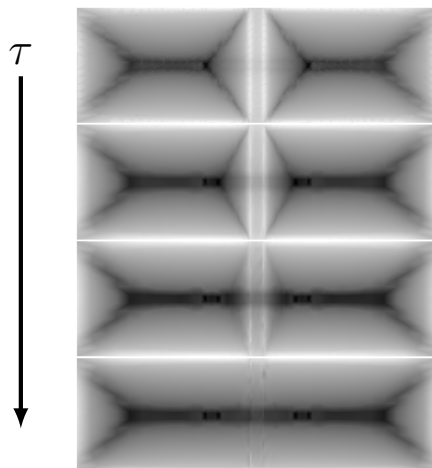


Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Física



**INVESTIGAÇÃO DE SISTEMAS GRANULARES
SUPERCONDUTORES UTILIZANDO A FORMULAÇÃO T-A**

Aluno: Gabriel Lemes Molizane Almeida
Orientador: Prof. Dr. Maycon Motta
Coorientador: Dr. Davi Araujo Dalbuquerque Chaves

São Carlos
2025

Gabriel Lemes Molizane Almeida

**INVESTIGAÇÃO DE SISTEMAS GRANULARES
SUPERCONDUTORES UTILIZANDO A FORMULAÇÃO T-A**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Física para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Física da Universidade Federal de São Carlos.

Orientação: Prof. Dr. Maycon Motta
Coorientação: Dr. Davi Araujo Dalbuquerque Chaves

São Carlos
2025

Almeida, Gabriel Lemes Molizane

Investigação de sistemas granulares supercondutores
utilizando a formulação T-A / Gabriel Lemes Molizane
Almeida -- 2025.
40f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Maycon Motta
Banca Examinadora: Vivaldo Leiria Campo Junior, Wilson
Aires Ortiz
Bibliografia

1. Supercondutividade. 2. Sistema granular. 3.
Simulações computacionais. I. Almeida, Gabriel Lemes
Molizane. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

FOLHA DE APROVAÇÃO

Gabriel Lemes Molizane Almeida

Investigação de sistemas granulares supercondutores utilizando a formulação T-A

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Física para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Física da Universidade Federal de São Carlos. 01 de dezembro de 2025.

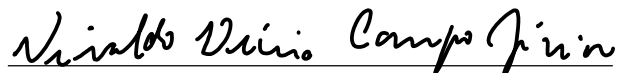
Orientador



Prof. Dr. Maycon Motta

Universidade Federal de São Carlos

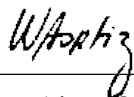
Examinador



Prof. Dr. Vivaldo Leiria Campo Junior

Universidade Federal de São Carlos

Examinador



Prof. Dr. Wilson Aires Ortiz

Universidade Federal de São Carlos

AGRADECIMENTO

Gostaria de expressar minha gratidão a quem tornou a existência deste trabalho possível. Para isso, volto um pouco no tempo para o final de 2022. Eu havia encerrado meu período de quase 3 anos de iniciação científica no DM com o professor Cezar Issao Kondo – a quem também sou muito grato pelo apoio e orientação, me ajudou a formar uma base sólida em cálculo –, e estava à procura de uma iniciação científica no DF. Senti que não poderia me formar engenheiro físico sem essa experiência. Foi então que, curioso sobre o fenômeno da supercondutividade, procurei meu professor de Eletromagnetismo 1, Wilson Aires Ortiz, para descobrir se seria possível eu fazer uma iniciação científica no GSM. Ele então me direcionou ao professor Maycon Motta, que na época era meu professor de Física Experimental D.

O Maycon nunca se negou a dar chance a alunos interessados em ingressar no GSM. Comigo não foi exceção. Uma dessas oportunidades foi a de eu poder acompanhar o até então doutorando Davi Araujo Dalbuquerque Chaves com o até então graduando Caio Cesar Quaglio Gomes na vivência de físicos experimentais no laboratório. A esses sou grato pelo acolhimento e pelo aprendizado que tive nesse tempo. No final de 2023, após várias conversas e muitos estudos, pude começar uma iniciação científica com o Maycon como orientador e o Davi como coorientador.

Do começo da iniciação científica até a finalização deste trabalho, devo meus mais sinceros agradecimentos ao Maycon. Agradeço os ensinamentos técnicos, os bons conselhos, e a oportunidade de ter feito parte do GSM. Se não fosse por essa iniciação científica, eu provavelmente não teria conseguido ingressar no estágio no CNPEM, onde sempre quis trabalhar, e hoje vejo que é onde eu pretendo continuar trabalhando. Também sou muito grato ao Davi pela orientação, sempre trazendo críticas e questionamentos valiosos em nossas reuniões e em correções de textos (como o atual).

Também sou muito grato por todo o suporte que minha família forneceu nesses últimos anos. Obrigado por apoiarem minha decisão de me formar em 7 longos anos, sei que não foi fácil dar esse suporte. E claro, muito obrigado pelos anos anteriores também, a educação fornecida em casa e as escolas em que fui matriculado compõe muito do que sou hoje.

Por fim, obrigado à UFSCar pela estrutura. A existência de ambientes como a BCo e o DF ajudaram a tornar a graduação um período prazeroso e muito agregador. Além disso, agradeço de forma mais generalizada a professores e amigos de curso que também ajudaram a tornar a experiência da graduação algo mais positivo.

RESUMO

L. M. A., Gabriel. Investigação de sistemas granulares supercondutores utilizando a formulação T-A. 2025. Trabalho final de curso – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2025.

Materiais supercondutores granulares são compostos por grãos, com propriedades supercondutoras superiores, e regiões de elos fracos, com propriedades supercondutoras reduzidas. Esses elos fracos, também chamados de *weak links* (WL), comprometem a capacidade de um supercondutor transportar correntes, mas também apresentam efeitos que podem ser explorados em possíveis dispositivos supercondutores. Um sistema granular contendo dois grãos e um único WL num filme fino apresenta comportamento magnético semelhante àquele observado em materiais granulares, permitindo um estudo direcionado à relação grão-intergrão a partir desse sistema. Neste trabalho foi implementada a formulação T-A, muito utilizada na modelagem de cabos supercondutores de alta temperatura crítica, para simular o sistema granular citado, com WLs inclinados em 45° , 60° e 90° . Os resultados obtidos mostram que a formulação T-A é capaz de reproduzir resultados experimentais conhecidos de distribuição de campo em amostras com WL perpendicular e inclinado. Em particular, a relação entre transparência e ângulo entre linhas de descontinuidade (*d-lines*), $\tau = \cos \theta$, foi recuperada no modelo simulado.

Palavras-chave: Supercondutividade, formulação T-A, filme fino, sistema granular.

ABSTRACT

L. M. A., Gabriel. Granular superconducting systems investigation utilizing the T-A formulation. 2025. Undergraduate thesis – Federal University of São Carlos, São Carlos, 2025.

Granular superconducting materials are consisted of grains, with superior superconducting properties, and weak links (WL) regions, with reduced superconducting properties. Those WLs limit the transport current capacity of a superconductor, but they also exhibit effects that can be explored in possible superconducting devices. A granular system containing two grains and a single WL on a thin film shows a magnetic response similar to those observed in granular materials, allowing one to study grain-intergrain relations by this system. In this work, we implemented the T-A formulation, commonly used to model high critical temperature superconducting cables, to model the granular system mentioned, with 45° , 60° and 90° tilted WLs. The results we obtained showed that the T-A formulation is able to reproduce experimental results of magnetic field distribution through the samples with orthogonal and tilted WL observed when subject to a perpendicular applied magnetic field. In particular, the relationship between transparency and the angle between discontinuity lines (d-lines), $\tau = \cos \theta$, was recovered from the simulated model.

Keywords: Superconductivity, T-A formulation, thin film, granular system.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	5
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	SUPERCONDUTIVIDADE	6
2.2	MODELO DE ESTADO CRÍTICO DE BEAN	7
2.2.1	Chapa infinita sob ação de um campo paralelo aplicado	8
2.2.2	Filme fino infinito sob ação de um campo ortogonal aplicado	10
2.2.3	Aproximação para modelagem de um supercondutor	12
2.3	FORMULAÇÃO T-A	13
2.3.1	Fita Supercondutora	16
2.3.2	Geometria plana qualquer	17
3	METODOLOGIA	18
3.1	AMOSTRAS EXPERIMENTAIS	18
3.2	AQUISIÇÃO DE IMAGENS VIA MOI	19
3.3	COMSOL MULTIPHYSICS	19
3.4	USO DE SIMETRIAS	20
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	23
4.1	FITA INFINITA	23
4.2	FILME FINO RETANGULAR (AMOSTRA PRÍSTINA)	24
4.3	FILME FINO COM CANALETA PERPENDICULAR	26
4.4	FILME FINO COM CANALETA INCLINADA	33
5	CONCLUSÕES	35
6	PERSPECTIVAS	36
6.1	CANALETA SUAVE	36
6.2	ANEL COM CANALETAS RADIAIS	37

1 INTRODUÇÃO

A supercondutividade é um fenômeno que permite o transporte de corrente elétrica sem dissipação de energia, apresentando diversas aplicações, como cabos para transmissão de energia, detectores, motores elétricos, computação quântica e física de aceleradores [12]. Para exibir esse fenômeno, os materiais supercondutores devem estar sob certas condições físicas, como temperaturas muito baixas. Uma possível classificação desses materiais é em supercondutores de baixa temperatura (LTS), que inclui os metais e suas ligas, e os materiais supercondutores de alta temperatura (HTS), que inclui o clássico YBCO e outros que possuem planos de Cu-O.

Enquanto a maioria dos materiais LTS são metais, os HTS costumam ser materiais cerâmicos. As cerâmicas, entretanto, apresentam granularidade em sua estrutura, dando origem a regiões de grãos – supercondutores maciços – e regiões intergranulares, que exibem propriedades supercondutoras reduzidas ou nem supercondutividade sequer. Quando a região intergranular apresenta uma densidade de corrente crítica menor que a granular, a capacidade de transporte de corrente do material todo fica limitada pela parte intergranular, piorando a qualidade do supercondutor. Essas regiões com características elétricas inferiores são chamadas de elos fracos, ou *weak links* (WL), e, apesar de negativas em materiais granulares, exercem papel fundamental em dispositivos supercondutores como o SQUID, capaz de medir quantum de fluxo magnético. Usualmente, em anéis SQUID, os WLs são materiais não supercondutores com junções do tipo SIS (supercondutor-isolante-supercondutor). No caso estudado neste trabalho, temos a condição na qual o WL é um supercondutor menos robusto (S'), denominada uma junção SS'S.

Buscando entender melhor como a supercondutividade se relaciona nos grãos e entre eles, pesquisadores criaram um sistema físico equivalente a dois grãos fracamente conectados em uma junção SS'S [20]. Esse sistema consiste em um filme fino retangular de nióbio com uma canaleta transversal no centro, uma região de espessura reduzida do mesmo material¹. Como apresentado em [20], a canaleta exibe uma densidade de corrente crítica inferior ao resto do filme e a amostra como um todo exibe uma assinatura em forma de resposta magnética idêntica a supercondutores granulares, permitindo estudar as características de um material granular através desse modelo.

A fim de aprimorar o entendimento do sistema, modelamos esse sistema granular simplificado através de uma aproximação do modelo de Bean e utilizando a formulação T-A. Essa formulação é responsável por determinar as distribuições de corrente e de campo magnético na amostra, aproveitando-se da geometria de filme fino para reduzir a complexidade dos cálculos. Os resultados numéricos obtidos estão coerentes com aqueles observados experimentalmente através de imagens obtidas pela técnica de imageamento magneto-óptico (MOI).

¹Na prática, o processo utilizado para criar a região de espessura reduzida envolve aplicar um feixe de íons de gálio na amostra, removendo átomos de Nb do filme. Isso faz com que alguns átomos de gálio acabem sendo adsorvidos pelo filme [20].

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, iremos introduzir brevemente o fenômeno da supercondutividade, depois abordaremos o modelo de estado crítico de Bean, capaz de descrever macroscopicamente as distribuições de campo magnético e corrente em alguns supercondutores, e, por fim, abordaremos a formulação T-A, descrevendo os problemas resolvidos neste trabalho.

2.1 SUPERCONDUTIVIDADE

A supercondutividade é um estado físico que alguns materiais alcançam, caracterizado por duas propriedades: a resistividade elétrica nula e o efeito Meissner. A primeira faz com que esses materiais conduzam corrente elétrica sem dissipação de energia; enquanto a segunda garante que linhas de campo magnético \mathbf{B} não atravessem o material. Quando um supercondutor está sob efeito de um campo magnético, ele gera correntes supercondutoras de blindagem, que geram uma magnetização oposta ao campo aplicado, de modo a anular \mathbf{B} no interior do material. Em outras palavras, um supercondutor é um diamagneto perfeito [16, 18].

Um material não supercondutor apresenta uma queda da resistividade elétrica conforme sua temperatura diminui, chegando a um valor de resistividade residual a 0 K. Um material supercondutor, entretanto, apresenta resistividade nula quando sua temperatura é reduzida a partir de um valor crítico T_c , atingindo o estado supercondutor, como ilustrado na Figura 1a.

Além da temperatura, o campo magnético no material é outra variável que define o estado supercondutor: o material só é capaz de blindar campo até um valor de campo aplicado H_c , como mostra a Figura 1b. Há também materiais que apresentam um estado entre a blindagem total de campo, estado Meissner, e o estado normal. Esse estado é chamado de **estado misto**, e sua presença define os supercondutores do tipo II. Nesse caso, definimos dois valores de campo crítico, H_{c1} e H_{c2} com $H_{c1} < H_{c2}$, tendo estado Meissner em $H < H_{c1}$ e estado misto em $H_{c1} < H < H_{c2}$, como mostra a Figura 1c. Aqueles materiais supercondutores que não apresentam esse estado são chamados de supercondutores tipo I.

O que acontece no estado misto é a coexistência dos estados supercondutor e normal, de modo que o efeito Meissner não se aplica globalmente, mas sim localmente. Linhas de campo magnético atravessam o material de forma quantizada, denominadas vórtices, em regiões no estado normal, adjacentes a regiões supercondutoras que continuam blindando o campo e permitindo a passagem de corrente sem resistência [16, 18].

Neste trabalho denominaremos o campo \mathbf{B} como campo magnético [10], que em outros textos pode ser chamado de densidade de fluxo magnético ou indução magnética. O campo \mathbf{H} , dado por $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$, em que \mathbf{M} é a magnetização, μ é a permeabilidade magnética do meio e μ_0 a do vácuo, será denominado campo magnético auxiliar \mathbf{H} , ou simplesmente campo \mathbf{H} como já feito anteriormente. Como veremos posteriormente, no regime de campo a ser descrito, temos $\mu = \mu_0$, assim como no vácuo. Assim, \mathbf{B} e \mathbf{H} são iguais a menos de uma

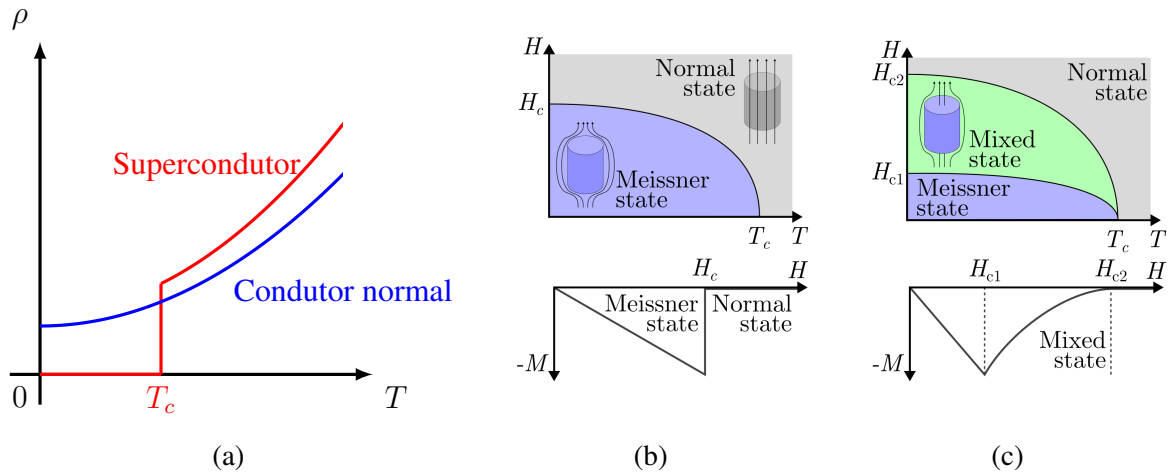


Figura 1: (a) Resistividade elétrica ρ em função da temperatura T para um supercondutor e um condutor normal. Adaptado de [25]. (b) Diagrama de fase $H-T$ e curva de magnetização $M-H$ de um supercondutor tipo I. Retirado de [4]. (c) Diagrama de fase $H-T$ e curva de magnetização $M-H$ de um supercondutor tipo II. Retirado de [4].

constante multiplicativa. Nesse caso, optamos por falar majoritariamente em termos do campo \mathbf{B} .

