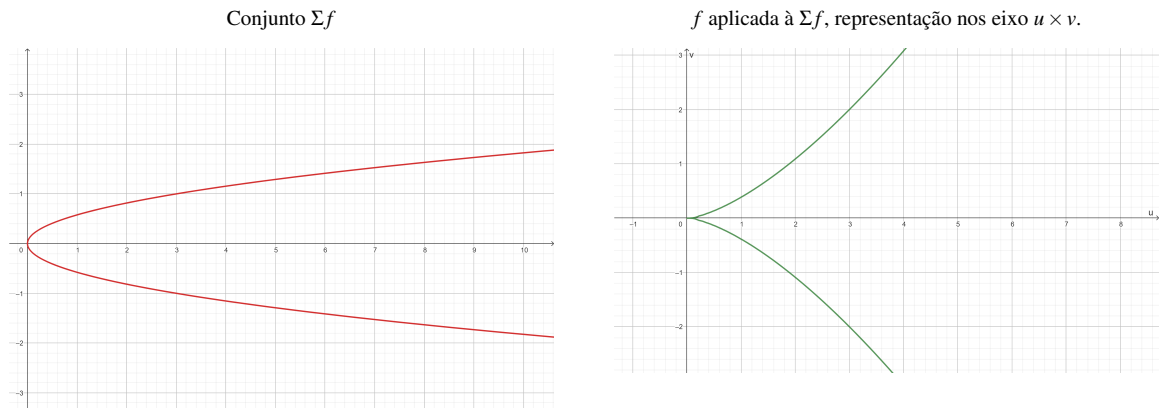
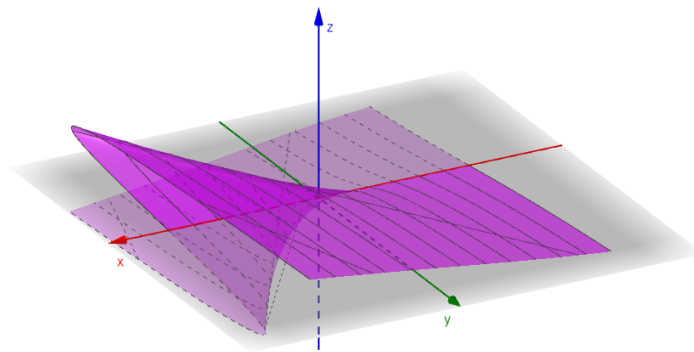
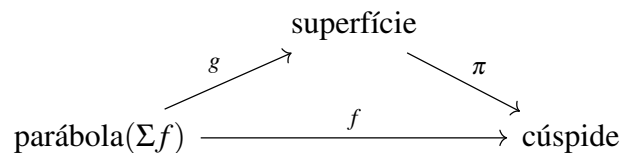


Figura 14 – Exemplo 6.11 - Superfície



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

E fazendo a projeção  $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\pi(u, v, w) = (u, v)$  teremos que a projeção de  $g$  é exatamente a cúspide nos eixos  $u \times v$  da figura 13. Conforme o seguinte diagrama:



**Definição 6.6** (Conjuntos de singularidade de Thom de primeira ordem). Podemos escrever uma função suave  $f$  em subconjuntos finitos, da seguinte forma:

$$\Sigma^i f = \{x \in N; \dim(\mathcal{N}(df_x)) = i\}$$

Se  $f$  é da forma  $f: N \rightarrow P$  e  $df_x: T_xN \rightarrow T_xP$  é seu diferencial, então pelo teorema do núcleo e imagem podemos escrever a seguinte relação:

$$i = \dim(T_xN) - \text{posto}(df_x)$$

Denominamos os conjuntos  $\Sigma^i f$  de singularidades de primeira ordem.

**Exemplo 6.12.** Seja a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x,y) = (x^2, y^2)$ . Calculando o  $J_f$  temos:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Como  $T_xN = \mathbb{R}^2$ , temos  $\dim(T_xN) = 2$ , assim  $i = 2 - \text{posto}(df_x)$ , as partições serão:

- O conjunto  $\Sigma^0 f$ , onde o posto é 2, logo  $\Sigma^0 f = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$ .
- O conjunto  $\Sigma^1 f$ , onde o posto é 1, logo  $\Sigma^1 f = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$ . (Eixos coordenados).
- O conjunto  $\Sigma^2 f$ , onde o posto é 0, logo  $\Sigma^2 = \{(0,0)\}$ .

