

Universidade Federal de São Carlos



Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Explorando hexágonos regulares: Uma abordagem prática com o GeoGebra na resolução de problemas

Aluno: Sabrina Santos Neri da Silva

Curso: Licenciatura em Matemática

RA: 770655

Orientador: Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

Curso: Matemática

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso II

São Carlos - SP

2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

SABRINA SANTOS NERI DA SILVA

Explorando hexágonos regulares: Uma abordagem prática com o GeoGebra na resolução de problemas

Monografia apresentada à disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso II. Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra

São Carlos - SP

2023

SABRINA SANTOS NERI DA SILVA

EXPLORANDO HEXÁGONOS REGULARES: UMA ABORDAGEM PRÁTICA COM
O GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Monografia apresentada à disciplina:
Trabalho de Conclusão de Curso II.
Curso de Licenciatura em Matemática
da Universidade Federal de São Carlos.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

São Carlos-SP

2023

Dedico aos meus pais, Lenir e Luciano,
ao meu marido, Kaio Vinícius e ao meu
professor do ensino médio que me inspirou
para essa trajetória, Alberto Pinho.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar minha gratidão ao meu orientador, Dr. Guillermo Antonio Lobos Villagra, pela orientação, paciência e conhecimento inestimável compartilhado ao longo deste percurso. Sua sabedoria e apoio foram fundamentais para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos, Abner, Beatriz, Douglas, Iara, Relissa e Keren, agradeço pelo apoio incondicional, pelas palavras de incentivo e pelas inúmeras vezes em que vocês estiveram ao meu lado, tanto nos momentos de desafio quanto nos de celebração. Vocês tornaram esta jornada mais alegre e significativa.

À minha família, Lenir, Luciano e Kaio, meu mais sincero agradecimento pelo amor e apoio. O encorajamento e a compreensão de vocês foram a força motriz por trás de cada página escrita.

Resumo

O presente trabalho irá explorar o uso do software GeoGebra, introduzindo e investigando o conceito da geometria dinâmica a partir de uma metodologia passo a passo, a qual proporciona a construção e manipulação de figuras geométricas, visando demonstrar como um ensino dinâmico de matemática pode produzir excelentes resultados. São explorados dois problemas sobre hexágonos regulares retirados da página do facebook de Ernesto Americo Hidalgo, professor licenciado da Universidade de El Salvador.

Palavras-chave: GeoGebra. Geometria. Resolução de Problemas. Passo a passo.

Abstract

This study will explore the use of the GeoGebra software, introducing and investigating the concept of dynamic geometry through a step-by-step methodology, which allows for the construction and manipulation of geometric figures, aiming to demonstrate how dynamic mathematics teaching can yield excellent educational outcomes. Two problems concerning regular hexagons, taken from the Facebook page of Ernesto Americo Hidalgo, a professor at the University of El Salvador, are examined.

Keywords: GeoGebra. Geometry. Problem solving. Step by step.

Lista de Figuras

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Mediatriz - Passo 1 | 20 |
| 2 | Mediatriz - Passo 2 | 20 |
| 3 | Mediatriz - Passo 3 | 21 |
| 4 | Mediatriz - Passo 4 | 21 |
| 5 | Ponto Médio - Passo 1 | 22 |
| 6 | Ponto Médio - Passo 2 | 23 |
| 7 | Ponto Médio - Passo 3 | 23 |
| 8 | Ponto Médio - Passo 4 | 24 |
| 9 | Ponto Médio - Passo 5 | 24 |
| 10 | Ponto Médio - Passo 6 | 25 |
| 11 | Reta paralela - Passo 1 | 26 |
| 12 | Reta paralela - Passo 2 | 26 |
| 13 | Reta paralela - Passo 3 | 27 |
| 14 | Reta paralela - Passo 5 | 27 |
| 15 | Reta paralela - Passo 6 | 28 |
| 16 | Reta paralela - Passo 8 | 29 |
| 17 | Reta paralela - Passo 10 | 30 |
| 18 | Reta paralela - Passo 11 | 30 |
| 19 | Hexágono regular - Passo 1 | 31 |
| 20 | Hexágono regular - Passo 2 | 31 |
| 21 | Hexágono regular - Passo 3 | 32 |
| 22 | Hexágono regular - Passo 4 | 32 |
| 23 | Hexágono regular - Passo 6 | 33 |
| 24 | Hexágono regular - Passo 8 | 33 |
| 25 | Hexágono regular - Passo 9 | 34 |
| 26 | Hexágono regular - Triângulos equiláteros | 34 |
| 27 | Triângulo equilátero - Passo 1 | 35 |
| 28 | Triângulo equilátero - Passo 2 | 35 |
| 29 | Triângulo equilátero - Passo 4 | 36 |
| 30 | Problema 1 - Enunciado | 38 |
| 31 | Problema 1 - Passo 2 | 39 |
| 32 | Problema 1 - Passo 3 | 39 |

| | | |
|----|---|----|
| 33 | Problema 1 - Passo 4 | 40 |
| 34 | Problema 1 - Passo 5 | 40 |
| 35 | Problema 1 - Passo 6 | 41 |
| 36 | Medida do lado do triângulo FMC | 42 |
| 37 | Problema 1 - Passo 7 | 43 |
| 38 | Problema 1 - Resolução | 44 |
| 39 | Problema 2 - Enunciado | 45 |
| 40 | Problema 2 - Passo 2 | 46 |
| 41 | Problema 2 - Passo 3 | 46 |
| 42 | Problema 2 - Passo 5 | 47 |
| 43 | Problema 2 - Passo 6 | 48 |
| 44 | Problema 2 - Passo 7 | 48 |
| 45 | Triângulos semelhantes pelo caso AA | 49 |
| 46 | Quadrilátero dividido em 3 triângulos | 50 |
| 47 | Problema 2 - Passo 8 | 51 |
| 48 | Construções feitas pelos alunos. | 59 |
| 49 | Auxiliando os alunos. | 59 |
| 50 | Exemplos de construções feitas pelos alunos da turma do 3° ano. | 60 |
| 51 | Exemplos de construções feitas pelos alunos da turma do 3° ano. | 60 |
| 52 | Exemplos de construções feitas pelos alunos da turma do 3° ano. | 60 |
| 53 | Exemplos de construções feitas pelos alunos da turma do 3° ano. | 61 |
| 54 | Registros da atividade. | 61 |
| 55 | Registros da atividade. | 62 |
| 56 | Resolução do problema. | 62 |
| 57 | Alunos resolvendo o problema. | 62 |
| 58 | Resoluções do problema feitas pelos alunos. | 63 |
| 59 | Resoluções do problema feitas pelos alunos. | 63 |
| 60 | Resoluções do problema feitas pelos alunos. | 64 |

Lista de Tabelas

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Habilidades BNCC | 17 |
| 2 | Plano de aula planejado pela autora. | 55 |
| 3 | Roteiro de aula planejado pela autora. | 56 |
| 4 | Plano de aula feito pela autora. | 57 |
| 5 | Roteiro de aula feito pela autora. | 58 |
| 6 | Pergunta 1 - Questionário avaliativo | 65 |
| 7 | Pergunta 2 - Questionário avaliativo | 65 |
| 8 | Pergunta 3 - Questionário avaliativo | 65 |
| 9 | Pergunta 4 - Questionário avaliativo | 65 |
| 10 | Pergunta 5 - Questionário avaliativo | 66 |
| 11 | Pergunta 6 - Questionário avaliativo | 66 |

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 12 |
| 1.1 | Apresentação do tema | 12 |
| 1.2 | Objetivos | 13 |
| 1.2.1 | Objetivo geral | 13 |
| 1.2.2 | Objetivos específicos | 13 |
| 2 | Referencial Teórico | 14 |
| 2.1 | A geometria dinâmica em conjunto com a metodologia de resolução de problemas | 14 |
| 2.2 | A resolução de problemas e a geometria dinâmica sob o olhar da BNCC . . | 15 |
| 2.2.1 | Habilidades específicas | 16 |
| 3 | Construções elementares com Metodologia passo a passo | 19 |
| 3.1 | Construção da mediatriz de um segmento dado AB com régua e compasso | 20 |
| 3.2 | Construção do ponto médio de um segmento dado AB com régua e compasso | 22 |
| 3.3 | Construção de uma reta paralela a uma outra reta r dada com régua e compasso | 25 |
| 3.4 | Construção de um hexágono regular com régua e compasso | 31 |
| 3.5 | Construção de um triângulo equilátero com régua e compasso | 35 |
| 4 | Análise e construção passo a passo dos problemas sobre os hexágonos regulares | 37 |
| 4.1 | Problema 1 | 38 |
| 4.1.1 | Resolução | 38 |
| 4.2 | Problema 2 | 45 |
| 4.2.1 | Resolução | 45 |
| 5 | Aplicação em sala de aula | 54 |
| 5.1 | Análise dos resultados | 56 |
| 5.2 | Avaliação | 64 |
| 6 | Considerações finais | 67 |

1 Introdução

1.1 Apresentação do tema

A geometria, uma área da matemática, é essencial para entender as propriedades e relações espaciais, desempenhando um papel importante na forma como compreendemos o mundo ao nosso redor. Dada a sua natureza, os métodos de ensino de geometria se beneficiam significativamente do suporte visual. É aqui que a integração de softwares educacionais se torna valiosa. Estas ferramentas não apenas melhoram a qualidade do ensino, mas também trazem um aspecto mais dinâmico e interativo ao ensino da matemática, facilitando o aprendizado dos alunos e tornando a experiência educacional mais atraente.

O progresso tecnológico vem remodelando o panorama da educação, introduzindo softwares inovadores que complementam a maneira como a matemática é ensinada. Essas ferramentas ampliam a capacidade de visualizar relações geométricas complexas e oferecem oportunidades para explorar construções. Além disso, permitem a interação direta com as figuras geométricas, dando aos alunos o poder de ajustar posições e dimensões, o que facilita uma compreensão mais profunda e menos rígida da geometria, para além das formas convencionais.

“Trabalhar em um cenário de investigação requer, do professor e de seus alunos, um senso investigativo, ou seja, eles devem procurar conhecer o que não sabem. Nesses cenários, os alunos são convidados a trabalhar como matemáticos profissionais. Isso não significa que alunos estarão construindo novos conhecimentos ou teoremas, mas terão possibilidade de explorar e formular suas próprias conjecturas, lançar seus próprios contraexemplos, apresentar resultados de sua investigação aos colegas e professores, e argumentar sobre fatos matemáticos que, na maioria das vezes, são vistos como irrefutáveis ou inquestionáveis. Dessa forma, os alunos são convidados a aprender matemática fazendo matemática.” (Ciênc. Educ., Bauru, v. 19, n. 2, p. 279-292, 2013)

O presente trabalho irá explorar o uso do software GeoGebra, introduzindo e investigando o conceito da geometria dinâmica, a qual proporciona a criação e modificação de figuras geométricas. Como base para exploração da geometria dinâmica, serão explorados dois problemas sobre hexágonos regulares retirados da página do facebook de Ernesto Americo Hidalgo, professor licenciando da Universidade de El Salvador.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

- Como meio de aperfeiçoar a formação em licenciatura em matemática, o objetivo da pesquisa é abordar a resolução de problemas em conjunto com o software de geometria dinâmica GeoGebra com o intuito de obter uma melhor compreensão e aproveitamento dos conceitos estudados.

1.2.2 Objetivos específicos

- Desenvolver o raciocínio lógico e a elaboração de estratégias para a resolução de problemas não triviais;
- Tornar o estudo de geometria mais concreto em construções feitas com o uso do software GeoGebra;
- Elaborar uma sequência de atividades com instruções passo a passo para construções elementares de geometria como um manual para familiarização do leitor com a plataforma GeoGebra.

2 Referencial Teórico

2.1 A geometria dinâmica em conjunto com a metodologia de resolução de problemas

Há tempos que as tecnologias têm progressivamente ocupado um lugar de destaque nas salas de aula, consolidando-se como ferramentas essenciais para a aprendizagem dos alunos. Direcionando o olhar para a esfera da geometria, a utilização dessas ferramentas tecnológicas oferece aos estudantes uma abordagem abrangente das relações geométricas, possibilitando a exploração interativa de construções, se opondo ao estudo da geometria apenas com nomenclaturas e axiomas (GRAVINA, 1996).

Com a introdução da tecnologia na educação, surgiu o conceito de Geometria Dinâmica, a qual permite a validação de conjecturas e teoremas por meio de experimentação prática, desenvolvendo a interatividade e a aplicação direta do conhecimento adquirido pelo próprio aluno. A integração eficaz da tecnologia no ensino da geometria facilita a compreensão conceitual, uma vez que esta está ligada diretamente ao aspecto visual. (FAINGUELERNT,1999)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1998 destacam que a resolução de problemas matemáticos enriquece o processo de ensino-aprendizagem, sugerindo que essa abordagem traz benefícios para o desenvolvimento do raciocínio e da compreensão dos alunos. Na presente pesquisa serão feitas atividades práticas de investigação dos conceitos geométricos que estão inseridos na resolução dos problemas escolhidos para estudo.

Um problema pode ser compreendido como uma situação que desafia nossa compreensão atual e nos pede uma solução que não é imediatamente evidente. Na visão de Krulik e Rudnik (1980), um problema é uma situação, quantitativa ou não, que exige uma resposta para a qual não se conhecem meios ou caminhos evidentes para alcançá-la. Isso ressoa profundamente no contexto educacional, onde os alunos frequentemente se deparam com problemas que vão além da mera aplicação de fórmulas ou memorização de fatos, desafiando-os a empregar o pensamento crítico e a criatividade para encontrar soluções.

A resolução de problemas, conforme assinalado por Polya, é um processo de

descobrimto, um percurso de navegação através de caminhos não previamente conhecidos (POLYA, 1995). Isso sugere que resolver problemas é mais do que chegar a uma resposta correta; é um meio de desenvolver habilidades cognitivas. Ao enfrentar um problema, os alunos são estimulados a investigar, a questionar suas suposições, a explorar diferentes estratégias e a refletir sobre o que funcionou ou não. Essa abordagem não só consolida o conhecimento existente, mas também propicia o desenvolvimento de competências. Ainda, reconhecer que cada aluno pode ver um problema de maneira diferente permite aos professores personalizar o ensino e apoiar os alunos de acordo com suas necessidades individuais. Ao incorporar a resolução de problemas como uma ferramenta de aprendizagem, os educadores não apenas equipam os alunos com o conhecimento necessário, mas também os capacitam com a confiança para enfrentar e superar os desafios futuros de maneira autônoma e inventiva.

Ademais, George Polya propôs um método de resolução de problemas dividido em quatro etapas: compreensão do problema, elaboração de uma estratégia, implementação da estratégia e reflexão sobre os resultados. Na fase de compreensão, o objetivo é entender completamente o problema, identificando os dados fornecidos e o que se deseja encontrar. Em seguida, na fase de elaboração do plano, busca-se criar uma estratégia ou plano de ação para resolver o problema. Na implementação, o plano é executado, e na fase final de reflexão, avaliam-se os resultados e verifica-se se a solução é razoável e completa. (PONTES, 2019)

Neste trabalho o método criado por Polya foi utilizado como base para uma melhor interpretação dos problemas, porém não foi seguida fielmente, sendo realizada uma adaptação.

2.2 A resolução de problemas e a geometria dinâmica sob o olhar da BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é uma política educacional que promove a qualidade, equidade e igualdade de todo fundamento pedagógico das escolas públicas e privadas de Educação Básica do Brasil. Este é um documento que possui toda a formulação dos currículos escolares a partir de habilidades compostas pelo conteúdo básico obrigatório de ensino, com o objetivo de unificar o ensino básico, evitando a fragmentação

das políticas educacionais, garantindo um conjunto de conhecimentos comuns e um conjunto de competências necessárias para a formação de um cidadão. (BRASIL. PNE, 2014)

Sobre a geometria dinâmica a BNCC diz,

“[...] Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.”(BRASIL. BNCC, 2018, p. 276)

A BNCC reconhece que esses recursos podem oferecer ambientes interativos e visuais, que permitem aos estudantes explorar conceitos matemáticos, visualizar resultados de maneiras diversas e construir um entendimento mais profundo através da experimentação e manipulação direta de objetos matemáticos. Isso alinha-se ao objetivo de desenvolver competências como o raciocínio lógico, a capacidade de resolver problemas e a criatividade, preparando os alunos para o mundo moderno onde a tecnologia desempenha um papel central.

Este estudo visa demonstrar como um ensino dinâmico de matemática pode produzir excelentes resultados educacionais. O foco é dado na resolução de problemas envolvendo hexágonos regulares, utilizando o GeoGebra como instrumento auxiliar. Contudo, vale ressaltar que o potencial do GeoGebra vai além, servindo como uma ferramenta versátil para uma variedade infinita de aplicações matemáticas.

2.2.1 Habilidades específicas

Todos os conteúdos matemáticos abordados neste trabalho serão interligados as respectivas habilidades da BNCC, pensando em uma aplicação em sala de aula.

Abaixo são introduzidas todas as habilidades e competências dos conceitos trabalhados na resolução dos problemas mais a diante:

Habilidades BNCC

| | |
|--------------|--|
| (EF06MA18) | Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. |
| (EF06MA19) | Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. |
| (EF06MA22) | Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. |
| (EF06MA24) | Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. |
| (EF07MA24) | Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° . |
| (EF07MA31) | Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. |
| (EF07MA32) | Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas. |
| (EF08MA15) | Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90° , 60° , 45° e 30° e polígonos regulares. |
| (EF08MA16) | Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso. |
| (EF09MA12) | Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. |
| (EF09MA01) | Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). |
| (EM13MAT308) | Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. |

Tabela 1: Habilidades BNCC

As habilidades contempladas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que

correspondem aos conteúdos envolvidos na resolução dos problemas propostos mostram que tais atividades têm um amplo espectro de aplicação, abrangendo estudantes de diversas idades. Este alcance reafirma o valor das tarefas selecionadas para o fortalecimento do pensamento analítico entre os alunos.

3 Construções elementares com Metodologia passo a passo

Este capítulo apresenta as construções elementares a serem utilizadas neste TCC com a metodologia adotada para o ensino de desenho geométrico, utilizando régua e compasso, aliada às ferramentas disponíveis no GeoGebra. O objetivo principal é proporcionar aos estudantes e professores uma experiência prática explorando as construções fundamentais da geometria.

O desenho geométrico, como disciplina, possui uma longa história de utilização de ferramentas tradicionais, como régua e compasso, para a construção precisa de figuras e objetos geométricos. No entanto, com os avanços tecnológicos, surge a oportunidade de complementar esse processo de aprendizado, incorporando o uso do GeoGebra.

Ao longo deste capítulo, serão apresentadas as construções fundamentais de desenho geométrico inseridas no GeoGebra, tendo como objetivo facilitar o entendimento dos leitores nas próximas atividades propostas neste trabalho. Cada construção será acompanhada por uma explicação passo a passo do processo utilizando tanto a abordagem tradicional com régua e compasso, como a exploração do GeoGebra.

A metodologia passo a passo, segundo Baldin e Villagra (2010), fornece um caminho claro e estruturado que facilita a compreensão de tópicos fundamentais da plataforma, até aqueles que nunca tiveram contato. Sendo assim, cada atividade proposta foi planejada para eliminar redundâncias e simplificar as construções. O objetivo é minimizar a complexidade através da implementação de uma sequência otimizada de passos.