Além do campo magnético e da temperatura, a corrente que atravessa um supercondutor também possui um limite superior. Mais especificamente, se a densidade de corrente \mathbf{J} possuir módulo maior que a densidade de corrente crítica J_c , então o material deixa o estado supercondutor. Portanto, as três variáveis de estado, J , B e T , são necessárias para definir o estado supercondutor, sendo o valor crítico de uma delas dependente das outras duas.

2.2 MODELO DE ESTADO CRÍTICO DE BEAN

Modelos de estado crítico surgem como uma forma de descrever a distribuição de densidade de corrente e de campo magnético em materiais supercondutores do tipo II. Esses modelos não se comprometem a explicar a física por trás da supercondutividade, mas sim descrever os resultados macroscópicos observados. Assim, consideram a penetração de campo \mathbf{B} como uma aproximação contínua da penetração quantizada que ocorre através dos vórtices.

Trabalharemos aqui com a aproximação $\mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{H}$ no supercondutor, válida para supercondutores do tipo II com $H_{c1} \ll H_{c2}$ no regime $B > \mu_0 H_{c1}$. Nessas condições, um modelo de estado crítico afirma que, ao aplicar um campo magnético externo a partir do zero, esse irá penetrar na amostra começando pelas partes mais externas – onde definimos como região de **estado crítico**, em que a corrente flui com módulo igual ao seu valor crítico, ou seja, $J = J_c(\mathbf{B}, T)$ –, enquanto a parte mais interna segue blindada de campos – definida como região de **campo nulo**, ou de **campo invariante** se considerarmos um caso mais geral em que a amostra já estava sujeita a algum campo inicial [23]. A relação entre \mathbf{J} e \mathbf{B} no supercondutor é ditada pela lei de

Ampère

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}. \quad (1)$$

Cada modelo de estado crítico (fixada uma temperatura) descreve o módulo da densidade de corrente presente na região de estado crítico como uma função $J(\mathbf{B})$ diferente. Neste trabalho trataremos o caso mais simples, em que J_c não depende de B , chamado de **modelo de estado crítico de Bean**, ou simplesmente **modelo de Bean** [1].

O modelo de Bean apresenta soluções analíticas para alguns casos com simetrias bem definidas. Apresentaremos aqui as soluções para dois deles em que uma amostra de supercondutor é sujeita a um campo aplicado: uma chapa infinita em duas direções e um filme fino infinito em uma direção. Vale notar que também é possível obter soluções analíticas para casos em que há uma corrente externa aplicada, porém esses casos não serão abordados neste trabalho, já que os sistemas de interesse foram estudados sem a aplicação de corrente externa.

2.2.1 Chapa infinita sob ação de um campo paralelo aplicado

Considere uma chapa (do inglês *slab*) de um material supercondutor, sem campo penetrado inicialmente, com espessura $2W$ que se estende infinitamente nas direções \hat{y} e \hat{z} centrada no plano yz , como mostra a Figura 2. Ao aplicar um campo externo $\mathbf{B} = B_a \hat{z}$ a partir do zero, com $B_a > 0$, calculemos os perfis de campo resultante em todo o espaço e de densidade de corrente ao longo do supercondutor.

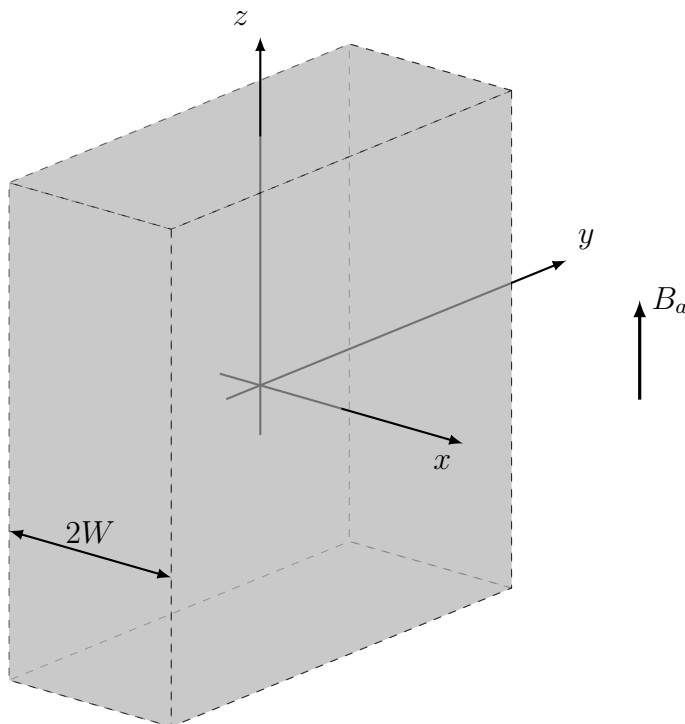


Figura 2: Representação de uma chapa infinita de espessura $2W$, com centro no plano yz , sob ação de um campo aplicado $\mathbf{B} = B_a \hat{z}$.

Por simetria de translação no plano yz , concluímos de imediato que $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x)$ e $\mathbf{B} =$

$B(x)$. O problema também apresenta simetrias de reflexão nos três planos, sendo tangencial-magnético nos planos zx e yz , e normal-magnético no plano xy . A condição de campo normal-magnético no plano xy e a simetria de translação em z implicam em $B_x = B_y = 0$. Assim, a Equação (1) se resume a

$$\mu_0 J_y(x) = -\frac{dB_z}{dx} \quad (2)$$

no interior do supercondutor, com $J_x = J_z = 0$. Como não há corrente fora do supercondutor, B_z é constante na região. Além disso, como em $x \rightarrow \infty$, $B_z = B_a$, então $B_z(x) = B_a$ para $|x| > W$. Como não há corrente superficial no supercondutor, B_z é contínua na transição entre os meios [10], logo $B_z(W) = B_a$ também. Note que $J_y(x)$ é ímpar para garantir que $B_z(x)$ seja par, portanto basta resolver o caso $x > 0$.

Para resolver a Equação (2), consideramos primeiro uma situação em que o campo penetra na amostra até $|x| = a$. Nesse caso, temos $J_y(x) = -J_c$ em $a < x < W$ (região de estado crítico), pois as correntes surgem para blindar o interior do material. Nessa região, temos, portanto, um campo magnético que varia linearmente:

$$\mu_0 J_c = \frac{dB_z}{dx} \Rightarrow B_z(x) = \mu_0 J_c x + c,$$

em que c é uma constante de integração. Por hipótese, $B_z(a) = 0$, e por condição de contorno apresentada anteriormente, $B_z(W) = B_a$, portanto $c = B_a - \mu_0 J_c W$ e

$$a = \left(W - \frac{B_a}{\mu_0 J_c} \right). \quad (3)$$

Em $x < a$, $B_z(x) = 0$ e, pela Equação (2), $J_y(x) = 0$.

Pela Equação (3), notamos que o campo penetra a chapa até o centro quando B_a atinge um campo característico dado por

$$B^* = \mu_0 J_c W. \quad (4)$$

Quando o campo aplicado é maior que o campo característico ($B_a > B^*$), temos ainda $c = B_a - B^*$ (apenas reescrevemos usando a definição de B^*), mas a amostra já não apresenta região de campo nulo. Portanto, nesse caso definimos $a = 0$.

Em resumo, as funções $J_y(x)$ e $B_z(x)$ para o caso são dadas por

$$J_y(x) = \begin{cases} -\text{sgn}(x)J_c, & \text{se } a < |x| \leq W, \\ 0, & \text{se } |x| \leq a, \end{cases} \quad (5)$$

$$B_z(x) = \begin{cases} B_a, & \text{se } |x| \geq W, \\ B^* \frac{|x| - W}{W} + B_a, & \text{se } a \leq |x| < W \\ 0, & \text{se } x < a, \end{cases} \quad (6)$$

em que

$$a = a(B_a) = \begin{cases} W \left(1 - \frac{B_a}{B^*} \right), & \text{se } B_a < B^*, \\ 0, & \text{se } B_a \geq B^*. \end{cases} \quad (7)$$

Os gráficos das Equações (5) e (6) estão plotados na Figura 3 para diferentes campos aplicados.

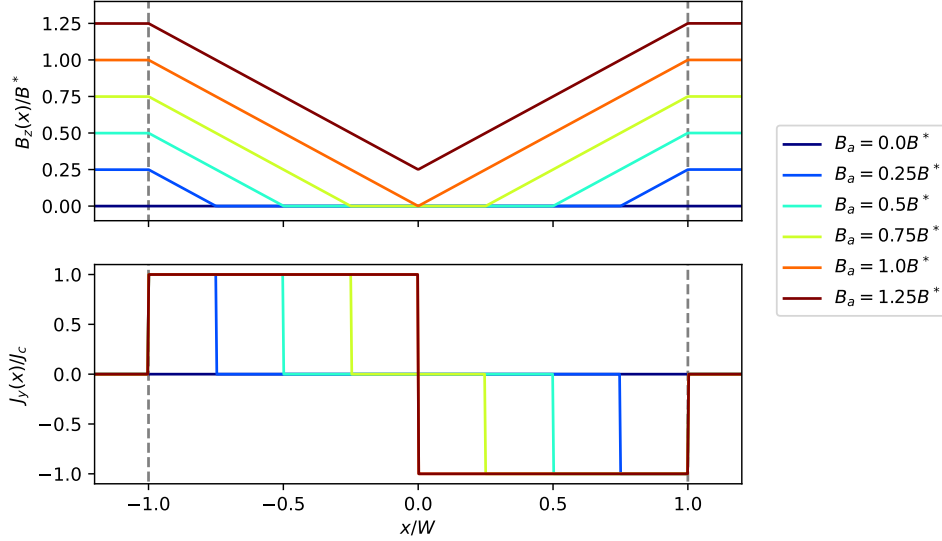


Figura 3: Perfis de $J_y(x)$ e $B_z(x)$ para diferentes campos aplicados B_a a uma chapa supercondutora infinita. Os tracejados em cinza representam os limites da chapa supercondutora.

2.2.2 Filme fino infinito sob ação de um campo ortogonal aplicado

Consideremos a chapa da seção anterior, porém reduzindo a altura em z de infinito a um valor finito $\delta \ll W$. Assim, temos um filme fino de largura $2W$ e espessura δ centralizado no plano xy com comprimento infinito em y , como ilustrado na Figura 4. Calculemos as distribuições de corrente e campo magnético para esse caso quando aplicamos um campo ortogonal ao filme, $\mathbf{B} = B_a \hat{z}$, $B_a > 0$.

Para esse sistema, assumiremos que a densidade de corrente é constante ao longo da espessura δ do filme. Como temos ainda a simetria de translação em y e a condição de campo tangencial-magnético no plano zx , obtemos que $B_y = 0$ em todo o espaço. Como as derivadas em y são todas nulas, temos, pela Equação (1), que as componentes J_x e J_z também são nulas, e a componente J_y é dada por

$$\mu_0 J_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (8)$$

Como a amostra tenta blindar o campo magnético aplicado, as linhas de fluxo terão de contornar a mesma, dando origem assim a componentes tangenciais B_x nas proximidades das superfícies em $z = \pm\delta/2$. Como esse contorno implica em componentes de sinais opostos em cada lado do filme, isto é, $B_x(x, z = \delta/2) = -B_x(x, z = -\delta/2)$, deve haver um gradiente

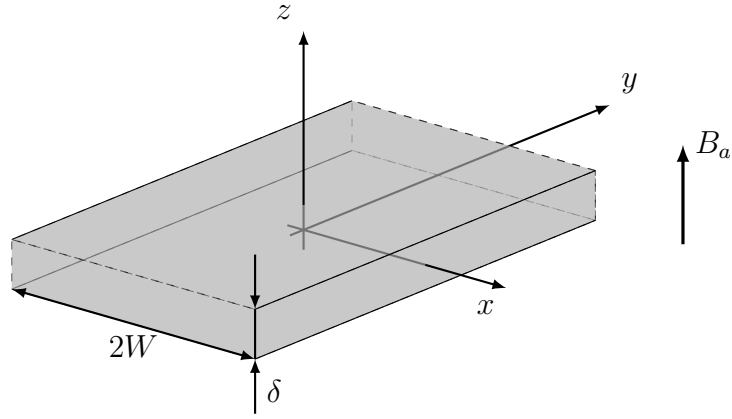


Figura 4: Representação de um filme fino de espessura δ e largura $2W$, centralizada ao plano xy , sob ação de um campo aplicado $\mathbf{B} = B_a \hat{\mathbf{z}}$.

muito grande de B_x nessa direção para manter a continuidade [23]. Portanto, a derivada $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ é muito maior que a derivada $\frac{\partial B_z}{\partial x}$ (B_z não troca de sinal em $x = \pm W$, e também possui maior comprimento para variar, pois assumimos $\delta \ll W$). Logo, a Equação (8) se reduz a

$$\mu_0 J_y = \frac{1}{\delta} [B_x(x, z = \delta/2) - B_x(x, z = -\delta/2)], \quad (9)$$

em que consideramos $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ constante em z , para garantir que J_y seja uma função apenas de x .

A Equação (9) junto com as condições de contorno apresentadas foi resolvida na referência [23], usando ideias de mapeamento conforme e método de imagens apresentados em [15]. Os resultados obtidos para densidade de corrente e campo magnético são, respectivamente,

$$J_y(x) = \begin{cases} -\text{sgn}(x)J_c, & \text{se } a < |x| \leq W, \\ -\frac{2J_c}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{W} \sqrt{\frac{W^2 - a^2}{a^2 - x^2}}\right), & \text{se } |x| \leq a, \end{cases} \quad (10)$$

$$B_z(x) = \begin{cases} B_f \ln\left(\frac{|x|\sqrt{W^2 - a^2} + W\sqrt{x^2 - a^2}}{a\sqrt{|x^2 - W^2|}}\right), & \text{se } |x| > a, \\ 0, & \text{se } |x| \leq a, \end{cases} \quad (11)$$

em que o campo característico do filme B_f e o comprimento a são dados por

$$B_f = \frac{\mu_0 J_c \delta}{\pi}, \quad (12)$$

$$a = \frac{W}{\cosh(B_a/B_f)}. \quad (13)$$

As funções dadas pelas Equações (10) e (11) estão plotadas na Figura 5 para diferentes campos aplicados B_a .

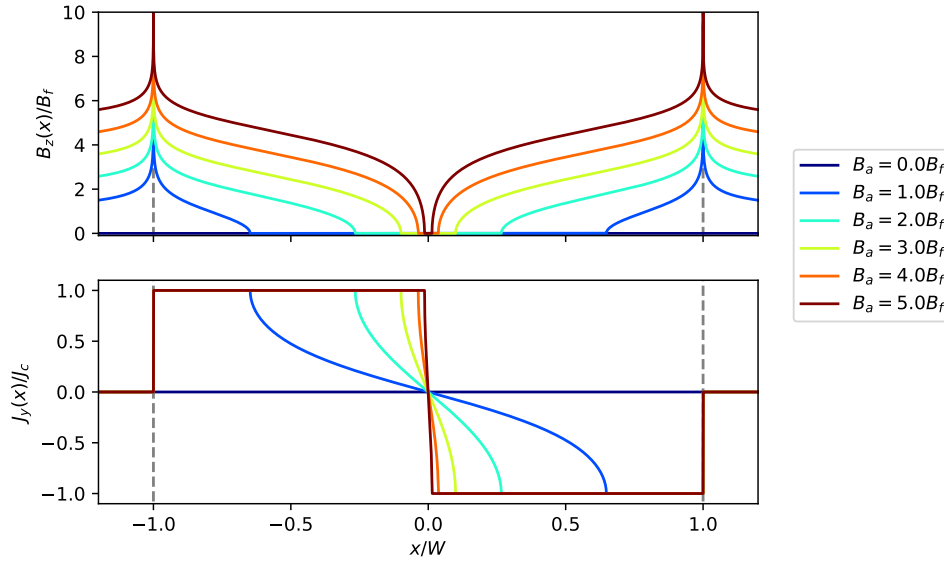


Figura 5: Perfis de $J_y(x)$ e $B_z(x)$ para diferentes campos aplicados B_a a filme fino supercondutor com comprimento infinito. Os tracejados em cinza representam as bordas do filme.

Faremos algumas observações acerca desses resultados. Primeiro, notemos que o campo não penetra completamente a amostra, pois a Equação (13) mostra que $a > 0$, implicando na existência de uma região de campo nulo ($-a < x < a$), mesmo que muito estreita. Em seguida, observemos que o campo próximo às bordas do filme é maior do que aquele aplicado. Isso se deve aos fortes efeitos de desmagnetização presentes na geometria de filme fino [23]. Nas bordas do filme, o campo diverge ($x \rightarrow W \Rightarrow B_z \rightarrow \infty$), o que é uma consequência razoável após considerar um comprimento infinito. Além disso, notemos também que a região de campo nulo não apresenta corrente nula, diferente do caso da chapa infinita.

2.2.3 Aproximação para modelagem de um supercondutor

Antes de discutir a formulação T-A, vamos considerar uma estratégia utilizada para modelar numericamente o comportamento dos supercondutores tipo II. No modelo de estado crítico de Bean, a corrente não flui no material com valores maiores que J_c , e o campo elétrico \mathbf{E} é assumido nulo quando $J < J_c$. Além disso, uma resistividade efetiva ρ não é univocamente determinada pela lei de Ohm $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$ quando $J = J_c$. Essas características dificultam a solução numérica de modelos de estado crítico [17].

