



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Variedades tóricas, fibra de Milnor e equisingularidade de Whitney

Danilo da Nóbrega Santos

São Carlos-SP
Novembro de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Variedades tóricas, fibra de Milnor e equisingularidade de Whitney

Danilo da Nóbrega Santos

Orientadora: Profa. Dra. Thais Maria Dalbelo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Novembro de 2025



Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Danilo da Nóbrega Santos, realizada em 14/11/2025.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Thais Maria Dalbello (UFSCar)

Prof. Dr. Andrés Daniel Duarte (UNAM)

Prof. Dr. Maximiliano Leyton Álvarez (UTALCA)

Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandez (UEM)

Profa. Dra. Hellen Monção de Carvalho Santana (UFSCar)

Agradecimentos

Aos meus pais, por toda dedicação, empenho e esforço para que eu e meus dois irmãos tivéssemos acesso a educação.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (DM–UFRPE), onde exerço a função de docente, pela concessão do afastamento para o meu doutorado.

A Professora Thais Maria Dalbello, pela orientação e tornar possível esse trabalho.

Ao Professor Daniel Duarte, pela valorosa contribuição nesse trabalho durante a realização do estágio sanduíche e pela excelente estadia na cidade Morélia.

A todos os membros da banca, por aceitar o convite para contribuir com nosso trabalho.

A CAPES, pela auxílio financeiro que tornou viável o estágio sanduíche na UNAM campus de Morélia.

Resumo

Neste trabalho, estudamos as variedades tóricas, bem como objetos a elas relacionados, como hipersuperfícies, em duas frentes de pesquisa. Na primeira parte, estabelecemos condições sobre uma família f_t de funções definidas em uma variedade tórica arbitrária, de modo que a família associada de hipersuperfícies $f_t^{-1}(0)$ seja Whitney equisingular. Na segunda parte, apresentamos uma estrutura tórica para a 2-variedade determinantal simétrica genérica S_n^2 , bem como um estudo detalhado da combinatória do cone associado a essa estrutura. Como aplicação, obtemos uma fórmula para calcular a característica de Euler da fibra de Milnor de funções com singularidade isolada na origem definidas sobre S_n^2 . Como aplicação desta fórmula, calculamos a obstrução de Euler local de S_n^2 na origem. Assim, o trabalho contribui tanto para o entendimento da equisingularidade de Whitney em variedades tóricas quanto para a descrição combinatória e topológica de variedades determinantis simétricas genéricas.

Palavras-chave: Variedades tóricas, poliedro de Newton, Whitney equisingularidade.

Abstract

In this work, we study toric varieties as well as related objects, such as hypersurfaces, along two lines of research. In the first part, we establish conditions on a family f_t of functions defined on an arbitrary toric variety, ensuring that the associated family of hypersurfaces $f_t^{-1}(0)$ is Whitney equisingular. In the second part, we present a toric structure for the 2-generic symmetric determinantal variety S_n^2 , together with a detailed study of the combinatorics of the cone associated with this structure. As an application, we obtain a formula for computing the Euler characteristic of the Milnor fiber of functions with an isolated singularity at the origin defined on S_n^2 . Using this formula, we compute the local Euler obstruction of S_n^2 at the origin. Altogether, the results contribute both to the study of Whitney equisingularity in toric varieties and to the combinatorial and topological understanding of generic symmetric determinantal varieties.

Keywords: Toric varieties, Newton polyhedron, Whitney equisingularity.

Conteúdo

Introdução	3
1 Preliminares	7
1.1 Variedades algébricas e lema de seleção de curvas	7
1.2 Conjuntos analíticos	9
1.3 Variedades tóricas	10
1.3.1 Variedades tóricas normais afins	10
1.3.2 Variedades tóricas não normais	17
1.3.3 2-variedades determinantis simétricas genéricas	19
1.4 Estratificação de Whitney e Equisingularidade	20
1.5 Obstrução de Euler local	22
2 Equisingularidade de Whitney de hipersuperfícies sobre variedades tóricas	27
2.1 Não-degeneracidade e controle local em variedades tóricas	28
2.2 Admissibilidade de uma família de polinômios	38
2.3 Admissibilidade e equisingularidade de Whitney	42
3 Característica de Euler da fibra de Milnor sobre 2-variedades simétricas genéricas	51
3.1 Estrutura tórica da 2-variedade determinantal simétrica ge- nérica	52
3.1.1 Algumas propriedades do cone gerado pelo semigrupo \mathcal{S}	55
3.2 A característica de Euler da fibra de Milnor	57
3.2.1 Uma fórmula para a característica de Euler da fibra de Milnor em \mathcal{S}_n^2	59
3.3 A obstrução local de Euler	62
3.3.1 Contra exemplo para a conjectura de Matsui e Takeuchi	63
3.3.2 Relação com o número de Milnor	65
Referências Bibliográficas	66

Lista de Figuras

1.1	Cones poliedrais em \mathbb{R}^2	11
1.2	Cone não fortemente convexo	11
1.3	Cone e seu dual	12
1.4	Relação entre as faces de σ e $\check{\sigma}$	13
1.5	Variedade $V \subset \mathbb{R}^3$ e sua estratificação	20
1.6	Estratificação do cone que não satisfaz as condições de Whitney	21
1.7	Conjunto $\text{Sing}(V)$	22
1.8	Conjunto $\text{Sing}(W)$	22
2.1	Cone dual $\check{\sigma} \subset \mathbb{R}^3$	29
2.2	Poliedro de Newton em \mathbb{C}^2	33
2.3	Poliedro de Newton em X_σ	33
2.4	Poliedro de Newton de g	34
2.5	Face não-compacta essencial	36

Introdução

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira delas, apresentamos condições sobre uma família de funções definida em uma variedade tórica para que a família de hipersuperfícies associadas seja Whitney equisingular, independente do conjunto singular. Essa parte do trabalho tem por motivação os resultados de C. Eyrál e M. Oka apresentados em [16]. Na segunda parte apresentamos uma fórmula para calcular a característica de Euler da fibra de Milnor de uma função definida sobre uma 2-variedade determinantal simétrica S_n^2 . Tal fórmula é obtida primeiramente dotando S_n^2 de uma estrutura tórica, no sentido de exibir um conjunto de geradores para um semigrupo de modo que a variedade tórica associada coincida com S_n^2 .

O conceito de equisingularidade de Whitney desempenha um papel crucial na Geometria Algébrica e na Teoria das Singularidades. Ele fornece uma estrutura rigorosa para o estudo de famílias de variedades com pontos singulares, garantindo que certas propriedades geométricas e topológicas permaneçam consistentes em toda a família. Portanto, a busca por invariantes e condições para descrever a equisingularidade de Whitney em famílias de variedades é uma das principais questões da Teoria das Singularidades e tem sido estudada por muitos autores, como por exemplo, [14, 18, 19, 43, 51].

Um conceito intimamente associado à equisingularidade de Whitney em famílias de variedades é o conceito de poliedro de Newton. Em notas não publicadas, Briançon estudou a equisingularidade de Whitney para uma família de hipersuperfícies com singularidade isolada e Newton não-degeneradas. Mais precisamente, seja $F(t, z)$ uma família de funções polinomiais não constantes em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ que satisfazem $F(t, 0) = 0$ para todo $t \neq 0$ suficientemente pequeno. Denotando por $F_t(z) = F(t, z)$ e sua respectiva família de hipersuperfícies por $\{V(F_t)\} = \{F_t^{-1}(0)\}$ em \mathbb{C}^r , J. Briançon [9] provou o seguinte resultado.

Teorema 0.1. *Suponha que, para todo t suficientemente pequeno, as seguintes condições sejam satisfeitas:*

1. F_t tem uma singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^r$;
2. a fronteira de Newton $\Gamma(F_t; z)$ de F_t em 0 é independente de t ;
3. F_t é não-degenerada (no sentido de [32, 44]).

Então, a família de hipersuperfícies $\{V(F_t)\}$ é Whitney equisingular.

Em [16], Eyrál e Oka apresentaram uma generalização do resultado de Briançon para famílias de funções polinomiais com singularidades não-isoladas. Para isso, eles introduziram o conceito de *família admissível*. A grosso modo, uma família $\{F_t\}$ é admissível se a fronteira de Newton de F_t for constante (em relação a t), Newton não-degenerada e satisfaz a condição de “controle local uniforme” (ver [16, Definição 3.7]). A Newton não-degeneracidade usualmente é estudada em faces compactas do poliedro de Newton. Entretanto, para estender o Teorema 0.1 às funções com conjunto singular não-isolado, os autores também utilizaram as *faces não-compactas essenciais* bem como a *fronteira não-compacta de Newton*.

Esses resultados são formulados no espaço \mathbb{C}^r , cuja estrutura tórica desempenha um papel sutil, mas fundamental. Frequentemente, a combinatória do semigrupo que define \mathbb{C}^r , que é gerado pela base canônica de \mathbb{R}^r , é utilizada de forma tão natural no estudo de objetos sobre \mathbb{C}^r que nem mesmo nos damos conta de que a estrutura tórica está sendo empregada.

Como a classe das variedades tóricas inclui elementos com conjunto singular arbitrário, desenvolver estudos semelhantes aos realizados em \mathbb{C}^r requer compreensão dos obstáculos para estender tais resultados para o caso singular.

Nosso objetivo é generalizar os resultados de Eyrál e Oka para o contexto de funções definidas em uma variedade tórica, utilizando a noção de funções não-degeneradas em variedades tóricas arbitrárias, introduzida por Matsui e Takeuchi em [38], juntamente com a combinatória presente nessas variedades e que decorre dos semigrupos que as geram.

Assim como em [16], trataremos de singularidades não isoladas. Nesse contexto, é necessário considerar não apenas as faces compactas do poliedro de Newton, mas também uma classe adicional de faces.

Seguindo as ideias apresentadas em [45], definimos as noções de face não-compacta essencial e fronteira de Newton não-compacta no contexto das variedades tóricas. Também desenvolvemos uma ferramenta para lidar com as faces não-compactas essenciais. Aplicando uma abordagem semelhante à de [48], introduzimos o conceito de controle local e, conseqüentemente, generalizamos a condição de admissibilidade (introduzida originalmente em [16]) para o contexto tórico. Com essas noções estabelecidas, demonstramos que se uma família de funções polinomiais f_t sobre uma variedade tórica X é admissível, então a família associada de hipersuperfícies $V(f_t) \subset X$ é Whitney equisingular.

Um outro conceito amplamente estudado na Teoria de Singularidades é a fibra de Milnor de uma função, que se apresenta como uma ferramenta poderosa na análise de pontos críticos e possui uma ampla gama de aplicações em diversas áreas da matemática. Sua importância reside no fato de fornecer uma descrição local detalhada do comportamento de funções em torno de pontos críticos, permitindo avanços significativos na compreensão e classificação desses pontos críticos. Este objeto tem sido extensivamente estudado [13, 15, 32, 36, 38, 40, 46, 52].

Seja X uma subvariedade de \mathbb{C}^r e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função regular não constante. Para simplificar, vamos supor que $0 \in f^{-1}(0)$. O resultado a seguir é bastante conhecido (veja, por exemplo, [36]).

Lema 0.2. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta_0 > 0$ com $0 < \eta_0 \ll \varepsilon$ tal que para todo $0 < \eta < \eta_0$ a restrição de f a*

$$X \cap B(0, \varepsilon) \cap f^{-1}(D_\eta^*) \longrightarrow D_\eta^*$$

é um fibrado topológico sobre o disco perfurado $D_\eta^ := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \eta\}$, onde $B(0, \varepsilon)$ é a esfera aberta em \mathbb{C}^r com raio ε centrado na origem.*

A fibra de Milnor de f na origem, denotada por F_0 , é qualquer fibra da fibração acima. A teoria de fibra de Milnor possui diversas aplicações. Entre elas, podemos destacar sua conexão com a obstrução de Euler local de X e a obstrução de Euler local de f [8, 6].

A obstrução de Euler local em um ponto $p \in X$ constitui uma medida da complexidade da estrutura local em torno de p . Ela mede a obstrução à extensão de um campo vetorial radial definido em torno de p . Por outro lado, a obstrução de Euler local de uma função f em um ponto crítico isolado é um conceito que estende a obstrução de Euler local de X considerando outro campo vetorial associado a f , em vez do campo vetorial radial. Ambas as noções são importantes na geometria algébrica e na teoria das singularidades [1, 20, 37, 30, 39, 49, 42, 26].

Apesar de sua importância, esses invariantes são muito difíceis de calcular a partir das suas definições. No entanto, Brasselet, Lê e Seade [8] apresentaram uma fórmula mostrando que a obstrução de Euler local pode ser descrita através da topologia da fibra de Milnor de uma forma linear genérica definida em X . Similarmente, Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade [6] mostraram que a obstrução de Euler local de uma função f pode ser descrita usando a topologia de sua fibra de Milnor.

Na segunda parte deste trabalho, calculamos a característica de Euler da fibra de Milnor de funções não-degeneradas f com conjunto crítico isolado quando X é uma 2-variedade determinantal simétrica genérica S_n^2 . Como aplicações, também calculamos a obstrução de Euler local de X e a obstrução de Euler local de f . Variedades determinantis simétricas genéricas são uma classe especial de variedades definidas como zeros de menores de matrizes simétricas. Esta família de variedades tem sido extensivamente estudada (ver, por exemplo, [2, 21, 22, 28, 31]).

Nosso interesse no caso particular de 2-variedades determinantis simétricas genéricas vem do fato de que essas variedades também são variedades tóricas. Portanto, podemos usar as ferramentas combinatórias da geometria tórica para descrever a característica de Euler da fibra de Milnor. Observamos que a obstrução local de Euler de variedades determinantis simétricas genéricas também é estudada em [34] por meio do complexo De Rham e as fórmulas de caracteres para \mathcal{D} -módulos simples.

Como S_n^2 possui uma singularidade isolada na origem, deduzimos uma fórmula explícita para a obstrução de Euler local de S_n^2 . Essa fórmula nos permite construir uma família de contraexemplos para uma conjectura de Matsui e Takeuchi referente à caracterização da suavidade de variedades tóricas em termos da obstrução de Euler.

Para uma superfície tórica normal afim X , Gonzalez-Sprinberg provou em [24] que X é suave na origem se, e somente se, a obstrução de Euler local de X em 0 for 1. Em [37], motivados por alguns cálculos nas dimensões 2, 3 e 4, Matsui e Takeuchi conjecturaram que a afirmação correspondente também deveria ser válida para variedades tóricas normais e projetivas de dimensões maiores. Em [41], o autor provou que, para um 3-fold tórico com singularidade isolada, a obstrução local de Euler é sempre maior ou igual a 1. Além disso, ele forneceu um contraexemplo para a conjectura de Matsui-Takeuchi em dimensão 3. Naturalmente, usando este contraexemplo, pode-se produzir contraexemplos de variedades tóricas com singularidades não isoladas em dimensão arbitrária.

Como aplicação final de nossos resultados, apresentamos uma classe de variedades tóricas normais n -dimensionais, para $n \geq 3$ ímpar, com singularidade isolada que não satisfazem a conjectura de Matsui-Takeuchi.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 1, faremos uma breve revisão dos conceitos básicos que julgamos necessários para melhor compreensão dos resultados apresentados.

No Capítulo 2, generalizamos ao caso tórico ferramentas fundamentais utilizadas por Eyral e Oka em [16]. Introduzimos o conceito de faces não-compactas essenciais e definimos a condição de controle local para o caso tórico. Estabelecemos a noção de família admissível, que combina não-degeneracidade, controle local e invariância da fronteira de Newton. Além disso, provamos que, sob a condição de invariância da fronteira de Newton, uma família de funções polinomiais não-degeneradas possui boas propriedades geométricas, como a existência de uma bola de Milnor. Por fim, apresentamos e provamos o teorema principal, que garante que famílias admissíveis de funções em variedades tóricas são Whitney equisingular.

No Capítulo 3, apresentamos uma base para um semigrupo cuja variedade tórica associada coincide com S_n^2 e deduzimos diversas propriedades a partir desse semigrupo. Também estabelecemos algumas propriedades combinatórias do cone associado a esse semigrupo. De posse dessa estrutura e propriedades da mesma, estabelecemos uma fórmula para calcular a característica de Euler de uma função polinomial não-degenerada. Calculamos a obstrução de Euler local de S_n^2 e a obstrução de Euler local de uma função não-degenerada com conjunto crítico isolado definida em S_n^2 . A partir desse cálculo construímos uma classe de contraexemplos para conjectura de Matsui e Takeuchi. Finalmente, concluímos mostrando uma relação entre a obstrução de Euler local de uma função não-degenerada f em S_n^2 e o número de Milnor de uma função associada a f .

Preliminares

Neste capítulo, daremos uma breve introdução de conceitos básicos que serão abordados no decorrer deste texto, tais como: variedades tóricas, conjuntos analíticos, estratificação e equisingularidade de Whitney e obstrução de Euler. Em cada seção, indicaremos uma sugestão de referência para aprofundamento e visão geral dos temas aqui abordados.

1.1 Variedades algébricas e lema de seleção de curvas

Iniciaremos apresentando conceitos básicos sobre variedades algébricas e sobre o lema de seleção de curvas. Para maiores detalhes dos conceitos abordados nessa seção, sugerimos ver [29].

O n -espaço afim sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} é o conjunto

$$\mathbb{C}^n := \mathbb{A}^n = \{p = (p_1, \dots, p_n) : p_i \in \mathbb{C} \text{ para } i = 1, \dots, n\},$$

de todas as n -uplas de elementos de \mathbb{C} .

Seja $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre \mathbb{C} . Um elemento de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ pode ser interpretado como uma função do espaço afim \mathbb{C}^n sobre \mathbb{C} com a identificação $f(p) = f(p_1, \dots, p_n)$, onde $p \in \mathbb{C}^n$ e $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Dessa maneira, faz sentido falarmos do conjunto de zeros de um polinômio $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, que denotaremos por $V(f) = \{p \in \mathbb{C}^n : f(p) = 0\}$. De maneira geral, se $S \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ podemos definir o conjunto de zeros de S que denotaremos por

$$V(S) = \{p \in \mathbb{C}^n : f(p) = 0 \forall f \in S\}.$$

Note que se $I \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ é o ideal gerado por S , então $V(S) = V(I)$. Além disso, como $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ é um anel Noetheriano, todo ideal possui um número finito de geradores, logo o conjunto $V(S)$ pode ser expresso por uma quantidade finita de geradores de I . Por esse fato, de agora em diante iremos sempre nos referir a um conjunto de zeros como $V(I)$. No caso em que I é gerado por um único polinômio $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ usaremos a notação $V(f)$.

Definição 1.1. Um subconjunto $Y \subset \mathbb{C}^n$ é um conjunto algébrico se existe $S \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tal que $V(S) = Y$.

Exemplo 1.2. Considere o ideal I gerado pelo polinômio $f = z_1 z_3 - z_2^2 \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$. Então o conjunto algébrico é o cone $V(f) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 z_3 - z_2^2 = 0\}$.

Proposição 1.3. [29, Proposição 1.1] A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. A interseção qualquer de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. O conjunto vazio e o espaço todo são conjuntos algébricos.

Definição 1.4. Os conjuntos algébricos formam os conjuntos fechados de uma topologia no espaço afim \mathbb{C}^n , denominada de topologia de Zariski.

Definição 1.5. Um subconjunto Y de um espaço topológico X é irredutível se não pode ser expresso como uma união $Y = Y_1 \cup Y_2$ de dois subconjuntos fechados próprios de Y . O conjunto vazio não é considerado ser irredutível.

Definição 1.6. Uma variedade algébrica afim (ou simplesmente variedade algébrica) é um subconjunto fechado irredutível de \mathbb{C}^n , com a topologia induzida.

Definição 1.7. Dada uma variedade algébrica $V(I) = V \subset \mathbb{C}^n$, definimos o ideal

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] : f(p) = 0 \forall p \in V\}.$$

A \mathbb{C} -álgebra definida por

$$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] / \mathcal{I}(V)$$

é denominada *anel de coordenadas* de V e seus elementos podem ser interpretados como funções polinomiais de V em \mathbb{C} .

Observação 1.8. Seguindo a notação da definição acima. É possível mostrar que se $\mathcal{I}(V)$ é um ideal radical, então V é uma variedade algébrica. Também é verdade que se I é um ideal primo, então V é variedade algébrica.

Por fim, encerramos essa subseção com o lema de seleção de curvas, uma importante ferramenta para demonstração de resultados centrais do Capítulo 2.

Lema 1.9 (Lema da seleção de curvas – [40], Lema 3.1). *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto algébrico e $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto definido pelas inequações polinomiais*

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\}.$$

Se $0 \in \mathbb{R}^n$ pertence ao fecho do conjunto $V \cap U$, então existe uma curva analítica real $p : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $p(0) = 0$ e $p(s) \in V \cap U$ para todo $s > 0$.

1.2 Conjuntos analíticos

Da mesma forma que para polinômios, podemos estudar o conjunto dos zeros de uma ou mais função analítica. A um tal conjunto é dado o nome de conjunto analítico. Neste trabalho, estudaremos estes conjuntos em torno da vizinhança de um ponto desejado, para tanto precisaremos da noção de germe de um conjunto analítico, que apresentaremos a seguir.

Definição 1.10. Dois pares (U_1, V_1) e (U_2, V_2) , com $U_i \subset \mathbb{C}^n$ vizinhança aberta da origem e $V_i \subset U_i$, para $i \in \{1, 2\}$, são equivalentes se existe uma vizinhança da origem $W \subset \mathbb{C}^n$, com $W \subset U_1 \cap U_2$, tal que $V_1 \cap W = V_2 \cap W$. Um germe na origem em \mathbb{C}^n é uma classe de equivalência dessa relação.

Também é possível definir germe de funções na origem de \mathbb{C}^n , como sendo uma classe de equivalência no conjunto das funções analíticas de \mathbb{C}^n em \mathbb{C} da seguinte forma.

Definição 1.11. Sejam $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funções analíticas. Dizemos que f é equivalente a g se existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^n$ da origem onde f coincide com g . Definimos um germe de função analítica na origem como sendo uma classe de equivalência dessa relação e denotamos por f o germe cujo representante é a função $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Denotamos por \mathcal{O}_n o conjunto de todos os germes de funções na origem de \mathbb{C}^n .

Sejam $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}_n$, onde $f_1, \dots, f_s : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ são representantes dos germes f_1, \dots, f_s respectivamente. A classe de equivalência do conjunto $V(f_1, \dots, f_s) := \{z \in \mathbb{C}^n : f_1(z) = \dots = f_s(z) = 0\}$ é denotada por $(V, 0)$. Se g_i , com $1 \leq i \leq s$, são representantes do mesmo germe, então $V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_s)$.

De forma análoga a conjuntos algébricos, também é possível definir um ideal para conjuntos analíticos.

Definição 1.12. Definimos o ideal de um germe de conjunto analítico $(V, 0)$ por $\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathcal{O}_n : V \subset f^{-1}(0)\}$.

Definição 1.13. Um germe de um conjunto analítico $(V, 0)$ é dito irredutível quando para quaisquer germes V_1 e V_2 tal que $V = V_1 \cup V_2$ tivermos que $V = V_1$ ou $V = V_2$. Neste caso, dizemos que V é uma variedade analítica.

Proposição 1.14 ([27], Teorema 15.). *Dado um germe de conjunto analítico V , então existem variedades analíticas V_1, \dots, V_k , com $V_i \not\subset V_j$ para $i \neq j$, tais que $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$. Essa decomposição é única a menos de ordem e as variedades analíticas V_i , $1 \leq i \leq k$, são chamadas de componentes irredutíveis de V .*

Todas essas definições podem ser realizadas para um ponto fixado de \mathbb{C}^n que não seja a origem, mas sem perda de generalidade podemos considerá-lo como sendo a origem.

Definição 1.15. Um conjunto analítico $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_s)$ é reduzido quando a \mathbb{C} -álgebra quociente $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$ não tem elementos nilpotentes.

Definição 1.16. Um ponto z de um conjunto analítico V é dito regular (ou suave) quando para alguma vizinhança U de z , o germe $U \cap V$ é dado como um conjunto de zeros de um número finito de germes de funções analíticas que possuem z como ponto regular delas. Um ponto de V que não é regular é chamado de ponto singular de V .

Definição 1.17. A dimensão de uma variedade analítica V é a dimensão do espaço tangente a V em um ponto regular de V .

Definição 1.18. Um germe de conjunto analítico V é dito equidimensional quando todas as suas componentes irredutíveis têm a mesma dimensão.

Um importante resultado para esse trabalho é uma versão para conjuntos analíticos do Lema de seleção de curvas que pode ser encontrado em [47].

Lema 1.19 (Lema da seleção de curvas – caso analítico). *Sejam f_1, \dots, f_k e g_1, \dots, g_m funções analíticas definidas em uma vizinhança aberta U em torno da origem em \mathbb{R}^n . Considere os conjuntos*

$$X = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\} \quad e \quad Y = \{x \in U : g_1(x) > 0, \dots, g_m(x) > 0\}.$$

Se $0 \in \mathbb{R}^n$ pertence ao fecho do conjunto $X \cap Y$, então existe uma curva analítica real $p : [0, \varepsilon] \rightarrow U$ tal que $p(0) = 0$ e $p(s) \in X \cap Y$ para todo $0 < s \leq \varepsilon$.

1.3 Variedades tóricas

Nessa seção, introduziremos uma classe de variedades algébricas que são o objeto de estudo deste trabalho, as variedades tóricas. Apresentaremos duas formas de definir essas variedades. Em um primeiro momento, apresentaremos uma definição via geometria convexa de um cone fortemente convexo, que vai garantir a normalidade dessas variedades e, em seguida, uma definição mais abstrata que não necessariamente vai garantir a normalidade. Por fim, apresentaremos como exemplo as variedades determinantis simétricas genéricas. Para maiores detalhes e aprofundamento dos conceitos aqui apresentados recomendamos as referências [4], [11] e [17].

1.3.1 Variedades tóricas normais afins

As variedades tóricas normais afins são definidas utilizando elementos da geometria convexa. Assim, primeiramente daremos uma breve introdução sobre cones e sua geometria. No decorrer desta seção, usaremos a seguinte notação: denotaremos por N a grade \mathbb{Z}^n em \mathbb{R}^n , por M a grade dual $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ no espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de \mathbb{R}^n e por e_1, \dots, e_n e e_1^*, \dots, e_n^* os vetores da base canônica de \mathbb{R}^n e $(\mathbb{R}^n)^*$, respectivamente, onde $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ é o conjunto dos homomorfismos de N em \mathbb{Z} .