Nos próximos capítulos faremos uso da mesma metodologia para construção das figuras dos problemas sobre hexágonos regulares e para construções que irão nos auxiliar em suas resoluções algébricas.

Significado de régua e compasso no GeoGebra

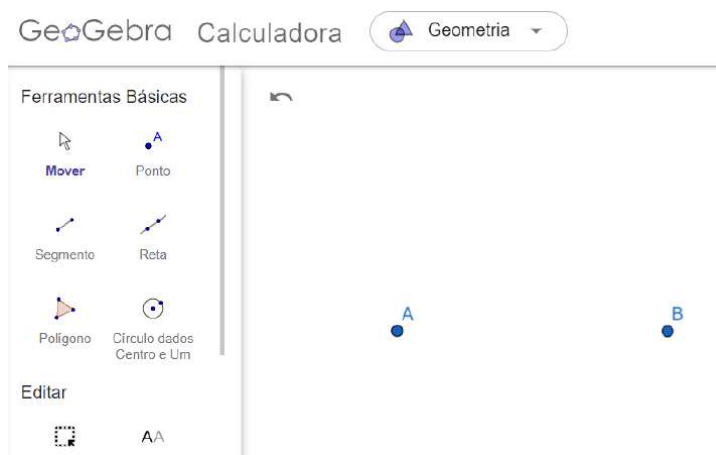
Em Desenho Geométrico, a régua é um instrumento que permite, com a ajuda do lápis, traçar segmentos, retas, semi-retas, triângulos e polígonos. (BALDIN & VILLAGRA, 2010) Na metodologia passo a passo, a ferramenta régua será denotada pelas opções

retas, semi-retas e segmento. Já o compasso, é o instrumento que irá nos permitir traçar circunferências.

3.1 Construção da mediatriz de um segmento dado AB com régua e compasso

Passo 1: Clique na opção ponto na janela ferramentas básicas e construa dois pontos A e B .

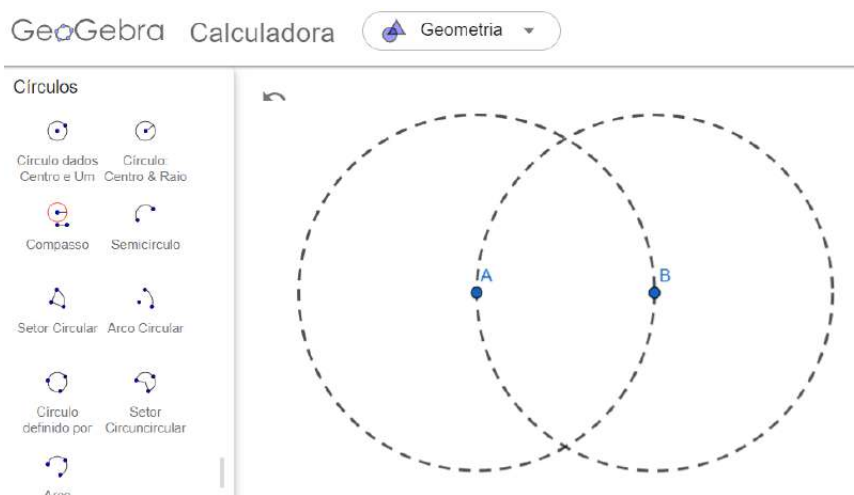
Figura 1: Mediatriz - Passo 1



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 2: Clique na opção compasso na janela círculos e construa duas circunferências de mesmo raio com centro nos pontos A e B .

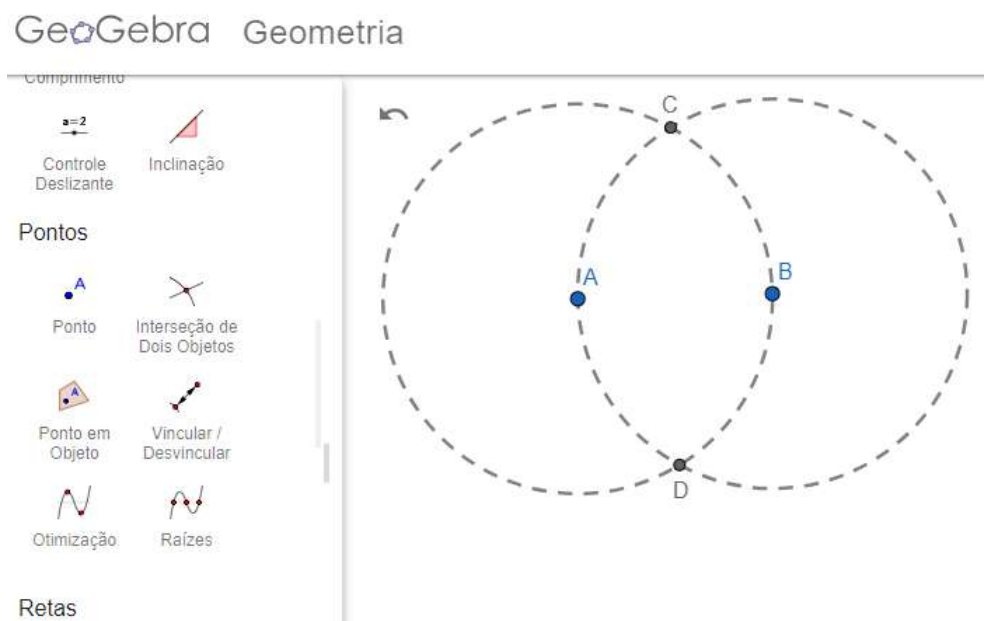
Figura 2: Mediatriz - Passo 2



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 3: Clique na opção interseção de dois objetos na janela pontos e clique nas duas circunferências para construir os pontos de interseção C e D .

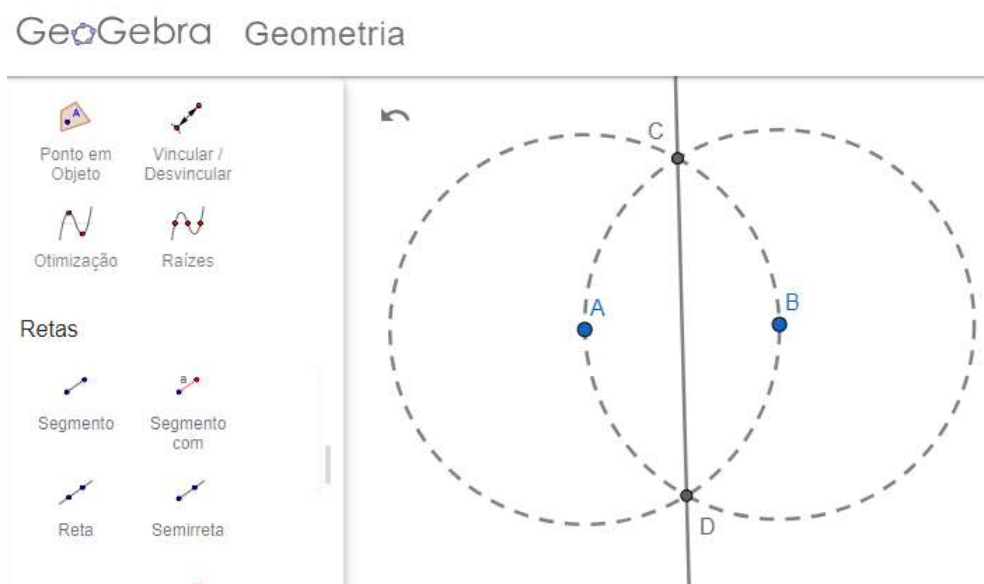
Figura 3: Mediatriz - Passo 3



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 4: Clique na opção reta na janelaretas e selecione os pontos C e D .

Figura 4: Mediatriz - Passo 4



Fonte: Elaborado pela autora

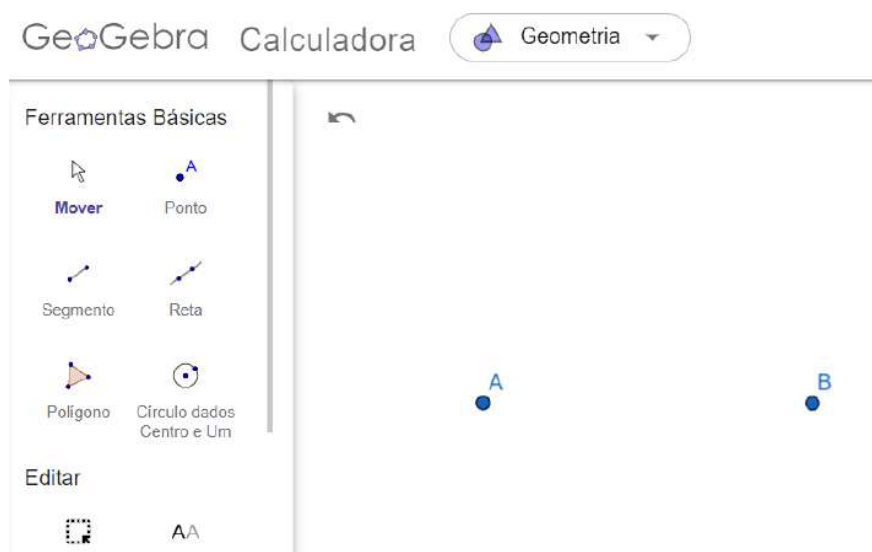
Com isso, temos a construção da mediatriz do segmento AB utilizando apenas régua e compasso. Vale lembrar que a mediatriz é também um exemplo de construção de uma

reta perpendicular ao segmento de reta AB .

3.2 Construção do ponto médio de um segmento dado AB com régua e compasso

Passo 1: Clique na opção ponto na janela ferramentas básicas e construa dois pontos A e B .

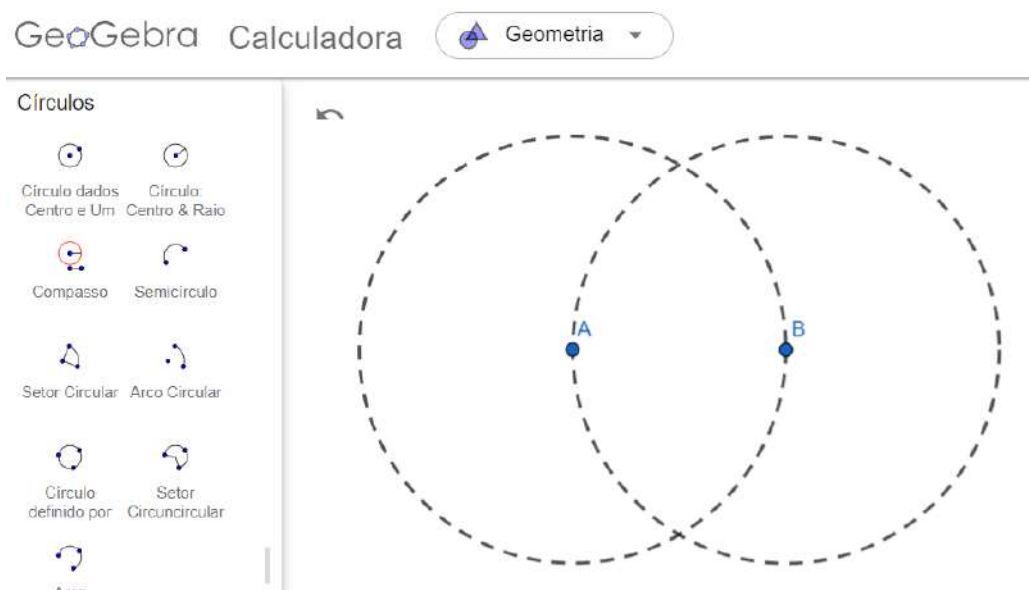
Figura 5: Ponto Médio - Passo 1



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 2: Clique na opção compasso na janela círculos e construa duas circunferências de mesmo raio com centro nos pontos A e B .

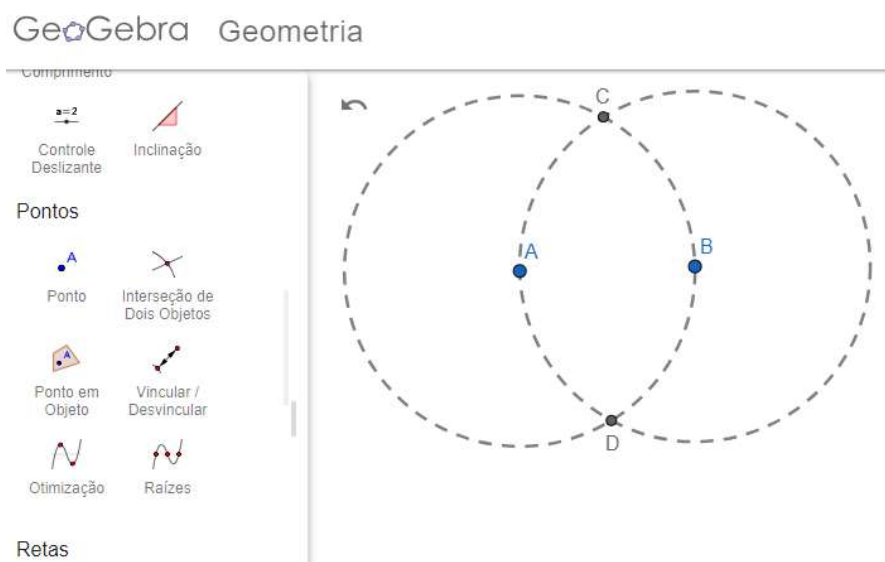
Figura 6: Ponto Médio - Passo 2



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 3: Clique na opção interseção de dois objetos na janela pontos e clique nas duas circunferências para construir os pontos de interseção C e D .

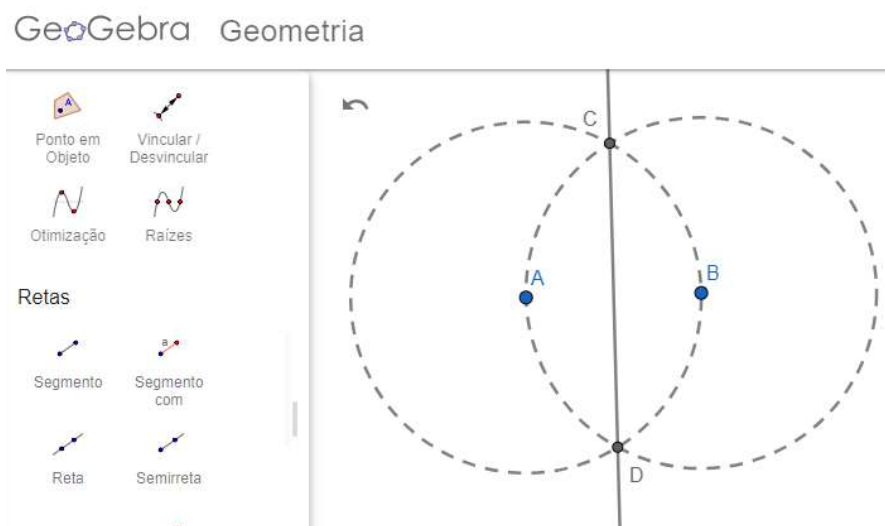
Figura 7: Ponto Médio - Passo 3



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 4: Clique na opção reta na janela retas e selecione os pontos C e D .

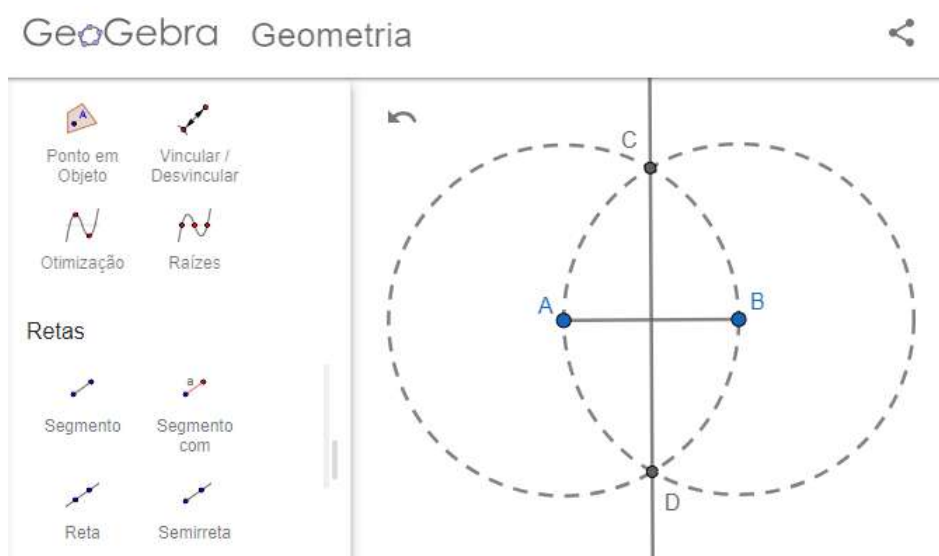
Figura 8: Ponto Médio - Passo 4



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 5: Clique na opção segmento na janela retas e construa um segmento entre os pontos A e B .

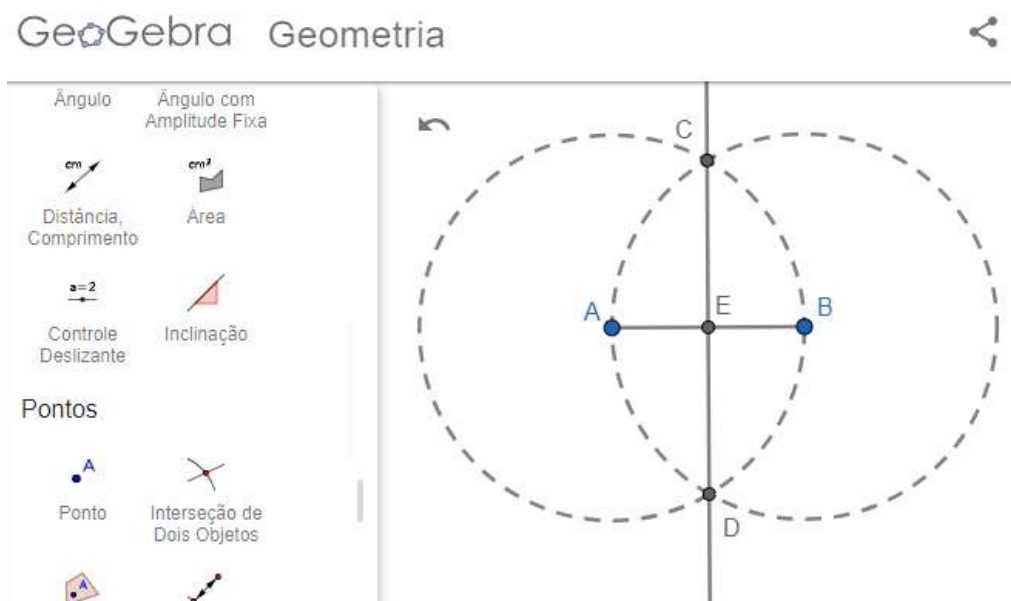
Figura 9: Ponto Médio - Passo 5



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 6: Clique na opção interseção de dois objetos na janela pontos e clique no segmento AB e CD .