Uma alternativa para simular o comportamento do supercondutor, é utilizar uma lei de potência que relaciona a resistividade do material com a densidade de corrente [11, 5, 8, 17]

$$\mathbf{E} = \frac{E_c}{J_c} \left(\frac{J}{J_c} \right)^{n-1} \mathbf{J} = \rho \mathbf{J}, \quad (14)$$

em que E_c é um campo elétrico de referência obtido quando $J = J_c$, convencionado como $E_c = 10^{-4} \text{ V/m}$, $n = U_0/k_B T$ é o expoente de creep e geralmente é da ordem de 3–30 [11], U_0

é a barreira energética de pinning, k_B é a constante de Boltzmann, e $\rho = \frac{E_c}{J_c} \left(\frac{J}{J_c} \right)^{n-1}$ é a resistividade elétrica isotrópica. Apesar da resistividade num supercondutor ser nula, o valor não nulo obtido pela Equação (14) pode ser interpretado como uma consequência macroscópica da movimentação de vórtices no material. Notemos que, quando $J < J_c$, o termo entre parênteses é menor que 1, logo o termo após a potenciação é tão pequeno quanto maior for n . Quando $J > J_c$ o comportamento se inverte, o termo entre parênteses fica maior que 1 e a potência fica tão grande quanto maior for n , tal que no limite $n \rightarrow \infty$ recuperamos o modelo de Bean. O comportamento dessa função está ilustrado na Figura 6.

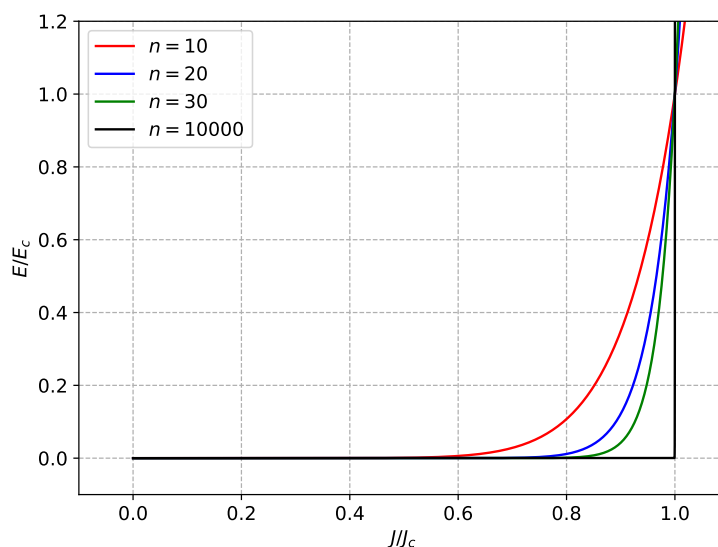


Figura 6: Resistividade elétrica de um supercondutor modelada pela lei de potência que relaciona \mathbf{E} – \mathbf{J} para $n = 10, 20, 30, 10000$.

A partir da Figura 6 percebemos que n é um fator que dita o quão abrupta é a mudança de fase entre os estados supercondutor e normal. Além disso, a lei de potência (14) é uma função que não apresenta derivadas nulas ou infinitas, o que colabora para os algoritmos de solução numérica [17].

2.3 FORMULAÇÃO T-A

Grande parte da aplicação de supercondutores se dá na forma de filmes finos. Esses são caracterizados por ter uma dimensão, a espessura δ , muito menor que as demais. A fim de modelar esses dispositivos, consideremos suas geometrias como superfícies bidimensionais, tomando $\delta \rightarrow 0$. Assim, a densidade volumétrica de corrente \mathbf{J} é considerada constante ao longo da espessura no filme, de forma que podemos modelá-la como uma densidade superficial de corrente $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}\delta$ numa superfície bidimensional. Essa aproximação se faz muito útil para simulações computacionais, e a formulação T-A tira vantagem dessa simplificação.

A partir da lei de Gauss para o magnetismo, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, podemos definir um potencial vetor

magnético \mathbf{A} , tal que [10]:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (15)$$

De forma análoga, podemos olhar para a equação de continuidade para o caso sem fonte ou dreno de cargas elétricas: $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. A equação nos provoca a definir também um potencial vetor de corrente \mathbf{T} tal que [21]:

$$\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{J}. \quad (16)$$

Essa definição é particularmente útil para o nosso caso, em que modelamos a geometria dos filmes finos como superfícies bidimensionais. Se $\hat{\mathbf{n}}$ é um versor normal à superfície do filme, então $\mathbf{T} = T\hat{\mathbf{n}}$. De fato, pois o rotacional de $T\hat{\mathbf{n}}$ é garantido estar ortogonal ao versor normal, garantindo que a corrente só flua através do filme. Esse argumento reduz a dimensão do problema: antes teríamos de calcular três componentes de \mathbf{J} (J_x , J_y e J_z , por exemplo) de forma independente, e agora precisamos apenas calcular uma grandeza escalar T , que contém toda a informação de \mathbf{J} .

Consideremos um problema de um supercondutor bidimensional definido pela superfície S inserido em um domínio de vácuo Ω . Dadas as condições de contorno adequadas, basta calcularmos \mathbf{T} em S e \mathbf{A} em Ω (que inclui S) para obtermos as distribuições de \mathbf{B} e \mathbf{J} . A Figura 7 ilustra esse problema. Essa abordagem que utiliza os potenciais vetores \mathbf{A} e \mathbf{T} é o que define a **formulação T-A**.

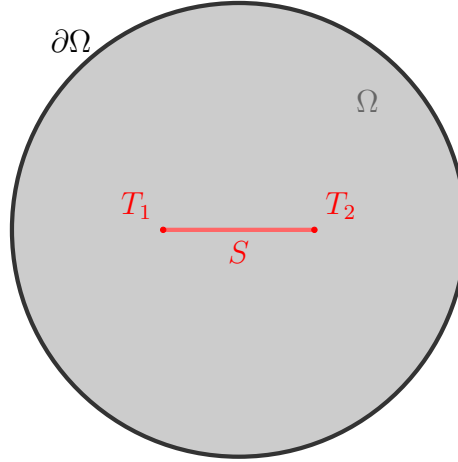


Figura 7: Diagrama representando uma aplicação da formulação T-A para um caso bidimensional. A formulação \mathbf{T} é aplicada na superfície supercondutora S , em vermelho, por onde é possível atravessar uma corrente perpendicular ao plano do desenho. Nas bordas de S são definidas condições de contorno $T = T_1$ e $T = T_2$. Em cinza temos o domínio Ω , onde é aplicada a formulação \mathbf{A} . Nas bordas de Ω aplicamos as condições de contorno em $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}$ ou $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}$.

No domínio do supercondutor, relacionamos \mathbf{E} com \mathbf{J} a partir da Equação (14) e conseguimos relacionar \mathbf{E} com \mathbf{B} a partir da lei de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, portanto temos

$$\nabla \times (\rho \nabla \times \mathbf{T}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (17)$$

Lembremos que $\rho = \rho(J) = \rho(|\nabla \times \mathbf{T}|)$, logo a equação (17) é altamente não linear. Sabendo o campo \mathbf{B} na região do supercondutor, podemos usar essa equação para determinar o potencial vetor \mathbf{T} . Para determinar unicamente a solução nesse caso, precisamos também impor condições de contorno.

Suponha um caso em que uma corrente externa I é aplicada em uma fita supercondutora. Recuperando a informação de que, apesar de fino, o supercondutor apresenta uma espessura finita δ , podemos relacionar a corrente total I ao potencial vetor \mathbf{T} através da integral de \mathbf{J} numa seção transversal da fita [24]:

$$I = \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\Sigma = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot d\Sigma = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{T} \cdot ds, \quad (18)$$

em que Σ é a seção transversal do supercondutor, $d\Sigma$ é o elemento de área orientado no sentido em que consideramos $I > 0$, e ds é o elemento de deslocamento em $\partial\Sigma$ orientado de acordo com o Teorema de Stokes. Como supomos previamente, \mathbf{J} é constante ao longo da espessura, portanto \mathbf{T} também o é, logo a integral do lado direito terá sua maior contribuição próximo das bordas da fita, onde $\mathbf{T} \parallel ds$. Portanto, temos

$$I = (T_1 - T_2) \delta, \quad (19)$$

em que T_1 e T_2 são os valores de T nas extremidades da seção transversal da fita, ou seja, em ∂S . A Figura 8 ilustra a situação descrita. Notemos que a Equação (19) nos dá um grau de liberdade na escolha da condição de contorno. Uma escolha conveniente é considerar $T_2 = 0$, implicando em $T_1 = I/\delta$. Vale ressaltar que a atribuição de T_1 e T_2 às duas arestas de S se dá a partir dos sinais que são carregados na Equação (18), o que pode ser feito através da regra da mão direita e atestado observando a Figura 8.

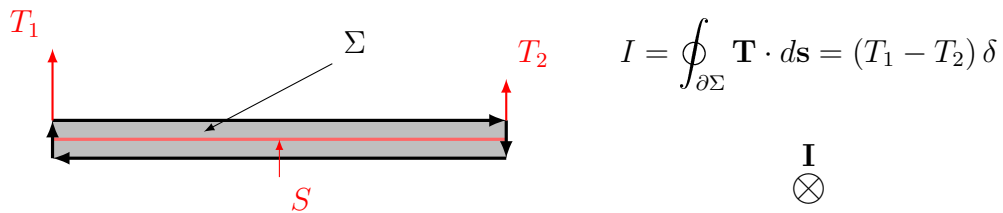


Figura 8: Diagrama representando a condição de contorno definida por (19). Em cinza está representada uma seção transversal Σ da fita supercondutora S . A curva em sentido horário representa o contorno de Σ orientado de forma a computar uma corrente que entra no plano da imagem. Nesse caso está representado $T_1 > T_2$, portanto temos a corrente $I > 0$ entrando no plano da imagem.

A partir da condição de contorno apresentada em (19) (ou seja, fixando $\mathbf{T}|_{\partial T}$), e sabendo \mathbf{A} , podemos determinar \mathbf{T} em todo o supercondutor resolvendo a Equação (17). Resta saber como obter \mathbf{A} .

Em Ω , relacionamos \mathbf{B} e \mathbf{J} através da lei de Ampère, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Escrevendo em termos

do potencial vetor magnético, temos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (20)$$

Nesse caso, se soubermos \mathbf{J} em Ω , podemos obter \mathbf{A} resolvendo a Equação (20). Para isso, precisamos impor algumas condições de contorno.

Quando uma densidade superficial de corrente está inserida em uma região com campo magnético, há uma descontinuidade em alguma das componentes paralelas do campo proporcional a essa densidade de corrente. Seja B_1 o campo acima de S e B_2 abaixo, e seja $\mathbf{J}_s = \delta \mathbf{J}$ a densidade de corrente superficial em S , se o vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$ aponta para cima de S , então impomos [10]

$$\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 = \mu_0 (\delta \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (21)$$

Além disso, se definirmos também $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}$ ou $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}$ em todo o contorno $\partial\Omega$, garantimos a unicidade de \mathbf{B} em Ω em um problema magnetostático²[19].

Nosso problema, entretanto, não é magnetostático. Assim, devemos informar a solução em $t = 0$ tanto para \mathbf{A} quanto para \mathbf{T} . No nosso caso, tomamos a solução trivial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t = 0) \equiv 0$ e $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t = 0) \equiv 0$, em que \mathbf{r} é o vetor posição. Isso automaticamente fixa um gauge em \mathbf{A} e, fornecendo as condições de contorno necessárias para o caso magnetostático para $t > 0$, obtemos uma solução única para os potenciais \mathbf{T} e \mathbf{A} [13].

Em resumo, em um problema consistindo de um material supercondutor inserido num meio qualquer, basta calcular o potencial vetor \mathbf{A} em todo o domínio, e T no domínio do supercondutor, acoplando as duas formulações, com as condições iniciais e de contorno necessárias, e teremos as distribuições de corrente e campo magnético determinadas.

2.3.1 Fita Supercondutora

Considere uma fita supercondutora de largura L , espessura δ e comprimento infinito, com os eixos cartesianos posicionados como mostra a Figura 9, sujeita a um campo magnético perpendicular aplicado \mathbf{B}_0 .

No sistema de coordenadas adotado na Figura 9, temos o versor normal à superfície dado por $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$. Definindo o potencial vetor de corrente $\mathbf{T} = T\hat{\mathbf{y}}$, temos

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \nabla \times \begin{bmatrix} 0 \\ T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x T \end{bmatrix}, \quad (22)$$

em que a derivada em z , e as componentes J_x e J_y foram tomadas como nulas devido às simetrias do problema, análogo ao apresentado na Seção 2.2.2. Substituindo em (14), obtemos

²Ao fixarmos $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}$, isto é, as componentes tangenciais de \mathbf{A} no contorno do domínio, garantimos não só a unicidade de \mathbf{B} , mas também a unicidade de \mathbf{A} em um problema magnetostático [19].

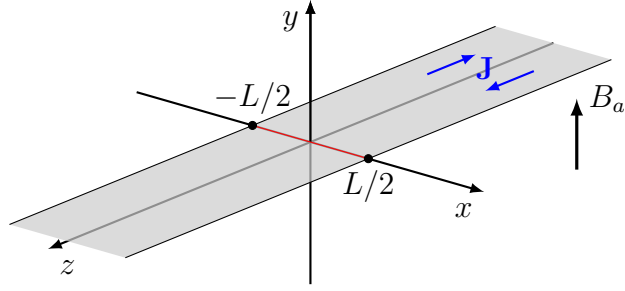


Figura 9: Representação de uma fita infinita de largura L sujeita a um campo magnético aplicado $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{y}$. Em vermelho está a seção transversal que será analisada. Em azul está ilustrada a corrente de blindagem gerada em resposta ao campo aplicado.

$E_z = \rho J_z$, enquanto $E_x = E_y = 0$.

Nesse caso, não temos corrente externa aplicada, portanto a Equação (17) e a condição de contorno (19) são, respectivamente, escritas como

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad T(x = -L/2) = T(x = L/2) = 0. \quad (23)$$

Acoplamos essa equação com a formulação **A** em todo o domínio, sob a condição de contorno $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}_0$ nas bordas da caixa de vácuo considerada, junto com a descontinuidade dada por (21) e somos capazes de obter uma solução numérica.

2.3.2 Geometria plana qualquer

Consideremos agora um filme fino supercondutor localizado no plano xy com um formato bidimensional qualquer sujeito a um campo ortogonal $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$. A situação está representada na Figura 10.

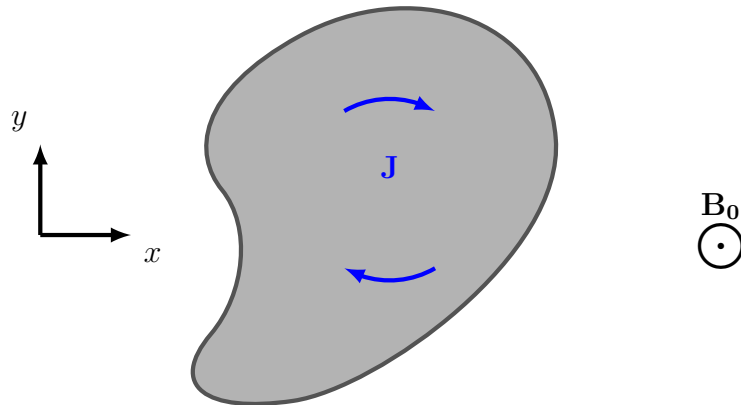


Figura 10: Representação de um filme fino supercondutor em um formato qualquer simplesmente conexo no plano xy . Um campo é aplicado perpendicularmente, $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$, causando uma resposta na forma de correntes de blindagem \mathbf{J} , representadas em azul.

Nesse caso, o versor normal à superfície S do supercondutor é dado por $\hat{\mathbf{n}} = \hat{z}$. Assim, o

potencial vetor de corrente $\mathbf{T} = T\hat{\mathbf{z}}$ se relaciona com a densidade de corrente \mathbf{J} através de

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \nabla \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y T \\ -\partial_x T \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Através da lei de Ohm, segue que $E_x = \rho J_x, E_y = \rho J_y$ e $E_z = 0$.

Sem corrente externa aplicada, a Equação (17) e a condição de contorno (19) são, respectivamente, escritas como

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad T|_{\partial S} = 0 \quad (25)$$

em que as derivadas de E_x e E_y com relação a z foram tomadas como nulas, pois são funções definidas apenas no plano xy . Novamente acoplamos com a formulação **A** em todo o domínio sob as condição de contorno referente ao campo aplicado e à densidade superficial de corrente, e podemos resolver numericamente o problema.

3 METODOLOGIA

Apesar de não terem sido produzidas neste trabalho, as amostras experimentais compõe uma parte importante dele, já que as simulações realizadas buscam modelar os comportamentos observados nessas amostras. Assim, nesta seção abordaremos brevemente e de maneira generalizada a confecção dessas amostras, bem como a técnica utilizada para adquirir as imagens estudadas. Em seguida, abordaremos o programa utilizado para obter as soluções numéricas dos problemas tratados, e, por fim, comentaremos sobre como utilizar as simetrias desses problemas a nosso favor.

