

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

GUILHERME DOS SANTOS SILVA

**ESTIMATIVA DE CARGA LIMITE DE SERVIÇO EM PLACAS
CLT: DESENVOLVIMENTO DE EQUAÇÃO E *SOFTWARE***

SÃO CARLOS

2025

GUILHERME DOS SANTOS SILVA

**ESTIMATIVA DE CARGA LIMITE DE SERVIÇO EM PLACAS CLT:
DESENVOLVIMENTO DE EQUAÇÃO E *SOFTWARE***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Christoforo

Área de concentração: Estruturas e Geotecnia

Financiamento: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

SÃO CARLOS

2025

Silva, Guilherme dos Santos

Estimativa de carga limite de serviço em placas CLT:
desenvolvimento de equação e software / Guilherme dos
Santos Silva -- 2025.
146f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São
Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): André Luis Christoforo
Banca Examinadora: Eduardo Chahud, Túlio Hallak
Panzer
Bibliografia

1. placas de CLT. 2. carga limite de serviço. 3. modelo de
regressão. I. Silva, Guilherme dos Santos. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Guilherme dos Santos Silva, realizada em 14/02/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Andre Luis Christoforo (UFSCar)

Prof. Dr. Eduardo Chahud (UFMG)

Prof. Dr. Tulio Hallak Panzera (UFSJ)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Dedico esse trabalho aos meus pais, que estiveram presentes e me apoiaram nas horas difíceis a fim de realizar esse sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pela sabedoria, perseverança, coragem e tanto outras benções realizadas que auxiliaram a me manter firme e superar os momentos difíceis.

Agradeço aos meus pais, Terezinha e Gileno, que me apoiaram nessa trajetória, sempre com os mais variados incentivos, para que eu pudesse realizar esse sonho.

Agradeço a minha namorada, Assucena, pelo amor incondicional, apoio emocional, paciência e compreensão durante todo o período de realização deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas da pós-graduação pelo apoio mútuo, troca de ideias, orientações e sugestões que enriqueceram meu trabalho. Suas experiências e perspectivas auxiliaram nas conclusões das diversas etapas ao longo desta jornada acadêmica.

Agradeço a todo corpo docente do Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) que contribuiu direta e indiretamente, com um ensino teórico e prático de qualidade, para esta conquista.

Agradeço ao meu orientador, Dr. André Luis Christoforo, pelos seus ensinamentos, compreensão, disponibilidade e paciência pude vencer tantos desafios ao longo deste trabalho.

Agradeço o apoio financeiro oferecido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001, substancial para a conquista deste trabalho.

RESUMO

O produto industrializado *Cross Laminated Timber* (CLT), o qual a madeira é a principal matéria-prima, apresenta-se como um elemento estrutural competitivo quando se comparado as lajes convencionais de concreto armado, por conseguinte, a concentração de fabricantes deste elemento em diversos países já é uma realidade. Nesse sentido, considerando que os atuais métodos de cálculos para CLT apresentados por documentos normativos são unidimensionais e não refletem o comportamento complexo do CLT, é proposto um *software* para análise estrutural de placas de CLT e modelos de regressão (abordagem clássica e simbólica) para a estimativa da carga na condição de serviço em uma abordagem bidimensional. Tal equação é viabilizada por meio um estudo paramétrico variando-se propriedades geométricas da placa (comprimento, largura, configuração de lâminas) seguida de simulações realizadas no *software* próprio. O *software* desenvolvido apresentou ser confiável com pequenas diferenças percentuais (de 0,004% a 3,452%) nos valores de deslocamento, principais esforços e tensões, quando comparado a um *software* similar. A equação proposta de melhor ajuste, obtida pelo modelo de regressão simbólica, apresentou adequada precisão na estimativa da carga limite serviço, alcançando um coeficiente de determinação (R^2) igual a 99,996%. Portanto, a simplicidade dos modelos alinhado as suas excelentes precisões, fornece aos engenheiros insights para um melhor pré-dimensionamento de placas de CLT.

Palavras-chave: placas de CLT; carga limite de serviço; modelo de regressão; *software* de análise estrutural.

ABSTRACT

The industrialized product Cross Laminated Timber (CLT), with wood as its primary raw material, serves as a competitive structural element compared to conventional reinforced concrete slabs. As a result, the proliferation of manufacturers producing this element in several countries is already a reality. Given that the current calculation methods for CLT in standards documents are one-dimensional and do not adequately capture its complex behaviour, a software for structural analysis of CLT panels and regression models (classical and symbolic approach) for estimating the load in service condition in a two-dimensional approach are proposed. This equation was made possible through a parametric study varying the geometric properties of the panel (length, width, veneer configuration) followed by simulations performed in the software itself. The developed software presented is reliable with small percentage differences (from 0.004% to 3.452%) in the displacement, main forces and stresses, when compared to similar software. The proposed best-fit equation, obtained by the symbolic regression model, presented adequate accuracy in estimating the service limit load, achieving a coefficient of determination (R^2) equal to 99.996%. Therefore, the simplicity of the models combined with their excellent accuracies provide engineers with insights for better pre-designing of CLT panels.

Keywords: CLT plate; service limit load; regression model; structural analysis software.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – <i>CROSS LAMINATED TIMBER</i>	16
FIGURA 2 – ESTRUTURA MOLECULAR DE UMA PAREDE DE MADEIRA.....	22
FIGURA 3 – TIPOS DE FIBRAS.....	23
FIGURA 4 – LAMINADO COMPOSTO DE LÂMINAS ORIENTADAS EM DIFERENTES DIREÇÕES.....	23
FIGURA 5 – CONFIGURAÇÃO INICIAL E FINAL.....	24
FIGURA 6 – GEOMETRIA INDEFORMADA E DEFORMADA.....	25
FIGURA 7 – SISTEMA DE COORDENADAS CLPT.....	28
FIGURA 8 – PLANOS DE CORTES s_1 E s_2 EM UM LAMINADO.....	29
FIGURA 9 – SEÇÃO DEFORMADA E INDEFORMADA, DE ACORDO COM AS HIPÓTESES DE KIRCHHOFF.....	29
FIGURA 10 – ESTADO PLANO DE TENSÕES.....	32
FIGURA 11 – VARIAÇÃO DA DEFORMAÇÃO E TENSÃO AO LONGO DO EIXO z	39
FIGURA 12 – CONVENÇÃO DOS EIXOS NO MÉTODO DE NAVIER.....	44
FIGURA 13 – EIXOS PRINCIPAIS DA MADEIRA.....	51
FIGURA 14 – MATRIZ DE PROPRIEDADES ELÁSTICAS DA MADEIRA.....	52
FIGURA 15 – CONFECÇÃO DO CLT.....	54
FIGURA 16 – APLICAÇÕES DO CLT.....	54
FIGURA 17 – EDIFÍCIO ASCENT.....	56
FIGURA 18 – O PRIMEIRO EDIFÍCIO DE MADEIRA DO BRASIL.....	56
FIGURA 19 – SISTEMAS CONSTRUTIVOS.....	57
FIGURA 20 – EFEITO <i>ROLLING SHEAR</i>	58
FIGURA 21 – EXEMPLO DE ATRIBUTOS DO ELEMENTO HTML <i>INPUT</i>	59
FIGURA 22 – EXEMPLOS DAS PROPRIEDADES DO CSS.....	60
FIGURA 23 – MANIPULAÇÃO DO ELEMENTO “CANVAS”.....	61
FIGURA 24 – ESTRUTURA DE ÁRVORE HIERÁRQUICA.....	62
FIGURA 25 – CONCEITOS EVOLUTIVOS.....	63
FIGURA 26 – MIGRAÇÃO ENTRE POPULAÇÕES.....	64
FIGURA 27 – FLUXOGRAMA SÍNTESE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FLEXÃO DE PLACAS LAMINADAS.....	65
FIGURA 28 – FLUXOGRAMA DAS ATIVIDADES.....	67
FIGURA 29 – LINGUAGENS UTILIZADAS.....	72
FIGURA 30 – MODO DE SALVAMENTO DOS COMPONENTES.....	72
FIGURA 31 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO ALGORITMO REFERENTE A “SUPERFÍCIE”.....	74
FIGURA 32 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO ALGORITMO REFERENTE “VÍNCULOS”.....	74
FIGURA 33 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO ALGORITMO DE INSERÇÃO DA CARGA POR MEIO DE DESENHO.....	75
FIGURA 34 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO ALGORITMO DE INSERÇÃO DA CARGA POR MEIO DE INFORMAÇÕES.....	75
FIGURA 35 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO CÓDIGO RELATIVO A “MATERIAIS”.....	76
FIGURA 36 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO CÓDIGO RELATIVO A “CAMADAS”.....	77
FIGURA 37 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO CÓDIGO PARA CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ À FLEXÃO.....	77
FIGURA 38 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO CÓDIGO DE “SALVAR”.....	78
FIGURA 39 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO CÓDIGO DE “ABRIR”.....	78

FIGURA 40 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO ALGORITMO REFERENTE A “MEDIR”	79
FIGURA 41 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO ALGORITMO RELATIVO A “CRITÉRIO DE SERVIÇO”	80
FIGURA 42 – FLUXOGRAMA SÍNTESE DO ALGORITMO RELATIVO A “CRITÉRIOS DE FALHA” ..	81
FIGURA 43 – PONTOS E SEUS QUADRADOS DE INFLUÊNCIA	82
FIGURA 44 – QUANTIDADE DE SIMULAÇÕES	86
FIGURA 45 – FLUXOGRAMA DA VALIDAÇÃO	87
FIGURA 46 – FLUXOGRAMA DO <i>SCRIPT</i> DAS SIMULAÇÕES	90
FIGURA 47 – CÁLCULO DA VARIÁVEL β_k	92
FIGURA 48 – MAPA DE CALOR DAS PALAVRAS CHAVES	97
FIGURA 49 – QUANTIDADE DE PUBLICAÇÕES POR ANO RELACIONADAS A S1	97
FIGURA 50 – QUANTIDADE DE PUBLICAÇÕES POR ANO RELACIONADAS A S2	98
FIGURA 51 – QUANTIDADE DE PUBLICAÇÕES POR ANO RELACIONADAS A S3	98
FIGURA 52 – QUANTIDADE DE PUBLICAÇÕES POR ANO	99
FIGURA 53 – VOLUME DE PUBLICAÇÕES POR AUTOR	100
FIGURA 54 – FLUXOGRAMA PRISMA	101
FIGURA 55 – INTERFACE DO CLT PLATE SOFTWARE	105
FIGURA 56 – MODELO DE EXEMPLO INSERIDO NO <i>SOFTWARE</i>	106
FIGURA 57 – DIAGRAMAS DO EXEMPLO	106
FIGURA 58 – VALORES DA F_{lim} DAS PLACAS DE 2 METROS DE LARGURA	114
FIGURA 59 – VALORES DA F_{lim} DAS PLACAS DE 2 METROS DE LARGURA	115
FIGURA 60 – VALORES DA F_{lim} DAS PLACAS DE 2,5 METROS DE LARGURA	115
FIGURA 61 – VALORES DA F_{lim} DAS PLACAS DE 2,5 METROS DE LARGURA	115
FIGURA 62 – VALORES DA F_{lim} DAS PLACAS DE 3 METROS DE LARGURA	116
FIGURA 63 – VALORES DA F_{lim} DAS PLACAS DE 3 METROS DE LARGURA	116
FIGURA 64 – VALORES DA F_{lim} DAS PLACAS DE 3,5 METROS DE LARGURA	116
FIGURA 65 – VALORES DA F_{lim} DAS PLACAS DE 3,5 METROS DE LARGURA	117
FIGURA 66 – HISTOGRAMA DO TERMO λ	118
FIGURA 67 – HISTOGRAMA DO TERMO α	118
FIGURA 68 – HISTOGRAMA DO TERMO δ	118
FIGURA 69 – HISTOGRAMA DE RESÍDUOS DA EQUAÇÃO (105)	120
FIGURA 70 – HISTOGRAMA DE RESÍDUOS DA EQUAÇÃO (107)	121
FIGURA 71 – HISTOGRAMA DOS VALORES DE COMPRIMENTO	121
FIGURA 72 – HISTOGRAMA DOS VALORES DE LARGURA	122
FIGURA 73 – HISTOGRAMA DOS VALORES DE ESPESSURA	122
FIGURA 74 – HISTOGRAMA DOS RESÍDUOS	124
FIGURA 75 – TELA DE ENTRADA	134
FIGURA 76 – FERRAMENTA “ABRIR”	135
FIGURA 77 – FERRAMENTA “SALVAR”	135
FIGURA 78 – FERRAMENTA “APAGAR TUDO”	136
FIGURA 79 – FUNCIONALIDADE “SUPERFÍCIE”	136
FIGURA 80 – FERRAMENTA “MATERIAIS”	137
FIGURA 81 – FERRAMENTA “CAMADAS”	137
FIGURA 82 – FERRAMENTA “CARGAS”	138
FIGURA 83 – FUNCIONALIDADES “ZOOM”	138
FIGURA 84 – FUNCIONALIDADE “DESLOCAMENTOS VISUAIS”	139
FIGURA 85 – FUNCIONALIDADE “MEDIR” COM SNAP DESATIVO	139

FIGURA 86 – FUNCIONALIDADE “MEDIR” COM SNAP ATIVO.....	140
FIGURA 87 – FERRAMENTA “PREFERÊNCIAS”	140
FIGURA 88 – FERRAMENTA “CRITÉRIOS DE FALHA”	141
FIGURA 89 – FERRAMENTA “CRITÉRIO DE SERVIÇO”	141
FIGURA 90 – FERRAMENTA “CALCULAR”	142
FIGURA 91 – INFLUÊNCIA DO PARÂMETRO QUADRADO DE INFLUÊNCIA NO DIAGRAMA.....	143
FIGURA 92 – FERRAMENTA “DIAGRAMA”	144
FIGURA 93 – FERRAMENTA “DIAGRAMA DA SEÇÃO”	144
FIGURA 94 – FERRAMENTA “MOSTRAR”	145

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – RELAÇÕES ENTRE PROPRIEDADES PARA DIVERSAS ESPÉCIES.....	53
TABELA 2 – CRITÉRIO DE DESLOCAMENTO INSTANTÂNEO	57
TABELA 3 – PROPRIEDADES ELÁSTICAS DA <i>PINUS TAEDA L</i>	84
TABELA 4 – PARÂMETROS VARIADOS.....	85
TABELA 5 – CONFIGURAÇÕES SELECIONADAS PARA A PARAMETRIZAÇÃO.....	85
TABELA 6 – COMPOSIÇÕES ADOTADAS PARA VALIDAÇÃO	87
TABELA 7 – VALORES DA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA SOBRE TODA PLACA	89
TABELA 8 – VALORES DA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA SOBRE UMA REGIÃO RETANGULAR	89
TABELA 9 – VALORES DA CARGA DISTRIBUÍDA LINEARMENTE	89
TABELA 10 – PARÂMETROS CONSIDERADOS NA VALIDAÇÃO DA EQUAÇÃO	94
TABELA 11 – PARÂMETROS INTERPOLADOS.....	95
TABELA 12 – MATRIZES D OBTIDAS PELO RFEM 5 [®] E CLT PLATE SOFTWARE	107
TABELA 13 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 1 ($d_{min}/h = 10$) DA CDUP.....	108
TABELA 14 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 2 ($d_{min}/h = 10,42$) DA CDUP	108
TABELA 15 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 3 ($d_{min}/h = 10$) DA CDUP.....	109
TABELA 16 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 4 ($d_{min}/h = 10,94$) DA CDUP.....	109
TABELA 17 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 5 ($d_{min}/h = 20$) DA CDUP.....	109
TABELA 18 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 6 ($d_{min}/h = 30$) DA CDUP.....	109
TABELA 19 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 7 ($d_{min}/h = 41,67$) DA CDUP.....	110
TABELA 20 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 8 ($d_{min}/h = 50$) DA CDUP.....	110
TABELA 21 – MÉDIA DAS DIFERENÇAS PERCENTUAIS DAS COMPOSIÇÕES DA CDUP	110
TABELA 22 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 1 ($d_{min}/h = 10$) DA CDUR	111
TABELA 23 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 8 ($d_{min}/h = 50$) DA CDUR	111
TABELA 24 – MÉDIA DAS DIFERENÇAS PERCENTUAIS DAS COMPOSIÇÕES DA CDUR	111
TABELA 25 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 1 ($d_{min}/h = 10$) DA CDL.....	112
TABELA 26 – RESULTADOS DA COMPOSIÇÃO 8 ($d_{min}/h = 50$) DA CDL.....	112
TABELA 27 – MÉDIA DAS DIFERENÇAS PERCENTUAIS DAS COMPOSIÇÕES DA CDL	112
TABELA 28 – ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE A EQUAÇÃO PROPOSTA, MÉTODO GAMA E SHEAR ANALOGY	125
TABELA 29 – RESULTADOS DA EQUAÇÃO PROPOSTA QUANDO INTERPOLADA	126

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – TIPOS DE CARGAS, FUNÇÕES E COEFICIENTES.....	46
QUADRO 2 – FALHAS E MODOS DE FALHA DA TEORIA DA TENSÃO MÁXIMA	49
QUADRO 3 – EQUAÇÕES PARA DETERMINAÇÃO DE PROPRIEDADES DA MADEIRA.....	53
QUADRO 4 – MAIORES EDIFÍCIOS DE MADEIRA DO MUNDO	55
QUADRO 5 – TAGS E SUAS FUNCIONALIDADES	59
QUADRO 6 – PROPRIEDADES DO CSS	60
QUADRO 7 – PALAVRAS CHAVES RESERVADAS DO JAVASCRIPT	60
QUADRO 8 – ROTINAS DE TRATAMENTO DE EVENTO.....	61
QUADRO 9 – <i>STRINGS</i> DE BUSCA UTILIZADAS NA RBS.....	68
QUADRO 10 – BASES DE DADOS UTILIZADAS NA RBS	68
QUADRO 11 – CRITÉRIOS DE INCLUSÃO	69
QUADRO 12 – CRITÉRIOS DE EXCLUSÃO	69
QUADRO 13 – CRITÉRIOS DE QUALIDADE	70
QUADRO 14 – CAMPOS DE CRITÉRIO DE EXTRAÇÃO.....	70
QUADRO 15 – <i>STRINGS</i> DE BUSCA UTILIZADAS NA RBS.....	96
QUADRO 16 – SÍNTESE DOS TRABALHOS CORRELATOS	104

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	JUSTIFICATIVA	18
1.2	OBJETIVOS	19
1.2.1	Geral	19
1.2.2	Específicos	19
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2	ASPECTOS FUNDAMENTAIS	21
2.1	COMPÓSITOS	21
2.2	TEORIA DA ELASTICIDADE	24
2.3	TEORIA CLÁSSICA DA PLACA LAMINADA	27
2.3.1	Deslocamentos e deformações	28
2.3.2	Relações constitutivas da lâmina	31
2.3.3	Equações de movimento	34
2.3.4	Equações constitutivas do laminado	39
2.4	MÉTODO DE NAVIER	44
2.5	CRITÉRIOS DE FALHA DE LAMINADOS	48
2.5.1	Tensão máxima	49
2.5.2	Critério de Tsai-Hill	50
2.5.3	Critério de Hoffman	50
2.6	PROPRIEDADES MECÂNICAS DA MADEIRA	51
2.7	<i>CROSS LAMINATED TIMBER</i>	53
2.8	RECURSOS PARA O DESENVOLVIMENTO DE <i>SOFTWARES WEB</i>	58
2.9	REGRESSÃO SIMBÓLICA	62
2.10	CONCLUSÕES ACERCA DOS ASPECTOS FUNDAMENTAIS	64
3	MATERIAIS E MÉTODOS	66
3.1	ESTRATÉGIA DE PESQUISA	66
3.2	DETALHAMENTO DAS ETAPAS	66
3.2.1	Revisão bibliográfica sistemática	67
3.2.2	Pesquisa documental	71
3.2.3	<i>Data Science Research</i>	71
4	RESULTADOS	96
4.1	RESULTADOS DA RBS	96
4.2	CLT PLATE SOFTWARE	105

4.3	VALIDAÇÃO DO SOFTWARE	107
4.4	ANÁLISE ESTATÍSTICA	113
4.4.1	<i>Resultados das simulações</i>	113
4.4.2	<i>Proposta de modelo de regressão</i>	117
4.5	VALIDAÇÃO DA EQUAÇÃO	124
4.5.1	<i>Comparação com o Método Shear Analogy e Método Gama</i>	124
4.5.2	<i>Interpolação da equação</i>	125
5	CONCLUSÕES	127
	REFERÊNCIAS	128
	APÊNDICE A – GUIA CLT PLATE SOFTWARE	134

1 INTRODUÇÃO

A madeira é um material natural utilizado por milhares de anos em construções devido às suas vantagens intrínsecas como o simples manejo e o isolamento térmico, muito apreciado em regiões frias (Ramage *et al.*, 2017). Por se tratar de um material renovável e capaz de reduzir a emissão de dióxido de carbono (capturado pela madeira durante a sua vida útil), a sua utilização no contexto ecológico atual é indispensável, visto que a construção é um dos maiores causadores de impactos ambientais (Oh *et al.*, 2023).

Quanto à caracterização da madeira, trata-se de um complexo material natural anisotrópico, apresentando diferentes propriedades em distintas direções. Entretanto, no âmbito da Engenharia (análise macroscópica), é comum a consideração da madeira como material ortotrópico. Com isso, admite-se que a madeira apresente propriedades distintas em três direções perpendiculares: longitudinal, tangencial e radial (Mascia; Lahr, 2006).

A alta relação “resistência à compressão por densidade” da madeira, a qual permite a construção de estruturas eficientes (com alta resistência por peso), apresenta-se superior à do concreto e semelhante a do aço (Ramage *et al.*, 2017). Portanto, tal relação revela a madeira como um material competitivo quando utilizada em estruturas.

No entanto, a limitação dimensional da forma bruta da madeira inviabiliza a construção de elementos estruturais de grandes vãos, por exemplo, vigas com grandes comprimentos ou elementos de superfície como pisos. Em vista disso, produtos industrializados (também chamados de engenheirados), como a Madeira Lamelada Colada (MLC) e a Madeira Lamelada Colada Cruzada (MLCC), surgem para transpor tais obstáculos dimensionais da madeira bruta.

A confecção da Madeira Lamelada Colada (MLC), internacionalmente conhecido como *Glued Laminated Timber* (Glulam), é realizada por meio da colagem de lamelas de madeira sobrepostas. As lamelas podem ser unidas por *finger joint* no sentido longitudinal, de modo a formar peças de madeiras com grande comprimento destinadas a aplicações como vigas ou pilares (Uzelac Glavinić *et al.*, 2023).

Por outro lado, a Madeira Lamelada Colada Cruzada, também denominado *Cross Laminated Timber* (CLT), é um produto industrializado de madeira aplicado como parede ou piso estrutural. O CLT (Figura 1) trata-se de um painel compósito,

com duas dimensões (comprimento e largura) muito superiores a terceira (espessura), constituído na maioria das vezes por um número ímpar de camadas. As camadas de CLT confeccionadas com lamelas de madeira são orientadas em duas direções (longitudinal e transversal) de modo a gerar um compósito com camadas perpendiculares (cruzadas) uma as outras (Sciomenta *et al.*, 2021).

Figura 1 – *Cross Laminated Timber*



Fonte: Adaptado de O’Ceallaigh *et al.* (2023).

Com isso, tendo em vista que o CLT viabiliza construções de edifícios sustentáveis, a expansão global de produção e modernização das linhas de fabricação de CLT é crescente em diversos países (por exemplo, Alemanha, Áustria, Estados Unidos da América, Japão e Canadá) (De Araujo; Christoforo, 2023). Tal motivação tem impulsionado a quebra do recorde de edifício mais alto construído de madeira, sendo o edifício Ascent (em Milwaukee, nos United States) atual detentor do título com 86,60 metros de altura países tem cada vez mais quebrado recordes nas construções de edifícios de madeira (Fernandez; Komp; Peronto, 2020).

Em projetos de placas de CLT, os documentos normativos apresentam análises quanto ao estado limite último e o estado limite de serviço. Dessa forma, devido a rigidez das placas, o dimensionamento é predominantemente determinado pelo Estado Limite de Serviço (ELS), visando especialmente a deformação e a vibração das estruturas, em vez de se concentrar nos Estados Limites Últimos (ULS), que tratam de ruptura e resistência ao fogo (Silva, 2023). Nesse sentido, deslocamentos máximos admissíveis são apresentados por documentos normativos, por exemplo, a NBR 7190 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2022) e o Eurocode 5 (European Committee for Standardization, 2004b).

Apesar do CLT ter sido desenvolvido nos meados da década de 1990, a sua origem é recente se comparada as tradicionais estruturas de madeira (Pei *et al.*, 2016). Com isso, a abordagem unidimensional já comumente utilizada nas tradicionais

estruturas de madeira influenciou os documentos normativos a manterem tal abordagem para as placas de CLT. No entanto, considerar uma placa bidimensional como um elemento unidimensional requer correções no efeito de curvatura e na rigidez dos painéis de CLT. Tais correções comumente são obtidas por meio de métodos que buscam obter a rigidez efetiva do painel, como o Gamma e Shear Analogy (Marjanović *et al.*, 2020).

Por outro lado, na análise estrutural de placas de CLT, não é prático considerar modelos sólidos robustos, devido às restrições de tempo e à escassez de dados (por exemplo, propriedades das espécies de madeira) disponíveis para análise (Esaka *et al.*, 2020). Dessa forma, como na maioria dos casos das configurações de placas de CLT duas dimensões são maiores que a terceira (espessura), torna-se razoável considerar abordagens bidimensionais como uma melhor alternativa para análise estrutural de placas de CLT, seja por métodos aproximados (Método dos Elementos Finitos) ou exatos, por exemplo, advindos da *Classical Laminated Plate Theory* (CLPT).

A CLPT fornece equações diferenciais, resultantes da combinação das equações constitutivas (relação deformação-deslocamento) e de equilíbrio, que modelam o problema de flexão de placas. Apesar das equações diferenciais parciais serem dificilmente solucionadas por meio do cálculo integral, Mendonça (2019) e Reddy (2004) apresentam uma solução analítica chamada de Método de Navier, a qual pode ser considerada para o problema de flexão de placas laminadas.

O Método de Navier trata-se de uma solução analítica para a CLPT e, portanto, resulta em uma função do deslocamento transversal da placa laminada. Conseqüentemente, por meio de relações diferenciais parciais, consegue-se, por exemplo, deduzir as funções analíticas dos esforços internos e tensões (Reddy, 2004). Portanto, a comodidade de se trabalhar com funções prontas, torna o Método de Navier mais atraente quando se comparado a outras soluções aproximadas tal qual o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Todavia, a resolução manual das funções do Método de Navier não é viável, requerendo esforço computacional para a sua viabilidade. Além disso, teoricamente, o duplo somatório compreendido nestas funções varia até o infinito, entretanto, convenientemente critérios de parada podem ser admitidos a fim de viabilizar sua solução computacional. Dessa forma, ainda que utilizada uma pequena tolerância

como critério de parada, o truncamento da série de potência da função do Método de Navier passará a ser aproximado.

1.1 JUSTIFICATIVA

A madeira como um material renovável e ecologicamente correto que apresenta propriedades mecânicas superiores ou iguais ao aço e concreto (Ramage *et al.*, 2017), é a matéria-prima de produtos engenheirados como o CLT, elemento que pode ser utilizado como piso ou parede estrutural. Devido às suas vantagens, De Araujo e Christoforo (2023) apresentam que a aplicação do CLT é ampla em países da Europa, Estados Unidos da América (EUA) e Canadá.

Entretanto, de acordo com Sciomenta *et al.* (2021), embora o CLT seja amplamente reconhecido, não há um modelo matemático único no intuito de simular seu comportamento devido à sua complexidade. Com isso, os atuais documentos normativos acerca do CLT apresentam abordagens de cálculo unidimensionais, os quais não refletem o verdadeiro comportamento das placas de CLT (Marjanović *et al.*, 2020). Por conseguinte, nota-se a importância de uma equação alternativa que considere as placas de CLT como elementos bidimensionais e apresente resultados mais precisos.

No entanto, para se trabalhar com elementos bidimensionais é necessário a utilização, por exemplo, da Teoria Clássica da Placa Laminada, que tem como solução o Método de Navier, uma solução fechada exata (funções prontas) de potência com duplo somatório trigonométrico, que requer fundamentalmente a utilização de programação para a viabilidade de sua resolução.

Portanto, face o exposto, este trabalho se justifica devido à complexidade de simulação computacional do Madeira Lamelada Colada Cruzada junto a necessidade de uma equação de abordagem bidimensional simples que possa representar o comportamento das placas de CLT e servir como um ponto de partida para projetistas no dimensionamento de tais placas, algo identificado como inédito de acordo com os trabalhos correlatos encontrados pela Revisão Bibliográfica Sistemática.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Geral

Criação de um *software* visando a simulação de placas de CLT com base no Método de Navier, bem como propor uma equação de abordagem bidimensional de regressão a múltiplas variáveis para a estimativa da carga limite de serviço em placas de CLT apoiadas nos quatro bordos.

1.2.2 Específicos

Quanto aos objetivos específicos, citam-se:

- Desenvolver algoritmos de cálculo de deslocamento, esforços e tensões de placas de CLT e validá-los;
- Validar a equação proposta, selecionada como a melhor entre os modelos testados (regressão clássica e simbólica).

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho é composto por mais 4 capítulos, além deste introdutório.

No capítulo 2, são apresentados os conceitos fundamentais relativos a este trabalho. A confecção de compósitos e os seus tipos, as equações acerca Teoria Clássica da Placa Laminada e o Método de Navier para a simulação do comportamento mecânico da placa laminada, as limitações impostas devido a complexibilidade da madeira como um material natural anisotrópico e as características das placas de CLT. Além disso, é apresentado as linguagens que podem ser utilizadas para o desenvolvimento de um *software web* e o método de obtenção de um modelo de regressão simbólica.

O capítulo 3 explicita os materiais e metodologias realizados, por conseguinte, os procedimentos de pesquisa adotados desde a elaboração da revisão bibliográfica sistemática até a validação da equação proposta.

No capítulo 4, foca-se em apresentar tanto os resultados da revisão bibliográfica sistemática quanto os dados e análises que emergem do uso do software, demonstrando a precisão e eficácia dos algoritmos de cálculo de deslocamento,

esforços e tensões em placas de CLT. Adicionalmente, apresenta-se a equação e expõe-se a sua validação como a melhor alternativa entre os modelos testados.

No capítulo 5, são apresentadas as conclusões finais deste trabalho, sintetizando os resultados alcançados e os objetivos cumpridos. Este capítulo destaca a eficácia do software desenvolvido para a simulação de placas de CLT, bem como a validação da equação proposta para estimar a carga limite de serviço. Além disso, são discutidas as implicações práticas das descobertas, as possíveis limitações do estudo e as sugestões para futuras pesquisas.

2 ASPECTOS FUNDAMENTAIS

Nesta seção, apresentam-se os aspectos fundamentais sobre o tema, os quais permitem uma melhor compreensão do trabalho proposto. Na seção 2.1 é apresentada aspectos relacionados a confecção de compósitos e suas diferentes estruturas. A seção 2.2 aborda a Teoria da Elasticidade, apresentando as relações deformações-deslocamentos para resultados satisfatórios em pequenas deformações e rotações. Na seção 2.3 é exibida a Teoria Clássica da Placa Laminada de modo a explicar o problema de flexão de placas e a seção 2.4 é apresentado o Método de Navier, uma solução a Teoria Clássica da Placa Laminada. As particularidades acerca das propriedades da madeira, destacando-se as simplificações realizadas para reduzir sua complexidade, são expostas na seção 2.6. Na seção 2.7 é explanado o procedimento de fabricação de placas de CLT, os seus usos e os cuidados que devem ser considerados nos cálculos. As ferramentas utilizadas no desenvolvimento de um *software web* e a metodologia para a obtenção de um modelo de regressão de alta precisão são apresentados, respectivamente, na seção 2.8 e 2.9.

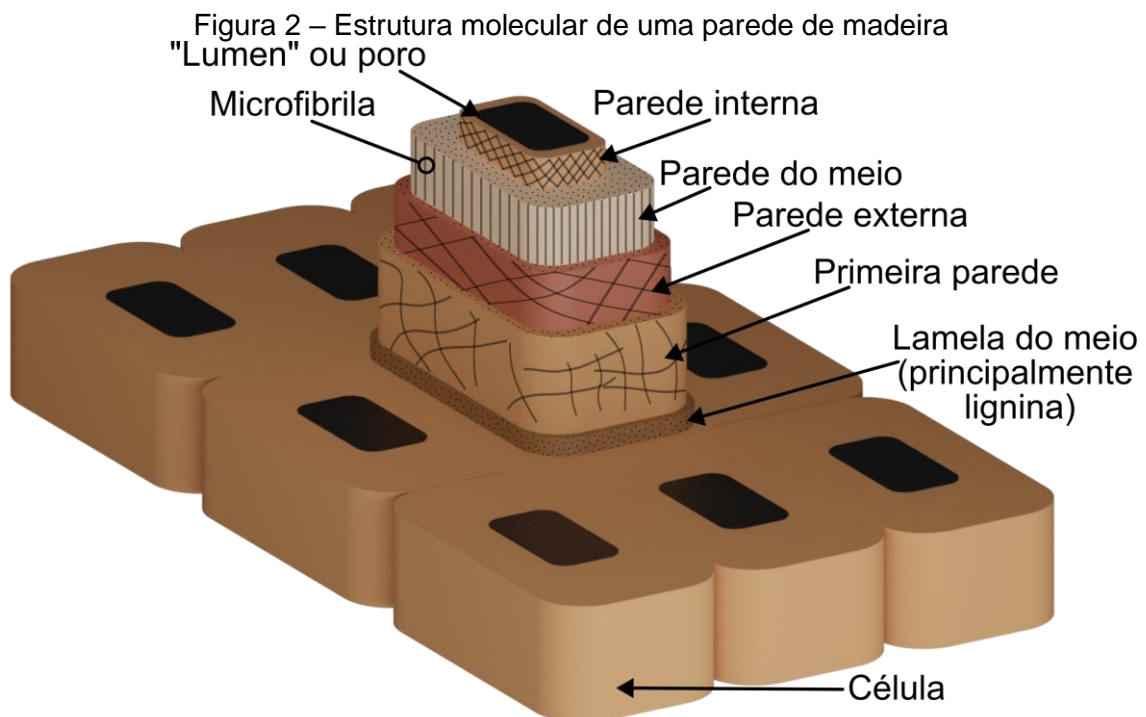
2.1 COMPÓSITOS

Os compósitos são formados a partir da combinação de dois ou mais materiais no intuito de obter um material com propriedades não encontradas nos componentes individuais. Dessa forma, o compósito (produto resultante) é criado com certas características acentuadas e outras minoradas de acordo com a sua função, resultando em um material com melhores propriedades que os componentes individuais que o confeccionaram, por exemplo, a resistência à corrosão, resistência estática, rigidez e isolamento térmico (Mendonça, 2019; Reddy, 2004).

Na constituição de um compósito, os materiais individuais são classificação de acordo com a sua função, materiais de reforço são chamados de fibras e materiais colantes chamados de matriz. Nesse sentido, enquanto a fibra pode ser responsável por fornecer ao compósito as propriedades mecânicas como resistência e rigidez, a matriz pode fornecer proteção e permitir que a colagem das fibras seja suficiente para manter suas orientações e favorecer a distribuição dos carregamentos (Reddy, 2004).

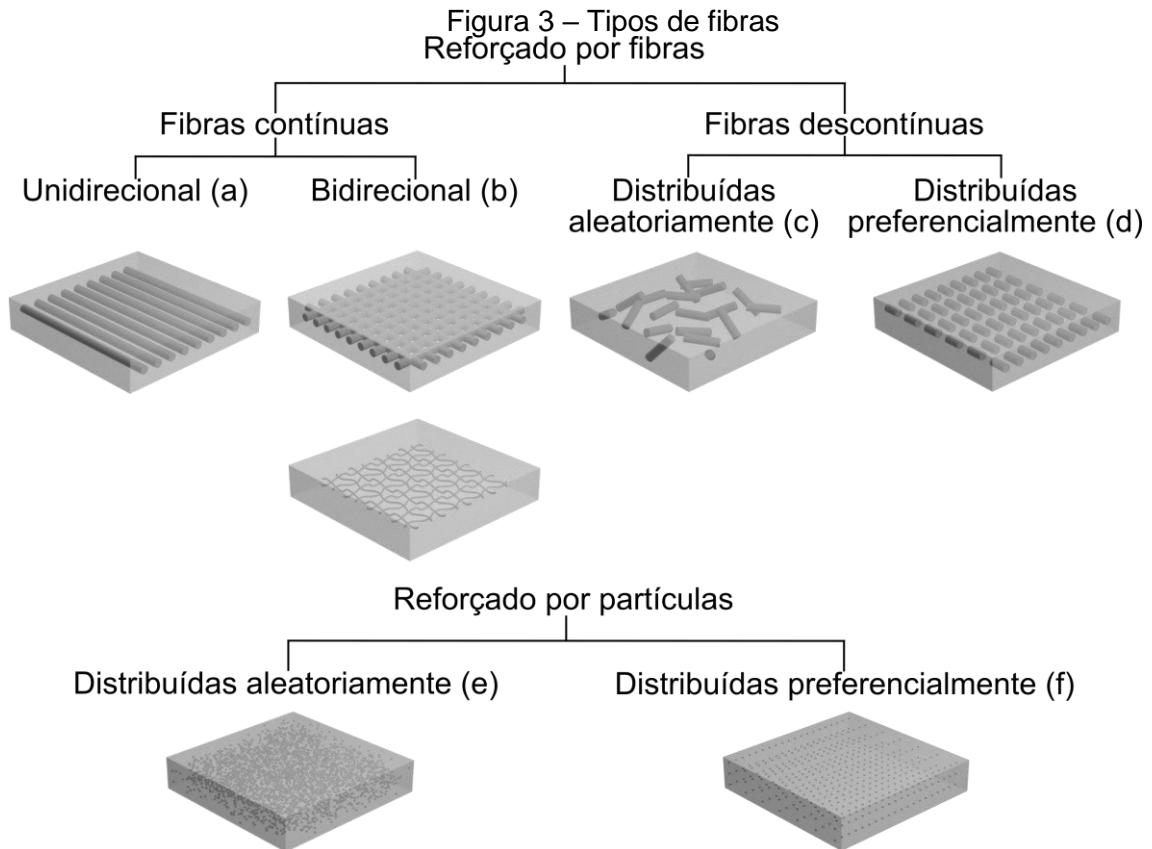
Quanto a formação, há compósitos artificiais (confeccionados pelo homem para um objetivo em específico) e naturais (formados na natureza pela combinação de

materiais de origem orgânica ou mineral). Nesse sentido, a madeira é um exemplo de um compósito natural, cuja estrutura complexa pode ser claramente evidenciada no nível molecular (Figura 2). Nesta estrutura molecular, o papel do reforço advém das fibras da estrutura cristalina da celulose, a qual representa 45% do peso da madeira. Por outro lado, a matriz é formada pela lignina (polímero amorfo) e hemicelulose (semicristalino) que correspondem juntas a 40% do peso da madeira. A porcentagem restante do peso corporal advém da água (dissolvida na matriz) e extrativos (disperso na matriz) (Ashby; Jones, 2006).



Fonte: O próprio autor, 2024.

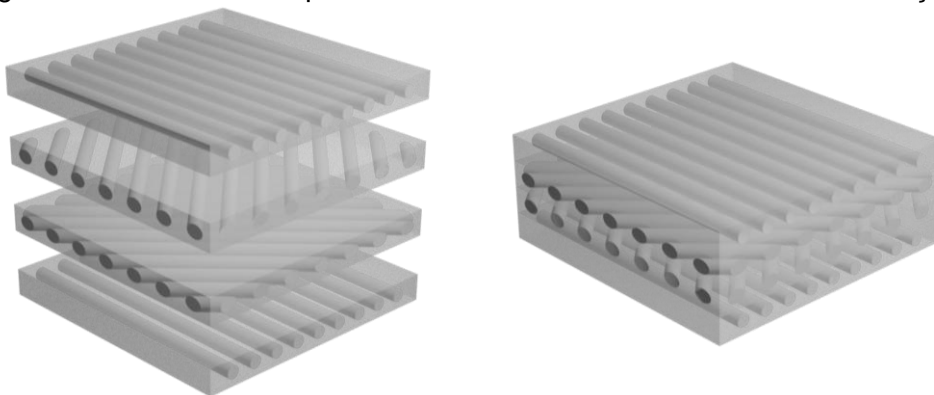
A convecção de compósitos artificiais possibilita o controle da forma e distribuições das fibras (Figura 3). No que se refere à forma, as fibras podem ser contínuas ou descontínuas (curtas ou partículas). Dessa forma, as fibras contínuas são categorizadas como unidirecional (Figura 3a) e bidirecionais (Figura 3b), com possibilidade de serem entrelaçadas. Em contrapartida, as fibras descontínuas podem ser distribuídas aleatoriamente (Figura 3c e Figura 3e) ou distribuídas preferencialmente (Figura 3e e Figura 3f). Evidentemente, a escolha tanto da forma quanto da distribuição dependerá da função do compósito resultante, por exemplo, lâminas com fibras unidirecionais apresentam uma elevada resistência na direção das fibras, mas na direção transversal uma baixa resistência (Rakočević, 2018; Reddy, 2004).



Fonte: O próprio autor, 2024.

Nesse sentido, a junção da fibra (reforço) com a matriz (material colante) é chamada de lâmina ou camada. Com isso, para algumas aplicações apenas uma única camada é o suficiente, entretanto, em outras se faz necessário unir diversas camadas, por exemplo, em aplicações estruturais. Por conseguinte, o conjunto de lâminas (camadas) sobrepostas é denominado de laminado (Figura 4) (Reddy, 2004).

Figura 4 – Laminado composto de lâminas orientadas em diferentes direções

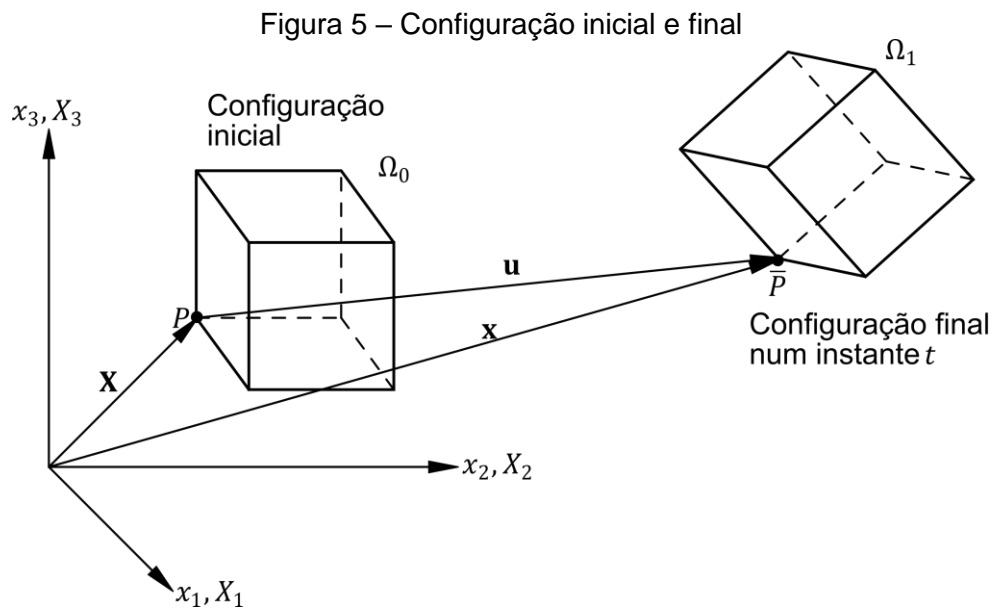


Fonte: O próprio autor, 2023.

2.2 TEORIA DA ELASTICIDADE

Neste item são apresentadas as relações deformações-deslocamentos completas, considerando-se os termos não lineares face aos seus resultados satisfatórios para pequenas deformações e rotações. Além disso, por ser inconveniente em alguns casos trabalhar com a forma deformada dos corpos, a descrição Lagrangeana, que acompanha o material à medida que ele se deforma, é considerada neste trabalho, em vez da Euleriana, que se concentra nas propriedades do espaço e como elas mudam com o tempo (Mendonça, 2019).

A deformação de um corpo está relacionada aos deslocamentos e alterações na sua geometria. Dessa forma, um corpo qualquer (Figura 5) terá uma configuração indeformada designada como Ω_0 (sem a ação da carga) e uma deformada Ω_1 em um instante t (Mendonça, 2019; Reddy, 2004).



Fonte: O próprio autor, 2023.

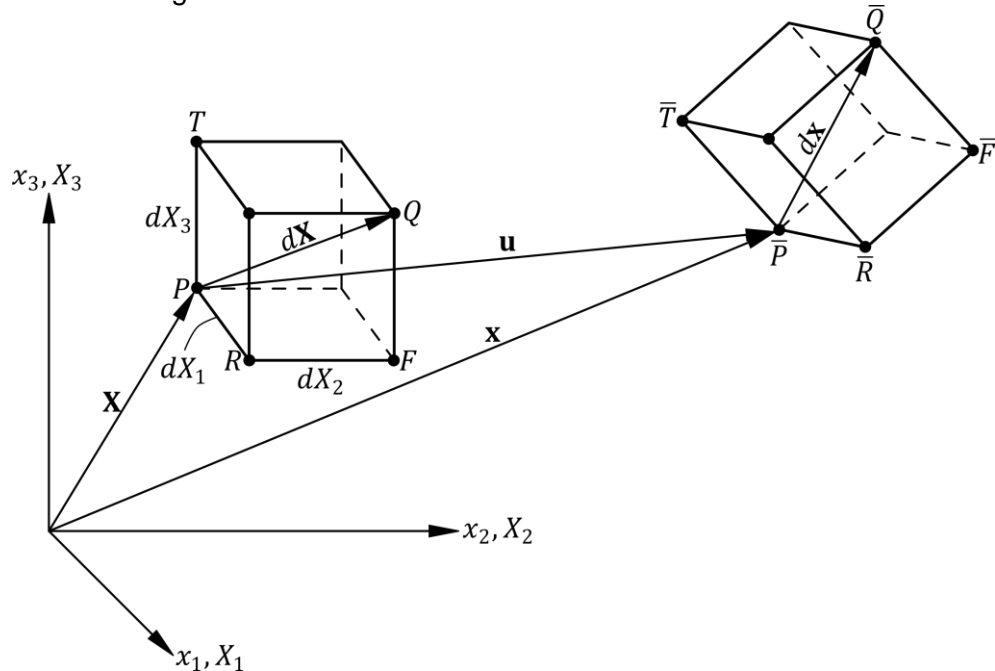
Com isso, um ponto P referente a uma coordenada $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ do corpo, com a deformação ocasionada pelas forças externas, se moverá para nova posição $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, por consequência, o deslocamento sofrido por P é dado por (1). Dessa maneira, uma vez conhecido o deslocamento de cada ponto do corpo pode-se construir, por meio de Ω_0 , a configuração deformada Ω_1 de acordo com (2) (Mendonça, 2019; Reddy, 2004).

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3, t) \quad (2)$$

Dado um elemento infinitesimal, conforme Figura 6, em que tenha dois pontos vizinhos P e Q cuja suas posições são $P: (X_1, X_2, X_3)$ e $Q: (X_1 + dX_1, X_2 + dX_2, X_3 + dX_3)$, respectivamente, na condição Ω_0 do corpo, o vetor que conecta eles é $d\mathbf{X} = \{dX_1; dX_2; dX_3\}$ e sua distância $dS = \sqrt{(dX_1)^2 + (dX_2)^2 + (dX_3)^2}$, iguais as dimensões dos segmentos ortogonais do paralelepípedo inicial. Entretanto, em um instante t , o elemento sofrerá uma variação em seu formato devido as alterações (deformações) nos comprimentos e orientações nos segmentos e, por consequência, não será mais retangular, e os pontos P e Q se moveram para \bar{P} e \bar{Q} , sendo $d\mathbf{x}$ o vetor que conecta-os e $ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}$ o seu tamanho (Mendonça, 2019; Reddy, 2004).