Definição 1.20. Sejam $A = \{v_1, \dots, v_s\} \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto finito. O cone poliedral (ou simplesmente cone) gerado por v_1, \dots, v_s é o conjunto

$$\sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

Sua dimensão é a dimensão do menor subespaço linear de \mathbb{R}^n que o contém e será denotada por $\dim(\sigma)$.

Exemplo 1.21. Nas figuras abaixo apresentaremos alguns exemplos de cones em \mathbb{R}^2 e seus respectivos geradores.

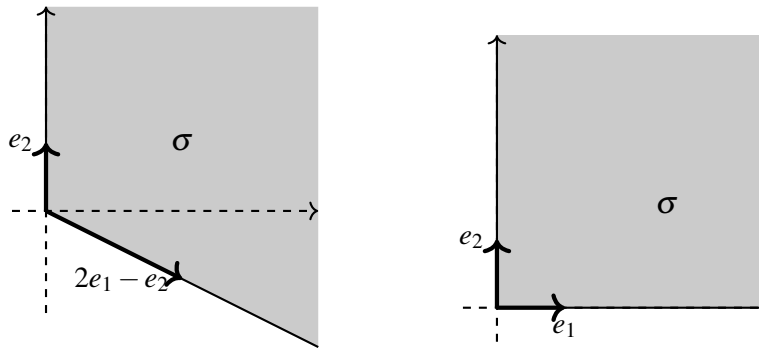


Figura 1.1: Cones poliedrais em \mathbb{R}^2

Definição 1.22. Um cone $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ é dito grade se todos os seus geradores pertencem a N .

Definição 1.23. Um cone $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ é dito fortemente convexo se $\sigma \cap (-\sigma) = \{\emptyset\}$, onde $-\sigma = \{-x : x \in \sigma\}$.

Exemplo 1.24. Os cones do Exemplo 1.21 são cones grade fortemente convexos. O cone grade $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ gerado por $A = \{e_1, e_2, -e_1\}$ é um cone grade (ver Figura 1.2) que não é fortemente convexo, pois $\sigma \cap (-\sigma) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.

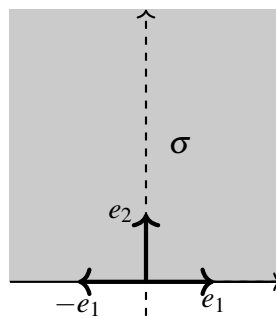


Figura 1.2: Cone não fortemente convexo

O próximo passo para definirmos as variedades tóricas é o conceito de cone dual de um cone poliedral.

Definição 1.25. Dado um cone $\sigma \subset \mathbb{R}^n$, o cone dual $\check{\sigma} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ de σ é o conjunto

$$\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}.$$

Proposição 1.26 ([11], Proposição 1.2.4). *Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone grade poliedral. Então $\check{\sigma} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ também é um cone grade poliedral e $\check{\check{\sigma}} = \sigma$.*

Exemplo 1.27. Considere o cone $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ gerado por $A = \{e_2, 2e_1 - e_2\}$. Seu cone dual $\check{\sigma} \subset (\mathbb{R}^2)^*$ é o cone gerado por $A^* = \{e_1^*, e_1^* + 2e_2^*\}$.

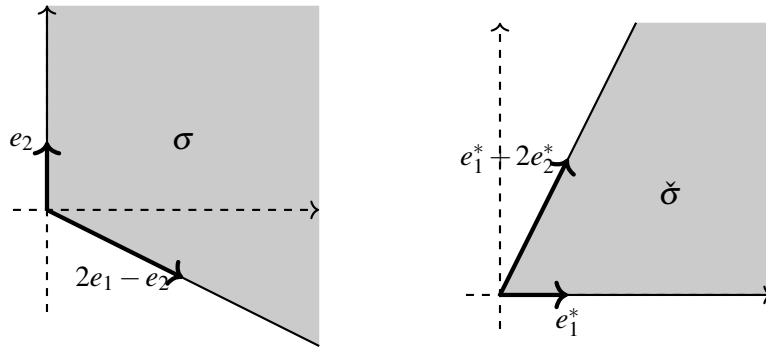


Figura 1.3: Cone e seu dual

Definição 1.28. Sejam $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone e $\check{\sigma} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ seu cone dual. Dado $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$ o conjunto

$$\tau = \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \langle \lambda, v \rangle = 0\}$$

é chamado de face do cone σ . Neste caso, usaremos a notação $\tau \prec \sigma$.

Observe que σ é uma face dele mesmo. Além disso, uma pergunta natural é como as faces do cone σ se relacionam com as faces do seu cone dual $\check{\sigma}$. Nesse sentido, as propriedades a seguir formam um resumo de lemas e proposições da seção §1.2 de [11].

Proposição 1.29. *Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone, então:*

- i. *toda face τ de σ também é um cone em \mathbb{R}^n ;*
- ii. *se $\tau \prec \sigma$, então $\check{\sigma} \subset \check{\tau}$;*
- iii. *existe uma relação biunívoca entre as faces de σ e $\check{\sigma}$. Tal relação leva $\tau \prec \sigma$ em uma face $\Delta_\tau \prec \check{\sigma}$ satisfazendo $\dim(\tau) = \text{codim}(\Delta_\tau)$.*

Exemplo 1.30. A Figura 1.4 ilustra as relações referentes ao item iii. da Proposição 1.29 para o cone do Exemplo 1.27. Para esse cone, temos uma face 0-dimensional $\tau_0 = \sigma \cap (e_1^* + e_2^*)^\perp$, duas faces 1-dimensional $\tau_1 = \sigma \cap (e_1^*)^\perp$ e $\tau_2 = \sigma \cap (e_1^* + 2e_2^*)^\perp$ e uma face 2-dimensional $\tau_3 = \sigma \cap (0e_1^* + 0e_2^*)^\perp$.

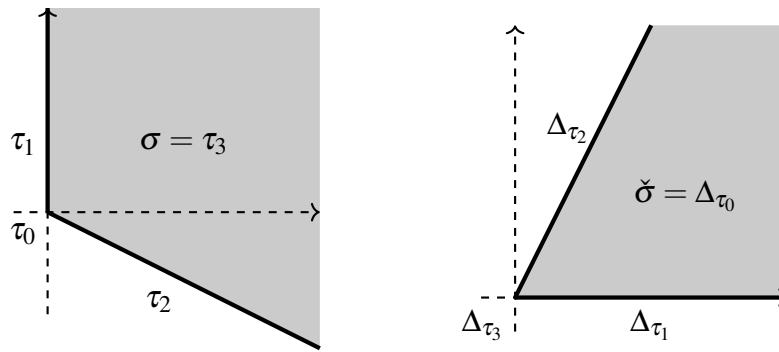


Figura 1.4: Relação entre as faces de σ e $\check{\sigma}$

A seguir, apresentaremos um resultado simples, mas que é fundamental no processo de construção das variedades tóricas.

Proposição 1.31 (Lema de Gordon, [17] Proposição 1). *Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone grade. Então $\sigma \cap N$ é um semigrupo finitamente gerado.*

Se $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ é um cone grade, segue da Proposição 1.26 que seu cone dual $\check{\sigma}$ também será um cone grade. Então, pela proposição acima, $\check{\sigma} \cap M$ é um semigrupo finitamente gerado que denotaremos por \mathcal{S}_σ . Usaremos o semigrupo \mathcal{S}_σ para construir uma \mathbb{C} -álgebra finitamente gerada, a qual servirá para a definição das variedades tóricas.

Usaremos a notação $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ para representar o anel dos polinômios de Laurent com coeficientes em \mathbb{C} , $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}]$.

Definição 1.32. Dado $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \lambda_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[x, x^{-1}]$, o suporte de f é o conjunto

$$\text{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \lambda_\alpha \neq 0\}.$$

Proposição 1.33 ([4], Proposição 2.1). *Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone grade. Então o anel*

$$R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[x, x^{-1}] : \text{supp}(f) \subset \check{\sigma} \cap M\}$$

é uma \mathbb{C} -álgebra finitamente gerada por polinômios de Laurent.

Definição 1.34. Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ cone grade fortemente convexo. A variedade tórica normal afim associada a σ é definida como sendo $X_\sigma = \text{Spec}(R_\sigma)$, onde $\text{Spec}(R_\sigma)$ denota o conjunto formado pelos ideais maximais de R_σ . Além disso, a dimensão da variedade tórica normal afim é igual a n (dimensão do ambiente que contém σ).

Uma vez que uma variedade tórica normal afim é uma variedade algébrica, vamos apresentar uma forma de escrevê-la como zeros de um polinômio. Existem diferentes maneiras de representar, a depender da escolha dos geradores do semigrupo \mathcal{S}_σ , a \mathbb{C} -álgebra finitamente gerada R_σ como um anel de coordenadas. Consequentemente, diferentes escolhas para os geradores do semigrupo

\mathcal{S}_σ geram diferentes representações para as variedades tóricas normais X_σ em diferentes espaços complexos. No entanto, essas representações são homeomorfas. Descreveremos, de maneira sucinta, essas representações.

Sejam $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone fortemente convexo e $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$ um sistema de geradores de \mathcal{S}_σ . Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, escreva $m_i = (m_1^i, \dots, m_n^i) \in \mathcal{S}_\sigma$. Considere o isomorfismo entre o grupo aditivo \mathbb{Z}^n e o grupo multiplicativo dos monômios mônicos de Laurent que, por abuso de notação, também iremos denotar por $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$,

$$\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}[x, x^{-1}] \\ m = (m_1, \dots, m_n) & \longmapsto & x^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \end{array} .$$

Através desse isomorfismo obtemos, para cada $1 \leq i \leq r$, os monômios mônicos de Laurent $u_i = x^{m_i} \in \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Dessa forma, a \mathbb{C} -álgebra R_σ pode ser representada da forma

$$R_\sigma = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]/I_\sigma$$

onde I_σ é o ideal definido da seguinte forma: descrevendo as relações aditivas de \mathcal{S}_σ como

$$\sum_{j=1}^r v_j m_j = \sum_{j=1}^r w_j m_j \quad \text{com } v_j, w_j \in \mathbb{Z}_+,$$

pelo isomorfismo θ obtemos relações multiplicativas entre os monômios de Laurent

$$x^{v_1 m_1} \cdots x^{v_r m_r} = x^{w_1 m_1} \cdots x^{w_r m_r} \Rightarrow (x^{m_1})^{v_1} \cdots (x^{m_r})^{v_r} = (x^{m_1})^{w_1} \cdots (x^{m_r})^{w_r}$$

ou seja, teremos relações entre as coordenadas u_i 's dadas por

$$(u_1)^{v_1} \cdots (u_r)^{v_r} = (u_1)^{w_1} \cdots (u_r)^{w_r}$$

e conseqüentemente a relação binomial

$$z_1^{v_1} \cdots z_r^{v_r} = z_1^{w_1} \cdots z_r^{w_r}$$

que define I_σ onde $z_i = u_i = x^{m_i}$. Além disso, como uma consequência do Teorema de Nullstellensatz temos que

$$V(I_\sigma) \cong \text{Spec}(R_\sigma).$$

Exemplo 1.35. Considere $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ o cone grade dado no Exemplo 1.27. Pela Proposição 1.31, temos que o semigrupo \mathcal{S}_σ tem como sistema de geradores o conjunto $\mathcal{A} = \{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$. Via o isomorfismo θ , segue que $u_1 = x_1$, $u_2 = x_1 x_2$ e $u_3 = x_1 x_2^2$. Neste caso, a \mathbb{C} -álgebra R_σ pode ser representada como

$$R_\sigma = \mathbb{C}[x_1, x_1 x_2, x_1 x_2^2] = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/I_\sigma.$$

Por outro lado, temos uma única relação aditiva entre os geradores de \mathcal{S}_σ , $m_1 + m_3 = 2m_2$. Então I_σ será o ideal gerado pela relação binomial $z_1 z_3 = z_2^2$. Dessa forma, a variedade tórica normal afim correspondente ao cone σ é representada em \mathbb{C}^3 por

$$X_\sigma = V(I_\sigma) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 z_3 = z_2^2\}.$$

Proposição 1.36 ([4], Proposição 2.2). *Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ cone grade fortemente convexo. A variedade tórica $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ contém o toro algébrico $T = (\mathbb{C}^*)^n$ como um subconjunto aberto e denso na topologia de Zariski.*

Essa proposição nos diz que podemos mergulhar o toro algébrico T na variedade afim X_σ . A demonstração desse resultado será omitida, entretanto apresentaremos o ponto chave relacionado a demonstração que é a aplicação que define o mergulho, o qual chamaremos de mergulho canônico. Para tanto, consideremos $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$ um sistema ordenado de geradores de \mathcal{S}_σ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T$. O mergulho canônico é a aplicação

$$\begin{aligned} h: T &\longrightarrow X_\sigma \\ \xi &\longmapsto (\xi^{m_1}, \dots, \xi^{m_r}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde $m_i = (m_1^i, \dots, m_n^i) \in \mathcal{A}$ e $\xi^{m_i} = \xi_1^{m_1^i} \dots \xi_n^{m_n^i}$. Esse mergulho está associado à ação tórica de T sobre X_σ .

A seguir descreveremos a ação supracitada bem como uma breve descrição das órbitas desta ação. Tal ação é realizada pela aplicação

$$\begin{aligned} \phi: T \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (\xi, z) &\longmapsto (\xi^{m_1 z_1}, \dots, \xi^{m_r z_r}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Notemos que $\tau_0 = \{0\}$ é sempre uma face do cone $\sigma \subset \mathbb{R}^n$. Então a órbita associada a face $\tau_0 = \{0\}$ é a órbita densa de ϕ em X_σ que é o mergulho do toro algébrico T em X_σ .

Para descrever as outras órbitas, observemos que o Teorema de Nullstellensatz estabelece uma correspondência biunívoca entre a variedade tórica normal afim $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ e o conjunto dos ideais de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$. Tal correspondência leva cada ponto $p = (p_1, \dots, p_r) \in X_\sigma$ no ideal

$$\mathcal{M}_p = \langle z_1 - p_1, \dots, z_r - p_r \rangle$$

que é o ideal gerado por $z_i - p_i$, com $1 \leq i \leq r$, em $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$. Além disso, há uma outra correspondência que associa a cada ponto $p \in X_\sigma$ um homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$ em \mathbb{C} , de modo que cada ponto $p \in X_\sigma$ é associado a um homomorfismo $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r], \mathbb{C})$, tal que $\ker(\psi) = \mathcal{M}_p$, ou seja, $\psi(f) = f(p)$. Dessa forma, temos uma cadeia de correspondências

$$X_\sigma \longleftrightarrow \{\mathcal{M}_p \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r] : p \in X_\sigma\} \longleftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r], \mathbb{C}).$$

Generalizando essas correspondências, se I é um ideal de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$, teremos as seguintes correspondências

$$V(I) \longleftrightarrow \{\mathcal{M} \subset R_V : \mathcal{M} \text{ é ideal maximal}\} \longleftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[z_1, \dots, z_r], \mathbb{C}),$$

onde $R_V = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]/I(V(I))$ é o anel de coordenadas de $V = V(I)$.

Agora, note que como a grade dual $M \cong (\mathbb{Z}^n)^*$ é gerada pelos vetores $\pm e_i^*$ e o anel de polinômios de Laurent $\mathbb{C}[M]$ é gerado por x_i, x_i^{-1} , com $1 \leq i \leq n$, então usando argumentos anteriores temos as seguintes identificações

$$T = \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) \cong \text{Hom}_{\text{sg}}(M, \mathbb{C}^*),$$

onde $\text{Hom}_{\text{sg}}(M, \mathbb{C}^*)$ representa o conjunto dos homomorfismos de semigrupos de M em \mathbb{C}^* . Entretanto, \mathcal{S}_σ é semigrupo da grade M e $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$ é uma sub-álgebra de $\mathbb{C}[M]$. Como vimos anteriormente, se $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$ é um sistema de geradores de \mathcal{S}_σ , essas sub-álgebras são geradas por monômios da forma x^{m_i} e para $m \in \mathcal{S}_\sigma$, x^m é o elemento correspondente em $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$, com multiplicação $x^m x^{m'} = x^{m+m'}$ e $x^0 = 1$. Além disso, via a última identificação, pontos do $\text{Spec}(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma])$ estão em correspondência com homomorfismos de semigrupos de \mathcal{S}_σ em \mathbb{C} , com $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$. Com isso, temos a seguinte identificação

$$X_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]) \cong \text{Hom}_{\text{sg}}(\mathcal{S}_\sigma, \mathbb{C}),$$

que associa cada $\psi \in \text{Hom}_{\text{sg}}(\mathcal{S}_\sigma, \mathbb{C})$ um ponto $z \in X_\sigma$ da forma $z = (\psi(m_1), \dots, \psi(m_r))$.

Assim, podemos apresentar a seguinte definição.

Definição 1.37. Sejam $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ cone grade fortemente convexo, $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$ um sistema de geradores do semigrupo \mathcal{S}_σ e $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ a variedade tórica normal afim definida por σ . Associamos a cada face τ de σ , o ponto distinguido $z_\tau = (\psi_\tau(m_1), \dots, \psi_\tau(m_r)) \in X_\sigma$, com $\psi_\tau \in \text{Hom}_{\text{sg}}(\mathcal{S}_\sigma, \mathbb{C})$ correspondendo ao homomorfismo definido nos geradores de \mathcal{S}_σ da seguinte maneira

$$\psi_\tau(m) = \begin{cases} 1, & \text{se } m \in \tau^\perp \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Exemplo 1.38. Considere $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ e $\check{\sigma} \subset (\mathbb{R}^2)^*$ como no Exemplo 1.27. Um sistema de geradores para \mathcal{S} é $\mathcal{A} = \{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$. Pelo Exemplo 1.30, o cone σ tem quatro faces

$$\tau_0 = \sigma \cap (e_1^* + e_2^*)^\perp, \tau_1 = \sigma \cap (e_1^*)^\perp, \tau_2 = \sigma \cap (e_1^* + 2e_2^*)^\perp \text{ e } \tau_3 = \sigma \cap (0 \cdot e_1^* + 0 \cdot e_2^*)^\perp.$$

Consequentemente, teremos quatro pontos distinguidos associados a X_σ , a saber

$$z_{\tau_0} = (1, 1, 1), z_{\tau_1} = (0, 0, 1), z_{\tau_2} = (1, 0, 0) \text{ e } z_{\tau_3} = (0, 0, 0).$$

Tendo em vista que cada ponto distinguido pertence à variedade tórica normal afim, faz sentido falar da órbita deste ponto distinguido segundo a ação ϕ .

Definição 1.39. Sejam $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone grade fortemente convexo e τ uma face de σ . A órbita correspondente à face τ , segundo a ação ϕ de T em X_σ , é a órbita do seu correspondente ponto distinguido z_τ . Essa órbita é denotada por \mathcal{O}_τ .

Teorema 1.40 ([11], Teorema 3.2.6). *Sejam $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone grade fortemente convexo e X_σ a variedade tórica associada a σ . Então,*

$$i. X_\sigma = \bigsqcup_{\tau \prec \sigma} \mathcal{O}_\tau;$$

$$ii. \text{ se } \tau \prec \sigma \text{ e } \overline{\mathcal{O}_\tau} \text{ representa o fecho da órbita } \mathcal{O}_\tau, \text{ então } \overline{\mathcal{O}_\sigma} = \bigsqcup_{\tau \prec \sigma} \mathcal{O}_\tau.$$

Exemplo 1.41. Considere $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ e $\check{\sigma} \subset (\mathbb{R}^2)^*$ como no Exemplo 1.27. Um sistema de geradores para \mathcal{S} é $\mathcal{A} = \{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$. No Exemplo 1.38 encontramos os pontos distinguidos desta variedade tórica normal afim. As órbitas correspondentes a cada face $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3 = \sigma$ são

$$\mathcal{O}_\sigma = \{(0,0,0)\}, \text{ associada ao ponto distinguido } z_\sigma = (0,0,0) = z_{\tau_3},$$

$$\mathcal{O}_{\tau_2} = \{(\xi^{m_1}, 0, 0)\} = \{(\xi_1, 0, 0) : \xi_1 \in \mathbb{C}^*\}, \text{ associada ao ponto distinguido } z_{\tau_2},$$

$$\mathcal{O}_{\tau_1} = \{(0, 0, \xi^{m_3})\} = \{(0, 0, \xi_1 \xi_2^2) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^*\}, \text{ associada ao ponto distinguido } z_{\tau_1},$$

$$\mathcal{O}_{\tau_0} = \{(\xi^{m_1}, \xi^{m_2}, \xi^{m_3})\} = \{(\xi_1, \xi_1 \xi_2, \xi_1 \xi_2^2) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^*\}, \text{ associada ao ponto distinguido } z_{\tau_0}.$$

O Teorema 1.40 nos garante que podemos indexar as órbitas de uma variedade tórica normal afim X_σ pelas faces do cone σ . No entanto, a Proposição 1.29 nos fornece uma relação biunívoca entre as faces de σ e seu cone dual $\check{\sigma}$, logo também é possível indexar as órbitas de X_σ usando as faces do cone $\check{\sigma}$.

1.3.2 Variedades tóricas não normais

Construir uma variedade tórica a partir de um cone fortemente convexo não é a única maneira de definir esses objetos. Daremos uma definição alternativa, igualmente útil, para variedades tóricas.

Definição 1.42. Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^n$ um semigrupo finitamente gerado pelo conjunto $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$. Considere o homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras

$$\pi_{\mathcal{S}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r] & \longrightarrow & \mathbb{C}[x, x^{-1}] \\ z_i & \longmapsto & x^{m_i} \end{array}.$$

Escrevendo $I_{\mathcal{S}} = \ker(\pi_{\mathcal{S}})$, a variedade tórica definida por \mathcal{S} será $X_{\mathcal{S}} = V(I_{\mathcal{S}}) \subset \mathbb{C}^r$. Além disso, a imagem do homomorfismo $\pi_{\mathcal{S}}$, denotado por $\mathbb{C}[x^{\mathcal{S}}]$, é o anel de coordenadas de $X_{\mathcal{S}}$ e o ideal $I_{\mathcal{S}}$ é chamado de ideal tórico.

Observe que o ideal tórico $I_{\mathcal{S}}$ da proposição acima é um ideal primo. Ademais, existe uma caracterização para essa classe de ideais.

Proposição 1.43 ([50], Capítulo 4). *Um ideal $I \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r]$ é um ideal tórico se, e somente se, é primo e binomial.*

Exemplo 1.44. Considere o semigrupo $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$ gerado pelo conjunto $\mathcal{A} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$. Note que

$$\pi_{\mathcal{S}}(z_1) = x_1, \pi_{\mathcal{S}}(z_2) = x_1 x_2, \pi_{\mathcal{S}}(z_3) = x_1 x_2^2.$$

Observando as relações existentes entre os elementos acima podemos concluir que $I_S = \ker(\pi_S) = (z_1 z_3 - z_2^2)$. Então, $X_S = V(z_1 z_3 - z_2^2)$, se trata da mesma variedade tórica normal afim do Exemplo 1.35.

Apesar de no exemplo anterior a variedade tórica ser normal, nem sempre as variedades como na Definição 1.42 serão normais. A normalidade, entre outras propriedades, está associada com o seguinte:

Definição 1.45. Seja $X_S \subset \mathbb{C}^r$ a variedade tórica definida pelo semigrupo $S \subset \mathbb{Z}^n$ gerado por $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$. O cone $K(S)$ associado à variedade tórica X_S é definido como sendo o cone gerado pelo conjunto \mathcal{A} . Em outras palavras

$$K(S) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i m_i : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

Isso nos diz que mesmo X_S não sendo definida a partir de um cone, ainda é possível associá-la um cone.

Exemplo 1.46. Considere o semigrupo S gerado por $\mathcal{A} = \{e_1, e_1 + e_2, 2e_2\}$. Note que

$$\pi_S(z_1) = x_1, \quad \pi_S(z_2) = x_1 x_2, \quad \pi_S(z_3) = x_2^2.$$

Procedendo como no exemplo anterior, $I_S = \ker(\pi_S) = (z_1^2 z_3 - z_2^2)$. Então $X_S = V(z_1^2 z_3 - z_2^2)$. Esse é um exemplo de variedade tórica não normal.

A proposição a seguir lista algumas propriedades das variedades tóricas, inclusive quanto à sua normalidade. Para mais detalhes, ver Capítulo 13 de [50].

Proposição 1.47. *Seja $S \subset \mathbb{Z}^n$ o semigrupo finitamente gerado por $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$. Então*

- i. X_S é irredutível;*
- ii. a dimensão de X_S é o posto da grade associada à \mathcal{A} , ou seja, $\dim X_S = \text{rank}(\mathbb{Z}\mathcal{A})$.*
- iii. X_S é normal se, e somente se, $S = K(S) \cap \mathbb{Z}^n$.*

Note que o item *iii.* desta proposição explica o fato de a variedade do Exemplo 1.44 e do Exemplo 1.46 serem normal e não normal, respectivamente.

Sejam $S \subset \mathbb{Z}^n$ o semigrupo gerado por $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$ e $X_S \subset \mathbb{C}^r$ a variedade tórica definida por S . Assim como no caso normal, X_S também contém o toro algébrico $T = (\mathbb{C}^*)^n$ como aberto e denso de Zariski e, de forma análoga, definimos o mergulho canônico

$$h: T \longrightarrow X_S \\ \xi \longmapsto (\xi^{m_1}, \dots, \xi^{m_r}) .$$

Além disso, temos a ação de T sobre X_S

$$\begin{aligned} \phi : T \times X_S &\longrightarrow X_S \\ (\xi, z) &\longmapsto (\xi^{m_1} z_1, \dots, \xi^{m_r} z_r), \end{aligned}$$

e podemos descrever suas órbitas através das faces do cone $K(S)$. Então, de forma semelhante ao caso normal, temos a seguinte relação biunívoca

$$\{T\text{-órbitas } k\text{-dimensionais de } X_S\} \longleftrightarrow \{\text{faces } k\text{-dimensionais de } K(S)\}.$$

1.3.3 2-variedades determinantis simétricas genéricas

Nesta seção, daremos uma breve introdução às variedades determinantis simétricas e, com os conceitos apresentados na seção anterior, veremos que as 2-variedades determinantis simétricas genéricas são variedades tóricas.