## 6.1 O TEOREMA DA TRANSVERSALIDADE

**Definição 6.7** (Ponto aderente). Um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  denomina-se aderente a um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto.

Nota-se que todo ponto de  $x \in X$  é aderente a  $X$ , mas podem existir pontos que não pertencem à  $X$  e são aderentes ao conjunto. Para que  $x$  seja aderente a  $X$  é suficiente que toda bola aberta de centro  $x$  contenha algum ponto de  $X$

**Definição 6.8.** O conjunto de pontos aderentes a  $X$  denomina-se fecho de  $X$  e é denotado por  $\bar{X}$ .

**Definição 6.9** (Conjunto fechado). Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  denomina-se fechado quando contém todos os seus pontos aderentes, isto é, quando ocorre  $X = \bar{X}$ .

**Definição 6.10** (Fecho). Dados  $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , dizemos que o fecho de  $Y$  relativamente a  $X$  é o conjunto dos pontos aderentes a  $Y$  que pertencem ao conjunto  $X$ . Dessa forma,  $Y$  é fechado em  $X$  se, e somente se, coincide com seu fecho relativamente a  $X$ . O conjunto desses pontos é denotado por  $\bar{Y} \cap X$ .

**Definição 6.11** (Conjunto denso). Sejam  $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $Y$  é denso em  $X$  quando  $\bar{Y} \cap X = X$ . Ou ainda,  $Y$  é denso em  $X$  se, e somente se, toda bola aberta com centro em algum ponto de  $X$  contém pontos de  $Y$ .

**Teorema 6.2** (Teorema de Sard). *Seja  $f_i: N_i \rightarrow P$  uma família enumerável de funções suaves, então o conjunto de valores regulares comuns a todas as  $f_i$  é um conjunto denso em  $P$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em Gibson p.215. □

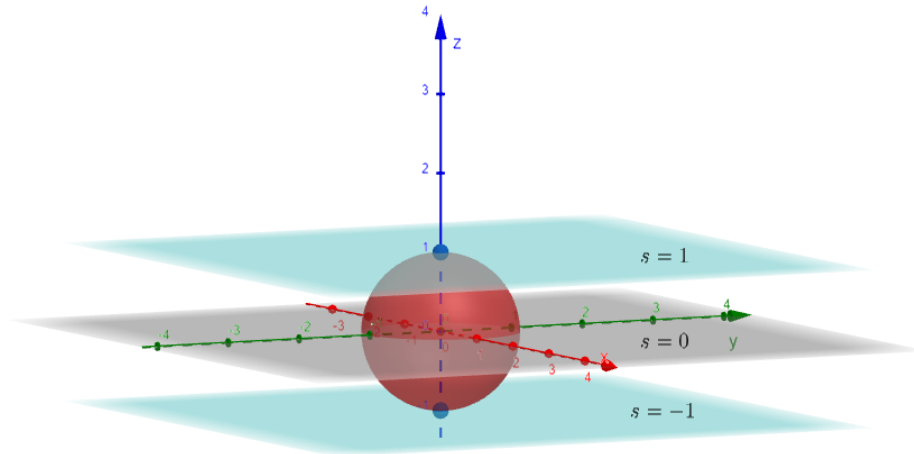
Seja  $F: N \times S \rightarrow P$  uma função suave, podemos para cada  $s \in S$  escrever  $f_s: N \rightarrow P$ , onde  $f_s = F(x, s)$ . Todas as funções  $f_s$  formam uma família de funções suaves. Supondo que  $F \pitchfork Q$  e  $Q$  é subvariedade de  $P$ , uma pergunta que surge é: ocorrerá  $f_s \pitchfork Q$  para todos os parâmetros  $s$ ?

**Exemplo 6.13.** Seja  $N = \mathbb{R}^2$ ,  $S = \mathbb{R}$ ,  $P = \mathbb{R}^3$  e  $F: N \times S \rightarrow P$  definida por  $F((x, y), s) = (x, y, s)$  e  $Q = S^2$  a esfera unitária. Aqui temos  $f_s((x, y)) = F((x, y), s) = (x, y, s)$ . Especificamente, se  $s = 1$ ,  $f_1((x, y)) = F((x, y), 1) = (x, y, 1)$ , isto é  $f_1((x, y))$  é plano  $x \times y$  em  $z = 1$ . Note que nesse caso  $Gf_1 = \mathbb{R}^2 = T_{(0,0,1)}Gf_1$  que coincide com o espaço tangente de  $S_2$  no ponto  $(0, 0, 1)$ , isso significa que  $f_1((x, y))$  não é transversal à  $S_2$  nesse ponto. Similarmente  $f_{-1}$  também não é no ponto  $(0, 0, -1)$ . Porém,  $f_s((x, y)) \pitchfork Q$  para todo  $s \neq 1$  e  $s \neq -1$ .