3.1 AMOSTRAS EXPERIMENTAIS

As amostras de estudo são filmes finos de Nb com e sem WL. Elas possuem diferentes dimensões, que serão apresentadas durante a discussão dos resultados. Porém, todas começaram como um filme crescido através da técnica de *magnetron sputtering* em um substrato de Si(100) [7]. Para obter a geometria de interesse, foi utilizada a litografia ótica, que modifica propriedades de um resiste sob a aplicação de luz ultravioleta, permitindo “desenhar” sob uma máscara impressa em fotolito. Um processo de corrosão é então iniciado, de modo que a parcela do resiste que foi não iluminada protege o filme, e o resto é removido. Assim, o padrão desenhado no fotolito é transferido para o filme fino de Nb [2].

Para criar canaleta nas amostras, foi utilizado o processo de *focused ion beam* (FIB), que consiste de um feixe de íons Ga^+ direcionado à amostra, removendo átomos de Nb do filme. Isso permite a criação de fendas com largura e profundidade da ordem de alguns nanômetros,

podendo ser controlado pela dose de íons ejetados. Esse procedimento, entretanto, acaba introduzindo impurezas de Ga na região do filme sujeito ao feixe [4]. A geometria da amostra e o processo de criação da canaleta estão ilustrados na Figura 11.

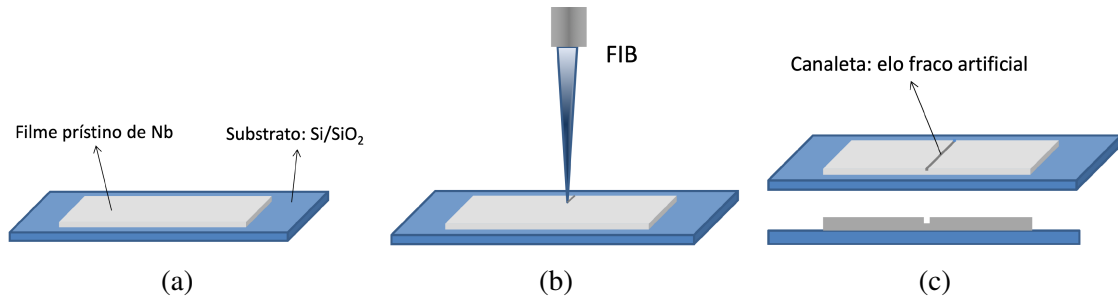


Figura 11: (a) Ilustração esquemática da amostra prístina. (b) Criação da canaleta a partir do FIB. (c) Amostra com a canaleta finalizada e sua vista de perfil. Retirado de [7].

3.2 AQUISIÇÃO DE IMAGENS VIA MOI

As amostras prontas são então inseridas na estação experimental de imageamento magnéto óptico (MOI). MOI é uma técnica que possibilita a visualização da distribuição bidimensional em um plano de campo magnético perpendicular. Isso é possível através de uma camada estruturada contendo um material revelador, que exhibe o efeito Faraday, em que a polarização da luz que atravessa o material é rotacionada em um ângulo proporcional ao campo magnético na direção da incidência. Assim, através de uma estação experimental contendo uma fonte de luz polarizada, um divisor de feixes, um espelho sob o material revelador, um analisador e um detector é possível descobrir o ângulo que a polarização da luz rotacionou em cada ponto de medição da imagem. Posicionando o analisador com uma polarização a 90° da polarização da luz incidente, obtemos uma imagem em escala de cinza cujos píxeis de intensidade nula representam campo magnético nulo, pois a polarização não rotacionou, e cujos píxeis brancos representam a luz que mais mudou sua polarização ao passar pelo material indicador (considerando um regime em que há bijeção na relação entre intensidade luminosa e ângulo de rotação da polarização). A presença do espelho faz com que a luz polarizada passe pelo material indicador duas vezes, fazendo-a rotacionar o dobro do que rotacionaria sem o espelho. A Figura 12 ilustra a estação de MOI utilizado no Grupo de Supercondutividade e Magnetismo (GSM) da UFSCar.

3.3 COMSOL MULTIPHYSICS

Os problemas numéricos deste trabalho foram resolvidos utilizando método de elementos finitos (FEM) no *software* COMSOL Multiphysics. Para o problema da fita infinita, utilizamos a interface 2D; enquanto para os demais problemas utilizamos a interface 3D. O potencial vetor magnético A foi calculado no módulo *Magnetic Fields (mf)* incluído no programa [14]. Por

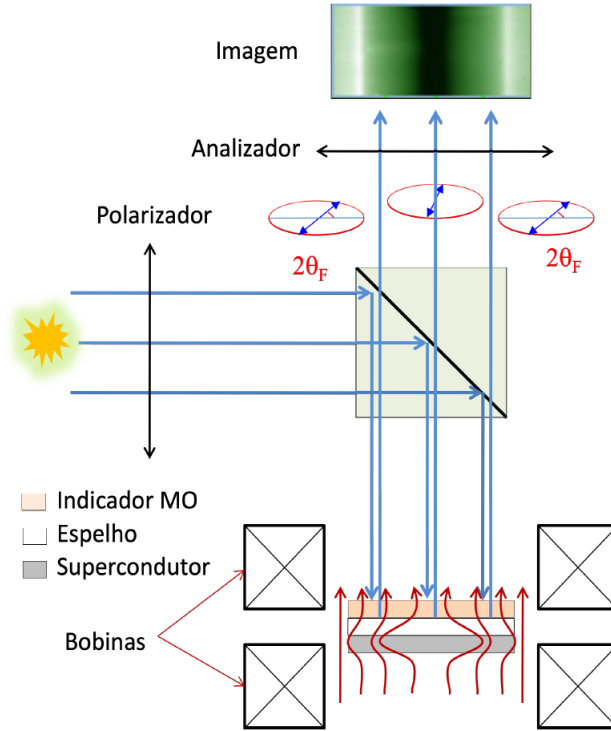


Figura 12: Diagrama simplificado do setup de MOI utilizado no GSM. Retirado de [7].

outro lado, o potencial vetor de corrente T foi implementado manualmente utilizando o módulo *Coefficient Form Boundary (cb)*.

As duas formulações são acopladas. A cada iteração, o campo magnético B calculado no módulo *mf* é utilizado na lei de Faraday para o cálculo de T no módulo *cb*, e a densidade de corrente J calculada no módulo *cb* é utilizada como uma densidade de corrente externa no módulo *mf*.

3.4 USO DE SIMETRIAS

Quando o problema apresenta simetrias, é interessante usá-las para simplificar a sua resolução. Isso não se limita a cálculo numérico, mas é particularmente interessante nesse caso por conta da diminuição do tempo computacional gasto. Para discutir como tomar proveito dessas simetrias, vamos considerar casos particulares das condições de contorno necessárias na formulação A e nomeá-las de acordo:

$$\hat{n} \times \mathbf{A} = 0; \quad (26)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{B} = 0. \quad (27)$$

As condições de contorno (26) e (27) são chamadas, respectivamente de **isolante magnético** e **condutor magnético perfeito**, ou **tangencial-magnético** e **normal-magnético**. A primeira dupla de nomes é comumente utilizada na área de simulações eletromagnéticas. O porquê

da primeira condição ser chamada de isolante magnético fica claro quando notamos que $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, pois vemos que (26) implica em $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$.

Para entender como essas condições de contorno podem nos ajudar, vamos tomar como exemplo de uma bobina do tipo *racetrack* centralizadas na origem de um sistema de coordenadas cartesianas, paralela ao plano xy , como mostra a Figura 13a. Envolvermos essa bobina por um domínio de ar em forma de cubo, cujas faces ficam sujeitas à condição de contorno de isolante magnético. Ao aplicar uma corrente elétrica I na bobina, obtém-se a situação ilustrada na Figura 13b.

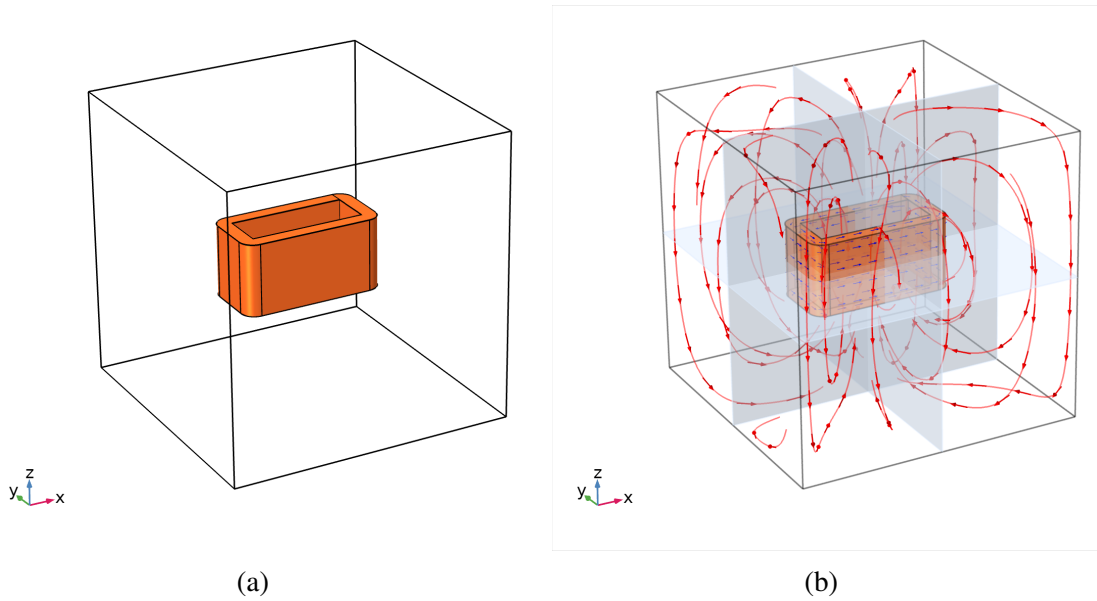


Figura 13: (a) Representação no COMSOL de uma bobina *racetrack* inserida em um meio de vácuo. (b) Uma corrente é aplicada na bobina, indicada pelas setas azuis, gerando um campo magnético no domínio, com algumas linhas de campo representadas em vermelho. Inspirado em [9].

Na Figura 13a é possível perceber que a geometria do problema apresenta simetrias nos planos xy , yz e zx . Porém, como essas simetrias se traduzem no campo magnético quando a corrente é aplicada na bobina? Para responder essa questão, devemos pensar no que deveria acontecer com as componentes B_x , B_y e B_z quando fazemos alguma operação de reflexão.

Quando fazemos $x \rightarrow -x$, esperamos que as componentes B_y e B_z se mantenham as mesmas e que B_x troque o sinal. Em outras palavras, esperamos que B_y e B_z sejam pares em x e que B_x seja ímpar. Isso implica que no plano yz , a componente B_x se anula, ou seja, $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$ no plano yz . De forma análoga, identificamos que $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0$ no plano zx . Portanto, os planos yz e zx apresentam a condição de isolante magnético.

Olhemos agora para a reflexão $z \rightarrow -z$. Quando sujeitas a essa operação, as componentes B_x e B_y invertem o sinal, enquanto B_z mantém-se invariante. Portanto, B_x e B_y são ímpares com relação a z , enquanto B_z é par. Assim, no plano xy temos $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = 0$, ou seja, xy apresenta a condição de condutor magnético perfeito.

Vamos agora redesenhar o nosso problema, considerando apenas o primeiro octante. A Figura 14a ilustra essa situação, onde identificamos os planos com a condição de isolante magnético em amarelo, e o plano com a condição de condutor magnético perfeito em rosa. Aplicamos nesse caso uma corrente de $I/2$ no que sobrou da nossa bobina³. Nas três faces do cubo que estão transparentes na Figura 14a, mantemos a condição de isolante magnético. Portanto, temos agora um domínio com todas as condições de contorno necessárias para garantir a unicidade da solução. Assim, resolvendo esse “novo” problema, obtemos a solução ilustrada na Figura 14b. Essa é equivalente a um recorte do primeiro octante da solução obtida na Figura 13b.

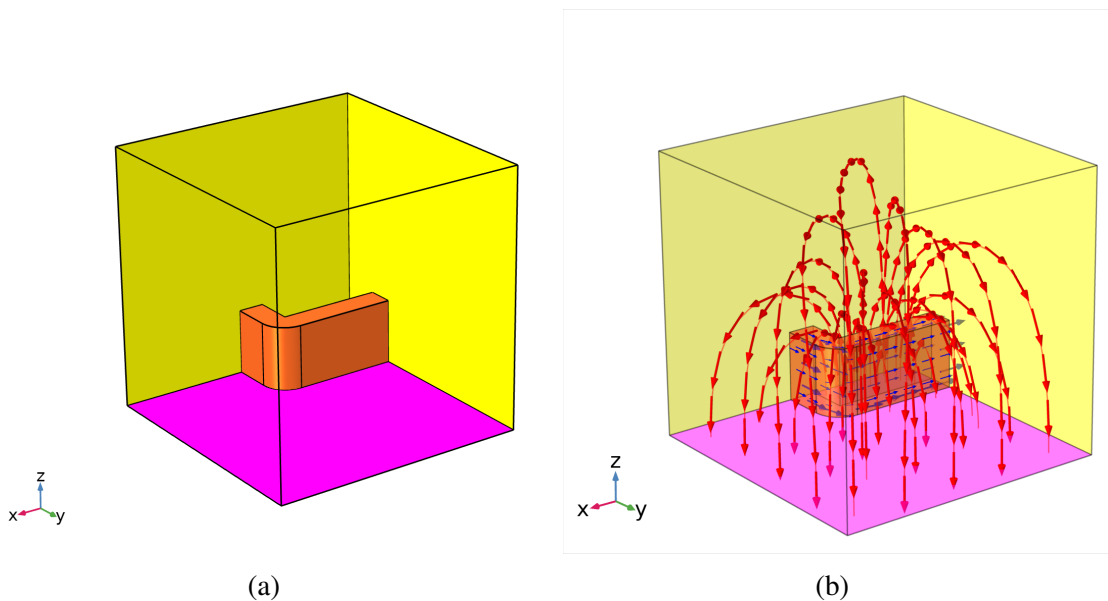


Figura 14: (a) Representação no COMSOL de uma bobina *racetrack* inserida em um meio de vácuo aplicando a simetria de $1/8$. Nos planos em amarelo foi aplicada a condição de isolante magnético, e no plano rosa foi aplicada a condição de condutor magnético perfeito. (b) Uma corrente é aplicada na bobina, indicada pelas setas azuis, gerando um campo magnético no domínio, com algumas linhas de campo representadas em vermelho. Inspirado em [9].

Vale notar que, como $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, a condição normal-magnético implica numa condição de densidade de corrente tangencial; e a condição tangencial-magnético implica numa condição de densidade de corrente normal.

Como utilizamos o método de elementos finitos na resolução numérica dos problemas deste trabalho, ser capaz de diminuir o tamanho do domínio é extremamente vantajoso, pois a cada simetria aplicada, reduzimos o número de elementos pela metade. Assim, conseguimos soluções mais rápidas mantendo a densidade de elementos, ou uma grade de pontos mais densa mantendo o tempo de solução na mesma ordem.

³O que determina o campo \mathbf{B} é \mathbf{J} , portanto aplicamos $I/2$ dessa vez, já que a seção transversal da bobina foi cortada ao meio. Assim mantemos a densidade de corrente, considerada homogênea nesse caso, a mesma entre os dois exemplos. No nosso modelo simplificado, é como se a bobina fosse uma única espira, porém, se nela colocássemos a informação de corrente aplicada no fio e o número de voltas que ele faz, a corrente aplicada se manteria para o caso com simetria aplicada, mas o número de espiras cairia pela metade.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção apresentaremos e discutiremos os resultados obtidos por meio de simulações para alguns sistemas com ordem crescente de dificuldade. Todas as simulações foram realizadas utilizando o COMSOL com a formulação T-A. Além disso, em todos os problemas padronizamos o expoente de creep $n = 21$ na relação E-J dada em (14), e consideramos que o supercondutor se encontra inicialmente em um estado sem campo magnético penetrado, isto é, esteve sujeito a um processo de resfriamento sem campo (ZFC).

4.1 FITA INFINITA

O primeiro problema resolvido foi aquele formulado na seção 2.3.1, cuja solução analítica seguindo o modelo de Bean foi apresentada na 2.2.2. Foi escolhida uma fita de largura $L = 1$ mm, espessura $\delta = 180$ nm, comprimento infinito e densidade de corrente crítica $J_c = 2 \cdot 10^{10}$ A/m². A fita está contida no plano zx , com o comprimento infinito na direção do eixo z . Simulamos o comportamento da mesma quando aplicado um campo $\mathbf{B}_a = B_a \hat{y}$, com B_a indo de 0 a 7,2 mT.