Figura 10: Ponto Médio - Passo 6



Fonte: Elaborado pela autora

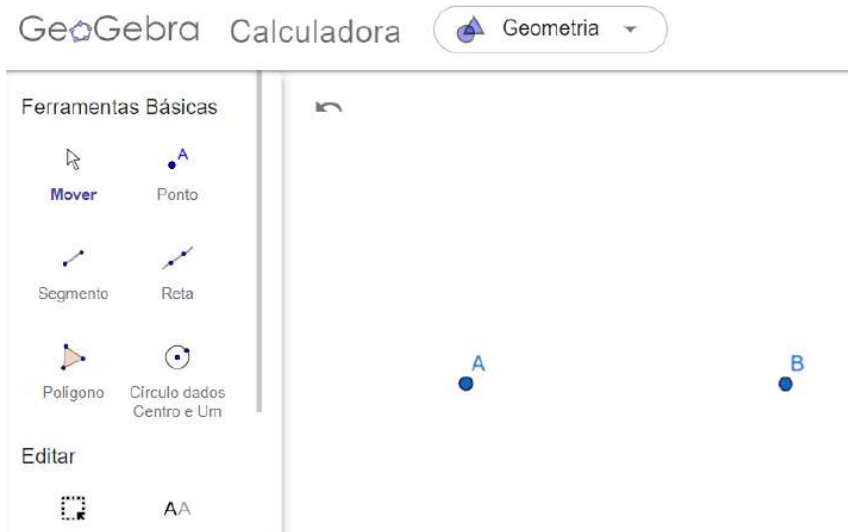
Com isso, temos a construção do ponto médio E do segmento AB .

3.3 Construção de uma reta paralela a uma outra reta r dada com régua e compasso

Neste exemplo de construção, será escolhido um ponto e uma reta qualquer, sendo que o ponto C escolhido não pertence a reta r . Porém, vale lembrar que existem outros diversos exemplos de retas paralelas.

Passo 1: Clique na opção ponto na janela ferramentas básicas e construa dois pontos A e B .

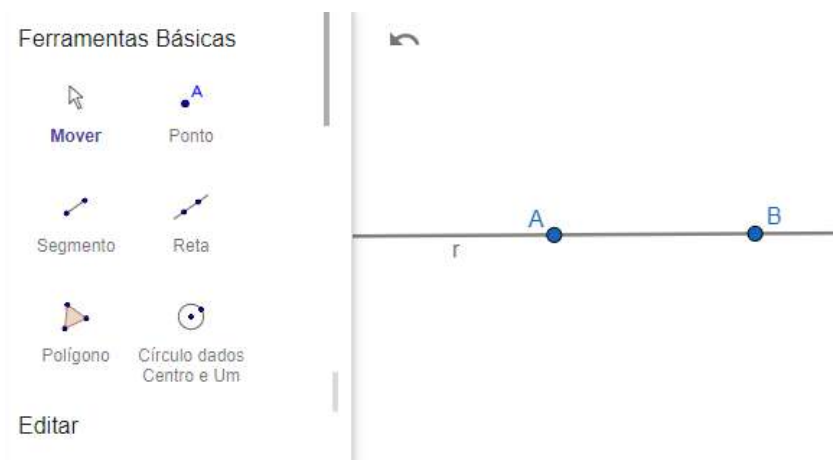
Figura 11: Reta paralela - Passo 1



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 2: Clique na opção reta na janela retas e construa uma reta r que passa pelos pontos A e B .

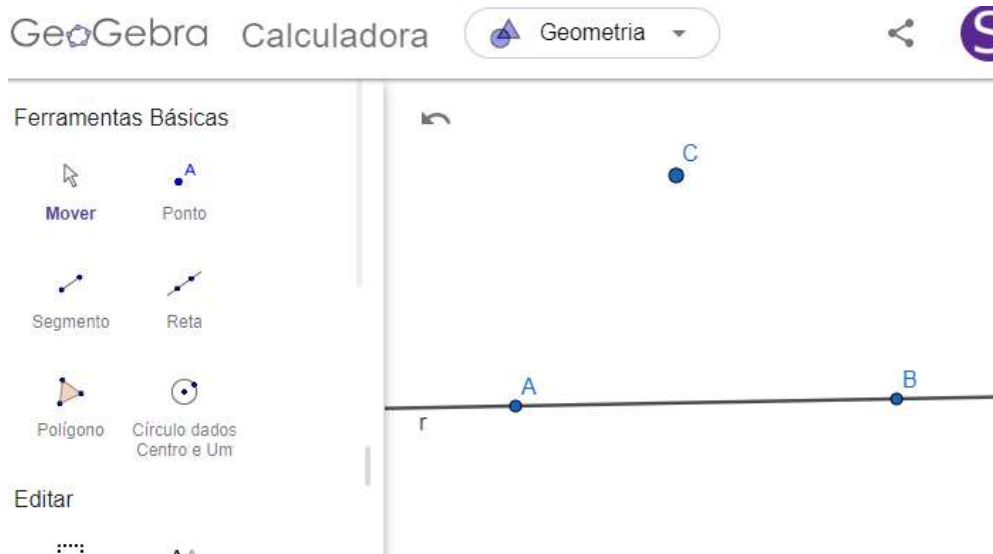
Figura 12: Reta paralela - Passo 2



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 3: Clique na opção ponto na janela ferramentas básicas e construa um ponto C para que a reta paralela a reta r passe.

Figura 13: Reta paralela - Passo 3

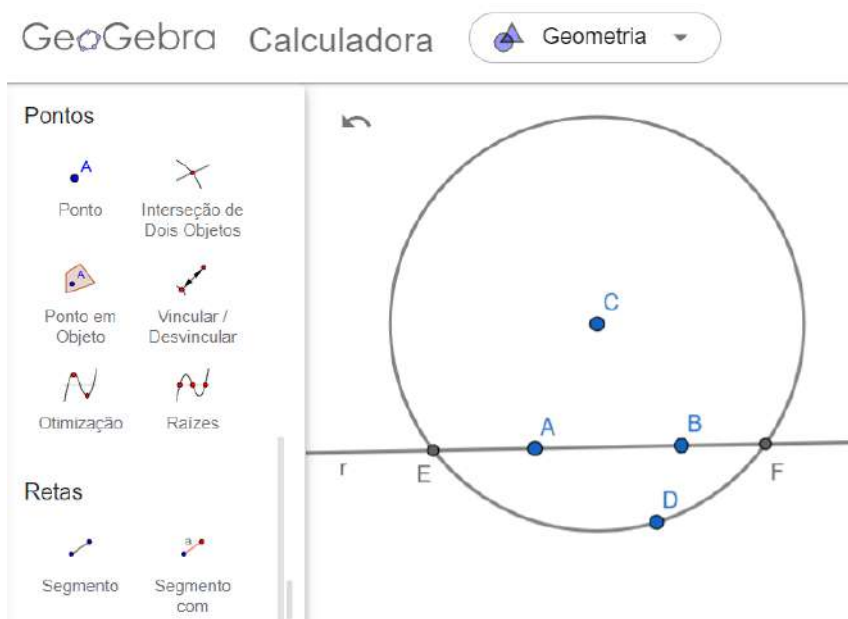


Fonte: Elaborado pela autora

Passo 4: Clique na opção círculo dados centro e um raio na janela círculos e construa uma circunferência com centro em C que corta a reta r .

Passo 5: Clique na opção interseção de dois objetos e construa os pontos da reta r que interceptam a circunferência com centro C .

Figura 14: Reta paralela - Passo 5



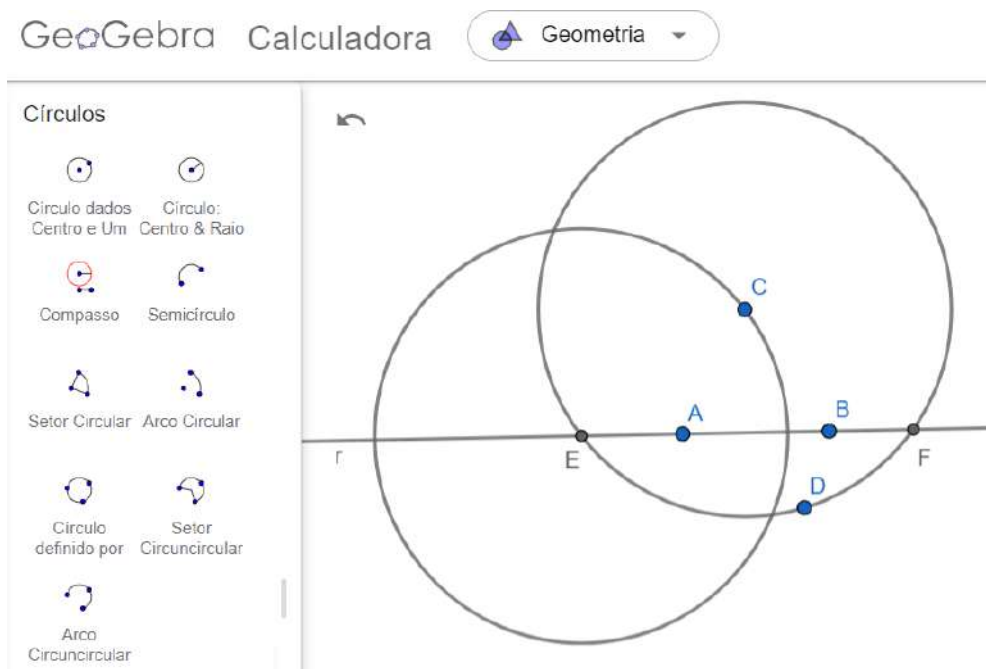
Fonte: Elaborado pela autora

Neste passo, utilizamos a ferramenta círculo dados centro e um raio como o nosso

compasso.

Passo 6: Clique na opção compasso na janela círculos e construa uma circunferência com centro no ponto E e passando por C .

Figura 15: Reta paralela - Passo 6

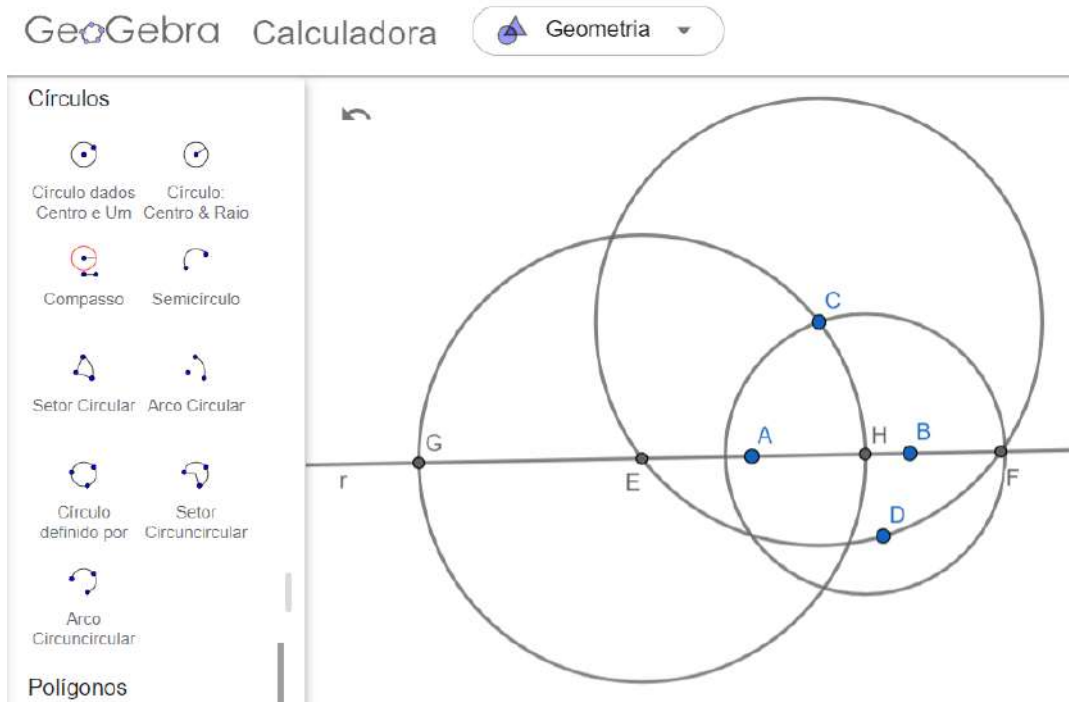


Fonte: Elaborado pela autora

Passo 7: Clique na opção interseção de dois objetos e construa os pontos da reta r que interceptam a circunferência com centro E .

Passo 8: Clique na opção compasso na janela círculos e construa uma circunferência com centro no ponto H que passa por C .

Figura 16: Reta paralela - Passo 8

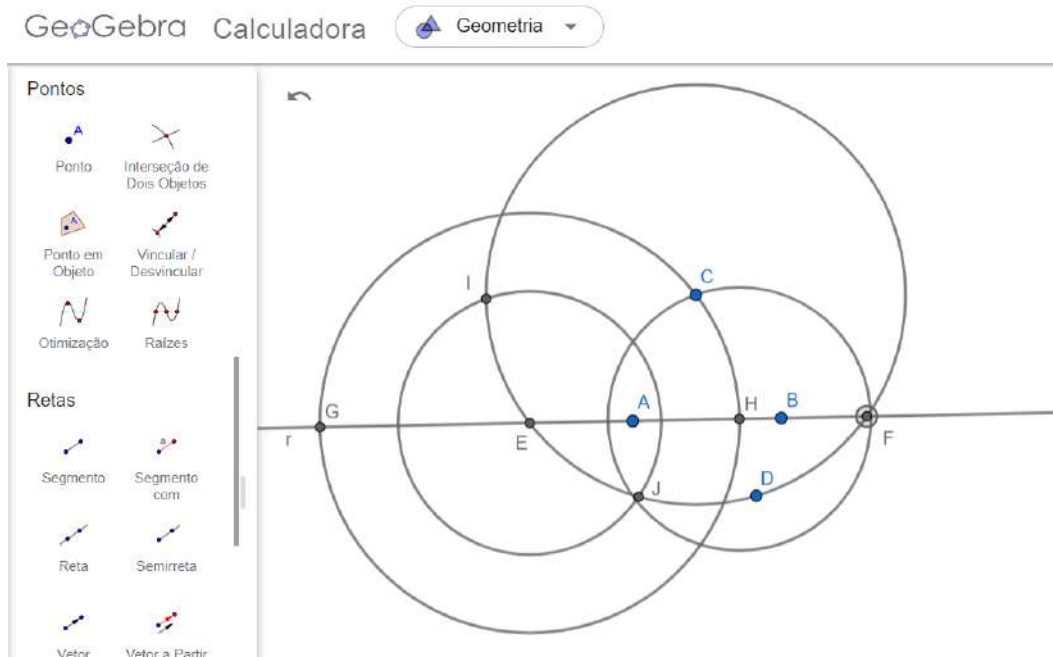


Fonte: Elaborado pela autora

Passo 9: Clique na opção compasso na janela círculos e construa uma circunferência com centro no ponto H que passa por C . Agora, mova a circunferência, mantendo a medida do raio, para que o centro seja E .

Passo 10: Clique na opção interseção de dois objetos e construa o ponto de interseção das circunferência de centro E e C .

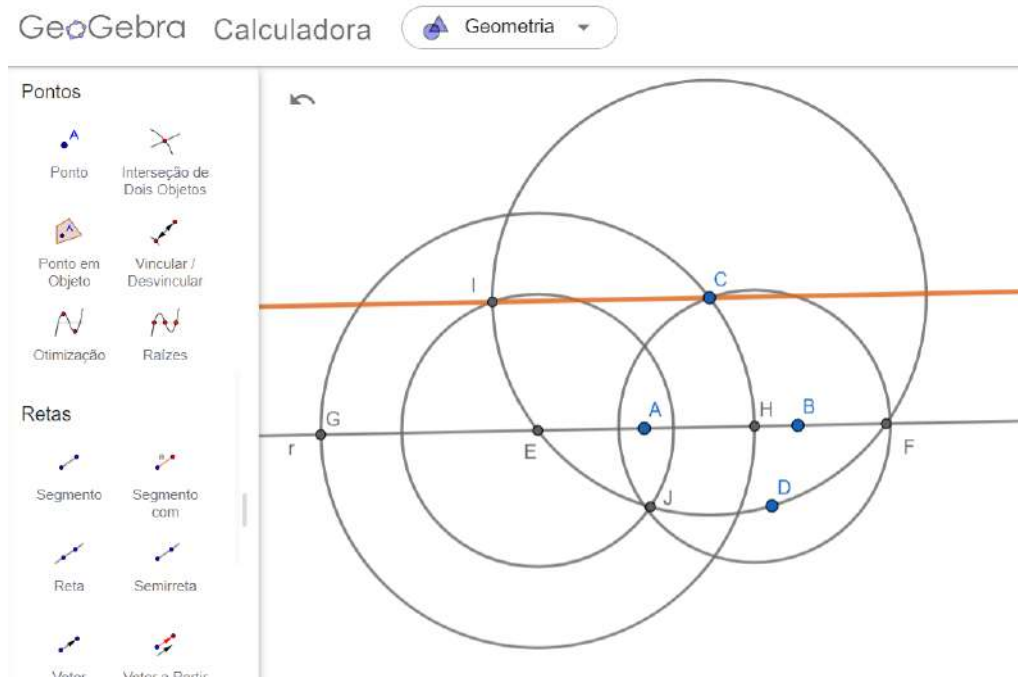
Figura 17: Reta paralela - Passo 10



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 11: Clique na opção reta na janela retas e selecione os pontos C e I .

Figura 18: Reta paralela - Passo 11



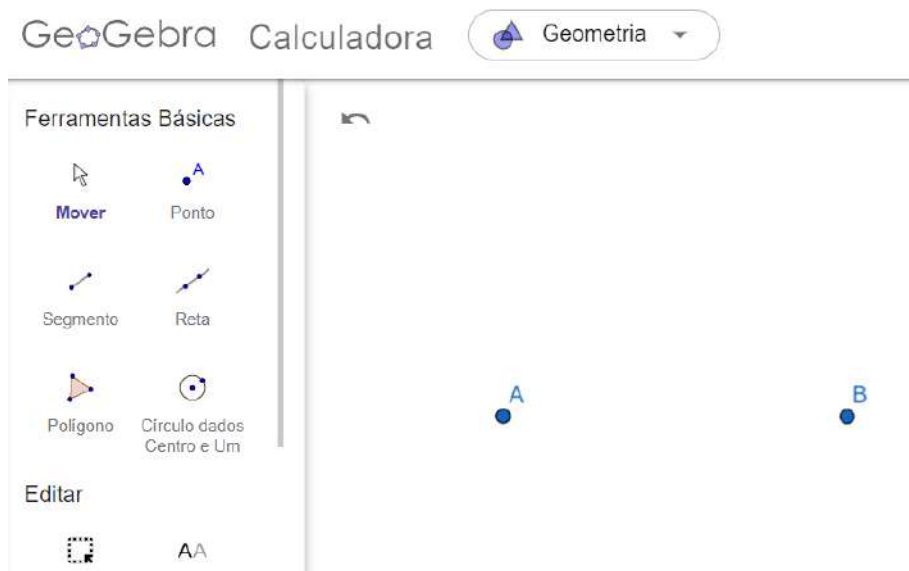
Fonte: Elaborado pela autora

Com isso finalizamos a construção da reta paralela a reta r passando pelo ponto C .

3.4 Construção de um hexágono regular com régua e compasso

Passo 1: Clique na opção ponto na janela ferramentas básicas e construa dois pontos A e B .