Figura 6 – Geometria indeformada e deformada



Fonte: O próprio autor, 2023.

De acordo com Reddy (2004), a medida de deformação Green-Lagrange (\mathbf{E}) descreve a alteração nos comprimentos e ângulos dos elementos materiais resultante da deformação, a qual fornece a variação do quadrado do comprimento do vetor $d\mathbf{X}$ (3).

$$2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} \equiv (ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (3)$$

Tendo em vista que \mathbf{x} é uma função de \mathbf{X} (2) e o gradiente (∇) de \mathbf{u} , o vetor $d\mathbf{x}$ pode ser obtido por meio de $d\mathbf{X}$ conforme(4).

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \cdot \nabla \mathbf{u} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \quad (4)$$

Dessa forma, com a inclusão de (4) em (3), consegue-se desenvolver (5). Por conseguinte, isolando-se \mathbf{E} , determina-se (6).

$$\begin{aligned} 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \\ &= [d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})] \cdot [d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})] - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot [(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T - \mathbf{I}] \cdot d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T - \mathbf{I}] \quad (6)$$

Tendo em vista que \mathbf{E} é simétrico, $E_{ij}^T = E_{ji}$, a forma cartesiana de (6) é dada por (7) e explicitada conforme (8).

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \cdot \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) - \delta_{jk} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \right) \quad (7)$$

Reddy (2004) cita que caso $\nabla \mathbf{u}$ for muito pequeno, $|\nabla \mathbf{u}| \ll 1$, os seus quadrados e produtos serão insignificantes, por conseguinte, o tensor de deformação Green-Lagrange (\mathbf{E}) se reduz ao tensor de deformação infinitesimal (ε) de acordo com (9). Com isso, por meio da eliminação dos produtos e quadrados de (8), as deformações lineares uniaxiais e as cisalhantes dos respectivos eixos são obtidas (10).

$$\begin{aligned}
E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\
E_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\
E_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\
E_{12} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\
E_{13} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \\
E_{23} &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \text{ ou } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), \varepsilon_{22} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \varepsilon_{33} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \\
\gamma_{13} &= 2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{10}$$

2.3 TEORIA CLÁSSICA DA PLACA LAMINADA

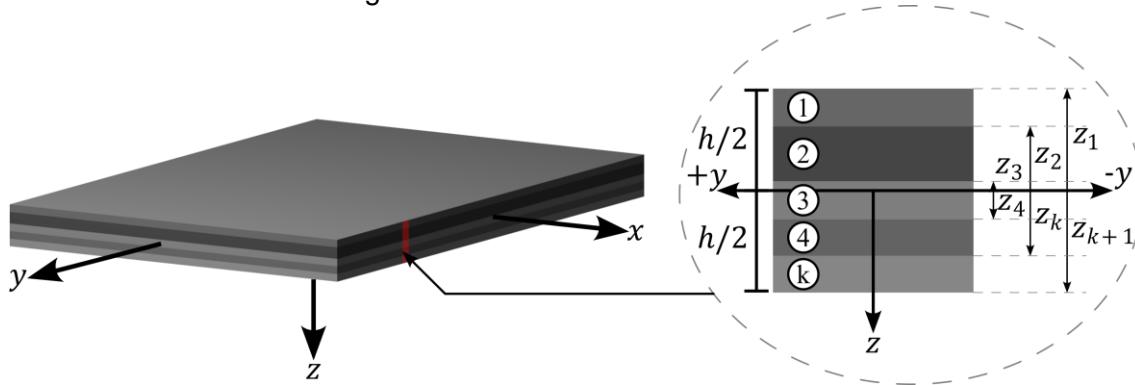
A definição “placa” se refere a elementos com duas dimensões (comprimento e largura) maiores do que a terceira dimensão (espessura) sujeitos a uma carga vertical perpendicular ao seu plano.

A *Classical Laminate Plate Theory* (CLPT) ou, em português, Teoria Clássica da Placa Laminada, trata-se de uma adaptação da Teoria Clássica da Placa para compósitos. Dessa maneira, sabendo-se que compósitos podem ser confeccionados por diversas lâminas com possíveis distintas propriedades geométricas e mecânicas, abordagens bidimensionais como a CLPT têm como objetivo encontrar uma única camada equivalente ao compósito laminado (Marjanović *et al.*, 2020). Nesse sentido, a rigidez da placa laminada é relativa a uma placa de uma única camada equivalente a todas aquelas do compósito analisado. As abordagens de única camada equivalente são derivadas da teoria da elasticidade 3-D, de modo que a única camada equivalente tem comportamento constitutivo complexo e o problema tridimensional é reduzido a bidimensional (Reddy, 2004).

Desse modo, a CLPT faz transformação de um problema que era inicialmente tridimensional para bidimensional (considerando a placa disposta em um plano cartesiano de eixos x e y) e, devido às limitações impostas, sua utilização é recomendada apenas em placas delgadas (Reddy, 2004).

Por conseguinte, o sistema de coordenadas da CLPT (Figura 7) consiste na orientação do eixo z positiva para baixo, o plano xy coincide com o plano médio do laminado e a ordem da numeração das camadas inicia-se no topo e finaliza-se na base do laminado. Ademais, as camadas têm suas bases e topos referenciados por uma coordenada z , de modo que uma camada k qualquer se encontra entre $z = z_k$ e $z = z_{k+1}$ (Figura 7).

Figura 7 – Sistema de coordenadas CLPT



Fonte: O próprio autor, 2023.

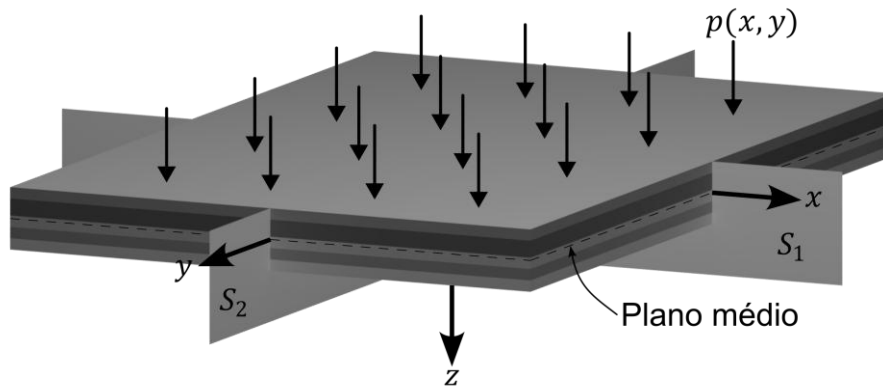
2.3.1 Deslocamentos e deformações

De acordo com Reddy (2004), para o desenvolvimento do modelo matemático da CLPT são admitidas as hipóteses de Kirchhoff: a seção plana e perpendicular à superfície média, permanece plana e perpendicular à superfície média após a flexão e a linha perpendicular à superfície média não sofre alongamento. Além disso, as seguintes hipóteses e restrições relacionadas aos deslocamentos e deformações são adotadas:

As camadas são perfeitas coladas, o material de cada camada é linearmente elástico e tem três planos de simetria, as camadas apresentem espessuras constantes, as deformações e deslocamento são pequenos, as tensões de cisalhamento transversais nas superfícies superior e inferior do laminado são zero. (Reddy, 2004, p. 144).

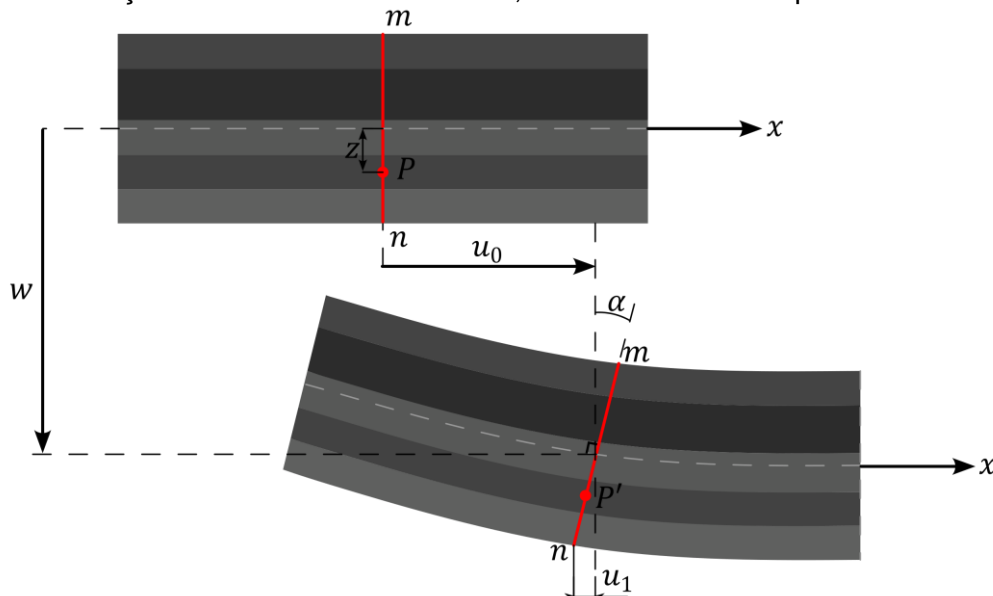
Considere-se um laminado com dois cortes (S_1 e S_2) sujeito a uma carga perpendicular ao plano $p(x, y)$, conforme visualizado na Figura 8. Do corte S_1 , visualiza-se (Figura 9) que uma seção $m - n$ qualquer se manterá ortogonal ao plano médio (neutro) antes e após o carregamento. Além disso, no laminado indeformado, um ponto P na posição (x, y, z) , devido a rotação da seção $m - n$, se torna P' com o deslocamento u no eixo x . Analogamente, do corte S_2 , um ponto qualquer sofrerá um deslocamento v no eixo y . Portanto, qualquer ponto do laminado indeformado com posição (x, y, z) se moverá para $(x + u, y + v, z + w)$ quando o laminado se deformar.

Figura 8 – Planos de cortes S_1 e S_2 em um laminado



Fonte: O próprio autor, 2023.

Figura 9 – Seção deformada e indeformada, de acordo com as hipóteses de Kirchhoff



Fonte: O próprio autor, 2023.

Da Figura 9, observa-se que a rotação (α) sofrida pela seção $m - n$, após a deformação, é igual a $\partial w_0 / \partial x$. Com isso, lembrando-se a hipótese de pequenos deslocamentos de Kirchhoff e que matematicamente a $\tan \theta \approx \theta$ para θ próximo de

zero, constata-se que a $\tan \alpha = -u_1/z$ se iguala ao próprio $(\partial w_0/\partial x)$, por consequência, $u_1 = -z \partial w_0/\partial x$. Portanto, o deslocamento total u é definido por (11), analogamente, v poderia ser determinado, por meio do corte S_2 , como (12) e w em ambos como (13).

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (11)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (12)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \quad (13)$$

Como descrito anteriormente, em 2.2, as deformações podem ser calculadas por relações diferenciais do deslocamento não lineares ou lineares. Devido os pequenos gradientes de deslocamento $(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ e $\partial w/\partial z)$, qualquer produto que os envolva, em (8), são insignificativos. Com isso, sabendo-se que $\partial w_0/\partial z = 0$, de acordo com as hipóteses de Kirchhoff, as deformações são dadas por (14).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \\ \varepsilon_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Tais deformações, chamadas de *von Kármán*, podem ser separadas em duas parcelas (15), em que a primeira $(\varepsilon_{xx}^{(0)}, \varepsilon_{yy}^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)})$ é referente as deformações no plano médio (16) e a segunda $(\varepsilon_{xx}^{(1)}, \varepsilon_{yy}^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)})$ relacionada as deformações da flexão (17).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

2.3.2 Relações constitutivas da lâmina

Tendo em vista que as deformações ε_{xz} , ε_{yz} e ε_{zz} são iguais a zero na CLPT, como desenvolvido no item anterior (2.3.1), as tensões transversais σ_{xz} , σ_{yz} são nulas e a normal σ_{zz} é desprezada. Dessa forma, nas coordenadas da lâmina, as relações lineares constitutivas, desconsiderando-se os efeitos piezoelétricos e térmico, são dadas por (18) (Mendonça, 2019).

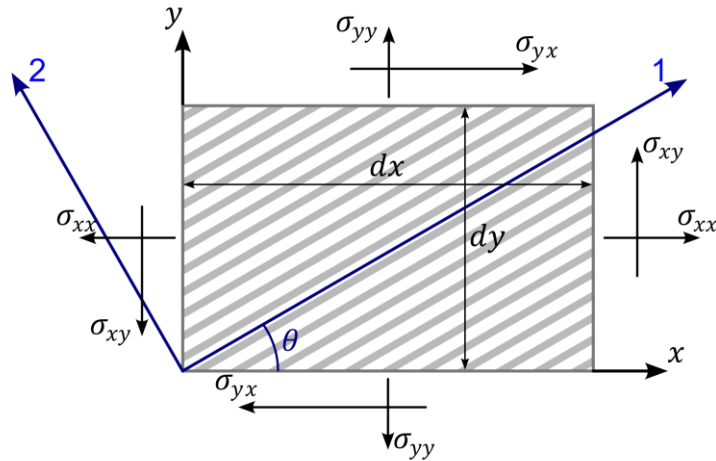
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (18)$$

Sendo σ_1 , σ_2 as tensões nos respectivos eixos 1 e 2 da lâmina, σ_{12} a tensão cisalhante no plano 1-2 e $Q_{ij}^{(k)}$ representa a rigidez reduzida da k -ésima camada, calculada conforme (19).

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Perceba-se que tais equações são referentes às lâminas, as quais tem como referência os eixos locais 1 e 2. Tais eixos podem não coincidir com os globais x e y do laminado (Figura 10), ou seja, o eixo 1 (local da lâmina) pode ser orientado a um ângulo θ em relação ao eixo x .

Figura 10 – Estado plano de tensões



Fonte: O próprio autor, 2023.

Desta forma, sabendo-se que um laminado pode ser composto por várias camadas com diversas orientações, se faz necessário transformar as equações locais de cada lâmina (os componentes da matriz rigidez reduzida e as deformações) para as coordenadas globais do laminado (x, y, z) , conforme (20) e (21) (Mendonça, 2019).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(k)} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{20}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6/2 \end{Bmatrix}^{(k)} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{21}$$

Com a substituição das transformações (20) e (21) na equação das tensões locais (18), tem-se a equação das tensões globais (22). A matriz de transformação

das deformações $[T]$ e a sua inversa $[T]^{-1}$, utilizada na transformação das componentes da matriz rigidez, são apresentadas nas equações (23) e (24), respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(k)} [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (22)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & -2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cos(\theta) & -\sin(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Por conseguinte, as matrizes transformadoras ($[T]$ e $[T]^{-1}$) modificam a matriz de rigidez reduzida (25), com isso, as componentes da matriz de rigidez transformada \bar{Q}_{ij}^k são apresentadas em (26).

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} [T] \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{22} \sin^4(\theta) \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{12}(\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{22} \cos^4(\theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} \\ &\quad + 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} \\ &\quad + 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{66}(\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \end{aligned} \quad (26)$$

Portanto, considerando-se a matriz de rigidez transformada (25) e as relações diferenciais no plano médio e de flexão (16) e (17) em (22), determina-se a forma explícita das tensões globais em relações aos deslocamentos (27) (Mendonça, 2019).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right) + z \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad (27)$$

2.3.3 Equações de movimento

Como citado anteriormente, na Teoria Clássica da Placa Laminada, as deformações cisalhantes não são consideradas. Por consequência, as tensões cisalhantes são desprezadas nas relações constitutivas e, apesar da σ_{zz} não ser zero por conta do efeito de Poisson, também não é considerada na formulação devido à sua contribuição na energia de deformação virtual ser insignificante (Reddy, 2004).

Entretanto, embora não sejam incluídas na expressão da energia de deformação virtual, as tensões transversais são necessárias para manter a placa em equilíbrio. Por conseguinte, são consideradas nas condições de contorno e equilíbrio de forças (Reddy, 2004).

As equações governantes são derivadas do princípio dos deslocamentos virtuais e a versão dinâmica do princípio do trabalho virtual, visualizada em (28), é dada pela integração, em relação ao tempo, das variações infinitesimais δU (energia de deformação virtual), δV (trabalho virtual das forças aplicadas) e δK (trabalho virtual da energia cinética) apresentadas em (29), (30) e (31), respectivamente.

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dz dx dy \\ &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} (\delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)}) + \sigma_{yy} (\delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_{xy} (\delta \gamma_{xy}^{(0)} + z \delta \gamma_{xy}^{(1)}) \right] dz \right\} dx dy \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\delta V &= - \int_{\Omega_0} \left[q_b(x, y) \delta w \left(x, y, \frac{h}{2} \right) + q_t(x, y) \delta w \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) \right] dx dy \\
&\quad - \int_{\Gamma_\sigma} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\hat{\sigma}_{nn} \delta u_n + \hat{\sigma}_{ns} \delta u_s + \hat{\sigma}_{nz} \delta w) dz ds = \\
&= - \int_{\Omega_0} \{ q_b(x, y) + q_t(x, y) \delta w_0(x, y) \} dx dy \\
&\quad - \int_{\Gamma_\sigma} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\hat{\sigma}_{nn} \left(\delta u_{0n} - z \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} \right) + \hat{\sigma}_{ns} \left(\delta u_{0s} - z \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} \right) \right. \\
&\quad \left. + \hat{\sigma}_{nz} \delta w_0 \right] dz ds
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 \left[\left(\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right) \left(\delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy
\end{aligned} \tag{31}$$

Sendo, q_b a força distribuída na base ($z = h/2$), q_t a força distribuída no topo ($z = -h/2$), ρ_0 a densidade do material. Por conseguinte, as tensões $\hat{\sigma}_{nn}$, $\hat{\sigma}_{ns}$ e $\hat{\sigma}_{nz}$ são as específicas da porção em se conhece as tensões (Γ_σ) da fronteira (Γ). Ademais, δu_{0n} e δu_{0s} indicam os deslocamentos virtuais ao longo das direções normal e tangencial, respectivamente, na fronteira Γ , bem como, um ponto sobre uma variável denota sua derivada em relação ao tempo $\dot{u}_0 = \partial u_0 / \partial t$ (Reddy, 2004).

Deslocamentos virtuais são zero no tempo $t = 0$ e $t = T$ e onde se conhece os deslocamentos reais. Com isso, assumindo-se tensões conhecidas, em uma parte ou na totalidade da fronteira (Γ), por consequência, o deslocamento real é conhecido e o virtual nulo na aplicação da tensão conhecida. Portanto, com tal simplificação, pode-se deduzir as equações diferenciais governantes e condições de contorno (Reddy, 2004).

Dessa forma, substituindo-se as variações infinitesimais δU (29), δV (30) e δK (31) em (28), obtém-se (32).

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + N_{xx} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} \right. \right. \\
+ M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} - q \delta w_0 - I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) \\
+ I_1 \left(\frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \dot{u}_0 + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \dot{v}_0 + \delta u_{0n} \right) \delta \dot{v}_0 \\
\left. \left. - I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right] dx dy \right. \\
- \int_{\Gamma_\sigma} \left(\hat{N}_{nn} \delta u_{0n} + \hat{N}_{ns} \delta u_{0s} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} \right. \\
\left. + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) ds \left. \right\} dt
\end{aligned} \tag{32}$$

Em que, q é a carga total aplicada ($q_b + q_t$) e as forças nos planos (N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} , \hat{N}_{nn} e \hat{N}_{ns}), momentos (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , M_{nn} e M_{ns}), força transversal (Q_n) e momentos de inércia (I_0 , I_1 , I_2) são descritos em (33), (34), (35) e (36), respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} \hat{N}_{nn} \\ \hat{N}_{ns} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{nn} \\ \hat{\sigma}_{ns} \end{Bmatrix} dz \tag{33}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \quad \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{ns} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{nn} \\ \hat{\sigma}_{ns} \end{Bmatrix} z dz \tag{34}$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_0 dz \tag{35}$$

$$\hat{Q}_n = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}_{nz} dz \tag{36}$$

As relações diferenciais entre deformações e deslocamentos reais, (16) e (17), são válidas para as virtuais. Com isso, as deformações virtuais são apresentadas em (37) e (38).

$$\begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \delta\varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \delta\gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial\delta v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial\delta w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial\delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial\delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial\delta w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \delta\varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \delta\gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Por conseguinte, com a substituição das deformações (37) e (38) na equação dinâmica do princípio do trabalho virtual (32), determina-se (39), na qual a denotação de um termo subscrito por uma vírgula seguida de variável representa a derivada parcial deste termo em relação a tal variável, por exemplo, “ $N_{yy,y}$ ” representa $\partial N_{yy}/\partial y$.

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[-N_{xx}\delta u_0 - \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)_{,x} \delta w_0 - M_{xx,xx}\delta w_0 - N_{yy,y}\delta v_0 \right. \right. \\ \left. \left. - \left(N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_{,y} \delta w_0 - M_{yy,yy}\delta w_0 - N_{xy,y}\delta u_0 - N_{xy,x}\delta v_0 \right. \right. \\ \left. \left. - \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_{,x} \delta w_0 - \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)_{,y} \delta w_0 - 2M_{xy,xy}\delta w_0 - q\delta w_0 \right. \right. \\ \left. \left. + I_0(\ddot{u}_0\delta u_0 + \ddot{v}_0\delta v_0 + \ddot{w}_0\delta w_0) - I_2 \left(\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 \right. \right. \\ \left. \left. - I_1 \left(\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x} \delta w_0 - \frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y} \delta w_0 - \frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y} \delta v_0 \right) \right] dx dy \right. \\ \left. + \oint_{\Gamma} \left[N_{xx}n_x\delta u_0 + \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) n_x\delta w_0 - M_{xx}n_x \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} + M_{xx,x}n_x\delta w_0 \right. \right. \\ \left. \left. + N_{yy}n_y\delta v_0 + \left(N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_y\delta w_0 - M_{yy}n_y \frac{\partial\delta w_0}{\partial y} + M_{yy,y}n_y\delta w_0 \right. \right. \\ \left. \left. + M_{xy}n_x \frac{\partial\delta w_0}{\partial y} + M_{xy,x}n_y\delta w_0 - M_{xy}n_y \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} + M_{xy,y}n_x\delta w_0 \right. \right. \\ \left. \left. + N_{xy}n_y\delta u_0 + N_{xy}n_x\delta v_0 + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} n_x\delta w_0 + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} n_y\delta w_0 \right] ds \right. \\ \left. - \oint_{\Gamma_\sigma} \left(\hat{N}_{nn}\delta u_{0n} + \hat{N}_{ns}\delta u_{0s} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial\delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial\delta w_0}{\partial s} + \hat{Q}_n\delta w_0 \right) ds \right. \\ \left. + \oint_{\Gamma} \left[-I_1(\ddot{u}_0n_x + \ddot{v}_0n_y) + I_2 \left(\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x} n_x + \frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y} n_y \right) \right] \delta w_0 ds \right\} dt \quad (39) \end{aligned}$$

Isolando-se os deslocamentos virtuais δu_0 , δv_0 , δw_0 desenvolve-se (40), em que $\mathcal{N}(w_0)$ e $\mathcal{P}(w_0)$ são contrações apresentadas em (41) e (42), respectivamente.

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[- \left(N_{xx,x} + N_{xy,y} - I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right) \delta u_0 \right. \right. \\
- \left(N_{xy,x} + N_{yy,y} - I_0 \ddot{v}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \right) \delta v_0 \\
- \left(M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + \mathcal{N}(w_0) + q - I_0 \ddot{w}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \right. \\
- \left. I_1 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 \Big] dx dy \\
+ \oint_{\Gamma} \left[(N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) \delta u_0 + (N_{xy} n_x + N_{yy} n_y) \delta v_0 \right. \\
+ \left(M_{xx,x} n_x + M_{xy,y} n_x + M_{yy,y} n_y + M_{xy,x} n_y + \mathcal{P}(w_0) - I_1 \ddot{u}_0 n_x \right. \\
- \left. I_1 \ddot{v}_0 n_y + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} n_y \right) \delta w_0 \\
- \left. (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right] ds \\
- \oint_{\Gamma_\sigma} \left(\hat{N}_{nn} \delta u_{0n} + \hat{N}_{ns} \delta u_{0s} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} \right. \\
\left. + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) ds \Big\} dt
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\mathcal{N}(w_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \tag{41}$$

$$\mathcal{P}(w_0) = \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \tag{42}$$

Dessarte, estabelecendo os deslocamentos virtuais (δu_0 , δv_0 e δw_0) sobre Ω_0 (configuração indeformada) como zero separadamente em (40), obtém-se (43), (44) e (45).

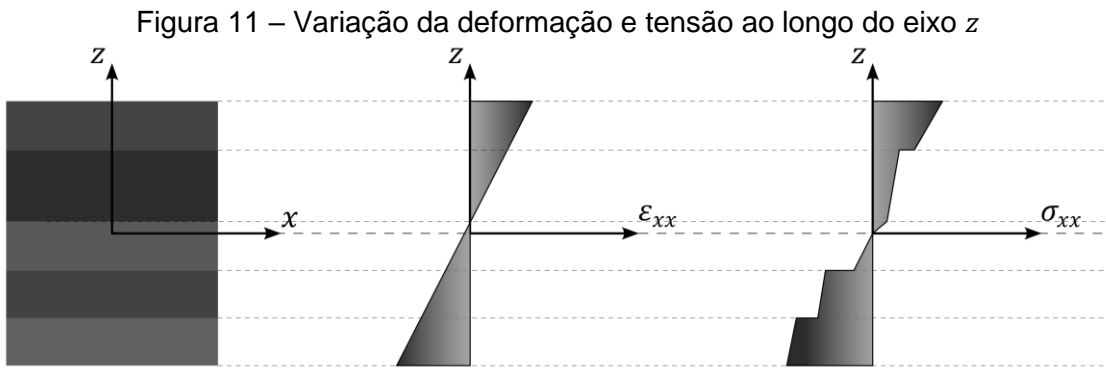
$$\delta u_0: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \tag{43}$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \delta w_0: \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \mathcal{N}(w_0) + q \\ = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

2.3.4 Equações constitutivas do laminado

Considerando o material ortotrópico, submetido as leis de Hooke e sabendo-se que as tensões não são contínuas na espessura do laminado (Figura 11), por meio das tensões globais (27) advindas das equações constitutivas da lâmina (seção 2.3.2) e os esforços normais (33) e de momentos (34) do laminado oriundos das equações de movimento (seção 2.3.3), pode-se obter os esforços (46) e (47) em termos das deformações.



Fonte: O próprio autor, 2023.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \right\} dz \quad (46)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \right\} z dz \quad (47)$$

Por conseguinte, com as multiplicações escalares de z pela matriz de rigidez reduzida e as integrações em (46) e (47), surgem três matrizes de rigidez: extensional (**A**), acoplamento entre flexão e extensão (**B**) e à flexão (**D**), em que seus componentes são apresentados, respectivamente, em (48), (49) e (50).

$$A_{ij} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \quad (48)$$

$$B_{ij} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k z = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \quad (49)$$

$$D_{ij} = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k z^2 = \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \quad (50)$$

Dessa forma, os esforços normais e momentos explicitados em função de tais matrizes podem ser observados em (51) e (52), respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Tendo em vista as relações diferenciais entre deslocamentos e deformações (16) e (17), os esforços podem ser escritos em relação aos deslocamentos como visualizado em (53) e (54).

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{54}$$

Com a substituição dos esforços, (53) e (54), nas equações de movimento (43, 44 e 45) e considerando lâminas homogêneas (os componentes de **A**, **B** e **D** constantes para todo laminado, determinam-se as equações (55), (56) e (57).

$$\begin{aligned}
&A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
&\quad + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\
&\quad - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
&\quad + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
&\quad + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
&\quad - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\
& - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& + A_{26} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \\
& + B_{12} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + B_{16} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \\
& + 2B_{16} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + 2B_{26} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& + B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
& - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& + B_{22} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\
& + B_{26} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\
& - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + \mathcal{N}(w_0) + q \\
& = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{57}$$

Dado um laminado simétrico, em relação à superfície referencial, devido à inexistência do acoplamento entre a extensão (tração ou compressão) e a flexão

(ausência de influência da deformação de extensão na deformação de flexão ou vice-versa), a matriz \mathbf{B} é igual a 0 (Mendonça, 2019). Desse modo, com tal consideração e expansão do termo $\mathcal{N}(w_0)$, a equação (57) é simplificada a (58).

$$\begin{aligned}
& -D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
& \quad - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + q \\
& \quad = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{58}$$

Além disso, caso houver apenas carregamentos transversais (exclusão das forças no plano) e a ausência de influência da deformação de torção na deformação de flexão ou vice-versa (D_{16} e D_{26} se igualam a zero), a equação (58) é simplificada para (59).

$$-\left[D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right] + q = 0 \tag{59}$$

Analogamente, com tais considerações, as relações entre os momentos e o deslocamento (54) são reduzidas a (60).

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \tag{60}$$

Dessa forma, a equação governante que descreve a deflexão (w) da flexão estática de uma placa laminada, especificamente ortotrópica, apenas com cargas transversais e desconsiderando-se os efeitos térmicos, é apresentada, por exemplo, por Reddy (2004) em (61). A solução de tal equação diferencial apenas é determinada com o estabelecimento das condições de contorno da placa (Mendonça, 2019; Reddy, 2004).

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (61)$$

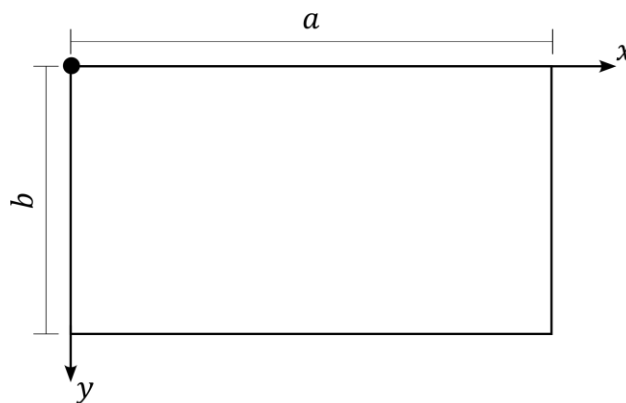
2.4 MÉTODO DE NAVIER

O Método de Navier se apresenta como uma solução analítica à equação diferencial (61) e, portanto, resulta em uma função do deslocamento transversal da placa laminada. Como já mencionado, na seção 2.3.4, para obter uma solução para a equação (61) é necessário definir as condições de contorno da placa, por conseguinte, o Método de Navier considera a placa laminada com todos os bordos apoiados (62).

$$\begin{aligned} w(0, y) &= 0 \\ w(x, 0) &= 0 \\ w(a, y) &= 0 \\ w(x, b) &= 0 \\ M_{xx}(0, y) &= 0 \\ M_{xx}(a, y) &= 0 \\ M_{yy}(x, 0) &= 0 \\ M_{yy}(x, b) &= 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Além disso, observa-se (Figura 12) que a origem definida pelo Método de Navier é no vértice superior esquerdo da placa laminada, em que a é a dimensão da placa laminada na direção x e b a dimensão na direção y (Mendonça, 2019; Reddy, 2004).

Figura 12 – Convenção dos eixos no Método de Navier



Fonte: O próprio autor, 2023.

Com isso, a função da deflexão transversal para o problema de flexão de placas laminadas com os quatros bordos apoiados é apresentada, por exemplo, por Mendonça (2019) na equação (63). Convém destacar que a função (63) é uma possível solução da equação diferencial parcial (61) e, neste caso, a particularidade do Método de Navier é a expansão do w em duplo somatório trigonométrico (Mendonça, 2019; Reddy, 2004).

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (63)$$

Em que, as contrações dos senos são $\alpha = m\pi/a$ e $\beta = n\pi/b$; e os coeficientes q_{mn} e d_{mn} são relacionados à carga sobre a placa laminada (64) e a rigidez do conjunto de camadas da placa (65), respectivamente.

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin(\alpha x) \sin(\beta y) dx dy \quad (64)$$

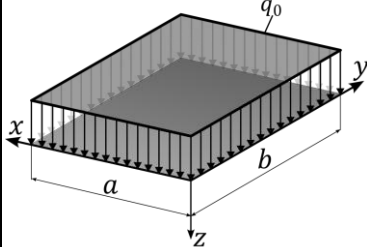
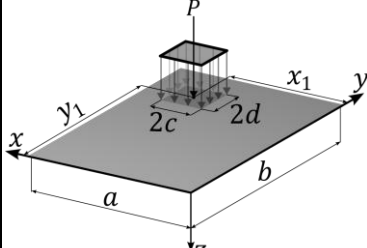
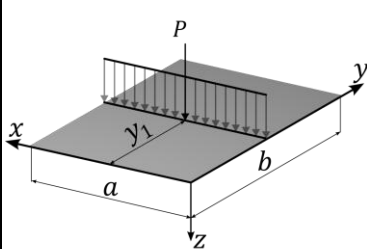
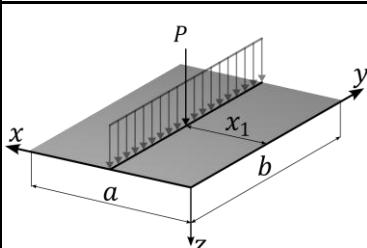
$$d_{mn} = \frac{\pi^4}{b^4} [D_{11}m^4s^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2s^2 + D_{22}n^4] \quad (65)$$

Das equações (64) e (65), $q(x, y)$ é a função da carga sobre a placa laminada e s é a relação da dimensão da placa na direção y pela dimensão da placa na direção x ($s = b/a$). Nesse sentido, cada carga é denotada por uma função $q(x, y)$ e um coeficiente de carga q_{mn} , por consequência, uma específica função do deslocamento. Com isso, no Quadro 1, observa-se alguns tipos de carga e suas referentes funções e coeficientes.

Além disso, as condições de contorno do Método de Navier (placa quadriapoiada), estabelecidas em (62), são reguladas por meio dos senos presentes nas séries duplas trigonométricas. Por conseguinte, os senos são nulos quando x ou y assumem o valor 0 ou, respectivamente, o valor de a (dimensão da laje paralela a x) e b (dimensão da laje paralela a y). Desta última ocasião, sabendo-se que m e n assumem valores inteiros (Quadro 1), os termos $\sin(m\pi)$ e $\sin(n\pi)$ são iguais 0 para qualquer valor inteiro de m e n , respectivamente, conforme explicitado em (66).

$$\begin{aligned} \sin(\alpha x) &= \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \xrightarrow{x=a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}a\right) = \sin(m\pi) = 0 \\ \sin(\beta y) &= \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \xrightarrow{y=b} \sin\left(\frac{n\pi}{b}b\right) = \sin(n\pi) = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

Quadro 1 – Tipos de cargas, funções e coeficientes

Tipo de carga	Função	q_{mn}
	$q(x, y) = q_0$	$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$ $m, n = 1, 3, 5 \dots$ (ímpares) q_0 é a carga distribuída
	$q(x, y) = \frac{P}{4cd}$	$q_{mn} = \frac{4P}{\pi^2 mn cd} \sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{n\pi y_1}{b} \sin\frac{m\pi c}{a} \sin\frac{n\pi d}{b}$ $m, n = 1, 2, 3 \dots$ P é a carga concentrada equivalente $2c$ e $2d$ são as dimensões da carga retangular
	$q(x, y) = \frac{P}{a}$	$q_{mn} = \frac{8q_0}{\pi mb} \sin\left(\frac{m\pi y_1}{a}\right) * \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)$ $m = 1, 2, 3 \dots$ e $n = 1, 3, 5 \dots$ P é a carga concentrada equivalente y_1 é a distância da carga em relação à origem no eixo y
	$q(x, y) = \frac{P}{b}$	$q_{mn} = \frac{8q_0}{\pi na} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) * \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $m = 1, 3, 5 \dots$ e $n = 1, 2, 3 \dots$ P é a carga concentrada equivalente x_1 é a distância da carga em relação à origem no eixo x

Fonte: O próprio autor, 2024.

Uma vez obtida a função do deslocamento (63), dadas as relações diferenciais parciais (60), advindas das equações constitutivas do laminado, podem ser deduzidas as funções analíticas dos momentos fletores nas direções x (67) e y (68) e o momento torçor no plano xy (69).

$$M_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (D_{11}\alpha^2 + D_{12}\beta^2) \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (67)$$

$$M_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (D_{12}\alpha^2 + D_{22}\beta^2) \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (68)$$

$$M_{xy} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha\beta D_{66} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \quad (69)$$

Analogamente, dadas as relações diferenciais entre as tensões globais e os deslocamentos (27) provenientes das equações constitutivas da lâmina e considerando-se apenas deformações devido a flexão, obtém-se as tensões globais na direção x (70), y (71) e no plano xy (72).

$$\sigma_{xx}^{(k)} = z \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \left(\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha^2 + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \right) \quad (70)$$

$$\sigma_{yy}^{(k)} = z \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha^2 + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta^2 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \right) \quad (71)$$

$$\sigma_{xy}^{(k)} = z \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \left(-2\bar{Q}_{66}^{(k)} \alpha\beta \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \right) \quad (72)$$

As tensões transversais (σ_{xz} , σ_{yz} e σ_{zz}) são nulas quando calculadas as equações constitutivas na Teoria Clássica da Placa Laminada. Entretanto, de acordo com Mendonça (2019) e Reddy (2004), por meio de equações de equilíbrio tridimensionais, pode-se obter uma aproximação da tensão transversal no plano xz (73), yz (74) e na direção zz (75).

$$\sigma_{xz}^{(k)} = -\mathcal{X}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{12}^{(k)} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) + \sigma_{xz}^{(k-1)}(x, y, z_k) \quad (73)$$

$$\sigma_{yz}^{(k)} = -\mathcal{Y}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{13}^{(k)} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) + \sigma_{yz}^{(k-1)}(x, y, z_k) \quad (74)$$

$$\sigma_{zz}^{(k)} = -Z(z) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{33}^{(k)} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \sigma_{zz}^{(k-1)}(x, y, z_k) + (z - z_k) \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial y} \right)_{z_k} \quad (75)$$

Em que, as contrações $\mathcal{X}(z)$, $\mathcal{Y}(z)$, $\mathcal{Z}(z)$, $T_{12}^{(k)}$, $T_{13}^{(k)}$ e $T_{33}^{(k)}$ são expressas em (76), (77), (78), (79), (80) e (81), respectivamente.

$$\mathcal{X}(z) = \frac{z^2 - z_k^2}{2} \quad (76)$$

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{z^2 - z_k^2}{2} \quad (77)$$

$$\mathcal{Z}(z) = \left[\frac{z_k^3}{3} + \frac{z_k}{6} (z^2 - 3z_k^2) \right] \quad (78)$$

$$T_{12}^{(k)} = \alpha^3 \bar{Q}_{11}^{(k)} + \alpha \beta^2 (2\bar{Q}_{66}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)}) \quad (79)$$

$$T_{13}^{(k)} = \beta^3 \bar{Q}_{22}^{(k)} + \alpha^2 \beta (2\bar{Q}_{66}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)}) \quad (80)$$

$$T_{33}^{(k)} = \alpha^4 \bar{Q}_{11}^{(k)} + 2\alpha^2 \beta^2 (2\bar{Q}_{66}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)}) + \beta^4 \bar{Q}_{22}^{(k)} \quad (81)$$

No entanto, Reddy (2004) ressalta que embora tais tensões possam ser pós calculadas a partir de equações de elasticidade 3-D, elas não são sempre precisas, principalmente, para placas mais espessas.

2.5 CRITÉRIOS DE FALHA DE LAMINADOS

A falha de uma estrutura é alcançada quando ela não é mais capaz de atender sua função. Desse modo, critérios de falha são formulados para oferecer uma compreensão dos impactos do carregamento sobre a estrutura, identificando o momento em que uma falha local ou global possa ocorrer. Nesse contexto, a avaliação da integridade estrutural se torna crucial para garantir a segurança e a eficácia das estruturas em operação (Mendonça, 2019).

Os critérios de falha apresentados neste item se restringem ao estado plano de tensões, por conseguinte, são constituídos pelas seguintes tensões e resistências (tensões limites):

- σ_1 e σ_2 são as tensões locais aplicadas, respectivamente, nas direções longitudinal e transversal da fibra;
- σ_{12} é a tensão de cisalhamento no plano da lâmina;
- X_C e Y_C são as resistências de compressão da lâmina, respectivamente, nas direções longitudinal e transversal da fibra;
- X_T e Y_T são as resistências de tração da lâmina, respectivamente, nas direções longitudinal e transversal da fibra;
- S_{12} é a resistência de cisalhamento da lâmina.

2.5.1 Tensão máxima

O critério da máxima tensão consiste em cinco verificações fundamentais com o intuito de analisar se as tensões aplicadas nas direções principais são maiores que as resistências nas respectivas direções. Dessa forma, o critério indica a falha do laminado se uma destas verificações não for atendida. Além disso, são denominados três modos de falha: o modo de falha 1 é caracterizado pela ruptura da lâmina, o modo de falha 2 é definido pela ruptura da matriz e separação das lâminas e o modo de falha 3 quando a tensão cisalhante exceder a resistência e houver a falha na matriz. Por conseguinte, conforme visualizado no Quadro 2, os modos de falha são associados as desigualdades das verificações (Mendonça, 2019).

Quadro 2 – Falhas e modos de falha da teoria da tensão máxima

Falha		Modo de falha
Falha em tração	$\sigma_1 < X_T$	Modo de falha 1
	$\sigma_2 < Y_T$	Modo de falha 2
Falha em compressão	$\sigma_1 > -X_C$	Modo de falha 1
	$\sigma_2 > -Y_C$	Modo de falha 2
Falha em cisalhamento	$ \sigma_{12} < S_{12}$	Modo de falha 3

Fonte: Adaptado de Mendonça (2019).

Portanto, pela teoria da tensão máxima, as verificações (82) devem ser atendidas para o laminado não apresentar nenhuma falha.

$$\sigma_1 \geq X_T \text{ e } \sigma_1 \leq -X_C \text{ e } \sigma_2 \geq Y_T \text{ e } \sigma_2 \leq -Y_C \text{ e } |\sigma_{12}| \geq S_{12} \quad (82)$$

2.5.2 Critério de Tsai-Hill

O critério de Tsai-Hill (83) trata-se de uma adaptação do critério de Hill, de modo a simplificar a verificação para o estado plano de tensões para materiais ortotrópicos transversalmente isotrópicos. Uma vez que expressão à esquerda da igualdade for menor que 1, pelo critério de Tsai-Hill, o laminado não apresentará falha (Mendonça, 2019).

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1 \quad (83)$$

Ressalta-se que, neste critério, há a obrigatoriedade de escolher entre as resistências de compressão e tração nas duas direções (X_T ou X_C e Y_T ou Y_C) conforme as tensões locais (σ_1 e σ_2). Portanto, as tensões locais denotam qual resistência a ser utilizada, por exemplo, caso $\sigma_1 > 0$ (tração) a resistência do denominador do seu termo será X_T (Mendonça, 2019). Seguindo-se tal premissa, a igualdade (83) é expandida em quatro verificações: (84), (85), (86) e (87).

$$\frac{\sigma_1^2}{X_T^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_T^2} = 1 - \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2, \text{ se } \sigma_1, \sigma_2 > 0 \quad (84)$$

$$\frac{\sigma_1^2}{X_C^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_C^2} = 1 - \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2, \text{ se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0 \quad (85)$$

$$\frac{\sigma_1^2}{X_C^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_C^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_C^2} = 1 - \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2, \text{ se } \sigma_1, \sigma_2 < 0 \quad (86)$$

$$\frac{\sigma_1^2}{X_T^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_C^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_T^2} = 1 - \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2, \text{ se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0 \quad (87)$$

2.5.3 Critério de Hoffman

O critério de Hoffman pode ser interpretado como uma extensão do critério de Hill, em que termos lineares são adicionados para aprimorar a análise, ou como uma

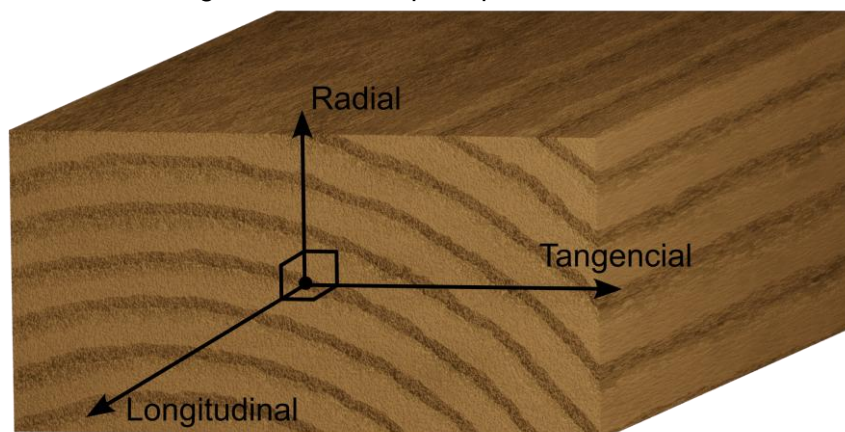
simplificação do critério de Tsai-Wu. Em contraste com o critério de Tsai-Hill, o critério de Hoffman distingue claramente entre a resistência à tração e à compressão em uma direção específica. Quando se trata do estado plano de tensões, a formulação de Hoffman é definida por (88). Por meio dela, nota-se que caso o valor a esquerda da expressão seja menor do que 1, a placa laminada não apresentará falha (Mendonça, 2019).

$$\frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_T X_C} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \frac{X_C - X_T}{X_T X_C} \sigma_1 + \frac{Y_C - Y_T}{Y_T Y_C} \sigma_2 = 1 \quad (88)$$

2.6 PROPRIEDADES MECÂNICAS DA MADEIRA

A madeira trata-se de um material complexo anisotrópico com distintas propriedades. Entretanto, no âmbito da Engenharia (análise macroscópica), tornar-se comum a consideração da madeira como material ortotrópico de modo a simplificar a obtenção de suas propriedades e seu comportamento. Dessa forma, admite-se que a madeira apresenta propriedades distintas em apenas três direções perpendiculares (longitudinal, tangencial e radial), como observado na Figura 13 (Mascia; Lahr, 2006).

Figura 13 – Eixos principais da madeira



Fonte: O próprio autor, 2023.

Nesse sentido, quando a madeira é admitida como material ortotrópico, são necessárias 12 propriedades para simular seu comportamento elástico:

- Módulo de elasticidade longitudinal (E_L);
- Módulo de elasticidade radial (E_R);
- Módulo de elasticidade tangencial (E_T);

- Módulo cortante no plano longitudinal-radial (G_{LR});
- Módulo cortante no plano longitudinal-tangencial (G_{LT});
- Módulo cortante no plano radial-tangencial (G_{RT});
- Coeficiente de Poisson no plano longitudinal-radial (ν_{LR});
- Coeficiente de Poisson no plano radial-longitudinal (ν_{RL});
- Coeficiente de Poisson no plano longitudinal-tangencial (ν_{LT});
- Coeficiente de Poisson no plano tangencial-longitudinal (ν_{TL});
- Coeficiente de Poisson no plano radial-tangencial (ν_{RT}) e
- Coeficiente de Poisson no plano tangencial-radial (ν_{TR}).

No entanto, comumente é adotada a igualdade dos coeficientes de Poisson em mesmo plano, por exemplo, $\nu_{LT} = \nu_{TL}$. Tal adoção facilita a simulação do comportamento da madeira, uma vez que a quantidade de propriedades necessárias decai para 9 (Figura 14). Convém destacar que a disposição dos eixos principais (longitudinal, transversal e radial) da madeira como material constituinte em compósitos, comumente, é a seguinte: o eixo longitudinal é adotado como o eixo 1, tangencial como eixo 2 e o radial com eixo 3. Em que, os eixos 1, 2 e 3 são definidos nas seções anteriores (2.2 e 2.3).