Seja S_n o \mathbb{C} -espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem n e entradas em \mathbb{C} . Denotaremos por S_n^t o subconjunto de S_n formado por todas as matrizes simétricas de posto menor do que t , onde $2 \leq t \leq n$. A variedade S_n^t é chamada de t -variedade determinantal simétrica genérica. Ou seja, se denotarmos por $L = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, onde z_{ij} são indeterminadas e $z_{ij} = z_{ji}$ para todo i, j , e por $J_t \subset \mathbb{C}[z_{ij} : 1 \leq i, j \leq n]$ o ideal formado pelos $(t \times t)$ -menores de L , então $S_n^t = V(J_t) \subset \mathbb{C}^N$, onde $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposição 1.48 ([21], Proposição 1.1). *Seja $S_n^t \subset \mathbb{C}^N$ variedade determinantal simétrica genérica, com $2 \leq t \leq n$. Então*

- i. S_n^t é uma variedade irredutível;
- ii. a dimensão de S_n^t é $N - \frac{(n-t+1)(n-t+2)}{2}$;
- iii. o local singular de S_n^t é S_n^{t-1} ;
- iv. S_n^t é normal.

Exemplo 1.49. Considere a matriz simétrica

$$L = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_5 & z_6 \end{pmatrix}.$$

Então $S_3^2 = V(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \subset \mathbb{C}^6$, onde $f_1 = z_1 z_4 - z_2^2$, $f_2 = z_1 z_5 - z_2 z_3$, $f_3 = z_4 z_6 - z_5^2$, $f_4 = z_2 z_6 - z_3 z_5$, $f_5 = z_1 z_6 - z_3^2$ e $f_6 = z_2 z_5 - z_3 z_4$, que correspondem aos (2×2) -menores da matriz L e pela Proposição 1.48, $\dim S_3^2 = 3$. Note que o ideal J_2 gerado por esses polinômios é binomial e primo em $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$, então pela Proposição 1.43, S_3^2 é uma variedade tórica.

O exemplo acima não é um caso particular. De maneira geral, podemos observar que para $n \geq 2$, o ideal J_2 que define a variedade S_n^2 é primo e binomial. Então, pela Proposição 1.43, S_n^2 é uma variedade tórica. No Capítulo 3, daremos uma estrutura tórica para S_n^2 , no sentido de exibir um sistema de geradores para um semigrupo $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$ de modo que $X_S = S_n^2$.

1.4 Estratificação de Whitney e Equisingularidade

Ao longo desta seção, apresentaremos a noção de estratificação de Whitney, introduzida por Whitney em [53] e desde então amplamente difundida e estudada, e que nesse trabalho será usada para investigar a equisingularidade de uma família de funções. Como leitura complementar a esse assunto também indicamos [23]. No que segue, M denotará uma variedade suave e $V \subset M$ um subconjunto qualquer de M .

Definição 1.50. Uma estratificação de V é uma partição $\mathcal{P} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ de V , com V_α subvariedade suave de M para todo α , de modo que dado qualquer ponto de V , existe uma vizinhança deste ponto que intersecta uma quantidade finita de variedades V_α . Neste caso, as subvariedades V_α são chamadas de estratos.

Exemplo 1.51. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y, z) = x^2 - y^2z$. Considere $M = \mathbb{R}^3$ e $V = f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2z\}$. O conjunto singular de V é o semieixo positivo $(0, 0, z)$ com $z \geq 0$. Logo, a partição $\mathcal{P} = \{V_1, V_2\}$, onde $V_1 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ e $V_2 = V \setminus V_1$, forma uma estratificação de V .

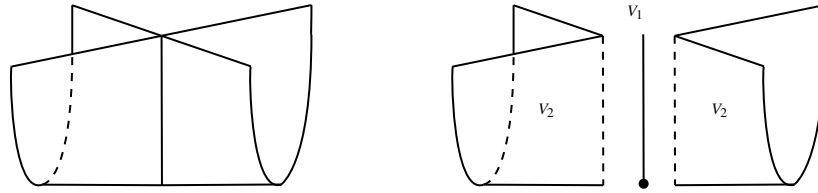


Figura 1.5: Variedade $V \subset \mathbb{R}^3$ e sua estratificação

Definição 1.52. Uma estratificação $\mathcal{P} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ de $V \subset M$ satisfaz a condição de fronteira quanto para quaisquer dois estratos $V_\alpha, V_\beta \in \mathcal{P}$ tais que $V_\alpha \cap \overline{V_\beta} \neq \emptyset$, então $V_\alpha \subset \overline{V_\beta}$.

Exemplo 1.53. Considere o Exemplo 1.51. A estratificação \mathcal{P} atende a condição de fronteira.

Definição 1.54. Uma estratificação $\mathcal{P} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ de $V \subset M$ satisfaz as condições de Whitney quando para qualquer par de estratos (V_α, V_β) , tais que $V_\beta \subset \overline{V_\alpha}$ e para qualquer $y \in V_\beta$ tivermos que:

- (a) para toda sequência $(x_n) \subset V_\alpha$ que converge para y , tal que o limite dos espaços tangentes em x_0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{x_n}(V_\alpha) = T$$

que existe na Grassmanniana correspondente, satisfaça $T_y(V_\beta) \subset T$;

- (b) e além disso, para toda sequência $(y_n) \subset V_\beta$ que converge para y , tal que o limite das direções dadas por $\overline{x_n y_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n y_n} = \lambda$$

que existe no espaço projetivo, satisfaça $\lambda \subset T$.

Tais condições são chamadas de (a) e (b) de Whitney.

Em seu trabalho [53], Whitney mostrou que todo conjunto analítico admite uma estratificação satisfazendo as condições (a) e (b). Estratificações que atendem a condição de fronteira (Definição 1.52) e as condições (a) e (b) de Whitney são chamadas de estratificação de Whitney.

Exemplo 1.55. Considere $M = \mathbb{R}^3$ e $V \subset \mathbb{R}^3$ um cone com vértice na origem. A partição $\mathcal{P} = \{V_\beta, V_\alpha\}$, onde V_β é uma geratriz de V e $V_\alpha = V \setminus V_\beta$ é uma estratificação de V que atende a condição de fronteira. No entanto, não satisfaz as condições de Whitney. De fato, considere uma (x_n) sequência sobre uma geratriz L de V que não seja V_β , convergindo para origem, $y = 0 \in V_\beta$. Observe que a condição (a) de Whitney não é satisfeita, pois o limite dos espaços tangentes $T_{x_n} V_\alpha$ não contém $T_0 V_\beta$. Além disso, a estratificação \mathcal{P} também não atende a condição (b) de Whitney. De fato, seja (y_n) em V_β que também convirja para origem, de modo que o segmento $\overline{x_n y_n}$ tenha sempre a mesma direção λ . Podemos observar que o limite de direções λ não estarão contidas no limite dos espaços tangentes $T_{x_n} V_\alpha$.

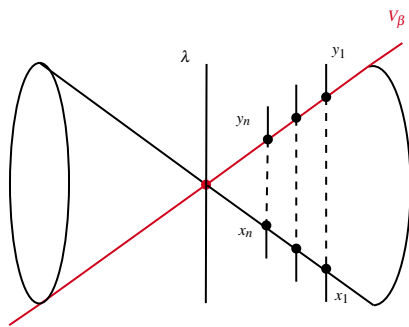
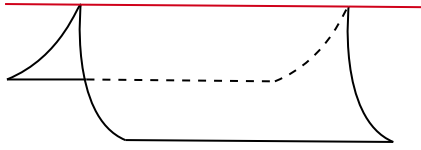
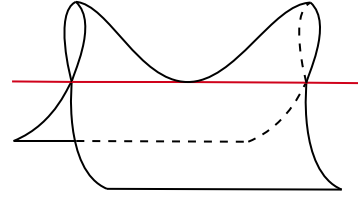


Figura 1.6: Estratificação do cone que não satisfaz as condições de Whitney

Observação 1.56. A condição (b) implica na condição (a) de Whitney. Além disso, se M é uma variedade diferenciável suave e $N \subset M$ uma subvariedade diferenciável suave de M , então o par $M \setminus N$ e N atende a condição (b) de Whitney.

Exemplo 1.57. Note que não existe uma única forma de estratificar um conjunto. Considere M e V como no Exemplo 1.55, entretanto tomemos a estratificação $\mathcal{P}' = \{V'_\alpha, V'_\beta\}$, com $V'_\beta = \{0\}$ e $V'_\alpha = V \setminus V'_\beta$. Esta estratificação é uma estratificação de Whitney para V .

Exemplo 1.58. Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas por $f(t, x, y) = x^3 - y^2$ e $g(t, x, y) = x^3 - y^2 - x^2 t^2$. Considere $M = \mathbb{R}^3$ e $V = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^3 - y^2 = 0\}$ e $W = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^3 - y^2 - x^2 t^2 = 0\}$. Observemos que o conjunto crítico em ambas variedades é o eixo- t . Sabemos que $\mathcal{P}_V = \{\text{Reg}(V), \text{Sing}(V)\}$ e $\mathcal{P}_W = \{\text{Reg}(W), \text{Sing}(W)\}$, onde $\text{Reg}(\cdot)$ representa o conjunto regular e $\text{Sing}(\cdot)$ o conjunto singular, é uma estratificação de V e W , respectivamente. É possível concluir que \mathcal{P}_V é uma estratificação de Whitney para V , enquanto não acontece o mesmo para \mathcal{P}_W .

Figura 1.7: Conjunto $\text{Sing}(V)$ Figura 1.8: Conjunto $\text{Sing}(W)$

Por fim, apresentaremos o conceito de equisingularidade de Whitney para uma família de funções definidas em \mathbb{C}^n . Sejam $(t, z) = (t, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $U \subset \mathbb{C}^n$ vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{C}^n$, $D \subset \mathbb{C}$ disco unitário centrado na origem de \mathbb{C} e considere

$$f: \begin{array}{ccc} (D \times U, D \times \{0\}) & \longrightarrow & (\mathbb{C}, 0) \\ (t, z) & \longmapsto & f(t, z) \end{array}$$

satisfazendo $f(D \times \{0\}) = 0$. Escreveremos $f_t(z) = f(t, z)$ e denotaremos por $V(f_t) = f_t^{-1}(0) = \{z \in U : f_t(z) = 0\}$ a hipersuperfície em $U \subset \mathbb{C}^n$ definida por f_t . Diremos que a família de hipersuperfícies singulares $\{V(f_t)\}$ é Whitney equisingular quando existir uma estratificação de Whitney da hipersuperfície $V(f) = f^{-1}(0)$ em uma vizinhança aberta $\mathcal{U} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ da origem $(0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ de maneira que o eixo- t $\mathcal{U} \cap (D \times \{0\})$ seja um estrato.

No Exemplo 1.58, V é Whitney equisingular, enquanto que W não o é. Observe que no caso Whitney equisingular, os elementos $\{V(f_t)\}$ da família são todos topologicamente equivalentes, equivalência topológica das singularidades ao longo do estrato formado pelo eixo- t (ver Figura 1.7).

1.5 Obstrução de Euler local

Amplamente estudada na teoria das singularidades, a obstrução de Euler local (ou simplesmente obstrução de Euler) é um importante invariante definido por MacPherson em [35] e utilizado como uma das principais ferramentas para a prova da conjectura de Deligne e Grothendiek, que trata da existência e unicidade de classes características no caso singular. Nesta seção, estudaremos algumas fórmulas para esse invariante as quais serão utilizadas posteriormente no Capítulo 3. Para uma maior compreensão do assunto aqui abordado recomendamos a leitura de [3].

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de um espaço analítico complexo equidimensional de dimensão d em um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$. Consideremos uma estratificação analítica complexa de Whitney $\mathcal{V} = \{V_i\}$ de U adaptada a X , isto é, X é a união de estratos e assumamos que $\{0\}$ é um estrato. Consideremos um representante de $(X, 0)$ de modo que a origem pertença ao fecho de todos os estratos V_i . Denotaremos esse representante por X e escreveremos $X = \bigcup_{i=0}^q V_i$, onde $V_0 = 0$ e $V_q = X_{\text{reg}}$ é conjunto formado pelos pontos regulares de X . No que segue, assumiremos que os estratos V_0, \dots, V_{q-1} são conexos e os conjuntos analíticos $\overline{V_0}, \dots, \overline{V_{q-1}}$ são reduzidos.

Antes de definirmos a obstrução de Euler precisamos definir a modificação e o fibrado de Nash,

para tanto fixaremos algumas notações. Denotaremos por $G(d, n)$ a Grasmanniana de planos d -dimensionais em \mathbb{C}^n . Sobre a parte regular de X , a aplicação de Gauss é definida por

$$\begin{aligned} \Phi : X_{\text{reg}} &\longrightarrow U \times G(d, n) \\ x &\longmapsto \Phi(x) = (x, T_x X_{\text{reg}}), \end{aligned}$$

onde $T_x X_{\text{reg}}$ denota ao espaço tangente a X no ponto x .

Definição 1.59. Considerando X como acima, a modificação (ou explosão) de Nash \tilde{X} de X é o fecho da imagem de Φ em $U \times G(d, n)$. Em particular, \tilde{X} é um espaço analítico complexo munido de uma projeção $v : \tilde{X} \rightarrow X$ que restrita a $v^{-1}(X_{\text{reg}})$ é uma aplicação holomorfa, bijetiva cuja a inversa também é holomorfa.

Seja \mathcal{T} o fibrado tautológico sobre $G(d, n)$, ou seja, o conjunto formado pelos vetores $v \in P$, com P um plano d -dimensional em \mathbb{C}^n . Também denotaremos por \mathcal{T} a extensão trivial de \mathcal{T} sobre $G(d, n)$, isto é, os elementos de \mathcal{T} são da forma (x, P, v) tal que $(x, P) \in U \times G(d, n)$ e $v \in P$.

Definição 1.60. Seja $\tilde{\mathcal{T}}$ a restrição de \mathcal{T} a \tilde{X} , com projeção $\pi : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{X}$. O fibrado $\tilde{\mathcal{T}}$ sobre \tilde{X} é chamado de fibrado de Nash de X . Dessa forma, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{T}} & \hookrightarrow & \mathcal{T} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X} & \hookrightarrow & U \times G(d, n) \\ v \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & U \end{array}$$

Adicionando o estrato $U \setminus X$ a $\mathcal{V} = \{V_i\}$ obtemos uma estratificação de Whitney de U . Denotaremos por $TU|_X$ a restrição a X do fibrado tangente de U . Um campo de vetores estratificado v em X é uma seção contínua de $TU|_X$ tal que se $x \in V_i \cap X$ para algum i , então $v(x) \in T_x V_i$. Das condições de Whitney e dos resultados de Brasselet e Schwartz em [7], temos o seguinte lema.

Lema 1.61 ([7], Lema 7.2). *Todo campo de vetores estratificado v sem singularidades sobre um subconjunto A de X possui um levantamento canônico à uma seção \tilde{v} , do fibrado de Nash $\tilde{\mathcal{T}}$, que não tem singularidades em $v^{-1}(A)$ em \tilde{X} .*

Seja v um campo de vetores radial em uma vizinhança da origem em X , ou seja, existe ε_0 tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $v(x)$ aponta para fora da bola B_ε centrada em 0 e raio ε sobre sua fronteira S_ε . Ainda em [7], os autores deram a seguinte interpretação para a obstrução de Euler local.

Definição 1.62. Seja v um campo de vetores radial em $X \cap S_\varepsilon$ e \tilde{v} seu levantamento em $v^{-1}(X \cap S_\varepsilon)$ a uma seção do fibrado de Nash. A obstrução de Euler local (ou apenas obstrução de Euler) é definida como sendo a obstrução para estender \tilde{v} como uma seção não nula do fibrado de Nash $\tilde{\mathcal{T}}$ sobre $v^{-1}(X \cap B_\varepsilon)$ e é denotada por $\text{Eu}_X(0)$.

De maneira mais precisa, se $\mathcal{O}(\tilde{\nu}) \in H^{2d}(v^{-1}(X \cap B_\varepsilon), v^{-1}(X \cap S_\varepsilon))$ é o cociclo de obstrução para estender $\tilde{\nu}$ como uma seção não nula do fibrado de Nash \tilde{T} para o interior de $v^{-1}(X \cap B_\varepsilon)$, então a obstrução de Euler $\text{Eu}_X(0)$ é o cociclo de avaliação $\mathcal{O}(\tilde{\nu})$ na classe fundamental do par $(v^{-1}(X \cap B_\varepsilon), v^{-1}(X \cap S_\varepsilon))$, ou seja, $\text{Eu}_X(0)$ é um número inteiro.

Observação 1.63. A obstrução de Euler possui propriedades importantes, a seguir listaremos algumas delas:

- Em um ponto regular a obstrução de Euler é igual a 1.
- A obstrução de Euler é constante ao longo de cada estrato da uma estratificação de Whitney.
- $\text{Eu}_{X \times Y}(x, y) = \text{Eu}_X(x) \cdot \text{Eu}_Y(y)$, para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$.

Não é fácil calcular a obstrução de Euler via sua definição, isso serviu de motivação para que muito autores buscassem fórmulas que facilitassem o seu cálculo. Nesse sentido, em [8] Brasselet, Lê e Seade apresentam uma fórmula de tipo Lefschetz (mais topológica) para esse invariante.

Teorema 1.64 ([8], Teorema 3.1). *Sejam $(X, 0)$ germe de variedade analítica complexa, $U \subset \mathbb{C}^n$ vizinhança da origem e $\mathcal{V} = \{V_i\}$ estratificação de Whitney de X . Então, para cada forma linear genérica $l : U \rightarrow \mathbb{C}$, existe ε_0 tal que para qualquer ε com $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno, a obstrução de Euler de $(X, 0)$ é dada por:*

$$\text{Eu}_X(0) = \sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap B_\varepsilon \cap l^{-1}(\delta)) \cdot \text{Eu}_X(V_i),$$

onde χ é a característica de Euler-Poincaré, $\text{Eu}_X(V_i)$ é o valor da obstrução de Euler de X em qualquer ponto de V_i , $i = 1, \dots, q$, e $0 < |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$.

Essa fórmula mostra que, como uma função construtível, a obstrução de Euler satisfaz a condição de Euler em relação as formas lineares genéricas.

Um outro conceito que será utilizado no Capítulo 3 é o de obstrução de Euler local de uma função, introduzido por Brasselet, Massey, Parameswaran e Seade em [6]. Para definir tal invariante, precisaremos da noção de ponto crítico de uma função relativo a uma estratificação.

Definição 1.65. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, que é uma restrição de uma função holomorfa $F : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ é uma vizinhança aberta da origem contendo X . O conjunto crítico de f relativo à estratificação $\mathcal{V} = \{V_i\}$ é o conjunto

$$\Sigma_{\mathcal{V}} f = \bigcup_{V_i \in \mathcal{V}} \Sigma(f|_{V_i}),$$

onde $\Sigma(f|_{V_i})$ é o conjunto crítico de f restrito ao estrato V_i .

Usando a notação da definição acima, vamos assumir que f tenha uma singularidade isolada relativa a estratificação $\mathcal{V} = \{V_i\}$ em 0. Para definir a obstrução de Euler local de f , os autores constroem um campo de vetores estratificado sobre X , que denotaremos por $\bar{\nabla}_X f$. Este campo de vetores é homotópico a $\bar{\nabla}F|_X$ e satisfaz $\bar{\nabla}_X f \neq 0 \forall x \neq 0$.

Sejam $\tilde{\zeta}$ o levantamento de $\bar{\nabla}_X f$ como uma seção do fibrado de Nash \tilde{T} sobre \tilde{X} sem singularidades sobre $\nu^{-1}(X \cap \mathcal{S}_\varepsilon)$ e $\mathcal{O}(\tilde{\zeta}) \in H^{2d}(\nu^{-1}(X \cap B_\varepsilon), \nu^{-1}(X \cap \mathcal{S}_\varepsilon), \mathbb{Z})$ o cociclo de obstrução para a extensão de $\tilde{\zeta}$ como uma seção não nula de \tilde{T} dentro de $\nu^{-1}(X \cap B_\varepsilon)$.

Definição 1.66. A obstrução de Euler local (ou simplesmente obstrução de Euler) de f é definida como sendo a avaliação de $\mathcal{O}(\tilde{\zeta})$ sobre a classe fundamental do par $(\nu^{-1}(X \cap B_\varepsilon), \nu^{-1}(X \cap \mathcal{S}_\varepsilon))$ e é denotada por $\text{Eu}_{f,X}(0)$.

O seguinte resultado compara a obstrução de Euler de X com a obstrução de Euler de uma função definida sobre X , mede o quão longe a igualdade dada pelo Teorema 1.64 está de ser verdadeira para o caso em que a forma linear genérica $l : U \rightarrow \mathbb{C}$ é substituída por uma função sobre X com no máximo um ponto crítico estratificado isolado em 0.

Teorema 1.67 ([6], Teorema 3.1). *Sejam $(X, 0)$ e \mathcal{V} como antes. Seja $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função com ponto crítico isolado na origem relativo a estratificação \mathcal{V} . Para $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ temos*

$$\text{Eu}_{f,X}(0) = \text{Eu}_X(0) - \left(\sum_{i=1}^q \chi(V_i \cap B_\varepsilon \cap f^{-1}(\delta)) \cdot \text{Eu}_X(V_i) \right).$$

Para um abordagem mais geral sobre a obstrução de Euler de uma função indicamos [5].

Equisingularidade de Whitney de hipersuperfícies sobre variedades tóricas

Seja $F(t, z) = F(t, z_1, \dots, z_r)$ uma função polinomial não constante sobre $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ satisfazendo $F(t, 0) = 0$ para qualquer $t \neq 0$ suficientemente pequeno. Denotando por $F_t(z) = F(t, z)$ e considerando a família $\{F_t\}$, podemos associá-la a uma família de hipersuperfícies $\{V(F_t)\} = \{F_t^{-1}(0)\}$ em \mathbb{C}^r .

O estudo local da estrutura do conjunto singular das hipersuperfícies $\{V(F_t)\}$ tem sido explorado nos mais variados aspectos. Em particular o conceito de Whitney equisingularidade desempenha um papel crucial na geometria algébrica e na teoria das singularidades, garantindo que certas propriedades geométricas e topológicas permaneçam consistentes em toda a família. A busca por invariantes e condições para descrever a Whitney equisingularidade em uma família de variedades é uma questão central na teoria das singularidades e tem sido intensamente estudada por muitos autores, como por exemplo [14, 18, 19, 43, 51].

Um conceito intimamente ligado com a Whitney equisingularidade é o de poliedros de Newton. Em notas não publicadas [9], J. Briançon provou o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Suponha que para todo t suficientemente pequeno, as seguintes condições sejam satisfeitas:*

1. F_t tenha singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^r$;
2. o poliedro de Newton de F_t em 0 não dependa de t ;
3. F_t seja não-degenradada (no sentido de [33] e [45]).

Então a família de hipersuperfícies $\{V(F_t)\}$ é Whitney equisingular.

Em [16], Eyral e Oka apresentaram uma generalização do resultado de Briançon. Em seu trabalho eles apresentaram uma condição de fácil verificação sobre os membros F_t da família $\{F_t\}$ que garante

a equisingularidade de Whitney para as hipersuperfícies $\{V(F_t)\}$. Mais precisamente eles definiram a noção de admissibilidade e provaram que se F_t for admissível, para todo t suficientemente pequeno, então a família $\{V(F_t)\}$ é Whitney equisingular. Além disso, este resultado independe de F_t ter singularidades isoladas ou não.

Nesse capítulo, apresentaremos uma condição de admissibilidade para membros de uma família de funções polinomiais F_t sobre uma variedade tórica normal afim $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ e provamos que tal condição garante a equisingularidade de Whitney da respectiva família de hipersuperfícies $\{V(F_t)\}$ sobre X_σ , sem depender do fato de que os membros F_t ou a variedade X_σ tenham singularidade isolada.

Na primeira seção deste capítulo abordamos os conceitos de poliedro de Newton e a não-degeneracidade de funções polinomiais no contexto das variedades tóricas, bem como alguns resultados que relacionam não-degeneracidade e a estrutura local do conjunto singular de uma função polinomial. Já na segunda seção apresentamos a definição de controle local e admissibilidade para uma família de funções polinomiais sobre uma variedade tórica. Por fim, na última seção apresentamos o principal resultado desse capítulo que relaciona admissibilidade e a equisingularidade de Whitney.

2.1 Não-degeneracidade e controle local em variedades tóricas

Primeiramente fixemos algumas notações que utilizaremos em todo esse capítulo. Sejam $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ um cone fortemente convexo n -dimensional, $\check{\sigma} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ seu cone dual, $\mathcal{S} = \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^n$ semigrupo finitamente gerado por $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$ e $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ a variedade tórica n -dimensional gerada por \mathcal{S} , conforme discutida na Subseção 1.3.1 do Capítulo 1. No decorrer do texto vamos supor, sem perda de generalidade, que $\check{\sigma} \subset \mathbb{R}_+^n$ e conseqüentemente, $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_+^n$. Tendo em vista as hipóteses sobre $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ existe uma única órbita 0-dimensional da ação do toro, que é o conjunto $\{0\} \subset \mathbb{C}^r$.

Recordemos que com a ação do toro algébrico $(\mathbb{C}^*)^n$ sobre a variedade tórica X_σ , podemos caracterizar suas órbitas (veja 1.2), usando a combinatória proveniente do semigrupo. Seja τ a face de $\check{\sigma}$ gerada por m_{i_1}, \dots, m_{i_k} e denotemos por $I_\tau = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, r\}$ o conjunto de índices dos geradores de τ . Definimos o conjunto

$$X_\sigma^{I_\tau} := \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r : x_i = 0 \text{ se } i \notin I_\tau\} = \overline{\mathcal{O}_{x_\tau}}$$

onde $x_\tau = (x_1, \dots, x_r) \in X_\sigma$ é um ponto distinguido da face τ , (veja Definição 1.37), e $\overline{\mathcal{O}_{x_\tau}}$ denota a órbita do ponto distinguido x_τ . Além disso, por se tratar do fecho de uma órbita, $X_\sigma^{I_\tau}$ é também uma variedade tórica. De maneira semelhante, definimos o conjunto

$$X_\sigma^{*I_\tau} := \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r : x_i = 0 \text{ se, e somente se, } i \notin I_\tau\} = \mathcal{O}_x.$$

Observemos que se $u = (u_1, \dots, u_r) \in X_\sigma^{*I_\tau}$, então $u_{i_1}, \dots, u_{i_m} \in \mathbb{C}^*$ e todas as outras coordenadas são iguais a 0. Ademais, $X_\sigma^\emptyset = X_\sigma^{*\emptyset} = \{0\}$ correspondem a órbita 0-dimensional e $X_\sigma^{\{1, \dots, r\}}$ corresponde a órbita densa e homeomorfa a $(\mathbb{C}^*)^n$.

Observemos também que X_σ^{*I} está contida na parte suave de X_σ , pois X_σ^{*I} representa uma órbita da ação tórica.