Então a resposta é não. Entretanto, há uma maneira de relacionar a família de funções  $f$  de uma função  $F$  conforme descrito acima com o conjunto de parâmetros  $s$  e a ideia de conjunto denso por meio do Lema básico da transversalidade.

Ao invés de trabalhar com  $Q$  subvariedade trabalharemos com  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ , subvariedades.

Figura 15 – Exemplo 6.13



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

**Lema 6.1** (O Lema Básico da Transversalidade). *Seja  $F: N \times S \rightarrow P$  uma função suave com  $F \pitchfork Q_i$ , para uma família finita de subvariedades  $Q_i$ , então existe um conjunto denso de parâmetros  $s \in S$  tal que  $f_s \pitchfork Q_i$  para todo  $i$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 6.1 os conjuntos  $M_i = F^{-1}(Q_i)$  são subvariedades de  $N \times S$ . Seja  $\pi|_{M_i}$  a projeção  $\pi: N \times S \rightarrow S$ . Devemos mostrar que

$$\pi|_{M_i} \pitchfork \{s\} \iff f_s \pitchfork Q_i$$

e pelo Teorema de Sard o resultado seguirá.

Vamos fazer a demonstração fixando uma subvariedade  $Q_i = Q$ . Seja  $z = (x, s) \in N \times S$  e  $w = F(z) \in Q$  a condição  $F \pitchfork Q$  nos diz:

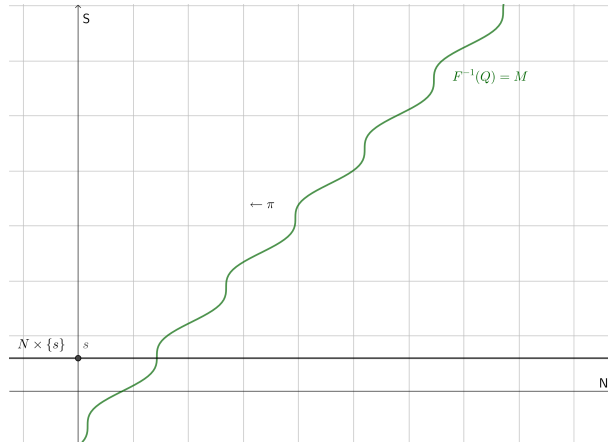
$$dF_z(T_x N \times T_s S) + T_w Q = T_w P. \quad (6.16)$$

Como  $s$  é um ponto temos  $T_s S = \{0\}$ , e para que  $f_s \pitchfork Q$  é necessário que para o mesmo  $x$  de (6.16) ocorra:

$$dF_z(T_x N \times 0) + T_w Q = T_w P. \quad (6.17)$$

Considere uma ilustração de  $M = F^{-1}(Q)$  no plano  $N \times S$

Figura 16 – Ilustração  $M = F^{-1}(Q)$  no Lema da Transversalidade



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Para que seja satisfeito  $N \times \{s\} \pitchfork M$  precisamos, que para o mesmo  $x$  de (6.16), ocorra:

$$T_x N \times 0 + T_z M = T_x N \times T_s S. \quad (6.18)$$

Vamos mostrar que se ocorre  $F \pitchfork Q$ , então  $f \pitchfork Q \iff N \times \{s\} \pitchfork M$ .

Para o caso  $N \times \{s\} \pitchfork M \implies f \pitchfork Q$ :

Vamos aplicar  $dF_z$  em ambos os lados de (6.18), obtendo:

$$dF_z(T_x N \times 0) + dF_z(T_z M) = dF_z(T_x N \times T_s S).$$

Agora, pelo Teorema 6.1 podemos escrever  $T_z M = dF_z^{-1}(T_w Q)$  e temos:

$$dF_z(dF_z^{-1}(T_w Q)) = T_w Q.$$

Assim, a equação assume a forma:

$$dF_z(T_x N \times 0) + T_w Q = dF_z(T_x N \times T_s S).$$

Somando  $T_w Q$  em ambos os lados e pela condição  $F \pitchfork Q$  (equação (6.16))

$$dF_z(T_x N \times 0) + T_w Q + T_w Q = dF_z(T_x N \times T_s S) + T_w Q \implies dF_z(T_x N \times 0) + T_w Q = T_w P.$$

Portanto  $N \times \{s\} \pitchfork M \implies f \pitchfork Q$ .