Figura 14 – Matriz de propriedades elásticas da madeira

$$\begin{bmatrix} E_L & G_{LR} & \nu_{LR} = \nu_{RL} \\ E_R & G_{LT} & \nu_{LT} = \nu_{TL} \\ E_T & G_{RT} & \nu_{RT} = \nu_{TR} \end{bmatrix}$$

Fonte: O próprio autor, 2023.

Contudo, apesar dos documentos normativos apresentarem rotinas de ensaios para a descoberta de algumas propriedades da madeira, tratando-a como ortotrópica, a descoberta de todas as 9 propriedades é uma árdua tarefa, especialmente porque não há ensaios para a determinação de todas as propriedades da madeira.

Consequentemente, os documentos normativos, como a EN 338 (European Committee for Standardization, 2004a) e a NBR 7190 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2022), apresentam relações entre propriedades da madeira (Quadro 3) a fim de obter a partir do módulo de elasticidade longitudinal (E_L ou E_0), por exemplo, o módulo de elasticidade transversal (E_{90}) e o módulo de elasticidade cortante (G).

Quadro 3 – Equações para determinação de propriedades da madeira

Propriedade	CEN (2004)		ABNT (2022)
	Coníferas	Folhosas	Coníferas e Folhosas
Módulo de elasticidade transversal	$E_{90} = \frac{E_0}{30}$	$E_{90} = \frac{E_0}{15}$	$E_{c90} = \frac{E_{c90}}{20}$
Módulo Cortante	$G = \frac{E_0}{16}$		$G = \frac{E_0}{16}$

Fonte: Adaptado de CEN (2004a) e ABNT (2022).

Em conformidade, artigos científicos e livros estabelecem correlações entre as propriedades da madeira, visando facilitar as suas descobertas. Com isso, Kretscann (2010) expõem relações entre o E_L e os demais módulos (E_T , E_R , G_{LR} , G_{LT} e G_{RT}), bem como os coeficientes de Poisson (ν_{LR} , ν_{LT} , ν_{RT} , ν_{TR}) para diferentes espécies de pinus, conforme observado na Tabela 1.

Tabela 1 – Relações entre propriedades para diversas espécies

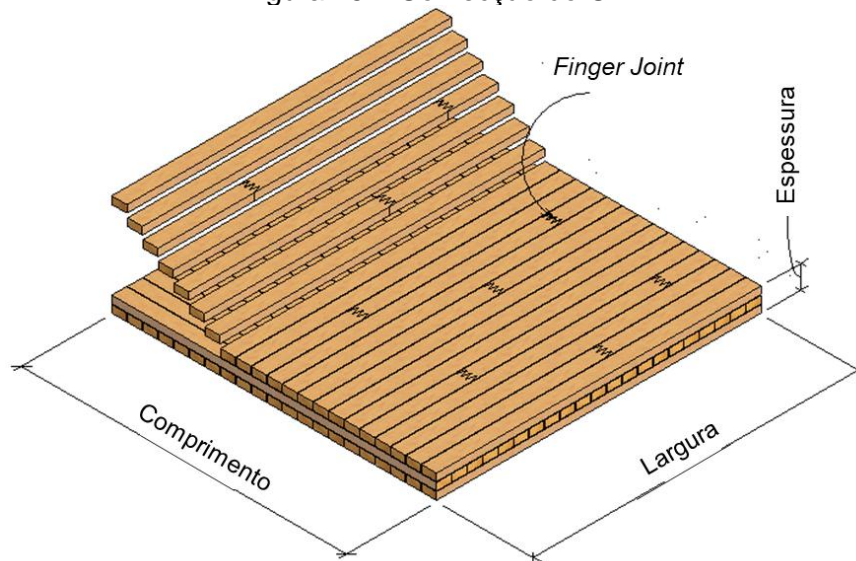
Espécies	$\frac{E_T}{E_L}$	$\frac{E_R}{E_L}$	$\frac{G_{LR}}{E_L}$	$\frac{G_{LT}}{E_L}$	$\frac{G_{RT}}{E_L}$	ν_{LR}	ν_{LT}	ν_{RT}	ν_{TR}
<i>Pinus taeda</i>	0,078	0,113	0,082	0,081	0,013	0,328	0,292	0,382	0,362
<i>Pinus contorta</i>	0,068	0,102	0,049	0,046	0,005	0,316	0,347	0,469	0,381
<i>Pinus palustris</i>	0,055	0,102	0,071	0,06	0,012	0,332	0,365	0,384	0,342
<i>Pinus serotina</i>	0,041	0,071	0,05	0,045	0,009	0,28	0,364	0,389	0,32
<i>Pinus ponderosa</i>	0,083	0,122	0,138	0,115	0,017	0,337	0,4	0,426	0,359
<i>Pinus resinosa</i>	0,044	0,088	0,096	0,081	0,011	0,347	0,315	0,408	0,308
<i>Pinus elliotii</i>	0,045	0,074	0,055	0,053	0,01	0,392	0,444	0,447	0,387
<i>Pinus lambertiana</i>	0,087	0,131	0,124	0,113	0,019	0,356	0,349	0,428	0,358
<i>Pinus monticola</i>	0,038	0,078	0,052	0,048	0,005	0,329	0,344	0,41	0,334

Fonte: Adaptado de Kretschmann (2010).

2.7 CROSS LAMINATED TIMBER

O *Cross Laminated Timber* (CLT) ou, em português, Madeira Lamelada Colada Cruzada (MLCC), trata-se de um painel compósito com duas dimensões (comprimento e largura) muito maiores do que a terceira (espessura), constituído na maioria das vezes por um número ímpar de camadas. Dessa forma, as camadas de CLT, confeccionadas com lamelas de madeira (Figura 15), ora são orientadas na direção longitudinal da peça (maior dimensão) ora na direção transversal, até se alcançar a espessura pretendida. Além disso, caso seja necessário utilizar mais de uma lamela de madeira no intuito de completar o comprimento, a união entre as lamelas é realizada por meio de *finger joint* (técnica de entrelaçamento da madeira) (Sciomenta *et al.*, 2021; Vallely; Schoenwald, 2023).

Figura 15 – Confeção do CLT



Fonte: O próprio autor, 2023.

Com isso, o CLT pode ser empregado tanto como piso estrutural, a fim de resistir preferencialmente às cargas verticais perpendicularmente ao plano, bem como parede para resistir cargas no plano (Figura 16). Quando utilizado como piso estrutural (Figura 16.a) as camadas externas são orientadas no sentido longitudinal da peça, enquanto quando utilizada como parede (Figura 16.b) as camadas externas são orientadas no sentido transversal da peça. Além disso, tendo em vista que uma placa está sujeita a “infinitas” linhas de flexão, a sua configuração (com camadas cruzadas) tem intuito de obter um compósito com resistência significativa à flexão em duas principais direções (longitudinal e transversal).

Figura 16 – Aplicações do CLT



(a) Piso

(b) Parede

Fonte: O próprio autor, 2023.

As principais implicações para utilização deste produto industrializado são o custo inicial e questões de compatibilidade com os códigos de construção, as quais

podem variar de acordo com a região e disponibilidade do material Mallo e Espinoza (2016). No entanto, de acordo com uma RBS global, a construção de edificações de MLCC quando comparada às construções de concreto armado e aço, geralmente apresenta um custo de material similar ao de concreto armado e aço, mas com menor custo de fundação e menor custo de mão de obra total devido a maior velocidade de construção (Abed *et al.*, 2022).

Nesse sentido, tendo em vista as aplicações do CLT como parede e piso estrutural, pequenas edificações podem ser construídas apenas com painéis de CLT. Quando se trata de edifícios de grande porte, o CLT e a Madeira Lamelada Colada (MLC) podem ser os principais elementos estruturais na construção de altos edifícios de madeira. Por conseguinte, como observado no Quadro 4, diversos países estão na corrida pela construção do maior edifício de madeira do mundo. Tal corrida não apenas destaca a viabilidade da madeira na construção de grandes estruturas, mas também reforça a importância da sustentabilidade na construção civil.

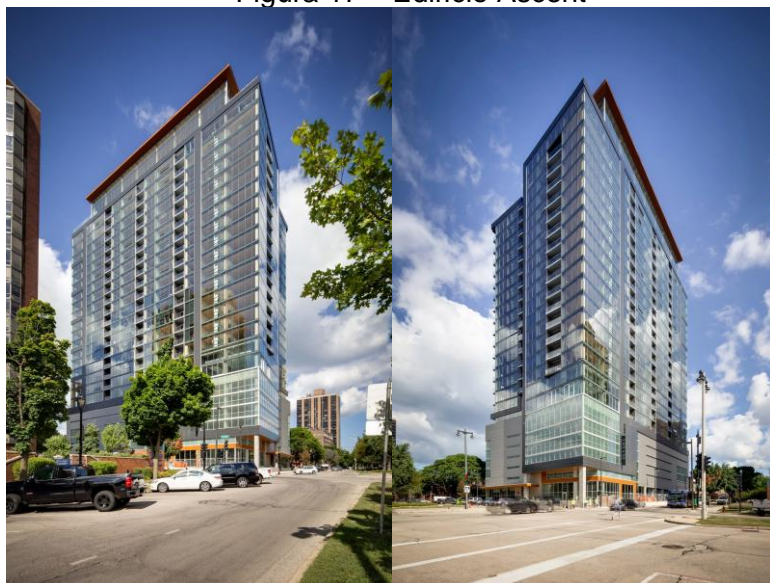
Quadro 4 – Maiores edifícios de madeira do mundo

Nome	Cidade (País)	Altura (m)	Ano de término da construção
Ascent	Milwaukee (EUA)	86,6	2022
Mjøstårnet	Brumunddal (Noruega)	85,4	2019
HoHo	Viena (Áustria)	84	2020
HAUT	Amsterdã (Holanda)	73	2022
Brock Commons Tallwood House	Vancouver (Canadá)	58	2017

Fonte: Adaptado de Ilgin e Karjalainen (2022).

Atualmente, Ascent (Figura 17), em Milwaukee, nos Estados Unidos da América (EUA), é o detentor do título de edifício de madeira mais alto do mundo. Sua construção começou em 2020 e foi concluída em 2022. Com 25 andares residências, o edifício tem uma altura de 86,60 m (Ilgin; Karjalainen, 2022).

Figura 17 – Edifício Ascent



Fonte: Adaptado de Carlson (2022).

No Brasil, o primeiro edifício de madeira (Figura 18) foi construído no ano de 2020 e fica localizado na Avenida Brigadeiro Faria Lima, na cidade de São Paulo. O edifício é de uso comercial e possui quatro andares que abrigam uma loja da DENGGO, uma de chocolate (Neto; Takata; Silva, 2023).

Figura 18 – O primeiro edifício de madeira do Brasil

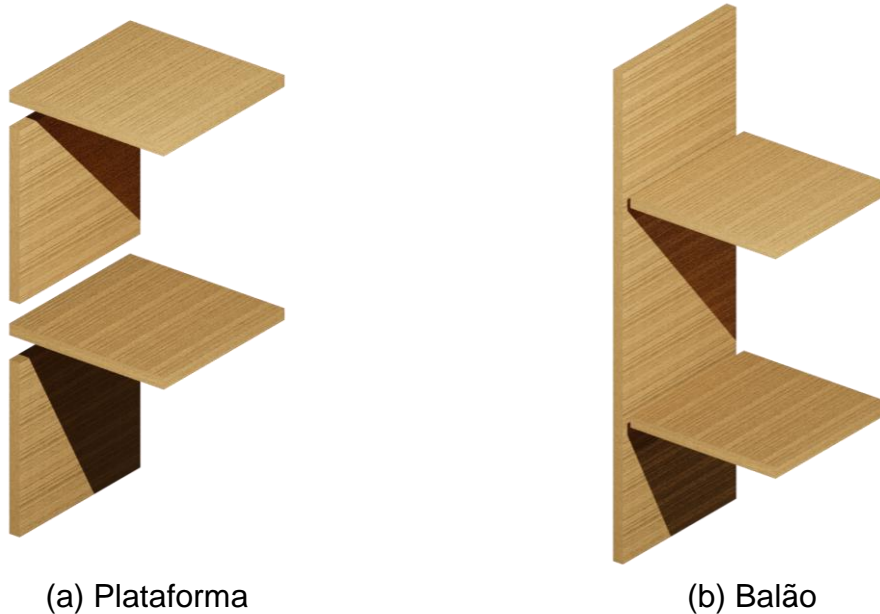


Fonte: Parente (2021).

Na construção de edifícios de CLT, dois tipos de sistema de construção podem ser utilizados: plataforma ou balão (Hayes; Koliou; van de Lindt, 2023). Na construção do tipo plataforma, o andar abaixo serve como uma “plataforma” para construção do acima. Na construção tipo balão, as paredes CLT são erguidas ao longo de toda a

altura do edifício e os pisos são fixados (suspensos) nas paredes de cada andar utilizando-se conectores metálicos *angle brackets* (Shahnewaz; Dickof; Tannert, 2021).

Figura 19 – Sistemas construtivos



(a) Plataforma

(b) Balão

Fonte: O próprio autor, 2023.

No que diz respeito ao dimensionamento, devido a rigidez das placas de CLT, há considerável preocupação com os vãos grandes que podem ocasionar excessivas deformações nas placas. Em vista disso, o dimensionamento de placas de CLT é predominantemente determinado pelo Estado Limite de Serviço (ELS), visando especialmente a deformação e a vibração das estruturas, em vez de se concentrar nos Estados Limites Últimos (ULS), que tratam de ruptura e resistência ao fogo (Silva, 2023).

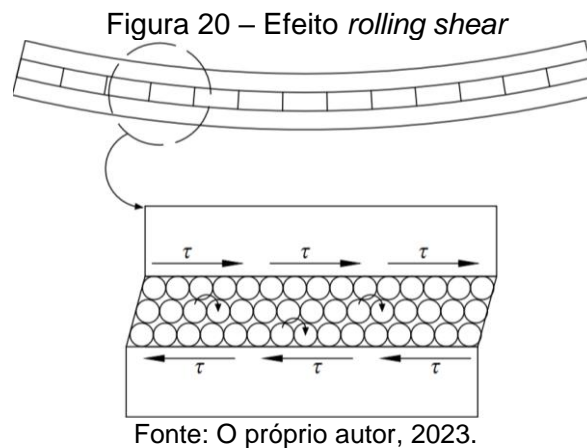
Nesse sentido, no que se refere ao Estado Limite de Serviço com foco nos deslocamentos, documentos normativos como NBR 7190 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2022) e Eurocode 5 (European Committee for Standardization, 2004b) estabelecem intervalos, por exemplo, para o admissível deslocamento instantâneo em estruturas de madeira (Tabela 2).

Tabela 2 – Critério de deslocamento instantâneo

Normativa	w_{inst}
NBR 7190 (ABNT, 2022)	$L_{ef}/300$ a $L_{ef}/500$
Eurocode 5 (CEN, 2004a)	$L_{ef}/300$ a $L_{ef}/500$

Fonte: Adaptado de ABNT (2022) e CEN (2004a).

Outra limitação do CLT está relacionada a configuração de camadas cruzadas, a qual obriga as camadas transversais deformarem apenas em função das tensões cisalhantes. Por consequência, há o rolamento das fibras das camadas transversais, fenômeno conhecido como *rolling shear* (Figura 20). A consideração do efeito *rolling shear* em placas de CLT é de extrema importância, pois os valores encontrados de módulo relacionado ao efeito em questão, são significativamente pequenos em espécies de madeiras (Heinisuo; Pajunen; Aspila, 2023).



2.8 RECURSOS PARA O DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARES WEB

No geral, o desenvolvimento de um *software* é realizado por meio de códigos criados na linguagem mais adequada à sua funcionalidade. Dessa forma, no que diz respeito as linguagens mais utilizadas para o desenvolvimento de *softwares*, uma *survey* realizada pela Stack Overflow Developer (2023), em maio de 2023, com mais de 89 mil desenvolvedores de *software* de 185 países, constata que o JavaScript se mantém como a linguagem mais utilizada pelo décimo primeiro ano consecutivo. Além disso, o HTML e CSS, em conjunto ao JS, se destacam entre as três tecnologias mais utilizadas.

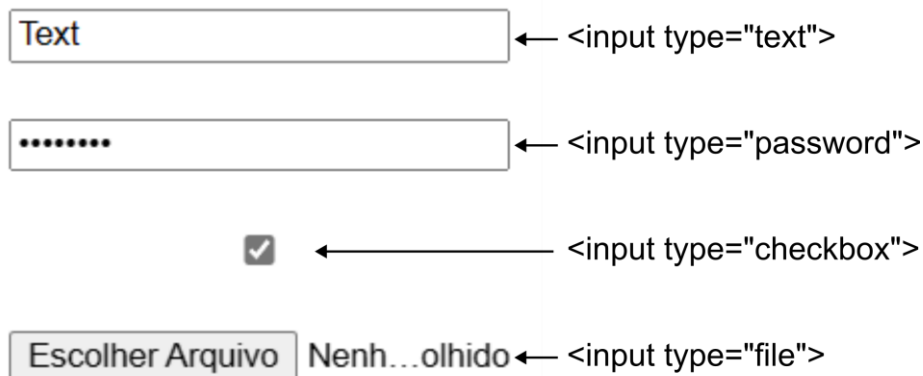
De acordo com Segurado (2017), apenas um *browser* (navegador de *internet*) é necessário para produzir o conteúdo do código HTML, tendo em vista que não exige um codificador. Com isso, o arquivo de extensão “.html” deve ser escrito por meio de *tags*, com intuito que o navegador identifique os respectivos elementos HTML. Tais *tags* podem ser agrupadas de acordo com as funcionalidades dos elementos HTML (Quadro 5).

Quadro 5 – Tags e suas funcionalidades

Tags	Funcionalidade
<html>, <head>, <body> e <div>	Estrutura da página web
<input>, <form>	Campos de entrada de dados
<title>, <h1>, <a>, e <p>	Títulos, cabeçalhos e parágrafos
<canvas>	Tela gráfica

Fonte: Adaptado de Huddleston (2008).

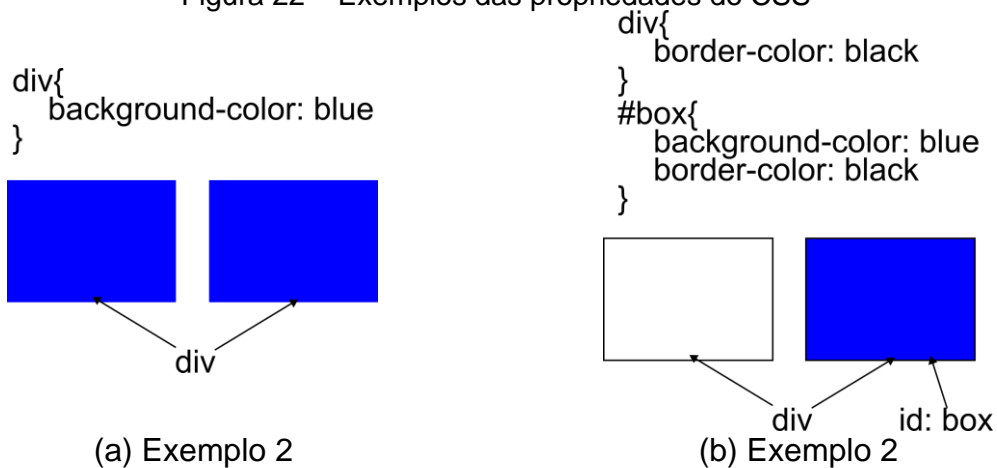
Pode-se atribuir diferentes atributos aos elementos HTML, por exemplo, para referenciá-los e alterar suas aplicabilidades. Os atributos para designar uma identificação são: “*id*” e “*class*” que oferecem ao elemento uma identificação única e uma classe (atribuída a mais de um elemento), respectivamente. Com isso, por meio das linguagens CSS e JavaScript pode-se utilizar de tais identificações para estilização ou manipulação dos elementos, respectivamente. Além do atributo de identificação, o atributo “*type*” pode-se designar a um elemento HTML uma aplicabilidade, por exemplo, um mesmo elemento “*input*” pode ter quatro diferentes aplicabilidades distintas (Figura 21).

Figura 21 – Exemplo de atributos do elemento HTML *input*

Fonte: O próprio autor, 2024.

Desse modo, tais elementos podem ter suas propriedades visuais alterada por meio do CSS. A interação entre os elementos com as propriedades visuais estabelecida é realizada por meio dos seletores, os quais podem associar propriedades visuais a um grupo de elementos (Figura 22a) ou para elementos específicos (Figura 22b). As funcionalidades das propriedades visuais básicas observadas na Figura 22 e entre outras são apresentadas no Quadro 6.

Figura 22 – Exemplos das propriedades do CSS



Fonte: O próprio autor, 2024.

Quadro 6 – Propriedades do CSS

<i>background-color</i>	Define a cor de fundo do elemento
<i>border-color</i>	Define a cor da borda do elemento
<i>font-family</i>	Altera a família da fonte
<i>font-size</i>	Modifica o tamanho da fonte
<i>text-align</i>	Possibilita o alinhamento no texto

Fonte: Adaptado de Segurado (2017).

Em contrapartida, o JavaScript é uma linguagem de programação destinada a criação de *scripts* para o desenvolvimento de funções que podem definir o comportamento dos elementos HTML. Com isso, permite uma maior interação com usuário, sendo uma linguagem *client side* (do lado do cliente), todo o seu funcionamento acontece pela máquina local do usuário e não depende do servidor onde o site está hospedado (Flatschart, 2011).

Dessa forma, análogo a outras linguagens, Segurado (2017) evidencia que no JavaScript há uma sintaxe que deve ser seguida para o funcionamento do código: as funções devem ser delimitadas por chaves (“{ }”), as instruções delimitadas por “;” e há palavras reservadas bloqueadas para somente um uso já predefinido (algumas observadas no Quadro 7).

Quadro 7 – Palavras chaves reservadas do JavaScript

Palavras chaves reservadas	Funcionalidade
<i>for, while, do</i>	<i>Loop</i> (laço de repetição)
<i>switch, case, if, else, else if</i>	Condicionais (utilizadas para verificações, por exemplo, comparação de variáveis)
<i>function, return</i>	Declaração de funções e definição de retorno de funções, respectivamente.
<i>var, let, const</i>	Declaração de variáveis (variável para todo código, variável dentro de um escopo, constante)

Fonte: Adaptado de Segurado (2017).

Adicionalmente, a capacidade de especificar o comportamento dos elementos HTML é conquistada por meio de rotinas de tratamento de evento. Tais rotinas, definidas como funções JavaScript que registramos no navegador, são invocadas quando um evento específico ocorre. Dessa maneira, alguns eventos, ocorrências detectadas pelo navegador, podem ser visualizados no Quadro 8 (Flanagan, 2013).

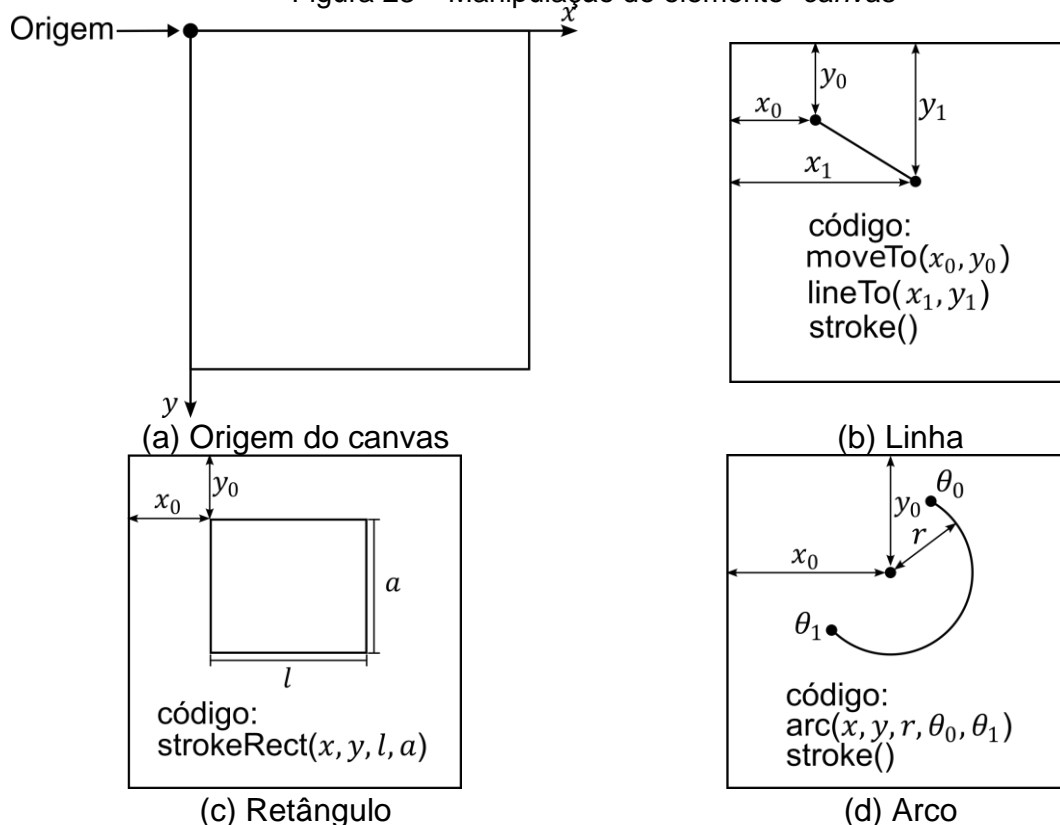
Quadro 8 – Rotinas de tratamento de evento

Evento	Chamada
" <i>keydown</i> "	Quando determinada tecla é pressionada
" <i>mousedown</i> "	Com o clique do <i>mouse</i>
" <i>mousemove</i> "	Com a movimentação do <i>mouse</i>
" <i>onfocus</i> "	Quando o respectivo elemento associado recebe o foco
" <i>onscroll</i> "	Quando o usuário utiliza o <i>scroll</i> do <i>mouse</i>

Fonte: Adaptado de Flanagan (2013).

A manipulação do elemento HTML "*canvas*" demonstra claramente tal procedimento. O "*canvas*" trata-se de uma tela gráfica em que se pode desenhar dinamicamente formas geométricas por meio de funções JavaScript, algumas destas podem ser visualizadas na Figura 23. Dessa forma, recorrendo-se a utilização dos eventos, por exemplo, "*mousemove*" e "*mousedown*" pode-se desenvolver rotinas que permitem ao usuário desenhar dinamicamente nesta tela gráfica.

Figura 23 – Manipulação do elemento "*canvas*"



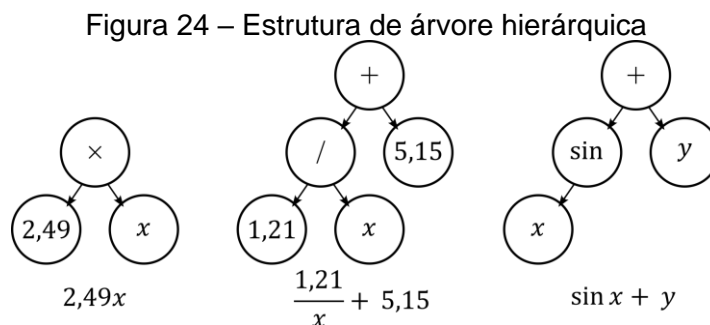
Fonte: O próprio autor, 2024.

2.9 REGRESSÃO SIMBÓLICA

Diferentemente dos métodos tradicionais, em que os parâmetros independentes são pré-definidos e tenta-se encontrar os melhores valores de coeficientes, a Regressão Simbólica é inspirada na teoria da evolução de Darwin e se utiliza de conceitos evolutivos para buscar a melhor combinação dos parâmetros independentes com os coeficientes, mutuamente, a fim de minimizar tanto o erro de previsão quanto a complexidade do modelo (Abdusalamov; Hillgärtner; Itskov, 2023; Angelis; Sofos; Karakasidis, 2023; Cranmer, 2023).

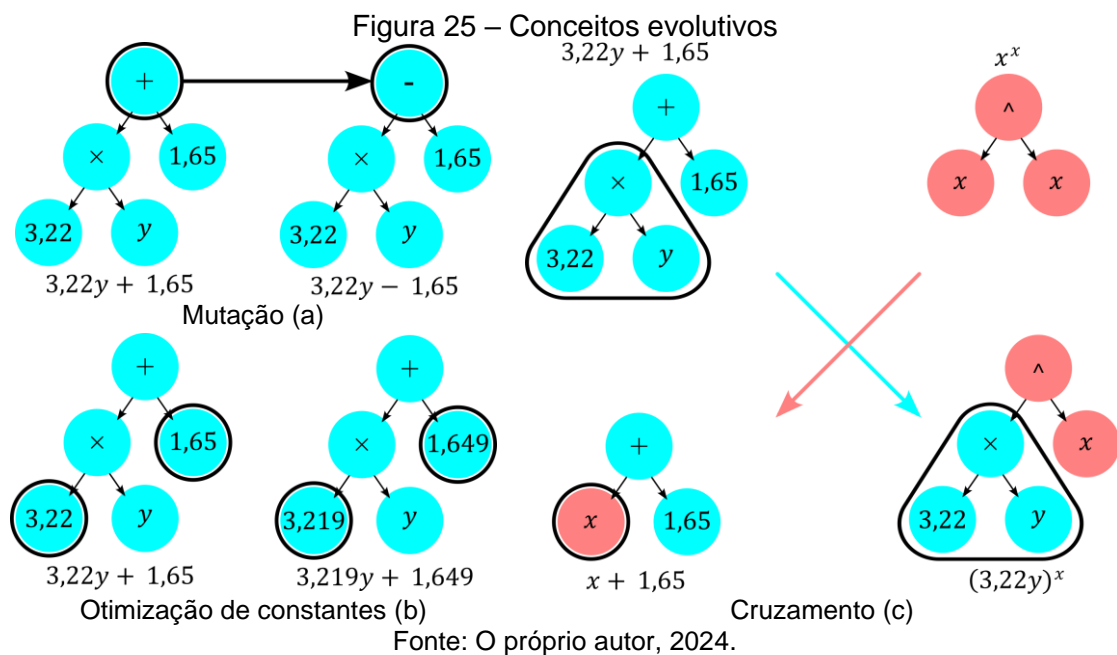
Embora as redes neurais (NN) sejam poderosas, frequentemente funcionam como “caixas-pretas”, dificultando a interpretação dos resultados e a compreensão dos processos subjacentes. Dessa forma, a falta de transparência pode gerar desconfiança na tomada de decisões. Em contrapartida, a *Symbolic Regression* (SR) oferece uma abordagem mais transparente e humanamente interpretável, gerando expressões matemáticas simbólicas e elucidando as relações subjacentes nos dados. Por conseguinte, a SR apresenta-se como uma abordagem para a descoberta de novas leis físicas e para a validação de modelos existentes, promovendo uma maior confiança e aplicabilidade em diversas áreas científicas e tecnológicas (Angelis; Sofos; Karakasidis, 2023).

A obtenção de um modelo de regressão simbólica torna-se possível apenas pela definição das variáveis independentes e dependentes, os operadores matemáticos e os parâmetros de cálculo e critério de parada a serem considerados. Os operadores matemáticos podem ser unários (funções trigonométricas, expoentes, logaritmos) ou binários (adição, subtração, multiplicação, divisão). Comumente, a fim melhor compreender o algoritmo, as equações são representadas no esquema de estrutura de árvore hierárquica (Figura 25). Nesse formato, os nós (círculos na Figura 25) representam as variáveis, constantes e as operações matemáticas.



Fonte: O próprio autor, 2024.

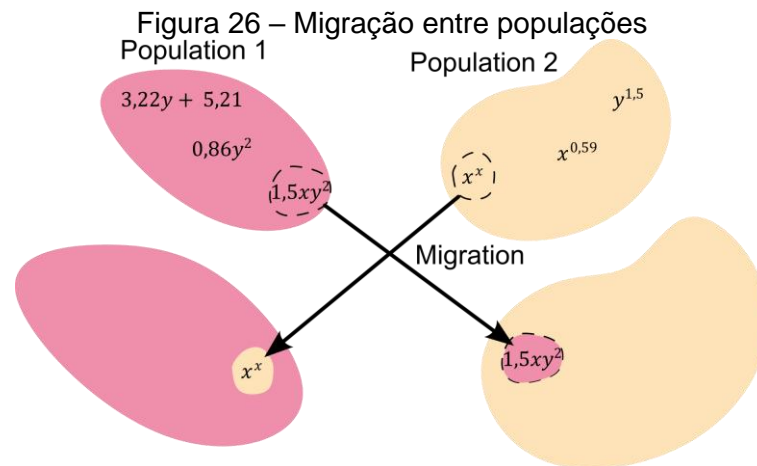
Considerando-se um algoritmo clássico de Regressão Simbólica com apenas uma população por geração, a primeira geração de equações é gerada aleatoriamente. Com isso, as equações mais aptas da primeira geração são utilizadas para a construção das equações da segunda geração, adicionando-se nós e utilizando-se de conceitos evolutivos como mutação (Figura 25a), cruzamento (Figura 25b) e otimização (Figura 25c). Nesse processo, o algoritmo continuamente identifica as equações promissoras (produzem menores erros) e descarta aquelas com baixo desempenho. Dessa maneira, torna-se intuitivo que novas gerações produzam equações com melhores desempenhos que as passadas, por conseguinte, o erro médio diminui até que, em determinado momento, o algoritmo é parado. A execução do Regressão Simbólica também pode ser terminada pela definição máxima de interações e o tempo máximo de execução (Angelis; Sofos; Karakasidis, 2023).



Dentre as diversas ferramentas e algoritmos para obtenção de um modelo de Regressão Simbólica, o PySR se destaca por ser uma biblioteca Python *opensource* de alto desempenho que busca melhorar o algoritmo tradicional de Regressão Simbólica. Conseqüentemente, a adição de novas abordagens no algoritmo clássico resulta em modelos mais precisos do que aqueles obtidos por meio das demais ferramentas de Regressão Simbólica (Cranmer, 2023).

Por se tratar de uma algoritmo multi-populacional, o PySR se caracteriza por gerar populações independentes e posteriormente realizar a migração entre elas. Na geração das populações, subamostras são selecionadas aleatoriamente e avaliadas

perante a sua precisão. Por conseguinte, aquela que apresenta melhor precisão é selecionada para reprodução por mutação, cruzamento ou otimização explícita (Figura 25). Dessa forma, várias populações evoluem independentemente e ao final de um número especificado de rodadas de evolução, a migração entre elas é realizada (Figura 26).



Fonte: O próprio autor, 2024.

2.10 CONCLUSÕES ACERCA DOS ASPECTOS FUNDAMENTAIS

Tendo em vista que o *Cross Laminated Timber* (CLT) é um compósito, a Teoria Clássica da Placa Laminada ou *Classical Laminated Plate Theory* (CLPT) pode ser utilizada no problema de flexão de placas de CLT. Com isso, um fluxograma síntese para a resolução do problema de flexão de placas laminadas é apresentado na Figura 27. Entretanto, ressalta-se que a CLPT é destinada a placas delgadas e as condições de contorno impostas pelo Método de Navier são relativas a uma placa com os quatros bordos apoiados.

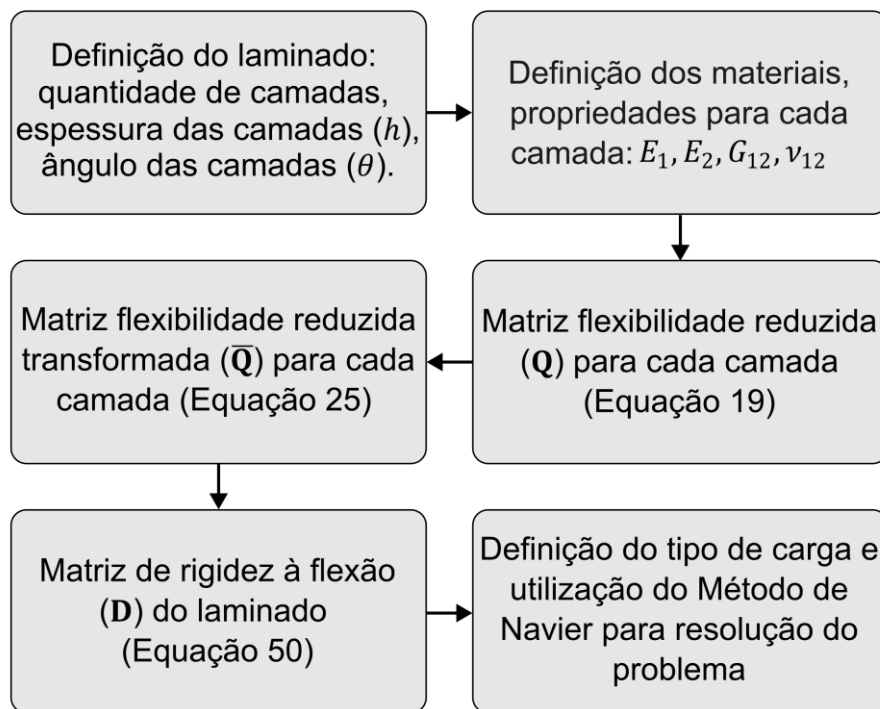
Além disso, no que diz respeito as propriedades da madeira, deve-se recorrer às relações entre as propriedades, apresentadas por documentos normativos ou em trabalhos encontradas na literatura, a fim de se obter todas as propriedades necessárias para a simulação do comportamento da madeira.

Quanto ao desenvolvimento de *softwares web*, três linguagens são principalmente utilizadas: HTML, CSS e JavaScript. As três linguagens podem ser utilizadas conjuntamente para o desenvolvimento, sendo que a primeira está relacionada a criação da interface por meio de elementos HTML, a segunda focada

na estilização e a terceira na criação de rotinas de cálculo e manipulação dos elementos HTML.

Com a evolução da computação, os algoritmos de *Symbolic Regression* são uma alternativa a metodologia tradicional. Desse modo, os algoritmos de *Symbolic Regression* permitem automatizar o processo de tradicional de tentativa e erro, a fim de explorar um número muito maior de expressões e descobrir expressões simbólicas precisas na estimativa da variável reposta.

Figura 27 – Fluxograma síntese resolução do problema de flexão de placas laminadas



Fonte: O próprio autor, 2024.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

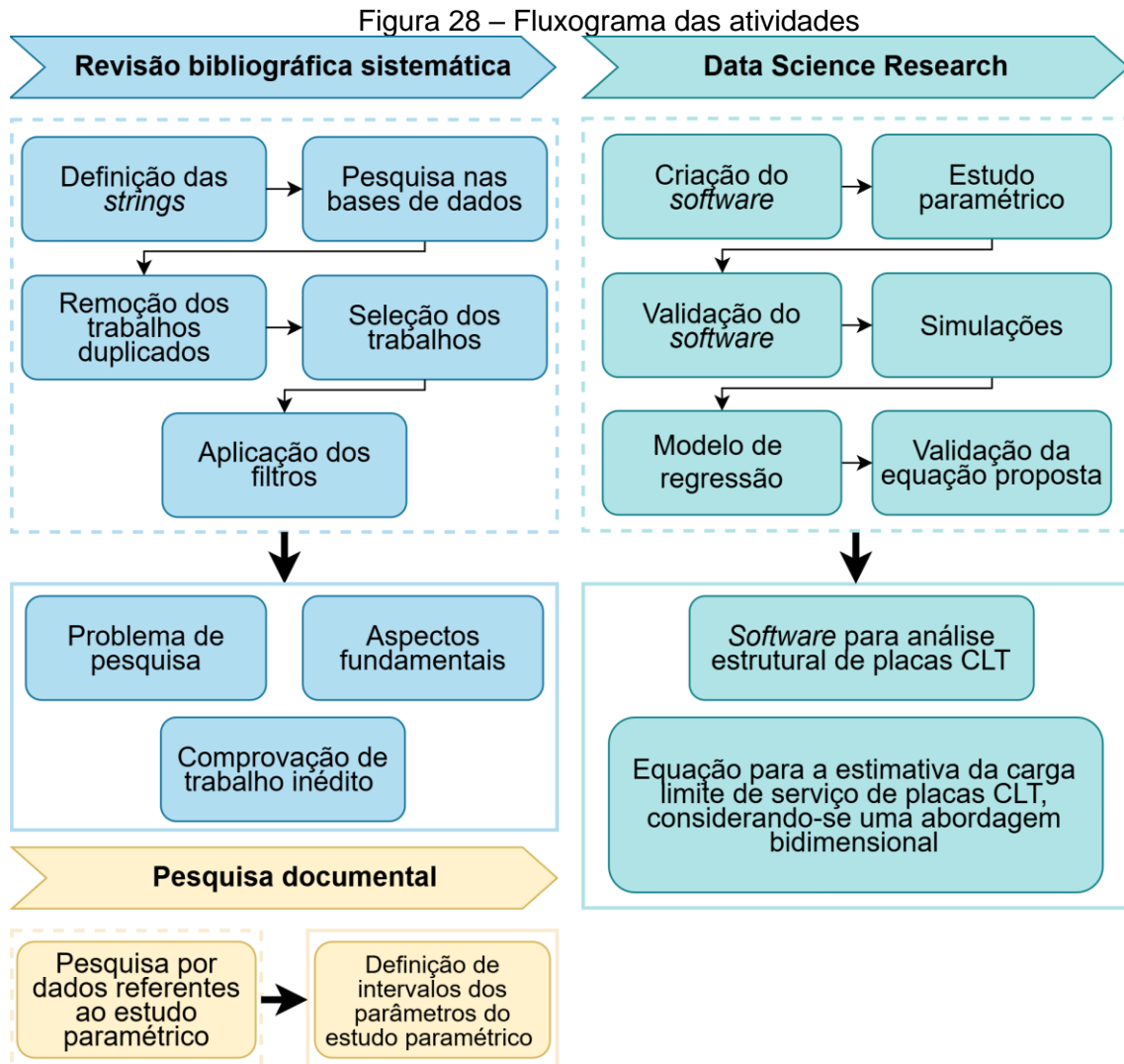
No presente capítulo são apresentadas as pesquisas adotadas para a constituição das atividades, bem como o detalhamento das etapas desenvolvidas com o foco na conquista do objetivo do trabalho em questão.

3.1 ESTRATÉGIA DE PESQUISA

A revisão bibliográfica sistemática (RBS) foi fundamental para a constituição da base teórica, a qual reflete o atual estado da arte, bem como a descoberta de trabalhos correlatos que foram utilizados como referenciais para a comprovação inédita do trabalho aqui proposto. Além disso, somada a revisão bibliográfica sistemática, a pesquisa documental permitiu a obtenção de dados referentes ao estudo paramétrico e a Data Science Research foi precursora para as atividades referentes à criação do *software*, modelagem, simulação numérica e obtenção da equação.

3.2 DETALHAMENTO DAS ETAPAS

Diante disso, o fluxograma das atividades (Figura 28) permite visualizar o fluxo adotado e o agrupamento das atividades. Entretanto, ressaltar-se que as tarefas referentes a Revisão Bibliográfica Sistemática foram desenvolvidas de forma iterativa até a conclusão do trabalho.



Fonte: O próprio autor, 2024.

3.2.1 Revisão bibliográfica sistemática

As atividades observadas no fluxograma (Figura 28), com intuito de conquistar-se a base teórica, o atual estado da arte e trabalhos correlatos referenciais, são explicitadas a seguir.

3.2.1.1 Definição das *strings* de pesquisa

No Quadro 9, pode-se observar as três *strings* (denominadas como S1, S2 e S3) utilizadas para a busca das pesquisas. As restrições de todas as *strings* foram definidas em uma primeira busca, a qual apresentou uma considerável presença de termos indesejados (Figura 48a) não correlatos com o foco da RBS em questão. A primeira *string* (S1) foi constituída para uma pesquisa mais generalizada, de modo a

pesquisar trabalhos que apresentem o uso do CLT como pisos estruturais. A segunda *string* (S2) foi utilizada para uma pesquisa com foco em trabalhos de simulação computacional de placas de CLT. Por fim, a S3 focou na busca de trabalhos que apresentam ou propuseram modelos matemáticos (modelos analíticos) para placas de CLT.

Quadro 9 – *Strings* de busca utilizadas na RBS

Código	Strings
S1	(("cross laminated timber" OR "cross-laminated timber" OR "x-lam") AND (slab OR floor OR roof)) NOT (fire OR seismic OR acoustic OR connection OR connector)
S2	(("cross laminated timber" OR "cross-laminated timber" OR "x-lam") AND ("numerical simulation" OR "numerical model" OR "numerical modelling" OR FEM) AND (slab OR floor OR roof)) NOT (fire OR seismic OR acoustic OR connection OR connector)
S3	(("cross laminated timber" OR "cross-laminated timber" OR "x-lam") AND ("mathematical model" OR "analytical model")) NOT (fire OR seismic OR acoustic OR connection OR connector)

Fonte: O próprio autor, 2023.

3.2.1.2 Pesquisa nas bases de dados

No Quadro 10, pode-se visualizar as bases de dados utilizadas na revisão bibliográfica sistemática (RBS) em questão. Tais bases de dados foram escolhidas por apresentarem ampla quantidade de trabalhos relevantes.

Quadro 10 – Bases de dados utilizadas na RBS

Nome	Site
Web of Science	https://clarivate.com/webofsciencelgroup/solutions/web-of-science/
Scopus	https://www.scopus.com/home.uri

Fonte: O próprio autor, 2023.

A pesquisa das *strings* (Quadro 9) nas bases de dados (Quadro 10) foi realizada nos principais tópicos (título, resumo e palavras-chaves) com o objetivo de proporcionar uma busca mais precisa. Adicionalmente, visando obter a maior quantidade de trabalhos possíveis, não foi aplicado nenhum tipo de filtro.

3.2.1.3 Remoção dos trabalhos duplicados

Em primeiro momento, em posse dos resultados das pesquisas das *strings*, os artigos duplicados foram removidos por meio da funcionalidade automática do

software StArt (*State of the Art Through Systematic Review*), desenvolvido pelo Laboratório de Pesquisa em Engenharia de *Software* (LaPES) da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Adiante, tendo em vista que a exportação entre as bases de dados (Scopus e Web of Science) pode ser diferente e a verificação de trabalhos duplicados do *software* StArt é realizada por meio da comparação dos caracteres dos títulos e autores, uma segunda remoção manualmente foi realizada excluindo-se os trabalhos duplicados não identificados automaticamente pelo StArt.

3.2.1.4 Seleção dos trabalhos

Com a utilização do *software* StArt, a seleção dos trabalhos encontrados foi realizada por uma série de critérios: inclusão, exclusão e de qualidade. Os critérios de inclusão e exclusão serviram de referência para o aceite dos trabalhos nos filtros definidos posteriormente (seção 3.2.1.5). Dessa forma, visualiza-se os critérios de inclusão e exclusão no Quadro 11 e Quadro 12, respectivamente.

Quadro 11 – Critérios de inclusão

Critério	Descrição do critério de inclusão
I1	Trabalhos que apresentam uma proposta de equação para estimativa de alguma propriedade (geométrica ou elástica), esforço ou tensão para placas de <i>cross laminated timber</i> .
I2	Trabalhos que façam simulação numérica de placas de <i>cross laminated timber</i> .

Fonte: O próprio autor, 2023.

Quadro 12 – Critérios de exclusão

Critério	Descrição do critério de exclusão
E1	Trabalhos que não dissertem objetivamente sobre placas de <i>cross laminated timber</i> (por exemplo, trabalhos focados apenas nas conexões das placas de CLT).
E2	Trabalhos não relacionados à flexão de placas de CLT, por exemplo, trabalhos de análise do ciclo de vida e voltados aos efeitos das vibrações, acústica, efeito de incêndio na placa de CLT.
E3	Trabalhos que não apresentam uma proposta de equação para estimativa de alguma propriedade (geométrica ou elástica) de placas de <i>cross laminated timber</i> .
E4	Trabalhos que não façam simulação numérica de placas de <i>cross laminated timber</i> .
E5	Trabalhos restritos ou sem acesso ao texto completo.

Fonte: O próprio autor, 2023.

Os critérios de inclusão e exclusão permitiram um refinamento nos trabalhos coletados. Ademais, nos casos em que se admitiu critérios de inclusão e exclusão para um mesmo trabalho, o aceite ocorreu por meio do auxílio dos critérios de qualidade (Quadro 13).