Observação 2.2. Notemos que I_τ não é qualquer subconjunto de $\{1, \dots, r\}$, ele depende das faces de $\check{\sigma}$. Em outras palavras, os vetores correspondentes b_i 's de \mathcal{A} com $i \in I_\tau$ devem gerar uma face para $\check{\sigma}$. Por exemplo, consideremos o cone $\sigma = \langle 2e_1 - 4e_2 + 2e_3, 3e_1 + 2e_2 - e_3, -3e_1 + 6e_2 + e_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Seu cone dual é $\check{\sigma} = \langle e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2, e_1 + 3e_3 \rangle$ e a correspondente variedade tórica $X_\sigma \subset \mathbb{C}^4$ é gerada pelo semigrupo \mathcal{S} gerado pelo conjunto $\mathcal{A} = \{e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2, e_1 + 3e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ (Figura 1.3). Dessa forma, as possibilidades para o subconjunto I são $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$. Enquanto os subconjuntos $\{1, 4\}$ e $\{4\}$ não podem ser considerados, pois os cones gerados por $\langle e_2 + 2e_3 \rangle$ e $\langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ não formam faces para o cone gerado por \mathcal{A} .

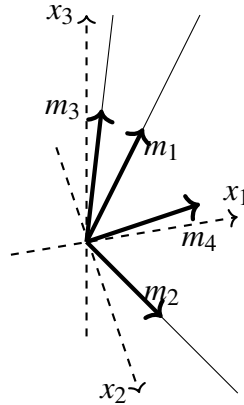


Figura 2.1: Cone dual $\check{\sigma} \subset \mathbb{R}^3$

No que segue, sempre consideraremos o subconjunto $I \subset \{1, \dots, r\}$ de modo que faça sentido o conjunto X_σ^I (bem como o conjunto X_σ^{*I}).

Seja $G: \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial da forma $G(z) = \sum_{\Lambda \in \mathbb{N}^r} A_\Lambda z^\Lambda$. A restrição $G|_{X_\sigma}: X_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ consiste em associar cada variável z_i de $z = (z_1, \dots, z_r)$ a um correspondente elemento m_i de \mathcal{A} . Assim,

$$g(z) = G|_{X_\sigma}(z) = \sum_{\Lambda} a_\Lambda z^\Lambda.$$

Devido as relações aditivas entre os elementos de \mathcal{A} , não necessariamente os coeficientes a_Λ e A_Λ serão iguais. Por isso, a fim de simplificar a notação, no decorrer do texto sempre que fizermos menção a uma função polinomial definida sobre uma variedade tórica X_σ escreveremos da forma $g(z) = \sum_{\Lambda \in \mathbb{N}^r} a_\Lambda z^\Lambda$, subentendendo que todas as possíveis relações da restrição mencionada acima foram realizadas.

Sejam uma variedade tórica X_σ , e consideremos o mergulho canônico

$$h: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow X_\sigma$$

$$\xi \mapsto (\xi^{m_1}, \dots, \xi^{m_r}),$$

como em (1.1). Seja $g(z) = \sum_{\Lambda \in \mathbb{N}^r} a_\Lambda z^\Lambda$ uma função polinomial sobre X_σ . Via mergulho canônico, podemos associar g a um polinômio $L_g : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$L_g(\xi) := (g \circ h)(\xi) = \sum_{\lambda \in \mathcal{S}} a_\lambda \xi^\lambda$$

em que $\lambda = \sum_{i=1}^r \Lambda_i m_i$ e chamamos $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_r) \in \mathbb{N}^r \setminus \{0\}$ de *representação* de λ em \mathbb{N}^r . Além disso, definimos o *suporte* do polinômio L_g como sendo o conjunto

$$\text{Sup}(L_g) := \{\lambda \in \mathbb{N}^n : a_\lambda \neq 0\}.$$

Definição 2.3. Seja $g(z)$ uma função polinomial sobre uma variedade tórica X_σ . O fecho convexo de

$$\bigcup_{\lambda \in \text{Sup}(L_g)} (\lambda + \check{\sigma})$$

em que $\check{\sigma}$ é o poliedro de Newton de g com respeito a variável z e será denotado por $\Gamma_+(g; z)$.

Dado $w \in \sigma$, o produto interno $\langle w, x \rangle$ com $x \in \Gamma_+(g; z)$ atinge um mínimo, visto que $\Gamma_+(g; z) \subset \check{\sigma}$. Definimos a *face* Δ_w de $\Gamma_+(g; z)$ como sendo o conjunto onde esse mínimo é atingido em $\Gamma_+(g; z)$, isto é, denotando $d_w = \min\{\langle w, x \rangle : x \in \Gamma_+(g; z)\}$ temos

$$\Delta_w = \{x \in \Gamma_+(g; z) : \langle w, x \rangle = d_w\}.$$

Nesse contexto, o vetor $w \in \sigma$ é chamado de *vetor peso*.

Observação 2.4. Notemos que pela construção dos cones σ e $\check{\sigma}$ é possível que o vetor peso $w \in \check{\sigma}$. Em particular, se $w = \sum_{i=1}^r \lambda_i m_i$, com $\lambda_i > 0$ para $1 \leq i \leq r$, então Δ_w é uma face compacta de $\Gamma_+(g; z)$.

Definição 2.5. Seja $g(z)$ uma função polinomial sobre uma variedade tórica X_σ . Definimos a fronteira compacta de Newton de $\Gamma_+(g; z)$ como sendo a união de todas as faces compactas de $\Gamma_+(g; z)$ e a denotamos por $\Gamma(g; z)$.

Exemplo 2.6. Seja $X_\sigma \subset \mathbb{C}^6$ associada ao cone $\sigma = \langle e_2, e_3, 2e_1 - e_2 - e_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$. Então $\check{\sigma} = \langle e_1, e_1 + 2e_2, e_1 + 2e_3 \rangle$, \mathcal{S}_σ é o semigrupo gerado por $\mathcal{A} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + 2e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + 2e_3\}$ e o mergulho canônico é dado por

$$h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_1 \xi_2, \xi_1 \xi_3, \xi_1 \xi_2^2, \xi_1 \xi_2 \xi_3, \xi_1 \xi_3^2).$$

Considere a função polinomial $g(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = z_1^2 - z_4 + z_6$ sobre X_σ . Logo $L_g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 - \xi_1 \xi_2^2 + \xi_1 \xi_3^2$ e

$$\text{Sup}(L_g) = \{(2, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 0, 2)\}.$$

Denotemos $A = (2, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$ e $C = (1, 0, 2)$. Observe que o vetor peso $w_1 = (2, 1, 1) \in \sigma$ gera a face compacta 2-dimensional formada pelo polígono $\Delta_1 = \overline{ABC}$. De fato, escrevendo esse polígono como região de \mathbb{R}^3 , teremos

$$\Delta_1 = \{(t, s, -2t - s + 4) : \text{onde } 1 \leq t \leq 2 \text{ e } -2t + 4 \leq s \leq 0\}. \quad (2.1)$$

Assim

$$\langle (2, 1, 1), (t, s, -2t - s + 4) \rangle = 4.$$

Além disso, considerando a região

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \overline{AB} + \mathbb{R}_+ e_1 + \mathbb{R}_+(e_1 + 2e_2) \\ &= \{(2 - s + t_1 + t_2, 2s + 2t_2, 0) : s \in [0, 1] \text{ e } t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

teremos que

$$\langle (2, 1, 1), (2 - s + t_1 + t_2, 2s + 2t_2, 0) \rangle = 4 + 2t_1 + 4t_2$$

tem valor mínimo igual a 4 para $t_1 = t_2 = 0$, que corresponde ao segmento \overline{AB} .

Com cálculos similares, podemos concluir que para as regiões $\Delta_3 = \overline{BC} + \mathbb{R}_+(e_1 + 2e_2) + \mathbb{R}_+(e_1 + 2e_3)$ e $\Delta_4 = \overline{AC} + \mathbb{R}_+ e_1 + \mathbb{R}_+(e_1 + 2e_3)$ teremos o produto interno com $w_1 = (2, 1, 1)$ terá valor de mínimo igual a 4 e o respectivo local de mínimo será o segmento \overline{BC} e \overline{AC} .

O vetor peso $w_5 = (2, 1, 2) \in \sigma$ gera a face compacta 1-dimensional formada pelo segmento

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \overline{AB} \\ &= \{(2 - s, 2s, 0) : s \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

De fato,

$$\langle (2, 1, 2), (2 - s, 2s, 0) \rangle = 4.$$

Observemos que sobre Δ_1 , por (2.1)

$$\langle (2, 1, 2), (t, s, -2t - s + 4) \rangle = -2t - s + 8$$

tem valor mínimo igual a 4 em $s = -2t + 4$ e $1 \leq t \leq 2$, que corresponde ao segmento \overline{AB} . Considerando a região Δ_2 , por (2.2)

$$\langle (2, 1, 2), (2 - s + t_1 + t_2, 2s + 2t_2, 0) \rangle = 4 + 2t_1 + 4t_2$$

que terá valor mínimo igual a 4 para $t_1 = t_2 = 0$, correspondendo ao segmento \overline{AB} . Considerando a região

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \overline{AC} + \mathbb{R}_+ e_1 + \mathbb{R}_+(e_1 + 2e_3) \\ &= \{(2 - s + t_1 + t_2, 0, 2s + 2t_2) : s \in [0, 1] \text{ e } t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dessa forma,

$$\langle (2, 1, 2), (2 - s + t_1 + t_2, 0, 2s + 2t_2) \rangle = 4 + 2s + 2t_1 + 6t_2$$

que tem valor mínimo igual a 4 para $s = t_1 = t_2 = 0$, correspondendo ao ponto A . Com cálculos similares podemos concluir que sobre a região Δ_3 o local de mínimo é o ponto B .

De forma análoga também podemos concluir que os vetores peso $w_6 = (2, 2, 1)$ e $w_7 = (1, 0, 0)$ geram as respectivas faces compactas 1-dimensionais $\Delta_6 = \overline{AC}$ e $\Delta_7 = \overline{BC}$.

O vetor peso $w_2 = (0, 0, 1) \in \sigma$ gera a face não-compacta 2-dimensional formada pela região $\Delta_2 = \overline{AB} + \mathbb{R}_+ e_1 + \mathbb{R}_+(e_1 + 2e_2)$. De fato, por (2.2), teremos

$$\langle (0, 0, 1), (2 - s + t_1 + t_2, 2s + 2t_2, 0) \rangle = 0.$$

Sobre Δ_1 , por (2.1)

$$\langle (0, 0, 1), (t, s, -2t - s + 4) \rangle = -2t - s + 4,$$

tem valor mínimo igual a 0 em $1 \leq t \leq 2$ e $s = -2t + 4$, correspondendo ao segmento \overline{AB} . Agora sobre Δ_4 , por (2.3)

$$\langle (0, 0, 1), (2 - s + t_1 + t_2, 0, 2s + 2t_2) \rangle = 2s + 2t_2$$

tem valor mínimo igual a 0, para $s = t_2 = 0$, correspondendo a semirreta $\Delta_8 = A + \mathbb{R}_+ e_1$. Com cálculos similares podemos concluir que sobre Δ_3 esse produto interno por w_2 tem valor mínimo igual a 0 sobre a semirreta $\Delta_9 = B + \mathbb{R}_+(e_1 + 2e_2)$. Por fim, sobre a semirreta

$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= C + \mathbb{R}_+(e_1 + 2e_3) \\ &= \{(1 + t_1, 0, 2 + 2t_1) : t_1 \in \mathbb{R}_+\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\langle (0, 0, 1), (1 + t_1, 0, 2 + 2t_1) \rangle = 2 + 2t_1,$$

que é maior que 0 para todo $t_1 \in \mathbb{R}_+$.

Usando cálculos similares podemos concluir que os vetores peso $w_3 = (2, -1, -1)$ e $w_4 = (0, 1, 0)$ geram as respectivas faces não-compactas 2-dimensionais Δ_3 e Δ_4 .

Observe que $w_8 = (0, 1, 1) \in \sigma$ gera a face não-compacta 1-dimensional

$$\begin{aligned} \Delta_8 &= A + \mathbb{R}_+ e_1 \\ &= \{(2 + t_1, 0, 0) : t_1 \in \mathbb{R}_+\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

De fato, note que

$$\langle (0, 1, 1), (2 + t_1, 0, 0) \rangle = 0.$$

Considerando a face Δ_1 , por (2.1)

$$\langle (0, 1, 1), (t, s, -2t - s + 4) \rangle = -2t + 4,$$

que tem valor mínimo igual a 0, para $t = 2$ e $s = 0$, correspondendo ao ponto A . Podemos concluir que o local de mínimo para produto interno com w_8 sobre as faces Δ_2 , Δ_4 e Δ_5 será o ponto A e para as demais faces será sempre maior do que 0.

Usando cálculo similares podemos concluir que os vetores peso $w_9 = (1, 2, 1)$ e $w_{10} = (1, 1, 2)$ geram as respectivas faces não-compactas 1-dimensionais Δ_9 e Δ_{10} .

Exemplo 2.7. Seja $X_\sigma \subset \mathbb{C}^3$ a variedade tórica definida por $\sigma = \langle e_2, 2e_1 - e_2 \rangle \subset \mathbb{R}^2$, então $\check{\sigma} = \langle e_1, e_1 + 2e_2 \rangle$, \mathcal{S}_σ é o semigrupo gerado por $\mathcal{A} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$ e o mergulho canônico $h : (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow X_\sigma$ é da forma $h(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_1 \xi_2, \xi_1 \xi_2^2)$. Consideremos a função polinomial

$$g(z_1, z_2, z_3) = z_1^4 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 - z_1 z_2 z_3^2,$$

então $L_g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^4 + \xi_1^3 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_2^2 - \xi_1^4 \xi_2^5$. As faces compactas de $\Gamma_+(g; z)$ são os segmentos de retas \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} onde $A = (4, 0)$, $B = (3, 1)$, $C = (3, 2)$ e $D = (4, 5)$ além dos próprios pontos (Figura 2.3). Por outro lado, considerando L_g como função polinomial sobre \mathbb{C}^2 , $\Gamma_+(L_g; \xi)$ tem uma face compacta, o segmento \overline{AB} , além dos pontos A e B .

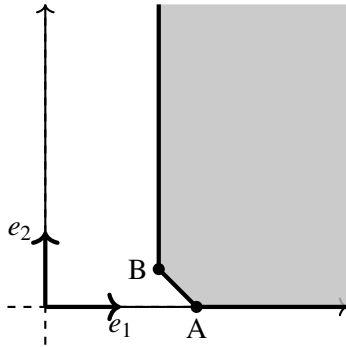


Figura 2.2: Poliedro de Newton em \mathbb{C}^2

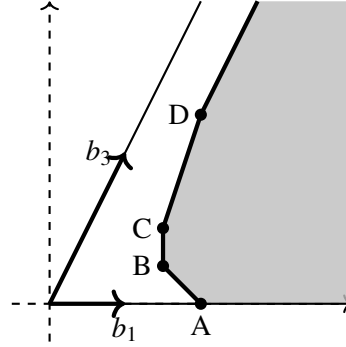


Figura 2.3: Poliedro de Newton em X_σ

Observemos que de maneira geral, faces compactas da função polinomial L_g sobre \mathbb{C}^n também são faces compactas da função polinomial g sobre X_σ . Entretanto a recíproca não é válida.

Definição 2.8. Sejam $g(z) = \sum_{\Lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} a_\Lambda z^\Lambda$ uma função polinomial sobre X_σ , Δ uma face de $\Gamma_+(g; z)$ e $\lambda \in \Delta \cap \mathcal{S}_\sigma$. Definimos a função face g_Δ como sendo

$$g_\Delta(z) = \sum_{\lambda \in \Delta \cap \mathcal{S}_\sigma} a_\lambda z^\lambda$$

onde $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_r)$ é a representação de λ em \mathbb{N}^r , ou seja, $\lambda = \sum_{i=1}^r \Lambda_i m_i$. Além disso, também podemos considerar a função face $(L_g)_\Delta$ do polinômio L_g associado a g , definida por

$$(L_g)_\Delta(\xi) = \sum_{\lambda \in \Delta \cap \mathcal{S}} a_\lambda z^\lambda.$$

Definição 2.9. Dizemos que uma função polinomial $g(z)$ sobre uma variedade tórica X_σ é não-degenerada se, para qualquer face compacta $\Delta \subset \Gamma(g; z)$, a hipersuperfície $(L_g)_\Delta^{-1}(0) = \{\xi \in (\mathbb{C}^*)^n : (L_g)_\Delta(\xi) = 0\}$ não tem pontos singulares em $(\mathbb{C}^*)^n$. Em outras palavras, a Jacobiana $J((L_g)_\Delta)(\xi) \neq 0$ para qualquer $\xi \in (\mathbb{C}^*)^n$.

Exemplo 2.10. Seja $X_\sigma \subset \mathbb{C}^3$ a variedade tórica definida no Exemplo 2.7. Consideremos a função polinomial $g(z_1, z_2, z_3) = z_1^4 + z_2^4 z_3 - z_2^2 z_3^2$ sobre X_σ , então

$$L_g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^4 + \xi_1^5 \xi_2^6 - \xi_1^4 \xi_2^6.$$

O poliedro de Newton $\Gamma_+(g; z)$ tem exatamente três faces compactas: os pontos $A = (4, 0)$ e $B = (4, 6)$ e o segmento de reta $\Delta = \overline{AB}$, ligando A a B (Figura 2.4). O polinômio $(L_g)_\Delta$ associado da função face g_Δ é $(L_g)_\Delta(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^4 - \xi_1^4 \xi_2^6$, que não tem pontos críticos em $(\mathbb{C}^*)^2$. O mesmo acontece com $(L_g)_A$ e $(L_g)_B$. Portanto, g é não-degenerada sobre X_σ . Claro que a variedade tórica sobre

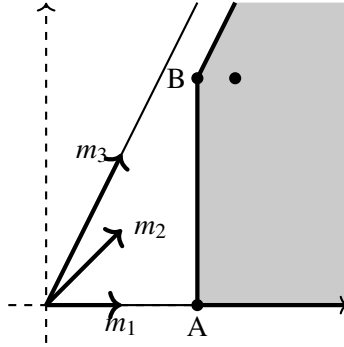


Figura 2.4: Poliedro de Newton de g

a qual o polinômio está definido atua diretamente na não-degeneracidade. Consideremos o cone $\sigma = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, então $\check{\sigma} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, \mathcal{S}_σ é o semigrupo gerado por $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X_\sigma = \mathbb{C}^3$ e o mergulho canônico é da forma $h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Considerando a mesma função polinomial $g(z_1, z_2, z_3) = z_1^4 + z_2^4 z_3 - z_2^2 z_3^2$, temos que $L_g(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = g(z_1, z_2, z_3)$ e g é degenerada. De fato, a face compacta $\Delta' = \overline{CD}$ formada pelo segmento de reta que liga os pontos $C = (0, 1, 4)$ e $D = (0, 2, 2)$ é tal que a função face $(L_g)_{\Delta'} = \xi_2 \xi_3^4 - \xi_2^2 \xi_3^2$ tem pontos críticos ao longo da reta $(\xi_1, 8, 4)$ em $(\mathbb{C}^*)^3$.

Observação 2.11. Seja $g(z)$ um polinômio não-degenerado sobre uma variedade tórica X_σ . Observe-mos que se $\Delta \subset \Gamma(g; z)$ é uma face compacta, então pela regra da cadeia g_Δ não tem pontos críticos sobre a órbita densa $X_\sigma^* \{1, \dots, r\}$.

Uma das diferenças imediatas entre o poliedro de Newton de uma função polinomial definida sobre o espaço \mathbb{C}^r e de outra sobre uma variedade tórica é o ambiente em que eles são construídos. No caso de funções polinomiais sobre \mathbb{C}^r seu poliedro de Newton é definido em \mathbb{R}_+^r , enquanto que no caso em que estamos sobre uma variedade tórica n -dimensional $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ seu respectivo poliedro de Newton está sobre \mathbb{R}_+^n . O lema a seguir mostra que mesmo em ambientes diferentes um produto interno específico é preservado.

Lema 2.12. *Sejam $g(z)$ uma função polinomial definida sobre uma variedade tórica n -dimensional $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$, onde \mathcal{S}_σ é o semigrupo gerado por $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \sigma$ é o vetor peso e $\Delta_w \subset \Gamma(g; z)$ a face compacta associada a w . Se $\lambda \in \Delta_w \cap \mathcal{S}_\sigma$, então $\langle w, \lambda \rangle = \langle W, \Lambda \rangle$, onde Λ é a representação de λ em \mathbb{R}^r e $W = (\langle w, m_1 \rangle, \dots, \langle w, m_r \rangle) \in \mathbb{R}^r$.*

Demonstração. Como Λ é a representação de λ em \mathbb{R}^r , existem $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r \in \mathbb{N}$ tais que

$$\lambda = \sum_{i=1}^r \Lambda_i m_i,$$

e $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_r)$. Agora tomemos $W = (\langle w, m_1 \rangle, \dots, \langle w, m_r \rangle)$, então

$$\begin{aligned} \langle w, \lambda \rangle &= \langle w, \sum_{i=1}^r \Lambda_i m_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \Lambda_i \langle w, m_i \rangle \\ &= \langle W, \Lambda \rangle. \end{aligned}$$

□

Definição 2.13. *Seja $g(z)$ uma função polinomial sobre uma variedade tórica n -dimensional $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ onde \mathcal{S}_σ é o semigrupo gerado por $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$. Uma face Δ de $\Gamma_+(g; z)$ é dita não-compacta essencial se existir $w \in \sigma$ satisfazendo:*

- (i) $\Delta = \Delta_w$ e $g|_{X_\sigma^{I_w}} \equiv 0$, onde $I_w = \{i \in \{1, \dots, r\} : \langle w, m_i \rangle = 0\}$,
- (ii) para qualquer $i \in I_w$ e qualquer ponto $\alpha \in \Delta$, a semirreta $\alpha + \mathbb{R}_+ m_i \subset \Delta$.

Notemos que o conjunto I_w não depende de w , pois qualquer múltiplo do vetor w continuaria atendendo as condições da definição acima. Por isso, chamamos esse de *conjunto direção não-compacta* de Δ e o denotamos por I_Δ . Além disso, dado $I \subset \{1, \dots, r\}$ definimos $\mathcal{I}_w(g)$ (respectivamente $\mathcal{I}_v(g)$) como sendo o conjunto dos $I \subset \{1, \dots, r\}$ tais que $g|_{X_\sigma^I} \equiv 0$ (respectivamente $g|_{X_\sigma^I} \not\equiv 0$). Para qualquer $I \in \mathcal{I}_w(g)$ (respectivamente $I \in \mathcal{I}_v(g)$) chamamos a correspondente variedade X_σ^I de *variedade anuladora* (respectivamente *variedade não-anuladora*).

Exemplo 2.14. *Seja $X_\sigma \subset \mathbb{C}^4$ variedade tórica cujo semigrupo \mathcal{S}_σ é gerado pelo conjunto $\mathcal{A} = \{e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2, e_1 + 3e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$ como na Observação 2.2. Consideremos o polinômio*

$$g(z) = z_1^2 z_3^3 + z_2^2 z_3^3 + z_3^4 - 5z_3^3 z_4^3$$

sobre X_σ . A face $\Delta = \overline{AB} + \mathbb{R}_+ m_1 + \mathbb{R}_+ m_2 + \mathbb{R}_+ m_4$ (Figura 2.5) é não-compacta essencial, onde \overline{AB} é o segmento de reta que une $A = (3, 2, 13)$ e $B = (7, 2, 9)$. De fato, escolhendo $w = (1, -2, 1)$, que é ortogonal a m_1, m_2 e m_4 , obtemos $\Delta = \Delta_w$ e consequentemente $I_\Delta = \{1, 2, 4\}$, implicando que $g|_{\mathcal{S}_\sigma^{\{1,2,4\}}} \equiv 0$. Contudo, nem toda face não-compacta é essencial, por exemplo, a face $\Delta' = \overline{AC} + \mathbb{R}_+ m_3$ (bem como a face $\Delta'' = \overline{BC} + \mathbb{R}_+ m_3$), onde $C = (4, 0, 12)$ não é essencial, pois $X_\sigma^{\{3\}}$ não é uma variedade anuladora de g .

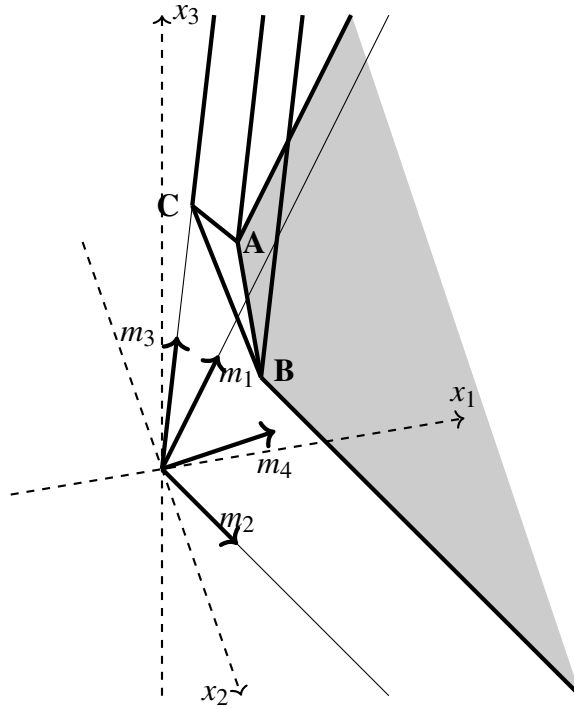


Figura 2.5: Face não-compacta essencial

Definição 2.15. Seja $g(z)$ um polinômio sobre uma variedade tórica X_σ . Definimos a *fronteira não-compacta essencial de Newton* de g como sendo a união da fronteira compacta de Newton $\Gamma(g; z)$ com as faces não-compactas essenciais de $\Gamma_+(g; z)$ e a denotamos por $\Gamma_{nc}(g; z)$.

Observação 2.16. Sejam $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ uma variedade tórica n -dimensional e $I \subset \{1, \dots, r\}$ de modo que faça sentido a variedade X_σ^I . Considere a aplicação

$$h^I : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n & \longrightarrow & X_\sigma^I \\ \xi & \longmapsto & h^I(\xi) \end{array},$$

onde definimos $h^I(\xi) = (h_1(\xi), \dots, h_r(\xi))$ por $h_i(\xi) = 0$ se $i \notin I$ e $h_i(\xi) = \xi^{m_i}$ se $i \in I$. Assim, dada uma função polinomial $g(z)$ sobre X_σ podemos também considerar a restrição da função polinomial $L_g(\xi)$ a X_σ^I . Neste caso, usaremos a seguinte notação

$$L_g^I(\xi) := (g|_{X_\sigma^I} \circ h^I)(\xi).$$

Ao contrário do mergulho canônico, a aplicação h^I não é uma bijeção sobre sua imagem, contudo a sobrejetividade sobre sua imagem é mantida, obviamente.