Agora vamos provar que  $f \pitchfork Q \implies N \times \{s\} \pitchfork M$ .

A estratégia da demonstração será mostrar que  $T_x N \times 0 + T_z M \subseteq T_x N \times T_s S$  e que  $T_x N \times T_s S \subseteq T_x N \times 0 + T_z M$ . Tome um vetor  $(v, u) \in T_x N \times 0 + T_z M$ , podemos escrever  $(v, u) = (v, 0) + (0, u)$ ,

dessa forma  $(v, 0) \in T_x N \times 0$  e  $(0, u) \in T_z M$ . Como  $T_z M = \{(a, b) \in T_x N \times T_s S; dF_z(a, b) \in T_w Q\}$ , teremos que  $(v, 0) + (0, u) = (v, u) \in T_x N \times T_s S$ .

Agora, seja  $(v, u) \in T_x N \times T_s S$ , podemos escrever  $(v, u) = (v - v', 0) + (v', u)$ , note que  $(v - v', 0) \in T_x N \times 0$ . Vamos mostrar que  $(v', u) \in T_z M$ . A condição  $f \pitchfork Q$  nos diz que ocorre a equação (6.17), sendo assim, podemos escrever um vetor  $w'$  de  $T_w P$  como  $w' = dF_z(v, 0) + q$  em que  $dF_z(v, 0) \in dF_z(T_x N \times 0)$  e  $q \in T_w Q$ , agora, para qualquer vetor  $u \in T_s S$  temos  $dF_z(0, u) \in T_w P$  pela própria definição de  $dF_z$ , mas podemos escrever por conta da condição de transversalidade que

$$dF_z(0, u) = dF_z(v, 0) + q \implies dF_z(0, u) - dF_z(v, 0) = q.$$

Tomando  $v' = -v$ ,

$$dF_z(v', u) = dF_z(0, u) + dF_z(-v, 0) = dF_z(0, u) - dF_z(v, 0) = q.$$

Logo, a definição de  $T_z M$  nos permite concluir que  $(v', u) \in T_z M$  e, por consequência,  $(v, u) \in T_x N \times 0 + T_z M$ .

Por fim,  $\pi|_M \pitchfork \{s\}$  é a equação:

$$\begin{aligned} d\pi_z|_M(T_z M) + T_w \{s\} &= T_s S \implies \\ d\pi_z|_M(T_z M) &= T_s S. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Que é equivalente à (6.18).

Vamos mostrar que (6.18)  $\iff$  (6.19). A equação (6.18) implica:

$$T_z M = T_x N \times T_s S - T_x N \times 0.$$

Aplicando  $d\pi_z|_M$  em ambos os lados, a equação toma forma:

$$\begin{aligned} d\pi_z|_M(T_z M) &= d\pi_z|_M(T_x N \times T_s S) - d\pi_z|_M(T_x N \times 0) \implies \\ d\pi_z|_M(T_z M) &= T_s S - 0 \implies d\pi_z|_M(T_z M) = T_s S. \end{aligned}$$

Agora, considerando que ocorre  $d\pi_z|_M(T_z M) = T_s S$ , dado um vetor  $(v, u) \in T_x N \times T_s S$ , sabemos que  $u \in T_s S$  e existe  $(v', u) \in T_z M$  tal que  $d\pi_z|_M(v', u) = u$ . Podemos escrever  $(v, u) = (v', u) + (v - v', 0)$  e como  $(v' - v, 0) \in T_x N \times 0$  segue que  $(v, u) \in T_x N \times 0 + T_z M$ . Agora, para um vetor em  $T_x N \times 0 + T_z M$ , segue diretamente pela definição dos próprios espaços tangentes que ele pertence à  $T_x N \times T_s S$ . E assim, concluímos que  $N \times \{s\} \pitchfork M \iff \pi|_M \pitchfork \{s\}$ .