Para simular esse problema, utilizamos a interface 2D do COMSOL, e desenhamos a seção transversal da fita como uma aresta, envolta por um domínio circular de vácuo. A Figura 15a mostra a geometria desenhada, e a Figura 15b mostra a grade (*mesh*) utilizada em uma região próxima à fita.

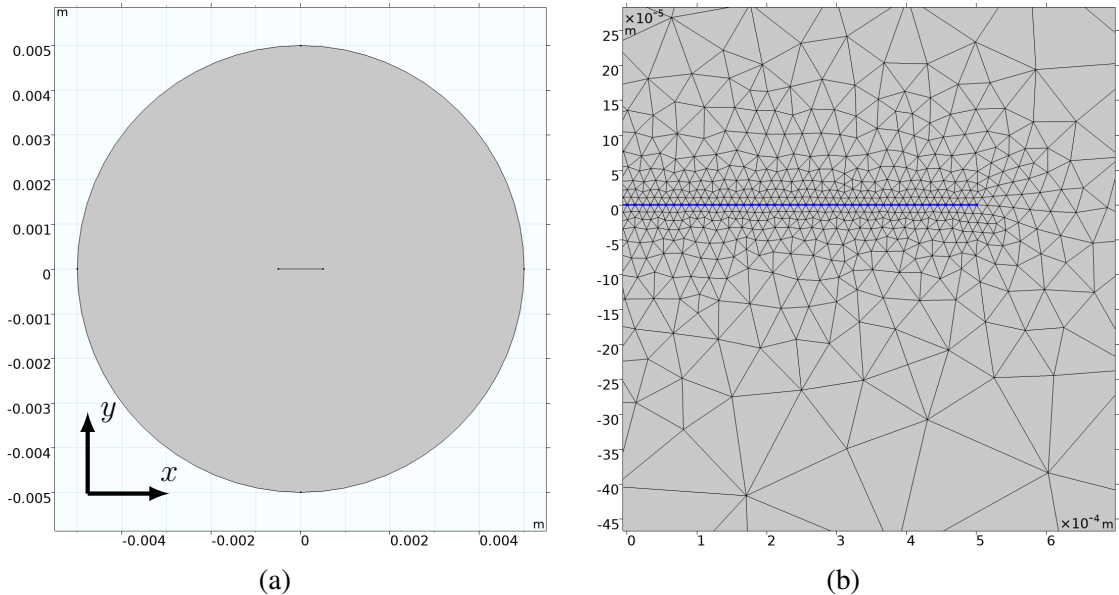


Figura 15: (a) Geometria desenhada na interface 2D do COMSOL para modelar uma fita supercondutora infinita. O segmento de reta ao centro representa a fita, enquanto o círculo representa o domínio de vácuo no qual a fita está inserida. Os eixos vertical e horizontal são, respectivamente, y e x . (b) *Mesh* da fita (azul) e do domínio próximo da mesma.

No contorno do círculo, aplicamos a condição de contorno $\hat{n} \times \mathbf{B} = \hat{n} \times \mathbf{B}_a$, informando que

a componente tangencial do campo \mathbf{B} a ser calculado é igual à componente tangencial do campo aplicado B_a em toda a fronteira externa do domínio e em todo instante de tempo⁴. Colocamos também a condição de contorno referente à descontinuidade de \mathbf{B} na fita, dada pela Equação (21), sendo também a forma pela qual inserimos a informação de \mathbf{J} na formulação A. Por fim, nas extremidades da seção transversal da fita ($(x, y) = (\pm L/2, 0)$) aplicamos a condição de contorno $T = 0$. Os perfis de campo e corrente obtidos nessa simulação estão apresentados na Figura 16.

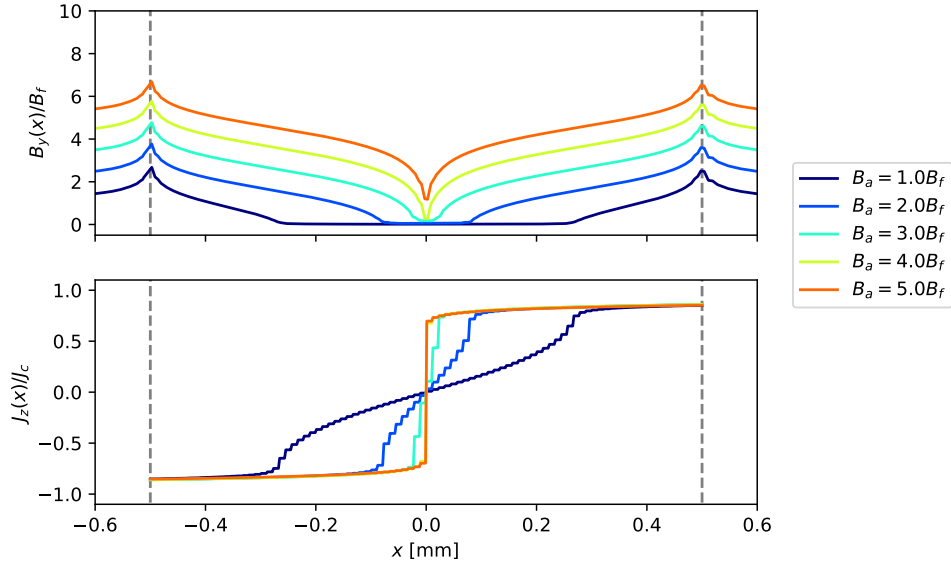


Figura 16: Resultados de J_z e B_y obtidos de simulação para diferentes campos aplicados B_a a uma fita supercondutora infinita. Os tracejados em cinza representam os limites da fita.

Os resultados apresentados na Figura 16 estão identificados a partir do campo característico B_f , cujo valor nesse caso é de 1,44 mT. Essa identificação facilita a comparação com os resultados adimensionais apresentados na seção 2.2.2. Comparando com os resultados analíticos obtidos a partir do modelo de Bean, vemos que os resultados numéricos da Figura 16 são compatíveis, mostrando que a modelagem a partir da formulação \mathbf{T} - \mathbf{A} está de acordo com o modelo de estado crítico mais simples. Por outro lado, notamos que a densidade de corrente obtida no resultado numérico apresenta uma transição mais suave entre as regiões de penetração e de blindagem de campo e no plano de simetria $x = 0$. Esse comportamento entra em desacordo com o modelo de estado crítico, pois supomos J_c constante e obtivemos $J \neq J_c$ na região de penetração de campo. Essa discrepância é esperada, pois, como discutido na seção 2.2.3, a relação \mathbf{E} - \mathbf{J} considerada é uma aproximação do modelo de Bean.

4.2 FILME FINO RETANGULAR (AMOSTRA PRÍSTINA)

Consideremos agora um filme fino supercondutor retangular, de espessura $\delta = 180$ nm, e lados 3 mm e 1 mm. A ideia desse sistema é ser o último passo antes de estudarmos os sistemas

⁴O campo aplicado é aumentado a partir do zero, portanto a condição de contorno também evolui no tempo.

granulares, sendo a geometria da amostra prístina utilizada em [3] e cujas imagens magneto-ópticas estão apresentadas na Figura 17a. Assim como na amostra experimental, aplicamos um campo magnético ortogonal indo de 0 a 100 Oe. Os resultados para quando esse campo esteve em 11 Oe e 62 Oe estão apresentados na Figura 17b. Utilizamos também a densidade de corrente crítica $J_c = 2 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$, uma estimativa razoável comparando com a referência [3]. Para este e os problemas seguintes, não nos preocupamos tanto em quantificar a intensidade do campo magnético, mas sim em estudar sua distribuição espacial, principalmente no que diz respeito às linhas escuras aparentes na Figura 17 nos casos de 62 Oe aplicados. Essas são linhas de descontinuidade de densidade de corrente, denominadas *d-lines*, e surgem como resposta às frentes de fluxo que penetram o filme pelas arestas, obrigando a corrente a “dobrar” próximo dos vértices, o que aumenta a blindagem nessa região. A Figura 17c ilustra as linhas de corrente nesse caso.

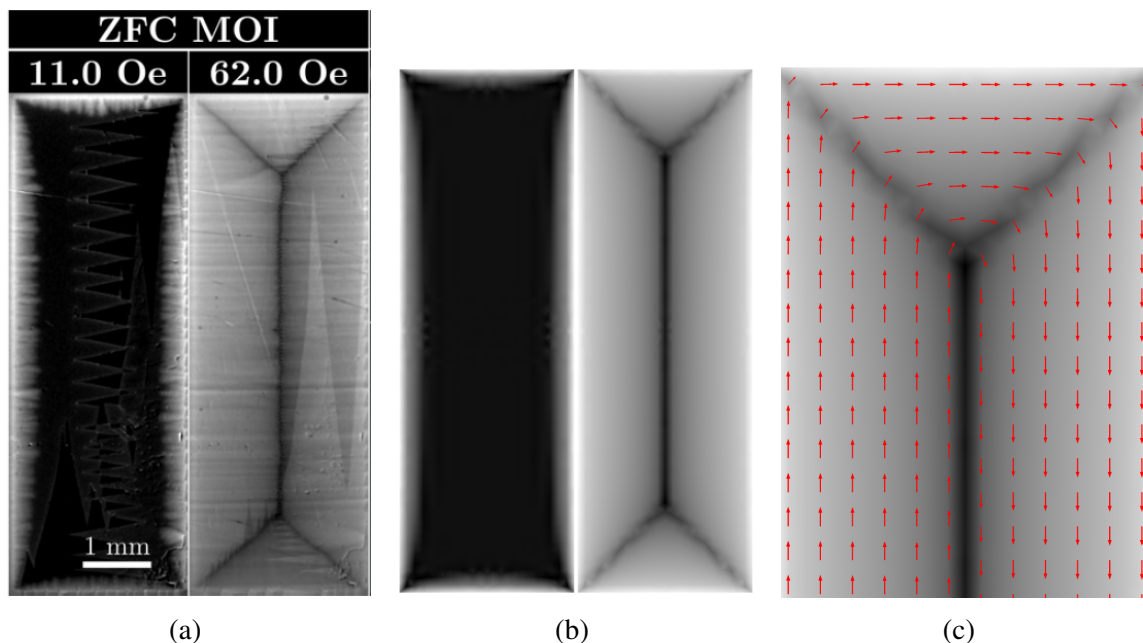


Figura 17: (a) Imagem magneto-óptica de uma amostra de $3 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ ao aplicar um campo perpendicular de 11 Oe (esquerda) e 62 Oe (direita), retirado de [20]. (b) Simulação realizada para a amostra de (a) com um campo perpendicular aplicado de 11 Oe (esquerda) e 62 Oe (direita). (c) Setas em vermelho indicando o sentido da corrente próximo das *d-lines* geradas para blindar o campo magnético aplicado apontando para fora do plano da imagem.

Modelamos o sistema descrito a partir do que foi explicado na seção 2.3.2. Na interface 3D do COMSOL, o filme foi desenhado no plano xy , e o mesmo foi envolvido por um domínio de vácuo em forma de paralelepípedo, como mostra a Figura 18a. Esse problema, entretanto, apresenta simetria nos três planos canônicos. Nos aproveitando disso, desenhemos apenas o primeiro octante, como mostra a Figura 18b; e aplicamos as condições de contorno de isolante magnético nos planos zx e yz , e de condutor magnético perfeito no plano xy (exceto na região do filme). Nas três faces externas do domínio de ar, impomos a condição de campo aplicado $\hat{n} \times \mathbf{B} = \hat{n} \times \mathbf{B}_a$, em que $\mathbf{B}_a = B_a \hat{z}$, com B_a indo de 0 a 10 mT (equivalente a 100 Oe no

campo \mathbf{H}). A condição $T = 0$ no contorno do filme também é aplicada, porém a condição de descontinuidade de \mathbf{B} deve ser tomada com cautela. Ao nos limitarmos ao primeiro octante, é como se cortássemos o nosso filme fino numa fatia ainda mais fina, de espessura $\delta/2$, portanto a condição (21) se escreve como $\mathbf{B} = \mu_0 \left(\frac{\delta}{2}\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}}\right)^5$, em que a densidade de corrente superficial presente nesse octante é dada por $\mathbf{J}_s = \frac{\delta}{2}\mathbf{J}$. Note que mantemos a densidade de corrente \mathbf{J} com relação ao problema completo, apenas redefinimos a **densidade de corrente superficial**.

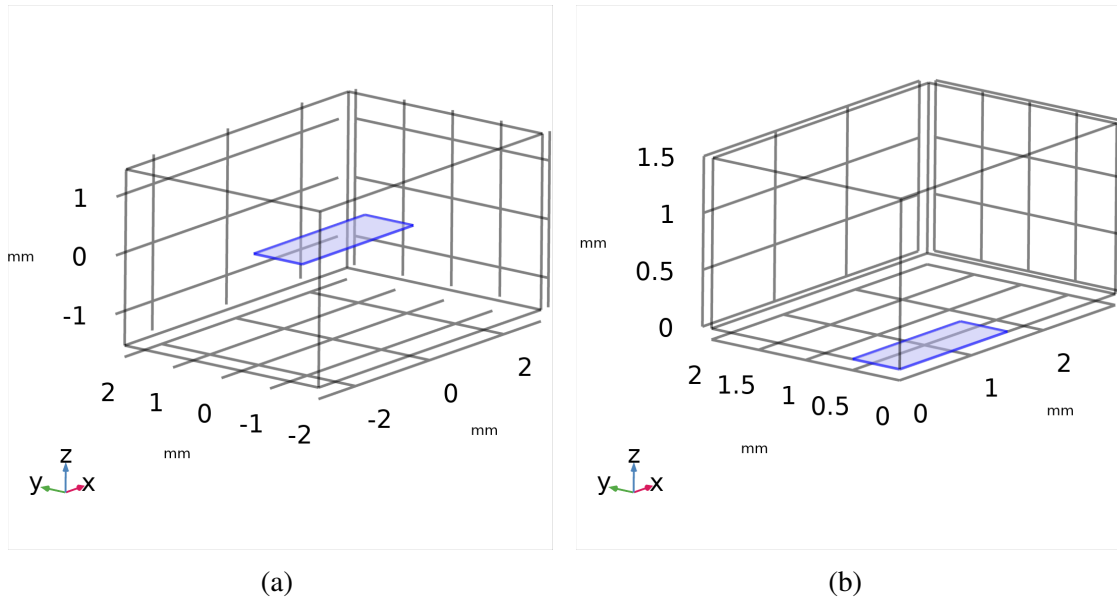


Figura 18: Geometria desenhada no COMSOL para o filme fino retangular $3 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ (destacado em azul) inserido num volume de vácuo. (a) Antes da redução do domínio por conta das simetrias. (b) Domínio reduzido por conta das simetrias.

Com todas as condições de contorno definidas, obtivemos as soluções numéricas do nosso problema. A Figura 17b mostra as distribuições de B_z obtidas no filme quando $B_a = 11 \text{ Oe}$ e 62 Oe . Notamos que a presença das *d-lines* está de acordo com o resultado experimental, preparando o terreno para o estudo dos casos com canaletas. Além disso, a Figura 19 mostra os perfis de campo e de densidade de corrente obtidos no centro do filme ao longo de sua transversal, isto é, da coordenada y .

A partir dos gráficos apresentados na Figura 19, podemos observar que os perfis se assemelham muito ao caso da fita infinita. Isso mostra que as descontinuidades apresentadas pelas *d-lines* não afeta a parte mais interior do filme de forma significativa.

4.3 FILME FINO COM CANALETA PERPENDICULAR

O nosso próximo passo é simular o sistema de dois grãos e uma canaleta (um WL) perpendicular às laterais do filme sujeitos a um campo magnético perpendicular aplicado. Parece trivial dar esse passo, porém a largura dessa canaleta nas amostras experimentais é de $1 \mu\text{m}$ [20], que

⁵Note que essa condição define $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}$ no filme, que faz parte da fronteira externa do nosso domínio dessa vez. Isso completa as condições de contorno nas faces do paralelepípedo.

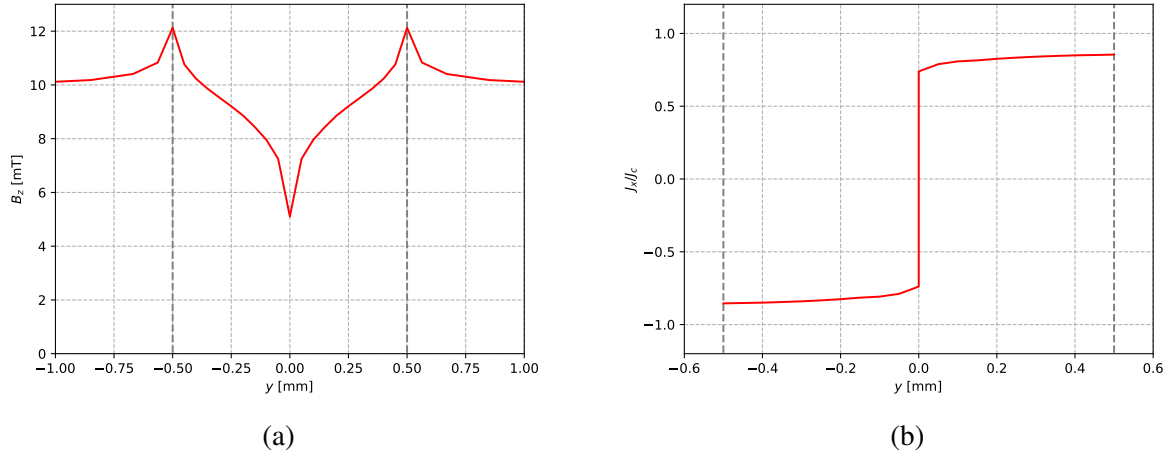


Figura 19: (a) Perfil de B_z ao longo de y em $x, z = 0$ quando aplicado 100 Oe perpendicular à amostra retangular prístina de $3 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$. (b) Perfil de J_x/J_c na mesma reta. As linhas tracejadas em cinza representam os limites do filme.