Proposição 2.17. Sejam $g(z)$ uma função polinomial não-degenerada definida sobre uma variedade tórica n -dimensional $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ e $I \subset \{1, \dots, r\}$ de modo que faça sentido o conjunto X_σ^I . Então para qualquer $I \in \mathcal{I}_{nv}(g)$, a restrição $g|_{X_\sigma^I}$ também é não-degenerada como função polinomial nas variáveis $z_I = \{z_i : i \in I\}$.

Demonstração. Sejam $\tau = \langle m_i \rangle_{i \in I}$ uma face do cone dual $\check{\sigma}$ gerada pelos m_i com $i \in I$, Δ uma face compacta de $\Gamma(g|_{X_\sigma^I}; z_I) \subset \Gamma(g; z)$ e $w \in \sigma$ um vetor peso de modo que

$$\Delta = \Delta_w = \{x \in \Gamma_+(g|_{X_\sigma^I}; z_I) : \langle w, x \rangle = d_w\} = \Delta, \text{ onde } d_w = \min_{x \in \Gamma_+(g|_{X_\sigma^I}; z_I)} \langle w, x \rangle.$$

Seja \mathcal{S}_σ o semigrupo finitamente gerado por $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_N\}$ associado ao cone σ , visto como cone dual de $\check{\sigma}$, então

$$w = \sum_{i=1}^N W_i v_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{N} \text{ for } 1 \leq i \leq N.$$

Considere $q = \sum_{i=1}^N Q_i v_i$, onde $Q_i = W_i$ para $i \in I$ e $Q_i = V \in \mathbb{Z}_+$ para $i \notin I$. Tomando V suficientemente grande de modo que $\Delta_q = \Delta$, temos que

$$g_{\Delta_q}(z) = (g|_{X_\sigma^I})_\Delta(z_I).$$

Visto que g é não-degenerado, $(L_g)_\Delta^{-1}(0)$ não tem pontos críticos em $(\mathbb{C}^*)^n$ e como g_{Δ_q} tem apenas as variáveis z_i com $i \in I$, temos que $(L_{g_{\Delta_q}})_\Delta^{-1}(0)$ também não terá pontos críticos em $(\mathbb{C}^*)^n$. \square

Sejam $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ uma variedade tórica n -dimensional e $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, r\}$, com $k \leq r$. Dado $u = (u_1, \dots, u_r) \in X_\sigma^{*I}$, as coordenadas de u são da forma $u_{i_1}, \dots, u_{i_k} \in \mathbb{C}^*$ e $u_{i_j} = 0$ para $i_j \notin I$. Assim, definimos o conjunto

$$\mathbb{C}_u^{*\{1, \dots, r\}} := \{(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbb{C}^*)^r : z_{i_j} = u_{i_j} \text{ para } 1 \leq j \leq k\}.$$

Definição 2.18. Sejam $g(z)$ uma função polinomial sobre uma variedade tórica n -dimensional $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$, com \mathcal{S}_σ o semigrupo finitamente gerado por $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_r\}$, $\Delta \subset \Gamma_{nc}(g; z)$ uma face não-compacta essencial de g e $w = (w_1, \dots, w_n) \in \sigma$ satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição 2.13. Assumimos que $I_\Delta = \{i_1, \dots, i_k\}$, ou seja, $\langle w, m_i \rangle = 0$ para todo $i = \{i_1, \dots, i_k\}$ e $I_\Delta \in \mathcal{I}_v(g)$. Dizemos que a função face

$$g_\Delta(z) = \sum_{\Lambda \in \Delta} a_\Lambda z^\Lambda$$

é localmente controlada se existir um número positivo $r(g_\Delta) > 0$ tal que para qualquer $u \in X_\sigma^{*I}$ com

$$|u_{i_1}| + \dots + |u_{i_k}| < r(g_\Delta)^2 \tag{2.6}$$

a função face g_Δ não tenha pontos críticos como função das $(r - k)$ -variáveis $z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_r}$, em que

$$\{i_{k+1}, \dots, i_r\} := \{1, \dots, r\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\},$$

e u_{i_1}, \dots, u_{i_k} são as coordenadas diferentes de 0 de $u \in X_\sigma^{*I}$. Dizemos que a função polinomial g é localmente controlada ao longo do conjunto anulador X_σ^I se, para qualquer face não-compacta essencial $\Delta \subset \Gamma_{nc}(g; z)$ com $I_\Delta = I$, a função face g_Δ é localmente controlada. Finalmente, dizemos que g é localmente controlada ao longo de conjuntos anuladores se ela for localmente controlada ao longo de X_σ^I para qualquer $I \in \mathcal{I}_v(g)$.

Observação 2.19. Usamos a seguinte notação: seja $\bar{r}(g_\Delta)$ o supremo dos números $r(g_\Delta)$ que satisfazem a desigualdade (2.6). Então para qualquer $I \in \mathcal{I}_v(g)$, denotamos por $r_I(g) := \inf_{\Delta=I} \bar{r}(g_\Delta)$ e por $r_{nc}(g) := \inf_{I \in \mathcal{I}_v} r_I(g)$.

Exemplo 2.20. Seja $g(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 z_3^2 - z_2^3 z_3^2 + z_3^3$ uma função polinomial definida sobre a variedade tórica $X_\sigma \subset \mathbb{C}^3$ dada no Exemplo 2.7. Neste caso, temos duas faces não-compactas essenciais: $\Delta_1 = A + \mathbb{R}_+ m_1$ e $\Delta_2 = B + \mathbb{R}_+ m_2$, onde $A = (4, 2)$ e $B = (6, 9)$. Notemos que $I_{\Delta_1} = \{1\}$, dessa forma dado $u = (u_1, 0, 0) \in X_\sigma^*\{1\}$, a função $g_{\Delta_1}(u_1, z_2, z_3) = u_1^2 z_3^2$, não tem pontos críticos em $\mathbb{C}_u^*\{1,2,3\}$. Com isso, g é localmente controlada ao longo da variedade anuladora $X_\sigma^*\{1\}$. Quanto à face não-compacta essencial Δ_2 , segue de maneira análoga que $I_{\Delta_2} = \{2\}$ e que g é localmente controlada ao longo da variedade anuladora $X_\sigma^*\{2\}$. Portanto, g é localmente controlada ao longo das variedades anuladoras. Contudo, considerando a função polinomial $g(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 z_3^2 - z_2^3 z_3^2 + z_3^3$ sobre a variedade tórica $X_\sigma = \mathbb{C}^3$, a mesma não é localmente controlada ao longo das variedades anuladoras. De fato, se considerarmos a face não-compacta essencial $\Delta = \overline{CD} + \mathbb{R}_+ e_1 + \mathbb{R}_+ e_2$, onde $C = (2, 0, 2)$ e $D = (0, 3, 2)$, a função $g(u_1, u_2, z_3) = u_1^2 z_3^3 - u_2^3 z_3^2$ tem pontos críticos sobre a curva $u_1^2 - u_2^3 = 0$ em $\mathbb{C}_{u_1, u_2}^*\{1,2,3\}$.

2.2 Admissibilidade de uma família de polinômios

Para as seções seguintes deste capítulo, utilizaremos a seguinte notação. Sejam $(t, z) := (t, z_1, \dots, z_r)$ coordenadas de $\mathbb{C} \times X_\sigma$, $U \subset X_\sigma$ vizinhança aberta contendo $0 \in X_\sigma$, $D \subset \mathbb{C}$ disco aberto centrado na origem de \mathbb{C} e

$$\begin{aligned} f : (D \times U, D \times \{0\}) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (t, z) &\longmapsto f(t, z) \end{aligned}$$

uma função polinomial. Segundo essa notação $f(D \times \{0\}) = 0$. Escrevendo $f_t(z) = f(t, z)$, denotaremos por $V(f_t) \subset U$ a família de hipersuperfícies definidas por $f_t^{-1}(0)$. Como citado na seção anterior, f é a restrição de um polinômio $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}$ à variedade tórica $\mathbb{C} \times X_\sigma$ e, também como na seção anterior, iremos admitir que todas as relações envolvendo as equações que definem X_σ já tenham sido devidamente ajustadas.

O resultado a seguir é central para a definição de admissibilidade de uma família de polinômios bem como para a construção de uma estratificação de uma vizinhança da origem em $\mathbb{C} \times X_\sigma$ que atenda às nossas ambições.

Proposição 2.21. *Seja $f_t(z)$ uma função polinomial sobre uma variedade tórica $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$. Suponha que para t suficientemente pequeno as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(i) *a fronteira compacta de Newton de f_t não depende de t ;*

(ii) *f_t seja não-degenerada.*

Então existe um número positivo $E > 0$ tal que para qualquer $I \in \mathcal{I}_{mv}(f_0)$ e t suficientemente pequeno, o conjunto $V(f_t) \cap X_\sigma^{*I} \cap B_E$ é não singular e intersecta transversalmente S_ε para qualquer $\varepsilon < E$, onde B_E e S_ε são a bola aberta e a esfera centrada na origem $0 \in \mathbb{C}^r$ e de raios E e ε , respectivamente.

Demonstração. Como a quantidade de subconjuntos $I \in \mathcal{I}_{mv}(f_0)$ é finita, é suficiente considerarmos $I \in \mathcal{I}_{mv}(f_0)$ fixado, que por simplicidade de notação vamos supor que seja da forma $I = \{1, \dots, k\}$, com $k \leq r$. Primeiro vamos mostrar a suavidade e o argumento empregado será por contradição. Suponha que para todo $E > 0$ o conjunto $V(f_t) \cap X_\sigma^{*I} \cap B_E$ possui algum ponto singular. Assim, existe uma sequência de pontos (t_N, z_N) em $V(f_t) \cap X_\sigma^{*I} \cap B_E$, de modo que $(t_N, z_N) \rightarrow (0, 0)$ e para cada $N \in \mathbb{N}$, z_N é um ponto crítico da restrição $f_t|_{X_\sigma^I}$. Assim, $(0, 0) \in D \times X_\sigma$ está no fecho do conjunto

$$W = \{(t, z) \in D \times X_\sigma^{*I} : f_t|_{X_\sigma^I}(z) = 0 \text{ e } df_t|_{X_\sigma^I} \equiv 0\}.$$

Considere o mergulho canônico $h : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow X_\sigma$ e sua respectiva restrição a X_σ^I , $h^I : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow X_\sigma^I$. Podemos definir o seguinte conjunto

$$\mathcal{W} := \{(t, \xi) \in D \times (\mathbb{C}^*)^n : h^I(\xi) \in X_\sigma^{*I}, L_{f_t}^I(\xi) = 0 \text{ e } dL_{f_t}^I \equiv 0\}.$$

Uma vez que os geradores do semigrupo \mathcal{S}_σ estão contidos em \mathbb{Z}_+^n , as funções coordenadas h^I serão funções monomiais e juntamente com o fato de que a mesma é sobrejetora sobre X_σ^{*I} , temos que $(0, 0) \in D \times \mathbb{C}^n$ está no fecho do conjunto \mathcal{W} .

Dessa maneira, aplicando o Lema 1.9 (Lema de seleção de curvas) sobre o conjunto \mathcal{W} , existe uma curva analítica real $p : [0, \varepsilon) \rightarrow D \times \mathbb{C}^n$ tal que

$$\begin{aligned} p(0) &= (t(0), \xi(0)) = (0, 0) \\ p(s) &= (t(s), \xi(s)) = (t(s), \xi_1(s), \dots, \xi_n(s)) \in \mathcal{W} \text{ se } s \neq 0. \end{aligned}$$

Agora, para cada $1 \leq i \leq n$, considere as expansões de Taylor

$$\begin{aligned} t(s) &= t_0 s^{v_0} + \dots \\ \xi_i(s) &= a_i s^{w_i} + \dots \end{aligned}$$

em que t_0 e a_i em \mathbb{C}^* , para cada $1 \leq i \leq n$, são os primeiros coeficientes não nulos desta expansão, v_0 e $w_i \in \mathbb{Z}_+^*$, são suas respectivas potências e os “pontos” representam os termos de ordem superior de cada expansão. Escreva $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$. Seja $\Delta \subset \Gamma(L_{f_t}^I; \xi)$ uma face compacta em \mathbb{R}_+^n de $L_{f_t}^I$ com respeito às variáveis ξ , como em [47]. Dessa maneira, denotando por $d = \min\{\langle x, w \rangle : x \in \Gamma_+(L_{f_t}^I; \xi)\}$ temos que

$$\Delta = \{x \in \Gamma_+(L_{f_t}^I; \xi) : \langle w, x \rangle = d\}.$$

Uma vez que, faces compactas de $L_{f_t}^I$ são faces compactas de $f_t|_{X_\sigma^I}$ (ver Exemplo 2.7), podemos considerar Δ como uma face compacta de $\Gamma(f_t|_{X_\sigma^I}; z) = \Gamma(f_0|_{X_\sigma^I}; z)$. Usando o fato de que a função polinomial $f_t(z)$ pode ser escrita como uma soma do tipo

$$f_t(z) = (f_t)_\Delta(z) + \sum_{\alpha \notin \Delta} a_\alpha z^\alpha$$

onde a segunda parcela da soma acima representa a parte dos monômios de f_t cujo vetor das potências não pertence a face Δ , podemos concluir que para $1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial L_{f_t(s)}^I}{\partial \xi_i}(\xi(s)) = \frac{\partial (L_{f_t(s)}^I)_\Delta}{\partial \xi_i}(a) s^{d-w_i} + \dots,$$

onde $(L_{f_t(s)}^I)_\Delta$ é o polinômio associado à função face $(f_t|_{X_\sigma^I})_\Delta$. Como $(t(s), \xi(s)) \in \mathcal{W}$ para todo $s \neq 0$, temos

$$0 = \frac{\partial (L_{f_t(s)}^I)_\Delta}{\partial \xi_i}(a) s^{d-w_i} + \dots \quad \text{para } s \neq 0,$$

o que implica que para cada $1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial (L_{f_t(s)}^I)_\Delta}{\partial \xi_i}(a) = 0,$$

e conseqüentemente

$$\frac{\partial (L_{f_0}^I)_\Delta}{\partial \xi_i}(a) = 0.$$

Concluimos então que $a \in (\mathbb{C}^*)^n$ é um ponto crítico de $(L_{f_0}^I)_\Delta$. Em outras palavras, $f_0|_{X_\sigma^I}$ não é não-degenerada, o que é uma contradição com a Proposição 2.17. Portanto, $f_0|_{X_\sigma^I}$ é não-degenerada para $I \in \mathcal{I}_{mv}(f_t)$ e conseqüentemente para qualquer $I \in \mathcal{I}_{mv}(f_t)$.

Para a transversalidade, também usaremos um argumento de contradição. Suponha que exista uma seqüência $(t_N, \xi_N)_N \subset D \times \mathbb{C}^n$, com $(t_N, \xi_N) \rightarrow (0, 0)$ tal que para qualquer N , $(t_N, h^I(\xi_N)) \in V(f) \cap (D \times X_\sigma^{*I}) \subset D \times \mathbb{C}^r$ e não intersecta transversalmente a esfera $S_{\|h^I(\xi_N)\|}$ em $h^I(\xi_N)$.

Assim, $(0, 0) \in D \times \mathbb{C}^n$ pertence ao fecho do conjunto

$$\tilde{W} = \{(t, \xi) \in D \times (\mathbb{C}^*)^n : f_t|_{X_\sigma^I}(h^I(\xi)) = 0 \text{ e } \nabla f_t|_{X_\sigma^I}(h^I(\xi)) = \lambda h^I(\xi), \lambda \in \mathbb{C}^*\},$$

onde

$$\nabla f_t|_{X_\sigma^I}(h^I(\xi)) = \left(\overline{\frac{\partial f_t|_{X_\sigma^I}}{\partial z_1}(h^I(\xi))}, \dots, \overline{\frac{\partial f_t|_{X_\sigma^I}}{\partial z_m}(h^I(\xi))}, 0, \dots, 0 \right)$$

é o vetor gradiente de $f_t|_{X_\sigma^I}$ e a barra representa o conjugado complexo. Assim, aplicando o Lema 1.9 (Lema de seleção de curvas) ao conjunto \tilde{W} , existe uma curva analítica real $(t(s), \xi(s)) = (t(s), \xi_1(s), \dots, \xi_n(s))$, com $s \in [0, \varepsilon)$, e uma série de Laurent tais que

1. $(t(0), \xi(0)) = (0, 0)$;
2. $(t(s), \xi(s)) \in D \times (\mathbb{C}^*)^n$ para $s \neq 0$;
3. $f_{t(s)}(h^I(\xi(s))) = 0$;
4. $\nabla f_{t(s)}|_{X_\sigma^I}(h^I(\xi(s))) = \lambda(s)h^I(\xi(s))$.

Para $1 \leq i \leq n$, considere as expansões de Taylor

$$\begin{aligned} t(s) &= t_0 s^{v_0} + \dots \\ \xi_i(s) &= a_i s^{w_i} + \dots \end{aligned}$$

onde $v_0, w_i \in \mathbb{Z}_+^*$ e $t_0, a_i \in \mathbb{C}^*$ (como na parte da suavidade) e a expansão de Laurent

$$\lambda(s) = \lambda_0 s^u + \dots,$$

em que $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$ é o primeiro expoente não nulo da expansão, $u \in \mathbb{Z}_+^*$ sua respectiva potência e “pontos” representam os termos de ordem superior dessas expansões. Note que

$$h^I(\xi(s)) = (z_1(s), \dots, z_m(s), 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^r$$

é uma curva em que cada função coordenada tem a forma $z_i(s) = \xi(s)^{m_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Dito isto, escrevendo $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$, obtemos que

$$z_i(s) = a^{m_i} s^{W_i} + \dots \text{ com } 1 \leq i \leq m$$

e agora escreva $W = (W_1, \dots, W_m, 0, \dots, 0)$ onde $W_i = \langle w, m_i \rangle$ para $1 \leq i \leq m$.

Seguindo o mesmo argumento que no caso da suavidade, sejam $\Delta \subset \Gamma(f_t|_{X_\sigma^I}; z) = \Gamma(f_0|_{X_\sigma^I}; z)$ face compacta associada ao vetor peso w e $d = \min\{\langle w, x \rangle : x \in \Gamma_+(f_t|_{X_\sigma^I}; z)\}$.

Agora, por reordenamento assumiremos que $W_1 = \dots = W_k < W_j$, com $k < j \leq m$. Note que o vetor W se enquadra na hipótese do Lema 2.12. Assim, pelo item 4 acima, temos que $d - W_1 = u - W_1$ e

$$\frac{\partial \overline{(f_0|_{X_\sigma^I})_\Delta}}{\partial z_i}(h^I(a)) = \begin{cases} \lambda_0 a^{m_i}, & \text{for } 1 \leq i \leq k \\ 0, & \text{for } k < i \leq m \end{cases} \quad (2.7)$$

Como o polinômio é quase homogêneo de peso W e grau d , pela identidade de Euler segue que

$$d \cdot (f_0|_{X_\sigma^I})_\Delta(h^I(a)) = \sum_{i=1}^m W_i a^{m_i} \frac{\partial (f_0|_{X_\sigma^I})_\Delta}{\partial z_i}(h^I(a)). \quad (2.8)$$

Uma vez que $f_{t(s)}(z(s)) = 0$ para todo $s \neq 0$, $(f_0|_{X_\sigma^I})_\Delta(h^I(a)) = 0$. Então, por (2.8)

$$0 = \sum_{i=1}^m W_i a^{m_i} \frac{\partial (f_0|_{X_\sigma^I})_\Delta}{\partial z_i}(h^I(a)),$$

e aplicando (2.7), obtemos a contradição

$$0 = \lambda_0 \sum_{i=1}^k W_i \|a^{m_i}\|^2,$$

visto que $W_i > 0$ para algum $1 \leq i \leq k$. Com isso, mostramos a interseção transversal e, portanto, concluímos a demonstração da Proposição 2.21. \square

Observação 2.22. Seguindo a notação da Proposição 2.21, uma vez que o número de subconjuntos $I \in \mathcal{I}_{nv}(f_0)$ é finito, podemos tomar um \bar{E} como sendo o ínfimo dos E para o qual os conjuntos $V(f_t) \cap X_\sigma^{*I} \cap B_E$ sejam não singulares e intersectem transversalmente a esfera S_ε para qualquer $\varepsilon < E$. Portanto,

$$\bigcup_{I \in \mathcal{I}_{nv}(f_t)} V(f_t) \cap X_\sigma^{*I} \cap B_{\bar{E}}$$

é não singular e intersecta transversalmente a esfera S_ε para qualquer $\varepsilon < E$.

A seguir, apresentaremos a definição de admissibilidade para uma família de funções polinomiais, conceito essencial para o resultado principal desse capítulo.

Definição 2.23. A família de polinômios $\{f_t\}$ é dita admissível em $t = 0$ se, para um t suficientemente pequeno, ela satisfaz as seguintes condições

- (i) $\Gamma_{nc}(f_t; z)$ (consequentemente, $\mathcal{I}_{nv}(f_t)$ e $\mathcal{I}_v(f_t)$) não depende de t ;
- (ii) f_t é não-degenerada e localmente controlada ao longo de conjuntos anuladores;
- (iii) existe um número $\rho > 0$ tal que $\inf E, r_{nc}(f_t) \geq \rho$, onde E é dado pela Proposição 2.21.

Observe que se a família $\{f_t\}$ for admissível, então ela será *uniformemente controlada* ao longo das variedades anuladoras X_σ^I , no sentido de que para qualquer $I \in \mathcal{I}_v(f_t)$, $r_{nc}(f_t) \geq \rho$ para todo t pequeno.

2.3 Admissibilidade e equisingularidade de Whitney

Nesta seção, será apresentado o principal resultado deste capítulo, que irá relacionar a admissibilidade de uma família de funções polinomiais com a equisingularidade de Whitney da mesma. Para tanto, seguiremos com as mesmas notações da seção anterior a respeito da família de funções polinomiais $\{f_t\}$. Além disso, assumiremos que, para t suficientemente pequeno, as seguintes condições (i) e (ii) da Definição 2.23 serão sempre válidas.

Seguindo os conceitos apresentados na seção 1.4 do Capítulo 1, vamos construir uma estratificação de uma vizinhança da origem de $\mathbb{C} \times X_\sigma$ de maneira que a hipersuperfície $V(f) = f^{-1}(0)$ seja uma união de estratos.

Pela Proposição 2.21, existe um $E > 0$ tal que para qualquer $I \in \mathcal{I}_{nv}(f_t)$ (que será igual ao $\mathcal{I}_{nv}(f_0)$) e para t suficientemente pequeno, o conjunto $V(f_t) \cap X_\sigma^I \cap B_E$ é não-singular. Portanto, existe uma vizinhança aberta suficientemente pequena $\mathcal{U} \subset D \times U$ da origem em $\mathbb{C} \times X_\sigma$ de modo que o conjunto

$$V(f) \cap (\mathbb{C} \times X_\sigma^I) \cap B_E$$

é não-singular para qualquer $I \in \mathcal{I}_{nv}(f_t)$. Dentro dessa vizinhança \mathcal{U} podemos estratificar $\mathbb{C} \times X_\sigma$ de tal maneira que a hipersuperfície $V(f_t)$ seja uma união de estratos. Mais precisamente, iremos considerar três tipos de estratos, a saber,

- (a) $A_I = \mathcal{U} \cap [V(f) \cap (\mathbb{C} \times X_\sigma^{*I})]$, para $I \in \mathcal{I}_{nv}(f_0)$;
- (b) $B_I = \mathcal{U} \cap [(\mathbb{C} \times X_\sigma^{*I}) \setminus V(f) \cap (\mathbb{C} \times X_\sigma^{*I})]$, para $I \in \mathcal{I}_{nv}(f_0)$;
- (c) $C_I = \mathcal{U} \cap (\mathbb{C} \times X_\sigma^{*I})$, para $I \in \mathcal{I}_v(f_0)$.

A coleção finita

$$\mathcal{T} := \{A_I, B_I : I \in \mathcal{I}_{nv}(f_0)\} \cup \{C_I : I \in \mathcal{I}_v(f_0)\}$$

é uma estratificação de $\mathcal{U} \cap \mathbb{C} \times X_\sigma$ tal que $\mathcal{U} \cap V(f)$ é uma união de estratos. Além disso, observe que para $I = \emptyset \in \mathcal{I}_v(f_0)$, o estrato $C_\emptyset = \mathcal{U} \cap (\mathbb{C} \times \{0\})$ é o eixo- t . A coleção \mathcal{T} será chamada de *estratificação canônica*.

Teorema 2.24. *Se a família de funções polinomiais $\{f_i\}$ for admissível, então a estratificação canônica \mathcal{T} de $\mathcal{U} \cap (\mathbb{C} \times X_\sigma)$ é uma estratificação de Whitney. Em particular, a família de hipersuperfícies $\{V(f_i)\}$ é Whitney equisingular.*

O estudo e demonstração desse teorema é baseado no Teorema 3.8 de [16]. Sendo assim, como visto na seção 1.4 do Capítulo 1, vamos mostrar que a estratificação canônica \mathcal{T} atende as condições de Whitney da Definição 1.50 e com isso garantir que a família de hipersuperfícies $\{V(f_i)\}$ é Whitney equisingular. Antes de começarmos tal demonstração, atentemos que, sob as condições do Teorema 2.24, não se faz necessário mostrar a condição de fronteira. Observe que, de uma maneira geral se S é uma estratificação de $\mathcal{U} \cap V(f)$ tal que o eixo- t é um estrato, então a partição S^c , formada pelas componentes conexas dos estratos de S , também será uma estratificação de Whitney; além disso, S^c satisfaz a condição de fronteira (para mais detalhes veja [23]).