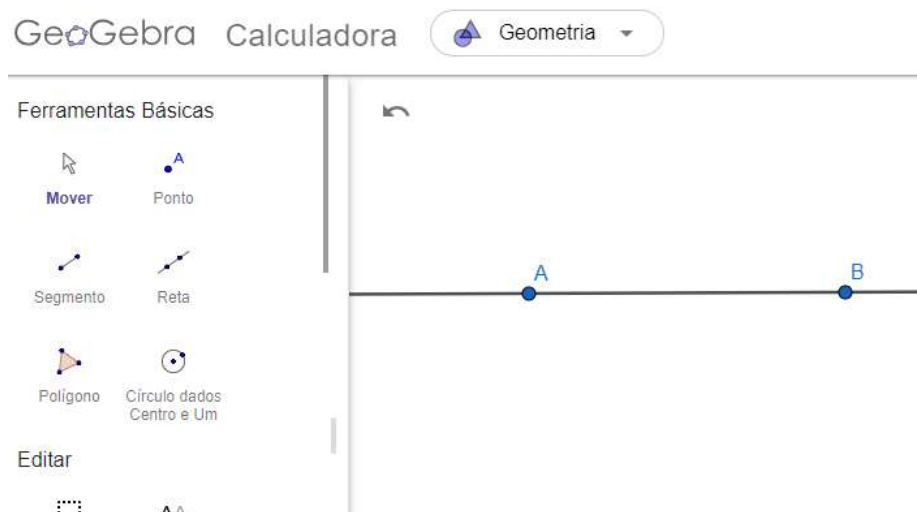
Figura 19: Hexágono regular - Passo 1



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 2: Clique na opção reta na janela retas e construa uma reta que passa por dois pontos A e B .

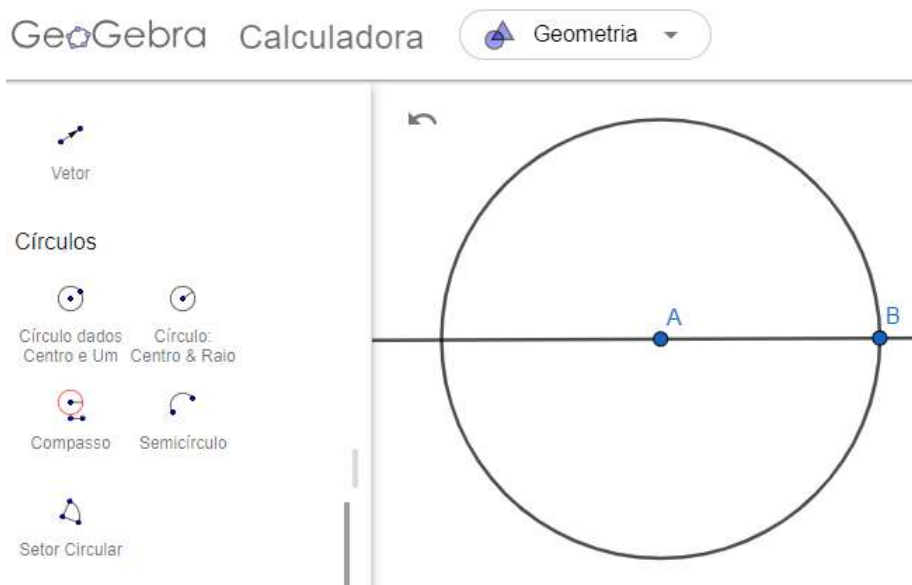
Figura 20: Hexágono regular - Passo 2



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 3: Clique na opção compasso na janela círculos e construa uma circunferência com raio AB e com centro em A .

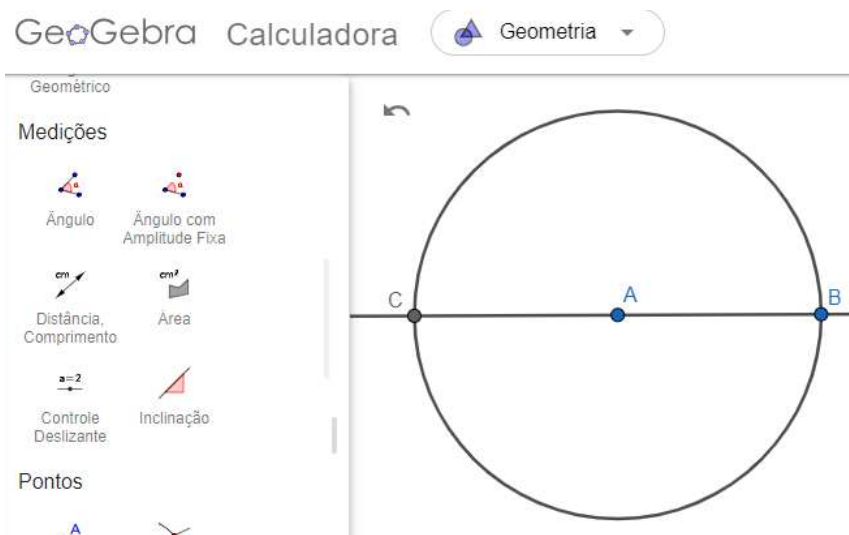
Figura 21: Hexágono regular - Passo 3



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 4: Clique na opção interseção de dois objetos na janela pontos e construa o terceiro ponto de interseção entre a circunferência e a reta.

Figura 22: Hexágono regular - Passo 4



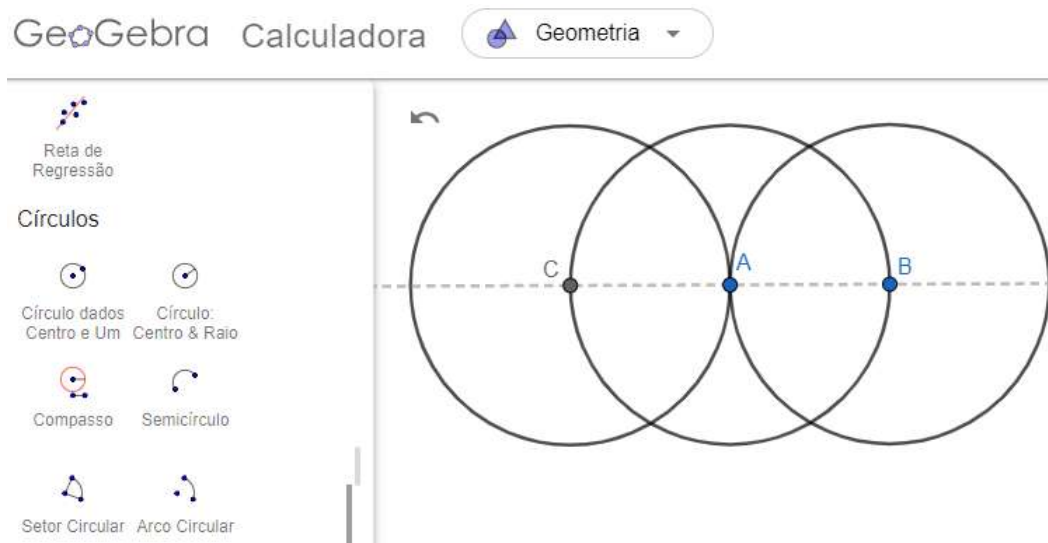
Fonte: Elaborado pela autora

Passo 5: Clique na reta construída anteriormente e em seu menu de configurações selecione a opção para deixar a reta pontilhada. Este passo ocorre para que deixemos a reta em segundo plano sem deixar de observá-la.

Passo 6: Clique na opção compasso na janela círculos e construa duas circunferência com

centro em C e B .

Figura 23: Hexágono regular - Passo 6

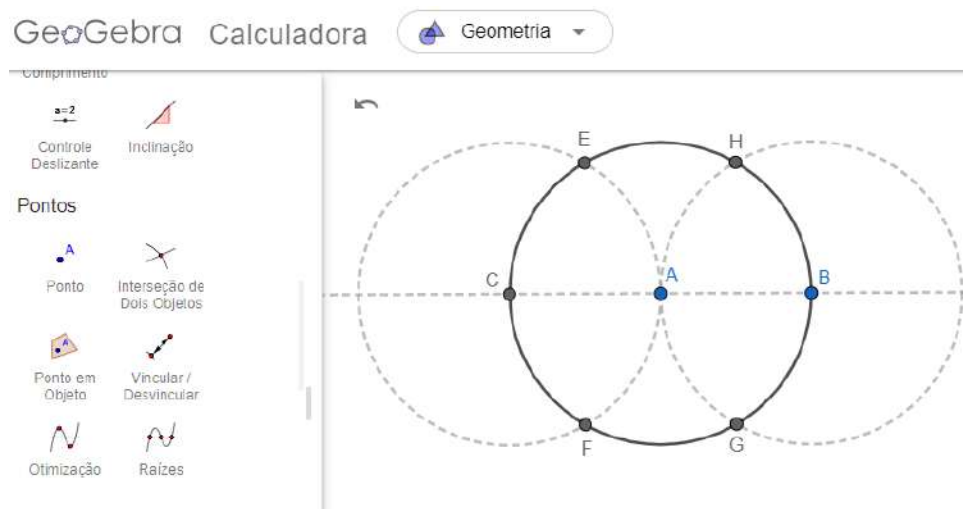


Fonte: Elaborado pela autora

Passo 7: Clique na opção interseção de dois objetos na janela pontos e construa os pontos de interseção E , F , G e H entre as circunferências.

Passo 8: Clique nas circunferências construídas anteriormente e em seus menus de configurações selecione a opção para deixar as construções pontilhadas. Este passo ocorre para que deixemos as circunferências em segundo plano sem deixar de observá-las.

Figura 24: Hexágono regular - Passo 8

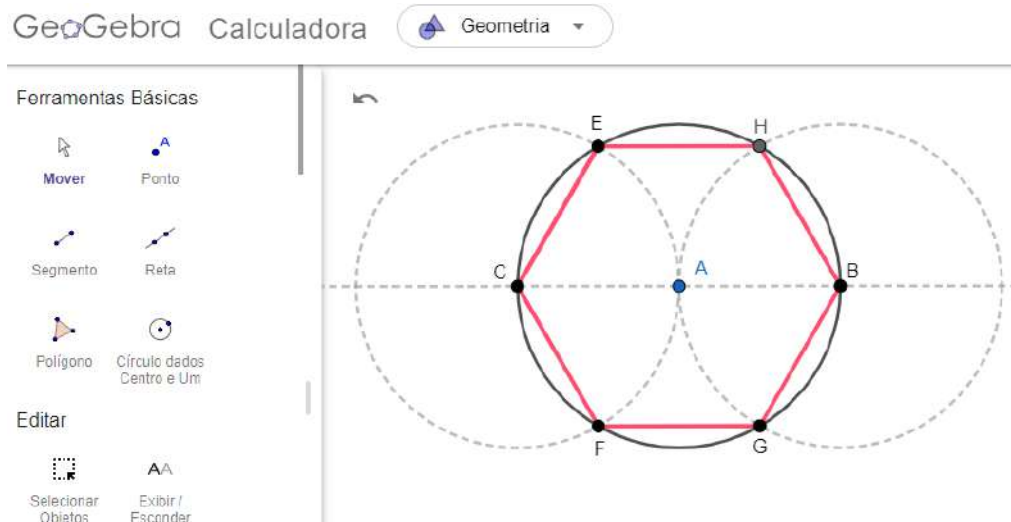


Fonte: Elaborado pela autora

Passo 9: Clique na opção segmento na janela retas e construa os segmentos BH , HE ,

EC , CF , FG e GB .

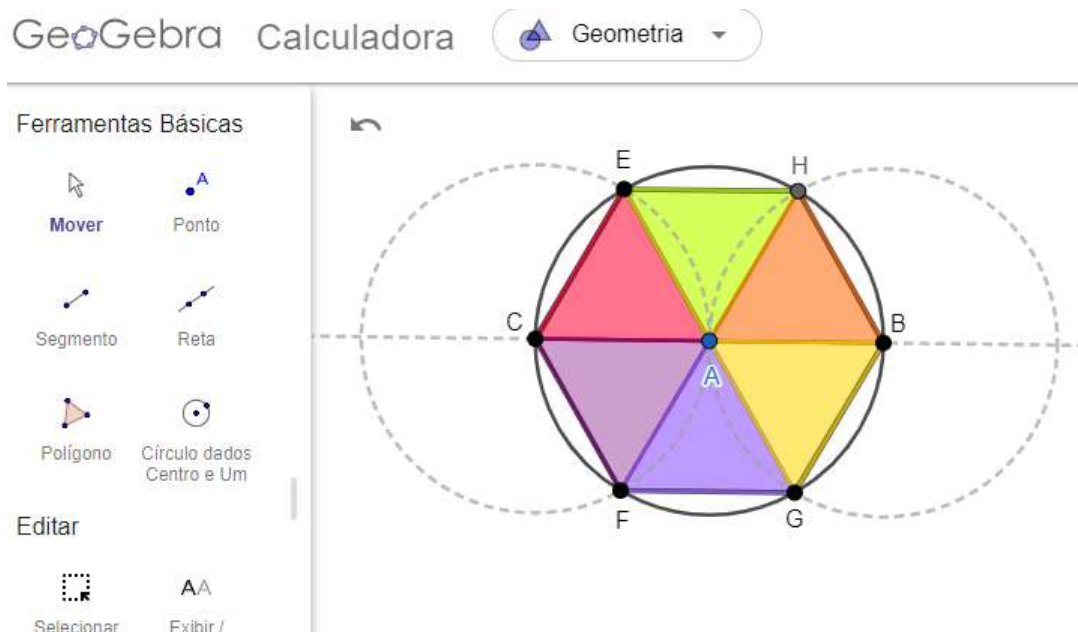
Figura 25: Hexágono regular - Passo 9



Fonte: Elaborado pela autora

Com isso, temos a construção de um hexágono regular. Perceba que se ligarmos os demais pontos temos a formação de 6 triângulos equiláteros, sendo essa uma condição que foi essencial para resolução dos problemas citados no capítulo anterior.

Figura 26: Hexágono regular - Triângulos equiláteros

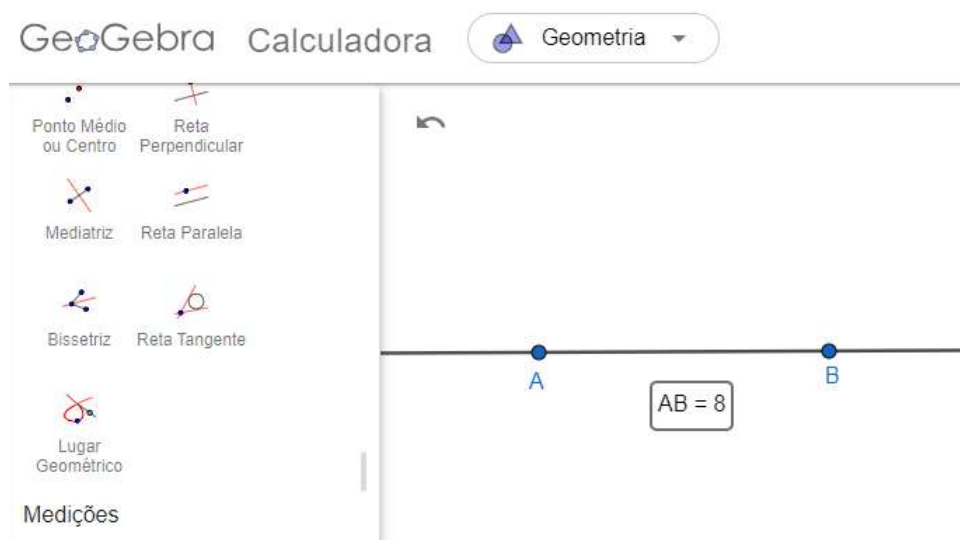


Fonte: Elaborado pela autora

3.5 Construção de um triângulo equilátero com régua e compasso

Passo 1: Clique na opção reta na janela retas e construa uma reta passando por dois pontos AB que equidistam uma distância escolhida. No exemplo desta metodologia iremos denotar que a distância AB é de 8 unidades de medida.

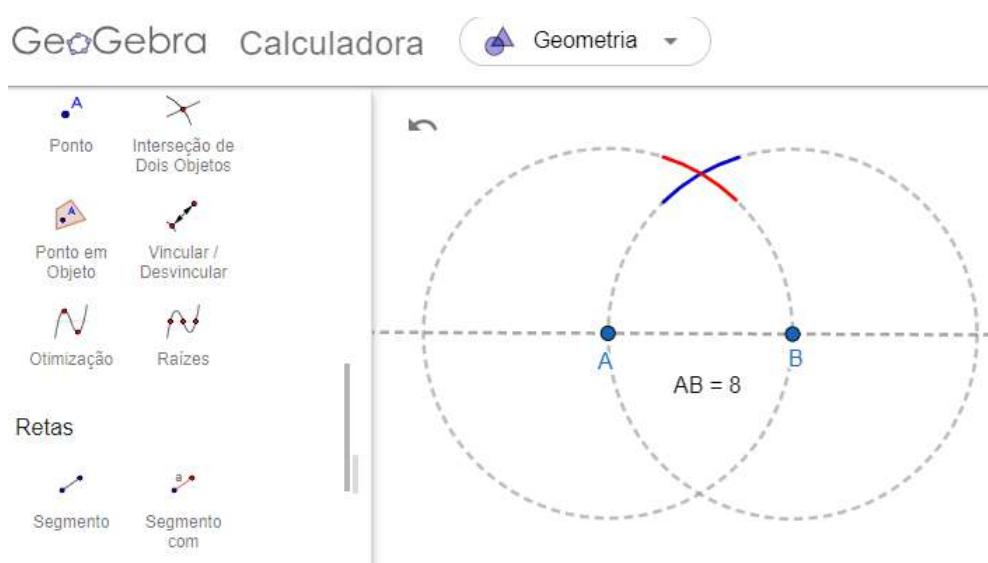
Figura 27: Triângulo equilátero - Passo 1



Fonte: Elaborado pela autora

Passo 2: Clique na opção compasso na janela círculos e construa duas circunferências com centro em A e B .

Figura 28: Triângulo equilátero - Passo 2



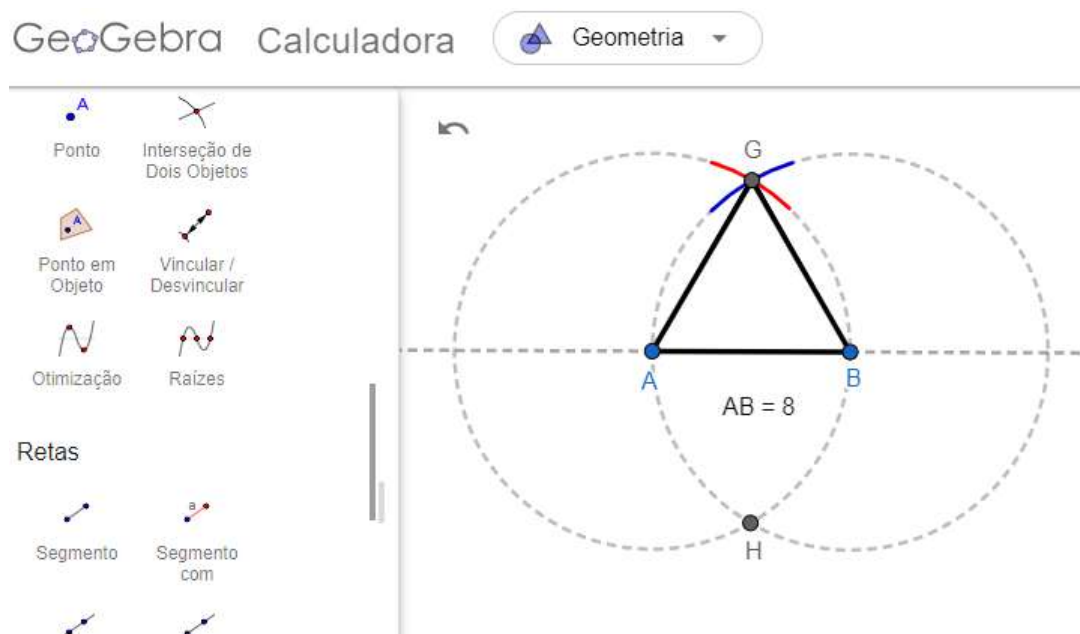
Fonte: Elaborado pela autora

Passo 3: Clique na opção interseção de dois objetos na janela pontos e construa os pontos

de interseção entre as circunferências.