Quadro 13 – Critérios de qualidade

Critério	Descrição do critério de qualidade	Lista para escolha
Q1	O trabalho apresenta alguma metodologia de cálculo (de esforços, tensões ou deslocamento) para CLT?	Sim, Não

Fonte: O próprio autor, 2023.

Também foram definidos critérios de extração (Quadro 14) para a captura de informações consideradas fundamentais para a análise de trabalhos correlatos. Estes critérios somente foram utilizados naqueles trabalhos considerados mais relevantes, aceitados no filtro 3.

Quadro 14 – Campos de critério de extração

Campo	Possíveis respostas
Propõe equação?	Sim, Não
Qual método de abordagem foi utilizada?	1D, 2D, 3D
Qual a finalidade?	Esforços, tensões ou deslocamento
Qual a origem da equação	Modelo de regressão, analítica

Fonte: O próprio autor, 2023.

3.2.1.5 Aplicação dos filtros

A análise dos trabalhos foi realizada em três fases: seleção, elegibilidade e inclusão. Na fase de seleção (filtro 1) analisou-se, de acordo com os critérios os trabalhos, os elementos textuais: título, resumo e palavra-chave. Dessa forma, aqueles trabalhos divergentes com os critérios de inclusão e convergentes com os critérios de exclusão foram excluídos. Nas situações em que se atribuiu critérios inclusão e exclusão a um mesmo trabalho, este foi lido por completo e avaliado de acordo com os critérios de qualidade.

Por conseguinte, os trabalhos aprovados na fase de seleção (filtro 1) passaram para o segundo filtro (fase de elegibilidade), em que se verificou se suas introduções e conclusões convergiam aos critérios definidos. Com isso, os trabalhos aceitos passaram para o próximo filtro.

O terceiro filtro adotado, também definido como inclusão, consistiu na identificação dos trabalhos correlatos por meio da leitura completa dos aceitos pelo filtro 2 e de acordo com os critérios definidos. Convém ressaltar que em conjunto da leitura utilizou-se os critérios de extração (Quadro 14) para coleta dos dados de interesse. Portanto, as resenhas dos trabalhos selecionados no filtro 3 (incluídos)

foram realizadas a fim de destacar os seus pontos chaves, semelhanças e diferenças com o trabalho aqui proposto.

3.2.2 Pesquisa documental

Com o intuito de obter dados técnicos que poderiam auxiliar o estudo paramétrico e tendo em vista que tais dados são comumente encontrados em documentos não científicos, recorreu-se ao sistema de busca do Google para captura de tais informações.

Dessa maneira, o catálogo escolhido como ideal foi o apresentado pela KLH (2021), devido a ampla variabilidade das propriedades geométricas (comprimento, largura e configurações) e por essa empresa ser uma relevante fabricante de placas de CLT.

3.2.3 *Data Science Research*

As atividades referentes a *Data Science Research* (com ênfase na criação do *software*, modelagem, simulação numérica e análise estatística), previamente apresentadas no fluxograma (Figura 28), são detalhadas a seguir.

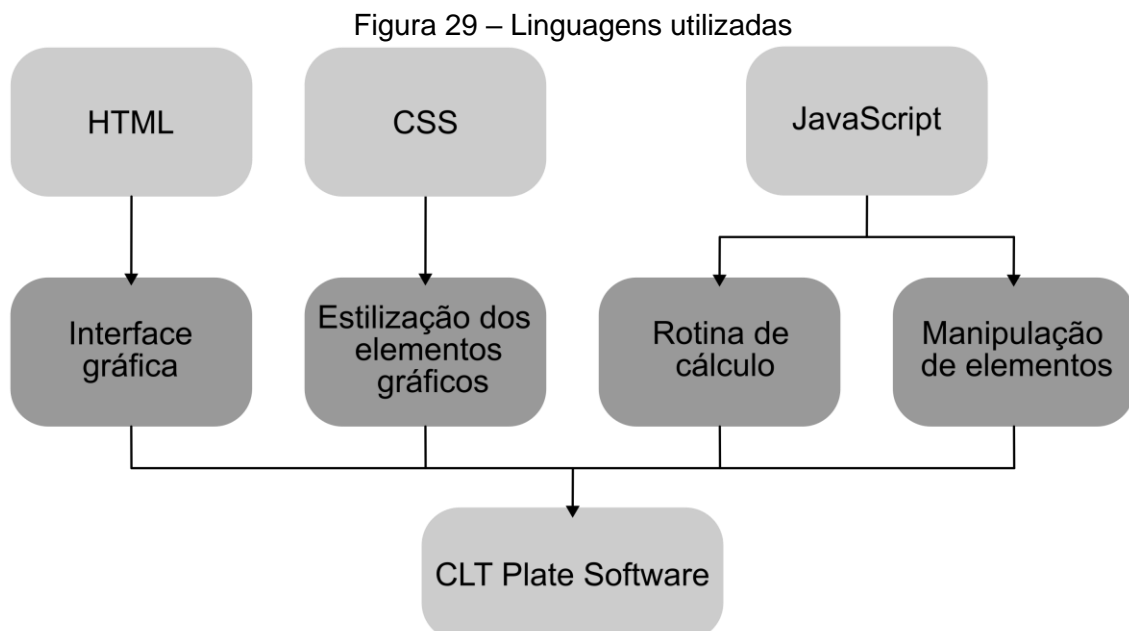
3.2.3.1 Criação do *software*

O *software* proposto neste trabalho, intitulado como CLT Plate Software, foi desenvolvido para a simulação computacional de placas delgadas de CLT quadriapoias, como observado na Figura 29. O seu desenvolvimento ocorreu por meio das linguagens JavaScript, HTML e CSS.

A interface gráfica do *software*, essencial para a interação com o usuário, foi desenvolvida utilizando-se a linguagem de marcação HTML, a qual proporcionou a estruturação e organização dos elementos na página. Adicionalmente, recorreu-se à linguagem de estilo CSS para aprimorar a estética e a apresentação dos elementos. Dessa forma, foi possível personalizar as propriedades visuais dos elementos HTML, como cores, fontes, tamanhos e disposição, garantindo uma interface visualmente atraente e coesa para os usuários.

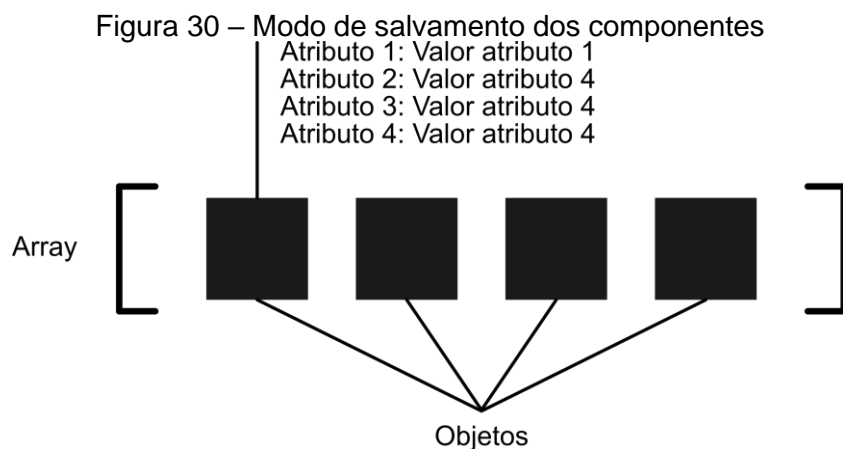
Os procedimentos de cálculos referentes as funções do Método de Navier foram implementados computacionalmente por meio da criação de algoritmos escritos

na linguagem de programação JavaScript, a qual também foi utilizada para manipulação de elementos HTML.



Fonte: O próprio autor, 2024.

A programação orientada a objetos, a qual possibilitou o salvamento temporário, consistiu em definir “*arrays*” (vetores) para cada tipo de componente (superfície, vínculos, madeira, camadas, cargas etc.). Dessa maneira, tais “*arrays*” foram preenchidos (com a função nativa do JavaScript “*push*”) com os objetos responsáveis pelo armazenamento dos atributos dos componentes. Nesse sentido, os “*arrays*” foram criados para o salvamento dos conjuntos de componentes e os objetos para o salvamento dos componentes individualmente (Figura 30).



Fonte: O próprio autor, 2024.

A interface gráfica foi criada com duas seções, a primeira relativa aos dados de entradas (propriedades elásticas, dimensões no plano, configuração das camadas,

cargas, vínculos) e a segunda relacionada aos dados de saída. Ambas as seções foram construídas com uma tela gráfica e ferramentas capazes controlá-la.

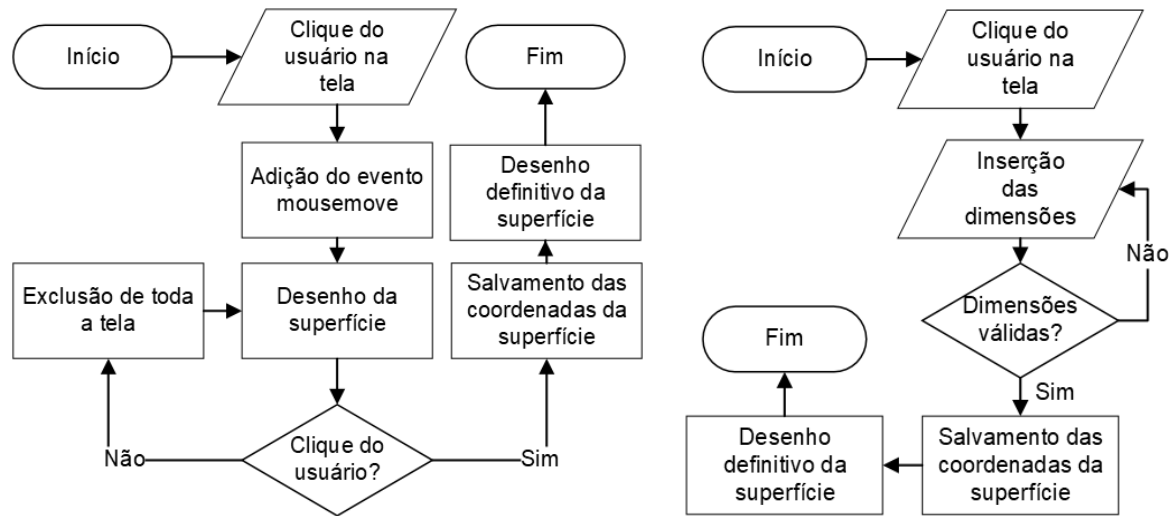
Convém destacar que, de modo geral, os desenhos nas telas gráficas foram determinados por meio da criação de algoritmos com funções nativas do JavaScript relacionadas ao elemento “*canvas*”. Dessa forma, a combinação de tais funções permitiu desenhar formas geométricas (linhas, quadrados, triângulos, círculos) a fim de representar os componentes (superfície, cargas, vínculos etc.) nas telas gráficas.

3.2.3.1.1 Interface dos dados de entrada

A estruturação HTML estática da seção dos dados de entrada foi construída essencialmente por meio dos elementos HTML: “*div*”, “*img*”, “*span*” e “*canvas*”. Com isso, com a utilização de duas “*divs*”, estabeleceu-se a divisão das ferramentas e da tela gráfica criada com o elemento “*canvas*”. Cada ferramenta foi construída graficamente com “*divs*” para o agrupamento dos elementos “*img*” e “*span*”, em que “*img*” foi utilizado para inserção do ícone representativo e “*span*” para o nome da ferramenta. Assim, a “*divs*” correspondente às ferramentas receberam uma classe de estilo com propriedades definidas em CSS para organizá-las. Adicionalmente, as funcionalidades dessas ferramentas foram implementadas utilizando a linguagem de programação JavaScript, conforme descrito a seguir.

A funcionalidade da superfície foi elaborada com o objetivo de permitir duas formas de inserção. A primeira forma (Figura 31a), por desenho, foi desenvolvida com os eventos de *mouse* “*mousemove*” e “*mousedown*”. Esse método identifica o primeiro click (“*mousedown*”) do usuário na tela gráfica e, a partir desse ponto, desenha a superfície na tela conforme a movimentação do *mouse* (“*mousemove*”), ajustando as respectivas dimensões. Por conseguinte, elaborou-se um identificador de segundo click (“*mousedown*”) que encerra o evento anterior e desenha de forma definitiva a superfície com as determinadas dimensões. A segunda forma (Figura 31b) consistiu em criar um “*input*” numérico para que o usuário insira as dimensões das superfícies. Com isso um algoritmo foi desenvolvido para identificar o pressionamento de tecla *enter*, verificar se as dimensões inseridas no “*input*” são válidas (não nulas, negativas), então, desenhar a superfície com as respectivas dimensões.

Figura 31 – Fluxograma síntese do algoritmo referente a “superfície”



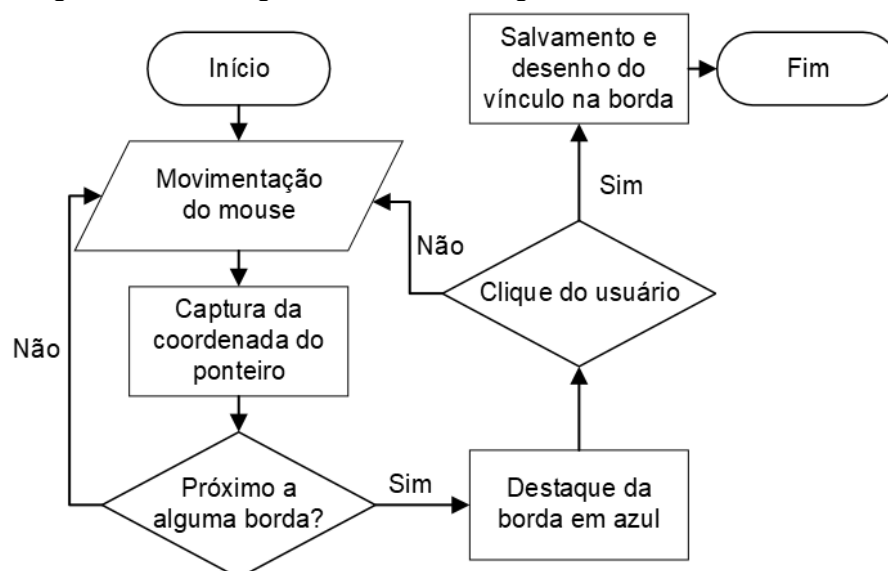
(a) Inserção por desenho

(b) Inserção por dimensões

Fonte: O próprio autor, 2024.

Posteriormente, construiu-se a ferramenta para a inserção dos vínculos (engaste, apoio e livre) utilizando-se a estrutura de repetição "for", do JavaScript, a fim de percorrer as coordenadas (x, y) dos lados da superfície e verificar se o cursor do *mouse* está próximo de algum deles (evento "*mousemove*"), com uma distância menor que 40 pixels, bem como verificar se no momento de proximidade há o clique do *mouse* ("*mousedown*") para posterior inserção do vínculo.

Figura 32 – Fluxograma síntese do algoritmo referente “vínculos”

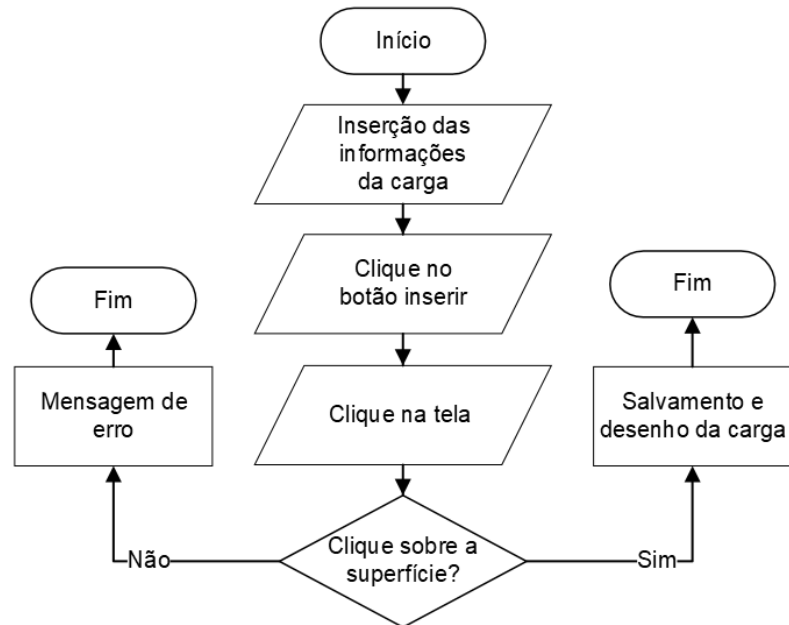


Fonte: O próprio autor, 2024.

Analogamente, dois algoritmos foram desenvolvidos para a inserção das cargas (distribuída uniformemente, uniformemente sobre uma região retangular e

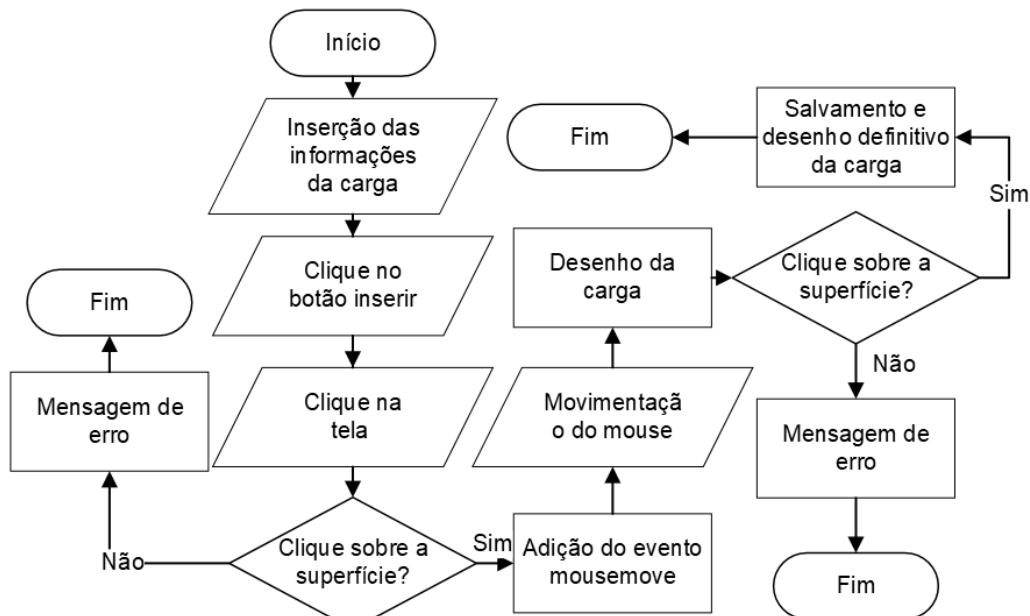
linear). O primeiro (Figura 33) é específico à carga uniformemente distribuída sobre uma região retangular e permite a inserção por meio do desenho desta. O segundo (Figura 34) está presente em todas as cargas e permite a inserção apenas a partir das suas informações (módulo, direção da carga, coordenadas), sem a necessidade de qualquer desenho na tela gráfica.

Figura 33 – Fluxograma síntese do algoritmo de inserção da carga por meio de desenho



Fonte: O próprio autor, 2024.

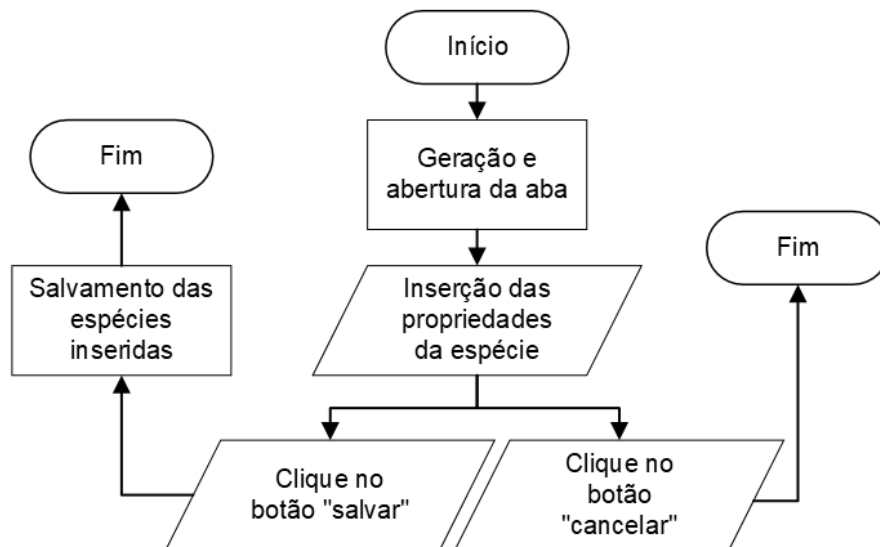
Figura 34 – Fluxograma síntese do algoritmo de inserção da carga por meio de informações



Fonte: O próprio autor, 2024.

Em seguida, com o auxílio da SweetAlert 2 (biblioteca do JavaScript), foi criada a funcionalidade do botão “materiais”. Dessa forma, estruturou-se um algoritmo (Figura 35) para gerar dinamicamente uma aba contendo elementos do tipo “table”, “input” e “button”. Nesse processo, o elemento “table” foi empregado para estruturar uma tabela, na qual o cabeçalho foi elaborado para denotar as propriedades, enquanto o conteúdo consistiu em campos de entrada (“inputs”) destinados à inserção dos valores correspondentes a essas propriedades. Além disso, ao elemento “button” foi atribuído, por meio do evento “*mouseonclick*”, uma função para o salvamento temporário das propriedades inseridas.

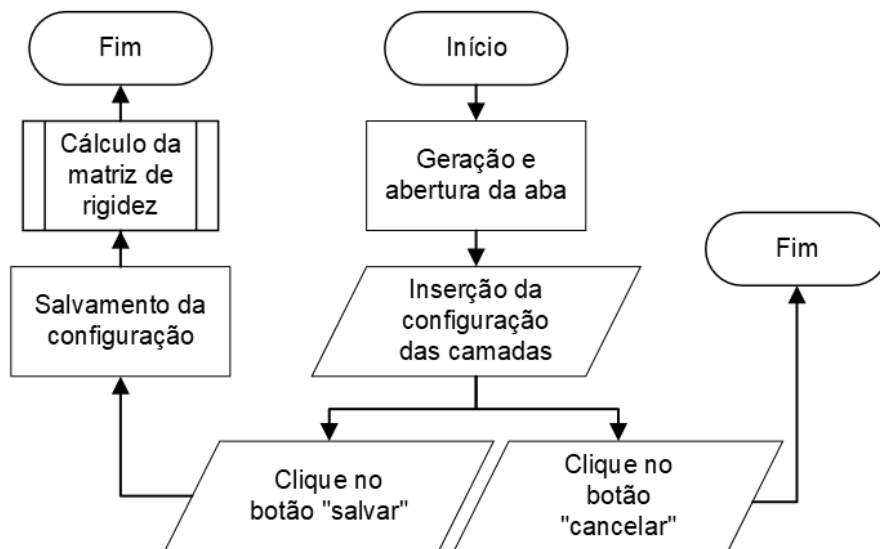
Figura 35 – Fluxograma síntese do código relativo a “materiais”



Fonte: O próprio autor, 2024.

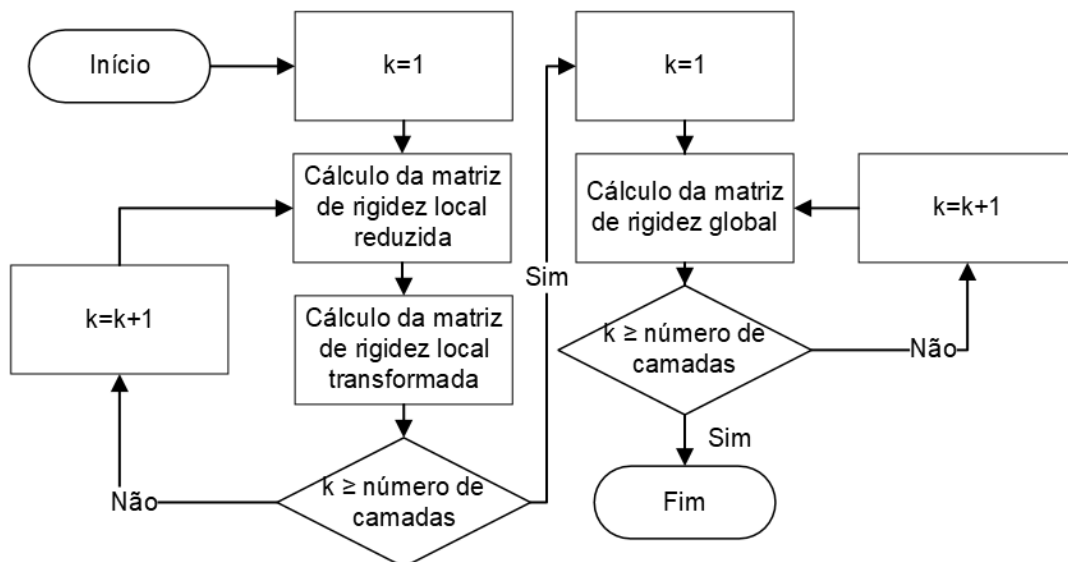
Semelhantemente, foi produzido um algoritmo (Figura 36) para criação dinâmica de uma aba para inserção das camadas, utilizando-se os elementos HTML “table”, “input”, “button” e “canvas”. Dessa maneira, a combinação dos elementos “table” e “input” permitiram estruturar uma tabela para entrada dos dados (madeira, espessura da camada, inclinação da camada), o elemento “button” possibilitou a atribuição de uma função para o salvamento temporário dos dados e o “canvas” para permitir a pré-visualização da configuração das camadas. Convém destacar que após o salvamento da configuração, o algoritmo é acionado para a criação da matriz de rigidez à flexão (Figura 37).

Figura 36 – Fluxograma síntese do código relativo a “camadas”



Fonte: O próprio autor, 2024.

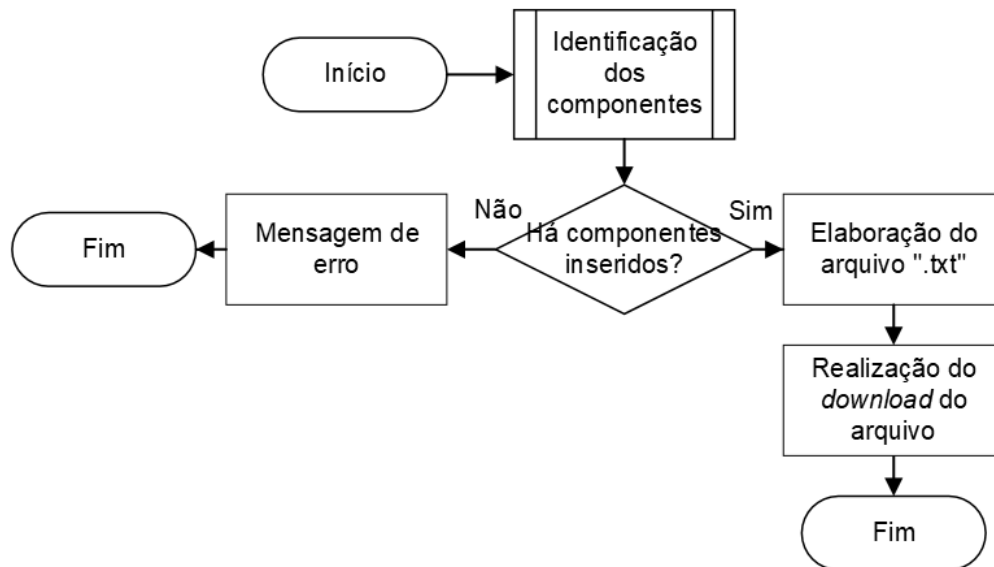
Figura 37 – Fluxograma síntese do código para cálculo da matriz de rigidez à flexão



Fonte: O próprio autor, 2024.

A funcionalidade “salvar” foi criada por meio de um código com o intuito de capturar todas os dados de entrada e armazená-los em uma *string* de forma estruturada, com cada linha representando um componente. Além disso, a fim de separar as informações dos componentes, programou-se para cada linha ser fragmentada por uma barra vertical “|”. Por exemplo, a linha relativa às informações das propriedades da madeira tem a seguinte forma: “módulo de elasticidade na direção 1| módulo de elasticidade na direção 2...”. Por fim, adicionou-se o procedimento para o download do arquivo “.txt” no computador do usuário.

Figura 38 – Fluxograma síntese do código de “salvar”

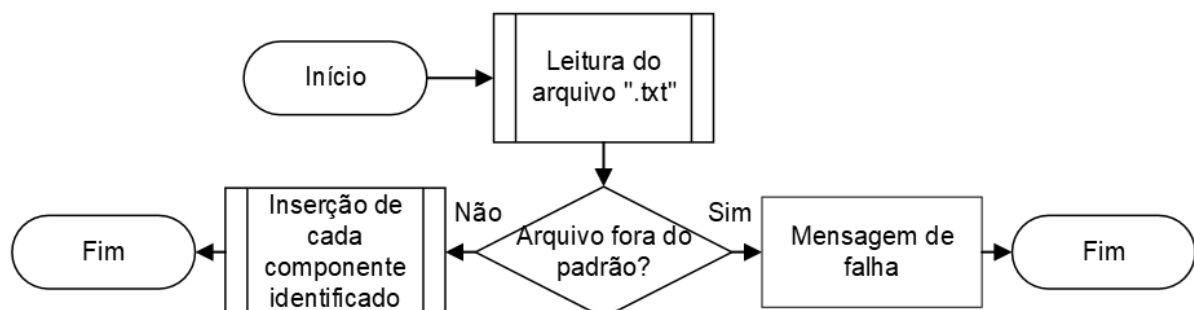


Fonte: O próprio autor, 2024.

Adicionalmente, desenvolveu-se a funcionalidade “abrir” para possibilitar a leitura do arquivo texto criado pela ferramenta “salvar”. Com o objeto “*FileReader*”, nativo do JavaScript, foi elaborado um *script* para leitura do conteúdo do arquivo “.txt”. O operador de repetição “*for*” e o de condicional “*if*” foram utilizados para verificação da estruturação do conteúdo, então, caso todos os dados sejam válidos todas as “*arrays*” dos componentes são populados com os respectivos dados capturados do arquivo “.txt”.

Adiante, desenvolveu-se um código para atribuição de todos os *arrays* dos componentes como vazios, excluindo-os todos os dados salvos temporariamente no *software* a fim de construir a funcionalidade “apagar tudo”.

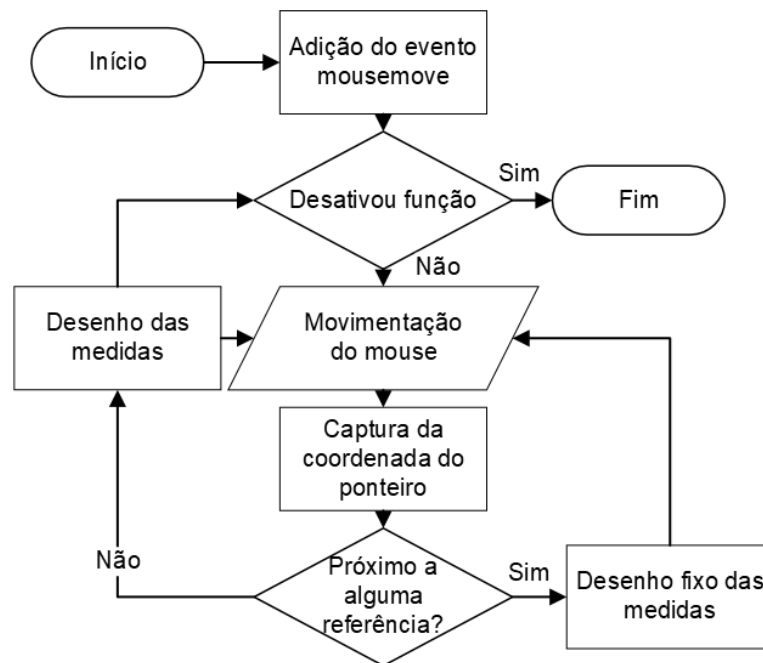
Figura 39 – Fluxograma síntese do código de “abrir”



Fonte: O próprio autor, 2024.

Para funcionalidade da ferramenta “medir”, desenvolveu-se o código (visualizado no fluxograma da Figura 40) para o desenho representativo da medida entre o cursor do *mouse* até as bordas da superfície.

Figura 40 – Fluxograma síntese do algoritmo referente a “medir”



Fonte: O próprio autor, 2024.

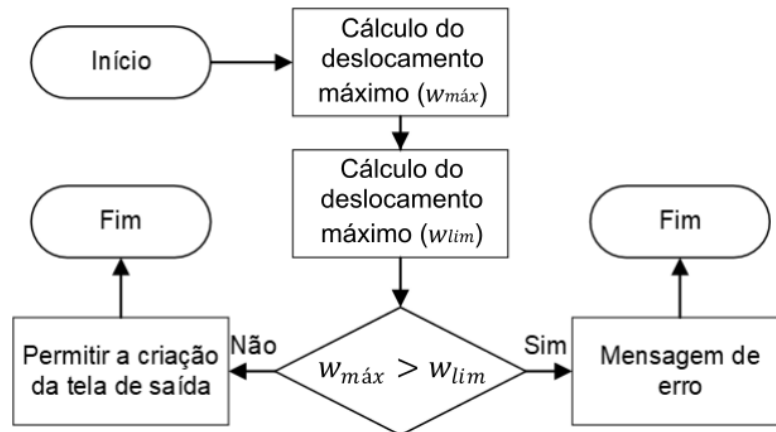
Por conseguinte, tal código foi atribuído ao evento “*mousemove*” no elemento *canvas* (tela gráfica), com intuito de tornar o desenho dinâmico com a movimentação do *mouse*. Enfim, por meio de laços de repetições (“*for*”), que percorrem os “*arrays*” dos componentes, e o condicional (“*if*”), elaborou-se o *script* de um *snap* que verifica se a coordenada do ponteiro do *mouse* (obtida pelo evento *mousemove*) está próximo a alguma carga e, caso esteja, a distância da carga até as bordas é desenhada.

As interfaces referentes aos “critérios de falha” e “critérios de serviço” também foram desenvolvidas com o auxílio da biblioteca SweetAlert 2, de modo que se utilizou os elementos HTML “*span*”, “*input*” e “*table*” na construção da janela dos “critérios de falha” e apenas o elemento “*span*” na construção da segunda.

Para a construção da funcionalidade dos critérios de serviço, cujo fluxograma pode ser visualizado na Figura 41, foi necessário recorrer aos intervalos do critério de deslocamento limite instantâneo (Tabela 2) definidos pelos documentos normativos NBR 7190 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2022) e Eurocode 5 (EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, 2004). No entanto, tais documentos normativos apresentam metodologias unidimensionais, consequentemente, critérios relativos a elementos de uma única dimensão (L). Dessa forma, considerando-se a construção do *script* para determinação do deslocamento limite, o valor mais conservador ($L/500$) dos intervalos de ambos os documentos

normativos foi admitido nas duas dimensões da placa, visando determinar o menor deslocamento limite admissível para toda placa.

Figura 41 – Fluxograma síntese do algoritmo relativo a “critério de serviço”

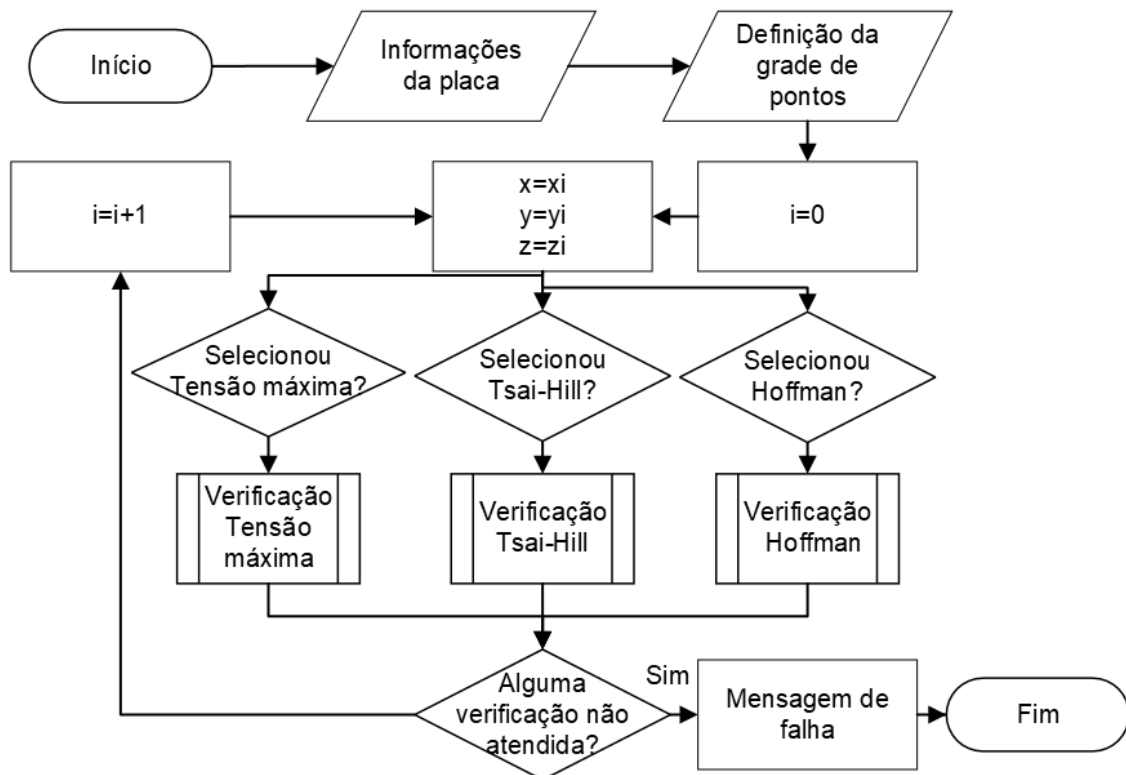


Fonte: O próprio autor, 2024.

Posteriormente, três critérios de falha, já apresentados no subcapítulo 2.5., foram inseridos computacionalmente: o critério da tensão máxima, o de Tsai-Hill e o de Hoffman. Para a construção da aba correspondente a cada critério, foram utilizados dois “*inputs*”: quantidade de planos (xy) ao longo da espessura e pontos nesses planos, além de um “*checkbox*” para escolha dos critérios a serem verificados. Assim, um algoritmo (Figura 42) foi elaborado para calcular, em cada ponto, os valores das tensões nas direções principais e posteriormente realizar as verificações selecionadas.

Além disso, foram desenvolvidas ferramentas complementares com o intuito de oferecer uma experiência mais fluida e eficiente para os usuários. Com isso, foram implementadas funcionalidades para permitir a redução, ampliação e movimentação dos desenhos na tela gráfica. Primeiramente, definiram-se variáveis relativas a deslocamentos visuais na direção de x e y e, posteriormente, adicionaram-se tais variáveis aos *scripts* dos desenhos dos componentes e desenvolveram-se as funções ampliação, redução e deslocamento, manipulando-se (incrementando ou reduzindo) as variáveis dos deslocamentos visuais nas direções x e y .

Figura 42 – Fluxograma síntese do algoritmo relativo a “critérios de falha”



Fonte: O próprio autor, 2024.

Outras ferramentas complementares “dados”, “atalhos” e “preferências” foram criadas com o auxílio da biblioteca SweetAlert 2. O *script* para geração dinâmica, a aba de “dados” foi elaborada com os elementos HTML “*span*” e “*table*”, em que os “*spans*” foram utilizados para escrita da espessura e peso total e o “*table*” para escrita da matriz de rigidez, cujo fluxograma do algoritmo é observado na Figura 37. Analogamente, o *script* da janela “atalhos” foi elaborado para criação dinâmica de “*spans*” com o intuito de escrever os atalhos e suas funcionalidades.

3.2.3.1.2 Interface dos dados de saída

A tela de saída é gerada dinamicamente por meio de uma função JavaScript atribuída ao botão “calcular” presente na interface dos dados de entrada. A geração foi construída por meio de duas “*divs*” principais, sendo a primeira responsável pelo agrupamento da tela de gráfica de saída (“*canvas*”) e configurações de cálculo e a segunda relativa ao menu lateral da criação dos desenhos dos diagramas.

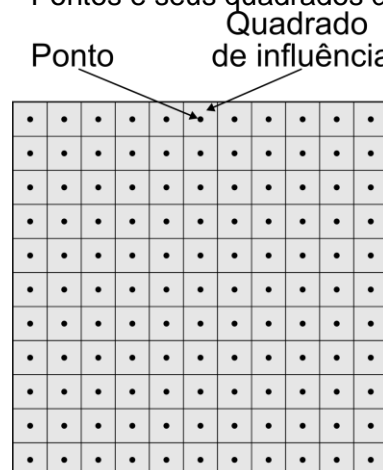
De modo geral, tendo em vista os duplos somatórios, o cálculo das funções de Navier foi implementado computacionalmente com a utilização do laço de repetição “*for*” aninhado, um loop “*for*” dentro do escopo de outro loop “*for*”. Dessa maneira,

dentro do escopo do laço “for” exterior foi implementado o cálculo do β ($n\pi/b$) e o *script* de parada do loop. Outrora, dentro do escopo do loop interior, elaborou-se o *script* de cálculo dos coeficientes (p_{mn} e d_{mn}) e α ($m\pi/a$), por conseguinte, o cálculo completo foi determinado com as específicas parcelas trigonométricas de cada função de Navier implementadas computacionalmente com as funções “Math.sin()” e “Math.cos()” nativas do JavaScript.

Entretanto, considerando-se a sobreposições dos efeitos resultantes de diversas cargas sobre a placa, incrementou-se mais um “for” externo que percorre o *arrays* das cargas a fim de capturar os dados necessários para o cálculo do coeficiente de carga.

Com a implementação computacional das funções de Navier foi possível elaborar o algoritmo para o desenho dos diagramas na tela gráfica de saída. Em primeiro momento, com um *loop* “for” aninhado que percorre o comprimento e largura da placa em incrementos definidos pelo usuário por meio de um *input* numérico elaborou-se o *script* para criação de pontos sobre a tela gráfica. Dessa forma, nota-se que cada ponto terá um quadrado de influência (Figura 43) de dimensões e distâncias iguais ao valor fornecido pelo usuário. Posteriormente, para cada ponto é calculado a respectiva função de Navier selecionada e salvos em um objeto os dados (posição em x , posição em y e o valor obtido da função de Navier), o que posteriormente é incrementado em um *array*.

Figura 43 – Pontos e seus quadrados de influência



Fonte: O próprio autor, 2024.

Com a utilização do *array* que carrega todos os dados dos pontos, gerado pelo *script* anterior, outro código foi gerado para obtenção do máximo e o mínimo valor.

Posteriormente, elaborou-se um *script* para geração de 15 intervalos de valores e atribuiu-se diferentes cores a eles. Com isso, outro *script* a fim de verificar o valor de cada ponto é associado a determinado intervalo e desenhar o seu quadrado de influência com a respectiva cor do intervalo.

3.2.3.1.3 Funcionalidades exclusivas

Outras funcionalidades exclusivas para o segundo objetivo geral deste trabalho (propor uma equação de abordagem bidimensional de regressão a múltiplas variáveis para a estimativa da carga limite de serviço em placas de CLT, apoiadas nos quatro bordos) e a validação do *software* (considerando-se sua aplicação até o estado limite de serviço) foram construídas.

Primeiramente, visando o algoritmo para o cálculo das funções das cargas limites de serviço, por meio da substituição dos coeficientes de carga (Quadro 1) na função do deslocamento transversal advinda do Método de Navier (63), deduziu-se a função da carga distribuída uniformemente sobre toda placa laminada (89), distribuída sobre região retangular (90) e distribuída linearmente (91).

$$q_{dis.} = \frac{w(x, y)}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 m n d_{mn}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)} \quad (89)$$

$$q_{ret.} = \frac{w(x, y)}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 m n c d} \sin \frac{m \pi x_1}{a} \sin \frac{n \pi y_1}{b} \sin \frac{m \pi c}{a} \sin \frac{n \pi d}{b} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)} \quad (90)$$

$$q_{lin.} = \frac{w(x, y)}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8}{\pi m b} \sin \left(\frac{m \pi y_1}{a} \right) * \sin^2 \left(\frac{m \pi}{2} \right) \sin(\alpha x) \sin(\beta y)} \quad (91)$$

Em adição, o deslocamento limite é definido como $L/500$ conforme os documentos normativos (Tabela 2), por conseguinte, as funções das cargas limite de serviço são apresentadas em (92), (93) e (94).

$$q_{dis.lim} = \frac{L/500}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 m n d_{mn}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)} \quad (92)$$

$$q_{ret.lim} = \frac{L/500}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 m n c d} \sin \frac{m \pi x_1}{a} \sin \frac{n \pi y_1}{b} \sin \frac{m \pi c}{a} \sin \frac{n \pi d}{b} d_{mn}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (93)$$

$$q_{lin.lim} = \frac{L/500}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8q_0}{\pi m b} \sin \left(\frac{m \pi y_1}{a} \right) * \sin^2 \left(\frac{m \pi}{2} \right) d_{mn}} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (94)$$

Portanto, tais equações foram implementadas computacionalmente a partir de um duplo *loop* análogo ao citado anteriormente, em 3.2.3.1.2, para demais funções do Método de Navier.

3.2.3.2 Estudo paramétrico

Em um primeiro momento, procurou-se selecionar parâmetros com correlação direta à flexão de placas. Desse modo, as propriedades elásticas da madeira e geométricas da placa despertaram interesse no estudo paramétrico, uma vez que tais parâmetros podem impactar significativamente o comportamento de flexão das placas de CLT.

Com isso, a espécie de madeira *Pinus taeda L.*, popularmente conhecida no Estados Unidos da América como *loblolly pine* e no Brasil como pínus ou Pinheiro-Amarelo, foi definida para ser utilizada nas simulações devido a sua abrangência em diversas florestas plantadas ao redor do mundo e sua utilização por fabricantes de placas de CLT. Dessa forma, por meio de relações apresentadas por Kretschmann (2010) (Tabela 1), as propriedades elásticas da *Pinus taeda L.* podem ser visualizadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades elásticas da *Pinus taeda L.*

E_L (MPa)	E_T (MPa)	E_R (MPa)	G_{LR} (MPa)	G_{LT} (MPa)	G_{RT} (MPa)	ν_{LR}	ν_{LT}	ν_{RT}
12300	959,4	1389,9	1008,6	996,3	159,9	0,328	0,292	0,382

Fonte: Adaptado de Kretschmann (2010).

Os parâmetros geométricos da placa de CLT, seus intervalos de variância e o incremento de variância, podem ser observados na Tabela 4. O valor inicial de parametrização da largura e comprimento foram definidos de acordo com situações práticas, uma vez que é raro encontrar um piso estrutural com uma das dimensões do plano menor do que 2 metros. Por outro lado, o valor máximo de largura e comprimento foram estabelecidos com base nas dimensões máximas de placa de CLT fabricada pela KLH (2021). A variação do valor da largura e comprimento foram admitidos como 500 mm, a fim de obter uma parametrização de maior representatividade.

Tabela 4 – Parâmetros variados

Intervalo	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Configurações
Valor Inicial	2000	2000	3C ¹ [60] ²
Valor Final	3500	16500	5C 8L ³ [320]
Variação	500	500	1

Fonte: O próprio autor, 2024.

Os valores inicial e final correspondem às configurações de menor e maior espessura de placa oferecida pela KLH (2021), respectivamente. Além destas, foram selecionadas 21 configurações intermediárias, retiradas do catálogo da KLH (2021), observadas na Tabela 5.