Prova do Teorema 2.24. Primeiramente faremos algumas observações acerca dos subconjuntos de índices em questão, afim de verificar que em alguns pares de estratos as condições de Whitney serão satisfeitas de maneira relativamente mais simples. Note que se $I \subset J$, então $X_\sigma^{*I} \subset \overline{X_\sigma^{*J}}$. Além disso, se $I \subset J$ e $J \in \mathcal{I}_v(f_0)$ então $I \in \mathcal{I}_v(f_0)$. Dessa forma, precisaremos mostrar a condição (b) de Whitney apenas para os pares de estratos satisfazendo as seguintes condições:

- $C_I \cap \overline{C_J} \neq \emptyset$, com $I \subset J$ e $I, J \in \mathcal{I}_v(f_0)$;
- $C_I \cap \overline{A_J} \neq \emptyset$ ou $C_I \cap \overline{B_J} \neq \emptyset$, com $I \subset J$ e $I \in \mathcal{I}_v(f_0)$, $J \in \mathcal{I}_{nv}(f_0)$;
- $A_I \cap \overline{A_J} \neq \emptyset$, $A_I \cap \overline{B_J} \neq \emptyset$ ou $B_I \cap \overline{B_J} \neq \emptyset$, com $I \subset J$ e $I, J \in \mathcal{I}_{nv}(f_0)$.

Observe que será suficiente mostrar que para qualquer $J \in \mathcal{I}_{nv}(f_0)$ e $I \in \mathcal{I}_v(f_0)$ o estrato $A_J = \mathcal{U} \cap (V(f) \cap X_\sigma^{*J})$ atende a condição (b) de Whitney sobre o estrato $C_I = \mathcal{U} \cap (\mathbb{C} \times X_\sigma^{*I})$. Para os outros casos, essa condição será satisfeita utilizando a Observação 1.56. Por exemplo, vamos considerar o par de estratos da forma (A_I, A_J) . De acordo com a Observação 2.22 o conjunto $\mathcal{A} = \cup_{K \in \mathcal{I}_{nv}(f_0)} A_K$ é não-singular. Além disso, $\overline{A_J} \cap \mathcal{A}$ contém uma subvariedade fechada $S \subset \mathcal{A}$ que inclui A_I e também

$S \cap A_J = \emptyset$. Então, aplicando a Observação 1.56, com $M = \mathcal{A}$ e $N = S$, garantimos a condição (b) de Whitney.

Agora voltando ao caso do par de estratos (C_I, A_J) , seja $(\tau, q) = (\tau, q_1, \dots, q_r) \in C_I \cap \overline{A_J}$ suficientemente próximo da origem e, sem perda de generalidade, vamos supor que $I = \{1, \dots, k\}$ e $J = \{1, \dots, r\}$, com $1 \leq k < r$. Pelo lema da seleção de curvas, é suficiente mostrar que a condição (b) de Whitney vale ao longo de curvas reais analíticas

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= (t(s), z(s)) = (t(s), z_1(s), \dots, z_r(s)) \\ \tilde{\gamma}(s) &= (\tilde{t}(s), \tilde{z}(s)) = (\tilde{t}(s), \tilde{z}_1(s), \dots, \tilde{z}_r(s))\end{aligned}$$

tais que $\gamma(s) \in A_J$ e $\tilde{\gamma}(s) \in C_I$ para $s \neq 0$ e $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = (\tau, q)$. Uma vez que $(\tau, q) = (\tau, q_1, \dots, q_r) \in C_I \cap \overline{A_J}$, então $(\tau, q) = (\tau, q_1, \dots, q_k, 0, \dots, 0)$, com $q_i \neq 0$ para $i = 1, \dots, k$.

Denote por $l(s) := \overrightarrow{\tilde{\gamma}(s)\gamma(s)}$ a linha que conecta $\gamma(s)$ a $\tilde{\gamma}(s)$. Nosso objetivo é mostrar que à medida que s se aproxima de 0, a linha $l(s)$ se inclina sobre $T_{\gamma(s)}A_J$, de maneira que no limite ela pertença a $T_{\gamma(0)}A_J$. Para tanto, vamos considerar expansões de Taylor para as curvas $\gamma(s)$ e $\tilde{\gamma}(s)$ em torno do ponto (τ, q) . Para $\gamma(s)$ teremos

$$\begin{aligned}t(s) &= \tau + A_0s + \dots \\ z_1(s) &= q_1 + A_1s + \dots \\ &\vdots \\ z_k(s) &= q_k + A_k s + \dots \\ z_{k+1}(s) &= A_{k+1}s^{W_{k+1}} + \dots \\ &\vdots \\ z_r(s) &= A_r s^{W_r} + \dots\end{aligned}$$

onde $W_i \in \mathbb{Z}_+^*$, $A_i \in \mathbb{C}^*$, para $k+1 \leq i \leq r$. E para $\tilde{\gamma}(s)$, teremos:

$$\begin{aligned}\tilde{t}(s) &= \tau + \tilde{A}_0s + \dots \\ \tilde{z}_i(s) &= q_i + \tilde{A}_i s + \dots\end{aligned}$$

onde $i \in \{1, \dots, r\}$ e $\tilde{z}_i(s) = 0$ para todo s com $k+1 \leq i \leq r$. Da mesma maneira que na seção anterior, os pontos “ \dots ” representam os termos de ordem superior da expansão de Taylor. Dessa forma, escrevendo $l(s) = (l_0(s), \dots, l_r(s))$, segue que as funções coordenadas de $l(s)$ serão da forma

$$l_i(s) = \begin{cases} (A_0 - \tilde{A}_0)s + \dots, & \text{for } i = 0 \\ (A_i - \tilde{A}_i)s + \dots, & \text{for } 1 \leq i \leq k \\ A_i s^{W_i} + \dots, & \text{for } k+1 \leq i \leq r \end{cases}.$$

Através de uma reordenação, podemos supor que

$$\begin{aligned}W_{k+1} = \dots = W_{k+k_1} &< W_{k+k_1+1} = \dots = W_{k+k_1+k_2} < \dots \\ \dots &< W_{k+k_1+\dots+k_{b-1}+1} = \dots = W_{k+k_1+\dots+k_b} = W_r,\end{aligned}\tag{2.9}$$

para $k_1, \dots, k_b \in \mathbb{Z}_+^*$ e $k + \sum_{i=1}^b k_i = r$.

Sob essas condições, nosso primeiro objetivo será completo se for verdadeira a igualdade

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\langle l(s), \nabla F(\gamma(s)) \rangle}{\|l(s)\| \cdot \|\nabla F(\gamma(s))\|} = 0 \quad (2.10)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno Hermitiano em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$, f é a restrição de uma função polinomial $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$ à variedade tórica $\mathbb{C} \times X_\sigma$ e

$$\nabla F(\gamma(s)) = \left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial t}(\gamma(s)), \frac{\partial \overline{F}}{\partial z_1}(\gamma(s)), \dots, \frac{\partial \overline{F}}{\partial z_r}(\gamma(s)) \right)$$

é o vetor gradiente de F em $\gamma(s)$ e como usual a barra denota o conjugado complexo. Consideremos

$$\text{ord } l(s) = \inf_{0 \leq i \leq r} \text{ord } l_i(s)$$

onde $\text{ord } l_i(s)$ é a ordem com respeito a s da i -ésima função coordenada de $l(s)$, i.e., a menor potência de s da função $l_i(s)$. Pela reordenação (2.9), segue que $\text{ord } l(s) \leq W_{k+1}$. Observe agora que se $\text{ord } l(s) < W_{k+1}$, então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{l(s)}{|s|^{\text{ord } l(s)}} = (\underbrace{\star, \star, \dots, \star}_{k\text{-termos}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(r-k)\text{-termos}}) \quad (2.11)$$

e se $\text{ord } l(s) = W_{k+1}$, então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{l(s)}{|s|^{\text{ord } l(s)}} = (\underbrace{\star, \star, \dots, \star}_{k\text{-termos}}, A_{k+1}, \dots, A_{k+k_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{r-(k+k_1)\text{-termos}}) \quad (2.12)$$

onde cada coordenada “ \star ” em (2.11) e (2.12) representam um número complexo, que pode ser zero ou não.

Sejam $w \in \sigma$ e sejam m_1, \dots, m_k geradores do semigrupo \mathcal{S}_σ de maneira que $\langle w, m_i \rangle = 0$ para todo $i \in I$. Considere a face não-compacta Δ_w , que é o local onde $\langle w, x \rangle$ atinge seu valor mínimo, para $x \in \Gamma_+(f; z)$. Além disso, como $I_w = I \in \mathcal{S}_v(f_t)$ teremos que $\Delta_w \subset \Gamma_{nc}(f_t; z)$ (não depende de t) é face não-compacta essencial. Uma vez que Δ_w está contida em um hiperplano paralelo a face do cone dual $\check{\sigma}$ gerado pelos vetores m_1, \dots, m_k , teremos que dado $\lambda \in \Delta_w \cap \mathcal{S}_\sigma$, então

$$\lambda = p + \sum_{i=1}^k X_i m_i,$$

onde p é um ponto fixado em $\Delta_w \cap \mathcal{S}_\sigma$ e $X_i \in \mathbb{Z}_+$ para $1 \leq i \leq k$. Agora, como $p \in \Delta_w \cap \mathcal{S}_\sigma$, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte maneira

$$\lambda = \sum_{i=1}^r \Lambda_i m_i + \sum_{i=1}^k X_i m_i,$$

em que $\Lambda_i \in \mathbb{Z}_+$ para $1 \leq i \leq r$, e pelo menos um $\Lambda_i \neq 0$ para algum $k+1 \leq i \leq r$. O que implica em dizer que a representação de λ em \mathbb{N}^r (ver página 33) será um vetor da forma

$$\Lambda := (\Lambda_1 + X_1, \dots, \Lambda_k + X_k, \Lambda_{k+1}, \dots, \Lambda_r).$$

Escrevendo $W = (0, \dots, 0, W_{k+1}, \dots, W_r) \in \mathbb{N}^r$, podemos verificar que o produto interno $\langle W, \Lambda \rangle$ será constante (pois não dependerá dos X_i 's) e denotaremos por D_W . Seja $A = (q_1, \dots, q_k, A_{k+1}, \dots, A_r) \in (\mathbb{C}^*)^r$, como $\Gamma_{nc}(f_t; z)$ não depende de t , por cálculos análogos aos feitos na demonstração da Proposição 2.21, teremos que para cada $i \in \{1, \dots, r\}$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(\gamma(s)) = \frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_i}(A) s^{D_W - W_i} + \dots, \quad (2.13)$$

em que $W_1 = \dots = W_K = 0$ e $(F_\tau)_{\Delta_w}$ representa a função face $(f_\tau)_\Delta$ visto como função polinomial sobre \mathbb{C}^r . Além disso,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|s|^{D_W - 1}} \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(s)) \right) = 0. \quad (2.14)$$

Agora, usando (2.9)

$$\begin{aligned} D_W - W_{k+1} = \dots = D_W - W_{k+k_1} &> D_W - W_{k+k_1+1} = \dots = D_W - W_{k+k_1+k_2} > \dots \\ \dots > D_W - W_{k+k_1+\dots+k_{b-1}+1} = \dots &= D_W - W_{k+k_1+\dots+k_b} = D_W - W_r. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Denote por

$$o(s) := \text{ord } \overline{\nabla F}(\gamma(s)) = \inf \left\{ \text{ord } \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(s)), \inf_{1 \leq i \leq r} \text{ord } \frac{\partial F}{\partial z_i}(\gamma(s)) \right\}.$$

Como assumimos que (τ, q) está suficientemente próximo de $(0, 0) \in \mathbb{C} \times X_\sigma$, segue da uniformidade do controle local que existe um $i_0 \in \{k+1, \dots, r\}$ tal que

$$\frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_{i_0}}(A) \neq 0. \quad (2.16)$$

Assim, combinando a equação (2.13), as desigualdades (2.15) e a relação (2.16) obtemos que

$$o(s) \leq D_W - W_{i_0} \leq D_W - W_{k+1} \leq D_W - 1.$$

Consequentemente, da igualdade (2.14) obtemos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|s|^{o(s)}} \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(s)) \right) = 0.$$

Além disso, como $W_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ se $o(s) < D_W - W_{k+1}$, então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\nabla F(\gamma(s))}{|s|^{o(s)}} = \left(0, \underbrace{0, \dots, 0}_{(k+k_1)\text{-termos}}, \overbrace{*, \dots, *}^{r-(k+k_1)\text{-termos}} \right), \quad (2.17)$$

e se $o(s) = D_W - W_{k+1}$, então

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\nabla F(\gamma(s))}{|s|^{o(s)}} = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k\text{-termos}}, \overline{\frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_{k+1}}(A)}, \dots, \overline{\frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_{k+k_1}}(A)}, \underbrace{*, \dots, *}_{r-(k+k_1)\text{-termos}} \right). \quad (2.18)$$

Com isso, as relações (2.11), (2.12), (2.17) e (2.18) nos dizem que no limite, quando $s \rightarrow 0$, $\|l(s)\|$ e $\|\nabla F(\gamma(s))\|$ serão equivalentes a $c_1|s|^{\text{ord } l(s)}$ e $c_2|s|^{o(s)}$ respectivamente, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$. Também por essas mesmas relações, podemos notar que (2.10) é prontamente atendida, exceto nos casos em que $o(s) = D_W - W_{m+1}$ e $\text{ord } l(s) = W_{m+1}$. Neste caso, para concluir a igualdade (2.10), nos resta verificar que

$$\sum_{i=k+1}^{k+k_1} A_i \frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_i}(A) = 0. \quad (2.19)$$

Para esse propósito, notemos que a função polinomial $(F_\tau)_{\Delta_w}$ é quase-homogênea com peso W e grau D_W . Então segue da identidade de Euler que

$$\sum_{i=1}^r W_i z_i \frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_i}(z) = D_W \cdot (F_\tau)_{\Delta_w}(z). \quad (2.20)$$

Como $f(\gamma(s)) = 0$ para qualquer s , teremos que todos os coeficientes da série formal $f(\gamma(s))$ serão iguais a zero e em particular, $(F_\tau)_{\Delta_w}(A) = 0$. Além disso, $W_i = 0$ para $1 \leq i \leq k$, assim podemos reescrever (2.20) da forma

$$\sum_{i=k+1}^r W_i A_i \frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_i}(A) = 0. \quad (2.21)$$

Combinando (2.13) e (2.15), com o fato de que estamos no caso em que $o(s) = D_W - W_{k+1}$, teremos que

$$\frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_i}(A) = 0 \quad (2.22)$$

para $k + k_1 < i \leq r$. De fato, se existisse um $i_1 > k + k_1$ tal que (2.22) fosse verdade, então por (2.13) e (2.15), teríamos

$$o(s) \leq D_W - W_{i_1} < D_W - W_{k+1}$$

o que é uma contradição. Assim, de (2.21), (2.22) e (2.9) teremos

$$\sum_{i=m+1}^{m+m_1} W_i A_i \frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_i}(A) = 0 \implies W_{m+1} \sum_{i=m+1}^{m+m_1} A_i \frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_i}(A) = 0.$$

Como $W_{k+1} \in \mathbb{Z}_+^*$, a igualdade (2.19) é verdadeira. Agora que provamos (2.10), podemos concluir que no limite, quando $s \rightarrow 0$, o segmento $l(s)$ pertence a $T_{\gamma(s)}V(F)$.

Por outro lado, para concluir que $l(s)$ pertence a $T_{\gamma(s)}A_J$, considere o conjunto $\tilde{A}_J = \mathbb{C} \times X_\sigma^* J$. Uma vez que $I \subset J$, temos

$$C_I \subset \overline{\tilde{A}_J} \quad \text{e} \quad A_J = V(F) \cap \tilde{A}_J.$$

Consequentemente, a curva $\gamma(s) \in \tilde{A}_J$ para todo $s \neq 0$. Além disso, visto que C_I e \tilde{A}_J são órbitas da ação tórica, o par de estratos (C_I, \tilde{A}_J) em $\mathbb{C} \times X_\sigma$ satisfaz a condição (b) de Whitney. Por isso, quando $s \rightarrow 0$, o segmento $l(s)$ vai pertencer ao espaço tangente $T_{\gamma(s)}\tilde{A}_J$, ou seja, quando $s \rightarrow 0$, $l(s)$ vai pertencer a $T_{\gamma(s)}V(F) \cap T_{\gamma(s)}\tilde{A}_J$. Finalmente, como $T_{\gamma(s)}V(F) \cap T_{\gamma(s)}\tilde{A}_J \subset T_{\gamma(s)}A_J$ podemos concluir que

$$\lim_{s \rightarrow 0} l(s) \in T_{\gamma(s)}A_J.$$

Para concluir a demonstração do teorema, vamos considerar o caso em que $I = \emptyset$. Seja $h^J : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow X_\sigma^{*J}$ dada por $h^J(\xi) = (\xi^{m_1}, \dots, \xi^{m_r}, 0)$. Recorde que h^J é sobrejetora, então podemos definir o conjunto

$$\mathcal{A}_J := \{(\eta, \xi) \in D \times (\mathbb{C}^*)^n : (\eta, h^J(\xi)) \in \gamma((0, \varepsilon))\}.$$

Além disso, como as funções coordenadas de h^J são monomiais e $\gamma(0) = 0$, segue que $0 \in \overline{\mathcal{A}_J}$. Defina a aplicação $H : D \times (\mathbb{C}^*)^n \times [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ dada por $H(\eta, \xi, s) = (t(s), h^J(\xi)) - \gamma(s)$ e note que

$$H^{-1}(0) = \{(\eta, \xi, s) \in D \times (\mathbb{C}^*)^n \times [0, \varepsilon) : (t(s), h^J(\xi)) = \gamma(s)\}.$$

Donde segue que $H^{-1}(0)$ é um conjunto analítico em $D \times (\mathbb{C}^*)^n \times [0, \varepsilon)$.

Seja $\pi_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ a aplicação projeção dada por $\pi_1(\eta, \xi, s) = (\eta, \xi)$ e considere a aplicação restrição $\pi_1|_{H^{-1}(0)} : H^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^*)^n$. Observe que dado $(\eta, \xi) \in D \times (\mathbb{C}^*)^n$, a pré-imagem $\pi_1^{-1}|_{H^{-1}(0)}(\eta, \xi)$ é um conjunto finito. Para garantir a finitude desse conjunto podemos, se necessário, reduzir o intervalo $[0, \varepsilon)$ que aparece na definição da aplicação H de modo que a pré-imagem de qualquer ponto $z \in \mathcal{A}_J$ sobre a curva γ seja um conjunto finito. Isso vai implicar que $\pi_1(H^{-1}(0)) = \mathcal{A}_J$ é um conjunto analítico, conforme estabelecido pelo Teorema 2, na página 53 de [25]. Então pelo Lema de seleção de curvas – caso analítico Lema 1.19, existe uma curva analítica real $p : [0, \varepsilon') \rightarrow \mathbb{C}^n$, tal que $p(0) = 0$ e $p(s) = (\xi_1(s), \dots, \xi_n(s)) \in \mathcal{A}_J$ para todo $s \neq 0$. Tomando a expansão de Taylor

$$\xi_i(s) = a_i s^{w_i} + \dots, \quad 1 \leq i \leq n$$

onde $w_i > 0$ e $a_i \neq 0$ para qualquer $1 \leq i \leq n$ e usando a aplicação h^J , teremos que as funções coordenadas da curva $\gamma(s)$ terão a forma

$$\begin{aligned} t(s) &= A_0 s + \dots \\ z_i(s) &= a^{m_i} s^{\langle w, m_i \rangle} + \dots, \quad 1 \leq i \leq r \end{aligned}$$

em que $w = (w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ e $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$. Recordemos que, como na demonstração da Proposição 2.21, faces compactas de L_{f_t} como função polinomial sobre \mathbb{C}^n são faces compactas de f_t como função polinomial sobre X_σ (ver Exemplo 2.7). Dessa maneira, sejam $\Delta_w \subset \Gamma(f_t; z)$ uma face compacta associada ao vetor peso $w = (w_1, \dots, w_n)$ e d o mínimo de $\langle w, x \rangle$ com $x \in \Gamma_+(L_{f_t}, \xi)$. Denotando $W = (\langle w, b_1 \rangle, \dots, \langle w, b_r \rangle)$ e usando a não-degeneracidade de f_t na forma da Observação 2.11 e juntamente com o Lema 2.12 concluímos que para algum $i_0 \in \{1, \dots, r\}$

$$\frac{\partial (F_\tau)_{\Delta_w}}{\partial z_{i_0}}(h^J(a)) \neq 0. \quad (2.23)$$

O que é suficiente para usarmos os mesmos argumentos que no caso em que $I \neq \emptyset$ e chegarmos à mesma conclusão. \square

Observação 2.25. Note que na demonstração do Teorema 2.24, no caso de $I = \emptyset$, a hipótese de f_t ser não-degenerada foi suficiente para concluirmos a Whitney equisingularidade da família de hipersuperfícies $\{V(f_t)\}$.

Exemplo 2.26. Seja $q \geq 2$ um número inteiro positivo e considere a variedade tórica $X_\sigma \subset \mathbb{C}^{q+1}$ associada ao cone $\sigma = \langle (0, 1), (q, -1) \rangle \subset \mathbb{R}^2$. Neste caso, $\check{\sigma} = \langle (1, 0), (1, q) \rangle$ e o semigrupo \mathcal{S}_σ é gerado pelos vetores

$$\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_{q+1}\} = \{(1, 0), (1, 1), \dots, (1, q)\}.$$

Essa variedade tórica é também uma variedade determinantal dada pelo conjunto de zeros do ideal gerado pelos menores- (2×2) da matriz

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_{q-2} & z_{q-1} & z_q \\ z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_{q-1} & z_q & z_{q+1} \end{pmatrix},$$

como podemos ver, por exemplo, em [11, Exemplo 1.1.6.]. Podemos também ver que o mergulho canônico $h : (\mathbb{C}^*)^2 \rightarrow X_\sigma$ será dado por

$$h(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_1 \xi_2, \dots, \xi_1 \xi_2^q).$$

Considere a família de funções polinomiais sobre $D \times X_\sigma$ dada por

$$f(t, z) = z_1^2 + t z_i^d + z_{q-1} \quad \Rightarrow \quad (L_{f_t})(\xi) = \xi_1^2 + t \xi_1^d \xi_2^{di} + \xi_1 \xi_2^{q-1},$$

onde $2 \leq i \leq q-2$ e $d \geq 2$. Então

$$\text{supp}(f_t) = \{(2, 0), (d, i \cdot d), (1, q-1) : 2 \leq i \leq q-2 \text{ and } d \geq 2\}.$$

Observe que as faces compactas do poliedro de Newton de f são apenas os pontos $A = (1, 0)$, $B = (1, q-1)$ e o segmento $\Delta_1 = \overline{AB}$ pois os pontos da forma $(d, i \cdot d)$ com $2 \leq i \leq q-2$ e $d \geq 2$ não interferem em $\Gamma(f_t, z)$. Com alguns cálculos, podemos ver que f_t é não-degenerada. Além disso, existem duas faces não-compactas de f_t , a saber, $\Delta_2 = A + \mathbb{R}_{\geq 0} m_1$ e $\Delta_3 = B + \mathbb{R}_{\geq 0} m_q$. Entretanto apenas Δ_3 é face não-compacta essencial. De fato, o vetor peso $w_3 = (q, -1)$ é ortogonal apenas ao gerador $m_{q+1} = (1, q)$, dessa forma $I_{\Delta_3} = \{q+1\}$, donde vemos que $f_t|_{X_\sigma^{\Delta_3}} \equiv 0$.

Agora considere $u = (0, \dots, 0, u_{q+1}) \in X(\mathcal{S}_\sigma)^{\{q+1\}}$, então

$$\mathbb{C}_u^{\{1, \dots, q+1\}} = \{(z_1, z_2, \dots, z_q, u_{q+1}), z_i \in \mathbb{C}^*\}.$$

Assim, sobre $\mathbb{C}_u^{\{1, \dots, q+1\}}$ a função face $(f_t)_{\Delta_3}(z) = z_{q-1}$ não tem pontos críticos com relação às variáveis z_1, \dots, z_q . Logo, a família de funções polinomiais f_t será admissível. Portanto, pelo Teorema 2.24 a correspondente família de hipersuperfícies $\{V(f_t)\}$ será Whitney equisingular.

Característica de Euler da fibra de Milnor sobre 2-variedades simétricas genéricas

Neste capítulo, apresentamos uma fórmula para calcular a característica de Euler da fibra de Milnor de uma classe de funções não-degeneradas $f : S_n^2 \rightarrow \mathbb{C}$, onde S_n^2 é uma 2-variedade determinantal simétrica genérica (como no Capítulo 1, Subseção 1.3.3) e como aplicação da fórmula obtida, calculamos a obstrução de Euler local de S_n^2 na origem. Isso, por sua vez, nos permitiu construir uma família de variedades tóricas normais de dimensão ímpar com ponto singular isolado que não satisfaz a conjectura de caracterização da suavidade através da obstrução de Euler local apresentada por Matsui-Takeuchi, motivada pelo Corolário 5.2 em [37].

Nosso interesse no caso particular de 2-variedades determinantis simétricas genéricas advém do fato de que essas variedades também são variedades tóricas. Portanto, podemos usar as ferramentas combinatórias da geometria tórica para descrever a característica de Euler da fibra de Milnor. Nesse sentido, a obtenção da fórmula será basicamente dividida em duas partes. Primeiramente, descrevemos explicitamente a estrutura tórica dessas variedades, apresentando uma base de geradores para o semigrupo que irá gerá-la como variedade tórica, bem como toda a combinatória do cone associado a essa estrutura descrevendo seus raios, faces e variedades tóricas associadas às faces com dimensão maior que 2. Posteriormente, calculamos volumes de poliedros de Newton decorrentes da estrutura tórica. O resultado então segue da fórmula de Matsui-Takeuchi para a fibra de Milnor sobre variedades tóricas [38].

Na primeira seção deste capítulo, exibiremos uma estrutura tórica para S_n^2 bem como uma descrição detalhada da geometria do cone associado a essa estrutura. Na Seção 2, utilizamos a estrutura combinatória obtida na seção anterior, a fim de descrever uma fórmula para a característica de Euler da fibra de Milnor para uma função não-degenerada sobre S_n^2 . Na seção 3, utilizaremos esta fórmula para calcular a obstrução local de Euler dessa variedade e a obstrução local de Euler de uma função f , definida sobre a mesma. Por fim, estabeleceremos uma relação entre a obstrução de Euler de uma função não-degenerada f sobre S_n^2 e o número de Milnor de uma função associada a f .

3.1 Estrutura tórica da 2-variedade determinantal simétrica genérica

Usaremos as notações das seções 1.3.2 e 1.3.3 do Capítulo 1, para apresentar um dos resultados centrais desse capítulo que consiste em obter uma base para um semigrupo, de modo que a variedade tórica associada a ele seja a 2-variedade determinantal simétrica genérica S_n^2 e detalhamos toda a combinatória do cone associado a esses geradores. Já era de conhecimento amplo o fato de que S_n^2 é uma variedade tórica, visto que o ideal que gera S_n^2 como variedade é binomial e primo, ou seja, são ideais tóricos (ver Proposição 1.43). O que não se conhecia era a descrição explícita de uma base para um subgrupo que gerasse S_n^2 como variedade tórica.