é três ordens de grandeza menor que as arestas do próprio filme. Isso dificulta consideravelmente a obtenção de uma solução numérica a partir de elementos finitos, pois esses elementos precisam variar de tamanho cerca de duas ordens de grandeza. Para contornar ligeiramente esse problema, adotamos uma canaleta de $100 \mu\text{m}$ de largura em nossos modelos, análogo ao que foi feito em [3]. Esse aparente exagero numa dimensão da geometria do modelo comparado ao caso real foi o que permitiu que obtivéssemos resultados coerentes com a física estudada.

A geometria da amostra desenhada no plano xy e um dos resultados obtidos utilizando a canaleta alargada estão apresentados na Figura 20. Aproveitamos também para definir uma variável que será objeto de estudo nas próximas discussões: o ângulo θ definido como o ângulo entre as d -lines opostas à canaleta, como mostra a Figura 20b.

Consideramos para esse problema um filme retangular de dimensões $2,5 \text{ mm}$ por $0,8 \text{ mm}$, com espessura de 180 nm e com uma canaleta central como descrito acima. A geometria tridimensional do problema foi desenhada como no caso anterior, como mostra a Figura 21a. As simetrias do problema são exatamente as mesmas do caso da amostra prístina, portanto modelamos apenas o primeiro octante, como mostra a Figura 21b, e consideramos as condições de contorno análogas. Na prática, a canaleta existe em apenas um lado da amostra, porém, como estamos fazendo a aproximação do filme para uma superfície, a consideração de que a densidade de corrente superficial é igual à densidade de corrente multiplicada pela espessura do filme ainda é válida na canaleta. Assim, para manter as mesmas densidades de corrente do caso sem o corte em xy , a condição de contorno (21) se escreve como $\mathbf{B} = \mu_0 \left(\frac{\delta}{2} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}} \right)$ na parte prístina e como $\mathbf{B} = \mu_0 \left(\frac{\delta^{\text{WL}}}{2} \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{n}} \right)$ na região da canaleta ao aplicar a simetria em xy , com δ^{WL} sendo a espessura do filme na região da canaleta.

A região entre os grãos, o WL, apresenta uma densidade de corrente crítica inferior a dos grãos, comprometendo a capacidade do material supercondutor granular de transportar grandes

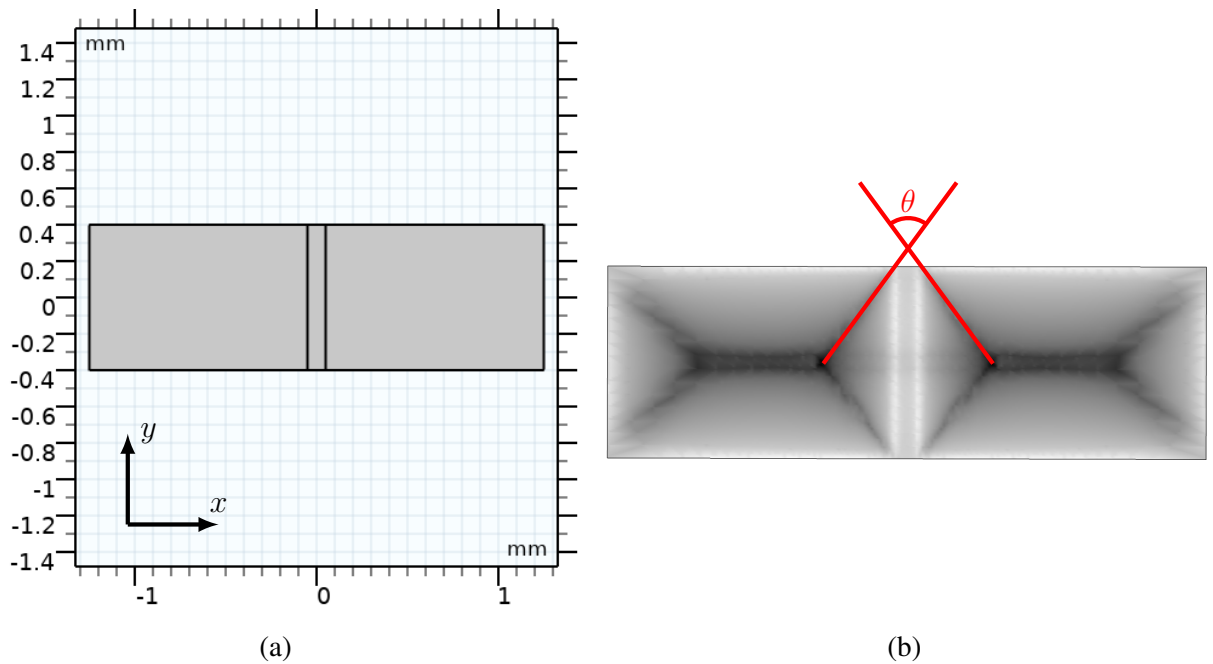


Figura 20: Geometria desenhada no COMSOL no plano xy para representar a amostra de $2.5 \text{ mm} \times 0.8 \text{ mm}$ com uma canaleta perpendicular no centro. A largura da canaleta foi tomada como $100 \mu\text{m}$, ao invés do valor experimental $1 \mu\text{m}$, para evitar uma *mesh* com gradiente de tamanho muito ruim, o que atrapalha na convergência da solução.

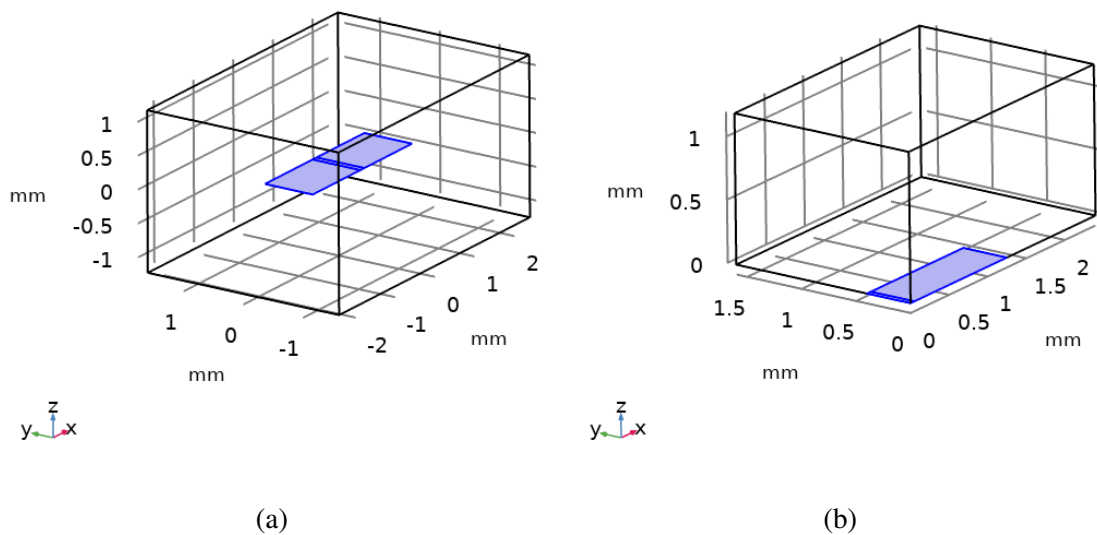


Figura 21: Geometria desenhada no COMSOL para modelar o filme retangular de $2.5 \text{ mm} \times 0.8 \text{ mm}$ com canaleta perpendicular no centro. O filme está representado em azul, inserido em um volume de vácuo. (a) Domínio sem a simplificação por simetrias. (b) Domínio simplificado após considerar simetrias.

quantidades de corrente. O filme retangular abordado nesta seção é um *toy model*, que apresenta algumas propriedades magnéticas iguais àquelas apresentadas por amostras sabidamente granulares. Na prática, quanto maior a dose de FIB na criação da canaleta, menor é a tempera-

tura crítica dessa região, o que também implica numa menor densidade de corrente crítica [20]. Portanto, criar amostras com diferentes propriedades intergranulares é uma tarefa trabalhosa. Por outro lado, para modelar esses sistemas, basta modificar o valor de J_c que atribuímos ao WL, que denominaremos de J_c^{WL} .

Mantendo a densidade de corrente crítica do grão, ou seja, da parte prístina, como J_c^{PR} , definimos a transparência τ como [6]

$$\tau \equiv \frac{J_c^{\text{WL}}}{J_c^{\text{PR}}}. \quad (28)$$

O nome dado a essa variável encontra sentido quando pensamos nos casos limites. Se $J_c^{\text{WL}} \rightarrow 0$, então a canaleta não é capaz de blindar nenhum campo, portanto é como se os dois grãos estivessem completamente desconexos, isto é, a corrente que flui em um grão não atravessa a canaleta e não alcança o outro grão. Por outro lado, se $J_c^{\text{WL}} \rightarrow J_c^{\text{PR}}$, então toda a corrente que circula em um grão atravessa a canaleta e chega no outro grão, pois é o caso descrito pela amostra prístina. Assim, a transparência τ , com $0 < \tau \leq 1$, dita o quanto a canaleta permite a passagem de corrente de um grão ao outro. A Figura 22 ilustra as linhas de corrente presentes na região próxima à canaleta para um caso de $\tau = 0,25$, sendo possível observar as discontinuidades dando origem a *d-lines* e uma parcela da corrente atravessando a canaleta.

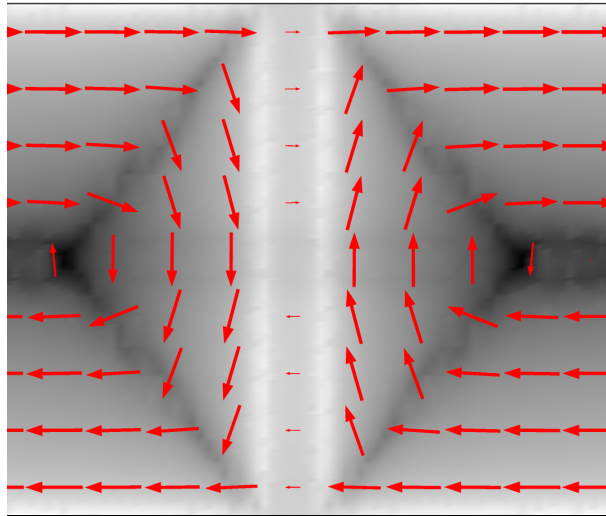


Figura 22: Linhas de corrente (vermelho) observadas em simulação para a amostra de $0,8 \text{ mm} \times 2,5 \text{ mm}$ com uma canaleta perpendicular e transparência $\tau = 0,25$.

A referência [6] mostra que é possível relacionar a transparência τ com o ângulo θ entre as *d-lines* através de

$$\tau = \cos \theta. \quad (29)$$

Do ponto de vista experimental, esse resultado permite medir indiretamente a transparência do sistema granular através de MOI. Basta olhar para o ângulo que as *d-lines* fazem ao aplicar um campo magnético perpendicular na amostra.

Para verificar se nosso modelo recupera a relação (29), simulamos sistemas com diferentes valores de transparência. Um resultado particular está apresentado na Figura 23b, em que podemos comparar com um resultado experimental obtido em [3, 6]. Os ângulos θ obtidos para diferentes valores de transparência τ inseridos nos modelos e as distribuições de campo para cada um desses valores estão apresentados na Figura 24.

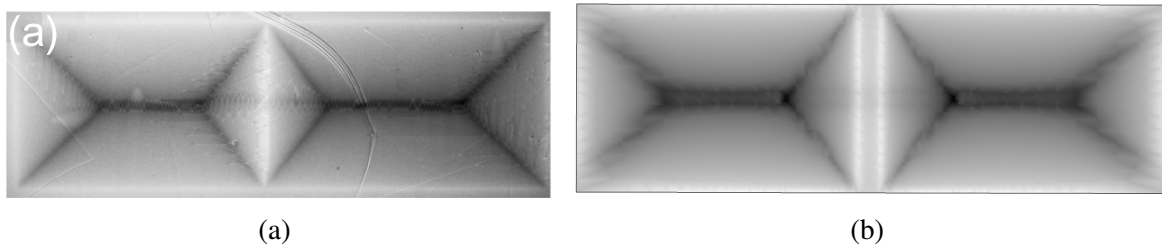


Figura 23: (a) Imagem magneto-óptica de uma amostra de $0,8 \text{ mm} \times 2,5 \text{ mm}$ com uma canaleta no centro ao aplicar um campo perpendicular de 145 Oe a 6 K [6]. (b) Simulação realizada considerando as características da amostra de (a).

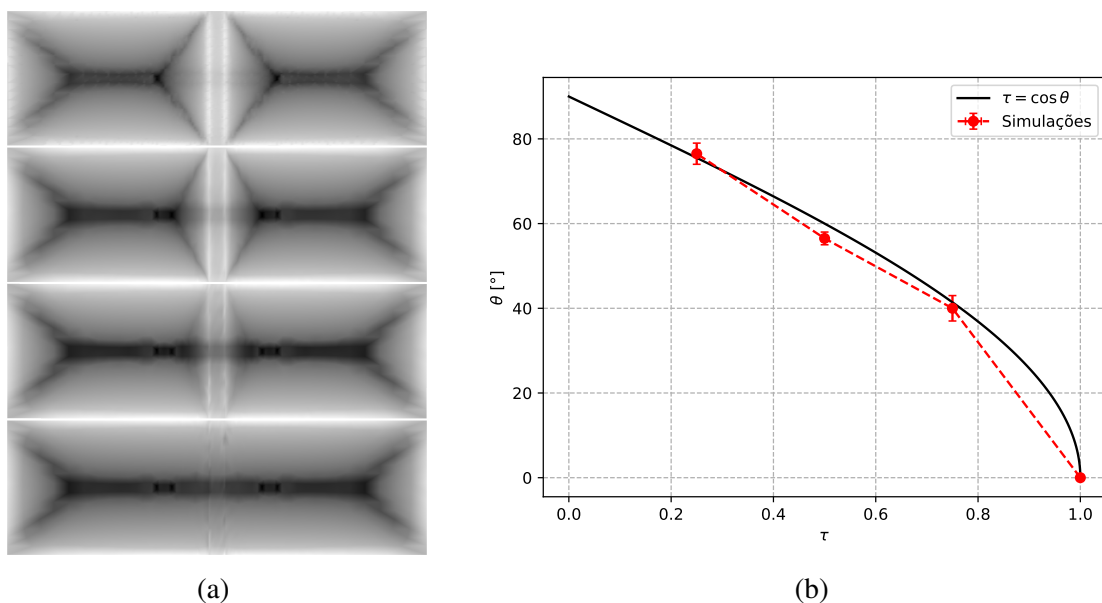


Figura 24: (a) Distribuições de campo magnético obtidos através das simulações com transparências de $\tau = 0, 0,25; 0,50; 0,75; 1,00$ de cima para baixo na modelagem do filme de $2,5 \text{ mm} \times 0,8 \text{ mm}$ com canaleta perpendicular em estado de campo completamente penetrado. (b) Medições dos ângulos entre as *d-lines* centrais obtidos a partir de (a) para os diferentes valores de transparência, comparando com a relação $\tau = \cos \theta$.

A partir da Figura 24b, podemos concluir que os resultados obtidos através da formulação T-A estão de acordo com a Equação (29). As *meshes* construídas para os modelos simulados, entretanto, limitam a precisão com a qual podemos aferir os ângulos entre as *d-lines*, como pode ser visualizado na Figura 24a. Apesar da relação teórica entre τ e θ ser satisfeita, as *d-lines* obtidas através das simulações apresentam uma nitidez inferior aos casos experimentais medidos com MOI, como pode ser observado na Figura 23.

Como dito anteriormente, a densidade de corrente crítica depende da temperatura, permitindo controlar J_c^{WL} e J_c^{PR} experimentalmente para uma mesma amostra. Até agora não introduzimos temperatura em nosso modelo, mas o faremos neste momento com uma primeira aproximação linear:

$$J_c(T) = J_{c0} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right), \quad (30)$$

em que J_{c0} é a densidade de corrente crítica a 0 K e T_c é a temperatura crítica do material. Apesar de simples, essa relação é capaz de descrever fenomenologicamente alguns comportamentos relacionados a sistemas granulares, por exemplo [3]. A Equação (30) permite, sabendo T_c e J_{c0} , que introduzamos um valor de temperatura T (não confundir com a variável T da formulação T-A) no nosso modelo, ao invés de introduzir J_c ou τ como fazíamos. Note que não adicionamos nenhum efeito físico com relação à temperatura que não seja descrito pela Equação (30), diferente de um modelo termomagnético, por exemplo, que considera a condução de calor no material [3].