Tabela 5 – Configurações selecionadas para a parametrização

(continua)

Notação	Número de camadas	Espessura (mm)	Espessuras das camadas e suas orientações ⁴						
			L (mm)	T (mm)	L (mm)	T (mm)	L (mm)	T (mm)	
3C ¹ [60] ²	3	60	20	20	20	-	-	-	-
3C [70]	3	70	20	30	20	-	-	-	-
3C [80]	3	80	30	20	30	-	-	-	-
3C [90]	3	90	30	30	30	-	-	-	-
3C [100]	3	100	40	20	40	-	-	-	-
3C [110]	3	110	40	30	40	-	-	-	-
3C [120]	3	120	40	40	40	-	-	-	-
5C [130]	5	130	30	20	30	20	30	-	-
5C [140]	5	140	40	20	20	20	40	-	-
5C [150]	5	150	40	20	30	20	40	-	-

Fonte: Adaptado de KLH (2021).

¹ Número de camadas, por exemplo, 3C se refere a configuração de 3 camadas

² Espessura total da placa de CLT da configuração

³ Número de lamelas para constituição da seção

⁴ Orientação da camada, sendo L a designação para longitudinal e T para tangencial

Tabela 5 – Configurações selecionadas para a parametrização

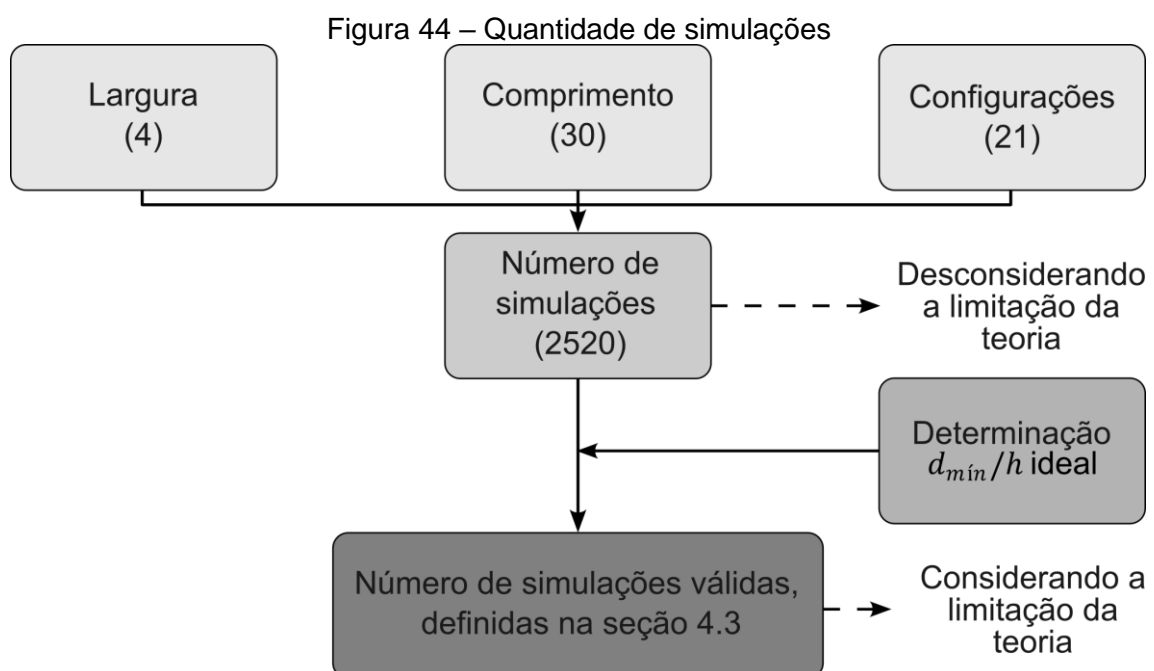
(conclusão)

Notação	Número de camadas	Espessura (mm)	Espessuras das camadas e suas orientações ⁴						
			L (mm)	T (mm)	L (mm)	T (mm)	L (mm)	T (mm)	L (mm)
5C [160]	5	160	40	20	40	20	40	-	-
5C [170]	5	170	40	30	30	30	40	-	-
5C [180]	5	180	40	30	40	30	40	-	-
5C [190]	5	190	40	40	30	40	40	-	-
5C [200]	5	200	40	40	40	40	40	-	-
7C [220]	7	220	30	40	30	20	30	40	30
7C [240]	7	240	30	40	30	40	30	40	30
5C 7L ³ [260]	5 7L	260	40+40	30	40	30	40+40	-	-
5C 7L [280]	5 7L	280	40+40	40	40	40	40+40	-	-
5C 8L [300]	5 8L	300	40+40	30	40+40	30	40+40	-	-
5C 8L [320]	5 8L	320	40+40	40	40+40	40	40+40	-	-

Fonte: Adaptado de KLH (2021).

Portanto, como observado na Figura 44, a consideração de tais parâmetros resultaria em 2520 simulações. No entanto, vale ressaltar a limitação de placa delgada imposta pela Teoria Clássica da Placa Laminada, que não considera o efeito cortante no cálculo do deslocamento. Alguns autores definem tal limitação por meio da relação entre a menor dimensão no plano (d_{min}) da placa sobre a espessura (h), por exemplo, Reddy (2004) estabelece que tal relação deve ser maior do que 20 para laminados com camadas cruzadas para a conquista de resultados satisfatórios.

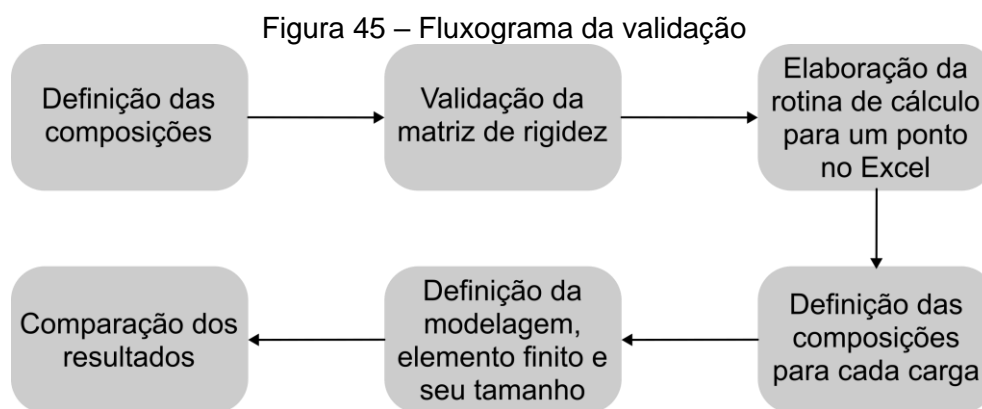
Dessa forma, foram realizadas simulações visando variar a relação d_{min}/h , a fim de constatar o valor limitador mais adequado de acordo com as diferenças percentuais entre os valores obtidos.



Fonte: O próprio autor, 2024.

3.2.3.1 Validação do *software*

A validação do *software* proposto, a qual almejou verificar sua confiabilidade, foi realizada por meio da comparação dos seus resultados com outro *software* similar. Na Figura 45, pode-se visualizar o fluxograma dos procedimentos realizados a fim de validar o *software*.



Fonte: O próprio autor, 2024.

Dessa forma, foram selecionadas 8 composições de placas de CLT (Tabela 6) como referência para a modelagem e simulação computacional tanto no CLT Plate Software quanto no *software* RFEM 5 ®. Todas as composições advêm do estudo paramétrico, sendo que as configurações de espessura e orientações das camadas de cada composição estão detalhadas na Tabela 5. A escolha do RFEM 5 ®, disponibilizado pela empresa alemã Dlubal (2024) e baseado no Método dos Elementos Finitos, é fundamentada em sua ampla reputação e sólida presença no mercado.

Tabela 6 – Composições adotadas para validação

Composição	Largura (mm)	Comprimento (mm)	Configuração	d_{\min}/h
1	2000	2000	5C [200]	10
2	2500	2500	7C [240]	10,42
3	3000	3000	8sC [300]	10
4	3500	3500	8sC [320]	10,94
5	2000	4000	3C [100]	20
6	3000	8000	3C [100]	30
7	2500	12000	3C [60]	41,67
8	3500	16500	3C [70]	50

Fonte: O próprio autor, 2023.

Da Tabela 6, quatro composições tendem a placas espessas, em que a relação da menor dimensão no plano (d_{\min}) pela espessura (h) é próxima a 10. Enquanto,

com o intuito de analisar os resultados do programa em relação as placas mais delgadas, as outras quatro composições foram admitidas com valores de $d_{min}/h \geq 20$.

Após definidas as composições, foi realizada a validação da matriz de rigidez à flexão (**D**). Tal validação ocorreu por meio da comparação dos resultados (**D**) das composições (Tabela 6) obtidas pelo *software* proposto e o *software* RFEM 5 ® (Dlubal, 2024). Posteriormente, elaborou-se no Excel a rotina de cálculo das funções de Navier para apenas um ponto, a partir do cálculo da matriz de rigidez à flexão, vislumbrando possíveis diferenças entre o CLT Plate Software e o RFEM 5 ® (Dlubal, 2024) advindas de parâmetros internos pré-definidos de acordo com as diferentes metodologias de cálculo.

A modelagem em ambos os *softwares* foi realizada com placas bidimensionais, às quais atribuiu-se as propriedades da madeira *Pinus taeda* L. (Tabela 3) e as configurações das camadas (espessuras e orientações) de cada composição. No RFEM 5 ® (Dlubal, 2024), admitiu-se o elemento finito de superfície quadrilátero e o seu tamanho para as cinco primeiras composições foi de 10 mm, no entanto, tendo em vista o tempo de processamento e que a mudança do tamanho do elemento finito não resultaria em melhores resultados, o tamanho da malha adotado para três últimas composições foi igual a 30 mm.

Relembrando-se que as funções do Método de Navier implementadas no CLT Plate Software são diferentes para cada tipo de carga, optou-se por validar as três diferentes cargas permitidas no *software*: distribuída uniformemente sobre toda placa, distribuída uniformemente sobre uma região retangular e distribuída linearmente.

Por conseguinte, a carga distribuída uniformemente sobre toda placa foi atribuída a todas as composições (Tabela 6) devido à sua ampla aplicação em projetos e ser a definida para as simulações deste trabalho. As rotinas de cálculo do CLT Plate Software para as outras duas cargas disponíveis no *software* (distribuída uniformemente sobre uma região retangular e distribuída linearmente) foram validadas apenas com duas composições: composição 1 (tende a placa espessa) e a composição 8 (tende a placa delgada).

Os valores dos módulos das cargas (Tabela 7, Tabela 8 e Tabela 9) foram calculados de modo a resultarem no deslocamento limite de serviço (w_{lim}), justamente para a analisar se o *software* forneceria resultados satisfatórios até o seu limite. As

funções implementadas e a criação do *script* para tal cálculo pode ser observadas em 3.2.3.1.3.

Tabela 7 – Valores da carga uniformemente distribuída sobre toda placa

Composição	Carga (kN/m ²)
1	183,3865
2	161,6147
3	185,0167
4	141,0222
5	3,7878
6	0,7403
7	0,2469
8	0,1888

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 8 – Valores da carga uniformemente distribuída sobre uma região retangular

Composição	x_1 (m)	y_1 (m)	Comprimento (m)	Largura (m)	Carga (kN/m ²)
1	1	1	0,4	0,4	1721,7957
8	5.5	1.75	0,5	0,5	9,9371

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 9 – Valores da carga distribuída linearmente

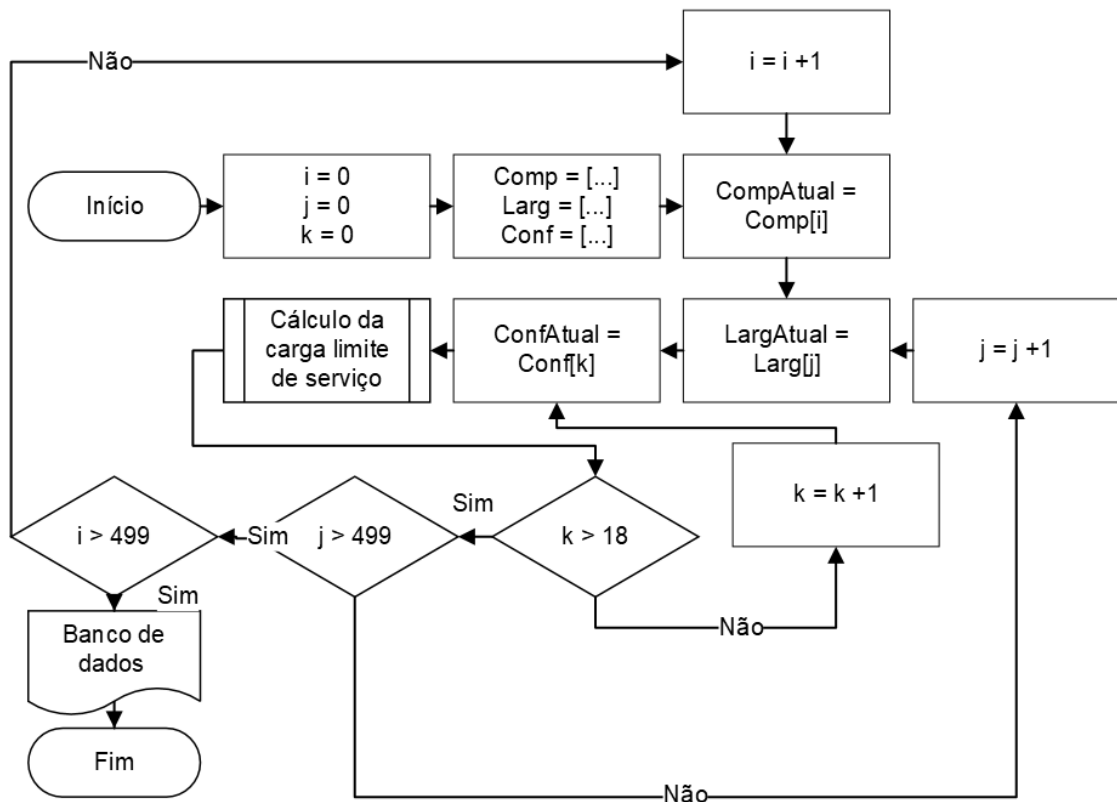
Composição	y_1 (m)	Carga (kN/m)
1	1	216,2718
8	1,75	0,4132

Fonte: O próprio autor, 2024.

Com a conclusão da simulação de todas as composições, em ambos os *softwares*, o enfoque da comparação ocorreu nos resultados máximos dos deslocamentos, momentos (M_{xx} , M_{yy} e M_{xy}) e tensões (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , σ_{xz} e σ_{yz}).

3.2.3.2 Simulações

As simulações computacionais, propostas no estudo paramétrico (3.2.3.2), buscam a determinação da carga limite de serviço (F_{lim}), por conseguinte, são simulações de análise linear. Devido ao enorme número de simulações propostas no estudo paramétrico (Figura 44), foi desenvolvido um algoritmo (Figura 46) no CLT Plate Software para automatizar o procedimento do processo de modelagem e simulação. Ao final das simulações, nota-se que o *script* armazena os valores dos dados de entrada (parâmetros geométricos e elástico da madeira) e saída (F_{lim}) a fim de elaborar o banco de dados.

Figura 46 – Fluxograma do *script* das simulações

Fonte: O próprio autor, 2024.

A modelagem dinâmica das placas de CLT seguiu as condições de contorno da solução do Método de Navier, em que os quadros bordos são apoiados. Ademais, considerando-se as práticas de projetos, a carga distribuída uniformemente foi definida em todas as simulações.

3.2.3.3 Modelos de regressão clássico e simbólico

Foram desenvolvidos modelos de regressão utilizando duas abordagens distintas: a metodologia clássica e a Regressão Simbólica. A abordagem clássica, baseada em métodos estatísticos tradicionais, consiste em ajustar os dados observados a equações previamente definidas para explicar as relações entre variáveis independentes e dependentes. Já a metodologia simbólica é fundamentada em técnicas de aprendizado de máquina, como a programação genética, para gerar equações matemáticas que descrevem os dados de forma automatizada, permitindo maior flexibilidade na identificação de padrões e relações complexas.

3.2.3.3.1 Metodologia clássica

Na abordagem clássica, o modelo de regressão a múltiplas variáveis (95) foi utilizado para relacionar a carga limite de serviço (F_{lim}) com os parâmetros L/b (comprimento pela largura da placa de CLT), L/h (comprimento pela espessura pela espessura total da placa), b/h (largura pela espessura total da placa), n_c (número de camadas da placa) e seus os quadrados. Ademais, em (95), β_i são nos coeficientes ajustados pelo método dos mínimos quadrados e ε é o erro aleatório do modelo, cabendo destacar que a qualidade dos ajustes foi avaliada por meio do coeficiente de determinação (R^2). Com o intuito de sintetizar o modelo de regressão, os parâmetros L/b , L/h e b/h são apresentados da seguinte forma: $\lambda = L/b$, $\alpha = L/h$ e $\delta = b/h$.

$$F_{lim} = \beta_1\lambda + \beta_2\alpha + \beta_3\delta + \beta_4n_c + \beta_5(\lambda)^2 + \beta_6(\alpha)^2 + \beta_7(\delta)^2 + \beta_8n_c^2 + \beta_9 + \varepsilon \quad (95)$$

Convém destacar que os limites dos parâmetros, observados em (96), respeitam o estudo paramétrico. Além disso, as unidades de medida dos parâmetros L , b e h , em (95), devem ser iguais para que os termos da equação (λ , α e δ) sejam adimensionais.

$$F_{lim} \text{ com } L \in [2000,16500], b \in [2000,3000], h \in [60,170] \text{ e } n_c \in [3,5] \quad (96)$$

A partir da utilização do *software* Minitab 18®, a análise de variância (ANOVA) ao nível de 5% de significância foi utilizada para avaliar o modelo de regressão e os seus respectivos termos, consistindo em uma análise de sensibilidade dos coeficientes (β_i). Dessa forma, respeitando-se a hierarquia das variáveis, aqueles parâmetros não significativos (valor-p ≥ 0.05) foram desconsiderados da equação, a fim de conquistar um modelo com todos (ou quase todos) os parâmetros significativos.

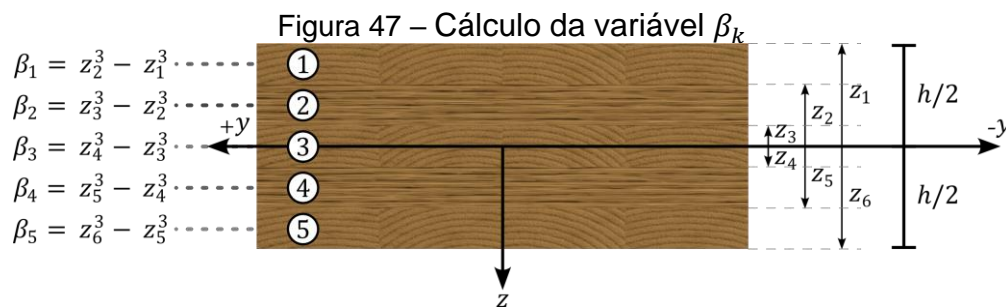
3.2.3.3.2 Regressão Simbólica

Na Regressão Simbólica (SR), utilizando-se o algoritmo da biblioteca Python PySR, foram definidas as variáveis de entrada: comprimento (L), largura (b), espessura da placa (h), número de camadas (n_c) e as componentes da matriz de rigidez à flexão (D_{11} , D_{12} , D_{22} , D_{66}). Entretanto, com o intuito de propor uma equação de simples resolução, evitando-se cálculos matriciais, foram propostos modelos para as componentes (D_{11} , D_{12} , D_{22} , D_{66}) consideradas significativas de acordo com o SR.

Dessa forma, os modelos das componentes da matriz da rigidez à flexão também foram construídos utilizando a metodologia SR, por meio da biblioteca Python PySR. Nesse processo, foi considerado apenas uma variável de entrada (β_k), inspirado no cálculo da matriz de rigidez à flexão e visualizada em (97).

$$\beta_k = z_{k+1}^3 - z_k^3 \quad (97)$$

A variável β_k é calculada para cada camada, por conseguinte, z_k e z_{k+1} são as coordenadas em z de uma determinada camada k (Figura 47).



Para ambos os modelos, foram considerados os seguintes operadores binários: adição (+), subtração (-), multiplicação (\times), divisão (/). Além disso, exclusivamente, para o modelo da carga limite de serviço foram considerados operadores unários “square” e “cube”, a fim do algoritmo considerar termos quadráticos e cúbicos. Com o intuito em obter equações simples, o parâmetro “max-Size” foi definido igual a 30 para todos os modelos. Visando modelos de regressão simbólica com ótima precisão, o número de iterações (gerações) foi definido igual a 150.000 para geração do modelo da carga limite de serviço e igual a 10.000 para os modelos das componentes da matriz de rigidez à flexão. Ademais, exclusivamente para o modelo da carga limite de serviço, “weight_optimize” foi definido como 0,001 para otimização ocorrer mais frequentemente e “parsimony” igual a 0,00001, prevendo uma menor punição quanto a complexidade e um modelo mais preciso.

Por fim, como critério de parada foram utilizados os parâmetros “early_stop_condition” e “timeout_in_seconds” para parar a execução do algoritmo caso conquistasse um modelo de regressão simbólica com determinada precisão ($MSE=10^{-6}$) e complexidade (30) ou se o tempo de processamento do algoritmo atingisse 6 horas, respectivamente. Os demais parâmetros do algoritmo da SR, não mencionados aqui, foram mantidos com seus valores padrões.

3.2.3.4 Validação da equação proposta

De acordo com a Revisão Bibliográfica Sistemática (RBS) realizada neste trabalho, não foram encontradas metodologias bidimensionais para placas de CLT, para a comparação com a equação proposta. Assim, o Método Gama e o Shear Analogy, as metodologias mais utilizadas para o cálculo da estimativa da rigidez à flexão de placas de CLT, foram selecionados para a comparação. Dessa forma, utilizou-se como intermédio a equação da Resistência dos Materiais (98), que estima o deslocamento transversal para elementos unidimensionais biapoiados sujeitos a uma carga linearmente distribuída, com o intuito de comparar a equação proposta com tais metodologias.

$$w = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 EI} \quad (98)$$

Da equação (98), w é o deslocamento transversal, q é a carga linearmente distribuída, L é o comprimento do elemento unidimensional, EI é a rigidez do conjunto. Com isso, a rigidez efetiva foi calculada por meio do Método Shear Analogy (99) e Gama (100).

$$EI_{ef,S} = \sum_{i=1}^n E_i \cdot I_i + E_i \cdot A_i \cdot a_i^2 \quad (99)$$

$$EI_{ef,\gamma} = \sum_{i=1}^n E_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2 \quad (100)$$

De (99) e (100), $EI_{ef,\gamma}$ e $EI_{ef,S}$ são as rigidezes efetivas da placa de CLT de acordo com o Shear Analogy e o Método Gama, respectivamente. Além disso, n é o número de camadas; i é o índice referente as camadas, E_i é o módulo de elasticidade da i -ésima camada, I_i é a inércia da i -ésima camada, A_i é a área da seção transversal da i -ésima camada, a_i é a distância entre o centro de gravidade da peça ao centro de gravidade da i -ésima camada e o fator redutor gama (γ_i) é calculado conforme a equação (101). Entretanto, o índice i refere-se a todas as camadas para o Método Shear Analogy e somente as camadas longitudinais no Método Gama.

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & , \text{ se a camada for transversal ou} \\ & \text{central;} \\ \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot E_i \cdot A_i}{L_{ef}^2} \cdot \frac{h_j}{G_{90} \cdot b}} & , \text{ se a camada for longitudinal.} \end{cases} \quad (101)$$

Com isso, isolando-se a variável da carga linearmente distribuída e dividindo-a pelo valor da largura (b), transformou-se a carga linearmente distribuída em carga distribuída por área (102), por conseguinte, equiparou-se o resultado à equação proposta.

$$q_A = \frac{384 \cdot w \cdot EI}{5 \cdot L^4 \cdot b} \quad (102)$$

Entretanto, convém destacar que a equação (102) é destinada a elementos unidimensionais biapoiados e a equação proposta é voltada a placas bidimensionais de CLT quadriapoiadas (quatro bordos apoiados). Portanto, ciente da notória diferença de aplicação, a comparação foi realizada apenas para placas quadradas (Tabela 10), uma vez que os efeitos de flexão são distribuídos de maneira mais uniforme (curvatura simétrica). Quanto as configurações, selecionou-se uma configuração com a menor e maior espessura possível para cada combinação de comprimento-largura (Tabela 10).

Tabela 10 – Parâmetros considerados na validação da equação

ID	Comprimento (mm)	Largura (mm)	Configurações
1	2000	2000	3C [60]
2	2500	2500	3C [60]
3	3000	3000	3C [60]
4	3500	3500	3C [60]
5	2000	2000	3C [100]
6	2500	2500	3C [120]
7	3000	3000	5C [150]
8	3500	3500	5C [170]

Fonte: O próprio autor, 2024.

Além disso, foram definidos valores intermediários de comprimento e largura (Tabela 11), que resultassem em valores de parâmetros não considerados na

construção do modelo de regressão, a fim de avaliar sua precisão diante de simulações adicionais realizadas no CLT Plate Software.

Tabela 11 – Parâmetros interpolados

ID	Comprimento (m)	Largura (m)	Configuração
E1	5,9	3,3	3C [80]
E2	13,1	2,4	3C [120]
E3	10,9	2,2	3C [90]
E4	4,3	2,6	3C [110]
E5	15,400	2,3	3C [70]
E6	8,700	2,6	5C [130]
E7	6,300	3,3	5C [130]
E8	3,800	3,4	5C [160]
E9	13,800	3,3	5C [140]
E10	4,200	2,7	3C [60]
E11	6,500	2,9	3C [80]
E12	7,100	3,4	3C [120]
E13	2,200	2,1	3C [100]
E14	12,100	3,1	5C [140]
E15	12,300	3,2	5C [160]
E16	9,300	2,4	3C [120]
E17	9,700	2,4	3C [100]
E18	4,8	3,3	5C [160]
E19	5,2	2,7	3C [90]
E20	16,3	2,8	3C [120]

Fonte: O próprio autor, 2024.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados obtidos ao longo do estudo. Primeiramente são apresentados os resultados da revisão bibliográfica sistemática (RBS), seguidos pela apresentação do *software* desenvolvido e a validação de seus resultados. Posteriormente, é realizada uma análise detalhada dos resultados das simulações, apresentada a equação obtida por meio da metodologia clássica e da regressão simbólica. Por fim, são discutidos os resultados da validação da equação proposta, destacando sua precisão e aplicabilidade.

4.1 RESULTADOS DA RBS

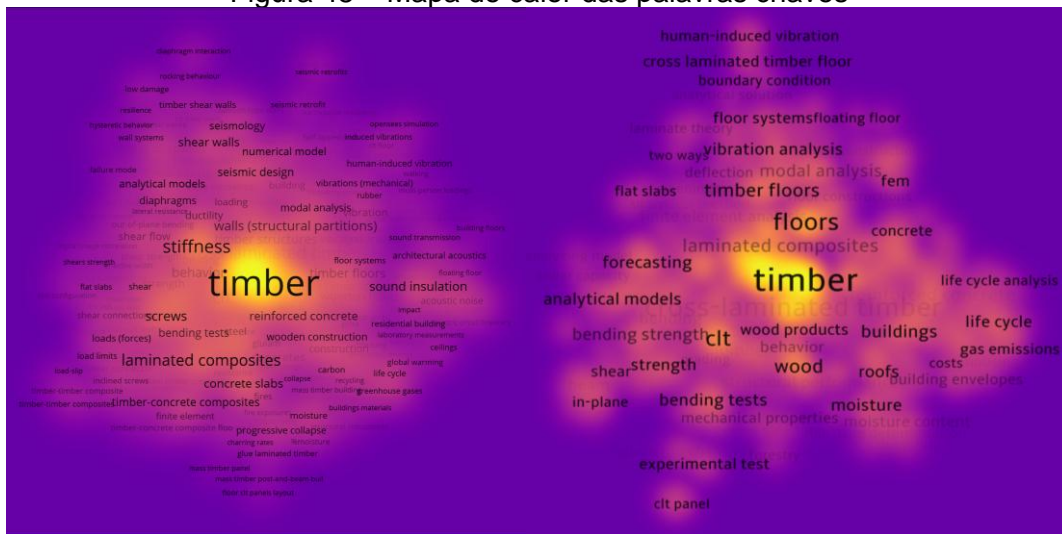
Após uma primeira busca geral, sem a exclusão de termos, utilizando-se as *strings* de busca que, para uma melhor compreensão, são novamente apresentadas no Quadro 15, encontrou-se uma considerável presença de termos indesejados (Figura 48a), não correlatos com o foco da RBS em questão. Com a exclusão destes termos indesejados, obteve-se uma maior concentração de trabalhos com palavras chaves referentes ao objetivo da RBS (Figura 48b).

Quadro 15 – *Strings* de busca utilizadas na RBS

Código	Strings
S1	(("cross laminated timber" OR "cross-laminated timber" OR "x-lam") AND (slab OR floor OR roof)) NOT (fire OR seismic OR acoustic OR connection OR connector)
S2	(("cross laminated timber" OR "cross-laminated timber" OR "x-lam") AND ("numerical simulation" OR "numerical model" OR "numerical modelling" OR FEM) AND (slab OR floor OR roof)) NOT (fire OR seismic OR acoustic OR connection OR connector)
S3	(("cross laminated timber" OR "cross-laminated timber" OR "x-lam") AND ("mathematical model" OR "analytical model")) NOT (fire OR seismic OR acoustic OR connection OR connector)

Fonte: O próprio autor, 2023.

Figura 48 – Mapa de calor das palavras chaves



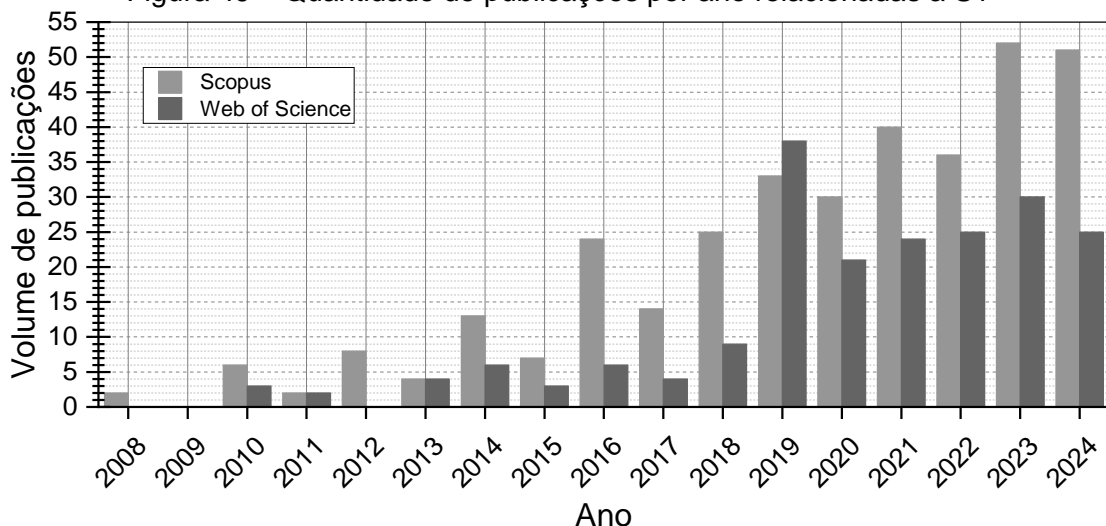
(a) Primeira busca

(b) Busca definitiva

Fonte: O próprio autor, 2024.

Na Figura 49, pode ser visualizado o gráfico da quantidade de publicações por ano relativa à pesquisa da S1 (primeira *string*) nas bases de dados Scopus e Web of Science. Observa-se que houve um aumento no número de publicações relacionados a pisos (ou placas) de CLT, sendo que o maior número de publicações ocorreu no de ano 2023 tanto na Scopus (52 publicações) quanto na Web of Science (30 publicações). Entretanto, observar que houve uma pequena queda em relação ao ano de 2024 (51 publicações na Scopus e 25 na Web of Science).

Figura 49 – Quantidade de publicações por ano relacionadas a S1

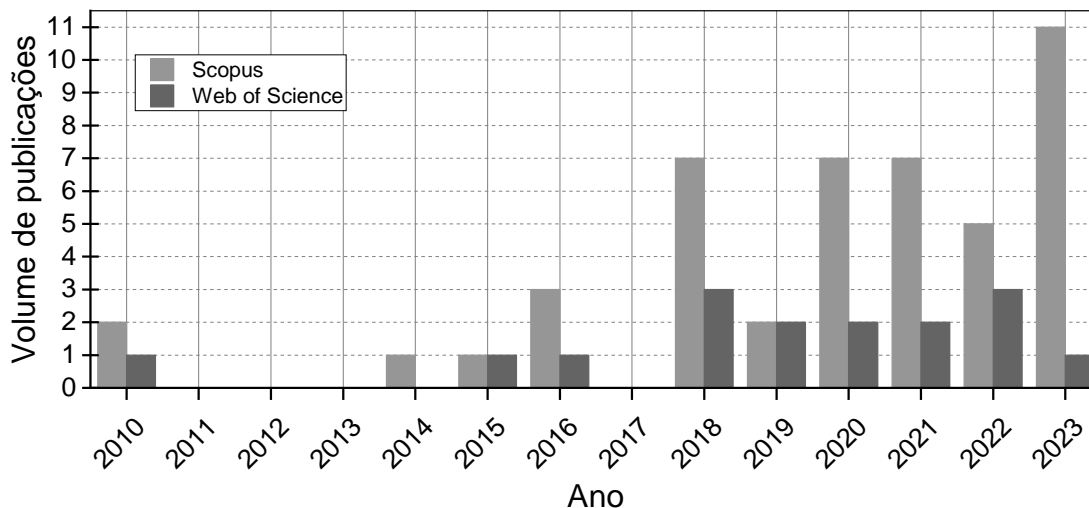


Fonte: O próprio autor, 2024.

Quanto a progressão da segunda *string* (S2), por meio da Figura 50, constata-se uma diminuição geral do número de publicações por ano em relação a S1, sinalizando o afunilamento das buscas. Além disso, nota-se que o maior número de

publicações ocorreu em 2023 pela Scopus (11 publicações) e nos anos 2018 e 2022 na Web of Science (3 publicações).

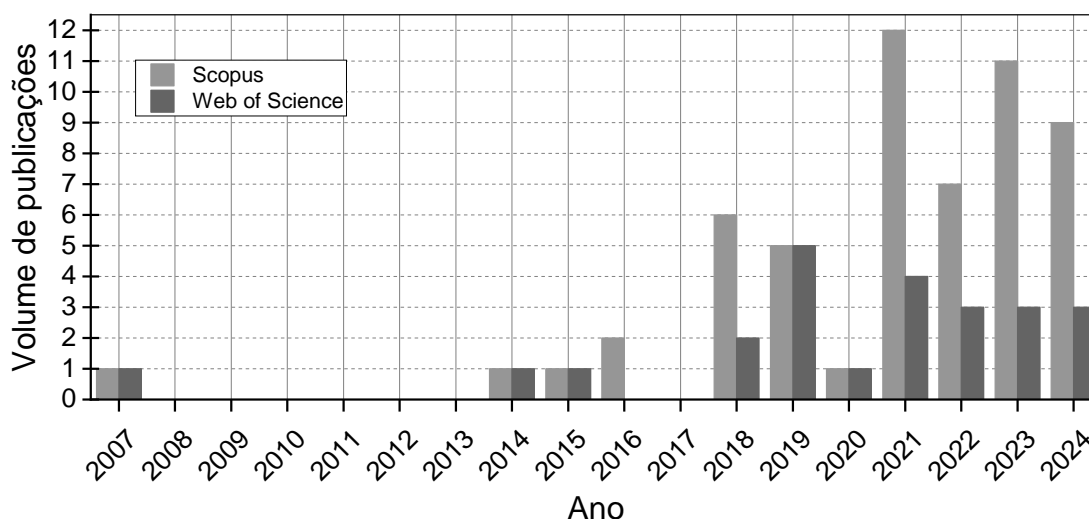
Figura 50 – Quantidade de publicações por ano relacionadas a S2



Fonte: O próprio autor, 2024.

A Figura 51 permite visualizar o gráfico a evolução das publicações relativa a terceira *string* (S3). Com exceção de um trabalho isolado publicado em 2007, visualiza-se o surgimento das publicações no ano de 2014 em ambas as bases de dados. Posteriormente, um aumento de até o auge em 2021 (12 publicações na Scopus e 4 na Web of Science).

Figura 51 – Quantidade de publicações por ano relacionadas a S3

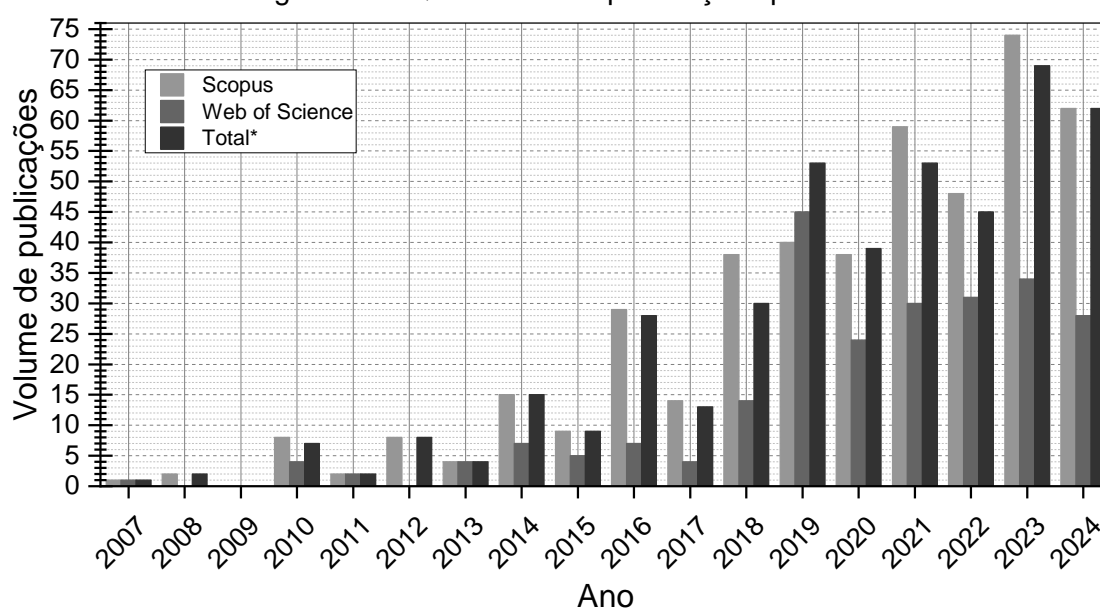


Fonte: O próprio autor, 2024.

O agrupamento dos resultados das três *strings* (S1, S2 e S3), Figura 52, permite observar tanto detalhadamente o número de publicações de cada base de dados por

ano quanto de modo geral o número total de publicações (com remoção dos trabalhos duplicados). Assim, identifica-se a tendência de aumento no volume de publicações, sendo 2023 o pico nas duas bases de dados (74 publicações na Scopus e 34 publicações na Web of Science) e no número total de publicações com remoção dos duplicados (69 publicações). Portanto, constata-se o crescimento de interesse em tal tema desde 2007 até 2023 e uma pequena queda em 2024.

Figura 52 – Quantidade de publicações por ano

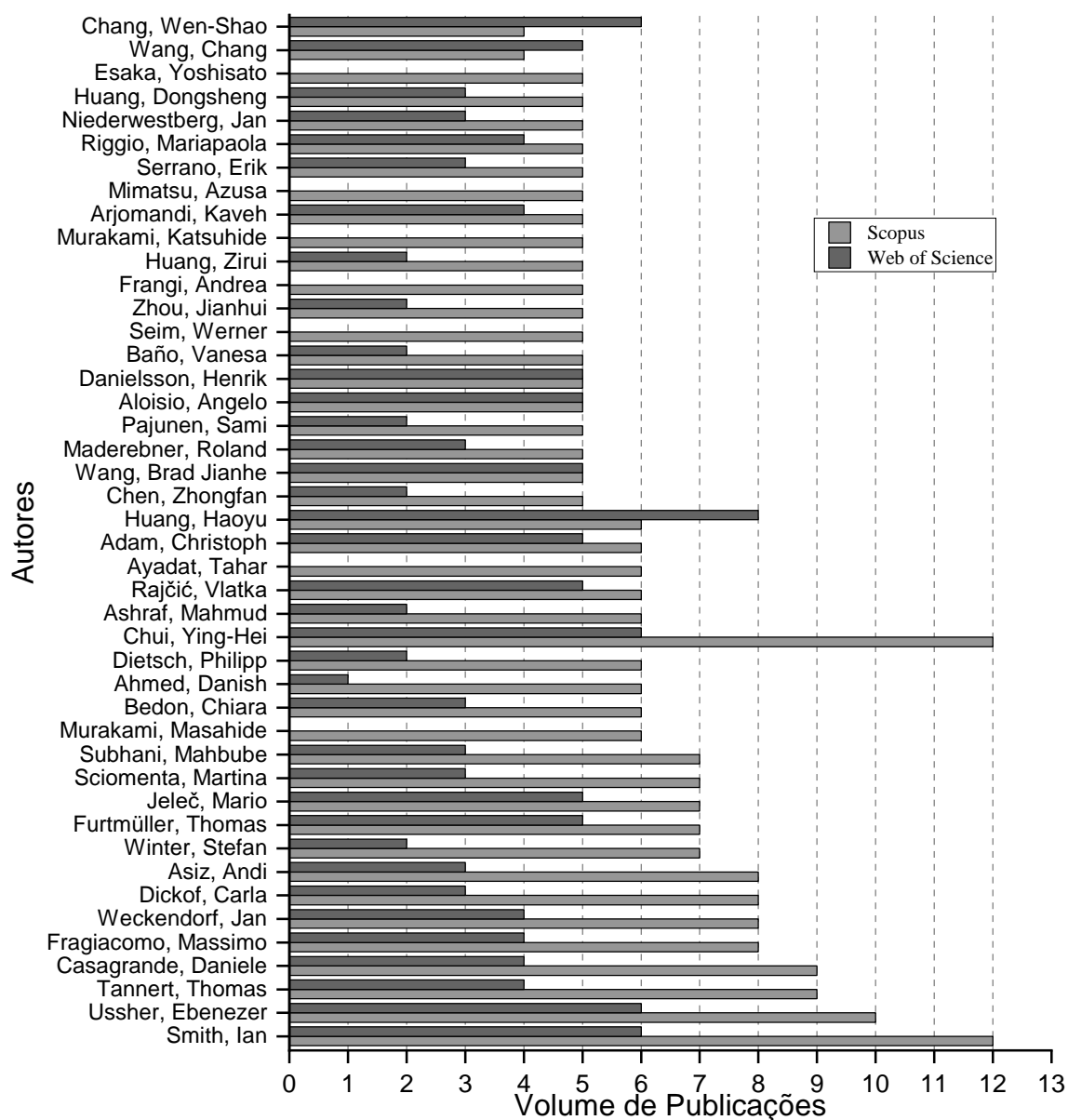


* Removido os trabalhos duplicados

Fonte: O próprio autor, 2024.

No total foram identificados 951 autores na Scopus e 634 no Web of Science. Devido a enorme quantidade de autores, o gráfico do volume de publicações por autor (Figura 53) apenas permite a visualização daqueles autores com 5 ou mais publicações em pelo menos uma base de dados. Dessa forma, os autores que mais publicaram foram Ian Smith e Yinh-Hei Chui (18 publicações nas duas bases de dados).

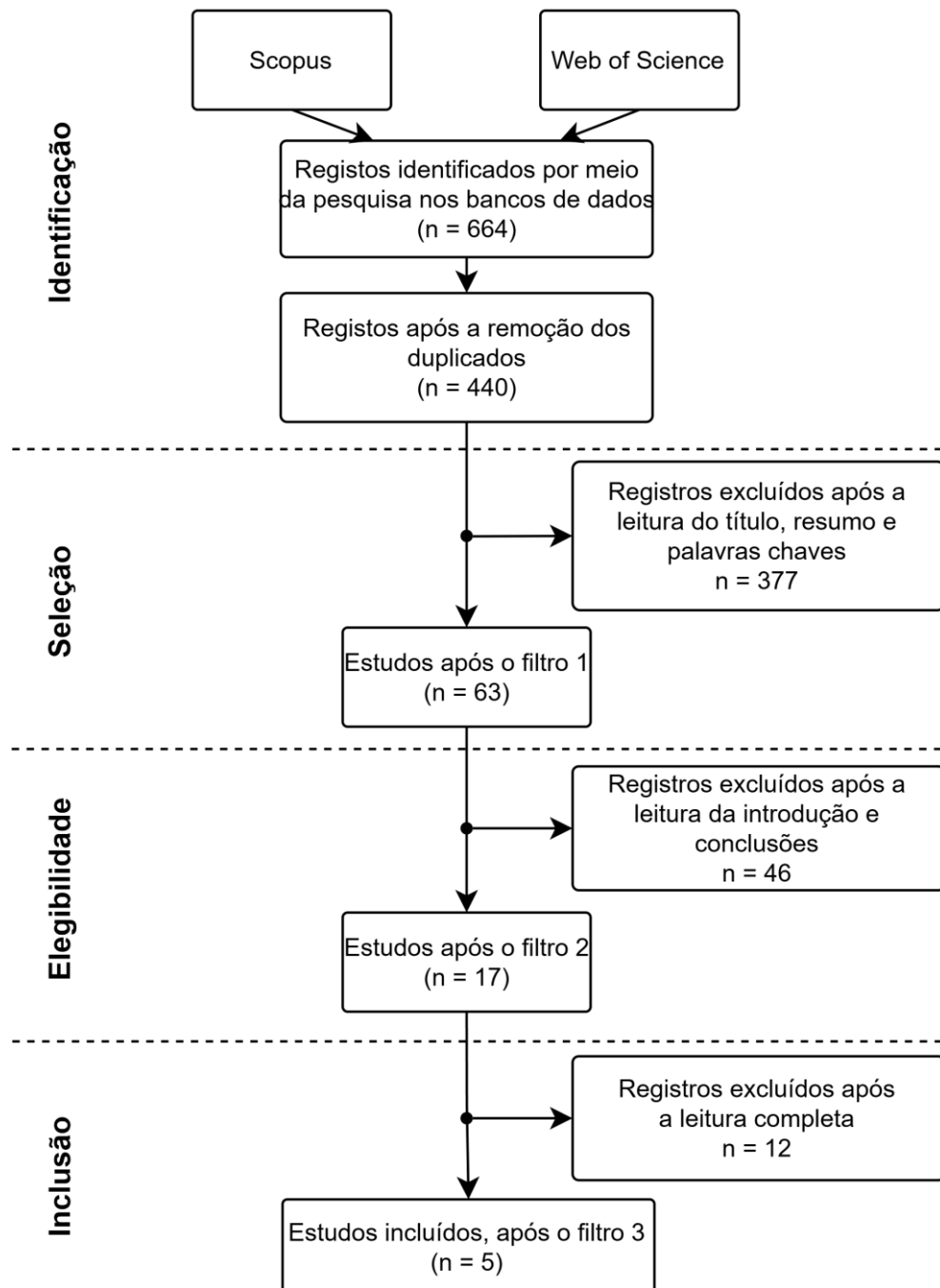
Figura 53 – Volume de publicações por autor



Fonte: O próprio autor, 2024.

Por conseguinte, o fluxograma prisma (Figura 54) permite observar os resultados do processo de RBS: a quantidade total de trabalhos obtidos pelas bases de dados, o número de trabalhos duplicados excluídos, e a quantidade de trabalhos excluídos e selecionados em cada fase (filtro).

Figura 54 – Fluxograma prisma



Fonte: O próprio autor, 2025.

Dessa maneira, da Figura 54, nota-se que 5 trabalhos correlatos foram encontrados até o momento. A seguir são apresentadas as resenhas destes trabalhos, a qual destaca os destaques, semelhanças e diferenças com o trabalho aqui proposto.