Passo 4: Clique na opção segmento na janela retas e construa os segmentos AB , BC e AC .

Figura 29: Triângulo equilátero - Passo 4



Fonte: Elaborado pela autora

Com isso, temos a construção final de um triângulo equilátero com lado medindo 8. Para construirmos um triângulo isósceles basta seguir os mesmos passos, porém, os lados do triângulo não terão a necessidade de medir o mesmo que a base, podendo fazer os raios das circunferências do **Passo 2** maiores ou menores que a medida do segmento dado.

4 Análise e construção passo a passo dos problemas sobre os hexágonos regulares

Ernesto Americo Hidalgo

Nos dias atuais, onde as redes sociais desempenham um papel significativo na vida das pessoas, é incomum encontrar grandes figuras públicas empenhadas em compartilhar suas paixões matemáticas com o mundo. Esta parte do capítulo tem como objetivo contar um pouco sobre a vida inspiradora de um professor de matemática que tem sua rede social dedicada à publicações de problemas que envolvam geometria, curiosidades e eventos matemáticos.

Ernesto Americo Hidalgo possui uma sólida formação acadêmica que abrange tanto a graduação quanto a pós-graduação em Matemática. Em 1995, deu início ao curso de Bacharelado em Matemática na Escola de Matemática da Universidade de El Salvador (UES). Ademais, Americo iniciou sua experiência profissional em 1993 no Sistema Nacional de Educação, Ministério da Educação em El Salvador, o professor ocupou diversos cargos, atuando como professor horista e plantas, coordenador acadêmico e subdiretor ao longo de um período de 11 anos até 2004. Desde o ano de 2005, o professor tem desempenhado o papel de docente universitário na Universidade de El Salvador, mantendo-se nessa posição até os dias atuais.

Ernesto Americo Hidalgo começou suas publicações com o intuito de inspirar alunos e também outros professores, dedicando sua rede social à matemática e mudando a forma como é percebida. Ao promover a diversão e a descoberta no estudo dessa disciplina, espera-se que mais pessoas possam apreciar e se engajar com a matemática, percebendo sua beleza e potencial para o crescimento intelectual.

A quase um ano e meio atrás, Ernesto postou seu primeiro problema e segue desde então publicando um novo todas as sextas-feiras: “*É sexta-feira e seu cérebro sabe disso!*” (HIDALGO, 2023, tradução nossa).¹ . Atualmente, na página do Facebook, além de diversas curiosidades e eventos matemáticos, Ernesto posta problemas de geometria que

¹ “¡Es viernes y el cerebro lo sabe!”

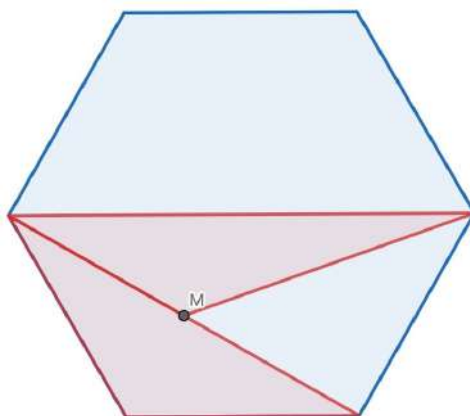
sempre envolvem os hexágonos, onde viu a oportunidade de mostrar quantos problemas e conceitos podem ser explorados de apenas um dos polígono regulares, uma área minúscula perto de toda a matemática.

Adiante, dois problemas foram selecionados para análise e estudo deste trabalho. Contemplando a metodologia passo a passo e a resolução de problemas. Os problemas foram elaborados no GeoGebra desde sua construção até a resolução do problema algebricamente.

4.1 Problema 1

Na Figura 35 temos um hexágono regular cujo lado mede $\sqrt{2}$ e M é ponto médio do segmento que o contém. Quanto vale a área pintada de vermelho? ² (HIDALGO, 2023, tradução nossa).

Figura 30: Problema 1 - Enunciado



Fonte: Print retirado do post da página do Facebook de Ernesto Americo Hidalgo - LINK

4.1.1 Resolução

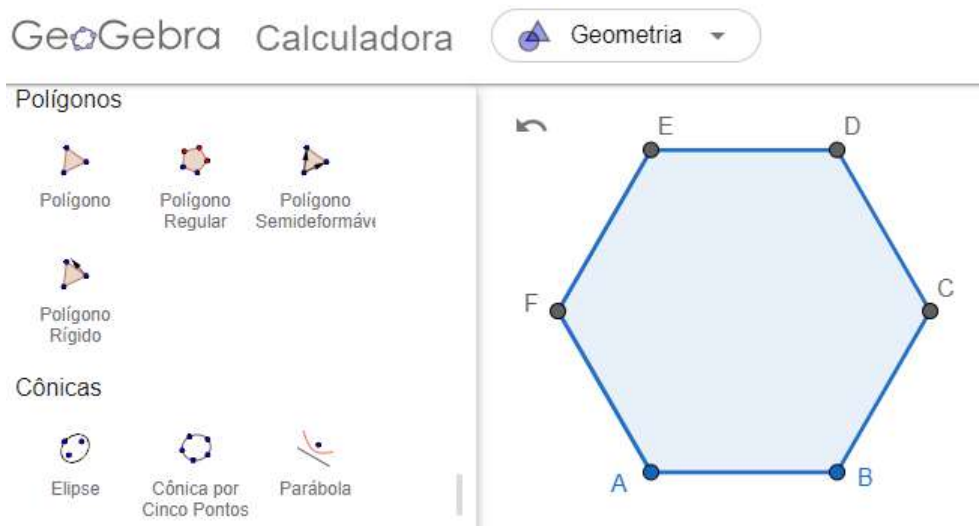
Inicialmente, dedicaremos nossa atenção à análise cuidadosa do enunciado do problema, identificando as informações necessárias para atingir o resultado desejado. Contudo, antes de prosseguirmos com a resolução, faremos uma minuciosa construção passo a passo da figura correspondente ao problema. Esse procedimento não apenas aprimorará nossa compreensão, mas também nos permitirá explorar os conceitos geométricos envolvidos.

²Se tiene un hexágono regular cuyo lado mide $\sqrt{2}$ y M es punto medio del segmento que lo contiene. ¿Cuánto vale el área de la región pintada de rojo?

Passo 1: Crie dois pontos clicando na ferramenta ponto na janela ferramentas básicas.

Passo 2: Vá na janela polígonos e selecione a opção polígono regular. Selecione os dois pontos criados e escreva a quantidade de vértices que seu polígono terá, neste caso 6.

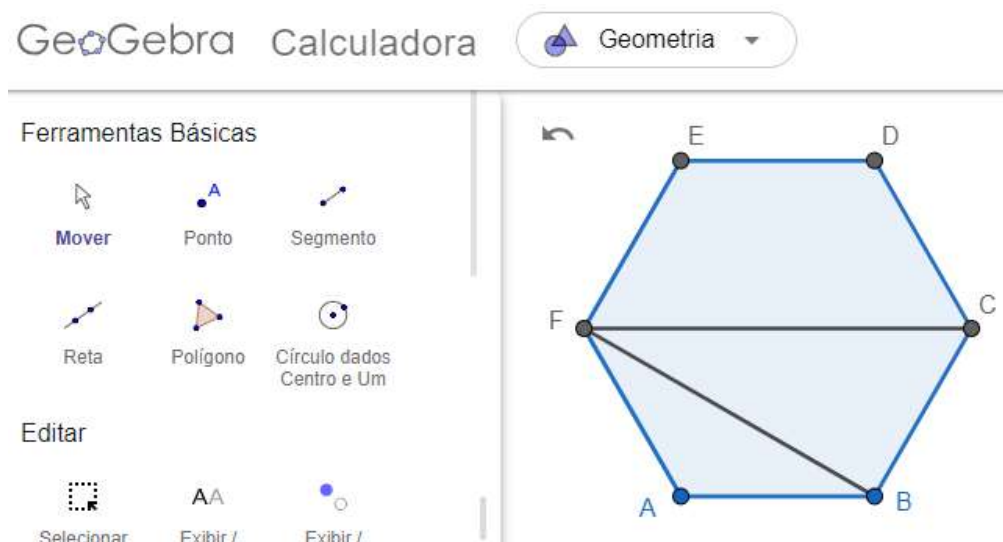
Figura 31: Problema 1 - Passo 2



Fonte: Feito pela autora

Passo 3: Na janela ferramentas básicas, selecione a opção segmento e crie dois segmentos de reta: FC e FB .

Figura 32: Problema 1 - Passo 3

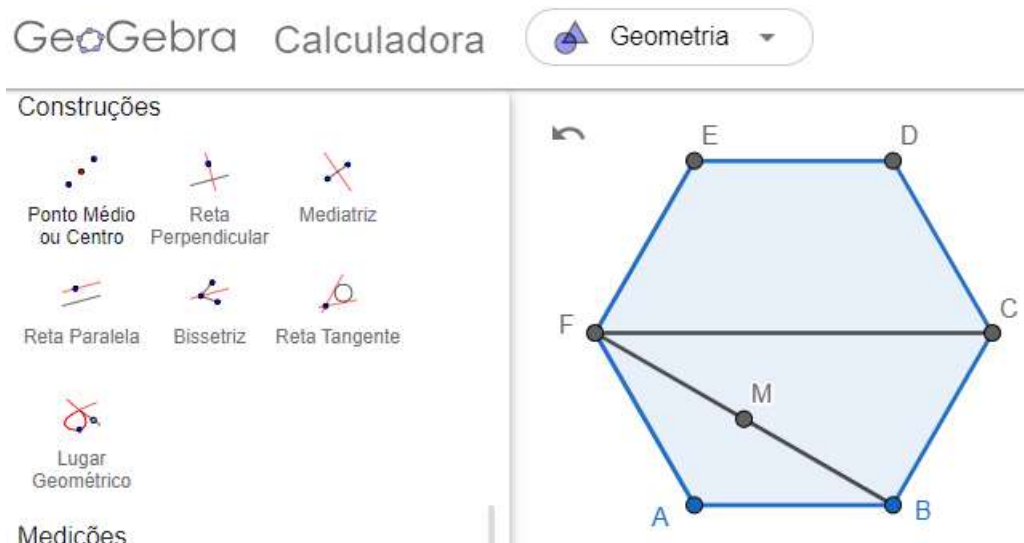


Fonte: Feito pela autora

Para criar o ponto M dado como ponto médio do segmento FB , basta:

Passo 4: Selecione a opção ponto médio na janela construções e crie o ponto médio do segmento FB , criando o ponto M .

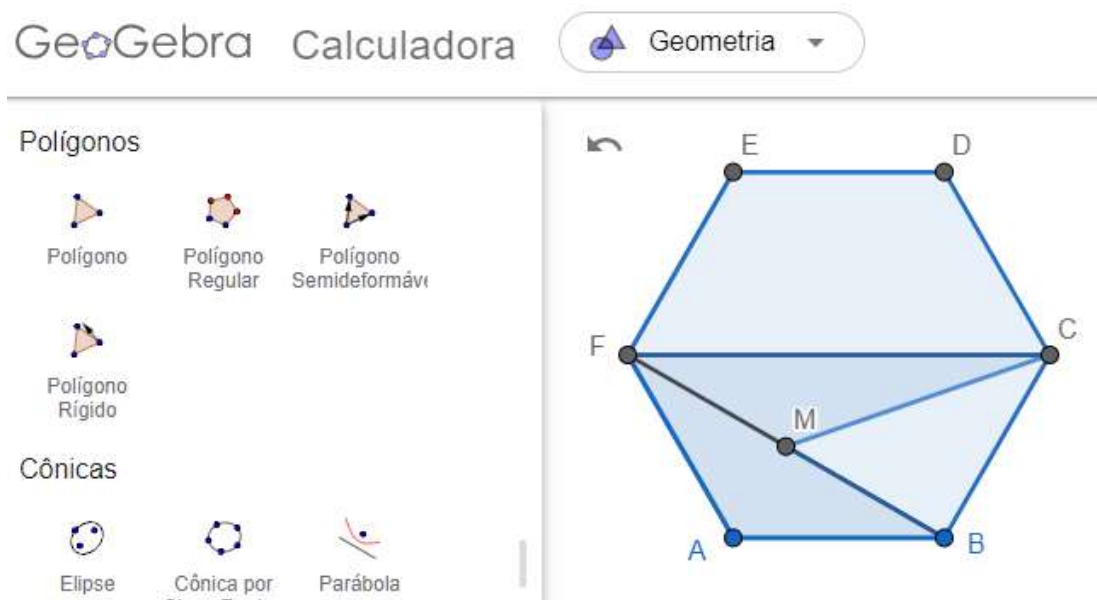
Figura 33: Problema 1 - Passo 4



Fonte: Feito pela autora

Passo 5: Clique na opção polígono na janela polígonos e selecione os pontos F , A , B , M , C e F , nesta ordem.

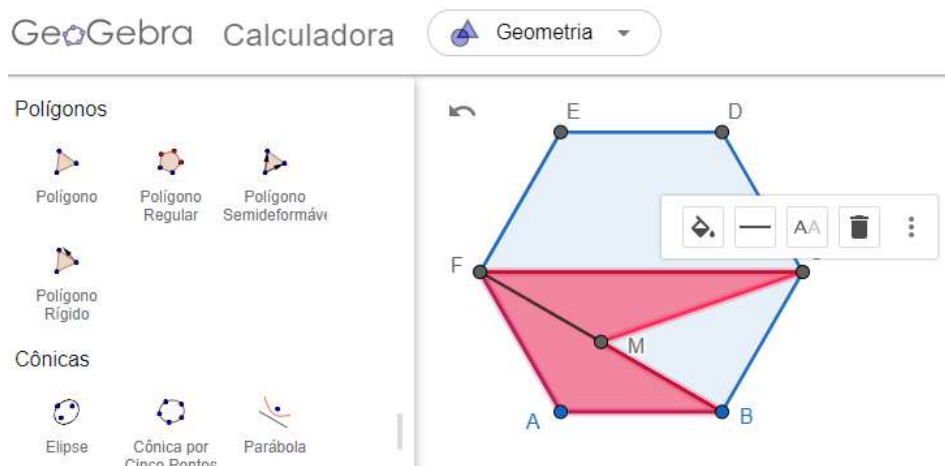
Figura 34: Problema 1 - Passo 5



Fonte: Feito pela autora

Passo 6: Clique no polígono criado no [Passo 5] e altere sua cor no menu de configurações.

Figura 35: Problema 1 - Passo 6



Fonte: Feito pela autora

Para resolver o problema, iremos nos basear em alguns questionamentos importantes, como:

1. Quais dados foram fornecidos?
2. O que é necessário para resolver o problema?
3. Quais dados não foram fornecidos?
4. Há alguma estratégia inicial?
5. É possível verificar cada passo da execução?

Ao observar a imagem do problema vemos que há um hexágono regular em azul e um pentágono irregular em vermelho. Do enunciado sabemos que o pentágono é formado por 4 vértices do hexágono regular e um ponto médio do segmento BF .

Ademais, observando detalhadamente o pentágono irregular vemos que o segmento BF divide a figura em dois triângulos: FAB e FMC ; o que pode ser uma estratégia para iniciarmos a resolução do problema, pois para obter a área de um triângulo, precisamos apenas do valor da sua base e altura.

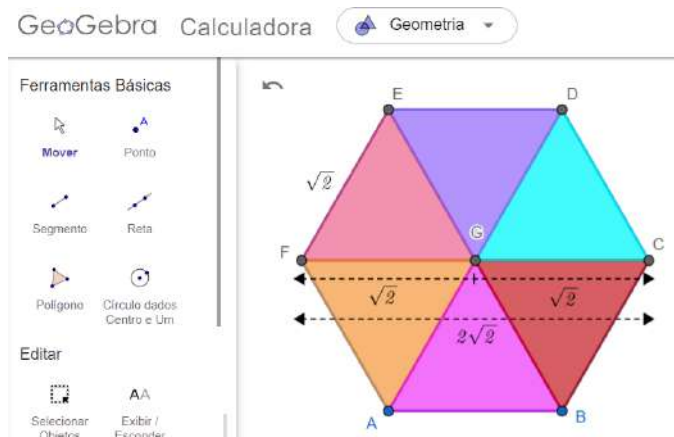
Por fim, do enunciado, sabemos que a medida do lado do hexágono regular é $\sqrt{2}$, uma informação crucial para calcular a área da região em vermelho, conforme solicitado.

Como dito acima, temos que o segmento BF divide a área em vermelho em dois triângulos, portanto, temos:

$$A_{FMC} + A_{FAB} = A_{FABMC}$$

De acordo com o enunciado, o lado do hexágono mede $\sqrt{2}$ e pode-se observar que a base FC do triângulo FMC irá corresponder a $2\sqrt{2}$, pois:

Figura 36: Medida do lado do triângulo FMC



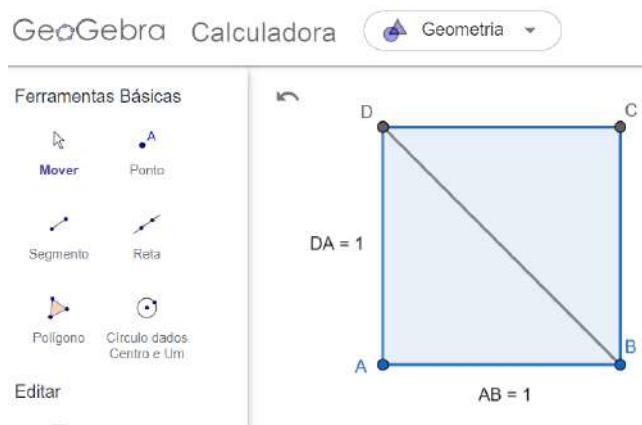
Fonte: Feito pela autora

Portanto,

$$A_{FMC} = \frac{b_{FMC} \times h_{FMC}}{2} \Rightarrow A_{FMC} = \frac{2\sqrt{2} \times h_{FMC}}{2}$$

.....
Observação: Como obter a medida $\sqrt{2}$?