A partir da Equação (30), podemos obter uma relação para $\tau(T)$:

$$\tau(T) = \frac{J_{c0}^{\text{WL}}}{J_{c0}^{\text{PR}}} \left(\frac{1 - T/T_c^{\text{WL}}}{1 - T/T_c^{\text{PR}}} \right). \quad (31)$$

Notemos que o termo fora dos parênteses do lado direito da equação é uma constante, que no nosso caso tomamos como $J_{c0}^{\text{WL}}/J_{c0}^{\text{PR}} = 0,4$. Os valores de T_c^{WL} e T_c^{PR} foram tomados, respectivamente, como 8,7 K e 9,0 K [3]. A Figura 25 apresenta a curva da função (31) em seu gráfico superior, e a curva $\arccos(\tau(T))$ no inferior. A Figura 25 também apresenta os pontos obtidos através das simulações realizadas com as constantes definidas acima para diferentes valores de temperatura, e os pontos experimentais obtidos em [6] para a canaleta perpendicular.

A partir da Figura 25, podemos observar que os pontos medidos através da simulação coincidem com o modelo teórico na curva de $\tau(T)$. Esse comportamento é só uma evidência de que aplicamos a Equação (31) corretamente na definição das variáveis do COMSOL. Como a Figura 24b mostra que a relação $\tau = \cos \theta$ é satisfeita no nosso modelo, a curva $\theta(T)$ teórica se aproximar dos resultados simulados é uma consequência direta. Vale notar, entretanto, que a amplitude de ângulos varrida nesse caso não é muito grande, sendo cerca de 6° para o caso teórico, cuja faixa de ângulos que se aproxima da incerteza das medições de θ a partir dos resultados simulados.

Ainda na Figura 25, notamos que as curvas experimentais divergem consideravelmente das demais. Três hipóteses foram levantadas para explicar essa divergência:

- (i) Os valores de T_c^{WL} e/ou T_c^{PR} estão incorretos;
- (ii) A dependência de J_c com a temperatura segue uma relação diferente da utilizada;
- (iii) É necessário inserir alguma dependência de $J_c(B)$.

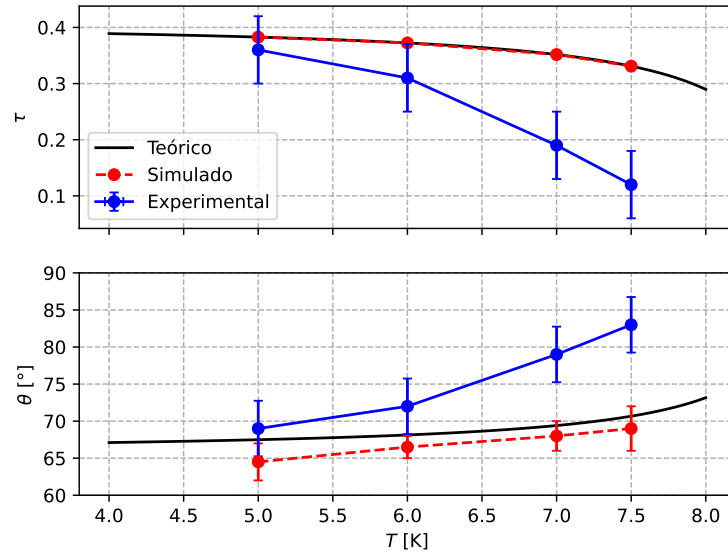


Figura 25: Resultados teóricos (preto), de simulações (vermelho) e experimentais (azul) obtidos para transparência τ e ângulo entre d-lines θ para filmes finos retangulares de $2,5 \text{ mm} \times 0,8 \text{ mm}$ com uma canaleta para diferentes temperaturas $T = 5,0; 6,0; 7,0; 7,5 \text{ K}$ na condição de campo completamente penetrado. Os resultados experimentais foram retirados de [6].

A hipótese (i) parece improvável, pois a variação nos valores dessas constantes para que a curva teórica se aproxime da experimental deve ser da ordem de 1 K, diferença facilmente identificável experimentalmente. A hipótese (ii) parece válida: a dependência $J_c \propto (1 - T/T_c)^\beta$, $\beta > 1$, é utilizada na modelagem de alguns supercondutores [22] e apresenta o ganho de um grau de ajuste β . Algumas curvas com diferentes β estão plotadas na Figura 26 para visualizar os possíveis comportamentos da transparência nesses casos. A hipótese (iii) parece válida também, pois a introdução de uma dependência em B dificulta a determinação de τ , já que J_c não é constante, tornando τ uma propriedade local, que depende do campo na região. Além disso, uma dependência de B do tipo modelo de Kim (junto com outras considerações) foi capaz de descrever resultados de histerese observados no nosso sistema granular de estudo [3].

A Figura 26 mostra que, ao aumentar o parâmetro β , é possível se aproximar mais dos pontos próximos de T_c , porém se afastando para temperaturas menores. Apesar disso, as curvas com $\beta = 5$ e $\beta = 6$ ainda se encaixam nas incertezas dos pontos experimentais, mostrando que a introdução do expoente β pode realmente ajudar na modelagem fenomenológica. Por outro lado, não conseguimos isolar o efeito que uma dependência com B poderia apresentar, de modo que mais estudos são necessários para entender se a hipótese (ii) ou a (iii) pode ser descartada ou corroborada.

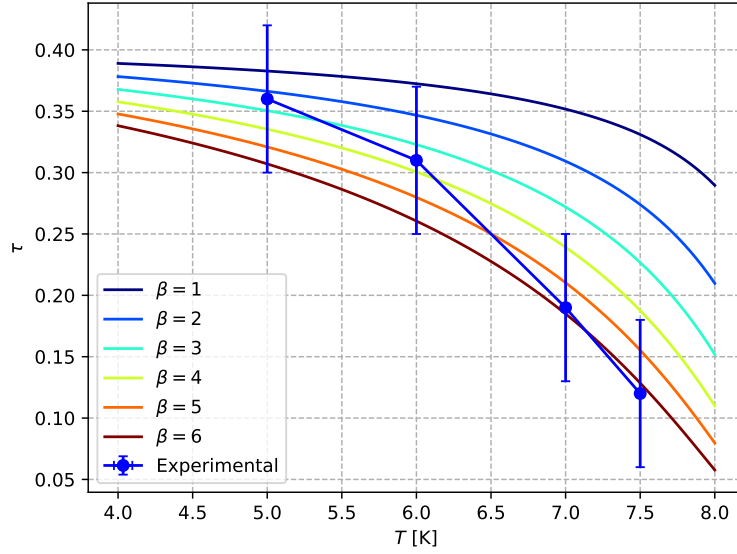


Figura 26: Curvas de transparência supondo dependências de $J_c(T) = J_{c0} (1 - T/T_c)^\beta$ para diferentes valores de β , comparando com os resultados experimentais retirados de [6].

4.4 FILME FINO COM CANALETA INCLINADA

Consideremos as mesmas dimensões do filme fino da seção anterior, porém rotacionando a canaleta em torno do centro do filme. Rotacionar o WL não é algo possível experimentalmente, sendo necessário confeccionar outras amostras, com diferentes angulações da trajetória do FIB. Na geometria do modelo, porém, a modificação é realmente feita rotacionando a canaleta. Os desenhos dos filmes com canaletas inclinadas em ângulos Φ iguais a 45° e 60° estão ilustrados na Figura 27.

Na interface 3D do COMSOL, o filme foi inserido em um volume de vácuo exatamente igual aos casos anteriores. As condições de contorno também estão de acordo, porém as simetrias de isolante magnético nos planos yz e zx são perdidas nesse caso. Isso nos limita a *meshes* mais grosseiras e/ou tempos de simulação maiores quando comparado aos casos anteriormente apresentados. Entretanto, ainda foi possível observar resultados compatíveis com os experimentais, como mostra a Figura 28, em que um mapa de campo obtido de um modelo de filme com canaleta inclinada em $\Phi = 45^\circ$ e transparência $\tau = 0,4$ é comparado com uma imagem magneto-óptica obtida experimentalmente[6].

Na Figura 28a, podemos observar que as *d-lines* que compartilham vértice com a canaleta apresentam ângulos diferentes com relação a ela. No vértice de maior ângulo interno do grão, a *d-line* apresenta um ângulo de abertura maior com relação à canaleta. Esse comportamento implica na existência de um limite para a transparência nesses casos, dado por [6]:

$$\tau_{\text{máx}} = \text{sen } \Phi. \quad (32)$$

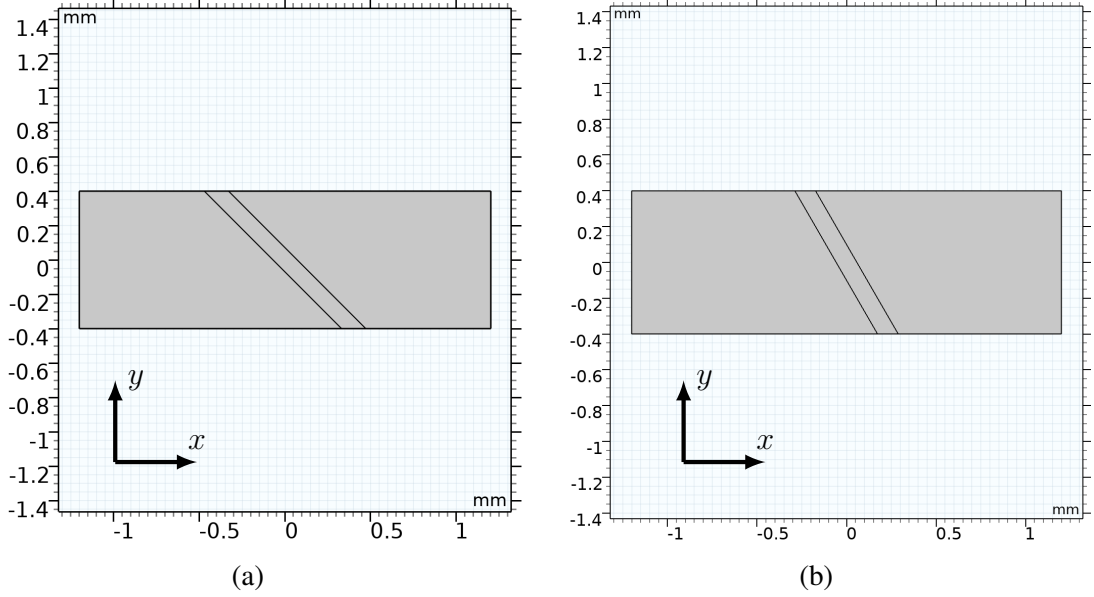


Figura 27: Geometrias desenhadas no COMSOL para modelagem de filmes retangulares de 2,5 mm \times 0,8 mm com canaletas inclinadas de 45° (a) e 60° (b).

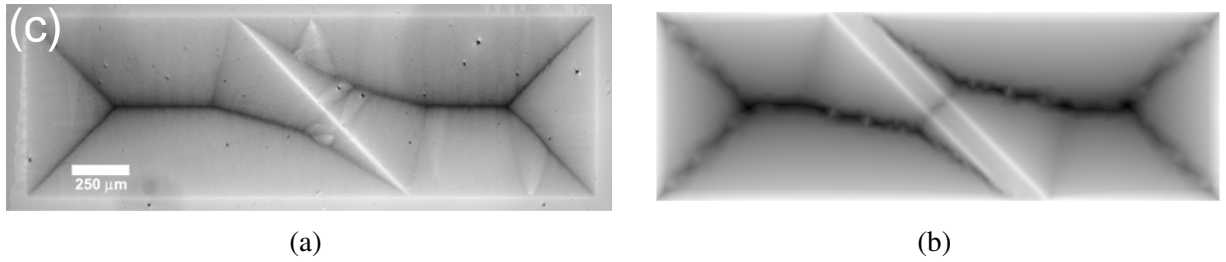


Figura 28: (a) Imagem magneto-óptica de uma amostra de 2,5 mm \times 0,8 mm com canaleta inclinada de 45° sujeita a um campo magnético perpendicular. (b) Simulação realizada para modelar a amostra de (a) com uma transparência de $\tau = 0,4$.

Nesse limite, a *d-line* do vértice de menor ângulo interno do grão encontra a canaleta. A existência desse limite de transparência para canaletas inclinadas implica numa piora na capacidade de transporte de corrente de um sistema granular com elos angulados [6].

Para observar a invariância da relação (29) para os casos de canaletas inclinadas e atestar a existência de um $\tau_{\text{máx}}$ como predito em (32), simulamos alguns casos de diferentes transparências para as canaletas inclinadas e sobrepomos aos dados apresentados na Figura 24b. Esses resultados estão apresentados na Figura 29.

Podemos notar, a partir da Figura 29, que a relação entre τ e θ parece se manter mesmo para as canaletas com $\Phi = 90^\circ$ e $\Phi = 60^\circ$. Para o caso $\Phi = 45^\circ$ há pontos de convergência e de divergência com relação ao esperado teoricamente. Esse desvio provavelmente se dá devido à qualidade da *mesh*, que fica comprometido quanto menor for Φ , pois a região de ângulo agudo requer mais elementos para que seja possível distinguir diferentes ângulos. Por um motivo semelhante, não foi possível chegar muito próximo do limite teórico $\tau_{\text{máx}}$, implicando na existência de um $\tau_{\text{máx}}^{\text{Simulado}} < \tau_{\text{máx}}$. Foram feitas tentativas de simulações de casos com trans-

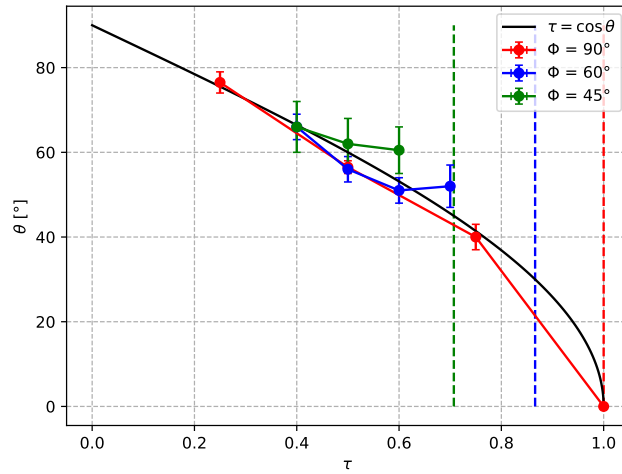


Figura 29: Ângulo θ entre d -lines obtidos através de simulação no COMSOL para os filmes de $2,5 \text{ mm} \times 0,8 \text{ mm}$ com canaletas inclinadas em ângulos $\Phi = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ para diferentes valores de transparência inseridos no modelo. As linhas tracejadas indicam o limite teórico $\tau_{\text{máx}} = \text{sen } \Phi$ para cada valor de Φ considerado.

parências maiores do que as apresentadas no gráfico, porém não houve convergência ou não foi possível localizar as d -lines para medir θ .

5 CONCLUSÕES

Após as discussões apresentadas, pode-se concluir que a formulação **T-A** resolvida no *software* COMSOL nas interfaces 2D e 3D mostrou-se capaz de descrever as distribuições de campo e corrente em filmes finos supercondutores. Os resultados obtidos estão coerentes com aqueles obtidos analiticamente no modelo de Bean e descrevem os resultados experimentais observados para sistemas granulares.

A descrição mais simples para a densidade de corrente crítica em um material, J_c constante, mostrou-se suficiente para descrever a posição das d -lines nos sistemas granulares estudados. Os resultados de imagem desses casos, obtidos experimentalmente em trabalhos anteriores através da técnica de MOI, também foram descritos pela formulação **T-A** neste trabalho, apesar das limitações de malha.

A formulação **T-A** não necessariamente é a forma mais eficiente de modelar os sistemas aqui estudados. Outras abordagens utilizando cálculo variacional, ou se limitando a casos estacionários tendem a ser mais rápidas na convergência de uma solução, e não dependem de um domínio de vácuo externo para funcionar. Entretanto, a vantagem de utilizar o COMSOL embutido com a formulação **T-A** está na fácil implementação através de um programa com interface gráfica e diversos *solvers* de equações diferenciais já instalados. Isso permite o acoplamento com outros módulos de física, como equações de condução térmica e circuitos elétricos, de

maneira razoavelmente simples.

6 PERSPECTIVAS

Nesta seção, iremos apresentar duas possíveis ramificações deste trabalho. A primeira é mais simples, apenas uma ideia alternativa de como modelar o comportamento da canaleta, e a segunda é mais complexa e consiste de atacar uma outra geometria de supercondutor granular: um anel supercondutor com canaletas.

6.1 CANALETA SUAVE

Neste trabalho, modelamos a canaleta como uma região do filme em que a espessura e a densidade de corrente crítica são constantes e menores do que aquelas apresentadas pela parte prístina. No entanto, essa mudança abrupta de propriedade no espaço não reflete a realidade, como ilustrado na Figura 30a. A ideia apresentada nesta seção é de utilizar uma função contínua que descreva o comportamento da espessura em função da dimensão longitudinal do filme, isto é, $\delta = \delta(x)$,⁶ como ilustrado na Figura 30b.