De acordo com Sciomenta *et al.* (2021), embora o CLT seja amplamente reconhecido, não há um modelo matemático único no intuito de simular seu comportamento devido sua complexidade. Com isso, Sciomenta *et al.* (2021) desenvolvem um modelo analítico de abordagem 1D para o cálculo da deflexão, com

base na teoria de Euler-Bernoulli. Com intuito de contabilizar as camadas, Sciomenta *et al.* (2021) formulou o modelo imaginando-se vigas 1D sobrepostas conectadas por dispositivos elásticos que representariam a cola entre as camadas. Entretanto, os resultados analíticos, obtidos por Sciomenta *et al.* (2021) apresentam uma dispersão de +11% a +15%, de modo que o modelo analítico subestima ligeiramente a deflexão quando se comparado com os ensaios experimentais. Portanto, Sciomenta *et al.* (2021) confirmam a complexidade do comportamento de placas de CLT e apresentam uma equação de abordagem 1D, o que diverge da equação bidimensional proposta neste trabalho.

Outrora, Khan e Chui (2021) propuseram um modelo analítico para estimativa do módulo cisalhante no plano a partir de um ensaio simples de compressão. A proposta deste método é justificada pelo teste de vibração que muitas vezes não é viável, por conseguinte, um método baseado no ensaio de compressão seria mais praticável. Brandner *et al.* (2017) propõem uma estimativa para o módulo cisalhante advinda do modelo constitutivo dos laminados, mas ignora os coeficientes de Poisson, por consequência, a proposta de Khan e Chui (2021) é justamente uma aprimoração com a consideração dos coeficientes de Poisson. Entretanto, convém ressaltar que tal método necessita da medida da elasticidade obtida através de um teste simples de compressão aplicado a uma amostra de CLT cortada a um ângulo de 45° em relação à direção das fibras da superfície externa. Portanto, observa-se que a equação é estritamente relacionada a tal ensaio de compressão, limitando-se sua utilização.

Segundo Huang *et al.* (2023a) as fórmulas para cálculo da capacidade de cisalhamento, ou seja, esforço cortante máximo de placas CLT advindas dos métodos Gama e Shear Analogy são complexas e não apresentam resultados satisfatórios. Nesse sentido, Huang *et al.* (2023a) apresentam um método unidimensional simplificado baseada na teoria de vigas compostas, desconsiderando-se as camadas transversais, para calcular a capacidade de cisalhamento de placas de CLT. Com isso, Huang *et al.* (2023a) realizou a comparação do método simplificado, Método Gama, Shear Analogy e Composite Beam Theory com um ensaio experimental, o qual os resultados apontaram que a metodologia simplificada fornece resultados muito próximos a Composite Beam Theory e Shear Analogy. Logo, Huang *et al.* (2023a) conclui que por conta da facilidade da metodologia simplificada, as metodologias Composite Beam Theory e Shear Analogy poderiam ser substituídas. No entanto,

devido as suas simplificações mencionadas, tais métodos correlatos apresentam resultados medianos e são de abordagem unidimensional.

Em outro trabalho, Huang *et al.* (2023b) ressaltam que os modelos analíticos (Método Gama e Shear Analogy method) não fornecem uma distribuição de tensão de cisalhamento necessária para estimar quando a falha ocorrerá, por conseguinte, com o foco em responder como a tensão de cisalhamento é distribuída longitudinalmente e qual é o ponto de máxima tensão, Huang *et al.* (2023b) propõem um método, derivado da teoria da viga em camadas, para a análise do efeito de tensão do *rolling shear*. A metodologia é restrita apenas a vigas de 3 e 5 camadas de *Cross Laminated Timber* (CLT) sob flexão fora do plano. As equações propostas foram validadas pelos dados experimentais gerados pelos autores e por outros pesquisadores. Portanto, quando comparado ao Shear Analogy method e ao Método Gama, Huang *et al.* (2023b) concluem que o método proposto necessitou um menor trabalho computacional e precisão semelhante dentro das limitações (viga de CLT, 3 e 5 camadas).

Zhang *et al.* (2024) tinham como objetivo investigar a rigidez à flexão aparente de painéis de madeira laminada cruzada (CLT) sob diferentes ângulos de cruzamento, propondo uma correção ao Shear Analogy method ao incorporar a equação de Hankinson. Os resultados demonstraram que a rigidez à flexão dos painéis CLT varia significativamente com a orientação das camadas e os ângulos de carga, com a metodologia proposta apresentando previsões quase idênticas aos modelos numéricos para ângulos de 0° e 90°. No entanto, o estudo enfrenta limitações, como a falta de diretrizes nos padrões de design para CLT em orientações não convencionais, o que pode dificultar a aplicação prática dos resultados em projetos arquitetônicos complexos. Além disso, a abordagem unidimensional do método pode não capturar completamente as interações tridimensionais que ocorrem em estruturas reais, e a necessidade de modelagem detalhada e o tempo envolvido na análise numérica podem ser barreiras para a adoção generalizada da metodologia proposta.

Convém destacar que para aplicações de CLT fora do foco da revisão bibliográfica deste trabalho, por exemplo, como viga de CLT em que a seção é orientada no sentido vertical, Danielsson e Serrano (2018), Jeleč *et al.* (2021) apresentam métodos melhorados para a estimativa da resistência de cisalhamento e Huang *et al.* (2022) para a estimativa do *rolling shear* ao longo da direção longitudinal. Além disso, na utilização da placa CLT como parede, D'Arenzo (2023) apresenta um

modelo para previsão da resposta lateral de paredes de cisalhamento de madeira laminada cruzada (CLT) e Nolet, Casagrande e Doudak (2019) um modelo analítico para descrever o comportamento elástico-plástico de paredes de cisalhamento de madeira laminada cruzada (CLT) submetidas a cargas laterais. Em adição, para produtos semelhantes como CLBT (*Cross Laminated Bamboo and Timber*), Li *et al.* (2022) propõem modelos analíticos para a soma dos módulos de flexão aparentes ortogonais com dois tipos de classificações de camadas.

O Quadro 16 permite visualizar a síntese dos trabalhos correlatos encontrados. Dessa forma, tornar-se nítido que nenhum dos trabalhos encontrados apresenta uma equação para estimativa da carga limite de serviço, e apenas Khan Chui (2021) apresenta uma equação de abordagem 2D que depende de parâmetros experimentais.

Quadro 16 – Síntese dos trabalhos correlatos

Título	Autores	Propõe equação?	Finalidade da equação	Abordagem	Origem da Equação
<i>Linear model to describe the working of a three layers CLT strip slab: Experimental and numerical validation</i>	Sciomenta <i>et al.</i> (2021)	Sim	Deflexão	1D	Analítica
<i>Prediction of in-plane shear modulus of CLT from laminate properties</i>	Khan e Chui (2021)	Sim	Módulo cisalhante no plano	2D	Analítica
<i>The appropriacy of the analytical models for calculating the shear capacity of cross-laminated timber (CLT) under out-of-plane bending</i>	Huang <i>et al.</i> (2023a)	Sim	Capacidade de cisalhamento (esforço cortante máximo)	1D	Analítica
<i>A layered beam-based model for analyzing the stress of rolling shear for the cross-laminated timber panels under out-of-plane bending</i>	Huang <i>et al.</i> (2023b)	Sim	Tensão de <i>rolling shear</i>	1D	Analítica
<i>Out-of-plane cross-angle bending stiffness of cross-laminated timber</i>	Zhang <i>et al.</i> (2024)	Sim	Rigidez à flexão	1D	Analítica

Fonte: O próprio autor, 2025.

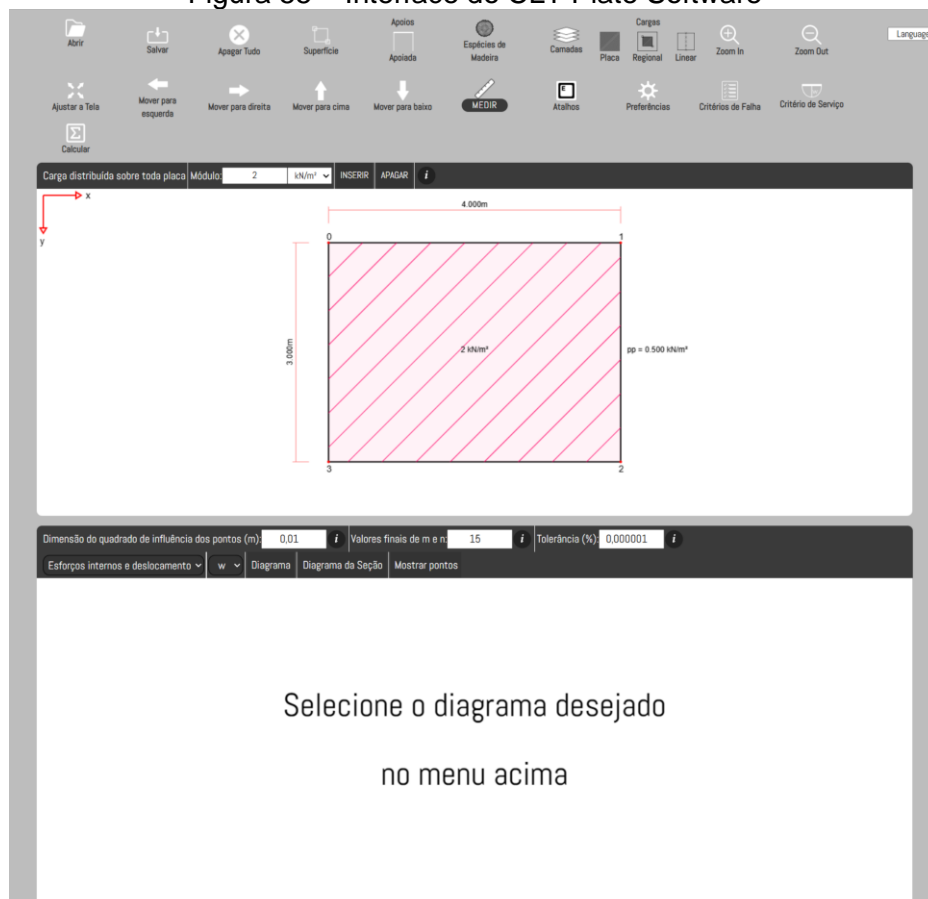
Convém destacar que a RBS é um processo iterativo, portanto, tal atividade foi desenvolvida durante todo o período do desenvolvimento da pesquisa.

4.2 CLT PLATE SOFTWARE

A interface do software desenvolvido, intitulado de CLT Plate Software, pode ser visualizada na Figura 55. O programa oferece várias funcionalidades que facilitam a inserção dos dados de entrada (dimensões das placas, configuração das camadas, espécies e suas propriedades mecânicas, cargas etc.) e a análise dos resultados. Convém ressaltar que todas as funcionalidades do *software* são apresentadas no guia detalhado do APÊNDICE A, no qual são delineados os passos para acessar cada uma das ferramentas e como utilizá-las.

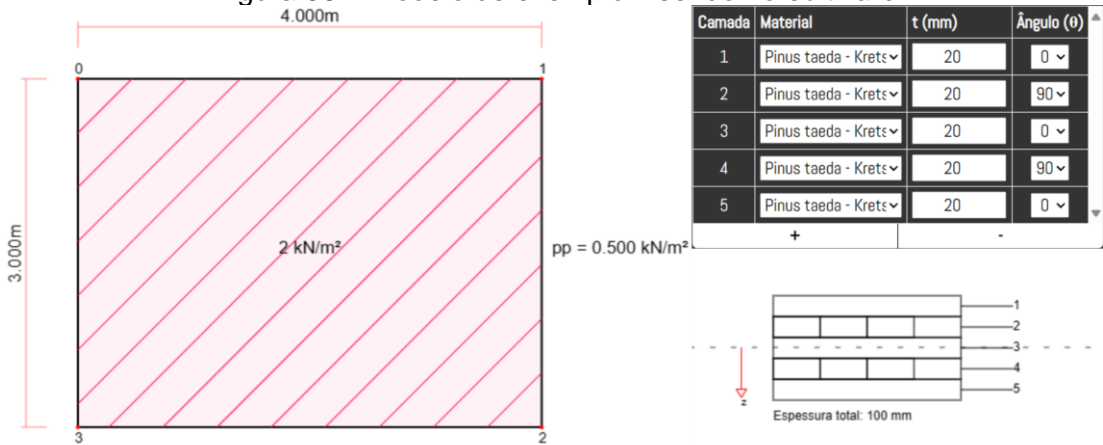
Para efeito de ilustração e melhor compreensão, a Figura 56 permite a visualização de um exemplo de placa de CLT. Nela, são apresentadas as propriedades geométricas de placa, a espécie utilizada (*Pinus taeda L.*, cujas propriedades podem ser visualizadas na Tabela 3) e a carga sobre a placa. Com isso, a Figura 57 possibilita observar o diagrama de deslocamento transversal (w) e da tensão global na direção de x (σ_{xx}) na fase superior do laminado de tal exemplo (Figura 56).

Figura 55 – Interface do CLT Plate Software



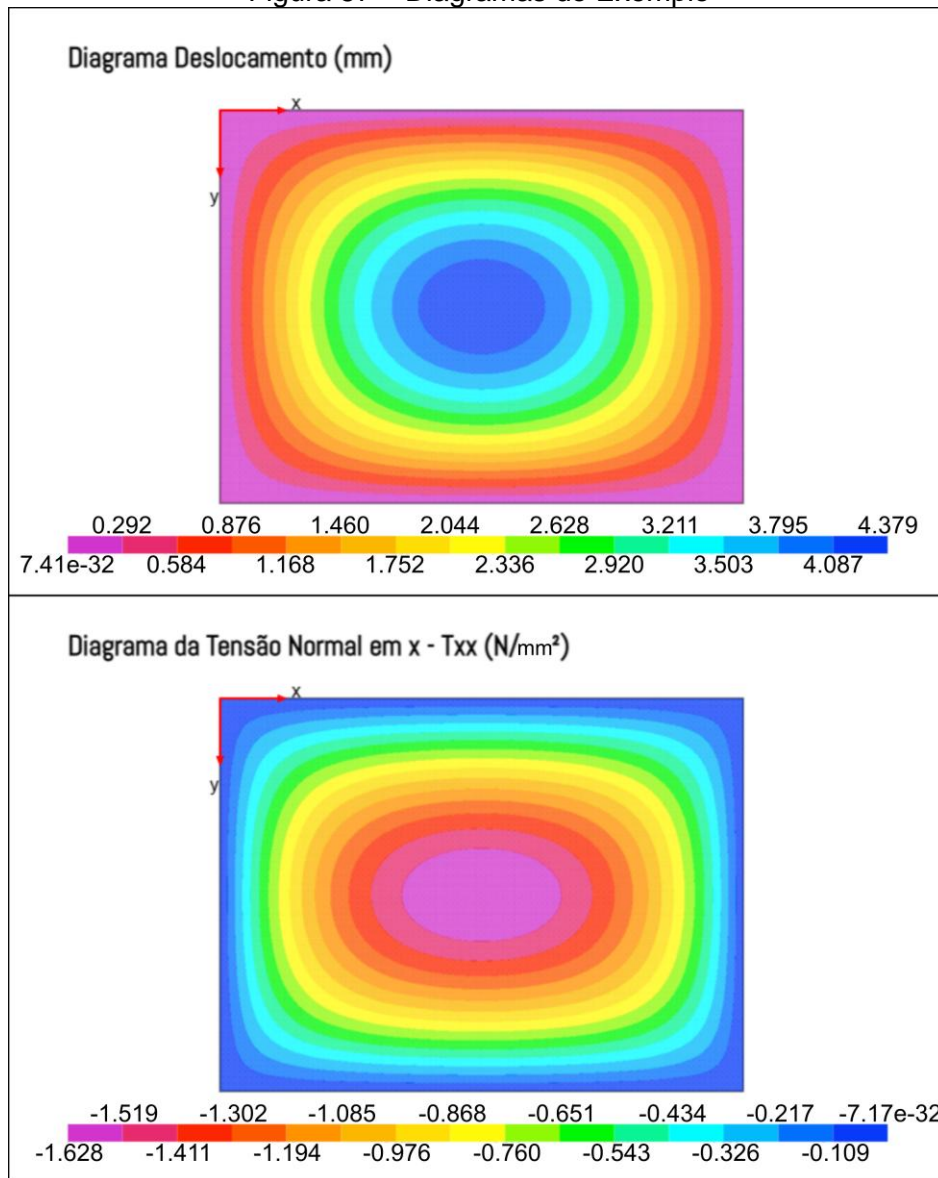
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 56 – Modelo de exemplo inserido no software



Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 57 – Diagramas do Exemplo



Fonte: O próprio autor, 2024.

4.3 VALIDAÇÃO DO SOFTWARE

Neste capítulo é apresentada a validação do *software* desenvolvido (CLT Plate Software), cujas funcionalidades são explicitadas no APÊNDICE A.

Na Tabela 12, pode-se visualizar os valores dos componentes das matrizes de rigidez à flexão (**D**) das oito composições (Tabela 6) modeladas no *software* RFEM 5® (Dlupal, 2024) e CLT Plate Software. Nota-se que as matrizes **D** foram idênticas para todas as oitos composições, validando-se a rotina até tal etapa.

Tabela 12 – Matrizes **D** obtidas pelo RFEM 5® e CLT Plate Software

Software	D_{11} (kN*m)	D_{12} (kN*m)	D_{22} (kN*m)	D_{66} (kN*m)
Composição 1				
CLT Plate Software	6671,808	188,014	2226,974	664,200
RFEM 5®	6671,808	188,014	2226,974	664,200
Diferença (%)	0	0	0	0
Composição 2				
CLT Plate Software	9606,524	324,888	5770,571	1147,738
RFEM 5®	9606,524	324,888	5770,571	1147,738
Diferença (%)	0	0	0	0
Composição 3				
CLT Plate Software	25736,813	634,546	4296,576	2241,675
RFEM 5®	25736,813	634,546	4296,576	2241,675
Diferença (%)	0	0	0	0
Composição 4				
CLT Plate Software	30402,334	770,104	6047,077	2720,563
RFEM 5®	30402,334	770,104	6047,077	2720,563
Diferença (%)	0	0	0	0
Composição 5 e 6				
CLT Plate Software	1024,251	23,502	88,096	83,025
RFEM 5®	1024,251	23,502	88,096	83,025
Diferença (%)	0	0	0	0
Composição 7				
CLT Plate Software	215,271	5,076	24,996	17,933
RFEM 5®	215,271	5,076	24,996	17,933
Diferença (%)	0	0	0	0
Composição 8				
CLT Plate Software	328,242	8,061	53,294	28,478
RFEM 5®	328,242	8,061	53,294	28,478
Diferença (%)	0	0	0	0

Fonte: O próprio autor, 2024.

Por conseguinte, os valores de deslocamento transversal (w), momentos (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) e tensões ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$) obtidos das simulações consideradas

para a validação da rotina de cálculo referente a carga distribuída uniformemente sobre toda a placa laminada (CDUP), distribuída uniformemente sobre uma região retangular (CDUR) e linearmente distribuída (CDL), podem ser observados da Tabela 13 a Tabela 27.

Da Tabela 13 a Tabela 21, são apresentados os resultados das simulações da carga distribuída uniformemente sobre toda a placa (CDUP). Em geral as diferenças percentuais entre o CLT Plate Software e o RFEM 5 ®, com exceção das tensões cisalhantes no plano xz e yz , foram pequenas com médias entre 0,004% e 0,412% (Tabela 21). Convém destacar que, em 7 das 8 composições, os resultados de deslocamento apresentaram as menores diferenças percentuais entre o CLT Plate Software e o RFEM 5 ®, com uma média de 0,004%.

As maiores diferenças percentuais entre os *softwares* ocorreram nas tensões cisalhantes σ_{xz} e σ_{yz} . Além disso, não houve diferenças percentuais entre o CLT Plate Software e a rotina programada no Excel. Em adição, devido às pequenas diferenças percentuais não houve justificativa suficiente para a alteração do máximo de iterações, 225 por ponto ($m_{m\acute{a}x}, n_{m\acute{a}x} = 15$).

Tabela 13 – Resultados da composição 1 ($d_{min}/h = 10$) da CDUP

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	4,000	64,862	21,185	15,058	11,980	1,109	2,259	1,033	0,852
RFEM 5 ®	4,000	64,874	21,197	15,098	11,982	1,109	2,265	1,045	0,968
Diferença (%)	0,004	0,018	0,055	0,259	0,017	0,048	0,259	1,117	13,578
Excel	4,000	64,862	21,185	15,058	11,980	1,109	2,259	1,033	0,852
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 14 – Resultados da composição 2 ($d_{min}/h = 10,42$) da CDUP

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	5,000	74,546	44,323	20,423	11,411	1,095	2,127	0,889	0,811
RFEM 5 ®	5,000	74,562	44,339	20,468	11,414	1,096	2,132	0,906	0,870
Diferença (%)	0,003	0,021	0,037	0,218	0,024	0,033	0,219	1,926	7,314
Excel	5,000	74,546	44,323	20,423	11,411	1,095	2,127	0,889	0,811
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 15 – Resultados da composição 3 ($d_{min}/h = 10$) da CDUP

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	6,000	166,849	27,691	35,361	12,022	1,051	2,357	1,190	0,694
RFEM 5®	6,000	166,877	27,663	35,464	12,024	1,052	2,364	1,215	0,814
Diferença (%)	0,002	0,017	0,101	0,291	0,017	0,079	0,291	2,124	17,185
Excel	6,000	166,849	27,691	35,361	12,022	1,051	2,357	1,190	0,694
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 16 – Resultados da composição 4 ($d_{min}/h = 10,94$) da CDUP

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	7,000	168,960	32,871	36,311	10,987	0,974	2,128	0,964	0,616
RFEM 5®	7,000	168,989	32,889	36,408	10,988	0,974	2,133	0,982	0,719
Diferença (%)	0,002	0,017	0,055	0,268	0,017	0,027	0,269	1,895	16,642
Excel	7,000	168,960	32,871	36,311	10,987	0,974	2,128	0,964	0,616
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 17 – Resultados da composição 5 ($d_{min}/h = 20$) da CDUP

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	4,000	2,536	0,869	0,933	1,532	0,479	0,560	0,068	0,051
RFEM 5®	4,000	2,537	0,870	0,935	1,533	0,479	0,561	0,070	0,056
Diferença (%)	0,002	0,036	0,075	0,220	0,036	0,031	0,220	3,261	10,902
Excel	4,000	2,536	0,869	0,933	1,532	0,479	0,560	0,068	0,051
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 18 – Resultados da composição 6 ($d_{min}/h = 30$) da CDUP

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	6,000	0,950	0,574	0,484	0,573	0,316	0,290	0,020	0,018
RFEM 5®	6,000	0,950	0,575	0,485	0,574	0,316	0,291	0,021	0,020
Diferença (%)	0,004	0,064	0,025	0,302	0,064	0,027	0,300	4,449	7,592
Excel	6,000	0,950	0,574	0,484	0,573	0,316	0,290	0,020	0,018
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 19 – Resultados da composição 7 ($d_{min}/h = 41,67$) da CDUP

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	5,000	0,150	0,193	0,099	0,258	0,223	0,165	0,0071	0,012
RFEM 5 ®	5,000	0,152	0,193	0,100	0,260	0,223	0,166	0,008	0,013
Diferença (%)	0,013	0,747	0,005	0,831	0,760	0,007	0,830	8,833	3,565
Excel	5,000	0,150	0,193	0,099	0,258	0,223	0,165	0,0071	0,012
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 20 – Resultados da composição 8 ($d_{min}/h = 50$) da CDUP

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	6,999	0,194	0,293	0,122	0,253	0,186	0,150	0,006	0,011
RFEM 5 ®	6,999	0,195	0,293	0,123	0,255	0,186	0,151	0,006	0,012
Diferença (%)	0,005	0,610	0,011	0,906	0,855	0,017	0,907	8,645	3,225
Excel	6,999	0,194	0,293	0,122	0,253	0,186	0,150	0,006	0,011
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 21 – Média das diferenças percentuais das composições da CDUP

Média	w	M_{xx}	M_{yy}	M_{xy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
Diferença (%)	0,004	0,191	0,046	0,412	0,224	0,034	0,412	4,031	10,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Os resultados referentes à carga distribuída uniformemente sobre região retangular (CDUR) podem ser visualizados da Tabela 22 à Tabela 24. Na Tabela 22, observa-se os resultados da aplicação da carga (Tabela 8) na composição 1, mesmo com um número máximo de iterações por ponto igual 225 ($m_{m\acute{a}x}, n_{m\acute{a}x} = 15$), apresentou resultados satisfatórios (idênticos à rotina do Excel e em geral semelhantes ao do RFEM 5 ®).

Na Tabela 23, pode-se visualizar os resultados da aplicação da carga (Tabela 8) na composição 2. Apesar das pequenas diferenças no deslocamento, momentos e tensões normais e tensão cisalhante no plano xy , as tensões σ_{xz} e σ_{yz} apresentaram divergências consideráveis, mesmo com número máximo de iterações por ponto igual 2500 ($m_{m\acute{a}x}, n_{m\acute{a}x} = 50$).

Em média, com exceção das tensões σ_{xz} e σ_{yz} , as diferenças foram da ordem de 0,015% a 0,714%. Já as maiores diferenças percentuais, advindas das tensões σ_{xz} e σ_{yz} , foram em média de 6,039% a 65,401%.

Tabela 22 – Resultados da composição 1 ($d_{min}/h = 10$) da CDUR

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	4,000	91,235	39,359	10,536	16,822	1,972	1,580	1,368	1,378
RFEM 5®	4,000	91,176	39,318	10,537	16,811	1,970	1,581	1,421	1,614
Diferença (%)	0,002	0,065	0,105	0,011	0,065	0,099	0,011	3,821	17,058
Excel	4,000	91,235	39,359	10,536	16,822	1,972	1,580	1,368	1,378
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 23 – Resultados da composição 8 ($d_{min}/h = 50$) da CDUR

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	7,000	0,957	0,477	0,075	1,259	0,315	0,935	0,288	0,167
RFEM 5®	7,003	0,961	0,479	0,076	1,256	0,315	0,931	0,312	0,357
Diferença (%)	0,042	0,487	0,469	2,130	0,163	0,025	0,459	8,256	113,743
Excel	7,000	0,957	0,477	0,075	1,259	0,315	0,935	0,288	0,167
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 24 – Média das diferenças percentuais das composições da CDUR

Média	w	M_{xx}	M_{yy}	M_{xy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
Diferença (%)	0,015	0,184	0,191	0,714	0,114	0,062	0,235	6,039	65,401

Fonte: O próprio autor, 2024.

Com a aplicação da carga linearmente distribuída (CDL) na composição 1 e composição 8, obteve-se os resultados observados da Tabela 25 a Tabela 27. Em ambas as composições (Tabela 25 e Tabela 26), obteve pequenas diferenças percentuais no deslocamento, momentos, tensões normais e tensão cisalhante no plano xy e consideráveis disparidade nas tensões σ_{xz} e σ_{yz} . Essas últimas apresentaram diferenças percentuais médias (Tabela 27) de 75,556% e 9,247%, respectivamente. Desconsiderando-se tais tensões, em média (Tabela 27), as diferenças percentuais foram 0,008% a 3,452%.

Tabela 25 – Resultados da composição 1 ($d_{min}/h = 10$) da CDL

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	4,000	63,977	40,197	10,671	11,758	1,926	1,601	1,847	1,158
RFEM 5®	4,001	64,259	42,583	10,713	11,803	2,030	1,607	3,148	1,109
Diferença (%)	0,019	0,440	5,935	0,393	0,384	5,386	0,393	70,430	4,199
Excel	4,000	63,977	40,197	10,671	11,758	1,926	1,601	1,847	1,158
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 26 – Resultados da composição 8 ($d_{min}/h = 50$) da CDL

Software	w (mm)	M_{xx} (kN*m/m)	M_{yy} (kN*m/m)	M_{xy} (kN*m/m)	σ_{xx} (MPa)	σ_{yy} (MPa)	σ_{xy} (MPa)	σ_{xz} (MPa)	σ_{yz} (MPa)
CLT Plate Software	7,001	0,209	0,355	0,105	0,274	0,226	0,129	0,091	0,009
RFEM 5®	7,000	0,209	0,361	0,106	0,273	0,230	0,129	0,018	0,008
Diferença (%)	0,007	0,017	1,681	0,077	0,205	1,519	0,076	80,681	14,296
Excel	7,001	0,209	0,355	0,105	0,274	0,226	0,129	0,091	0,009
Diferença (%)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Fonte: O próprio autor, 2024.

Tabela 27 – Média das diferenças percentuais das composições da CDL

Média	w	M_{xx}	M_{yy}	M_{xy}	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
Diferença (%)	0,008	0,152	2,539	0,156	0,294	3,452	0,234	75,556	9,247

Fonte: O próprio autor, 2024.

Em suma, os valores de deslocamento (w), momentos (M_{xx} , M_{yy} e M_{xy}), tensões normais (σ_{xx} e σ_{yy}) e tensão cisalhante no plano xy (σ_{xy}), obtidos do CLT Plate Software e o RFEM 5® foram semelhantes.

No entanto, os valores das tensões interlaminares (σ_{xz} e σ_{yz}) resultaram divergências, as quais podem ser explicadas devido as funções das tensões interlaminares (σ_{xz} e σ_{yz}) serem estimadas por meio de aproximações do equilíbrio tridimensional, uma vez que não são contabilizadas na equação constitutiva da lâmina. Nota-se que tal imprecisão das tensões interlaminares foi mais evidente nas cargas uniformemente distribuída sobre uma região e linearmente distribuída, uma vez que aumentou a concentração de tensões a uma região.

Tendo em vista a preocupação com resultados satisfatórios nas simulações deste trabalho, a determinação da relação d_{min}/h (menor dimensão no plano pela espessura) foi determinada por meio das diferenças percentuais das tensões interlaminares, visto que são as únicas variáveis que apresentaram variações

significativas de acordo com tal relação. Por conseguinte, por meio das diferenças percentuais da Tabela 13 à Tabela 20 (referentes a carga CDUP, utilizadas nas simulações deste trabalho), constata-se resultados satisfatórios a partir da relação $d_{\min}/h \geq 20$, condizente com a recomendação de Reddy (2004).

Originalmente, no estudo paramétrico (seção 3.2.3.2), foram propostas 2520 simulações (Figura 44). Entretanto, notado a imprecisão das tensões interlaminares para relações d_{\min}/h menores que 20, procurou-se restringir $d_{\min}/h \geq 20$, que alterou de 2520 simulações para 996 simulações. Como a maior dimensão da placa de CLT sempre é no sentido do comprimento (longitudinal), com a exclusão das 38 simulações repetidas, 957 simulações foram admitidas como válidas.

Apesar das diferenças obtidas entre os *softwares* CLT Plate Software e o RFEM 5 ®, em todos as situações os valores apresentados pelo CLT Plate Software foram idênticos à rotina do Excel, por consequência, as diferenças entre os programas estão relacionadas essencialmente as diferentes metodologias empregadas.

Portanto, como os resultados obtidos do CLT Plate Software foram idênticos aos dos Excel e similares aos dos *softwares* RFEM 5 ®, pode-se comprovar que o *software* proposto é confiável.

4.4 ANÁLISE ESTATÍSTICA

Neste capítulo, é apresentada a análise estatística dos resultados de carga limite de serviço obtidos das simulações realizadas no *software* CLT Plate Software. Bem como, as propostas da equação para estimativa da carga limite de serviço por meio da metodologia clássica e simbólica.

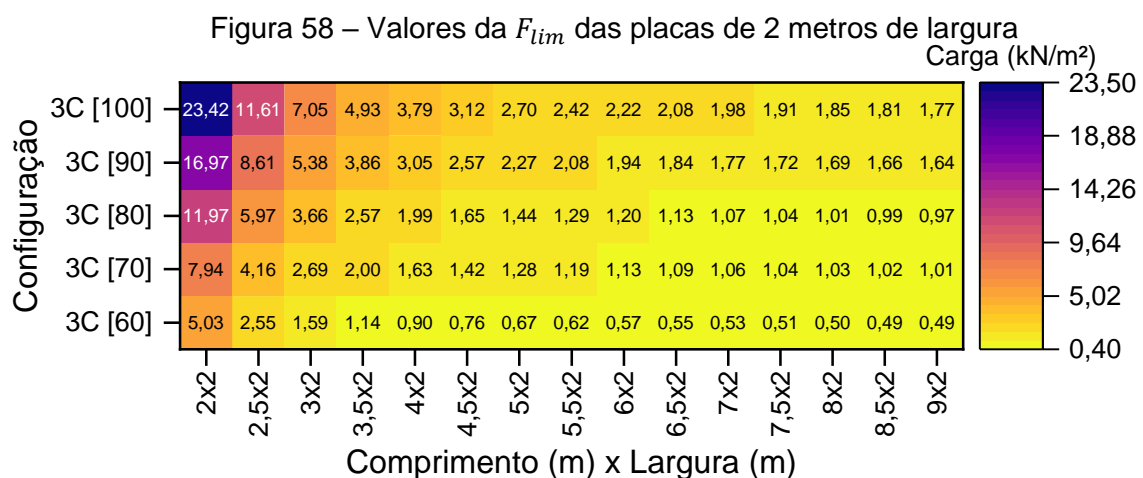
4.4.1 Resultados das simulações

Os resultados das 957 simulações de placas de CLT realizadas no CLT Plate Software são apresentados da Figura 58 à Figura 65, organizadas em quatro grupos de acordo com os valores de largura adotados nas simulações. O primeiro (Figura 58 e Figura 59), segundo (Figura 60 e Figura 61), terceiro (Figura 62 e Figura 63) e quarto (Figura 64 e Figura 65) grupo representam, respectivamente, os resultados das placas de CLT com largura de 2, 2,5, 3 e 3,5 metros.

De modo geral, da Figura 58 à Figura 65, observa-se que as placas de menores dimensões no plano e maiores espessuras tenderam a maiores cargas. Em contrapartida, as placas de maiores dimensões no plano e menores espessuras tenderam a resultar menores valores de carga. No entanto, a combinação de alguns parâmetros geométricos não seguiu tal tendência, algumas placas com espessura menores resultaram maiores valores de cargas quando comparadas àquelas de maiores espessuras para um mesmo comprimento.

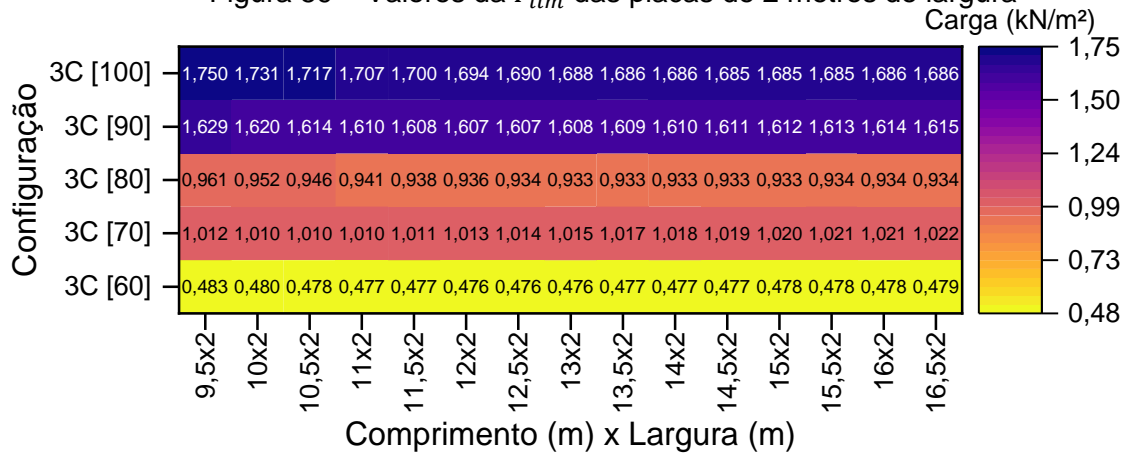
A configuração 3C[70] resultou maiores valores de carga que a configuração 3C[80] a partir de 8, 10, 11 e 13 metros de comprimento, respectivamente, nos valores de largura de 2 (Figura 58 e Figura 59), 2,5 (Figura 60 e Figura 61), 3 (Figura 62 e Figura 63) e 3,5 (Figura 64 e Figura 65) metros. Da mesma forma, a configuração 5C[130] apresentou valores de carga maiores que a configuração 5C[140] nos valores de comprimento igual ou superior a 7 e 8,5 metros, respectivamente, nos valores de 3 (Figura 62 e Figura 63) e 3,5 (Figura 64 e Figura 65) metros de largura.

Tais exceções podem ser explicadas pela formulação da Teoria Clássica da Placa Laminada e do Método de Navier. Da Teoria Clássica da Placa Laminada, especificamente, no cálculo da matriz de rigidez à flexão (**D**), a componente D_{22} é maior nas configurações 3C[70] e 5C[130] do que nas 3C[80] e 5C[140], respectivamente. Com isso, do Método de Navier, a relação s (65) diminui à medida que o comprimento aumenta, ocasionando a menor contribuição das componentes D_{11} , D_{12} e D_{66} no cálculo do deslocamento transversal (65), conseqüentemente, no cálculo da carga (89).



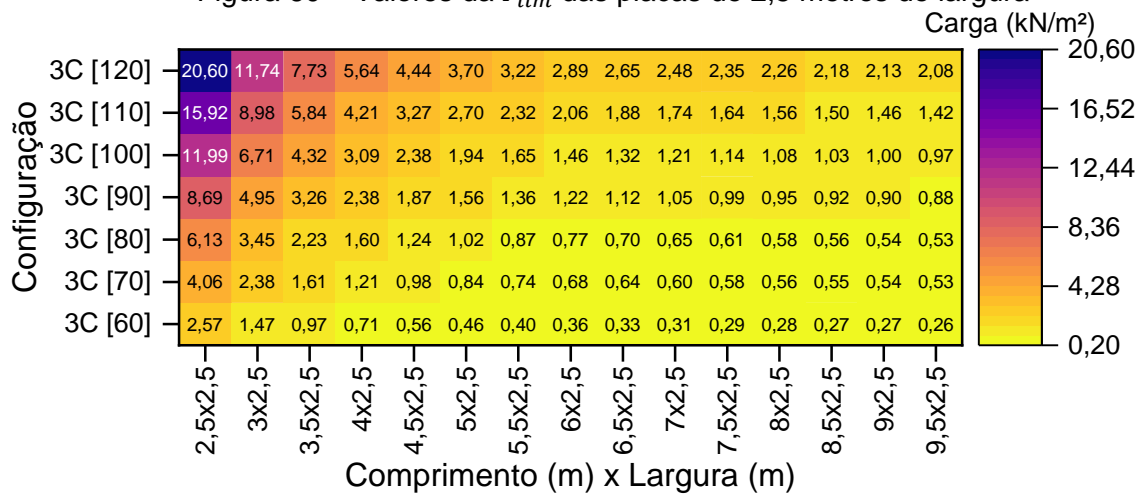
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 59 – Valores da F_{lim} das placas de 2 metros de largura



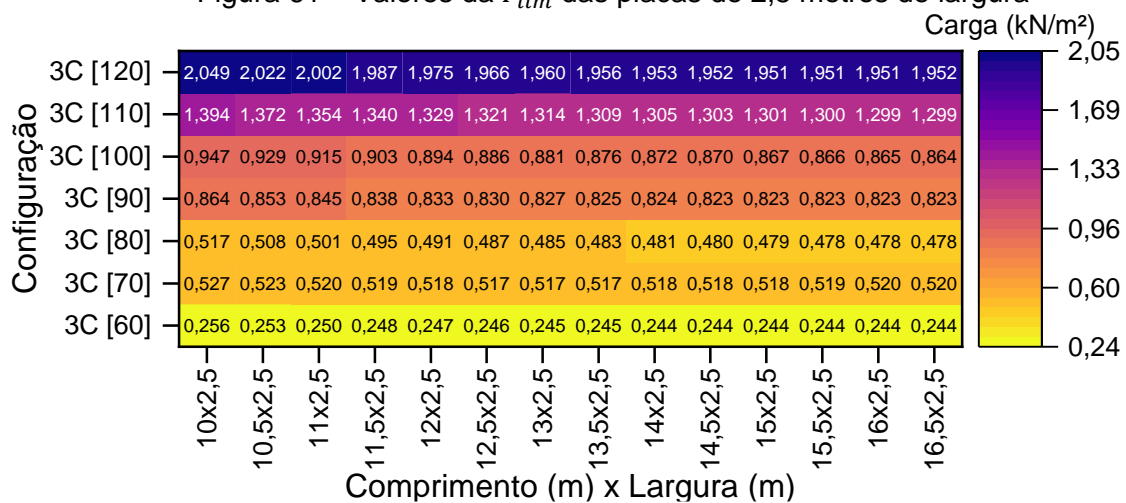
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 60 – Valores da F_{lim} das placas de 2,5 metros de largura



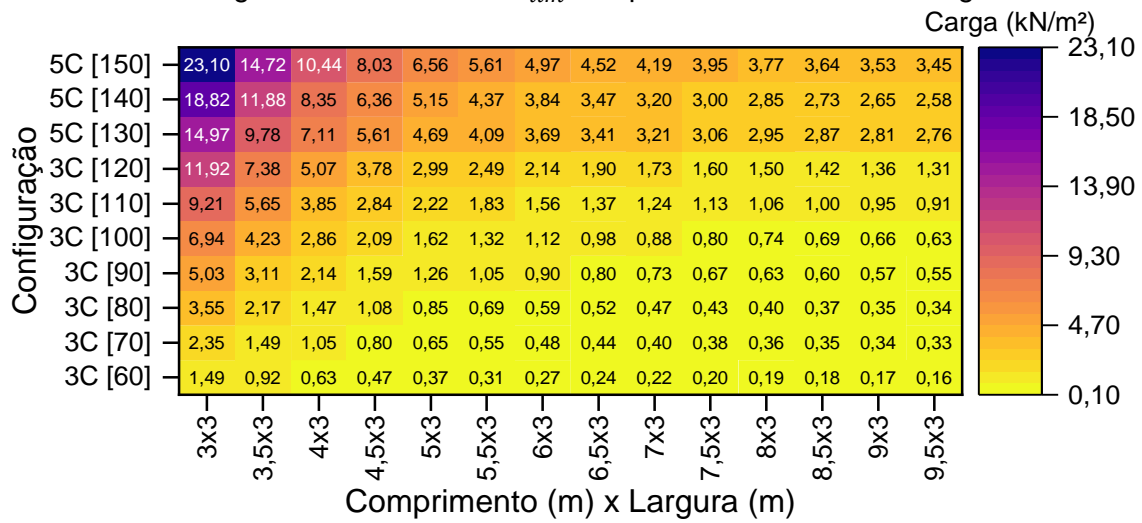
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 61 – Valores da F_{lim} das placas de 2,5 metros de largura



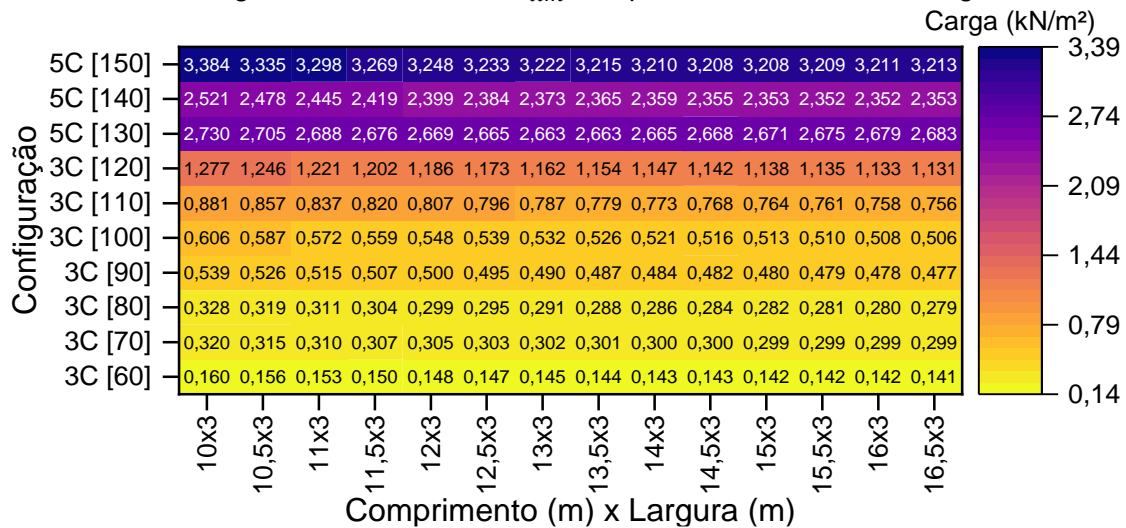
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 62 – Valores da F_{lim} das placas de 3 metros de largura



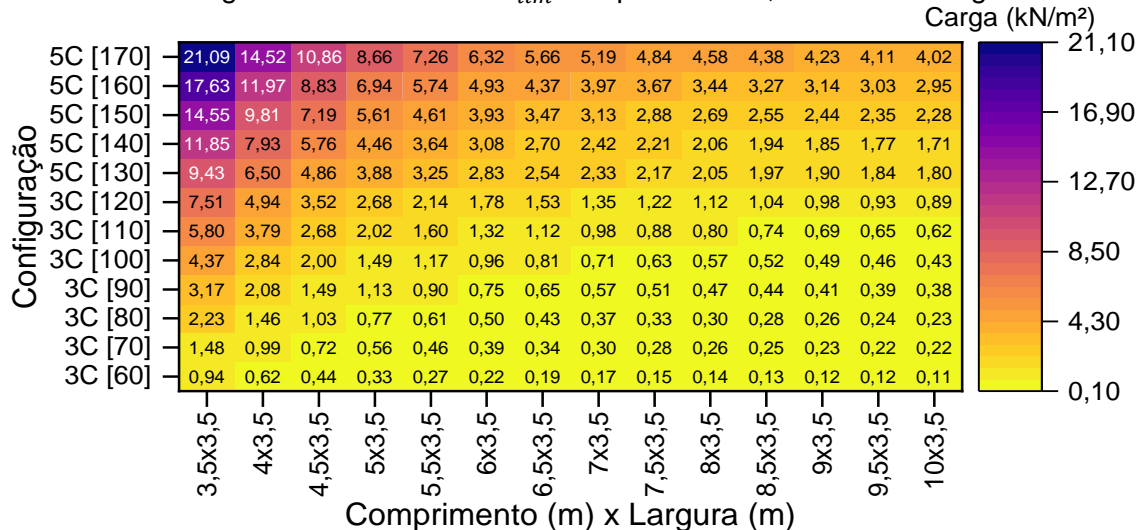
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 63 – Valores da F_{lim} das placas de 3 metros de largura



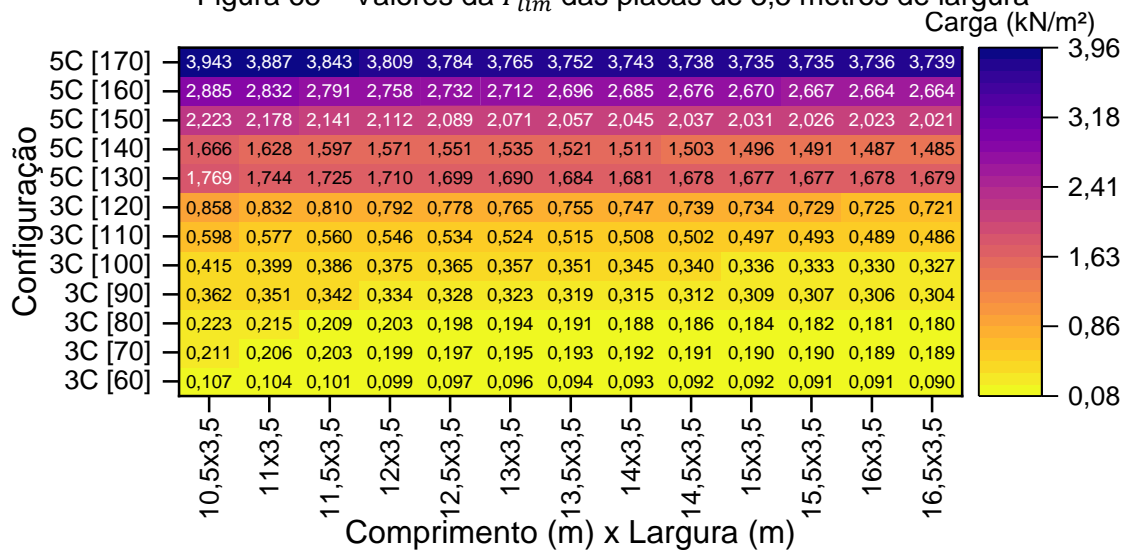
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 64 – Valores da F_{lim} das placas de 3,5 metros de largura



Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 65 – Valores da F_{lim} das placas de 3,5 metros de largura



Fonte: O próprio autor, 2024.