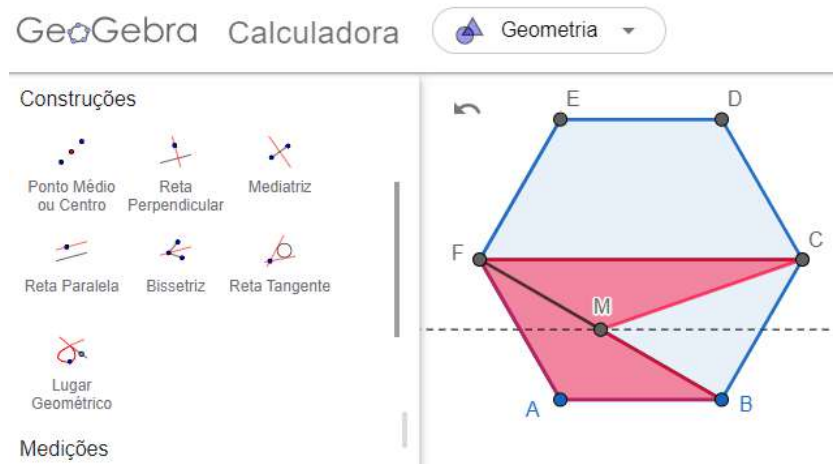
Construa um quadrado com lado medindo 1. A medida da sua diagonal valerá $\sqrt{2}$.



Para melhor visualização da figura do problema considere a seguinte construção auxiliar.

Passo 7: Selecione a opção reta paralela na janela construções e construa uma reta paralela a AB que passa pelo ponto M .

Figura 37: Problema 1 - Passo 7



Fonte: Feito pela autora

Agora, falta encontrar a altura do triângulo FMC . Observando a figura do problema, vemos que sua altura corresponde a metade da altura dos triângulos equiláteros, podendo ser calculada por:

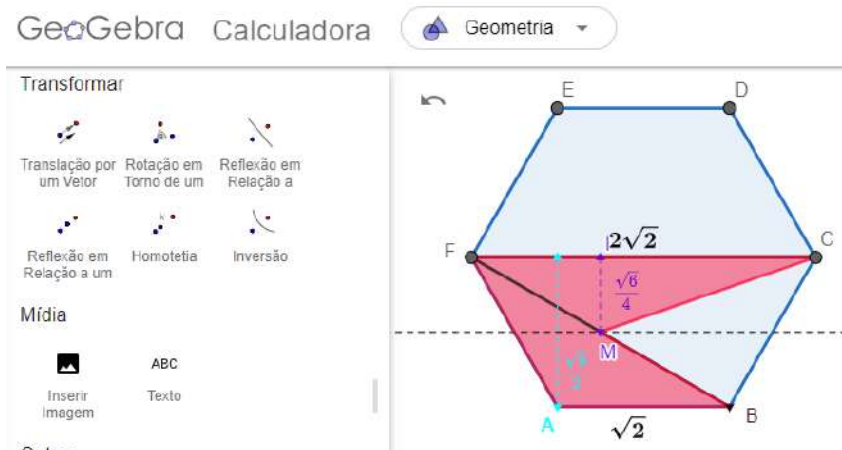
$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Assim, podemos concluir que $h_{FMC} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Ou seja,

Figura 38: Problema 1 - Resolução



Fonte: Feito pela autora

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}
 A_{FMC} &= \frac{2\sqrt{2} \times h_{FMC}}{2} \\
 &= \frac{(2\sqrt{2}) \times \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{12}}{2} \\
 A_{FMC} &= \frac{2}{2} \\
 A_{FMC} &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

Agora, faremos o mesmo para o triângulo ABF , cuja medida da base corresponde ao lado do hexágono regular e sua altura tem mesma medida da altura dos triângulos equiláteros. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
 A_{ABF} &= \frac{b_{ABF} \times h_{ABF}}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{2}) \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{12}}{2} \\
 A_{ABF} &= \frac{2}{2} \\
 A_{ABF} &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

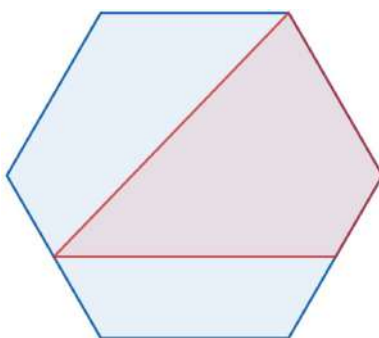
Logo, a área em vermelho vale $A_{FMC} + A_{ABF} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

.....
Questionamentos importantes: Qual a área do hexágono?
.....

4.2 Problema 2

Na Figura 44 temos um hexágono regular, construí-se um quadrilátero com vértices em dois pontos médios e dois vértices do hexágono. Quanto vale a razão entre a área do quadrilátero e o hexágono? (HIDALGO, 2023, tradução nossa).³

Figura 39: Problema 2 - Enunciado



Fonte: Print retirado do post da página do Facebook de Ernesto Americo Hidalgo - LINK

4.2.1 Resolução

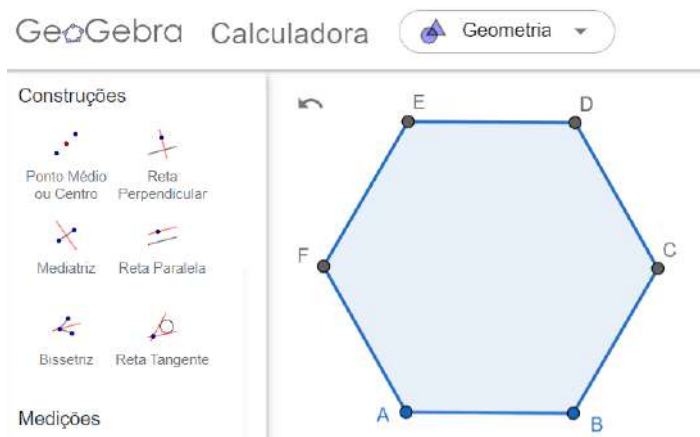
Inicialmente, dedicaremos nossa atenção à análise cuidadosa do enunciado do problema, identificando as informações necessárias para atingir o resultado desejado. Contudo, antes de prosseguirmos com a resolução, faremos uma minuciosa construção passo a passo da figura correspondente ao problema. Esse procedimento não apenas aprimorará nossa compreensão, mas também nos permitirá explorar os conceitos geométricos envolvidos.

Passo 1: Suponhamos que o lado do hexágono mede l , assim, para construir a figura crie dois pontos A e B . Selecione a opção ponto na janela ferramentas básicas.

Passo 2: Para construir o hexágono $ABCDEF$, selecione a opção polígono regular na janela polígonos. Selecione os pontos A e B e indique o número de vértices de seu polígono, no caso, 6.

³Se tiene un hexágono regular, interiormente se construye un cuadrilátero con vértices en dos puntos medios y dos vértices del hexágono. ¿Cuánto vale la razón entre el área del cuadrilátero y el hexágono?

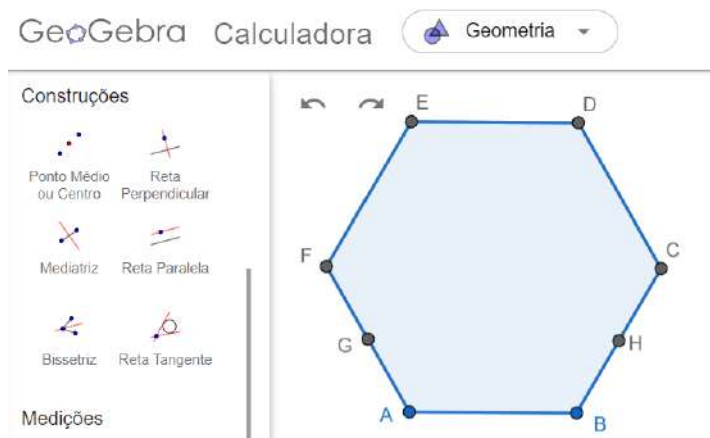
Figura 40: Problema 2 - Passo 2



Fonte: Feito pela autora

Passo 3: Vamos encontrar os pontos médios G e H dos lados do hexágono que serão dois dos vértices do quadrilátero. Selecione a opção ponto médio na janela construções. Clique nos pontos dos lados FA e BC .

Figura 41: Problema 2 - Passo 3

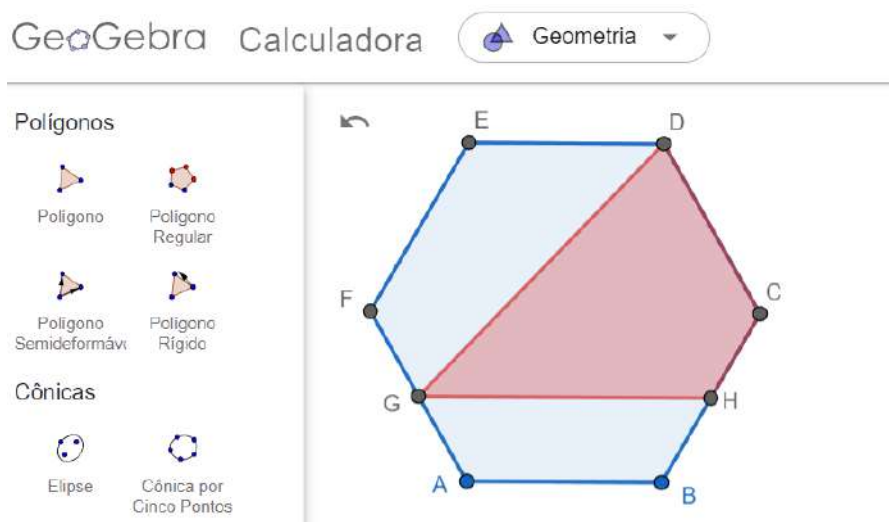


Fonte: Feito pela autora

Passo 4: Agora, basta construir o quadrilátero. Selecione a opção polígono na janela polígonos. Selecione os pontos G , H , C e D .

Passo 5: Clique no polígono criado no [Passo 4] e altere sua cor no menu de configurações.

Figura 42: Problema 2 - Passo 5



Fonte: Feito pela autora

Uma vez que temos a construção da figura finalizada, podemos começar a resolução de problema. Para isso, iremos nos basear em alguns questionamentos importantes, como:

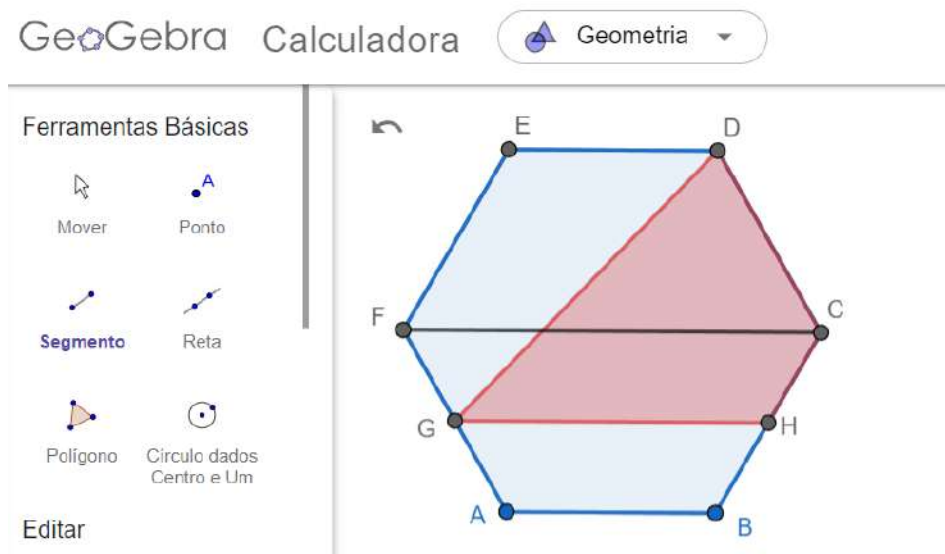
1. Quais dados foram fornecidos?
2. O que é necessário para resolver o problema?
3. Quais dados não foram fornecidos?
4. Há alguma estratégia inicial?
5. É possível verificar cada passo da execução?

Diferente do problema anterior, o enunciado não nos forneceu a medida do lado do hexágono, portanto, como feito no [Passo 1], iremos supor que o lado do hexágono possui uma medida l . Esta escolha não irá alterar o resultado do problema, pois o enunciado nos pede uma razão entre áreas, logo, as medidas dos lados não irá influenciar. Teremos uma melhor visualização desta afirmação ao decorrer da resolução.

Para dar início a resolução é essencial traçar alguma estratégia. Para isso, fazemos algumas construções auxiliares na figura inicial.

Passo 6: Trace um segmento de reta \overline{FC} . Selecione a opção segmento na janela retas e ligue os pontos F e C .

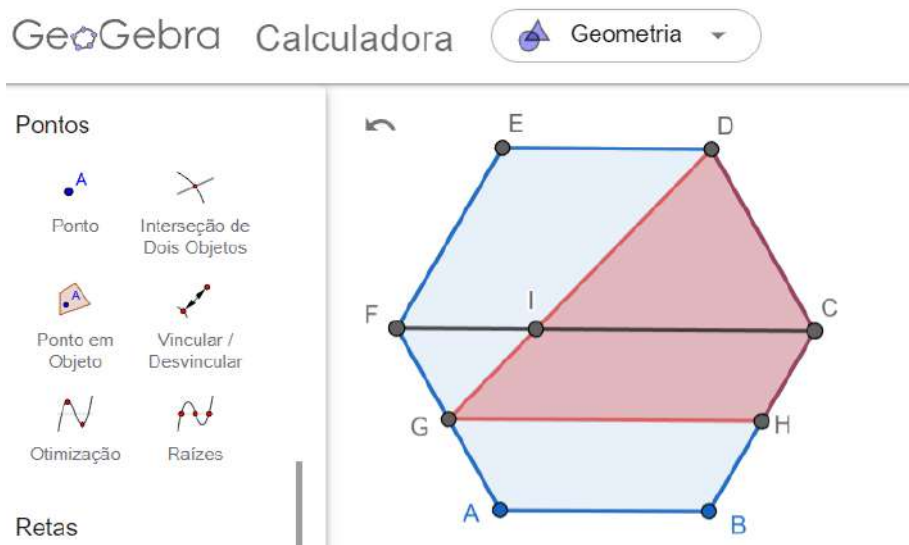
Figura 43: Problema 2 - Passo 6



Fonte: Feito pela autora

Passo 7: \overline{FC} corta o lado GD do quadrilátero $GHCD$, formando um ponto de interseção I . Selecione a opção interseção de dois objetos na janela pontos e crie o objeto.

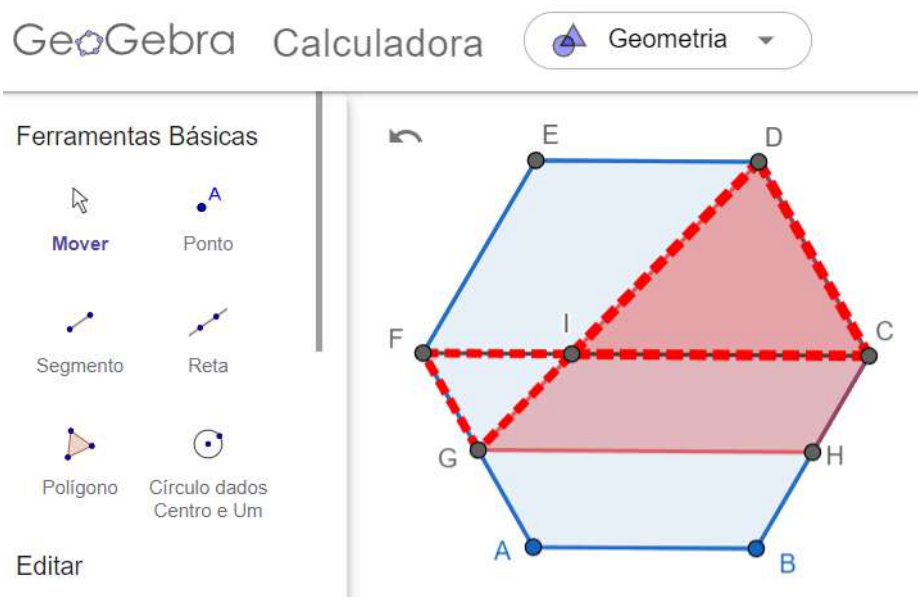
Figura 44: Problema 2 - Passo 7



Fonte: Feito pela autora

Note que os triângulos FIG e CID são semelhantes pois possuem dois ângulos iguais (caso AA), como destacada na figura abaixo:

Figura 45: Triângulos semelhantes pelo caso AA



Fonte: Feito pela autora

A partir das informações que obtemos até o momento é possível começar a traçar uma estratégia para a resolução do problema, temos que $FC = 2l$, $FG = \frac{l}{2}$ e que $CD = l$. Com isso podemos obter a seguinte igualdade:

$$\frac{CD}{FG} = \frac{FI}{CI} \Rightarrow \frac{l}{\frac{l}{2}} = \frac{FI}{CI} \Rightarrow CI = 2FI$$

E, da igualdade $FI + IC = 2l$, temos:

$$FI + IC = 2l \Rightarrow FI + 2FI = 2l$$

Portanto, chegamos que $FI = \frac{2l}{3}$ e como $IC = 2FI$, temos que $IC = \frac{4l}{3}$.

.....
Observações: Triângulos semelhantes são aqueles que têm os mesmos ângulos e lados proporcionais. Essa propriedade é fundamental na geometria porque permite a aplicação de uma série de teoremas e técnicas de resolução de problemas. A semelhança de triângulos é determinada por três casos principais:

1. Ângulo-Ângulo (AA): Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.
2. Lado-Ângulo-Lado (LAL): Quando dois triângulos apresentam um ângulo igual e os lados que formam este ângulo têm medidas proporcionais em relação aos lados

correspondentes do outro triângulo, então podemos afirmar que esses triângulos são semelhantes.

3. Lado-Lado-Lado (LLL): Se os três lados de um triângulo são proporcionais aos três lados de outro triângulo, então eles são semelhantes.

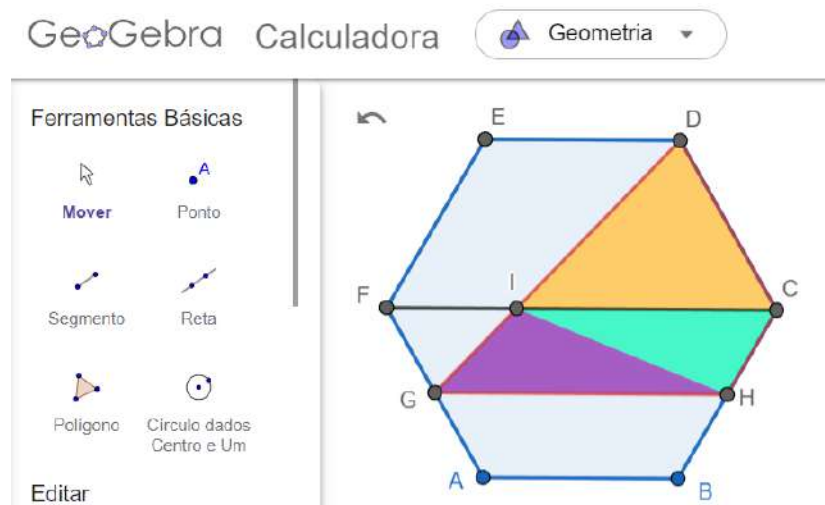
.....

Agora que temos mais dados sobre a medida dos lados das figuras, podemos pensar em como calcular a área do quadrilátero, que devido a sua irregularidade, teremos que dividi-lo em outras figuras que conhecemos o passo a passo para calcular sua área.