O exemplo a seguir é particularmente especial, pois ilustra como se dará a demonstração do resultado supracitado.

Exemplo 3.1. Considere a matriz simétrica

$$L = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_5 & z_6 \end{pmatrix}.$$

Então $S_3^2 = V(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \subset \mathbb{C}^6$, onde $f_1 = z_1z_4 - z_2^2$, $f_2 = z_1z_5 - z_2z_3$, $f_3 = z_4z_6 - z_5^2$, $f_4 = z_2z_6 - z_3z_5$, $f_5 = z_1z_6 - z_3^2$ e $f_6 = z_2z_5 - z_3z_4$, que correspondem aos (2×2) -menores da matriz L e pela Proposição 1.48, $\dim S_3^2 = 3$ em \mathbb{C}^6 . Por outro lado, seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^3$ o semigrupo gerado por $\mathcal{A} = \{m_i\}_{1 \leq i \leq 6}$, onde

$$\begin{aligned} m_1 &= e_1, \\ m_2 &= e_1 + e_2, \\ m_3 &= e_1 + e_3, \\ m_4 &= e_1 + 2e_2, \\ m_5 &= e_1 + e_2 + e_3, \\ m_6 &= e_1 + 2e_2, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota a base canônica de \mathbb{Z}^3 . Como $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^3$, pela Proposição 1.47 teremos que $\dim X_{\mathcal{S}} = 3$. Além disso, com alguns cálculos podemos verificar que $f_1, \dots, f_6 \in I_{\mathcal{S}}$, onde $I_{\mathcal{S}}$ é o núcleo da aplicação $\pi_{\mathcal{S}} : \mathbb{C}[z_1, \dots, z_r] \rightarrow \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ dada na Definição 1.42. Logo $X_{\mathcal{S}} \subset S_3^2$ e como essas variedades são irredutíveis e de mesma dimensão concluímos que $X_{\mathcal{S}} = S_3^2$.

O argumento para a construção de uma base do semigrupo do teorema a seguir é similar ao empregado para o caso das 2-variedades determinantis genéricas apresentado em [12, Teorema 2.7].

Teorema 3.2. *Sejam $n \geq 2$ e $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^n$ o semigrupo gerado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \{ & e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3, \dots, e_1 + e_{n-1}, e_1 + e_n, \\ & e_1 + 2e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_4, \dots, e_1 + e_2 + e_{n-1}, e_1 + e_2 + e_n, \\ & e_1 + 2e_3, e_1 + e_3 + e_4, \dots, e_1 + e_3 + e_{n-1}, e_1 + e_3 + e_n, \\ & \vdots \\ & e_1 + 2e_{n-1}, e_1 + e_{n-1} + e_n, \\ & e_1 + 2e_n \}. \end{aligned}$$

Então a variedade tórica $X_{\mathcal{S}} = S_n^2$.

Demonstração. Sejam $L = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ uma matriz simétrica, onde x_{ij} são indeterminadas e J_2 o ideal gerado pelas (2×2) -menores de L , ou seja,

$$J_2 = \{x_{ij}x_{kl} - x_{il}x_{kj} : 1 \leq i < k \leq n, 1 \leq j < l \leq n \text{ e } x_{ab} = x_{ba}\}.$$

Denotaremos os elementos de \mathcal{A} da seguinte maneira,

- $m_{11} = e_1$;
- $m_{1j} = e_1 + e_j$, for $2 \leq j \leq n$;
- $m_{ij} = e_1 + e_i + e_j$, for $2 \leq i \leq j \leq n$;
- $m_{ij} = m_{ji}$, for $2 \leq i \leq j \leq n$.

Nosso objetivo é mostrar que as relações multiplicativas $x_{ij}x_{kl} = x_{il}x_{kj}$ para $1 \leq i < k \leq n, 1 \leq j < l \leq n$, correspondem a relações aditivas $m_{ij} + m_{kl} = m_{il} + m_{kj}$. Para tanto, iremos dividir a demonstração nos seguintes casos:

1. $i = j = 1$. Pela simetria, $m_{kl} = m_{lk}$. Logo, podemos assumir que $k \leq l$. Assim,

$$\begin{aligned} m_{11} + m_{kl} &= e_1 + (e_1 + e_k + e_l) \\ &= (e_1 + e_l) + (e_1 + e_k) \\ &= m_{1l} + m_{k1}. \end{aligned}$$

2. $i \geq 2$ e $j = 1$. Assim como no item anterior, obtemos

$$\begin{aligned} m_{i1} + m_{kl} &= (e_1 + e_i) + (e_1 + e_k + e_l) \\ &= (e_1 + e_i + e_l) + (e_1 + e_k) \\ &= m_{il} + m_{k1}. \end{aligned}$$

3. $i = 1$ e $j \geq 2$. Como antes,

$$\begin{aligned} m_{1j} + m_{kl} &= (e_1 + e_j) + (e_1 + e_k + e_l) \\ &= (e_1 + e_l) + (e_1 + e_k + e_j) \\ &= m_{1l} + m_{kj}. \end{aligned}$$

4. $i \geq 2$ e $j \geq 2$. Como antes,

$$\begin{aligned} m_{ij} + m_{kl} &= (e_1 + e_i + e_j) + (e_1 + e_k + e_l) \\ &= (e_1 + e_i + e_l) + (e_1 + e_k + e_j) \\ &= m_{il} + m_{kj}. \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que $J_2 \subset I_S$. Logo, $X_S = V(I_S) \subset V(J_2) = S_n^2$. Uma vez que $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^n$, temos que, pela Proposição 1.47, $\dim X_S = n$. \square

Os corolários a seguir tratam da normalidade de X_S e da minimalidade do conjunto \mathcal{A} como geradores da variedade tórica.

Corolário 3.3. *Seja X_S a variedade tórica dada pelo Teorema 3.2. Então X_S é uma variedade normal. Em particular, S é um semigrupo saturado, ou seja, $S = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A} \cap \mathbb{Z}^n$. Além disso, $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}$ é um cone fortemente convexo*

Demonstração. A primeira parte segue da forma da base \mathcal{A} definida no Teorema 3.2 e das Proposições 1.48 e 1.47. A segunda parte vem do fato de que $0 \in S_n^2 = X_S$. \square

Corolário 3.4. *O conjunto de geradores \mathcal{A} do semigrupo S no Teorema 3.2 é minimal.*

Demonstração. Seja $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ o cone dual de $\mathcal{A}\mathbb{R}_{\geq 0}$. Como o cone $\mathcal{A}\mathbb{R}_{\geq 0}$ tem dimensão máxima e é fortemente convexo, segue que σ satisfaz essas mesmas propriedades. Pelo corolário anterior, X_S é uma variedade tórica normal afim definida pelo cone σ .

Sejam \mathcal{H} o conjunto de geradores minimal de S e $T_0X_S \subset \mathbb{C}^N$, com $N = \frac{n(n+1)}{2}$, o espaço tangente de X_S na origem. Sabemos que $\dim_{\mathbb{C}} T_0X_S = |\mathcal{H}|$ [11, Lemma 1.3.10]. Nosso objetivo é mostrar que $T_0X_S = \mathbb{C}^N$, pois isso implicaria em $|\mathcal{H}| = N$ e como $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ e $|\mathcal{A}| = N$, podemos concluir que $\mathcal{H} = \mathcal{A}$.

Para mostrar nosso objetivo, relembre que J_2 e I_S (ver Definição 1.42) são ideais primos. Logo

$$J_2 = \mathcal{I}(S_n^2) = \mathcal{I}(X_S) = I_S,$$

onde $\mathcal{I}(\cdot)$ é o ideal da variedade (ver Definição 1.7). Agora, como os geradores do ideal J_2 são binômios da forma $x_{ij}x_{kl} - x_{il}x_{kj}$, segue que sua matriz Jacobiana, avaliada em 0, é a matriz nula. Em outras palavras seu núcleo é todo \mathbb{C}^N . Portanto $T_0X_S = \mathbb{C}^N$ como queríamos. \square

3.1.1 Algumas propriedades do cone gerado pelo semigrupo \mathcal{S}

Seguindo a notação do Teorema 3.2, no decorrer do texto iremos denotar por $K(\mathcal{S}) := \text{Cone}(\mathcal{S})$ o cone gerado pelo semigrupo \mathcal{S} . Como mencionado anteriormente, $K(\mathcal{S})$ é um cone grade fortemente convexo em \mathbb{R}^n e $\dim K(\mathcal{S}) = n$. Nos resultados a seguir, estudamos a estrutura do cone $K(\mathcal{S})$.

Lema 3.5. *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{S} como no Teorema 3.2. Os vetores em \mathcal{A} da forma e_1 e $e_1 + 2e_j$, para $2 \leq j \leq n$, geram os raios (faces 1-dimensionais) de $K(\mathcal{S})$. Em particular, $K(\mathcal{S})$ é um cone simplicial.*

Demonstração. Primeiramente, observe que os vetores em \mathcal{A} da forma $e_1 + e_i + e_j$, para $2 \leq i < j \leq n$, não geram raios de $K(\mathcal{S})$. De fato, temos as seguintes combinações lineares

$$e_1 + e_i + e_j = \frac{1}{2}(e_1 + 2e_i) + \frac{1}{2}(e_1 + 2e_j).$$

Similarmente, $e_1 + e_i$, para $2 \leq i \leq n$, não são raios de $K(\mathcal{S})$, uma vez que

$$e_1 + e_i = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}(e_1 + 2e_i).$$

Agora seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e considere as aplicações lineares $L_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $L_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $2 \leq j \leq n$, definidas como

$$L_1(x) = \sum_{2 \leq i \leq n} x_i \text{ e } L_j(x) = 2x_1 - x_j + \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ i \neq j}} x_i, \text{ para } 2 \leq j \leq n.$$

As seguintes propriedades são verificadas:

- $L_1(e_1) = 0$,
- $L_1(e_1 + e_j) > 0$ para $2 \leq j \leq n$,
- $L_1(e_1 + e_i + e_j) > 0$ para $2 \leq i < j \leq n$,
- $L_j(e_1 + 2e_j) = 0$,
- $L_j(e_1) > 0$,
- $L_j(e_1 + e_i) > 0$ para $2 \leq i \leq n$,
- $L_j(e_1 + e_i + e_j) > 0$ para $2 \leq i < j \leq n$.

Por essas propriedades, teremos que $H_1 = \{L_1 = 0\}$ e $H_j = \{L_j = 0\}$ são hiperplanos de suporte $K(\mathcal{S})$. Além disso, $K(\mathcal{S}) \cap H_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1$ e $K(\mathcal{S}) \cap H_j = \mathbb{R}_{\geq 0}(e_1 + 2e_j)$. Com isso, provamos o lema. \square

Uma vez que estão bem definidos os raios de $K(\mathcal{S})$, podemos nos perguntar sobre quantas são as faces k -dimensionais, com $0 \leq k \leq n$. Nesse sentido, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.6. *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{S} como no Teorema 3.2 e k um inteiro positivo tal que $0 \leq k \leq n$. Então $K(\mathcal{S})$ tem exatamente $\binom{n}{k}$ faces k -dimensionais.*

Demonstração. A única face n -dimensional do cone $K(\mathcal{S})$ é ele próprio e como $K(\mathcal{S})$ é fortemente convexo, $\{0\}$ é a face 0-dimensional. Pelo lema anterior, também temos que existem n faces 1-dimensionais. Primeiro, vamos construir $\binom{n}{k}$ faces k -dimensionais de $K(\mathcal{S})$ e depois concluir que não pode haver mais nenhuma outra. O Lema 3.5 nos garante que os raios de $K(\mathcal{S})$ são gerados pelo conjunto

$$R(K(\mathcal{S})) = \{e_1, e_1 + 2e_2, e_1 + 2e_3, \dots, e_1 + 2e_n\}.$$

Seja τ o cone gerado pelos seguintes vetores,

$$\{e_1, e_1 + 2e_{i_2}, \dots, e_1 + 2e_{i_k}\}, \quad (3.1)$$

onde $2 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n$. Esses vetores são linearmente independentes, então $\dim \tau = k$. Vamos mostrar que τ é uma face de $K(\mathcal{S})$. Para tanto, considere a aplicação linear $L_\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L_\tau(x) = \sum_{i \notin \{1, i_2, \dots, i_k\}} x_i$. Com alguns cálculos podemos mostrar que $L_\tau(x) = 0$ para $x \in \tau$ e $L_\tau(x) > 0$ para $x \in K(\mathcal{S}) \setminus \tau$. Assim, como no final da demonstração do Lema 3.5, τ é uma face $K(\mathcal{S})$. Observe que existem $\binom{n-1}{k-1}$ possíveis faces, correspondendo a escolhas de vetores como em (3.1).

Por outro lado, seja τ' o cone gerado pelos seguintes vetores,

$$\{e_1 + 2e_{j_1}, \dots, e_1 + 2e_{j_k}\}, \quad (3.2)$$

onde $2 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. Iremos proceder como no parágrafo anterior para mostrar que τ' é uma face k -dimensional de $K(\mathcal{S})$. Esses vetores são linearmente independentes, por isso $\dim \tau' = k$. Considere a aplicação linear $L_{\tau'} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $L_{\tau'}(x) = 2x_1 - \sum_{i \in \{j_1, \dots, j_k\}} x_i$. Como antes, $L_{\tau'}(x) = 0$ para $x \in \tau'$ e $L_{\tau'}(x) > 0$ para $x \in K(\mathcal{S}) \setminus \tau'$. Note que existem $\binom{n-1}{k}$ possíveis faces, correspondendo a escolhas de vetores como em (3.2).

Logo, contando todas as possibilidades de combinações (3.1) e (3.2) resulta em um total de

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

faces k -dimensionais. Finalmente, note que não existem outras faces k -dimensionais em $K(\mathcal{S})$. De fato, os parágrafos anteriores nos forneceram todas as faces k -dimensionais geradas por exatamente k raios. Seja τ uma face de $K(\mathcal{S})$ gerada por mais do que k raios. Visto que $R(K(\mathcal{S}))$ é um conjunto linearmente independente, segue que $\dim \tau > k$. \square

Recorde que, sendo toda face de um cone também um cone, é possível associar-lhe uma variedade tórica própria. O próximo resultado descreve a variedade tórica correspondente a cada face k -dimensional de $K(\mathcal{S})$.

Proposição 3.7. *Sejam $2 \leq k \leq n$ e Δ_k uma face k -dimensional de $K(\mathcal{S})$. Então a variedade tórica associada a essa face é $X_{\Delta_k} = S_k^2$.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.6, Δ_k é gerado por subconjuntos de $R(K(S))$ como em (3.1) ou (3.2). Primeiro vamos considerar subconjuntos da forma (3.1). Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\Delta_k^1 = \mathbb{R}_{\geq 0}(e_1, e_1 + 2e_2, \dots, e_1 + 2e_k).$$

Note que $\Delta_k^1 \subset \mathbb{R}^k \times \{(0, \dots, 0)\}$, onde $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Logo, podemos assumir que $\Delta_k^1 \subset \mathbb{R}^k$. Afirmamos que o semigrupo $\mathcal{S}^1 = \Delta_k^1 \cap \mathbb{Z}^k$ tem como geradores o conjunto \mathcal{A} do Teorema 3.2 para $n = k$. Pelo Lema 3.5, sabemos que $K(\mathcal{S}^1) = \Delta_k^1$ no caso em que $n = k$. Então pelo Corolário 3.3 concluímos nossa afirmação. Portanto, $X_{\Delta_k^1} = S_k^2$.

Consideremos agora uma face k -dimensional de $K(S)$ gerada por vetores da forma (3.2). Seja

$$\Delta_k^2 = \mathbb{R}_{\geq 0}(e_1 + 2e_2, \dots, e_1 + 2e_{k+1}).$$

Como antes, assuma que $\Delta_k^2 \subset \mathbb{Z}^{k+1}$ e seja

$$\mathcal{A}_k^2 = \{e_1 + 2e_2, \dots, e_1 + 2e_{k+1}\} \cup \{e_1 + e_i + e_j \mid 2 \leq i < j \leq k+1\} \subset \mathbb{Z}^{k+1}.$$

Tal qual a prova do Lema 3.5, teremos que $\mathcal{A}_k^2 \subset \Delta_k^2 \cap \mathbb{Z}^{k+1}$. Além disso, $\Delta_k^2 = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_k^2$. Afirmamos que $X_{\mathcal{S}^2} = S_k^2$, onde \mathcal{S}^2 é o semigrupo gerado por \mathcal{A}_k^2 . Observe que essa afirmação é suficiente para nosso propósito pois, nesse caso obteríamos que $\mathcal{S}^2 = \mathbb{N}\mathcal{A}_k^2$ é um semigrupo saturado, visto que S_k^2 é normal. Assim, $\mathbb{Z}^{k+1} \cap \Delta_k^2 = \mathbb{Z}^{k+1} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}\mathcal{A}_k^2 = \mathbb{N}\mathcal{A}_k^2$ e logo $X_{\Delta_k^2} = X_{\mathcal{S}^2} = S_k^2$.

Agora, vamos demonstrar a afirmação. Primeiro note que $|\mathcal{A}_k^2| = \binom{k}{2} + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Em particular, ambos S_k^2 e $X_{\mathcal{S}^2}$ estão mergulhados em $\mathbb{C}^{\frac{k(k+1)}{2}}$. Seja $J_2 \subset \mathbb{C}[x_{ij} : 1 \leq i, j \leq k]$ o ideal gerado pelos (2×2) -menores de uma matriz $(k \times k)$ simétrica L cujas entradas são as indeterminadas x_{ij} .

Denote os elementos de \mathcal{A}_k^2 da seguinte forma, $m_{ij} = e_1 + e_i + e_j$, para $2 \leq i \leq j \leq k$. Note que $m_{ji} = m_{ij}$. Com cálculos análogos aos da demonstração do Teorema 3.2, mostra-se que $J_2 \subset I_{\mathcal{S}^2}$. Portanto, $X_{\mathcal{S}^2} \subset S_k^2$. Por fim, visto que essas variedades são irredutíveis, para concluir que elas são iguais mostraremos que $\text{rank}(\mathcal{S}^2) = k$.

Para tanto, defina o conjunto $\beta = \{e_1 + e_2 + e_j : 2 \leq j \leq k+1\}$. Mostraremos que $\mathbb{Z}\beta = \mathbb{Z}\mathcal{A}_k^2$. Isto segue do fato que

$$e_1 + 2e_j = 2(e_1 + e_2 + e_j) - (e_1 + 2e_2), \quad \text{para } j > 2,$$

e

$$e_1 + e_i + e_j = (e_1 + e_2 + e_i) + (e_1 + e_2 + e_j) - (e_1 + 2e_2).$$

Como β é um subconjunto linearmente independente de \mathbb{Z}^{k+1} e $|\beta| = k$ concluímos que $\text{rank}(\mathcal{S}^2) = k$. \square

3.2 A característica de Euler da fibra de Milnor

Nesta seção, utilizamos a estrutura tórica de S_n^2 , construída na seção anterior, para estabelecer uma fórmula para calcular a característica de Euler da fibra de Milnor de algumas funções polinomiais de-

finidas em S_n^2 . Antes de partir diretamente para a fórmula, vamos fazer um breve resumo relacionado a funções em variedades tóricas e fixar algumas notações que serão usadas no decorrer desta e das próximas seções.

Recordemos que o isomorfismo do anel de coordenadas de X_S e a álgebra de semigrupo $\mathbb{C}[x^S]$ é dado por

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]/I_S & \longrightarrow & \mathbb{C}[x^S] \\ z_i & \longmapsto & x^{m_i} \end{array} .$$

Isso nos permite concluir que uma função polinomial $f : X_S \longrightarrow \mathbb{C}$ determina e é determinada como uma soma em $\mathbb{C}[S]$ da forma

$$f = \sum_{u \in S} a_u \cdot u, \text{ onde } a_u \in \mathbb{C}.$$

Para efeito de notação, iremos seguir as mesmas da Seção 1.5 do Capítulo 1. No caso de uma variedade tórica X_S , recorde que uma estratificação de Whitney pode ser dada por

$$\mathcal{V}_S = \{T_\lambda\}_{\lambda \prec K(S)},$$

onde $\lambda \prec K(S)$ denota a face do cone $K(S)$, gerado pelo semigrupo S , e T_λ é a órbita da ação tórica de $(\mathbb{C}^*)^n$ sobre X_S associada a λ (ver final da Subseção 1.3.2).

Sejam $S_n^2 \subset \mathbb{C}^N$ uma 2-variedade determinantal simétrica genérica e \mathcal{A} e S como no Teorema 3.2. Como já dito no Lema 3.5, os vetores de \mathcal{A} da forma e_1 e $e_1 + 2e_j$, para $2 \leq j \leq n$, geram os n raios de $K(S)$. A partir de agora, por simplicidade de notação, ordenaremos os elementos de \mathcal{A} da seguinte maneira:

$$\mathcal{A} = \{m_1, m_2, \dots, m_n, m_{n+1}, \dots, m_N\},$$

onde $m_1 = e_1$ e $m_j = e_1 + 2e_j$, para $2 \leq j \leq n$.

O resultado a seguir diz respeito ao local crítico de uma função polinomial sobre S_n^2 e aos monômios que a compõe.

Proposição 3.8. *Seja $f : S_n^2 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial. Se o local crítico de f relativa a estratificação \mathcal{V}_S é $\{0\}$, então f deve conter um monômio puro relativo a variável z_i , para todo $1 \leq i \leq n$. Em outras palavras, f contém termos da forma $\alpha_i z_i^{d_i}$, onde $\alpha_i \neq 0$ e $d_i \geq 1$, para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Considere os seguintes conjuntos

$$T_i = \{(0, \dots, 0, z_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^N \mid z_i \neq 0, 1 \leq i \leq n\}.$$

Como já estabelecido, m_1, \dots, m_n determinam os raios de $K(S)$. Da definição das equações de S_n^2 é possível deduzir que $T_i \subset S_N^2$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Além disso, de acordo com a ação tórica de $(\mathbb{C}^*)^n$ em S_n^2 , como em (1.2), segue que para cada $1 \leq i \leq n$, T_i é uma órbita 1-dimensional de S_n^2 . Em particular, esses conjuntos são estratos da estratificação de Whitney \mathcal{V}_S , firmado pelas órbitas de S_n^2 .

Portanto, se f não contiver monômios puros nas variáveis z_i , com $1 \leq i \leq n$, então os estratos 1-dimensionais T_i estarão contidos no local crítico $\Sigma_{\mathcal{V}} f$ (ver Definição 1.65), implicando que o local crítico de f não é apenas o $\{0\}$. □

3.2.1 Uma fórmula para a característica de Euler da fibra de Milnor em S_n^2

Seguindo as notações e definições estabelecidas na seção anterior, iremos calcular a característica de Euler da fibra de Milnor de uma função polinomial não-degenerada sobre S_n^2 .

Em [37], os autores fornecem uma fórmula para calcular a característica de Euler da fibra de Milnor em $0 \in X_S$ para uma função polinomial não-degenerada f (Definição 2.9). Para descrever esta fórmula se faz necessário algumas notações.

Seja $f \in \mathbb{C}[S]$. Para cada face k -dimensional Δ de $K(S)$ para a qual a interseção com o poliedro de Newton $\Gamma_+(f; z)$ (ver Definição 2.3) não seja vazia, denote por $\gamma_1^\Delta, \dots, \gamma_{v(\Delta)}^\Delta$ as faces compactas de $\Gamma_+(f) \cap \Delta$ de dimensão $k-1$. Sejam também $L(\Delta)$ o subespaço linear de \mathbb{R}^n gerado por Δ e Γ_i^Δ o fecho convexo de $\gamma_i^\Delta \sqcup \{0\}$ em $L(\Delta)$. Segue o resultado citado.

Teorema 3.9. [37, Corolário 3.5] *Seja $f = \sum_{u \in S} a_u \cdot u \in \mathbb{C}[S]$ uma função polinomial não-degenerada sobre X_S . Então, a característica de Euler da fibra de Milnor F_0 de f em $0 \in X_S$ é dada por*

$$\chi(F_0) = \sum_{\Gamma_+(f) \cap \Delta \neq \emptyset} (-1)^{\dim \Delta - 1} \sum_{i=1}^{v(\Delta)} \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_i^\Delta) \quad (3.3)$$

onde $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_i^\Delta)$ é o volume normalizado $(\dim \Delta)$ -dimensional de Γ_i^Δ com respeito à grade $\mathbb{Z}(S \cap \Delta)$.

Lembre que $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\cdot)$ é calculado da seguinte maneira. Sejam Δ uma face do cone $K(S)$ e $L(\Delta)$ o subespaço linear gerado por ela. Então, $\mathbb{Z}(S \cap \Delta) \subset L(\Delta)$ é uma \mathbb{Z} -grade cujo posto é igual a $\dim L(\Delta) = \dim \Delta$ e $\mathbb{R}(S \cap \Delta) = L(\Delta)$. Fixe uma \mathbb{Z} -base para $\mathbb{Z}(S \cap \Delta)$ e seja $\text{vol}(\cdot)$ a medida de Lebesgue em $(L(\Delta), \mathbb{Z}(S \cap \Delta))$, para o qual o volume $(\dim \Delta)$ -dimensional de um cubo padrão, nesta medida, é igual a 1. Dessa maneira, para um subconjunto $P \subset L(\Delta)$, teremos

$$\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(P) = (\dim \Delta)! \cdot \text{vol}(P). \quad (3.4)$$

Para maiores detalhes do cálculo desses volumes ver [37, 38].