4.4.2 Proposta de modelo de regressão

Neste capítulo, são apresentados os modelos de regressão obtidos tanto por meio da metodologia clássica quanto pela Regressão Simbólica.

4.4.2.1 Método tradicional

Convém relembrar que os parâmetros L/b (relação entre a maior e a menor dimensão no plano da placa de CLT), L/h (relação entre a maior dimensão no plano e espessura da placa de CLT) e b/h (relação entre a menor dimensão no plano e espessura da placa de CLT) foram sintetizados como λ , α e δ , respectivamente.

Por meio dos gráficos de histograma dos parâmetros λ , α e δ , observados da Figura 66 à Figura 68, podem ser visualizadas as frequências de seus valores. Quanto ao parâmetro n_c , este apenas variou-se entre os valores 3 (738 frequências) e 5 (219 frequências).

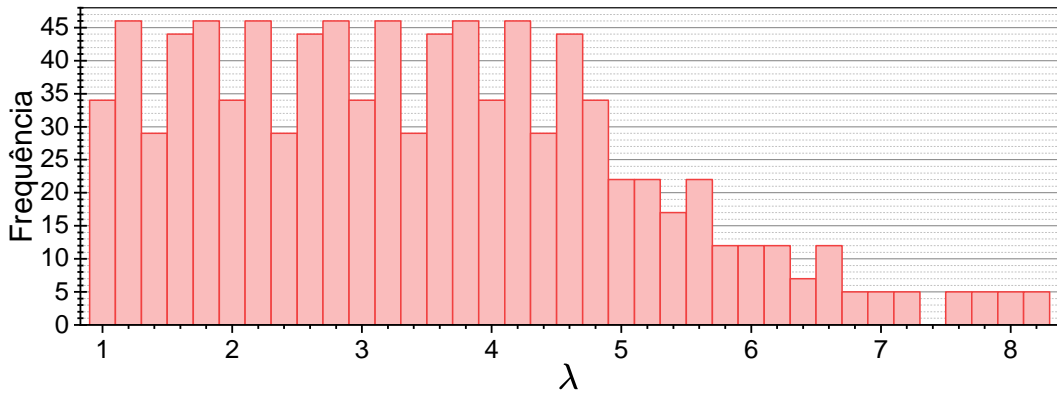
Na Figura 66, o histograma permite a visualização da ocorrência de frequência dos valores de λ . Nota-se que o gráfico é multimodal, com as frequências mais altas concentradas no intervalo de 1 a 4,2. As frequências mais baixas estão concretadas à direita do gráfico, revelando-o como assimétrico.

O histograma da frequência dos valores de α também é assimétrico, como observado na Figura 67. Os valores variam de 20 a 280, com a concentração de

frequência altas à esquerda do gráfico. Trata-se de um gráfico unimodal com o pico no valor 80 com uma frequência de 76.

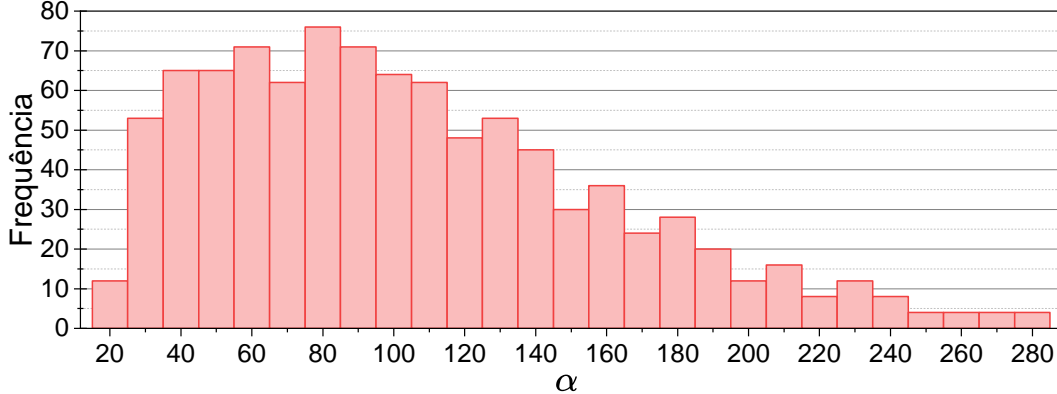
A Figura 68 permite a visualização do histograma das frequências dos valores de δ . Nota-se que o gráfico é bimodal (com dois picos) nos valores de 22,5 e 25,5, atingindo a frequência de 114. Além disso, também se trata de um histograma assimétrico com a maior concentração de frequências à esquerda e com *outliers* à direita.

Figura 66 – Histograma do termo λ



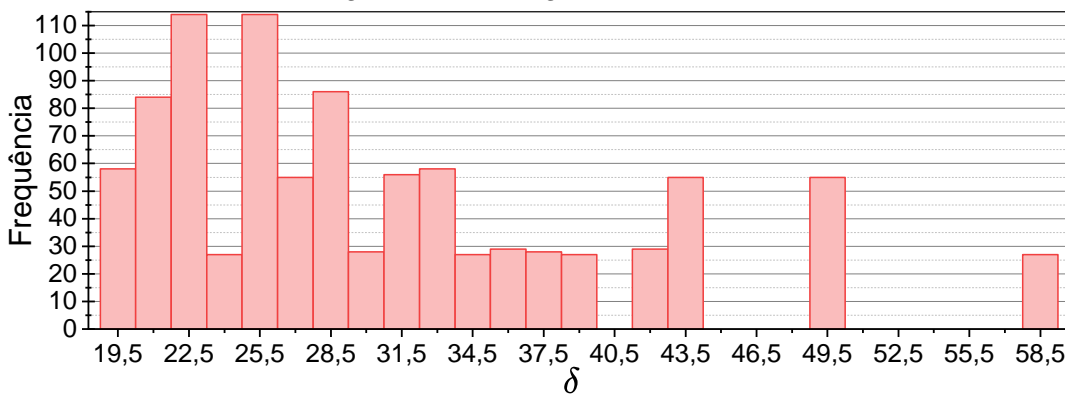
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 67 – Histograma do termo α



Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 68 – Histograma do termo δ



Fonte: O próprio autor, 2024.

O modelo de regressão obtido com a consideração dos parâmetros λ , α , δ , n_c e os seus quadrados para estimativa da carga limite de serviço, apresentado em (103), apresentou um coeficiente de determinação (R^2) de 69,32% e erro percentual absoluto médio (MAPE) igual a 86%. Com exceção de n_c^2 , que não pode ser estimado, os parâmetros e o modelo foram significativos de acordo com o valor-p de Pearson.

$$F_{lim} = -9,039 \cdot \lambda + 0,2027 \cdot \alpha - 1,1474 \cdot \delta + 0,3894 \cdot n_c + 0,5807 \cdot \lambda^2 - 0,000304 \cdot \alpha^2 + 0,009011 \cdot \delta^2 + 32,36 \quad (103)$$

Com o intuito de obter um modelo de regressão mais preciso, considerou-se os termos de terceira (λ^3 , α^3 , δ^3 e n_c^3) e quarta ordem (λ^4 , α^4 , δ^4 e n_c^4) dos parâmetros lineares (λ , α , δ , n_c).

Dessa forma, o modelo de regressão (104) é resultado da consideração dos termos de terceira ordem. A sua precisão melhorou em relação ao modelo anterior, apresentando um R^2 igual a 83,90% e um MAPE de 63%. Os parâmetros n_c^2 e n_c^3 não foram estimados; no entanto, todos os demais, considerados em conjunto no modelo, foram significativos, com valor-p inferior a 0,05 (5%).

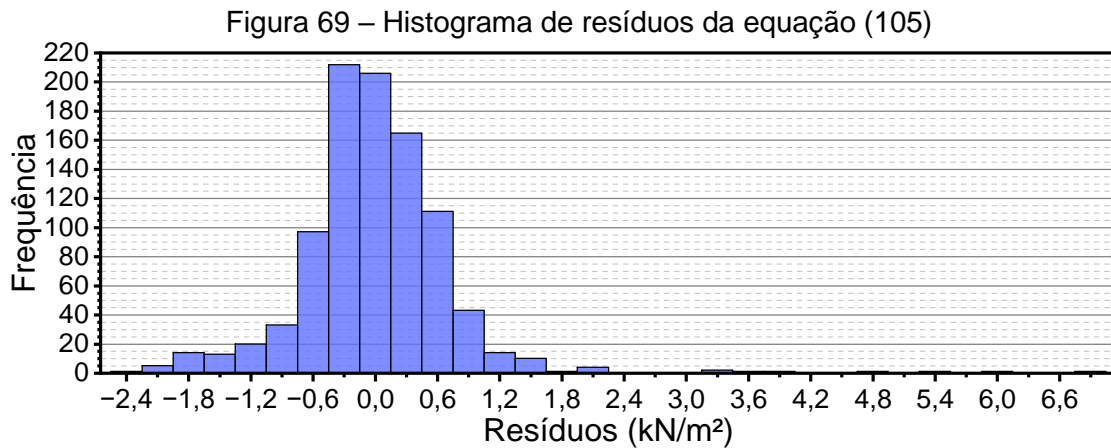
$$F_{lim} = -28,94 \cdot \lambda + 0,6754 \cdot \alpha - 3,540 \cdot \delta + 0,4461 \cdot n_c + 4,034 \cdot \lambda^2 - 0,00231 \cdot \alpha^2 + 0,05792 \cdot \delta^2 - 0,22243 \cdot \lambda^3 + 0,000003 \cdot \alpha^3 - 0,00380 \cdot \delta^3 + 75,18 \quad (104)$$

Por conseguinte, a inclusão dos termos de quarta ordem resultou um modelo de regressão (105) com um R^2 de 92,03%, significativamente maior que do modelo anterior (104). Além disso, com exceção de n_c^2 , n_c^3 e n_c^4 , que não podem ser estimados, todos os parâmetros se apresentaram significativos. No entanto, o modelo de regressão apresentou um alto valor de MAPE igual a 50%, indicando que o modelo tem uma alta margem de erro ao prever os valores reais.

$$F_{lim} = -72,514 \cdot \lambda + 1,767 \cdot \alpha - 8,988 \cdot \delta + 0,367 \cdot n_c + 15,982 \cdot \lambda^2 - 0,0100 \cdot \alpha^2 + 0,231 \cdot \delta^2 - 1,878 \cdot \lambda^3 + 3,13 \cdot 10^{-5} \cdot \alpha^3 - 0,00317 \cdot \delta^3 + 0,0852 \cdot \lambda^4 - 3,87 \cdot 10^{-8} \cdot \alpha^4 + 1,72 \cdot 10^{-5} \cdot \delta^4 + 152,276 \quad (105)$$

Com isso, tendo em vista o alto valor do MAPE, a equação (105) apresenta limitações em decorrência da combinação de determinados parâmetros que resultam

em resíduos grandes e casos atípicos. Isso torna-se claro com a observação do histograma de resíduos da equação (105) (Figura 69), em que, apesar de apresentar a maior concentração das maiores frequências próximas a 0, pode-se visualizar *outliers* que comprometem a qualidade do modelo.



Fonte: O próprio autor, 2024.

Após a transformação raiz quadrada na variável resposta por meio da transformação de Box-Cox, realizada com intuito de melhorar a precisão do modelo (105), especificamente, na diminuição do erro percentual médio absoluto (MAPE), foi possível ajustar um modelo mais adequado aos dados transformados. Dessa forma, o modelo de regressão ajustado aos dados transformados (106) apresentou um R^2 igual a 97,04%, o que sugere que a transformação de Box-Cox melhorou significativamente a qualidade do ajuste do modelo.

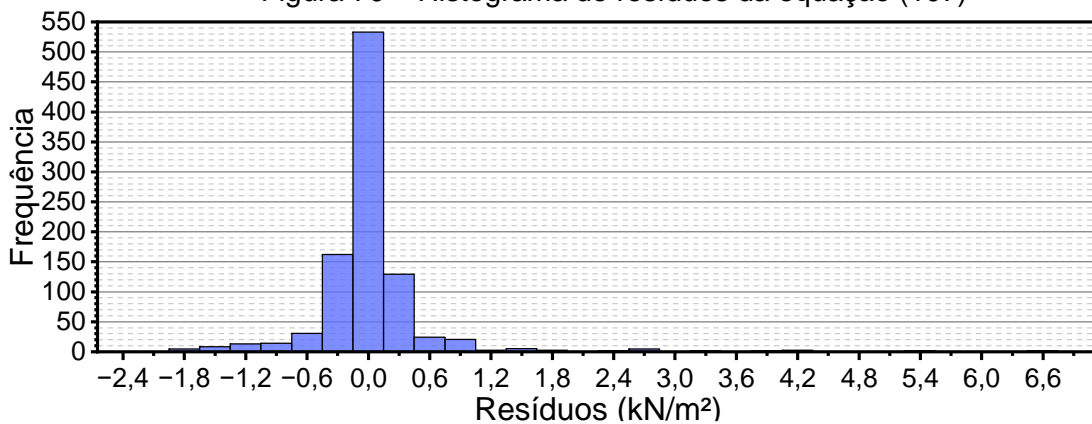
$$\begin{aligned}
 \sqrt{F_{lim}} = & -9,609 \cdot \lambda + 0,176 \cdot \alpha - 1,174 \cdot \delta + 0,129 \cdot n_c \\
 & + 2,285 \cdot \lambda^2 - 9,26 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha^2 + 0,0297 \cdot \delta^2 \\
 & - 0,279 \cdot \lambda^3 + 2,76 \cdot 10^{-6} \cdot \alpha^3 - 3,97 \cdot 10^{-4} \cdot \delta^3 \\
 & + 0,0130 \cdot \lambda^4 - 3,31 \cdot 10^{-9} \cdot \alpha^4 + 2,09 \cdot 10^{-6} \cdot \delta^4 + 22,569
 \end{aligned} \tag{106}$$

A equação (107) resulta os valores ajustados para escala original, a partir dela o R^2 é de 95,62% e o MAPE de 16%, significativamente inferior ao da equação (105). Além disso, a transformação Box-Cox com raiz quadrada melhorou a qualidade do ajuste do modelo, como evidenciado pelo alto R^2 e pela redução significativa do MAPE. Em adição, observar-se que os resíduos da equação (107) foram menores que a equação (105), com uma maior concentração próximo a zero, conforme observado Figura 70.

Convém ressaltar que a diferença do R² dos dados transformados advindos de (106) e da escala original de (107) pode ser atribuída ao efeito da transformação, que lineariza a relação nos dados transformados, mas não se reflete diretamente nos dados originais.

$$\begin{aligned}
 F_{lim} = & (-9,609 \cdot \lambda + 0,176 \cdot \alpha - 1,174 \cdot \delta + 0,129 \cdot n_c \\
 & + 2,285 \cdot \lambda^2 - 9,26 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha^2 + 0,0297 \cdot \delta^2 \\
 & - 0,279 \cdot \lambda^3 + 2,76 \cdot 10^{-6} \cdot \alpha^3 - 3,97 \cdot 10^{-4} \cdot \delta^3 \\
 & + 0,0130 \cdot \lambda^4 - 3,31 \cdot 10^{-9} \cdot \alpha^4 + 2,09 \cdot 10^{-6} \cdot \delta^4 + 22,569)^2
 \end{aligned}
 \tag{107}$$

Figura 70 – Histograma de resíduos da equação (107)

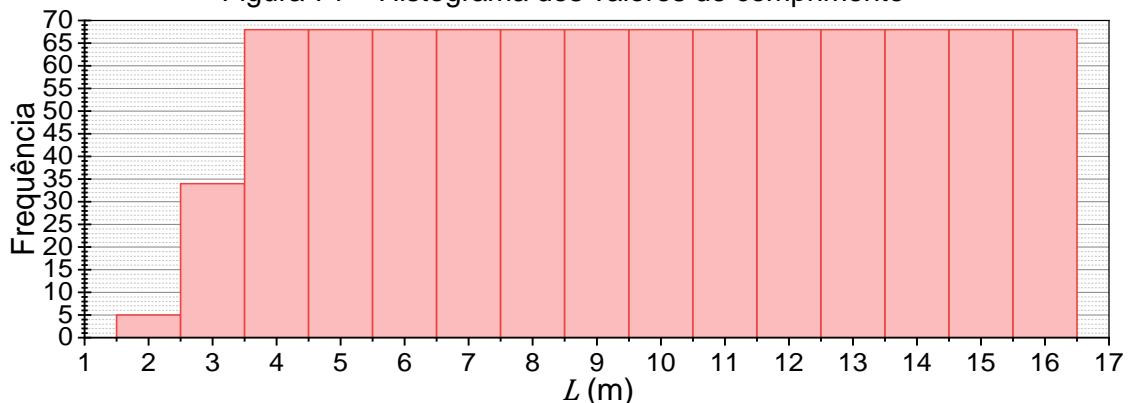


Fonte: O próprio autor, 2024.

4.4.2.2 Regressão simbólica

O formato do histograma dos valores de comprimento e largura (Figura 71 e Figura 72) pode ser explicado pela fabricação das placas de CLT, em que a maior dimensão da placa e as camadas externas são orientadas na direção longitudinal da peça.

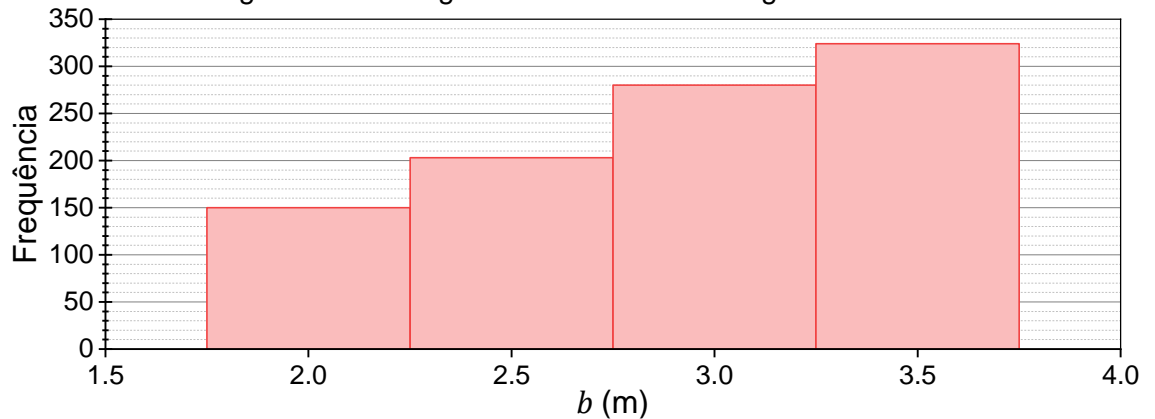
Figura 71 – Histograma dos valores de comprimento



Fonte: O próprio autor, 2024.

Por conseguinte, os casos que a largura fosse maior que o comprimento foram descartados da simulação. Desse modo, os valores de comprimento de 4 a 16,5 m apresentaram maior frequência (68), bem como o valor de 3,5 m apresentou a maior frequência (324) na largura.

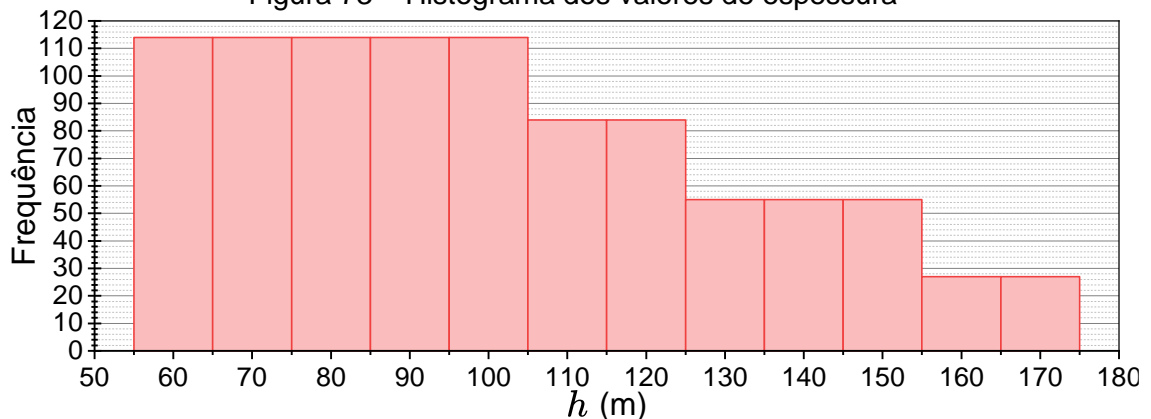
Figura 72 – Histograma dos valores de largura



Fonte: O próprio autor, 2024.

Quanto a Figura 73, o histograma permite visualizar a frequência dos valores de espessura considerados de acordo com a verificação da relação entre a espessura (h) e a menor dimensão no plano (b), em que a maior frequência (114) foi nas espessuras de 60 a 100 mm.

Figura 73 – Histograma dos valores de espessura



Fonte: O próprio autor, 2024.

Nesse sentido, deve-se notar que a equação foi construída e respeita os intervalos de parâmetros de (96). Além disso, convém destacar que as unidades de medida dos parâmetros dimensionais adotados (L , b e h) devem estar em metros para que o valor da carga limite de serviço seja obtido na unidade kN/m^2 .

Com isso, por meio da Regressão Simbólica, a equação (108) foi obtida para estimar a carga uniforme limite de serviço (F_{lim}) de placas delgadas quadriapoias considerando-se a espécie *Pinus taeda* L.. A equação apresentou adequada precisão na estimativa da F_{lim} com coeficiente de determinação (R^2) de 99,996%, *mean square error* (MSE) de $3,03 \cdot 10^{-4}$ (kN/m²)², *root mean square error* (RMSE) de $1,74 \cdot 10^{-2}$ kN/m², desvio padrão (σ) de 2,664 kN/m² e erro percentual médio absoluto (MAPE) igual a 0,933%.

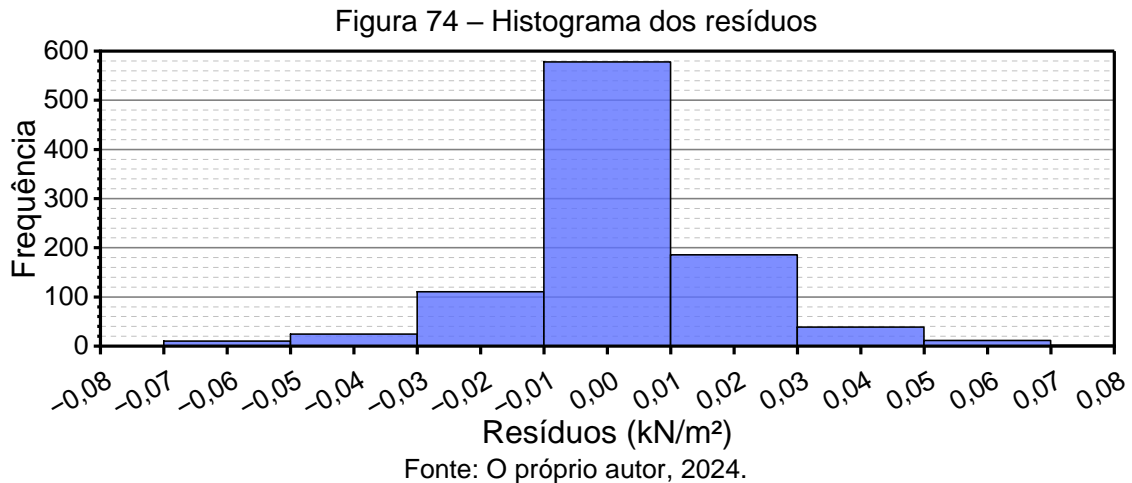
$$F_{lim} = \frac{0,1052D_{11}}{(L - 0,1483)^3} + \frac{0,1412D_{22}}{-7,1583 \cdot 10^{-6}L^4 + b^3 - 0,2295} \quad (108)$$

Nota-se que, apesar de considerar todas as componentes da matriz de rigidez à flexão como variáveis independentes, apenas D_{11} e D_{22} foram consideradas significativas pela SR. Desse modo, os modelos de regressão obtidos para D_{11} e D_{22} podem ser observados nas equações (109) e (110), respectivamente. A excelente precisão de tais modelos podem ser constatadas por meio de suas métricas, a equação do D_{11} (109) apresentou um $R^2 = 100\%$, $MSE = 6,478 \cdot 10^{-8}$ (kN*m)², $RMSE = 2,55 \cdot 10^{-4}$ kN*m, $\sigma = 1080,672$ kN*m e $MAPE = 3,7 \cdot 10^{-5}\%$; e do D_{22} (110) apresentou um $R^2 = 100\%$, $MSE = 0,01681$ (kN*m)², $RMSE = 0,130$ kN*m, $\sigma = 239,366$ kN/m² e $MAPE = 7,63 \cdot 10^{-2}\%$.

$$D_{11} = 4127447,759 \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + 321954,1123 \cdot (\beta_2 + \beta_4) + 0,0003637 \quad (109)$$

$$D_{22} = 6,4523 \cdot 10^{-5} \beta_1 + 4,1042 \cdot 10^6 (\beta_2 + \beta_4 (-\beta_4 + \beta_5 (3,3703 \cdot 10^6 \beta_3 - 48,2547) + 1,029)) \quad (110)$$

Observa-se que, desta forma (108), não há a necessidade de cálculos matriciais e somatórios que tornam a estimativa da carga limite de serviço manualmente inviável. Atrelado a isso, a precisão da equação torna-se clara com a observação do histograma de resíduos (Figura 74), em que a maior concentração foi próximo a 0 e o maior resíduo foi igual a 0,089 kN/m².



Entre o modelo de regressão clássico (107) e simbólico (108), é nítido que o simbólico apresentou um melhor ajuste na estimativa da carga limite de serviço. Além disso, convém ressaltar que não foram utilizados coeficientes majoradores ou minoradores de documentos normativos. Dessa forma, as equações (107) e (108) estimam o valor puro e total da carga limite de serviço. Desse modo, a contribuição da carga acidental pode ser calculada por meio da subtração da parcela do peso próprio, conforme a equação (111).

$$F_{limA} = F_{lim} - P_p \quad (111)$$

4.5 VALIDAÇÃO DA EQUAÇÃO

Neste capítulo, a equação proposta para estimativa da carga limite de serviço é validada perante a comparação com outras metodologias por meio da interpretação ou análise de seus parâmetros.

4.5.1 Comparação com o Método Shear Analogy e Método Gama

Na Tabela 28, pode-se visualizar os resultados da análise comparativa da equação proposta (108) com o Método Shear Analogy e Método Gama, utilizando-se como referência a abordagem bidimensional da CLPT. Em relação a CLPT, os erros percentuais da equação proposta foram pequenos e variaram de 0,015% a 0,416%. Em contrapartida, os erros percentuais do Método Gama e do Shear Analogy method apresentaram variações de 20,408% a 31,564% e de 16,603% a 25,722%, respectivamente.

Tabela 28 – Análise comparativa entre a equação proposta, Método Gama e Shear Analogy

ID	$F_{lim,CLPT}$ (kN/m ²)	F_{lim} (kN/m ²)	Erro (%)	$F_{lim,\gamma}$ (kN/m ²)	Erro (%)	$F_{lim,SA}$ (kN/m ²)	Erro (%)
1	5,028	5,037	0,169	3,827	23,892	4,106	18,346
2	2,574	2,575	0,041	2,006	22,072	2,102	18,346
3	1,490	1,490	0,015	1,176	21,043	1,217	18,346
4	0,938	0,938	0,043	0,747	20,408	0,766	18,346
5	23,424	23,407	0,074	17,281	26,225	19,535	16,603
6	20,595	20,604	0,040	14,248	30,818	16,817	18,346
7	23,100	23,084	0,066	16,767	27,415	17,981	22,159
8	21,088	21,001	0,416	14,432	31,564	15,664	25,722

Fonte: O próprio autor, 2024.

Em conjunto das demais métricas, constata-se que a equação proposta apresentou resultados mais precisos, com um erro percentual médio absoluto (MAPE) de 0,108%, erro quadrático médio (MSE) de 0,001 (kN/m²)², raiz quadrada do erro quadrático médio (RMSE) de 0,032 kN/m², desvio padrão (σ) de 10,540 kN/m² e coeficiente de variação (CV) igual a 0,264%. Tais resultados foram significativamente melhores quando comparada aos obtidos pelo Método Gama (MAPE = 25,430%, MSE = 20,542 (kN/m²)², RMSE = 4,532 kN/m², σ = 7,471 kN/m² e CV = 36,909%) e o Método Shear Analogy (MAPE = 19,526%, MSE = 10,775 (kN/m²)², RMSE = 3,283 kN/m², σ = 8,386 kN/m² e CV = 26,732%).

Em todos os casos a equação proposta resultou maiores valores, o que pode ser explicado devido as simplificações da abordagem unidimensional, em que a rigidez é considerada apenas em um eixo, minorando o valor real da rigidez da placa. Enquanto, em uma abordagem bidimensional, a consideração de dois eixos ou direções possibilita uma análise mais detalhada, com a consideração das propriedades elásticas da madeira e geométricas da placa. Portanto, ciente das divergências das aplicações, pode-se afirmar que a equação se apresenta resultados confiáveis.

4.5.2 Interpolação da equação

A equação proposta (108) quando interpolada, com a consideração de valores intermediários de comprimento (L) e largura (b) (Tabela 11) não contemplados na construção do modelo de regressão, apresentou os resultados apresentados na Tabela 29.

Os erros percentuais entre os valores de carga limite de serviço da equação proposta e da CLPT apresentaram variação de $3,86 \cdot 10^{-3}\%$ a 2,621%. Entretanto, convém destacar que a ordem de grandeza dos resultados em muitos casos é pequena, o que pode amplificar erros percentuais amostrais. Com isso, nesta análise comparativa, o erro percentual amostral não é o melhor indicativo. Dessa forma, quando analisados os valores dos resíduos absolutos amostrais (Tabela 29) em conjunto das demais métricas (MAPE = 0,779%, MSE = $4,44 \cdot 10^{-4}$ (kN/m²)², RMSE = $2,11 \cdot 10^{-2}$ kN/m², σ = 4,523 kN/m² e CV = 0,597%), constata-se uma perspectiva equilibrada sobre a magnitude real das diferenças. Portanto, tendo isso em vista, nota-se que a equação manteve a sua precisão quando interpolada.

Tabela 29 – Resultados da equação proposta quando interpolada

ID	L (m)	b (m)	Configuração	$F_{lim,CLPT}$ (kN/m ²)	F_{lim} (kN/m ²)	Erro (%)	Resíduo absoluto (kN/m ²)
E1	5,9	3,3	3C [80]	0,548	0,539	1,614	0,00885
E2	13,1	2,4	3C [120]	2,210	2,197	0,593	0,01311
E3	10,9	2,2	3C [90]	1,218	1,219	0,082	0,00100
E4	4,3	2,6	3C [110]	3,473	3,446	0,776	0,02694
E5	15,400	2,3	3C [70]	0,668	0,662	0,971	0,00649
E6	8,700	2,6	5C [130]	4,191	4,261	1,663	0,06969
E7	6,300	3,3	5C [130]	2,925	2,946	0,705	0,02062
E8	3,800	3,4	5C [160]	13,890	13,902	0,089	0,01239
E9	13,800	3,3	5C [140]	1,790	1,783	0,391	0,00700
E10	4,200	2,7	3C [60]	0,596	0,594	0,282	0,00168
E11	6,500	2,9	3C [80]	0,545	0,531	2,621	0,01428
E12	7,100	3,4	3C [120]	1,378	1,354	1,721	0,02372
E13	2,200	2,1	3C [100]	17,350	17,378	0,160	0,02768
E14	12,100	3,1	5C [140]	2,184	2,183	0,034	0,00075
E15	12,300	3,2	5C [160]	3,530	3,541	0,309	0,01090
E16	9,300	2,4	3C [120]	2,338	2,338	0,004	0,00009
E17	9,700	2,4	3C [100]	1,066	1,053	1,242	0,01324
E18	4,800	3,3	5C [160]	7,973	7,983	0,130	0,01040
E19	5,200	2,7	3C [90]	1,320	1,304	1,230	0,01624
E20	16,300	2,8	3C [120]	1,389	1,376	0,952	0,01323

Fonte: O próprio autor, 2024.

5 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de um *software* visando a simulação de placas de CLT com base no Método de Navier, bem como propor uma equação de abordagem bidimensional de regressão a múltiplas variáveis para a estimativa da carga limite de serviço em placas de CLT apoiadas nos quatro bordos.

O *software* desenvolvido apresentou ser confiável com resultados idênticos a rotina elaborada no Excel e similares aos do *software* RFEM 5 ®, apresentando pequenas diferenças percentuais (de 0,004% a 3,452%) nos valores de deslocamento, principais esforços e tensões.

A equação proposta, ajustada ao conjunto de 957 simulações computacionais de placas delgadas de *Cross Laminated Timber* (CLT) apoiadas nos quatro bordos, apresentou adequada precisão na estimativa da carga limite de serviço com um coeficiente de determinação (R^2) de 99,996%, *mean square error* (MSE) de $3,03 \cdot 10^{-4}$ (kN/m²)², *root mean square error* (RMSE) de $1,74 \cdot 10^{-2}$ kN/m², desvio padrão (σ) de 2,664 kN/m² e erro percentual médio absoluto (MAPE) igual a 0,933%.

Com base na validação sob resultados de simulações adicionais, que não faziam parte do banco de dados original, a equação demonstrou manter a sua precisão na estimativa da carga limite de serviço, com MAPE = 0,779%, MSE = $4,44 \cdot 10^{-4}$ (kN/m²)², RMSE = $2,11 \cdot 10^{-2}$ kN/m², σ = 4,523 kN/m² e CV = 0,597%.

Portanto, essas descobertas indicam que a simplicidade alinhada com a alta precisão dos modelos possibilita *insights* aos engenheiros para um melhor pré-dimensionamento de placas de CLT. Convém destacar que os modelos propostos são limitados às placas de CLT delgadas quadriapoiadas, com a espécie de madeira *Pinus taeda L.* e aos parâmetros geométricos considerados no estudo paramétrico. De todo modo, grande parte dos casos práticos (projetos estruturais) podem ser atendidos com o uso das equações propostas. Com isso, a consideração da teoria de placas espessas, de outras espécies de madeira e condições de contorno diversas pode ser explorada em pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

- ABDUSALAMOV, R.; HILLGÄRTNER, M.; ITSKOV, M. Automatic generation of interpretable hyperelastic material models by symbolic regression. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 124, n. 9, p. 2093–2104, 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.7203>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nme.7203>. Acesso em 17 fev. 2025.
- ABED, J. *et al.* A review of the performance and benefits of mass timber as an alternative to concrete and steel for improving the sustainability of structures. **Sustainability**, [s. l.], v. 14, n. 9, 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/su14095570>. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2071-1050/14/9/5570>. Acesso em 17 fev. 2025.
- ANGELIS, D.; SOFOS, F.; KARAKASIDIS, T. E. Artificial intelligence in physical sciences: Symbolic Regression trends and perspectives. **Springer**, [s. l.], v. 30, n. 6, p. 3845–3865, 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11831-023-09922-z>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11831-023-09922-z>. Acesso em 17 fev. 2025.
- ASHBY, M. F.; JONES, D. R. H. **Engineering Materials 2: An introduction to Microstructures, Processing and Design**. 3ªed. Waltham: Butterworth-Heinemann, 2006.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190: Projetos de estruturas em madeira**. Rio de Janeiro, 2022.
- BRANDNER, R. *et al.* Cross laminated timber (CLT) diaphragms under shear: test configuration, properties and design. **Construction and Building Materials**, [s. l.], v. 147, p. 312–327, 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.04.153>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0950061817308036>. Acesso em 17 fev. 2025.
- CARLSON, C. **Ascent skyscraper in Milwaukee becomes world's tallest timber building**. Londres, 2022. Disponível em: <https://www.dezeen.com/2022/08/03/ascent-tower-milwaukee-worlds-tallest-timber-building/>. Acesso em: 13 mar. 2024.
- CRANMER, M. Interpretable Machine Learning for Science with PySR and SymbolicRegression.jl. **arXiv**, [s. l.], 2023. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/2305.01582>. Acesso em 17 fev. 2025.
- DANIELSSON, H.; SERRANO, E. Cross laminated timber at in-plane beam loading – Prediction of shear stresses in crossing areas. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 171, p. 921–927, 2018. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.03.018>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029617335551>. Acesso em 17 fev. 2025.
- D'ARENZO, G. An elastic model for the prediction of the lateral response of Cross-Laminated Timber shear walls with openings. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 274,

2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.115055>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029622011312>. Acesso em 17 fev. 2025.

DE ARAUJO, V.; CHRISTOFORO, A. The global cross-laminated timber (CLT) industry: a systematic review and a sectoral survey of its main developers. **Sustainability**, [s. l.], v. 15, n. 10, p. 7827, 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/su15107827>. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2071-1050/15/10/7827>. Acesso em 17 fev. 2025.

DLUBAL. **RFEM 5**. Tiefenbach: 2024. Disponível em: <https://www.dlubal.com/en/products/rfem-5/what-is-rfem>. Acesso em: 22 fev. 2024.

ESAKA, Y. *et al.* Development and verification of analytical method using fem for structural design to model out of plane bending behavior of two-way flat slab using CLT. **AIJ Journal of Technology and Design**, [s. l.], v. 26, n. 62, p. 103–108, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.3130/aijt.26.103>. Disponível em: https://www.jstage.jst.go.jp/article/aijt/26/62/26_103/_article/-char/ja/. Acesso em 17 fev. 2025.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 338: structural timber: strength classes**. Brussels: [s. n.], 2004a.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 5: Design of timber structures - Part 1-1: General - Common rules and rules for buildings**. Brussels: [s. n.], 2004b.

FERNANDEZ, A.; KOMP, J.; PERONTO, J. Ascent - Challenges and Advances of Tall Mass Timber Construction. **International Journal of High-Rise Buildings**, [s. l.], v. 9, n. 3, p. 235–244, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.21022/IJHRB.2020.9.3.235>. Disponível em: <http://koreascience.or.kr/article/JAKO202031064818010.page>. Acesso em 17 fev. 2025.

FLANAGAN, D. **JavaScript: o guia definitivo**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

FLATSCHART, F. **HTML 5: embarque imediato**. 1. ed. Rio de Janeiro: Brasport, 2011.

FRAN PARENTE. **O 1º edifício multipisos de madeira no Brasil abriga loja de chocolate**. [S. l.], 2021. Disponível em: <https://revistacasaedjardim.globo.com/Casa-e-Jardim/Arquitetura/noticia/2021/01/o-1-edificio-multipisos-de-madeira-no-brasil-abriga-loja-de-chocolate.html>. Acesso em: 30 jun. 2024.

HAYES, B. N.; KOLIOU, M.; VAN DE LINDT, J. W. Seismic behavior of balloon frame cross-laminated timber connections. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 149, n. 9, 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.1061/jsendh.steng-11984>. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/JSENDH.STENG-11984>. Acesso em 17 fev. 2025.

HEINISUO, M.; PAJUNEN, S.; ASPILA, A. ultimate failure load analysis of cross-laminated timber panels subjected to in-plane compression. **Structures**, [s. l.], v. 47,

p. 1558–1565, 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.istruc.2022.12.016>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2352012422012024>. Acesso em 17 fev. 2025.

HUANG, Z. *et al.* A layered beam-based model for analyzing the stress of rolling shear for the cross-laminated timber panels under out-of-plane bending. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 289, 2023a. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.116290>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029623007058>. Acesso em 17 fev. 2025.

HUANG, Z. *et al.* Modeling of cross-laminated timber (CLT) panels loaded with combined out-of-plane bending and compression. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 250, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113335>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029621014504>. Acesso em 17 fev. 2025.

HUANG, Z. *et al.* The appropriacy of the analytical models for calculating the shear capacity of cross-laminated timber (CLT) under out-of-plane bending. **Journal of Wood Science**, [s. l.], v. 69, n. 1, p. 14, 2023b. DOI: <https://doi.org/10.1186/s10086-023-02089-y>. Disponível em: <https://jwoodscience.springeropen.com/articles/10.1186/s10086-023-02089-y>. Acesso em 17 fev. 2025.

HUDDLESTON, R. **HTML, XHTML, and CSS: your visual blueprint for designing effective web pages**. Indianapolis: Wiley, 2008.

ILGIN, H. E.; KARJALAINEN, M. Tallest timber buildings: main architectural and structural design considerations. In: DU, G.; ZHOU, X (org.). **Wood Industry - Past, Present And Future Outlook**. [S. l.]: IntechOpen, 2022. *E-book*. Disponível em: <https://www.intechopen.com/books/11525>. Acesso em: 17 fev. 2025.

JELEČ, M. *et al.* Advancement in prediction of shear strength and stiffness of cross laminated timber beams. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 238, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112247>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029621003977>. Acesso em 17 fev. 2025.

KHAN, M. T.; CHUI, Y. H. Prediction of in-plane shear modulus of CLT from laminate properties. In: WORLD CONFERENCE ON TIMBER ENGINEERING (WCTE). 2021, Santiago. **Anais eletrônicos [...]**. Santiago, 2021. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/355131477>. Acesso em: 17 fev. 2025.

KLH. **Cross laminated timber**. Teufenbach, Áustria: [s. n.], 2021. Disponível em: <https://www.klh.at/en/booklets/>. Acesso em: 9 jan. 2024.

KRETSCHMANN, D. E. Mechanical properties of wood. In: WOOD HANDBOOK: WOOD AS AN ENGINEERING MATERIAL. Madison: U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory, 2010. p. 508.

- LI, H. *et al.* An experimental and modeling study on apparent bending moduli of cross-laminated bamboo and timber (CLBT) in orthogonal strength directions. **Case Studies in Construction Materials**, [s. l.], v. 16, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e00874>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214509522000067?via%3Dihub>. Acesso em 17 fev. 2025.
- MALLO, M. F. L.; ESPINOZA, O. Cross-laminated timber vs. concrete/steel: cost comparison using a case study. *In: WORLD CONFERENCE ON TIMBER ENGINEERING (WCTE)*. 2016, Viena. **Anais eletrônicos** [...]. Viena, 2016. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/320739097>. Acesso em 17 fev. 2025.
- MARJANOVIĆ, M. *et al.* Three-dimensional stress analysis and design of cross-laminated timber panels using full-layerwise-theory-based finite element method. **Thin-Walled Structures**, [s. l.], v. 157, p. 107156, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107156>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263823120310296>. Acesso em 17 fev. 2025.
- MASCIA, N. T.; LAHR, A. F. R. Remarks on Orthotropic Elastic Models Applied to Wood. **Materials Research**, [s. l.], v. 9, n. 3, p. 301–310, 2006. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/mr/a/QNG5S68W4YP8J4Sp6x6kmGC>. Acesso em 17 fev. 2025.
- MENDONÇA, P. de T. R. **Materiais Compostos & Estruturas-sanduíche: Projeto e Análise**. 2. ed. Florianópolis, SC: Orsa Maggiore, 2019.
- NETO, C. C.; TAKATA, A.; SILVA, V. A. N. The first mass timber building in Brazil. *In: WORLD CONFERENCE ON TIMBER ENGINEERING (WCTE)*. 2023, Oslo. **Anais eletrônicos** [...]. Oslo, 2023. p. 4215 – 4221. Disponível em: <https://www.proceedings.com/content/069/069179-0548open.pdf>. Acesso em 17 fev. 2025.
- NOLET, V.; CASAGRANDE, D.; DOUDAK, G. Multipanel CLT shearwalls: an analytical methodology to predict the elastic-plastic behaviour. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 179, p. 640–654, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.11.017>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029618308721>. Acesso em 17 fev. 2025.
- O'CEALLAIGH, C. *et al.* Racking resistance of CLT panels manufactured from C16 grade timber. *In: World Conference on Timber Engineering (WCTE)*. 2023, Oslo. **Anais eletrônicos** [...]. Oslo, 2023. p. 2594–2599. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/371553494_RACKING_RESISTANCE_OF_CLT_PANELS_MANUFACTURED_FROM_C16_GRADE_TIMBER. Acesso em: 17 fev. 2025.
- OH, J.-W. *et al.* Comparative CO2 emissions of concrete and timber slabs with equivalent structural performance. **Energy and Buildings**, [s. l.], v. 281, p. 112768,

2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2022.112768>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378778822009392>. Acesso em 17 fev. 2025.
- PEI, S. *et al.* Cross-Laminated Timber for Seismic Regions: Progress and Challenges for Research and Implementation. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 142, n. 4, 2016. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001192](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001192). Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29ST.1943-541X.0001192>. Acesso em 17 fev. 2025.
- RAKOČEVIĆ, M. Bending of Laminated Composite Plates in Layerwise Theory. *In*: OSHEKU, C. A. (org.). **Lamination - Theory and Application**. [s. l.]: InTech, 2018. Disponível em: <http://www.intechopen.com/books/lamination-theory-and-application/bending-of-laminated-composite-plates-in-layerwise-theory>. Acesso em: 17 fev. 2025.
- RAMAGE, M. H. *et al.* The wood from the trees: The use of timber in construction. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, [s. l.], v. 68, p. 333–359, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2016.09.107>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1364032116306050>. Acesso em: 17 fev. 2025.
- REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. 2nd eded. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- SCIOMENTA, M. *et al.* Linear model to describe the working of a three layers CLT strip slab: Experimental and numerical validation. **Advances in Structural Engineering**, [s. l.], v. 24, n. 14, p. 3118–3132, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1177/13694332211020403>. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/13694332211020403>. Acesso em: 17 fev. 2025.
- SEGURADO, V. S. **Projeto de interface com o usuário**. 1. ed. São Paulo: Editora Pearson, 2017. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br/Acervo/Publicacao/124143>. Acesso em: 9 jan. 2024.
- SHAHNEWAZ, M.; DICKOF, C.; TANNERT, T. Seismic Behavior of Balloon Frame CLT Shear Walls with Different Ledgers. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 147, n. 9, 2021. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0003106](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003106). Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29ST.1943-541X.0003106>. Acesso em: 17 fev. 2025.
- SILVA, J. V. F. **Estudo numérico-experimental da resistência e rigidez ao rolling shear de elementos de MLCC (Madeira Lamelada Colada Cruzada)**. 2023. 230 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Guaratinguetá, 2023. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/92fee583-923e-49e0-b126-23f77c20a520>. Acesso em: 13 mar. 2024.

STACK OVERFLOW DEVELOPER. **Developer Survey**. [S. l.], 2023. Disponível em: <https://survey.stackoverflow.co/2023/>. Acesso em: 26 fev. 2024.

UZELAC GLAVINIĆ, I. *et al.* An experimental investigation of hardwoods harvested in croatian forests for the production of glued laminated timber. **Materials**, [s. l.], v. 16, n. 5, p. 1843, 2023. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma16051843>. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1996-1944/16/5/1843>. Acesso em: 17 fev. 2025.

VALLELY, S.; SCHOENWALD, S. An efficient analytical method to obtain the homogenised frequency-independent elastic material properties of cross-laminated timber elements. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 546, p. 117424, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117424>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022460X22006071>. Acesso em: 17 fev. 2025.