Portanto, pelo Teorema de Sard, o conjunto de parâmetros  $s$  tais que  $f_s \pitchfork Q$  é denso.  $\square$

**Definição 6.12** (Vizinhança fundamental). Seja  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  o conjunto de todas as funções de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  suaves. Tomando uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , um valor real positivo pequeno  $\varepsilon$ , um valor real positivo grande  $R$  e um inteiro  $k \geq 0$  podemos associar  $f$  à uma vizinhança fundamental

em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^P)$  contendo todas as funções  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^P$  as quais para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  com  $|x| < R$  ocorre:

$$\|j^k f(x) - j^k g(x)\| \leq \varepsilon.$$

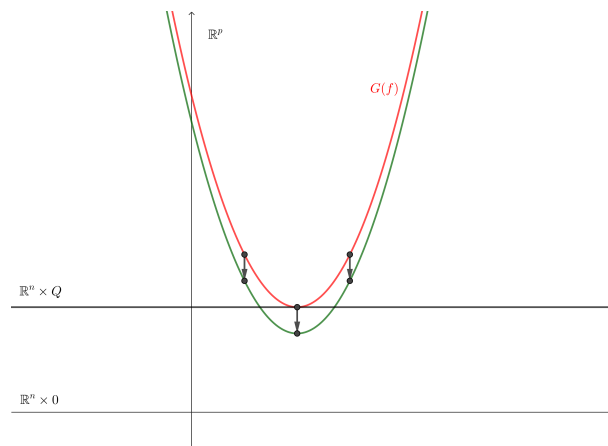
Sendo  $\|\cdot\|$  uma norma fixa no espaço-jato  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^P)$

**Definição 6.13** ( $X$  denso em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^P)$ ). Dizemos que um conjunto  $X \subset C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^P)$  é denso, quando dada uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^P$  e qualquer vizinhança fundamental  $V$  de  $f$  podemos encontrar  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^P$  em  $X$  com  $g \in V$ .

**Teorema 6.3.** O conjunto das funções suaves  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^P$  que são transversais a uma coleção finita de variedades  $Q_1, Q_2, \dots, Q_t$  de  $\mathbb{R}^P$  é denso em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^P)$ .

*Demonstração.* Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^P$  suave. Vamos mostrar que podemos aproximar  $f$  o quanto quisermos de mapas transversais a  $Q_1 \dots Q_t$ . O objetivo é construir uma família  $F: \mathbb{R}^n \times S \rightarrow \mathbb{R}^P$  a qual contenha  $f$  e  $F$  é transversal à  $Q_1, \dots, Q_t$ . Faremos isso, definindo  $F$  como uma submersão. Note que a transversalidade  $f \pitchfork Q$  é equivalente ao  $G(f) \pitchfork \mathbb{R}^n \times Q$ , isto é  $T_z G(f) + \mathbb{R}^n \times Q = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^P$ . Se essa condição não ocorrer automaticamente, transladaremos o gráfico da  $f$  de maneira que a transversalidade seja atendida. Conforme a ilustração:

Figura 17 – Translação de uma função  $f$ , no caso em que  $Q$  é um ponto



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Tomando  $S = \mathbb{R}^P$  e  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^P$  com  $F(x, s) = f(x) + s$  teremos que  $F$  é uma submersão e portanto transversal a  $Q_1, \dots, Q_t$ , pelo Lema Básico da Transversalidade há um conjunto de parâmetros  $s$  para os quais  $f_s \pitchfork Q_1, \dots, Q_t$ . E agora, mostraremos que se  $s$  é próximo o suficiente de 0, isto é,  $f_s$  é próximo de  $f = f_0$  podemos encontrar  $f_s$  que pertence à uma vizinhança fundamental  $V$  de  $f$ . Para  $k = 0$  teremos

$$|f_s(x) - f(x)| = |f(x) + s - f(x)| = |s|.$$

Sendo assim, para  $k = 0$ , basta tomar  $s \leq \varepsilon$ .

Para  $k > 0$ , ocorre que:

$$|j^k f_s(x) - j^k f(x)| = |0| = 0.$$

Dessa forma, para  $k > 0$  qualquer  $\varepsilon$  é válido. Segue pela Definição 6.13 que o conjunto de funções suaves de  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  transversais à dados  $Q_1, \dots, Q_t$  é denso em  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ .  $\square$

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O início deste trabalho consiste em relembrar conceitos importantes de álgebra linear e cálculo para o nosso estudo, a saber: transformações lineares, teorema do núcleo e da imagem, teoremas de aplicações diferenciáveis entre outros.

Num segundo momento, definimos o que são variedades suaves, que são conjuntos que localmente se assimilam a algum espaço euclidiano. A relação entre a introdução do trabalho e variedades suaves se dá nesse momento, pois conseguimos estabelecer uma ponte entre resultados já conhecido das duas áreas citadas.