Por outro lado, suponha que Δ seja uma face k -dimensional de $K(S)$. Se $P \subset L(\Delta) \simeq \mathbb{R}^k$ é um simplexo de vértices $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^k$, então

$$\{x_0 - x_i, x_1 - x_i, \dots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \dots, x_k - x_i\}$$

é uma base para \mathbb{R}^k . Neste caso, o volume de P $\text{vol}(P)$ é dado por

$$\text{vol}(P) = \frac{|\det(x_0 - x_i \cdots \widehat{x_i - x_i} \cdots x_k - x_i)|}{k!}, \quad (3.5)$$

onde $(x_0 - x_i \cdots \widehat{x_i - x_i} \cdots x_k - x_i)$ é a $(k \times k)$ -matriz cujas colunas são os vetores $x_j - x_i$ for $j \neq i$ e a notação $\widehat{\cdot}$ representa a exclusão do vetor coluna. Uma vez que o conjunto em questão forma uma base para \mathbb{R}^k , o volume de P independe da escolha do x_i . Para mais detalhes, ver [10, Chapter 7]. Agora de (3.4) e (3.5), obtemos

$$\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(P) = |\det(x_0 - x_i \cdots \widehat{x_i - x_i} \cdots x_k - x_i)|. \quad (3.6)$$

Teorema 3.10. *Sejam $S_n^2 \subset \mathbb{C}^N$ uma 2-variedade determinantal simétrica genérica e $f : S_n^2 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não-degenerada dada por*

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^{d_i} + h(z),$$

onde $\alpha_i \neq 0$ e $d_i \geq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $h(z)$ é uma função polinomial satisfazendo $\Gamma_+(h; z) \subset \Gamma_+(\sum_{i=1}^n z_i^{d_i}; z)$. Então a característica de Euler da fibra de Milnor F_0 de f em $0 \in S_n^2$ é dada por

$$\chi(F_0) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d_{i_1} \dots d_{i_k}.$$

Demonstração. Sejam \mathcal{A} e \mathcal{S} como no Teorema 3.2. Assim $S_n^2 = X_{\mathcal{S}}$ e $\Gamma_+(f; z)$ é o poliedro de Newton de f . Como f é uma função polinomial não-degenerada, pelo Teorema 3.9, teremos

$$\chi(F_0) = \sum_{\Gamma_+(f) \cap \Delta \neq \emptyset} (-1)^{\dim \Delta - 1} \sum_{i=1}^{v(\Delta)} \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_i^{\Delta}).$$

Ademais, como $\Gamma_+(f; z)$ intersecta todos os raios de $K(\mathcal{S})$, isso implica que $\Gamma_+(f; z) \cap \Delta \neq \emptyset$ para qualquer face Δ que não seja 0-dimensional de $K(\mathcal{S})$.

Por outro lado, observe que para qualquer face k -dimensional Δ de $K(\mathcal{S})$, com $1 \leq k \leq n$, existe uma única face compacta de $\Gamma_+(f; z) \cap \Delta$ com dimensão $k - 1$. De fato, pelo Lema 3.5, Δ é simplicial. Sejam $\{g_{i_1}, \dots, g_{i_k}\}$ os geradores dos raios de Δ . Então, a única face compacta de $\Gamma_+(f) \cap \Delta$ com dimensão $k - 1$ será o fecho convexo de $\{d_{i_1} g_{i_1}, \dots, d_{i_k} g_{i_k}\}$.

Para cada $1 \leq k \leq n$, seja $\{\Delta_i^{(k)} \mid 1 \leq i \leq \binom{n}{k}\}$ o conjunto das faces k -dimensionais de $K(\mathcal{S})$ (ver Corolário 3.6). Para cada $\Delta_i^{(k)}$, sejam $\gamma^{\Delta_i^{(k)}}$ a única face compacta de $\Gamma_+(f) \cap \Delta_i^{(k)}$ com dimensão $k - 1$ e $\Gamma^{\Delta_i^{(k)}}$ o fecho convexo de $\gamma^{\Delta_i^{(k)}} \sqcup \{0\}$. Então, a fórmula anterior pode ser reescrita como

$$\chi(F_0) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_i^{(k)}}). \quad (3.7)$$

Agora nos resta calcular os volumes $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_i^{(k)}})$.

Se $k = 1$, então $\Gamma^{\Delta_i^{(1)}}$ serão segmentos de reta unindo a origem à $d_1 e_1$ ou $d_i(e_1 + 2e_i)$, $2 \leq i \leq n$, em \mathbb{R}^n . Logo

$$\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_i^{(1)}}) = d_i.$$

Seja $2 \leq k \leq n$. Pela prova da Proposição 3.7, existem dois tipos de geradores para uma face k -dimensional de $K(\mathcal{S})$, a saber

$$\{e_1, e_1 + 2e_{i_2}, \dots, e_1 + 2e_{i_k}\}, \text{ para } 2 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n \quad (3.8)$$

e

$$\{e_1 + 2e_{j_2}, \dots, e_1 + 2e_{j_k}\}, \text{ para } 2 \leq j_2 < \dots < j_k \leq n. \quad (3.9)$$

Sejam $\Delta_{\tau}^{(k)}$ e $\Delta_{\tau'}^{(k)}$ faces geradas por vetores do tipo (3.8) e (3.9), respectivamente. Para a face $\Delta_{\tau}^{(k)}$ temos

$$\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_{\tau}^{(k)}}) = \text{Vol}_{\mathbb{Z}} \left\{ 0, \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_{i_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2d_{i_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d_{i_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2d_{i_k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para uma grade apropriada, usando (3.6), obtemos que $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_{\tau}^{(k)}}) = 2^{k-1} d_1 d_{i_2} \dots d_{i_k}$. Por outro lado, para as faces $\Delta_{\tau'}^{(k)}$ teremos que calcular o volumes

$$\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_{\tau'}^{(k)}}) = \text{Vol}_{\mathbb{Z}} \left\{ 0, \begin{pmatrix} d_{j_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2d_{j_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_{j_3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2d_{j_3} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d_{j_{k+1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2d_{j_{k+1}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Em contraste com o caso anterior, a grade gerada por $\Delta_{\tau'}^{(k)}$ não está contida em qualquer subespaço coordenado. Contudo, na prova da Proposição 3.7, mostramos que esta grade é isomorfa a \mathbb{Z}^k com base

$$\beta = \{e_1 + 2e_{j_2}, e_1 + e_{j_2} + e_{j_3}, \dots, e_1 + e_{j_2} + e_{j_k}\}.$$

Assim, expressando os geradores de $\Delta_{\tau'}^{(k)}$ em termos da base β , obtemos

- para $d_{j_2}e_1 + 2d_{j_2}e_{j_2}$

$$d_{j_2}e_1 + 2d_{j_2}e_{j_2} = d_{j_2}(e_1 + 2e_{j_2});$$

- para $d_{j_3}e_1 + 2d_{j_3}e_{j_3}$

$$\begin{aligned} d_{j_3}e_1 + 2d_{j_3}e_{j_3} &= d_{j_3}(e_1 + 2e_{j_3}) \\ &= d_{j_3}[-(e_1 + 2e_{j_2}) + 2(e_1 + e_{j_2} + e_{j_3})] \\ &= -d_{j_3}(e_1 + 2e_{j_2}) + 2d_{j_3}(e_1 + e_{j_2} + e_{j_3}); \end{aligned}$$

⋮

- para $d_{j_{k+1}}e_1 + 2d_{j_{k+1}}e_{j_{k+1}}$

$$\begin{aligned} d_{j_{k+1}}e_1 + 2d_{j_{k+1}}e_{j_{k+1}} &= d_{j_{k+1}}(e_1 + 2e_{j_{k+1}}) \\ &= d_{j_{k+1}}[-(e_1 + 2e_{j_2}) + 2(e_1 + e_{j_2} + e_{j_{k+1}})] \\ &= -d_{j_{k+1}}(e_1 + 2e_{j_2}) + 2d_{j_{k+1}}(e_1 + e_{j_2} + e_{j_{k+1}}). \end{aligned}$$

E assim, usando (3.6),

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_{\tau'}^{\Delta^{(k)}}) &= \text{Vol}_{\mathbb{Z}} \left\{ 0, \begin{pmatrix} d_{j_2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d_{j_3} \\ 2d_{j_3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} d_{j_{k+1}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 2d_{j_{k+1}} \end{pmatrix} \right\} \\ &= 2^{k-1} d_{j_2} \dots d_{j_{k+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo esses volumes em (3.7), concluímos que

$$\chi(F_0) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d_{i_1} \dots d_{i_k}.$$

□

Observação 3.11. No caso em que f é não-degenerada, a recíproca da Proposição 3.8 é válida. De fato, se f contém um monômio puro na variável z_i , para $i = 1, \dots, n$, então $\Gamma_+(f; z)$ intersecta todos os raios de $K(\mathcal{S})$, e a afirmação decorre da Proposição 2.21.

3.3 A obstrução local de Euler

Para uma superfície tórica normal afim X , González-Sprinberg [24] provou que X é suave na origem se, e somente se, a obstrução de Euler local de X em 0 for 1. Em [37], motivados por alguns cálculos nas dimensões 2, 3 e 4, Matsui e Takeuchi conjecturaram que a afirmação correspondente também deveria ser válida para variedades tóricas normais e projetivas de dimensões mais altas.

Nesta seção, construímos exemplos de variedades tóricas normais n -dimensionais com singularidade isolada cuja obstrução de Euler local é 1, para $n \geq 3$ ímpar. Isso dá lugar a contraexemplos para a conjectura de Matsui e Takeuchi para dimensões maiores. Além disso, também relacionamos a obstrução de Euler local de uma função definida em $S_n^2 \subset \mathbb{C}^N$ ao número de Milnor de uma função definida em \mathbb{C}^n , lembrando que $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

3.3.1 Contra exemplo para a conjectura de Matsui e Takeuchi

Nosso primeiro objetivo é calcular a obstrução local de Euler de S_n^2 em 0 usando o Teorema 1.64. Para tanto, se faz necessário estudar a característica de Euler da fibra de Milnor de formas lineares genéricas em S_n^2 . De forma mais geral, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.12. *Sejam $S_n^2 \subset \mathbb{C}^N$ uma 2-variedade determinantal simétrica genérica e $f : S_n^2 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não-degenerada dada por*

$$f(z) = \sum_{i=1}^n z_i + h(z),$$

onde $h(z)$ é uma função polinomial satisfazendo $\Gamma_+(h; z) \subset \Gamma_+(\sum_{i=1}^n z_i; z)$. Então, a característica de Euler da fibra de Milnor F_0 de f em $0 \in S_n^2$ é igual a 1 se n é um número ímpar e 0 se n é um número par.

Demonstração. Seja $n \geq 2$ um número ímpar. Pelo Teorema 3.10,

$$\chi(F_0) = \binom{n}{1} - \binom{n}{2}2 + \cdots - \binom{n}{n-1}2^{n-2} + \binom{n}{n}2^{n-1}. \quad (3.10)$$

Considere o polinômio de Bernstein $B_i^n(x) = \binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$, para $1 \leq i \leq n$. Esse polinômio satisfaz a seguinte propriedade

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em particular,

$$1 = \sum_{i=0}^n B_i^n(2) = -\binom{n}{0} + \binom{n}{1}2 - \binom{n}{2}2^2 + \cdots - \binom{n}{n-1}2^{n-1} + \binom{n}{n}2^n.$$

Como $\binom{n}{0} = 1$, temos

$$2 - \binom{n}{1}2 = -\binom{n}{2}2^2 + \cdots - \binom{n}{n-1}2^{n-1} + \binom{n}{n}2^n.$$

Então,

$$1 - \binom{n}{1} = -\binom{n}{2}2 + \cdots - \binom{n}{n-1}2^{n-2} + \binom{n}{n}2^{n-1}.$$

Substituindo em (3.10), segue que $\chi(F_0) = 1$.

De maneira similar, seja $n \geq 2$ um número par. Então,

$$\chi(F_0) = \binom{n}{1} - \binom{n}{2}2 + \cdots + \binom{n}{n-1}2^{n-2} - \binom{n}{n}2^{n-1}. \quad (3.11)$$

Cálculos análogos ao caso ímpar nos dão que

$$-\binom{n}{2}2 + \cdots + \binom{n}{n-1}2^{n-2} - \binom{n}{n}2^{n-1} = -\binom{n}{1}.$$

Substituindo em (3.11), segue que $\chi(F_0) = 0$. □

Lembre-se de que, pela Proposição 1.48, o local singular de $S_n^2 \subset \mathbb{C}^N$ é a variedade determinantal simétrica genérica S_n^1 , que corresponde apenas à origem de \mathbb{C}^N . Então, uma estratificação de Whitney de S_n^2 é o conjunto $\{S_n^2 \setminus \{0\}, \{0\}\}$. Além disso, dada uma forma linear genérica $l : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ em relação a S_n^2 , podemos assumir que tenha a forma

$$l(z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i z_i$$

onde $\alpha_i \neq 0$, para todo $i = 1, \dots, N$. Além disso, sem perda de generalidade, podemos assumir que a restrição de l a S_n^2 é não-degenerada. Nesse contexto, o próximo resultado decorre do Teorema 1.64 e da proposição anterior.

Corolário 3.13. *Seja $S_n^2 \subset \mathbb{C}^N$ uma 2-variedade determinantal simétrica genérica. Então, $\text{Eu}_{S_n^2}(0)$ é igual a 1 se n é um número ímpar e 0 se n é um número par.*

Observação 3.14. É importante comentarmos que a obstrução local de Euler de variedades determinantis simétricas genéricas também foi calculada em [34]. Ademais, nesse mesmo artigo, encontram-se fórmulas para a obstrução local de Euler de variedades determinantis genéricas, simétricas e antissimétricas. A abordagem deles consiste em estudar a estrutura do complexo invariante de De Rham e as fórmulas de caráter para \mathcal{D} -módulos simples equivariantes, conectando esses cálculos à fórmula do índice local de Kashiwara e a análise de ciclos característicos de \mathcal{D} -módulos simples.

Entretanto, ressaltamos que nosso método consistiu em usar a estrutura tórica de S_n^2 juntamente com a fórmula combinatória fornecida por Matsui e Takeuchi.

Observação 3.15. Para $m \geq 1$, a variedade produto $S_3^2 \times \mathbb{C}^m$ satisfaz (ver Observação 1.63):

$$\text{Eu}_{S_3^2 \times \mathbb{C}^m}(0) = \text{Eu}_{S_3^2}(0) \times \text{Eu}_{\mathbb{C}^m}(0).$$

Uma vez que \mathbb{C}^m é uma variedade suave, $\text{Eu}_{\mathbb{C}^m}(0) = 1$. Assim, $S_3^2 \times \mathbb{C}^m$ é uma variedade tórica normal afim $(m+3)$ -dimensional com singularidade na origem, cujo obstrução de Euler é 1.

Com relação à obstrução de Euler de uma função polinomial sobre S_n^2 , apresentamos uma consequência direta dos Teoremas 1.67, 3.10 e do Corolário 3.13.

Corolário 3.16. *Seja $f : S_n^2 \rightarrow \mathbb{C}$ como no Teorema 3.10. Se f tem um ponto crítico isolado na origem com respeito à estratificação \mathcal{V}_S , então a obstrução local de Euler de f é*

$$Eu_{f, S_n^2}(0) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d_{i_1} \dots d_{i_k}$$

se n é um número ímpar, e

$$Eu_{f, S_n^2}(0) = - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d_{i_1} \dots d_{i_k}$$

se n é um número par.

3.3.2 Relação com o número de Milnor

Como aplicação final das fórmulas que estabelecemos nas seções anteriores, relacionamos a obstrução local de Euler de uma função com pontos críticos isolados definidos em $S_n^2 \subset \mathbb{C}^N$ ao número de Milnor de uma função definida em \mathbb{C}^n .

Recordemos que se $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma função analítica com ponto crítico isolado na origem, então

$$Eu_{h, \mathbb{C}^n}(0) = (-1)^n \mu(h),$$

onde $\mu(h)$ denota o número de Milnor de h . Este fato é uma consequência direta do Teorema 1.67. No entanto, a igualdade anterior não é necessariamente verdadeira para germes arbitrários de espaços analíticos complexos.

O próximo resultado mostra uma relação entre a obstrução local de Euler de uma função $f : S_n^2 \rightarrow \mathbb{C}$, obtida no Teorema 3.10, e o número de Milnor de uma função $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(x) = x_1^{d_1} + \sum_{i=2}^n x_i^{2d_i}, \quad \text{where } d_1 \geq 2.$$

Proposição 3.17. *Com as notações anteriores,*

$$Eu_{f, S_n^2}(0) = -\mu(g) + \sum_{i=2}^n d_i + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{2 \leq j_2 < \dots < j_k \leq n} d_{j_2} \dots d_{j_k},$$

se n é um número ímpar, e

$$Eu_{f, S_n^2}(0) = \mu(g) - 1 + \sum_{i=2}^n d_i + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{2 \leq j_2 < \dots < j_k \leq n} d_{j_2} \dots d_{j_k},$$

se n é um número par.

Demonstração. Começaremos calculando a característica de Euler da fibra de Milnor de g em $0 \in \mathbb{C}^n$. Considerando que \mathbb{C}^n é uma variedade tórica definida pelo semigrupo \mathbb{N}^n , com cone associado como sendo $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, o cálculo da característica de Euler é feito da mesma maneira que na prova do Teorema 3.10. Para não repetir toda a demonstração, faremos apenas os passos chaves nesse contexto.

Primeiro note que $\Delta \cap \Gamma_+(g;x) \neq \emptyset$ para toda face que não seja 0-dimensional Δ do cone $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Dessa forma,

$$\chi(G_0) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_i^{(k)}}). \quad (3.12)$$

Vamos calcular $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_i^{(k)}})$ para cada $1 \leq k \leq n$. A princípio, como $\Gamma^{\Delta_i^{(1)}}$ são segmentos de retas ligando a origem do \mathbb{R}^n a $d_1 e_1$ ou $2d_i e_i$, $2 \leq i \leq n$, então

$$\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_1^{(1)}}) = d_1 \text{ e } \text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_i^{(1)}}) = 2d_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Seja $2 \leq k \leq n$. Uma face k -dimensional de $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ pode ser gerada por um conjunto da forma

$$\{e_1, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}, \text{ para } 2 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n \quad (3.13)$$

ou

$$\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}, \text{ para } 2 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n. \quad (3.14)$$

Sejam $\Delta_{\tau}^{(k)}$ e $\Delta_{\tau'}^{(k)}$ faces geradas por vetores da forma (3.13) e (3.14), respectivamente. Então, $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_{\tau}^{(k)}}) = 2^{k-1} d_1 d_{i_2} \dots d_{i_k}$ e $\text{Vol}_{\mathbb{Z}}(\Gamma^{\Delta_{\tau'}^{(k)}}) = 2^k d_{j_1} \dots d_{j_k} = 2 \cdot 2^{k-1} d_{j_1} \dots d_{j_k}$.

Substituindo esses volumes em (3.12), teremos

$$\begin{aligned} \chi(G_0) &= d_1 + 2 \cdot \sum_{i=2}^n d_i + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_k \leq n} d_1 d_{i_2} \dots d_{i_k} \\ &\quad + 2 \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{2 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} d_{j_1} \dots d_{j_k}. \end{aligned}$$

Assim, o Teorema 3.10 implica que

$$\chi(G_0) = \chi(F_0) + \sum_{i=2}^n d_i + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{2 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} d_{j_1} \dots d_{j_k}.$$

Por outro lado, é conhecido que

$$\chi(G_0) = 1 + (-1)^{n-1} \mu(g).$$

Portanto,

$$\chi(F_0) = 1 + (-1)^{n-1} \mu(g) - \left(\sum_{i=2}^n d_i + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} 2^{k-1} \sum_{2 \leq j_2 < \dots < j_k \leq n} d_{j_2} \dots d_{j_k} \right).$$

Agora, como S_n^2 tem singularidade isolada na origem, aplicando o Teorema 1.67, obtemos

$$Eu_{f, S_n^2}(0) = Eu_{S_n^2}(0) - \chi(F_0).$$

Dessa forma o resultado segue do Corolário 3.13. □

Bibliografia

- [1] P. Aluffi. Projective duality and a Chern-Mather involution. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(3):1803–1822, 2018.
- [2] P. Beelen, T. Johnsen, and P. Singh. Linear codes associated to symmetric determinantal varieties: even rank case. *Finite Fields Appl.*, 91:Paper No. 102240, 31, 2023.
- [3] J.-P. Brasselet. Local euler obstruction, old and new. In *XI Brazilian Topology Meeting (Rio Claro, 1998)*, pages 140–147. World Scientific, 1998.
- [4] J.-P. Brasselet. *Introduction to toric varieties*. Citeseer, 2004.
- [5] J.-P. Brasselet and N. Grulha. *Local Euler obstruction, old and new, II*, page 23–45. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2010.
- [6] J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran, and J. Seade. Euler obstruction and defects of functions on singular varieties. *Journal of the London Mathematical Society*, 70(1):59–76, 2004.
- [7] J. P. Brasselet and M. H. Schwartz. Sur les classes de Chern d’un ensemble analytique complexe. In *Caractéristique d’Euler-Poincaré - Séminaire E.N.S. 1978-1979*, number 82-83 in Astérisque, pages 93–147. Société mathématique de France, 1981.
- [8] J.-P. Brasselet, J. Seade, and L. D. Trang. Euler obstruction and indices of vector fields. *Topology*, 39(6):1193–1208, 2000.
- [9] J. Briançon. *Le théorème de Kouchnirenko*. unpublished lecture note.
- [10] D. A. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Using algebraic geometry*, volume 185. Springer Science & Business Media, 2005.
- [11] D. A. Cox, J. B. Little, and H. K. Schenck. *Toric varieties*, volume 124. American Mathematical Society, 2024.
- [12] T. M. Dalbelo, D. Duarte, and M. A. S. Ruas. Nash blowups of 2-generic determinantal varieties in positive characteristic. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 21:1557–1575, 2025.

- [13] T. M. Dalbelo and L. Hartmann. Brasselet number and Newton polygons. *Manuscripta Math.*, 162(1-2):241–269, 2020.
- [14] J. Damon and T. Gaffney. Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations. *Invent. Math.*, 72(3):335–358, 1983.
- [15] N. Dutertre and N. G. Grulha. Lê-Greuel type formula for the Euler obstruction and applications. *Adv. Math.*, 251:127–146, 2014.
- [16] C. Eyrál and M. Oka. Non-compact Newton boundary and Whitney equisingularity for non-isolated singularities. *Advances in Mathematics*, 316:94–113, 2017.
- [17] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*. Princeton university press, 1993.
- [18] T. Gaffney. Polar multiplicities and equisingularity of map germs. *Topology*, 32(1):185–223, 1993.
- [19] T. Gaffney. Multiplicities and equisingularity of ICIS germs. *Invent. Math.*, 123(2):209–220, 1996.
- [20] T. Gaffney, N. G. Grulha, and M. A. S. Ruas. The local Euler obstruction and topology of the stabilization of associated determinantal varieties. *Math. Z.*, 291(3-4):905–930, 2019.
- [21] T. Gaffney and M. Molino. Symmetric determinantal singularities i: The multiplicity of the polar curve. *arXiv preprint arXiv:2003.12543*, 2020.
- [22] S. A. Gaube and B. Schober. Desingularization of generic symmetric and generic skew-symmetric determinantal singularities. *Manuscripta Math.*, 174(3-4):1113–1131, 2024.
- [23] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. Du Plessis, and E. J. N. Looijenga. *Topological stability of smooth mappings*, volume 552. Springer, 2006.
- [24] G. González-Sprinberg. Cycle maximal et invariant d’Euler local des singularités isolées de surfaces. *Topology*, 21(4):401–408, 1982.
- [25] H. Grauert and R. Remmert. *Theory of Stein spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] N. G. Grulha. The Euler obstruction and Bruce-Roberts’ Milnor number. *Q. J. Math.*, 60(3):291–302, 2009.
- [27] R. C. Gunning and H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables*, volume 368. American Mathematical Society, 2022.
- [28] J. Harris and Tu L. W. On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties. *Topology*, 23(1):71–84, 1984.

- [29] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [30] M. Helmer and B. Sturmfels. Nearest points on toric varieties. *Math. Scand.*, 122(2):213–238, 2018.
- [31] B. V. Kotzev. Determinantal ideals of linear type of a generic symmetric matrix. *J. Algebra*, 139(2):484–504, 1991.
- [32] A. G. Kouchnirenko. Polyedres de Newton et nombres de Milnor. *Inventiones mathematicae*, 32(1):1–31, 1976.
- [33] A. G. Kouchnirenko. Polyedres de Newton et nombres de Milnor. *Inventiones mathematicae*, 32(1):1–31, 1976.
- [34] A. C. Lőrincz and C. Raicu. Local Euler obstructions for determinantal varieties. *Topology Appl.*, 313:Paper No. 107984, 21, 2022.
- [35] R. D. MacPherson. Chern classes for singular algebraic varieties. *Annals of Mathematics*, 100(2):423–432, 1974.
- [36] D. B. Massey. Hypercohomology of Milnor fibres. *Topology*, 35(4):969–1003, 1996.
- [37] Y. Matsui and K. Takeuchi. A geometric degree formula for A -discriminants and Euler obstructions of toric varieties. *Adv. Math.*, 226(2):2040–2064, 2011.
- [38] Y. Matsui and K. Takeuchi. Milnor fibers over singular toric varieties and nearby cycle sheaves. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 63(1):113–136, 2011.
- [39] L. Maxim and M. Tibăr. Euclidean distance degree and limit points in a Morsification. *Adv. Appl. Math.*, 152:102597, 2024.
- [40] J. Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, volume 61. Princeton University Press, 2016.
- [41] B. U. Nødland. Local Euler obstructions of toric varieties. *J. Pure Appl. Algebra*, 222(3):508–533, 2018.
- [42] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface, and J. N. Tomazella. The Bruce-Roberts number of a function on a weighted homogeneous hypersurface. *Q. J. Math.*, 64(1):269–280, 2013.
- [43] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréface-Okamoto, and J. N. Tomazella. Equisingularity of families of isolated determinantal singularities. *Math. Z.*, 289(3-4):1409–1425, 2018.
- [44] M. Oka. On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 31(3):435–450, 1979.

-
- [45] M. Oka. Canonical stratification of non-degenerate complete intersection varieties. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 42(3):397–422, 1990.
- [46] M. Oka. Principal zeta-function of non-degenerate complete intersection singularity. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 37:11–32, 1990.
- [47] M. Oka. *Non-degenerate complete intersection singularity*. Hermann Paris, 1997.
- [48] M. Oka. On Milnor fibrations of mixed functions, af-condition and boundary stability. *Kodai Mathematical Journal*, 38(3):581–603, 2015.
- [49] J. Seade, M. Tibăr, and A. Verjovsky. Milnor numbers and Euler obstruction. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 36(2):275–283, 2005.
- [50] B. Sturmfels. *Grobner bases and convex polytopes*, volume 8. American Mathematical Soc., 1996.
- [51] B. Teissier. Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d’hypersurfaces. *Invent. Math.*, 40(3):267–292, 1977.
- [52] A. N. Varchenko. Zeta-function of monodromy and Newton’s diagram. *Invent. Math.*, 37(3):253–262, 1976.
- [53] H. Whitney. Tangents to an analytic variety. In *Hassler Whitney Collected Papers*, pages 537–590. Springer, 1992.