Assim, para obtermos a área total do quadrilátero podemos dividi-la em 3 triângulos:

$$A_{GHCD} = A_{HGI} + A_{CHI} + A_{CDI}.$$

Figura 46: Quadrilátero dividido em 3 triângulos



Fonte: Feito pela autora

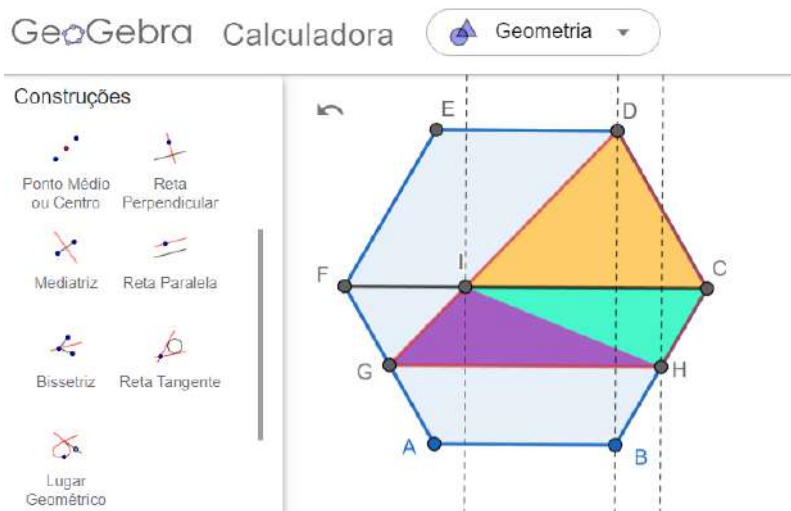
.....

Questionamentos importantes: Os triângulos A_{HGI} , A_{CHI} e A_{CDI} são congruentes?

.....

Passo 8: Vamos construir a altura dos triângulos. Selecione a opção reta perpendicular na janela construções. Selecione o ponto I e \overline{FC} , depois o ponto H e \overline{FC} e por fim, o ponto D e \overline{FC} .

Figura 47: Problema 2 - Passo 8



Fonte: Feito pela autora

Como sabemos, a altura do hexágono é dada pelo dobro da altura do triângulo equilátero que o divide em 6 partes. Sabendo que a altura de um triângulo equilátero é dada por $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, para obter a altura dos 3 triângulos, basta calcular:

$$h_{HGI} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$$

$$h_{CHI} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$$

$$h_{CDI} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, temos:

$$A_{HGI} = \frac{\left(l + \frac{l}{2}\right) \times \left(\frac{l\sqrt{3}}{4}\right)}{2} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{16}$$

$$A_{CHI} = \frac{\left(\frac{4l}{3}\right) \times \left(\frac{l\sqrt{3}}{4}\right)}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{6}$$

$$A_{CDI} = \frac{\left(\frac{8}{3}\right) \times \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = \frac{2l\sqrt{3}}{3}$$

Deste modo, da igualdade $A_{GHCD} = A_{HGI} + A_{CHI} + A_{CDI}$, temos que:

$$A_{GHCD} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{16} + \frac{l^2\sqrt{3}}{6} + \frac{2l\sqrt{3}}{3}$$

$$A_{GHCD} = \frac{32l\sqrt{3} + 17l^2\sqrt{3}}{48}$$

Com isso, já obtemos a área do quadrilátero $GHCD$, logo, basta apenas calcularmos a área do hexágono regular, que é dada por: $A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$. Portanto, a razão das áreas será dada por:

$$\frac{A_{GHCD}}{A_{hex}} = \frac{\frac{32l\sqrt{3} + 17l^2\sqrt{3}}{48}}{\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{A_{GHCD}}{A_{hex}} = \left(\frac{2l\sqrt{3}}{3} + \frac{17l^2\sqrt{3}}{48} \right) \times \frac{2}{3l^2\sqrt{3}}$$

$$\frac{A_{GHCD}}{A_{hex}} = \left[\left(\frac{2l\sqrt{3}}{3} \right) \times \left(\frac{2}{3l^2\sqrt{3}} \right) \right] + \left[\left(\frac{17l^2\sqrt{3}}{48} \right) \times \left(\frac{2}{3l^2\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$\frac{A_{GHCD}}{A_{hex}} = \frac{4}{9l} + \frac{17}{72}$$

$$\frac{A_{GHCD}}{A_{hex}} = \frac{33l}{72l}$$

$$\frac{A_{GHCD}}{A_{hex}} = \frac{11}{24}$$

Portanto, chegamos ao resultado desejado, a razão entre a área do quadrilátero e do hexágono é $\frac{11}{24}$.

.....
Questionamentos importantes: E se ao invés de escolher um lado l para o hexágono regular tivéssemos determinado $l = 2$? O resultado ainda seria o mesmo?

O Problema 2 destaca-se por sua relevância ao demonstrar que a resolução do problema não depende estritamente das medidas dos lados, mas sim da análise de todas as informações que nos são disponibilizadas no enunciado. Este enfoque ressalta também a habilidade de modificar os cálculos até alcançar uma solução conhecida, como fizemos ao dividir a área do quadrilátero em 3 triângulos. Assim, o problema ilustra a aplicação da geometria como uma disciplina que valoriza o raciocínio lógico e a criatividade na

resolução.

É importante ressaltar que as construções das figuras dos problemas não precisam ser seguidas restritamente, apenas é necessário que todas as propriedades sejam verificadas.

5 Aplicação em sala de aula

No semestre de 2023/2 realizei minhas atividades do Estágio Supervisionado de Educação Básica 4 em uma Escola Estadual no estado de São Paulo. Portanto, como prática para a conclusão do TCC, realizei uma regência com os alunos do 3º ano do Ensino Médio.

A regência ocorreu no dia 13 de novembro de 2023. A aula foi dividida em dois momentos: familiarização dos alunos com a plataforma GeoGebra e construções fundamentais do desenho geométrico e resolução de um problema sobre hexágonos regulares.

| Plano de aula planejado | |
|---------------------------------------|--|
| Unidade didática: | Geometria. |
| Bases legais: | Ciências da Natureza e Matemática. |
| Objetivos: | Abordar a resolução de problemas em conjunto com o software de geometria dinâmica GeoGebra com o intuito de obter uma melhor compreensão e aproveitamento dos conceitos abordados. |
| Recursos didáticos: | Para a professora será necessário computador, projetor, lousa e giz. Para os alunos serão necessários computadores, folha e lápis. |
| Metodologia: | Aula expositiva dinâmica a partir de softwares matemáticos. |
| Tempo previsto: | 2 aulas de 45 minutos cada. |
| Conteúdo curricular: | Resolução de problemas e geometria plana. |
| Pré-Requisitos curriculares do aluno: | Conceitos de geometria plana. |

| | |
|--------------------------|--|
| Bibliografia consultada: | <p>BALDIN, Yuriko. VILLAGRA, Guillermo. Atividades com Cabri-Géomètre II para cursos de Licenciatura em Matemática e professores do ensino fundamental médio. EdUFSCar. São Carlos: 2010.</p> <p>HIDALGO, Ernesto. Ernesto A Hidalgo. Página do Facebook, 2023..</p> |
|--------------------------|--|

| | |
|--------------|--|
| Habilidades: | <p>(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.</p> <p>(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.</p> <p>(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.</p> <p>(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.</p> <p>(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.</p> <p>(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.</p> |
|--------------|--|

Tabela 2: Plano de aula planejado pela autora.

Roteiro de aula planejado

| | |
|---------------------|---|
| Etapa 1: 20 minutos | A primeira etapa da aula é uma conversa com os alunos sobre o tema da aula proposta e quais os objetivos que serão trabalhados. Este tempo inicial também será reservado para que os alunos se arrumem em seus lugares e abram o software GeoGebra em cada notebook. |
| Etapa 2: 30 minutos | Na próxima etapa será iniciado o estudo da geometria em conjunto com o uso de régua e compasso no GeoGebra, sendo abordada as principais construções: mediatriz, ponto médio, reta perpendicular, reta paralela, triângulo equilátero e hexágono regular. |
| Etapa 3: 40 minutos | Para finalizar a aula, será apresentado o Problema 1 desde trabalho. Para resolução, os alunos devem construir a figura do problema no GeoGebra com o uso das ferramentas régua e compasso. Após construída a figura, é desejado que resolvam o problema com o auxílio de construções auxiliares feitas no GeoGebra, de modo que possam obter uma melhor visualização e compreensão do problema. |

Tabela 3: Roteiro de aula planejado pela autora.

5.1 Análise dos resultados

A Escola Estadual atua com o Ensino Fundamental II e Ensino Médio, e no dia da aula, no Ensino Fundamental II estava sendo aplicado o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Visando esta situação, os horários das aulas sofreram alterações, o que resultou no aumento de mais uma aula de 45 minutos para aplicação da regência, totalizando três.

Com isso, o plano e roteiro de aula sofreram alterações. Seguem abaixo as tabelas com as informações corretas.

| Plano de aula | |
|--------------------------|--|
| Unidade didática: | Geometria. |
| Bases legais: | Ciências da Natureza e Matemática. |
| Objetivos: | Abordar a resolução de problemas em conjunto com o software de geometria dinâmica GeoGebra com o intuito de obter uma melhor compreensão e aproveitamento dos conceitos abordados. |
| Recursos didáticos: | Para a professora será necessário computador, projetor, lousa e giz. Para os alunos serão necessários computadores, folha e lapís. |
| Metodologia: | Aula expositiva dinâmica a partir de softwares matemáticos. |
| Tempo previsto: | 3 aulas de 45 minutos cada. |
| Conteúdo curricular: | Resolução de problemas e geometria plana. |
| Bibliografia consultada: | BALDIN, Yuriko. VILLAGRA, Guillermo. Atividades com Cabri-Géomètre II para cursos de Licenciatura em Matemática e professores do ensino fundamental médio. EdUFSCar. São Carlos: 2010. HIDALGO, Ernesto. Ernesto A Hidalgo. Página do Facebook, 2023.. |
| Habilidades: | <p>(EF06MA18) - Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.</p> <p>(EF06MA22) - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.</p> <p>(EF06MA24) - Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.</p> <p>(EF07MA31) - Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.</p> <p>(EF07MA32) - Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.</p> <p>(EF08MA15) - Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.</p> |

Tabela 4: Plano de aula feito pela autora.

Roteiro de aula

| | |
|---------------------|---|
| Etapa 1: 35 minutos | A primeira etapa da aula é uma conversa com os alunos sobre o tema da aula proposta e quais os objetivos que serão trabalhados. Este tempo inicial também será reservado para que os alunos se arrumem em seus lugares e abram o software GeoGebra em cada notebook. |
| Etapa 2: 55 minutos | Na próxima etapa será iniciado o estudo da geometria em conjunto com o uso de régua e compasso no GeoGebra, sendo abordada as principais construções: mediatriz, ponto médio, reta perpendicular, reta paralela, triângulo equilátero e hexágono regular. |
| Etapa 3: 45 minutos | Para finalizar a aula, será apresentado o Problema 1 desde trabalho. Para resolução, os alunos devem construir a figura do problema no GeoGebra com o uso das ferramentas régua e compasso. Após construída a figura, é desejado que resolvam o problema com o auxílio de construções auxiliares feitas no GeoGebra, de modo que possam obter uma melhor visualização e compreensão do problema. |

Tabela 5: Roteiro de aula feito pela autora.

Ao longo das experiências vividas nos estágios supervisionados, notei que o tempo é um grande limitador quando planejamos uma aula, principalmente por conta de imprevistos que podem acontecer no momento. O acréscimo de uma aula para a regência foi crucial, o tempo planejado para cada etapa foi ultrapassado devido à algumas complicações.

Em um primeiro momento, foram solicitados os notebooks na sala de laboratório e levados para sala de aula do 3º ano. Ao passar do tempo os alunos foram chegando e a cada um foi entregue um notebook e uma folha sulfite em branco. Ao entrarem na plataforma ocorreu uma complicação com o acesso a internet em alguns dos notebooks, assim, para resolver o problema foi roteado internet de meu celular pessoal e a aula pôde continuar. Logo após todos conseguirem se conectar a internet foi iniciada uma conversa com toda a turma sobre o que seria realizado e seu objetivo.

Antes de iniciar as construções fundamentais de desenho geométrico no GeoGebra foi questionado aos alunos se conheciam a plataforma e apenas 2 se posicionaram. Na escola a iniciativa do uso de softwares nas aulas de matemática já existiu, porém, devido à

dificuldades que os professores e alunos tiveram com a plataforma, a implementação dessa atividade prática não foi concretizada. Esse fato mostra a importância que a formação de professores tem para o ensino-aprendizagem do aluno, pois quando utilizada de maneira correta e eficiente, a tecnologia pode fornecer grandes resultados.

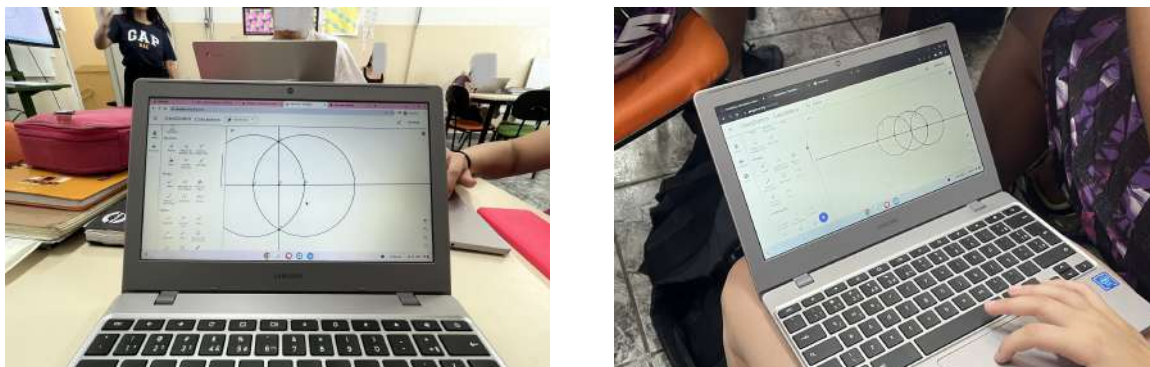


Figura 48: Construções feitas pelos alunos.

Ao iniciar as construções fundamentais no GeoGebra, os alunos passaram a ter bastante dificuldade em utilizar a plataforma, sendo necessário auxílio individual. Essas duas etapas iniciais se estenderam por mais tempo que o planejado, com duração de duas aulas de 45 minutos.



Figura 49: Auxiliando os alunos.

Assim que todos conseguiram finalizar as construções, primeiro solicitei que os alunos construíssem a figura do Problema 1 utilizando a mesma metodologia passo a passo como na atividade anterior.

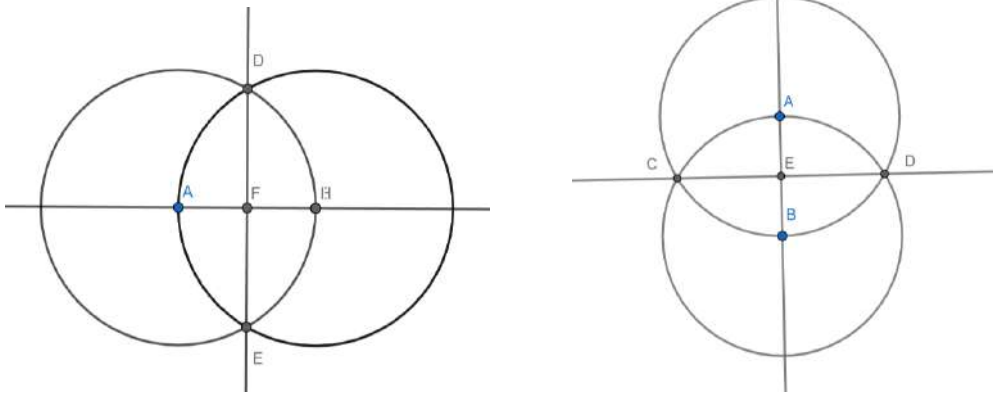


Figura 50: Exemplos de construções feitas pelos alunos da turma do 3° ano.

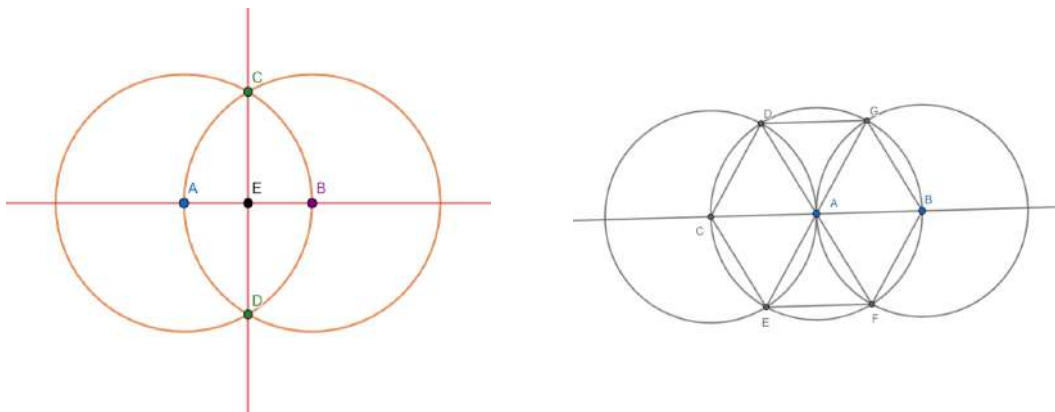


Figura 51: Exemplos de construções feitas pelos alunos da turma do 3° ano.

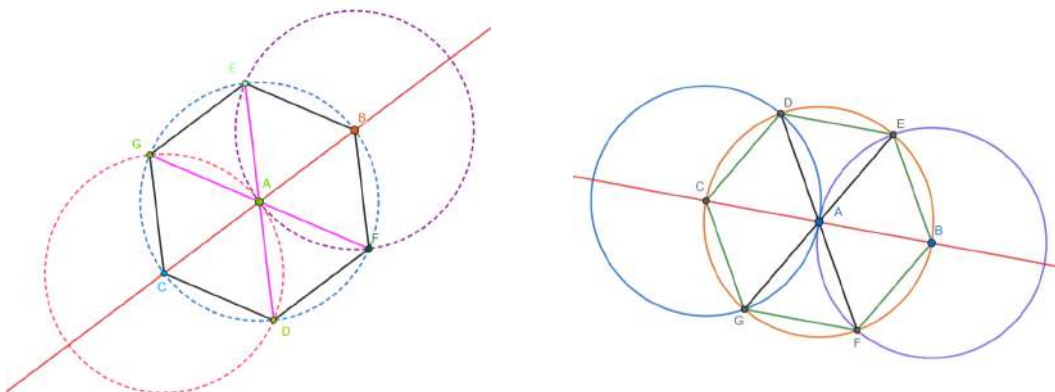


Figura 52: Exemplos de construções feitas pelos alunos da turma do 3° ano.

Logo que foram finalizando a construção, alguns alunos já começaram a manifestar algumas análises da figura, notando que a construção havia dois triângulos.