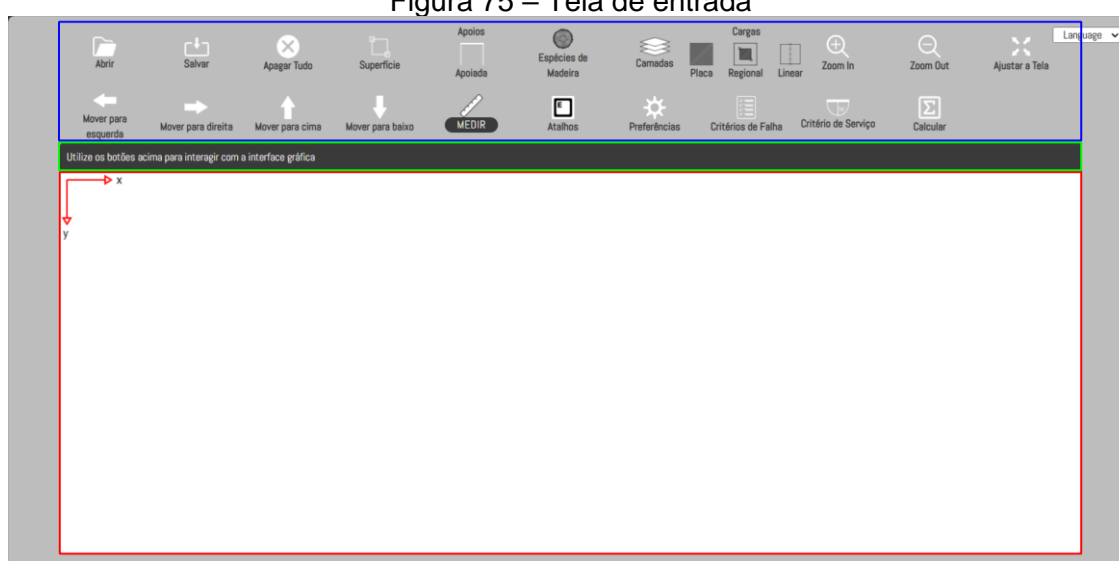
ZHANG, X. *et al.* Out-of-plane cross-angle bending stiffness of cross-laminated timber. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 319, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118791>. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029624013531>. Acesso em: 17 fev. 2025.

APÊNDICE A – GUIA CLT PLATE SOFTWARE

Neste apêndice, é apresentado um guia para as funcionalidades do programa desenvolvido (CLT Plate Software). Tais funcionalidades são explicitadas por figuras, que contêm marcadores representativos dos fluxos das ferramentas.

A tela de entrada do *software* é apresentada na Figura 75. Nela, observa-se um retângulo azul que destaca todas as funcionalidades da tela de entrada, um vermelho evidencia a tela gráfica de entrada e o verde enfatiza o menu de ação.

Figura 75 – Tela de entrada

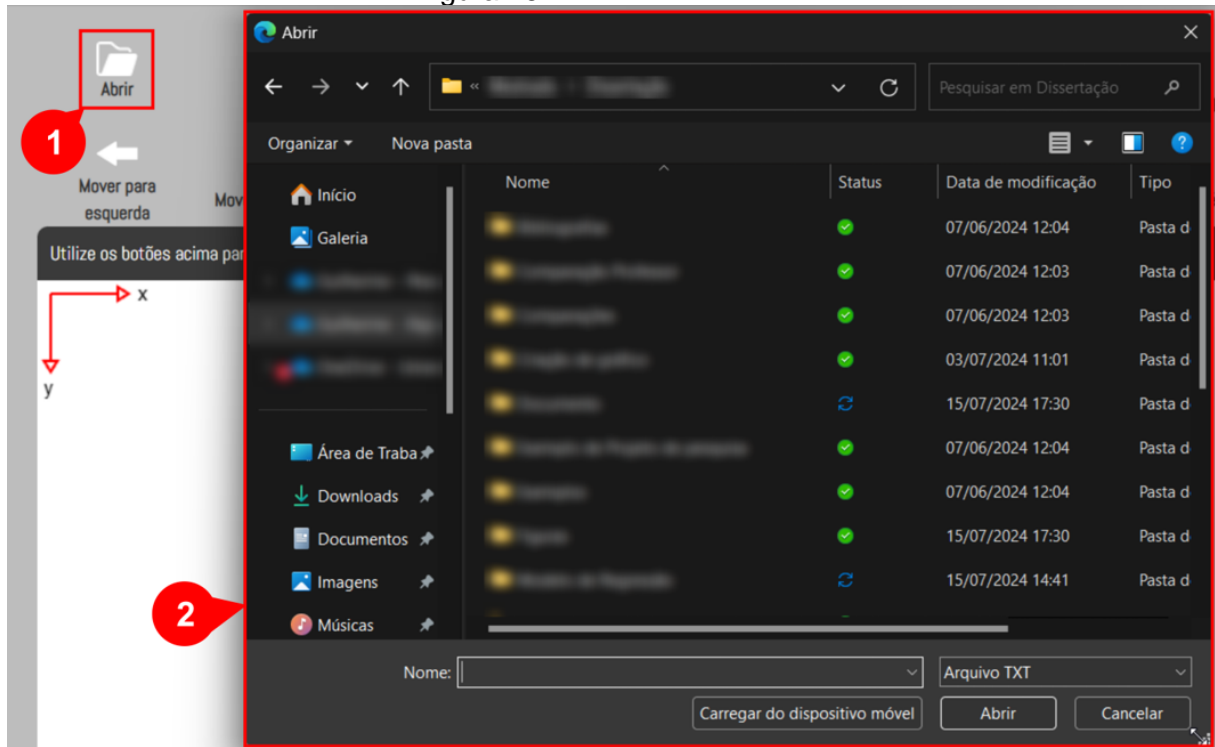


Fonte: O próprio autor, 2024.

A ferramenta “abrir” (Figura 76) permite a abertura de um arquivo salvo anteriormente por meio da funcionalidade “salvar” (Figura 77). Com isso, a funcionalidade “abrir” (Figura 76) é acionada com o clique no respectivo botão, que aciona o explorador de arquivos para possibilitar o usuário selecionar o arquivo desejado. A partir de um clique no botão “salvar”, visualizado Figura 77, o algoritmo automaticamente gera um arquivo “.txt”, com todas as informações de entrada, e realiza o seu *download*.

A funcionalidade “apagar tudo” (Figura 78) possibilita ao usuário excluir todos os dados temporários (superfície, propriedades elásticas das espécies, carga, configurações etc.) salvos no *software*.

Figura 76 – Ferramenta “abrir”



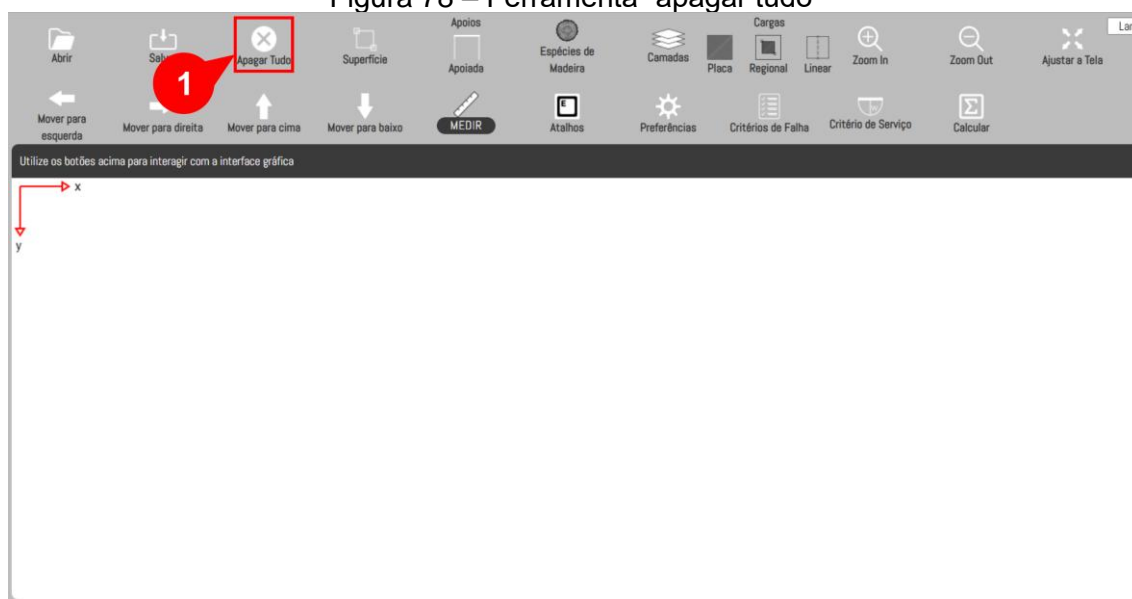
Fonte: O próprio autor, 2024.

Figura 77 – Ferramenta “salvar”



Fonte: O próprio autor, 2024.

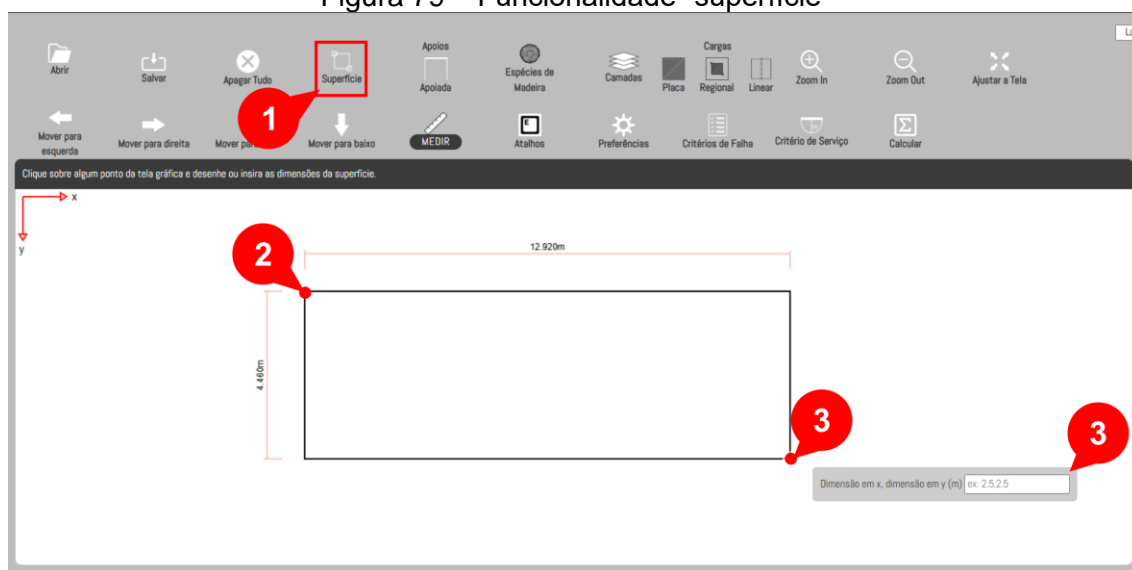
Figura 78 – Ferramenta “apagar tudo”



Fonte: O próprio autor, 2024.

A funcionalidade “superfície”, visualizada na Figura 79, permite ao usuário a inserção da superfície a partir de dois modos, ambos ativados pelo clique no botão. O primeiro modo (Figura 79), depois do clique do *mouse* dentro da tela gráfica, possibilita ao usuário inserir as dimensões da superfície. O segundo modo (desenho da superfície), após um primeiro clique na tela gráfica, permite desenhar a superfície com a movimentação do *mouse* e com um segundo clique adicioná-la.

Figura 79 – Funcionalidade “superfície”

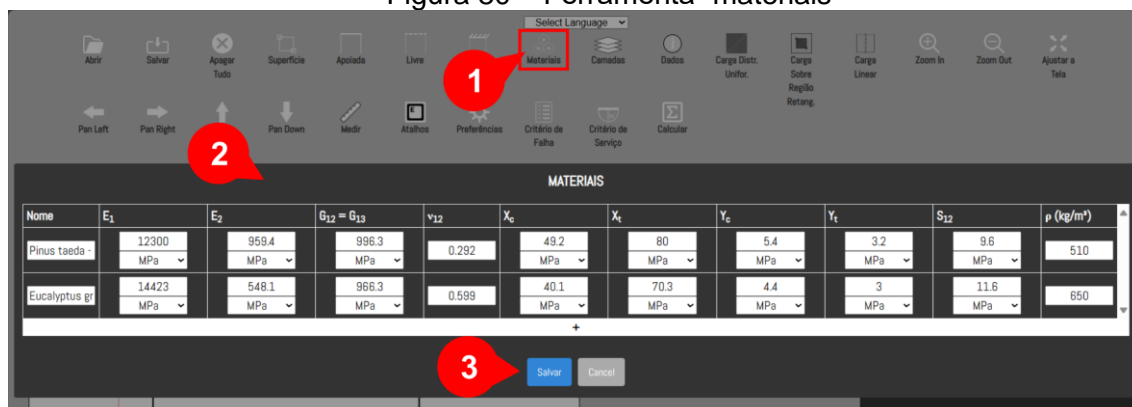


Fonte: O próprio autor, 2024.

A aba “materiais”, aberta por meio do seu respectivo botão, permite ao usuário a entrada dos dados das propriedades da espécie de madeira. Uma vez inserido tais propriedades, o usuário pode salvá-las a partir do botão salvar. Convém destacar que

a densidade é utilizada para o cálculo do peso próprio, o qual pode ser desprezado com a consideração da densidade igual a 0.

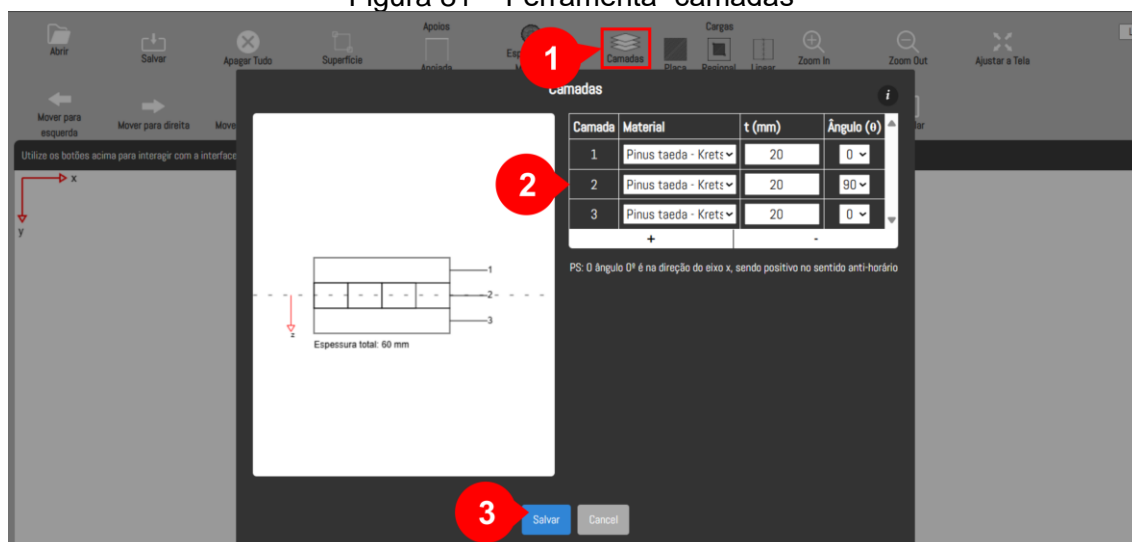
Figura 80 – Ferramenta “materiais”



Fonte: O próprio autor, 2024.

O botão “camadas” aciona uma seção possibilitando o usuário a alterar a configuração das camadas do *Cross Laminated Timber*, com a alteração das orientações, espessuras, espécies e o número de camadas. O botão “salvar”, além de salvar temporariamente a configuração, aciona um algoritmo para o cálculo do peso próprio da placa e da matriz de rigidez à flexão.

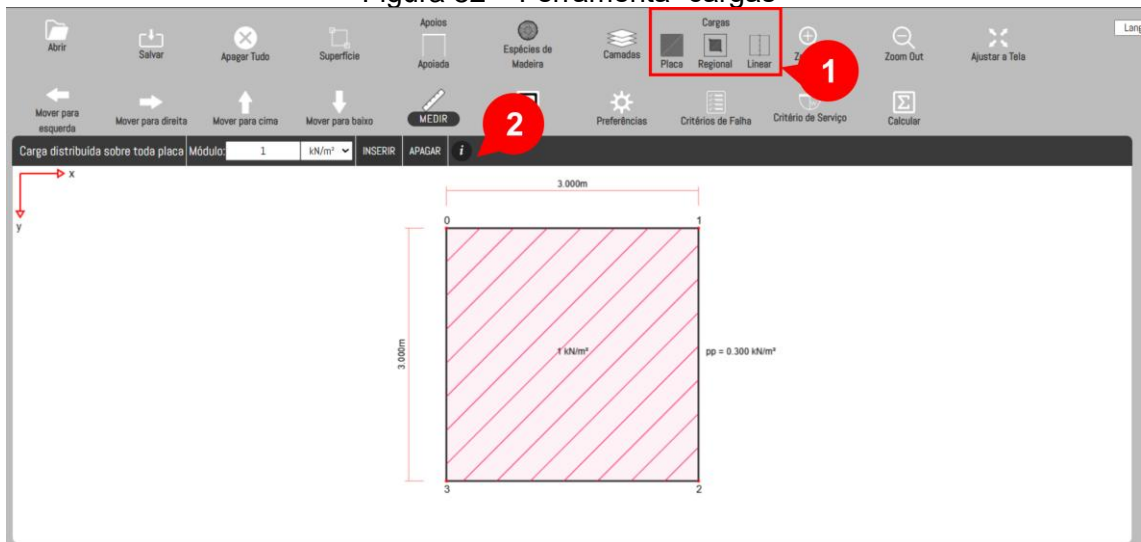
Figura 81 – Ferramenta “camadas”



Fonte: O próprio autor, 2024.

As ferramentas relacionadas a inserção das cargas têm fluxo de funcionamento similar. Após o clique em um dos botões, o menu lateral é criado e por meio dele tornar-se possível definir características da carga em questão, por exemplo, o módulo, orientação, distância da origem etc. Com isso, a partir do botão inserir o usuário pode clicar sobre a placa, a fim de adicioná-la.

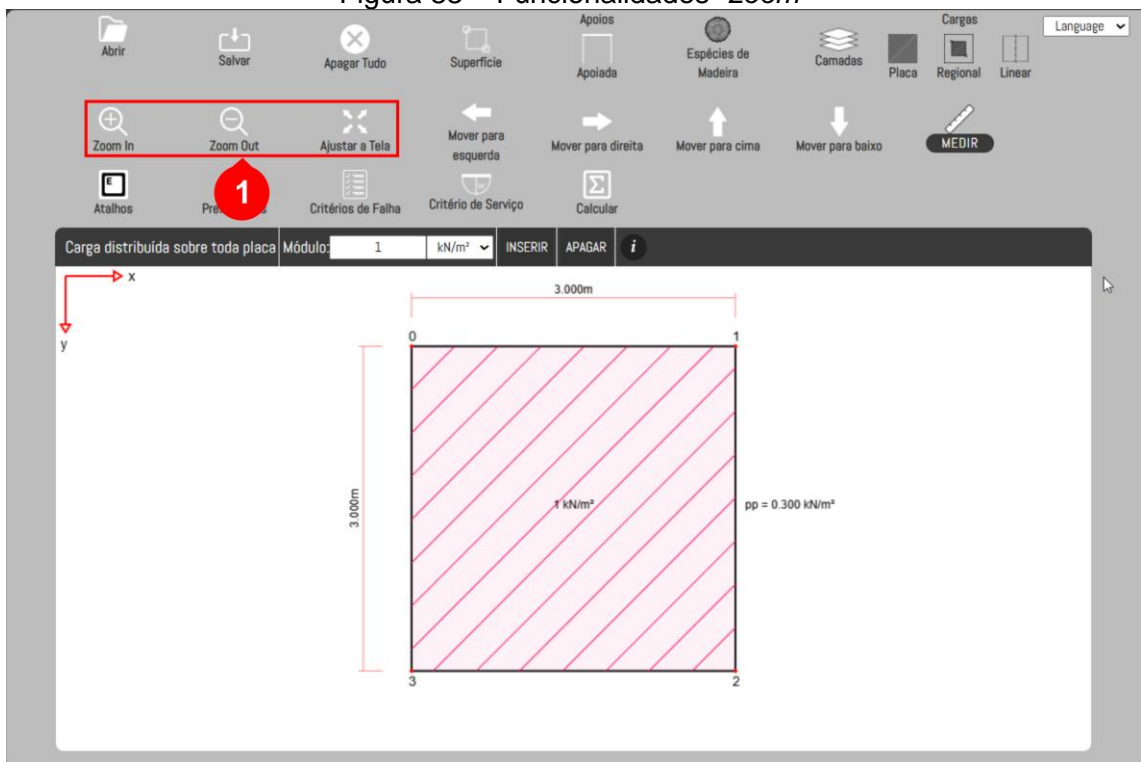
Figura 82 – Ferramenta “cargas”



Fonte: O próprio autor, 2024.

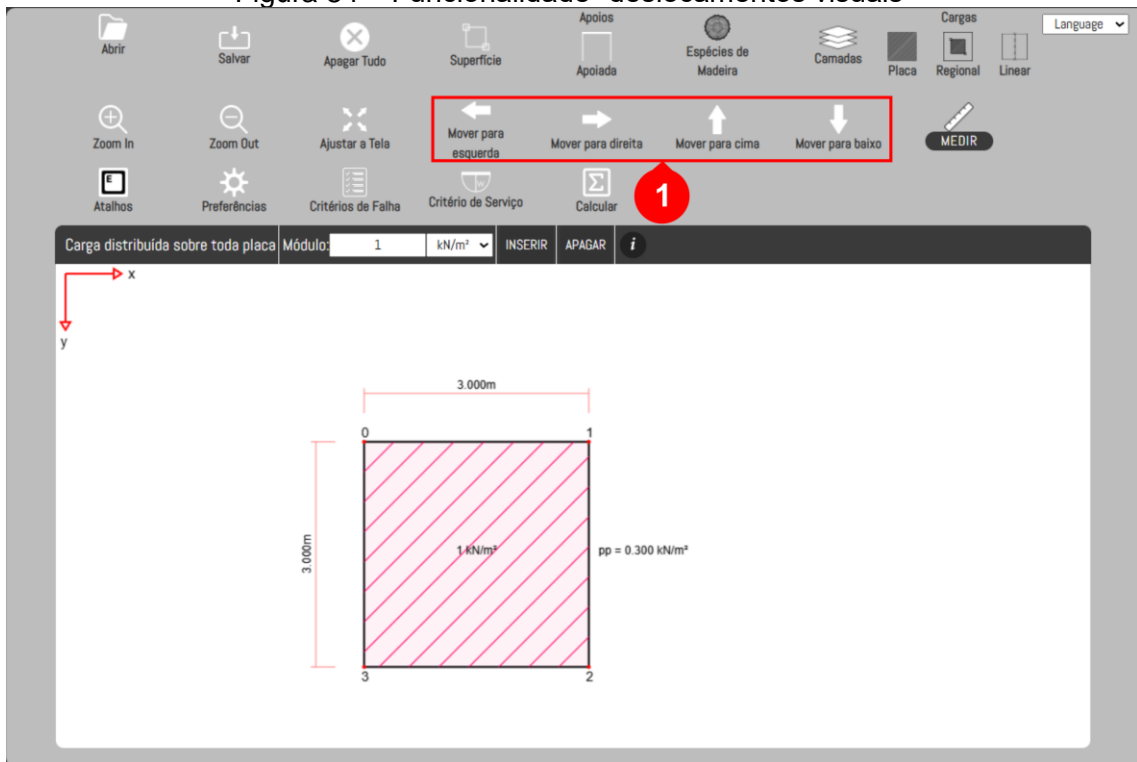
As funcionalidades de *zoom* e deslocamento visual do desenho gráfico são explicitados na Figura 83 e Figura 84, respectivamente.

Figura 83 – Funcionalidades “zoom”



Fonte: O próprio autor, 2024.

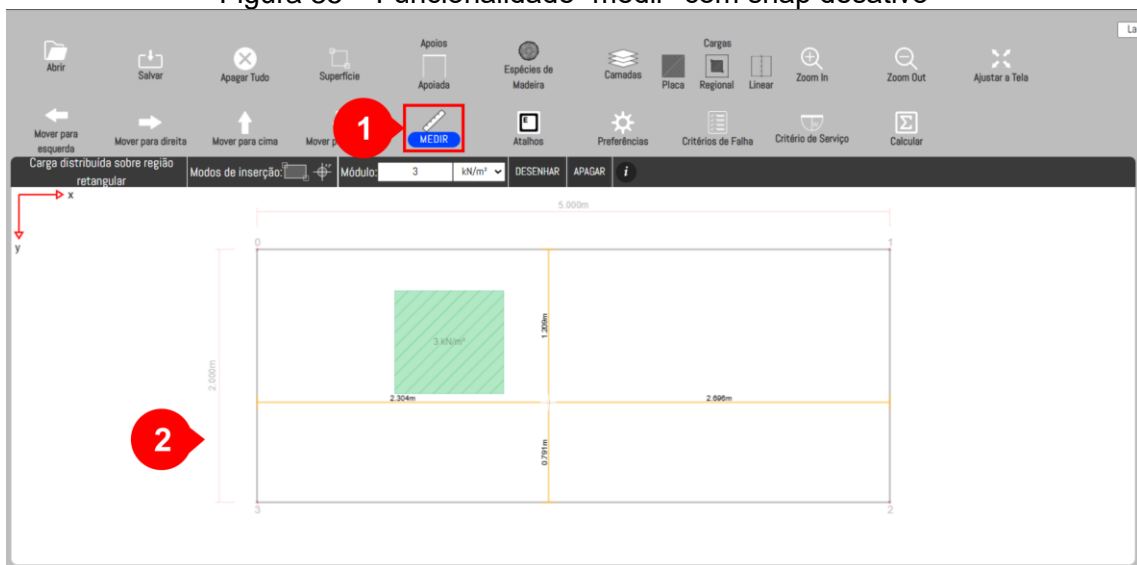
Figura 84 – Funcionalidade “deslocamentos visuais”



Fonte: O próprio autor, 2024.

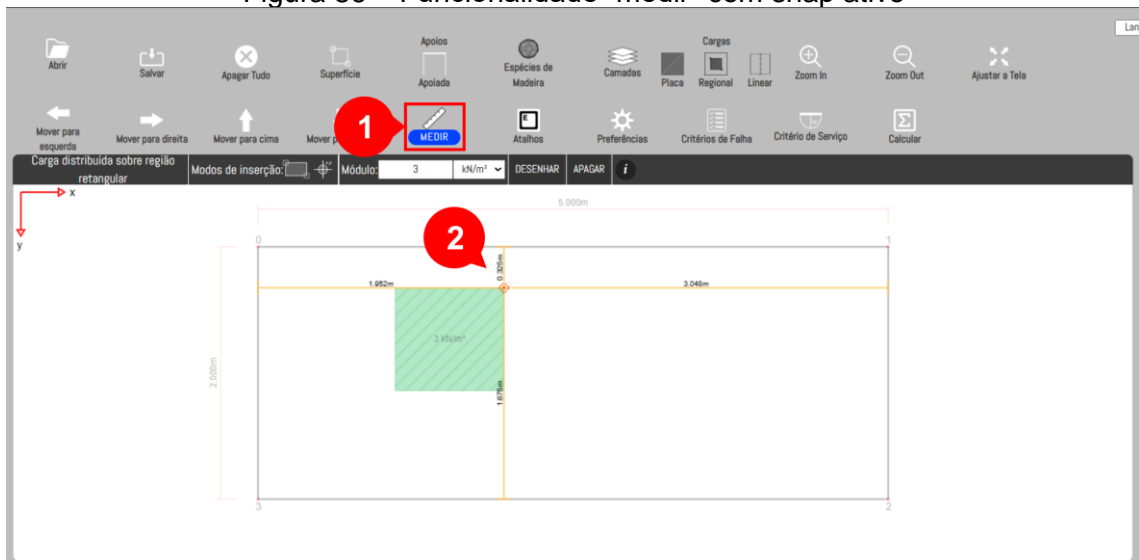
A ferramenta medir (Figura 85) proporciona ao usuário, a partir da movimentação do *mouse*, visualizar as distâncias do ponteiro até as bordas da placa. O *snap* é ativo caso o ponteiro esteja próximo a algum ponto de ancoragem (vértices e centros de cargas), consequentemente, as medidas são fixadas (Figura 86) enquanto o ponteiro do *mouse* se manter próximo a tal ponto.

Figura 85 – Funcionalidade “medir” com snap desativo



Fonte: O próprio autor, 2024.

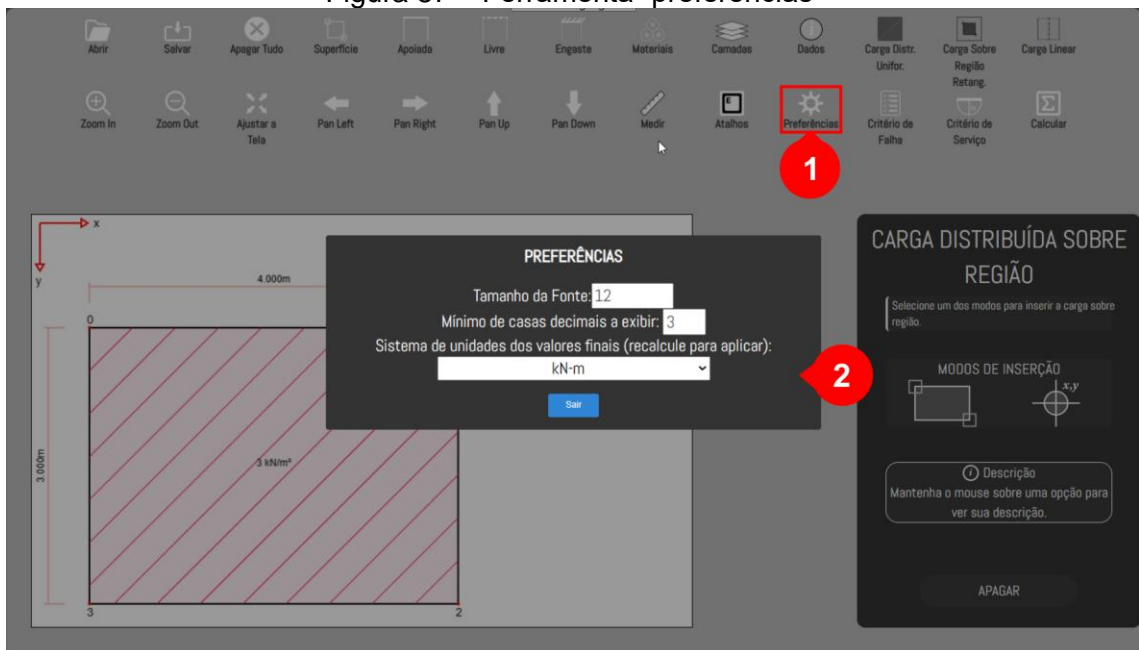
Figura 86 – Funcionalidade “medir” com snap ativo



Fonte: O próprio autor, 2024.

Por meio do botão “preferências” (Figura 87), o usuário pode trocar o tamanho da fonte dos textos, a quantidade de casas decimais e a unidade dos valores a serem exibidos nas telas gráficas.

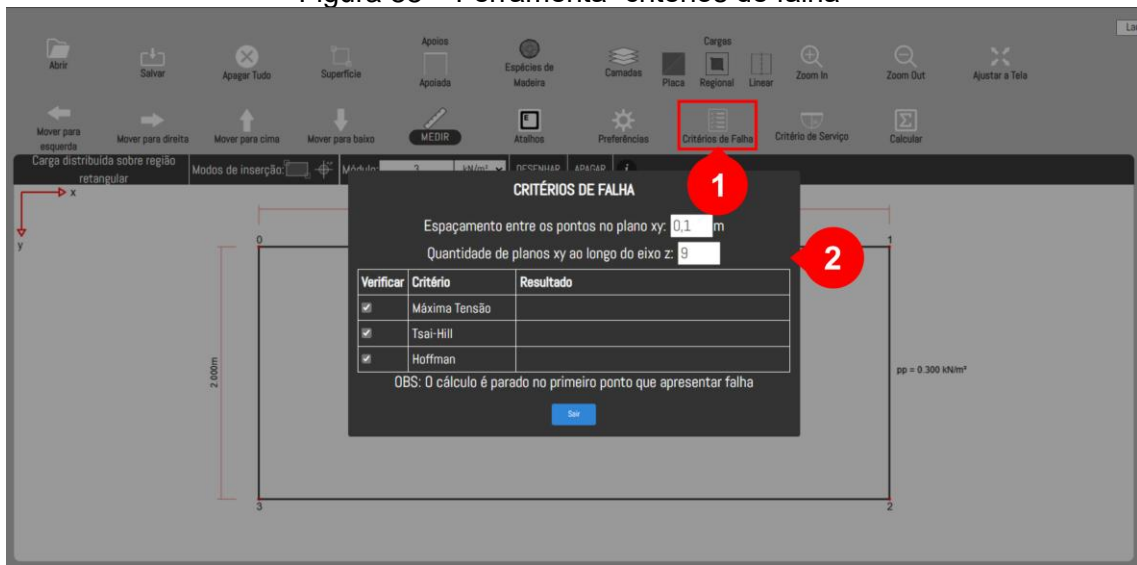
Figura 87 – Ferramenta “preferências”



Fonte: O próprio autor, 2024.

O botão “critério de falha” (Figura 88) é o gatilho para abertura da aba dos três diferentes critérios de falha (máxima tensão, Tsai-Hill e Hoffman), utilizados para a verificação da falha. Além disso, o espaçamento entre os pontos e quantidade de planos xy ao longo do eixo z são definidos pelo usuário, com o objetivo de gerar os pontos em que serão verificadas as falhas.

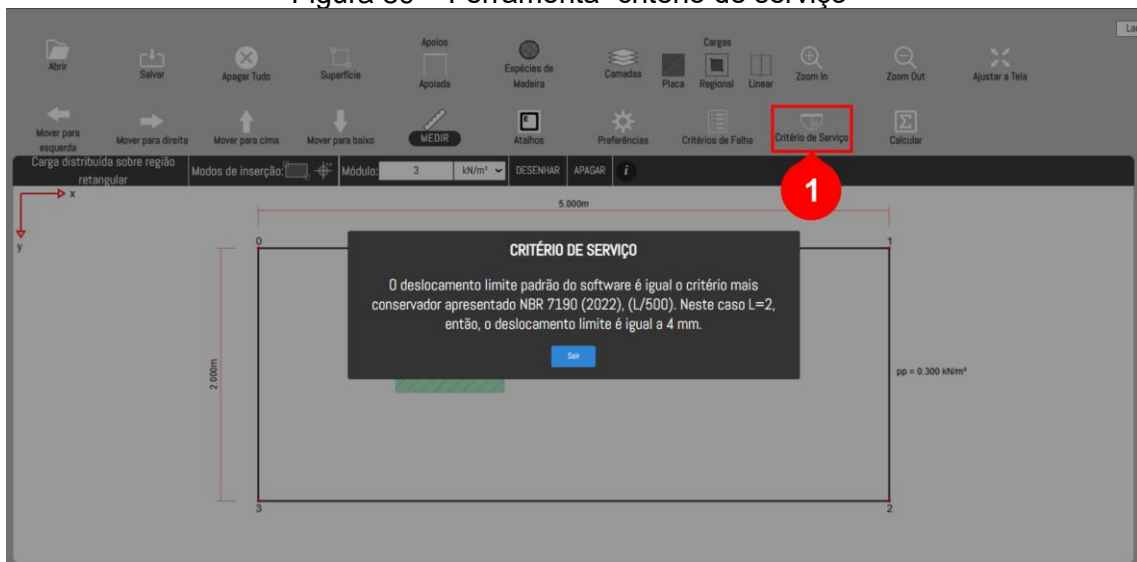
Figura 88 – Ferramenta “critérios de falha”



Fonte: O próprio autor, 2024.

Em contrapartida, o critério de serviço é fixado de acordo com o valor mais conservador apresentado pela NBR 7190 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2022), por conseguinte, tal informação é exibida a partir do clique no botão “critério de serviço” (Figura 89).

Figura 89 – Ferramenta “critério de serviço”



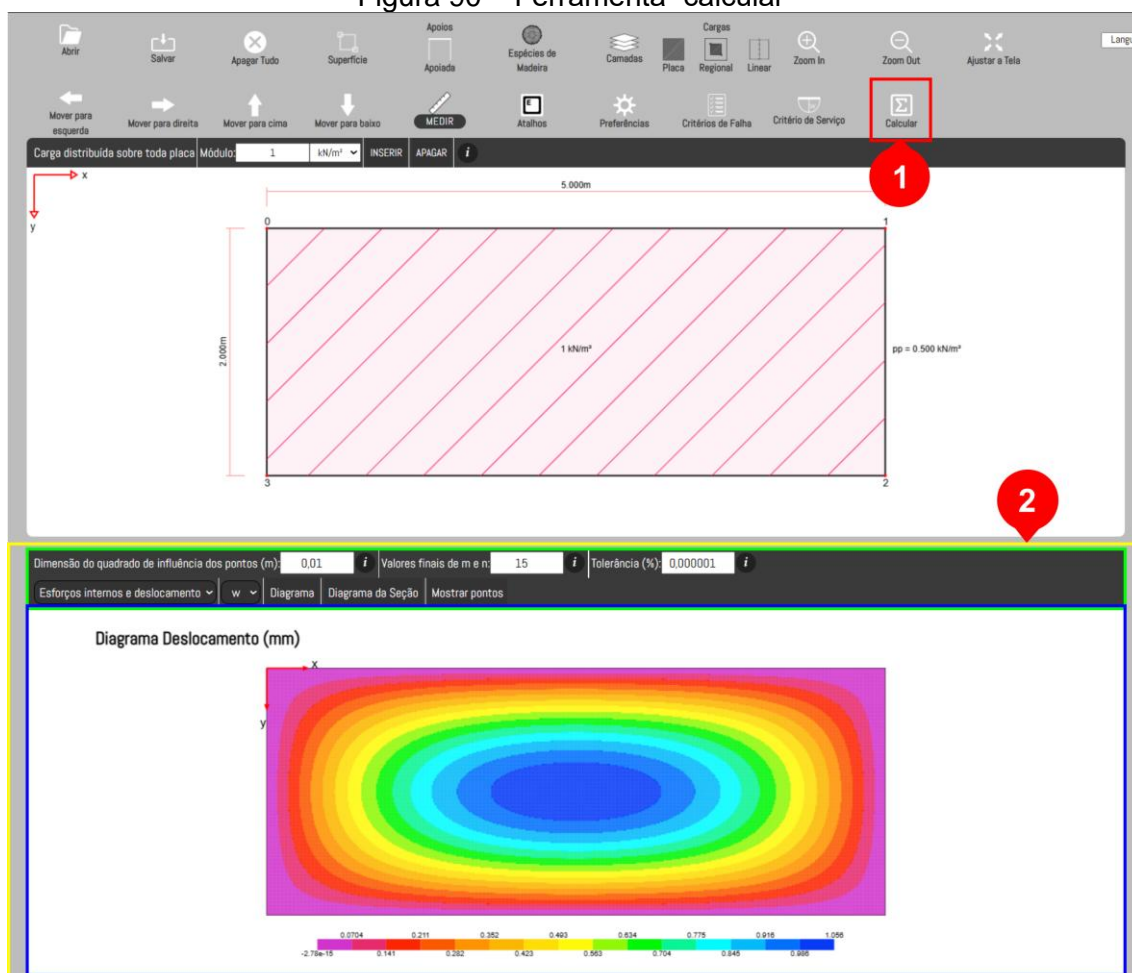
Fonte: O próprio autor, 2024.

A tela de saída (Figura 90) é gerada por meio do botão “calcular”, após a verificação do critério de limite e de falha. Se um dos critérios não for atendido, o algoritmo impede o usuário de prosseguir para a tela de saída e realizar a análise estrutural da placa de CLT.

Na tela de saída (Figura 90), visualiza-se as configurações dos cálculos e geração dos diagramas (destacado em verde) e a tela gráfica responsável pelo desenho dos diagramas (realçada azul).

Nas configurações de cálculo (destacado em verde na Figura 90), o primeiro parâmetro de cálculo define o espaçamento e o tamanho do quadrado de influência de cada ponto, por conseguinte, estabelece a grelha de pontos geradas para criação do diagrama. Com isso, quanto menor o seu valor maior a quantidade de pontos a ser gerada e mais suave tornam-se as curvas dos diagramas (Figura 91). Enquanto, o segundo e o terceiro parâmetros são referentes aos critérios de parada do *software*. O usuário pode definir a tolerância, a qual é verificada sempre que a função do Método de Navier altera o valor de n . Além disso, o usuário pode definir o número máximos de m e n que o *software* realizará a iteração das funções do Método de Navier.

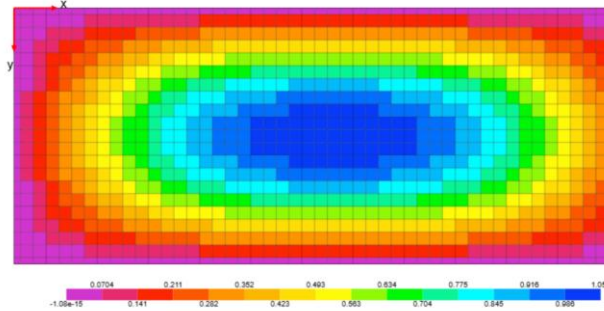
Figura 90 – Ferramenta “calcular”



Fonte: O próprio autor, 2024.

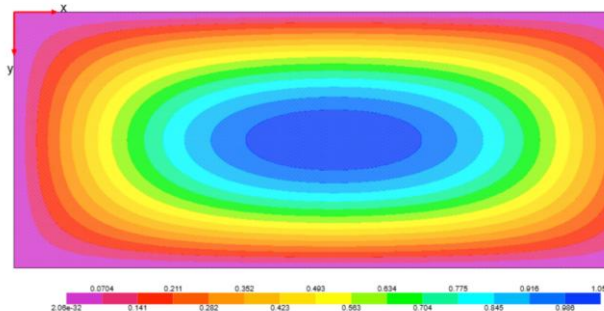
Figura 91 – Influência do parâmetro quadrado de influência no diagrama

Diagrama Deslocamento (mm)



(a) Valor igual a 0,1 m

Diagrama Deslocamento (mm)



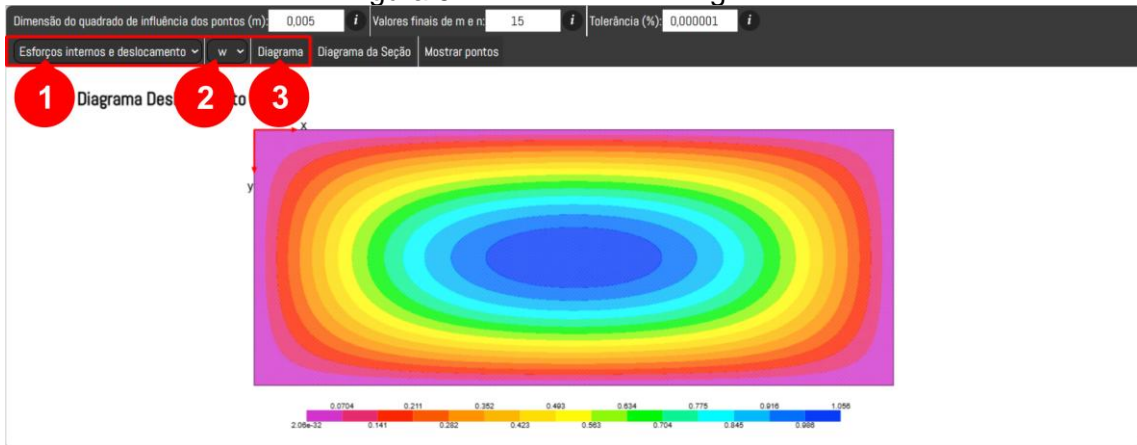
(b) Valor igual a 0,005 m

Fonte: O próprio autor, 2024.

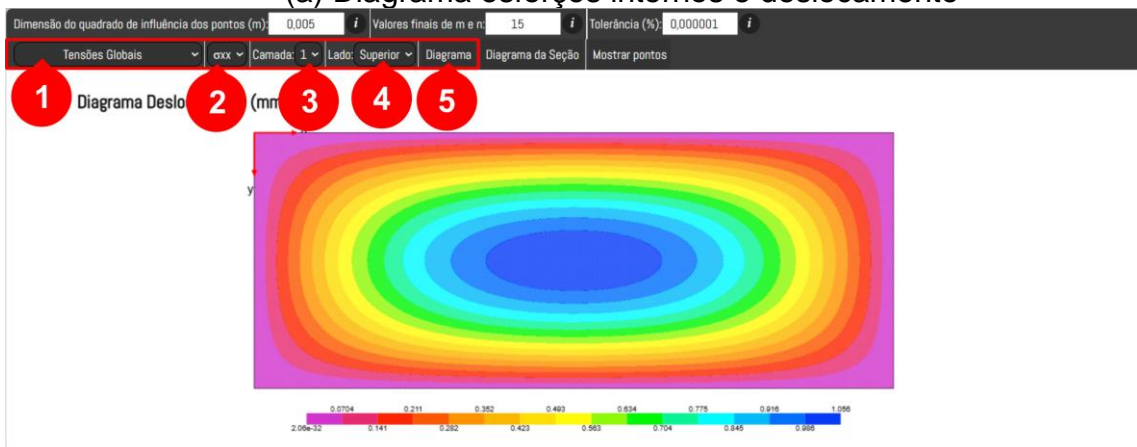
No menu superior (Figura 92), observar-se a seguinte separação “esforços internos e deslocamento”, “tensões globais” e “tensões locais”. Os esforços internos e deslocamento são calculados no plano médio do laminado (Figura 92a), as tensões variam ao longo da espessura. Dessa forma, caso selecionado “tensões globais” ou “tensões locais” surge a possibilidade de ser selecionada a camada e a profundidade desta (Figura 92b).

Uma vez definidos os parâmetros de cálculo e selecionado a função desejada, por meio do botão “Diagrama”, tornar-se possível desenhar o seu diagrama (Figura 92). Além do diagrama no plano xy , por meio do botão “Diagrama da Seção”, podem ser desenhadas os diagramas das tensões na seção transversal da placa (Figura 93).

Figura 92 – Ferramenta “diagrama”



(a) Diagrama esforços internos e deslocamento



(b) Diagrama das tensões

Fonte: O próprio autor, 2024.

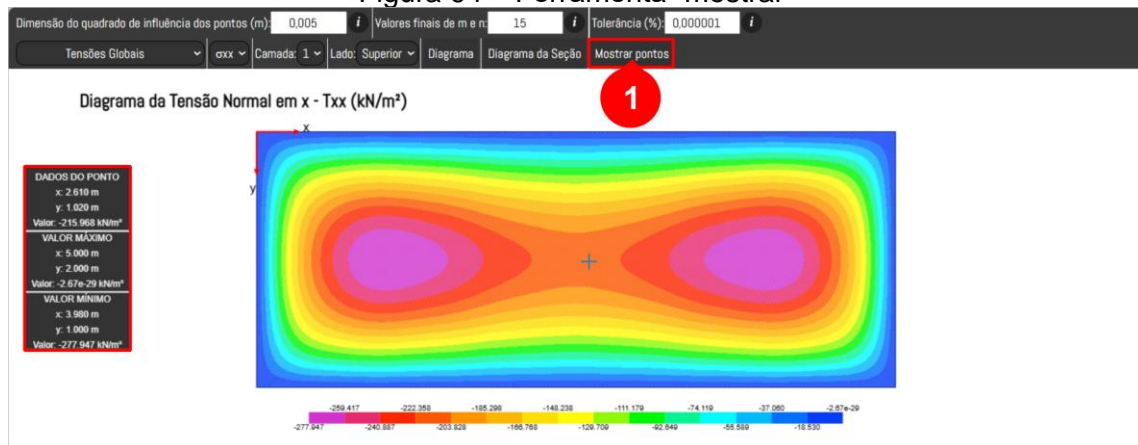
Figura 93 – Ferramenta “diagrama da seção”



Fonte: O próprio autor, 2024.

O botão “Mostrar pontos” (Figura 94) permite visualizar o valor máximo, mínimo e valor do ponto em que o ponteiro do mouse está posicionado.

Figura 94 – Ferramenta “mostrar”



Fonte: O próprio autor, 2024.

Convém destacar que, conforme descrito no capítulo 2.1.3, as camadas são consideradas perfeitamente coladas na Teoria Clássica da Placa Laminada. Portanto, o *software* apresenta valores de esforços e tensões no estado limite de serviço.