Essa ligação se expande ao incorporarmos as ideias de espaços tangentes, já que o mesmos se comportam como espaços vetoriais. Depois, apresentamos um dos conceitos introdutórios da teoria de singularidades, que é o de germes suaves. Disso, demos o passo inicial, para que pudéssemos estudar o comportamento de aplicações diferenciáveis, visando descrever suas singularidades.

Objetivando entender melhor o comportamento dessa aplicações, estudamos o conceito de transversalidade, que é relacionado com os valores regulares delas, então a partir disso, conseguimos também, estudar os pontos singulares por meio do conjunto  $\Sigma f$  e do conjunto de bifurcação.

De maneira geral, o trabalho busca estabelecer os conceitos básicos necessários para um estudo inicial da teoria de singularidades, partindo de álgebra linear, passando por conceitos de geometria diferencial e por fim definições básicas da teoria.

## REFERÊNCIAS

- BARATA, João Carlos Alves. **Notas para um Curso de Física-Matemática**. São Paulo: Departamento de Física Matemática - USP - Universidade de São Paulo, 2024. (Capítulo 34 - Variedades). Disponível em [https://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula/arquivos/nc-cap34.pdf](https://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap34.pdf) Acesso em 31. ago. 2024. Citado na p. 27.
- GIBSON, Christopher George. **Singular points of smooth mappings**. 1. ed. Londres: Pitman, 1979. (Research Notes in Mathematics). Citado na p. 7.
- GREENBLATT, Charlotte. **An Introduction to Transversality**. Chicago - Estados Unidos: University of Illinois Chicago, 2015. (Survey). Disponível em [https://schapos.people.uic.edu/MATH549\\_Fall2015\\_files/SurveyCharlotte.pdf](https://schapos.people.uic.edu/MATH549_Fall2015_files/SurveyCharlotte.pdf) Acesso em 31. ago. 2024. Citado na p. 27.
- GUILLEMIN, Victor; POLLACK, Alan. **Differential Topology**. 1. ed. Cambridge - Estados Unidos: Prentice Hall, 1974. Citado na p. 27.
- LEE, John Marshall. **Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. Nova Iorque - Estados Unidos: Springer, 2012. (Graduate Texts in Mathematics). Citado na p. 27.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise - Volume 2**. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2020. Citado nas pp. 7, 10.
- LIMA CAJU, Rayssa Helena Aires de. **Um Convite à Topologia Diferencial**. Paraíba: Universidade Federal da Paraíba, 2013. (Trabalho de Conclusão de Curso). Disponível em <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/17878> Acesso em 31. ago. 2024. Citado na p. 15.
- MANFIO, Fernando. **Notas de aula**. São Carlos: ICMC - USP. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Universidade de São Paulo, S.d. (Notas de aula). Disponível em [https://sites.icmc.usp.br/manfio/Notas\\_GeometriaI.pdf](https://sites.icmc.usp.br/manfio/Notas_GeometriaI.pdf) Acesso em 31. ago. 2024. Citado na p. 27.
- MONTEIRO, Amanda; FERREIRA, Daniel Silva Costa; SICUTI, Plínio Gabriel. **Estrutura algébrica dos germes de funções**. São Paulo: Unesp - Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2015. (Apostila Minicurso SEMAT XXVII). Disponível em [https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/xxviisemat/mc2b\\_michelle.pdf](https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/xxviisemat/mc2b_michelle.pdf) Acesso em 31. ago. 2024. Citado na p. 23.
- SAIA, Marcelo José. **Singularidades de aplicações diferenciáveis**. São Carlos: ICMC - USP. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Universidade de São Paulo, 2011. (Notas de aula). Citado na p. 27.

TARI, Farid. **Singularidades de Aplicações Diferenciáveis**. (Material didático). São Carlos, 1999. Citado na p. 7.

WANG, Zuoqin. **Lecture 11: transversality**. Hefei - China: University of Science e Technology of China: School of Mathematical Sciences, S.d. (Notas de aula). Disponível em <http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/18F-Manifolds/Notes/Lec11.pdf> Acesso em 31. ago. 2024. Citado na p. 27.

ZANI, Sérgio Luís. **Álgebra linear**. 1. ed. São Carlos: ICMC - USP. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. Universidade de São Paulo, 2020. (Material didático). Disponível em <https://sites.icmc.usp.br/szani/alglin.pdf> Acesso em 31. ago. 2024. Citado na p. 8.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como  
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