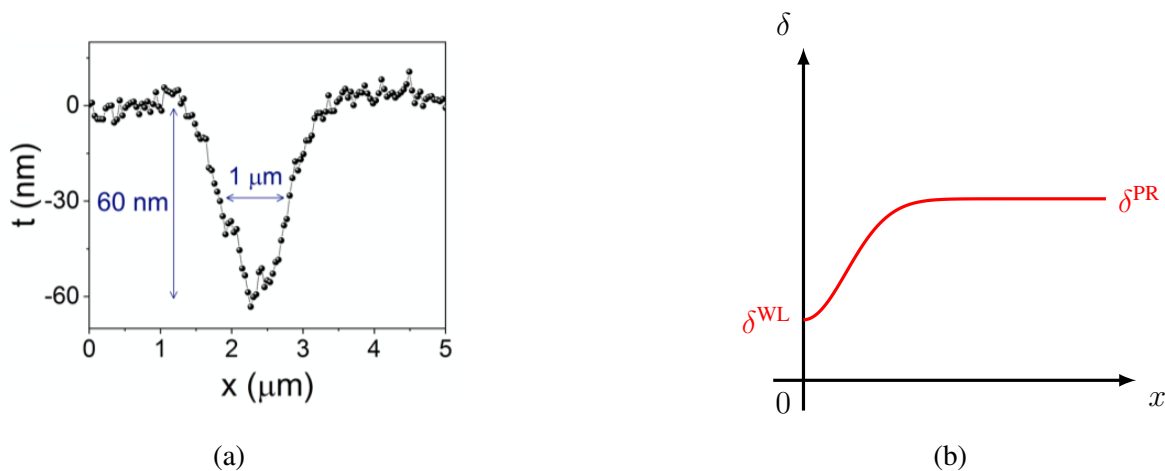


Figura 30: (a) Perfil da canaleta de uma das amostras obtido a partir de Microscopia de Força Atômica (AFM). O gráfico apresenta a espessura do filme em função da posição longitudinal na região próximo à canaleta. Retirado de [20]. (b) Perfil do modelo de canaleta proposto nesta seção, em que δ^{WL} é a espessura mínima na canaleta e δ^{PR} é a espessura na parte prístina do filme.

A proposta de $\delta(x)$ utilizada é do tipo curva gaussiana, dada pela equação

$$\delta(x) = \delta^{\text{PR}} - (\delta^{\text{PR}} - \delta^{\text{WL}}) e^{-\frac{x^2}{l^2}}, \quad (33)$$

⁶Não confundir com delta de Dirac.

em que l é uma constante que dita a largura da canaleta. Essa equação garante que em $x = 0$ a espessura será δ^{WL} e em $x \rightarrow \infty$ será δ^{PR} , com uma transição suave entre as duas espessuras. O mesmo foi feito para a densidade de corrente $J_c = J_c(x)$:

$$J_c(x) = J_c^{\text{PR}} - (J_c^{\text{PR}} - J_c^{\text{WL}}) e^{-\frac{x^2}{l^2}}, \quad (34)$$

em que os sobrescritos mantêm seu significado e l mantém seu valor com relação à Equação (33).

Uma simulação foi realizada para um filme de $0,8 \text{ mm} \times 2,5 \text{ mm}$, com espessuras $\delta^{\text{WL}} = 175,8 \text{ nm}$ e $\delta^{\text{PR}} = 180 \text{ nm}$, densidades de corrente $J_c^{\text{WL}} = 0,8 \text{ MA/cm}^2$ e $J_c^{\text{PR}} = 1,6 \text{ MA/cm}^2$, e constante $l = 100 \text{ } \mu\text{m}$. O resultado de distribuição de campo magnético obtido ao aplicar um campo de 40 Oe perpendicular está presente na Figura 31.

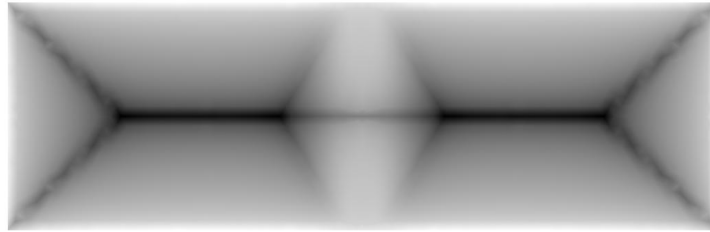


Figura 31: Distribuição de campo magnético obtida para um filme retangular de $0,8 \text{ mm} \times 2,5 \text{ mm}$ com transparência de $\tau = 0,5$, com canaleta ao centro definida de maneira contínua a partir das equações (33) e (34).

É possível visualizar na Figura 31 que as *d-lines* apresentam um comportamento evanescente próximo ao centro, consequência da definição suave da canaleta. Não foi percebido nenhum avanço significativo no tempo de simulação ou qualquer outro ganho na modelagem do sistema, porém não foram realizados muitos testes para verificar se há algum ganho desse tipo. Assim, uma possível ramificação do trabalho realizado nesta monografia seria de prosseguir essas análises.

6.2 ANEL COM CANALETAS RADIAIS

A outra ramificação é a modelagem de um sistema supercondutor granular consistindo de um filme fino em forma de anel com quatro ou mais canaletas radiais igualmente espaçadas. A Figura 32 apresenta uma imagem obtida pela técnica de MOI para um anel de nióbio com diâmetro interno de $0,5 \text{ mm}$ e externo de 2 mm com quatro canaletas ao ser submetido a um campo aplicado perpendicularmente.

Pelo que apresentamos até então no trabalho, parece um simples passo simular esse sistema. Entretanto, o anel não é uma região simplesmente conexa, o que dificulta a definição das condições de contorno. Se definirmos as condições de contorno da formulação T como sendo

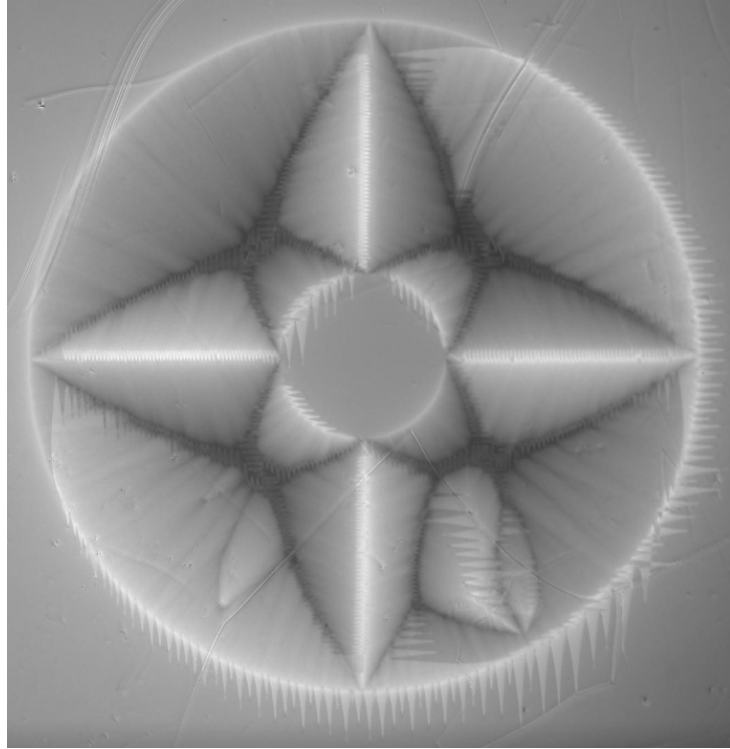


Figura 32: Imagem magneto-óptica de uma amostra de anel supercondutor com diâmetro interno de 0,5 mm e externo de 2 mm com quatro canaletas ao ser submetido a um campo magnético aplicado na perpendicular.

$T = 0$ nas circunferências interna e externa, estaremos impedindo que uma “corrente” resultante flua na azimutal, e o resultado obtido será como aquele apresentado na Figura 33a. Ao aplicar externamente uma corrente I crescente no tempo junto com o campo aplicado em nosso modelo, podemos emular o comportamento visto experimentalmente, como ilustrado na Figura 33b.

Comparando o resultado de simulação apresentado na Figura 33a com aquele experimental apresentado na Figura 32, vemos que as *d-lines* existem nos mesmos vértices, porém a *d-line* que aparece no raio médio no caso simulado está muito mais próxima do raio interno no resultado experimental. Ao forçar uma corrente externa no sentido cujo campo magnético gerado no centro do anel é contrário àquele aplicado, conseguimos nos aproximar mais do comportamento das *d-lines* visto experimentalmente, apesar de apresentar *d-lines* curvas próximo às bordas externas do anel. Isso sugere que o comportamento observado envolve uma “corrente resultante” na espira, induzida para se opor ao aumento de campo no centro do anel e perpetuada devido ao caráter supercondutor, mas impossível de existir no modelo utilizado com as condições de contorno $T = 0$ em ambas as bordas do anel.

Em resumo, os resultados obtidos até o momento mostram que, da maneira como estamos implementando, o nosso modelo não é capaz de descrever fenomenologicamente as distribuições de campo do anel supercondutor. Assim, mais estudos devem ser direcionados a esse sistema, principalmente na definição das condições de contorno adequadas. Ao obter su-

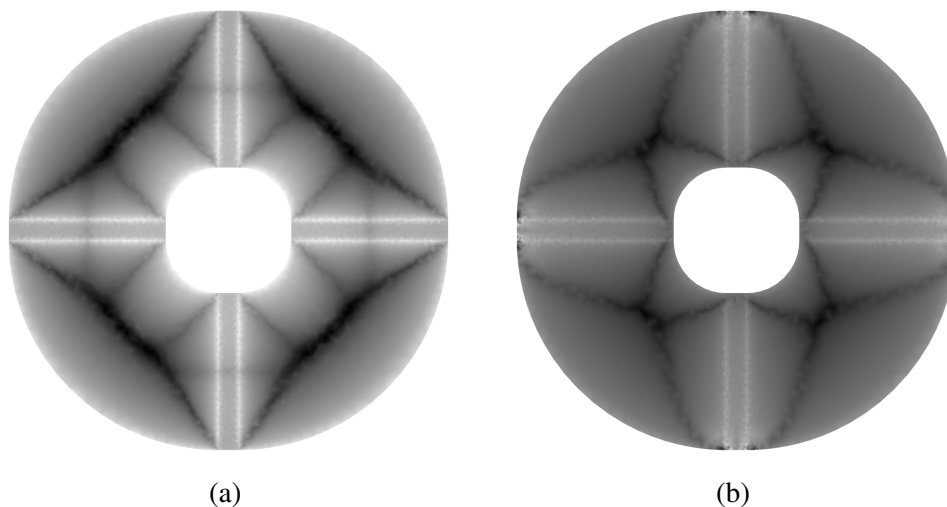


Figura 33: (a) Resultado de distribuição de campo magnético obtido simulando a amostra da Figura 32 com $T = 0$ imposto nas bordas interna e externa do filme ao ser submetida a um campo magnético perpendicular. (b) Resultados obtidos ao simular a mesma geometria de (a), porém com a condição de contorno $T = I/\delta$ na borda externa, com $\delta = 180$ nm nas partes prístinas e 120 nm nas canaletas.

cesso nessa etapa, o alcance da nossa modelagem utilizando formulação **T-A** terá se expandido para supercondutores definidos por domínios multiplamente conexos.

REFERÊNCIAS

- 1 BEAN, C. P. Magnetization of Hard Superconductors. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 8, p. 250–253, 6 mar. 1962. DOI: 10.1103/PhysRevLett.8.250. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.8.250>.
- 2 CARMO, Danusa do. **Manipulação da penetração regular de fluxo magnético e avalanches termomagnéticas em filmes supercondutores**. 2017. Tese (Doutorado).
- 3 CHAVES, Davi A. D. *et al.* Magnetic field induced weak-to-strong-link transformation in patterned superconducting films. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 108, p. 214502, 21 dez. 2023. DOI: 10.1103/PhysRevB.108.214502. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.108.214502>.
- 4 CHAVES, Davi Araujo Dalbuquerque. **Magnetic field as a tool to control superconducting devices**. 2023. Tese (Doutorado). DOI: 10.13140/RG.2.2.30130.56008. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/20.500.14289/18978>.
- 5 CHEVTCHENKO, Oleg. Modeling of High Temperature Superconducting Tapes, Arrays and AC Cables Using COMSOL. **COMSOL Conference 2010 Paris**, 2010.

- 6 COLAUTO, F. *et al.* Maximum limit of connectivity in rectangular superconducting films with an oblique weak link. **Phys. Rev. Appl.**, American Physical Society, v. 23, p. 044027, 4 abr. 2025. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.23.044027. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.23.044027>.
- 7 CUADROS, Marlon Ivan Valerio. **Estudo das propriedades inter e intragranulares de filmes supercondutores de nióbio dotados de elos fracos artificiais**. 2017. Tese (Doutorado).
- 8 DULAR, Julien; GEUZAIN, Christophe; VANDERHEYDEN, Benoît. Finite-Element Formulations for Systems With High-Temperature Superconductors. **IEEE Transactions on Applied Superconductivity**, v. 30, n. 3, p. 1–13, 2020. DOI: 10.1109/TASC.2019.2935429.
- 9 FREI, Walter. **Exploiting Symmetry to Simplify Magnetic Field Modeling**. [S. l.: s. n.]. Acessado em 09/11/2025. Disponível em:
<https://www.comsol.com/blogs/exploiting-symmetry-simplify-magnetic-field-modeling>.
- 10 GRIFFITHS, David J. **Introduction to electrodynamics**. [S. l.]: Pearson, 2013.
- 11 GUREVICH, Alex; FRIESEN, Mark. Nonlinear transport current flow in superconductors with planar obstacles. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 62, p. 4004–4025, 6 ago. 2000. DOI: 10.1103/PhysRevB.62.4004. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.62.4004>.
- 12 JR, Poole *et al.* **Superconductivity: Third edition**. [S. l.]: Elsevier, 2014.
- 13 LAHIRI, A. **Basic Optics: Principles and Concepts**. [S. l.]: Elsevier, 2016. ISBN 9780128093078.
- 14 MULTIPHYSICS, COMSOL. **AC/DC Module User's Guide**, 2018.
- 15 NORRIS, W T. Calculation of hysteresis losses in hard superconductors carrying ac: isolated conductors and edges of thin sheets. **Journal of Physics D: Applied Physics**, v. 3, n. 4, p. 489, abr. 1970. DOI: 10.1088/0022-3727/3/4/308. Disponível em:
<https://doi.org/10.1088/0022-3727/3/4/308>.
- 16 OSTERMANN, F. **Supercondutividade**. [S. l.]: Editora Livraria da Física, 2005. (Temas Atuais de Física). ISBN 9788588325340.
- 17 PRIGOZHIN, Leonid. Solution of Thin Film Magnetization Problems in Type-II Superconductivity. **Journal of Computational Physics**, v. 144, n. 1, p. 180–193, 1998. ISSN 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1006/jcph.1998.5978>.

- 18 SCHMIDT, V.V.; MÜLLER, P.; USTINOV, A.V. **The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications**. [S. l.]: Springer, 1997.
- 19 SMYTHE, W.R. **Static and Dynamic Electricity**. [S. l.]: McGraw-Hill, 1950. (International series in physics).
- 20 VALERIO-CUADROS, Marlon Ivan *et al.* Superconducting Properties and Electron Scattering Mechanisms in a Nb Film with a Single Weak-Link Excavated by Focused Ion Beam. **Materials**, v. 14, n. 23, 2021. ISSN 1996-1944. DOI: 10.3390/ma14237274. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1996-1944/14/23/7274>.
- 21 VARGAS-LLANOS, Carlos Roberto *et al.* 3D homogenization of the T-A formulation for the analysis of coils with complex geometries. **Superconductor Science and Technology**, IOP Publishing, v. 35, n. 12, p. 124001, out. 2022. DOI: 10.1088/1361-6668/ac9932.
- 22 WANG, Yawei *et al.* Quench behavior of high-temperature superconductor (RE)Ba₂Cu₃O_x CORC cable. **Journal of Physics D: Applied Physics**, IOP Publishing, v. 52, n. 34, p. 345303, jun. 2019. DOI: 10.1088/1361-6463/ab1e2c. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6463/ab1e2c>.
- 23 ZELDOV, E. *et al.* Magnetization and transport currents in thin superconducting films. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 49, p. 9802–9822, 14 abr. 1994. DOI: 10.1103/PhysRevB.49.9802. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.49.9802>.
- 24 ZHANG, Huiming; ZHANG, Min; YUAN, Weijia. An efficient 3D finite element method model based on the T–A formulation for superconducting coated conductors. **Superconductor Science and Technology**, IOP Publishing, v. 30, n. 2, p. 024005, dez. 2016. DOI: 10.1088/1361-6668/30/2/024005. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-6668/30/2/024005>.
- 25 ZHANG, Yun. **Oxide and Metallic Precursor Powders for Bi₂Sr₂CaCu₂O_x/Ag Round Wires**. Jul. 2015. Tese (Doutorado). DOI: 10.13140/RG.2.2.30130.56008.