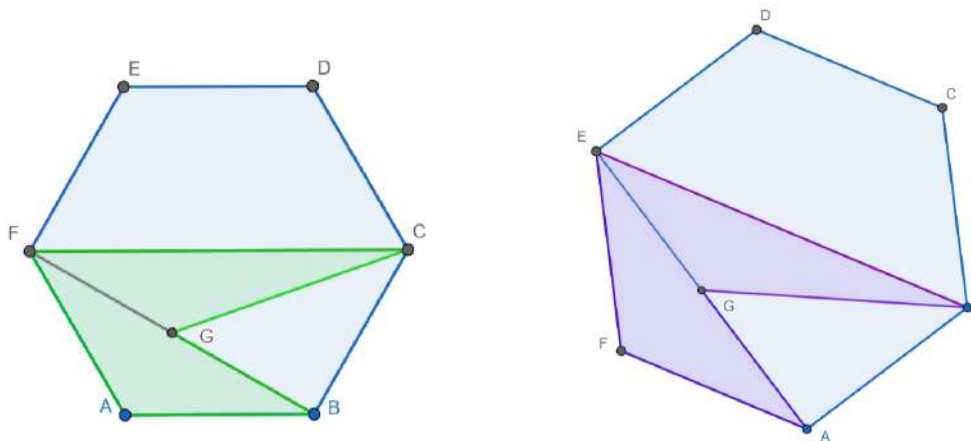


Figura 53: Exemplos de construções feitas pelos alunos da turma do 3º ano.

A resolução do problema teve um ótimo resultado, os alunos pensaram em uma estratégia de resolução rapidamente, porém tiveram bastante dúvidas quanto à orientação das figuras. Por exemplo, as imagens da Figura 58 acima contém dois hexágonos regulares com um polígono irregular feito por quatro vértices do hexágono e um ponto dado pelo ponto médio de um segmento. Na primeira imagem, o aluno optou por construir seu segmento AB como base e elaborou sua construção a partir daí. Já na segunda imagem o aluno optou por construir seu segmento inicial AB , mas não de forma convencional como na primeira, mesmo assim, a construção foi feita de maneira correta, pois todas as propriedades da construção foram respeitadas.



Figura 54: Registros da atividade.



Figura 55: Registros da atividade.

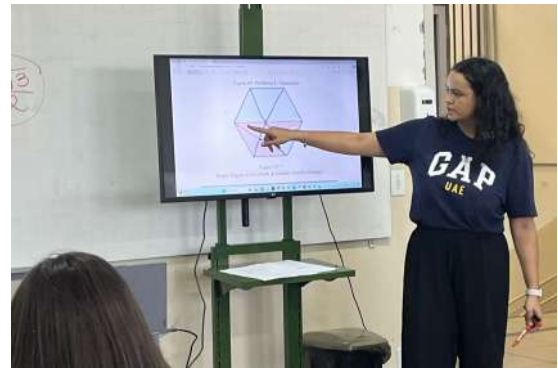
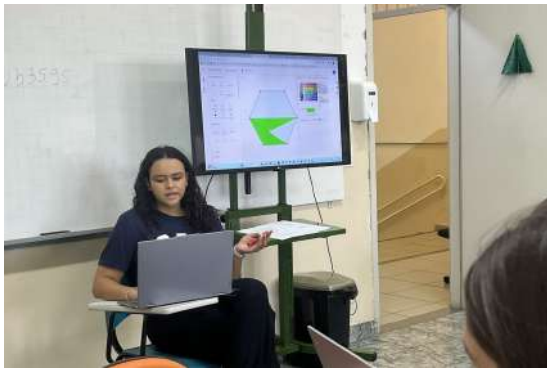


Figura 56: Resolução do problema.



Figura 57: Alunos resolvendo o problema.

Uma observação particularmente marcante foi a frequente inquietação dos alunos sobre a correção de suas construções; frequentemente questionavam se suas criações estavam “erradas”, especialmente quando estas divergiam do exemplo que demonstrava na lousa. Esse comportamento destacou uma tendência preocupante: os alunos estavam habituados a replicar rigidamente as instruções do professor, negligenciando o uso da própria criatividade e interpretação nas atividades propostas. Diante deste cenário, foi enfatizada

a intenção da tarefa era justamente fomentar a expressão individual. Cada construção deveria refletir a singularidade de seu criador, incentivando um ambiente de aprendizado onde a liberdade criativa era não apenas permitida, mas também valorizada. Essa abordagem visava encorajar os alunos a explorarem suas capacidades criativas e a compreenderem que, no contexto dessa atividade, não existia uma forma “correta” ou “incorreta” de executar a tarefa, mas sim um convite à experimentação e à descoberta pessoal.

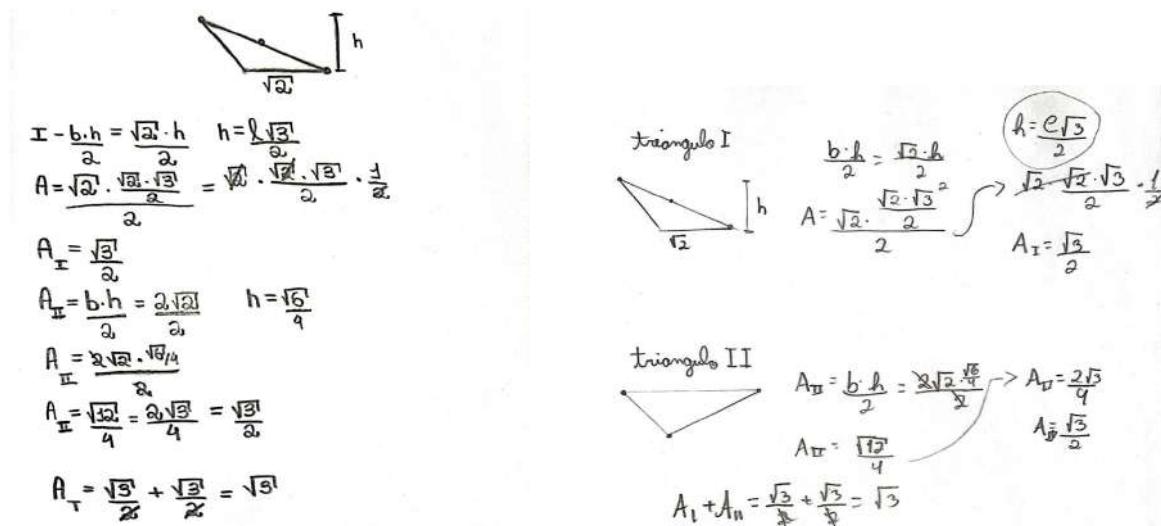


Figura 58: Resoluções do problema feitas pelos alunos.

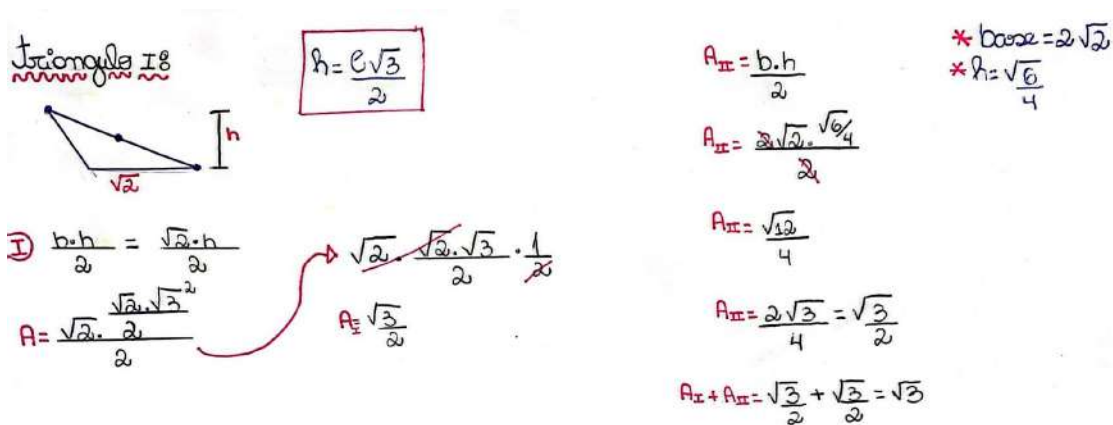


Figura 59: Resoluções do problema feitas pelos alunos.

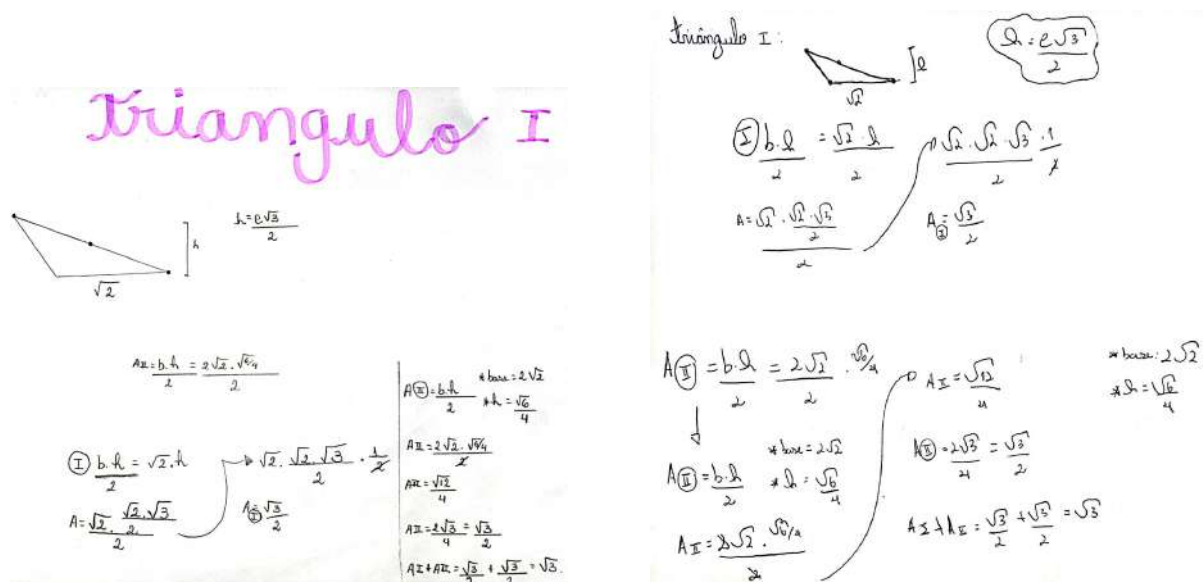


Figura 60: Resoluções do problema feitas pelos alunos.

5.2 Avaliação

A implementação do GeoGebra como ferramenta para resolução de problemas demonstrou ser bastante eficaz aos estudantes. Para avaliar a eficácia da atividade com maior precisão, foi proposto aos alunos um questionário, o qual foi elaborado para capturar suas perspectivas detalhadas sobre a dinâmica da aula e do conteúdo apresentado.

O questionário continha as seguintes perguntas:

1. Você já conhecia o GeoGebra?
2. Você acredita que o GeoGebra pode ser uma ferramenta auxiliar para o ensino da geometria?
3. A resolução do problema ficou clara para você?
4. Você acredita que o uso do GeoGebra auxiliou no entendimento dos conceitos geométricos abordados na aula?
5. Com relação a sua aprendizagem, qual nota você dá para aula de hoje?
6. Gostaria de fazer algum comentário?

As tabelas abaixo contém os resultados do questionário:

Você já conhecia o GeoGebra?

| | |
|-----|---|
| Sim | 8 |
| Não | 4 |

Tabela 6: Pergunta 1 - Questionário avaliativo

Você acredita que o GeoGebra pode ser uma ferramenta auxiliar para o ensino da geometria?

| | |
|-----|----|
| Sim | 12 |
| Não | 0 |

Tabela 7: Pergunta 2 - Questionário avaliativo

A resolução do problema ficou clara para você?

| | |
|-----------------|----|
| Sim, totalmente | 10 |
| Mais ou menos | 2 |
| Não | 0 |

Tabela 8: Pergunta 3 - Questionário avaliativo

Você acredita que o uso do GeoGebra auxiliou no entendimento dos conceitos geométricos abordados na aula?

| | |
|-------------------|---|
| Sim, com certeza. | 8 |
| Sim, um pouco. | 4 |
| Não. | 0 |

Tabela 9: Pergunta 4 - Questionário avaliativo

Com relação a sua aprendizagem, de 1 a 5, qual nota você dá para a aula de hoje?

| | |
|--------|---|
| Nota 1 | 0 |
| Nota 2 | 0 |
| Nota 3 | 0 |
| Nota 4 | 4 |
| Nota 5 | 8 |

Tabela 10: Pergunta 5 - Questionário avaliativo

Gostaria de fazer algum comentário?

| |
|---|
| Aula muito bem organizada |
| A utilização da ferramenta facilitou o entendimento do assunto, levando a um melhor rendimento das aulas. |
| Gostaria de mais aula |
| a aula foi muito boa em todos os quesitos |
| Ótima aula |

Tabela 11: Pergunta 6 - Questionário avaliativo

6 Considerações finais

Neste âmbito, o GeoGebra, com seus recursos visuais e dinâmicos, permitiu uma exploração mais profunda dos conceitos geométricos, facilitando a visualização e a experimentação. Este trabalho evidenciou que o uso de tecnologias educacionais é uma estratégia eficaz para superar os desafios tradicionalmente associados ao ensino de geometria. A capacidade de visualizar, manipular e experimentar com figuras geométricas ofereceu aos alunos uma nova perspectiva, transformando a aprendizagem em uma experiência mais concreta e menos abstrata.

As implicações deste estudo para o ensino de matemática são consideráveis. Elas sugerem a necessidade de integrar tecnologias educacionais modernas no currículo escolar como uma forma de melhorar não apenas o entendimento dos alunos sobre a geometria, mas também de desenvolver suas habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico.

Reconhecemos que, à medida que a tecnologia se torna cada vez mais essencial no contexto educacional, o GeoGebra se configura como uma peça fundamental para alcançarmos nossas metas no ensino e aprendizado da matemática.

Referências

- [1] ASTH, Rafael. Hexágono. Toda Matéria, [s.d.]. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/hexagono/>.
- [2] BALDIN, Yuriko. VILLAGRA, Guillermo. **Atividades com Cabri-Géomètre II para cursos de Licenciatura em Matemática e professores do ensino fundamental médio**. EdUFSCar. São Carlos: 2010.
- [3] BARBOSA, Rafael; PLACCO, Vera; LIMA, Helena. **Aprendizagens e relações no tempo e espaço escolares: o ensino integral como espaço de prevenção à vulnerabilidade. SIMPÓSIO NACIONAL SOBRE ADOLESCÊNCIA: VULNERABILIDADE, PROTAGONISMOS E DESAFIOS**, 2016.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- [5] BRASIL, Secretaria de Educação Básica. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: planejando a alfabetização e dialogando com diferentes áreas do conhecimento. Ano 2: unidade 6. Brasília: MEC, SEB, 2012.
- [6] HIDALGO, Ernesto. **Ernesto A Hidalgo**. Página do Facebook, 2023.
- [7] ECHEVERRÍA, M. D. P. **A solução de problemas em matemática**. In: POZO, J. I. (org.). A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.
- [8] FAINGUELERNT, E. K. Educação matemática: Representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
- [9] FERREIRA, Antonio Cerino Dias. **O processo de construção dos poliedros de Arquimedes: uma visão dinâmica a partir do GeoGebra**. / Antonio Cerino Dias Ferreira. – Santarém, Pará, 2019.
- [10] FREITAS, Jeruza Quintana Petrarca de. “Resolução de problemas no ensino da matemática: uma introdução à geometria fractal no ensino fundamental.” (2015).
- [11] GERÔNIMO, João Roberto. **Geometria Plana e espacial: um estudo axiomático**. , 2 ed - Maringá: Eduem, 2010.

- [12] GIL, Daniel. TORREGROSA, Joaquim. RAMIRES Lorenzo. **QUESTIONANDO A DIDÁTICA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ELABORAÇÃO DE UM MODELO ALTERNATIVO**. Cad.Cat.Ens.Fís., Florianópolis, v.9,n.1: p.7-19, abr.1992.
- [13] GONÇALVES, W. V. Amadurecendo como professor, pesquisador e colaborador com o GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, [S. l.], v. 12, n. 2, p. 221–238, 2023. DOI: 10.23925/2237-9657.2023.v12i2p221-238. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/63643>. Acesso em: 5 nov. 2023.
- [14] GOULART, Thais Maria Barbosa. **Os “Elementos” de Euclides visitam o ensino fundamental: análise de tarefas matemáticas pautadas na história da matemática e desenvolvidas no software GeoGebra**. 198 f. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020.
- [15] GRAVINA, Maria. **GEOMETRIA DINÂMICA: UMA NOVA ABORDAGEM PARA O APRENDIZADO DA GEOMETRIA**. VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov 1996.
- [16] JUDITH HOHENWARTER. **O GeoGebra como Ferramenta para Ensinar e Aprender**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>
- [17] KRULIK, Stephen; RUDNICK, Jesse A. **Problem driven mathematics: applying the mathematics beyond solutions**. Chicago: McGraw-Hill, 2005.
- [18] LORENZATO, Sérgio Aparecido. Porque não ensinar Geometria? In: A Educação Matemática em Revista. Blumenal: SBEM, ano III, n.4, 1995, p. 3-13.
- [19] MARTINS, Isabel Cristina Tavares. **Ensino de Trigonometria: uma proposta de atividades online na plataforma Geogebra** / Isabel Cristina Tavares Martins. - Santarém, 2021.
- [20] MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa? Revista cultural La Laguna Espanha, 2012. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueefinal.pdf>.

- [21] NETTO, Sérgio Lima. **Construções Geométricas: Exercícios e Soluções.** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro - Editora SBM, 2009.
- [22] NUNES, Célia Barros. **O processo ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática.** 2010. 430 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2010. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102122>.
- [23] POLYA, George. (1995). **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2^a reimpressão. Rio de Janeiro.
- [24] PONTES, Edel Alexandre Silva. **MÉTODO DE POLYA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.** HOLOS, [S. l.], v. 3, p. 1–9, 2019. DOI: 10.15628/holos.2019.6703. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/6703>.
- [25] POZO, J.I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998.
- [26] REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lucia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas.** 2. ed. Campinas: Ed. UNICAMP, 2008.
- [27] ROMANATTO, M. C. **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA.** Revista Eletrônica de Educação, [S. l.], v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012. DOI: 10.14244/19827199413. Disponível em: <https://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413>.
- [28] SALIN, Eliana. **“Geometria Espacial: A aprendizagem através da construção de sólidos geométricos e da resolução de problemas.”** REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática 8.2 (2013): 261-274.
- [29] SCHIMIDT, Giovani Monteiro, Valdir Pretto, and José Carlos Pinto Leivas. **“História da matemática como recurso didático-pedagógico para conceitos geométricos.”** Revista Caderno Pedagógico 13.1 (2016).

- [30] SILVA GHG da, Penteado MG. **“Geometria dinâmica na sala de aula: o desenvolvimento do futuro professor de matemática diante da imprevisibilidade.”** Ciênc educ (Bauru), 2013;19(2):279–92. Available from: <https://doi.org/10.1590/S1516-73132013000200004>
- [31] SIQUEIRA, Ruan. **Tutorial para Geogebra**, Universidade Federal Fluminense - UFF, 2017.
- [32] SOARES, Maria Teresa Carneiro, and Neuza Bertoni Pinto. **“Metodologia da resolução de problemas.”** 24^a Reunião ANPED (2001).
- [33] TEIXEIRA, Lucas Santos; COELHO, Iara Marins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2002, 31 de agosto de 2023. <https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467>
- [34] WAGNER, E; CARNEIRO, Jose Paulo Q. **Construcoes geometricas**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, c1998. 110 p. (Colecao do Professor de Matematica).

@empty @

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil