UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

AILTON CECÍLIO BATISTA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA MATEMÁTICA DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DAS ESCOLAS PÚBLICAS SOB A METODOLOGIA DE PÓLYA

SÃO CARLOS – SP
2025

AILTON CECÍLIO BATISTA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA MATEMÁTICA DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DAS ESCOLAS PÚBLICAS SOB A METODOLOGIA DE PÓLYA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS – SP
2025

Batista, Ailton Cecílio

Resolução de problemas da matemática da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas sob a metodologia de Pólya / Ailton Cecílio Batista -- 2025.
65f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Wladimir Seixas
Banca Examinadora: Wladimir Seixas, José Luciano Santinho Lima, Yuriko Yamamoto Baldin
Bibliografia

1. Geometria. 2. Metodologia de resolução de problemas. 3. Olimpíada Matemática. I. Batista, Ailton Cecílio. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Ailton Cecílio Batista, realizada em 17/02/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas (UFSCar)

Prof. Dr. José Luciano Santinho Lima (IFSP)

Profa. Dra. Yuriko Yamamoto Baldin (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero expressar minha imensa gratidão a Deus, que me acompanhou com seu cuidado e bênçãos em cada quilômetro percorrido nos dias em que eu dirigia à universidade.

Agradeço também aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, e aos meus irmãos, que, além de me apoiarem, durante a colheita do café, nos dias em que eu precisava sair mais cedo devido aos meus compromissos de estudo ou trabalho se dedicaram a entregar o café que eu havia colhido no fim do dia.

Não posso deixar de agradecer minha namorada, que esteve firme ao meu lado, oferecendo apoio, tranquilidade e até chocolates nos dias de prova.

E, por fim, quero agradecer a todos do Grupo de Jovens TJM (TUDO POR JESUS NADA SEM MARIA) de Jacuí/MG, pelas inúmeras orações que me sustentaram e impulsionaram ao longo desse processo.

"Um dia Deus sonhou com você. E você, o que sonha?"
(tema do grupo de jovens TJM, no dia 03/09/2016)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é utilizar a metodologia de resolução de problemas de Polya como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de conceitos de Geometria em sala de aula. O estudo foi desenvolvido a partir de quatro exercícios do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), abordando temas como perímetro, área e leis de formação. Além de analisar a metodologia de Pólya, foi realizada a generalização das questões trabalhadas, que constitui um dos principais objetivos do livro “A Arte de Resolver Problemas”. Todo esse processo foi conduzido em consonância com as habilidades e competências previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Palavras-chave: Geometria. Metodologia de resolução de problemas. Olimpíada Matemática.

ABSTRACT

The objective of this work is to use Pólya's problem-solving methodology as a tool for teaching and learning geometry concepts in the classroom. The study was developed based on four exercises from the question bank of the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools (OBMEP), addressing topics such as perimeter, area, and formation rules. In addition to analyzing Pólya's methodology, a generalization of the worked-out problems was made, which constitutes one of the main objectives of the book How to Solve It. This entire process was conducted in alignment with the skills and competencies outlined by the National Common Curricular Base (BNCC).

Keywords: Geometry. Problem-solving methodology. Mathematics Olympiad.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNE	Conselho Nacional da Educação
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PIC	Projeto de Iniciação Científica Júnior
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a metodologia de resolução de problemas, conforme proposto por George Pólya, aplicada em sala de aula, tendo como objeto de análise os exercícios do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Assim, tem por objetivo alcançar a generalização das questões, promovendo questionamentos que extrapolam a resolução dos exercícios em sua forma original.

Os exercícios selecionados estão relacionados ao eixo de Geometria, abordando temas como perímetro, área e leis de formação. Para o desenvolvimento deste estudo, foi necessário o aprofundamento nas habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relacionadas à Geometria.

A estrutura do trabalho está organizada da seguinte maneira: inicialmente, apresentamos uma visão histórica das Olimpíadas de Matemática e um panorama sobre a BNCC. Em seguida, são destacados os conteúdos matemáticos que serão trabalhados nas questões selecionadas. Após isso, dedicamos um capítulo à descrição das quatro fases da resolução de problemas, conforme o livro “A Arte de Resolver Problemas” de George Pólya (Pólya, 1995). Por fim, aplicamos a metodologia de Pólya em quatro questões do banco de questões da OBMEP, mostrando sua utilidade e eficácia na prática e sua importância com ferramenta pedagógica para o ensino da Matemática e para a formação do docente.

2 AS OLIMPÍADAS MATEMÁTICAS E A BNCC

Inicialmente trataremos das Olimpíadas de Matemática e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que serão peças fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 AS OLIMPÍADAS MATEMÁTICAS

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) foi criada em 1979. Organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), a competição tem por objetivos:

> a) Interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino de Matemática no Brasil, estimulando alunos e professores a um aprimoramento maior propiciado pela participação em olimpíadas; b) Descobrir jovens com talento matemático excepcional e coloca-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa; c) Selecionar os estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de Matemática a partir do seu desempenho na OBM, realizando seu devido treinamento; d) Apoiar as competições regionais de Matemática em todo Brasil; e) Organizar as diversas competições internacionais de Matemática, quando realizadas no Brasil (Olimpíada Brasileira de Matemática, 2024).

Esta competição é voltada para diferentes níveis de estudantes, a partir do 6º do Ensino Fundamental até o nível superior, provenientes tanto de instituições públicas quanto privadas do Brasil.

Já a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) foi criada no ano de 2005 e obedecia aos mesmos fins da OBM, porém, com algumas diferenças no feitio da competição e englobando somente alunos de escolas públicas do país.

A OBMEP surge com o objetivo de valorizar a matemática e despertar o interesse dos estudantes, mostrando que essa disciplina faz parte do nosso cotidiano e que seu estudo nos conecta a um mundo repleto de desafios, que podem ser superados por meio da criatividade, da intuição e do raciocínio lógico (Silva, 2023).

No ano de 2017, a OBM se integrou à OBMEP e modificou seus moldes. A integração entre as duas olimpíadas também se reflete no incentivo ao trabalho em equipe, com a participação de professores e alunos, criando uma rede colaborativa para o aprimoramento do ensino de Matemática. A troca de experiências e o aprendizado contínuo das metodologias aplicadas nas competições são aspectos que se reforçam mutuamente, criando um ambiente educativo mais enriquecedor para todos os envolvidos (MEC, 2024). Em relação ao 6º e 7º ano do Ensino Fundamental (nível 1), 8ºe 9 ano do Ensino Fundamental (nível 2) e o Ensino Médio (nível 3), a prova passou a ser composta por uma única fase sendo esta discursiva. Já em relação ao nível universitário (nível 4), não houve alteração com a prova sendo dividida em duas fases: a primeira objetiva e a segunda discursiva.

A OBMEP, com sua abordagem mais acessível, acabou funcionando como um processo de “descoberta” de jovens talentos, muitos dos quais posteriormente participam da OBM, onde são desafiados por questões de maior complexidade.

Atualmente a prova da OBMEP é estruturada em duas fases, sendo cada uma delas composta por diferentes tipos de questões e com objetivos distintos.

A primeira fase da OBMEP é composta por uma prova objetiva, com 20 questões de múltipla escolha, distribuídas de acordo com os conteúdos de Matemática do ensino fundamental e médio. Essa fase busca avaliar o conhecimento geral dos estudantes em Matemática, incluindo temas como álgebra, geometria plana e espacial, aritmética, probabilidade e raciocínio lógico. A prova objetiva é aplicada simultaneamente em todo o Brasil, nas escolas participantes, geralmente em um único dia. Os alunos com as melhores notas são classificados para a segunda fase.

Já a segunda fase é mais desafiadora e consiste em uma prova dissertativa com 6 questões, com um nível de complexidade maior. As questões dessa fase exigem que os alunos escrevam respostas detalhadas e bem justificadas, evidenciando raciocínio lógico, criatividade e a capacidade de aplicar conceitos matemáticos de maneira mais profunda. Essa fase é onde são atribuídas as medalhas (ouro, prata e bronze) e as menções honrosas, com base no desempenho dos participantes. Além disso, a segunda fase pode envolver temas mais específicos e complexos da Matemática, exigindo um nível mais avançado de conhecimento, adequado ao perfil dos estudantes que chegaram até essa etapa.

Caso receba alguma das premiações, o aluno pode participar do Projeto de Iniciação Científica Júnior (PIC), que tem como objetivo qualificar os estudantes para sua futura atuação em alguma área das ciências exatas (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, 2018).

2.2 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A BNCC é um documento normativo que estabelece as diretrizes e os conteúdos essenciais que todos os estudantes da educação básica no Brasil devem aprender ao longo de sua trajetória escolar. Em 2017, este documento foi entregue pelo Ministério da Educação ao Conselho Nacional da Educação (CNE). Sua criação busca garantir um currículo comum a ser seguido por todas as escolas do país, assegurando igualdade de oportunidades educacionais para todos os estudantes, independentemente de sua localização ou da rede de ensino em que estudam. A BNCC orienta as práticas pedagógicas e busca promover uma educação de qualidade, com foco na formação integral do aluno (Brasil, 2018).

O CNE, sendo o órgão normativo do Sistema Nacional de Educação, como descrito pela lei 9131/95, após fazer a apreciação da proposta BNCC, a transformou, em dezembro de 2017, em uma norma nacional (Brasil, 2018).

A BNCC é uma referência nacional para a elaboração dos currículos dos sistemas e redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios, assim como para as propostas pedagógicas das instituições de ensino. Inserida na política nacional da Educação Básica, a

BNCC busca contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações nos âmbitos federal, estadual e municipal, abrangendo a formação de professores, a avaliação, a produção de conteúdos educacionais e os critérios para a oferta de infraestrutura adequada ao pleno desenvolvimento da educação (Bonatti, 2022). Seu principal objetivo é proporcionar uma educação que promova o desenvolvimento pleno dos estudantes, tanto no aspecto cognitivo quanto nas dimensões socioemocionais e éticas, preparando-os para os desafios da vida contemporânea e para o exercício da cidadania (Brasil, 2018).

Uma das grandes inovações trazidas pela BNCC é a concepção de que todos os estudantes devem ter acesso ao mesmo conjunto de aprendizagens essenciais, o que implica em um currículo unificado. No entanto, a BNCC também permite a flexibilidade e a adaptação das propostas pedagógicas de acordo com as realidades regionais e locais, reconhecendo a diversidade do país (Brasil, 2018).

2.2.1 Estrutura e Organização

A BNCC está organizada por áreas do conhecimento, que são subdivididas em componentes curriculares, e detalha as competências e habilidades a serem desenvolvidas ao longo das diferentes etapas da educação básica, se dividindo da seguinte forma:

Educação Infantil: Foca no desenvolvimento das crianças de 0 a 5 anos, com ênfase no desenvolvimento pessoal, social, cognitivo e motor, considerando as especificidades dessa fase.

Ensino Fundamental: Abrange do 1º ao 9º ano, divididos em dois ciclos (Anos Iniciais e Anos Finais), e define as aprendizagens essenciais que devem ser adquiridas em áreas como Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, Língua Estrangeira e, em alguns casos, outras disciplinas.

Ensino Médio: A BNCC do Ensino Médio é organizada em componentes curriculares obrigatórios e optativos. As áreas de conhecimento são mantidas, mas o currículo se organiza de maneira que os alunos possam aprofundar seus estudos de acordo com suas escolhas e interesses, o que é oferecido por meio dos itinerários formativos.

A BNCC também traz a definição de competências gerais, que são habilidades essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo de sua educação básica, tais como a capacidade de comunicar-se, resolver problemas, raciocinar criticamente, compreender e valorizar a diversidade, entre outras (Bonatti, 2022).

2.2.2 Objetivos e Princípios da BNCC

A BNCC visa proporcionar uma educação que seja capaz de:

Promover a equidade: Assegurando que todos os estudantes tenham acesso às mesmas oportunidades de aprendizagem, independentemente de sua origem ou localização.

Fortalecer a formação integral: Focando no desenvolvimento acadêmico, mas também nas competências socioemocionais e éticas.

Incentivar a participação cidadã: Capacitando os estudantes para o exercício pleno da cidadania e do protagonismo juvenil.

Valorizar a diversidade cultural: Respeitando as diferenças regionais, étnicas e culturais, e promovendo a inclusão.

Por meio de uma abordagem integrada, a BNCC propõe que o currículo escolar não seja apenas uma lista de conteúdos, mas um processo contínuo e dinâmico de aprendizagem que acompanhe as necessidades e os interesses dos estudantes.

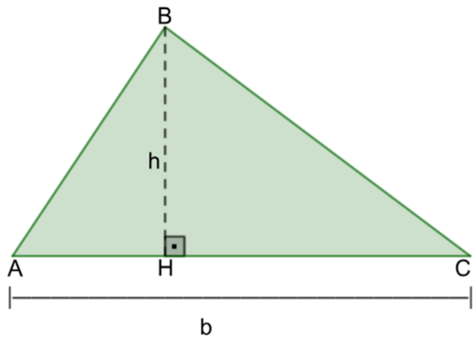
3 CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Para o desenvolvimento e resolução de alguns exercícios que serão posteriormente trabalhados, apresentaremos rapidamente os conceitos matemáticos dessas questões. O conteúdo para a resolução e validação dos problemas selecionados, seguirá como base o livro “Matemática - Volume Único”, do autor Iezzi, Dolce *et al.* (2019). Do livro, faremos uso dos capítulos 8, 10 e 22, contemplando os conceitos de progressão geométrica, área de figuras planas e as relações métricas do triângulo retângulo, respectivamente.

3.1 ÁREA DO TRIÂNGULO

Dado um triângulo ABC, de base b e altura h, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Triângulo ABC.

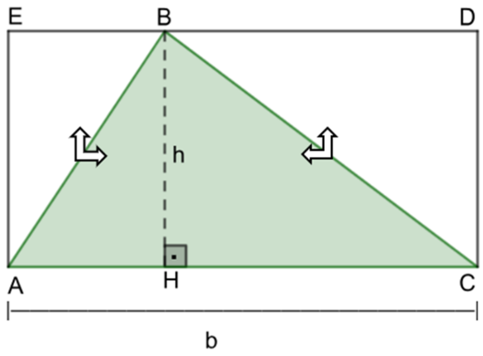


Fonte: Elaborada pelo autor.

Construímos sobre o triângulo ABC o retângulo $ACDE$ com B pertencente a DE. Observando os triângulos ABE e ABH, temos que os segmentos de reta AH e BE possuem a mesma medida. O mesmo ocorre com os segmentos AE e BH. Temos também que o segmento de reta AB é comum entre os dois triângulos. Logo, pelo caso de congruência LLL (Lado-Lado-Lado), podemos afirmar que os triângulos ABE e ABH são congruentes.

O mesmo ocorre entre os triângulos BCD e BCH. Assim, analogamente, podemos afirmar, pelo caso LLL, que os triângulos BCD e BCH são congruentes. Ver Figura 2.

Figura 2 – Triângulos relacionados ao triângulo *ABC*.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com isso, podemos afirmar que a área do triângulo *ABC* mede a metade da área do retângulo *ACDE*.

Concluímos assim, que para um triângulo de base b e altura h – seja ele de que tipo for – podemos escrever:

$$A = \frac{b.h}{2},$$

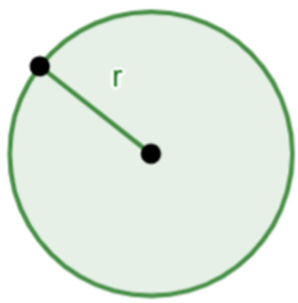
ou seja, a área de um triângulo é igual a metade do produto da medida da base pela medida da altura respectiva.

3.2 ÁREA DO CÍRCULO E DE SUAS PARTES

Um círculo de raio r tem a área dada pelo produto (ver Figura 3):

$$A = \pi r^2.$$

Figura 3 – Círculo de raio r.



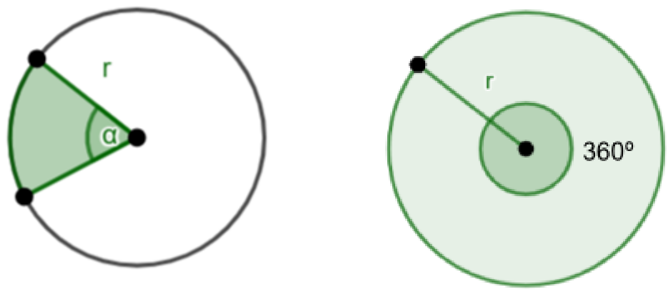
Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.1 Área do setor circular

A área do setor circular é a área de uma determinada região interna da circunferência que se encontra limitada por dois raios e um arco de círculo. Podemos representar o setor circular como uma "fatia" da circunferência.

Dado uma circunferência de raio r, podemos descrever um setor de α^o como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Exemplos de setores circulares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para calcularmos a área de um dado setor circular, primeiramente, temos que ter conhecimento de que esta área está diretamente relacionada à proporção do ângulo central pelo ângulo que forma a circunferência total. Neste sentido, faremos uso da regra de três:

$$\begin{cases} & \text{área} & & \text{ângulo central (graus)} \\ \text{setor:} & A & \_\_\_\_\_\_\_\_ & \alpha^o \\ \text{círculo:} & \pi r^2 & \_\_\_\_\_\_\_\_ & 360^o \end{cases}$$

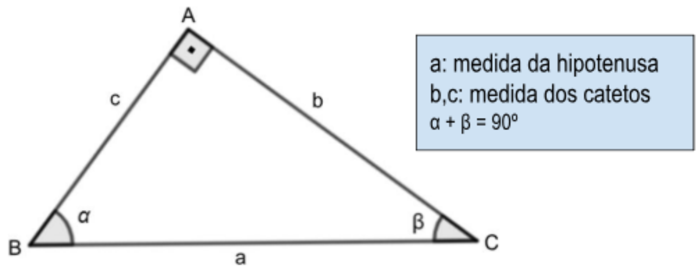
e

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^o} \Longleftrightarrow A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^o}$$

3.3 RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Todo triângulo retângulo (ver Figura 5) é formado por dois ângulos internos agudos complementares e um ângulo interno reto, ao qual se opõe o seu maior lado, chamado hipotenusa; os outros dois lados são denominados catetos.

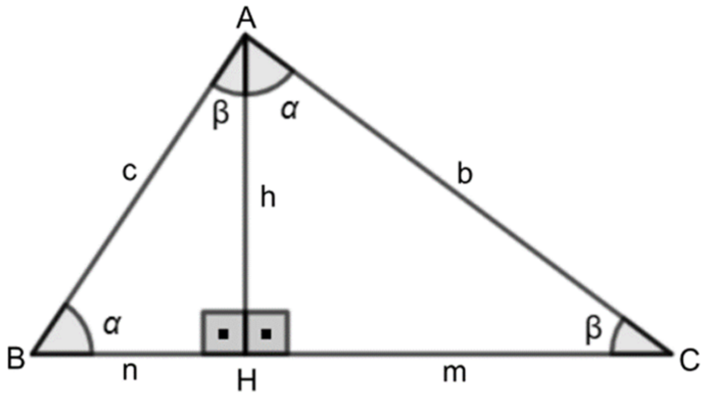
Figura 5 – Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Traçando um segmento de reta perpendicular a BC passando pelo vértice A, descrevemos a altura AH de medida h, relativa à hipotenusa do triângulo. Dividimos a hipotenusa em dois segmentos, BH e CH, que denominaremos com medidas n e m respectivamente. Ver Figura 6.

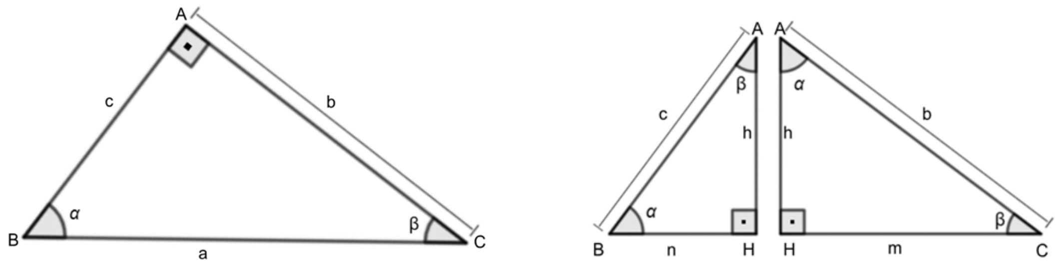
Figura 6 – Medidas no triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Após observarmos as medidas dos ângulos, concluímos que os três triângulos formados, ΔABC, ΔHAC e ΔHBA, são semelhantes (caso AAA). Ver Figura 7.

Figura 7



Fonte: Elaborada pelo autor.

Partindo da semelhança entre os dois primeiros triângulos, temos:

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow \begin{cases} b^2 = am \\ \quad \text{e} \\ ah = bc \end{cases} \tag{1}$$

Em seguida, usando a semelhança entre o primeiro e o terceiro triângulos, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Longleftrightarrow c^2 = an. \tag{2}$$

E, considerando agora a semelhança entre os dois últimos triângulos, temos:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Longleftrightarrow h^2 = mn.$$

Assim podemos afirmar que em todo triângulo retângulo:

a) o quadrado de cada cateto vale o produto da sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa;

b) o produto da hipotenusa pela altura relativa a ela vale o produto dos catetos e

c) o quadrado da altura relativa a hipotenusa vale o produto entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Agora, observando a primeira relação em (1) junto com (2) e lembrando que $a = m + n$, temos:

$$am + an = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a(m+n) = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2. \tag{3}$$

A relação (3) é muito utilizada na matemática e é conhecida como o Teorema de Pitágoras e é assim interpretada: “Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

3.4 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Observemos a sequência numérica a seguir:

$(2,4,8,16,32,\ldots).$

É notável que, a partir do 2º termo, dividindo um termo qualquer dessa sequência pelo seu antecedente, o resultado é sempre igual a 2. De fato,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{2}=2 \quad , \quad \frac{a_3}{a_2}=\frac{8}{4}=2 \quad , \quad \frac{a_4}{a_3}=\frac{16}{8}=2 \quad , \quad \frac{a_5}{a_4}=\frac{32}{16}=2$$

e assim por diante.

Outro ponto que observamos é que, considerando três termos consecutivos dessa sequência, o quadrado do termo central é igual ao produto dos outros dois. Isso ocorre uma vez que o termo central é a média geométrica dos extremos. De fato,

$$(a_1,a_2,a_3)=(2,4,8) \quad \text{e} \quad 4^2=2\times 8$$
$$(a_2,a_3,a_4)=(4,8,16) \quad \text{e} \quad 8^2=4\times 16$$
$$(a_3,a_4,a_5)=(8,16,32) \quad \text{e} \quad 16^2=8\times 32.$$

Definição 3.1. Uma sequência de números reais não nulos em que entre um termo qualquer (a partir do 2º) dividido pelo seu termo antecedente resulte sempre em um mesmo valor, é denominado uma progressão geométrica (PG). Esse valor constante é denominado razão da PG e indicado pela letra q.

Vejamos alguns exemplos a seguir:

a) $(2,6,18,54,\ldots)$ é uma PG de razão $q=3$.

b) $(-2,-10,-50,-250,\ldots)$ é uma PG de razão $q=5$.

c) $(108,36,12,4,\ldots)$ é uma PG de razão $q=\frac{1}{3}$.

d) $(1,-3,9,-27,\ldots)$ é uma PG de razão $q=-3$.

e) $(7,0,0,0,\ldots)$ é uma PG de razão $q=0$.

Mais ainda,

a) Quando $q<0$, dizemos que a PG é alternada ou oscilante.

b) Quando ($a_1>0$ e $q>1$) ou ($a_1<0$ e $0<q<1$), a PG é crescente.

c) Quando ($a_1>0$ e $0<q<1$) ou ($a_1<0$ e $q>1$), a PG é decrescente.

d) Quando $(a_1\neq 0 \text{ e } q=0)$, a PG é estacionária.

3.4.1 Termo geral de uma PG

Dados apenas o primeiro termo (a_1) e a razão (q), vamos determinar uma expressão que permite calcular o valor de qualquer termo presente nessa PG. Como as PGs sempre possuem uma obediência (regularidade) dos termos, conseguimos obter uma lei de formação.

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma PG de razão q. Temos:

$$\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1.q$$
$$\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_3 = a_2.q = a_1.q^2$$
$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$
$$\vdots$$

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$a_n = a_1.q^{n-1}.$$

Essa expressão, conhecida como fórmula do termo geral da PG, permite-nos conhecer qualquer termo da PG em função do primeiro termo (a_1) e da razão (q). Por exemplo,

$$a_6 = a_1.q^5$$
$$a_{11} = a_1.q^{10}$$
$$a_{29} = a_1.q^{28}$$

e assim por diante.

3.4.2 Soma dos n-primeiros termos de uma PG

Dada a sequência $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, uma PG de razão $q \neq 1$, queremos determinar a soma de todos os seus termos, isto é,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{4}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por q

$$qS_n = q(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = q.a_1 + q.a_2 + \ldots + q.a_n$$

e lembrando a formação dos elementos de uma PG, temos:

$$q.S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + q.a_n. \tag{5}$$

Subtraindo (5) de (4) segue que:

$$S_n(q-1) = a_n.q - a_1$$

Como $a_n = a_1.q^{n-1}$ temos

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SEGUNDO PÓLYA

Neste capítulo, trabalharemos com a metodologia de Resolução de Problemas de Pólya (1995), que consiste em quatro fases. Além disso, buscaremos analisar as habilidades e competências da BNCC nos problemas apresentados neste estudo com o objetivo de compreender o papel dessas habilidades no desenvolvimento do pensamento geométrico. Em resumo, examinamos a utilização do método de Pólya (1995) não apenas como uma ferramenta para os alunos compreenderem e resolverem problemas matemáticos, mas também como um recurso para os professores auxiliarem e potencializarem o ensino-aprendizagem na sala de aula.

4.1 1ª FASE – COMPREENSÃO DO PROBLEMA

O primeiro objetivo nesta fase é fazer com que o aluno compreenda, de fato, o que se deve calcular. Muitas vezes, ao enfrentar um problema, a tendência é apressar-se na busca por uma solução sem dedicar tempo suficiente para analisar a questão adequadamente. Esse erro inicial pode levar a equívocos ou soluções erradas. Levando isso em consideração, cabe ao professor montar um enunciado o mais bem explicativo possível, que não venha causar nenhuma dúvida sobre o que se pede.

Aqui estão alguns aspectos a considerar ao buscar entender o problema:

- Leia o enunciado com atenção: Tente entender todas as informações fornecidas. Se necessário, leia várias vezes.

- Identifique o que é dado: Quais são as condições ou informações fornecidas? Quais são os dados numéricos, as variáveis ou as restrições que estão disponíveis?

- Identifique o que se pede: O que o problema está pedindo exatamente? A resposta procurada é um número, uma descrição, um gráfico, ou uma explicação?

- Compreenda os termos: Se o problema contém terminologias desconhecidas ou pouco claras, dedique um tempo para pesquisá-las ou para defini-las corretamente.

- Formule uma representação: Em muitos casos, desenhar um diagrama, uma figura ou uma equação pode ajudar a entender melhor a situação.

Pólya nos lembra que, muitas vezes, a resolução do problema começa muito antes de aplicar qualquer técnica matemática. Ela começa com uma compreensão clara e cuidadosa da questão em mãos.

4.2 2ª FASE – ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

O objetivo desta fase é que o aluno, após trabalhada a 1ª fase, consiga estabelecer um plano de resolução da questão para chegar a resposta final. Esse é o momento de planejar como abordar o problema, refletir sobre quais estratégias ou métodos podem ser utilizados e como essas ferramentas podem ser aplicadas de forma eficaz. Este processo pode ser feito por meio de conteúdos já estudados nos anos anteriores sobre conceitos correlatos ou, até mesmo, conteúdos que estão sendo estudados.

Pólya (1995) sugere algumas abordagens para o planejamento:

- Verificar se já há um método conhecido: Frequentemente, problemas semelhantes já foram resolvidos, e suas soluções podem ser aplicadas ou adaptadas ao problema atual.
- Dividir o problema em partes menores: Se o problema for complexo, tente quebrá-lo em partes mais simples ou em questões menores. Resolver essas partes pode ajudar a entender melhor o todo.
- Fazer um plano alternativo: Se uma estratégia não funcionar, esteja preparado para tentar uma abordagem diferente. A flexibilidade é crucial.
- Use analogias: Se você deparar-se com um problema que não sabe como resolvê-lo, tente relacioná-lo a outros problemas com os quais você tenha mais familiaridade. A analogia pode oferecer novas perspectivas.

Pólya (1995) também enfatiza que, por mais que seja importante ter um plano, ele não precisa ser perfeito de imediato. O objetivo é começar a trabalhar na resolução, mesmo que isso envolva tentativas ou ajustes ao longo do caminho.

4.3 3ª FASE – EXECUÇÃO DO PLANO

Esta fase, junto com a anterior, são cruciais para a resolução, pois é nesta fase que o aluno deve colocar em prática todo plano traçado até o momento, buscando obter a resposta final fazendo uso dos conhecimentos e habilidades já trabalhados seguindo o raciocínio de maneira metódica e organizada.

Durante essa fase, é importante:

- Seguir as etapas com cuidado: Cada passo do plano deve ser seguido de forma lógica e sistemática. Isso pode envolver cálculos, experimentações, verificações e outras ações específicas.
- Atenção aos detalhes: O sucesso de um problema pode estar nos pequenos detalhes. Cuidado com cálculos errados ou omissões durante o processo.

- Adapte o plano se necessário: Caso você perceba que algo não está funcionando como esperado, não tenha receio de modificar o plano. A flexibilidade é uma característica importante do método de Pólya.

- Verifique o raciocínio constantemente: À medida que avança, verifique se o que está sendo feito faz sentido no contexto do problema. Isso ajuda a identificar possíveis erros durante o caminho.

Pólya (1995) acredita que, muitas vezes, a dificuldade não está em encontrar o caminho certo, mas sim em persistir ao longo do processo, mantendo o foco e a paciência necessários para resolver o problema.

Cabe ressaltar que nesta fase o professor deve fazer o acompanhamento do raciocínio, na resolução, adotado pelo aluno. Caberá a ele intervenções porém, desde que não faça com que a autonomia do aluno se perca.

4.4 4ª FASE – VALIDAÇÃO

O último passo do método de resolução de Pólya é revisar e verificar a solução. Após encontrar uma solução, é essencial voltar atrás e verificar se a resposta realmente resolve o problema de forma completa e precisa. Muitas vezes, o erro pode estar na interpretação do problema ou em detalhes esquecidos ao longo do processo.

Aqui estão algumas sugestões para revisar a solução:

- Verifique a consistência dos cálculos: Revise os cálculos ou passos lógicos envolvidos na solução. Pequenos erros podem comprometer a validade da resposta final.

- Releia o enunciado do problema: Compare a resposta encontrada com o que foi solicitado no enunciado do problema. Certifique-se de que está atendendo a todos os requisitos da questão.

- Tente uma abordagem alternativa: Se possível, tente resolver o problema de uma maneira diferente, talvez utilizando um método distinto ou uma estratégia diversa. Isso pode ajudar a confirmar que a solução encontrada está correta.

- Reflexão sobre o processo: Pólya (1995) também sugere que, ao revisar a solução, pense sobre o processo de resolução como um todo. O que funcionou bem? O que poderia ser feito de forma diferente em uma próxima tentativa? O que o problema ensina para futuros desafios?

Essa etapa de revisão não deve ser negligenciada. A revisão completa ajuda a garantir que o problema foi resolvido corretamente e fornece uma oportunidade de aprendizagem contínua.

Segundo Bonatti (2022), esta fase vai além da verificação do processo de resolução e da resposta final. Deve-se fazer uma análise de todo retrospecto da resolução, reexaminando o resultado, o processo executado e possíveis modificações nos questionamentos.

Os quatro passos de Pólya para a resolução de problemas formam uma metodologia robusta e eficaz, tanto para problemas matemáticos quanto para outros tipos de desafios. Sua abordagem vai além de uma simples técnica; ela se baseia em um raciocínio estruturado, na flexibilidade diante das dificuldades e na reflexão contínua sobre o próprio processo de resolução.

5 EXERCÍCIOS DO BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA SALA DE AULA

Neste capítulo, por meio da metodologia de resolução de problemas e com o auxílio da BNCC, abordaremos importantes fundamentos na área de geometria, utilizando recursos estratégicos essenciais para o raciocínio matemático do aluno, observando e aplicando as habilidades e competências necessárias para a resolução de quatro exercícios do banco de questões da OBMEP, conforme o processo de resolução de Pólya. Também dedicaremos atenção especial à generalidade das questões.

As questões poderiam ser tiradas do próprio livro de Pólya (1995), pois há um capítulo somente de sugestões de exercícios a serem trabalhados segundo o passo a passo do processo de resolução. Porém, a OBMEP sempre me chamou a atenção. Enquanto aluno fui medalhista na 2ª fase do nível 3 da OBMEP e na graduação tive a oportunidade de lecionar as aulas do programa do PIC. Essas aulas foram também base do material de pesquisa para o meu Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática.

Cabe ressaltar também que as questões que aqui trabalhadas são do tema de geometria. Desta forma, os enunciados vêm acompanhados com figuras. Essas figuras tornam-se peça chave para o entendimento das questões por meio da análise visual, levando o aluno a iniciar a construção do seu pensamento geométrico. De certa forma, espera-se que os alunos, por meio dos enunciados, das figuras e dos dados, consigam compreender exatamente o que se pede na questão.

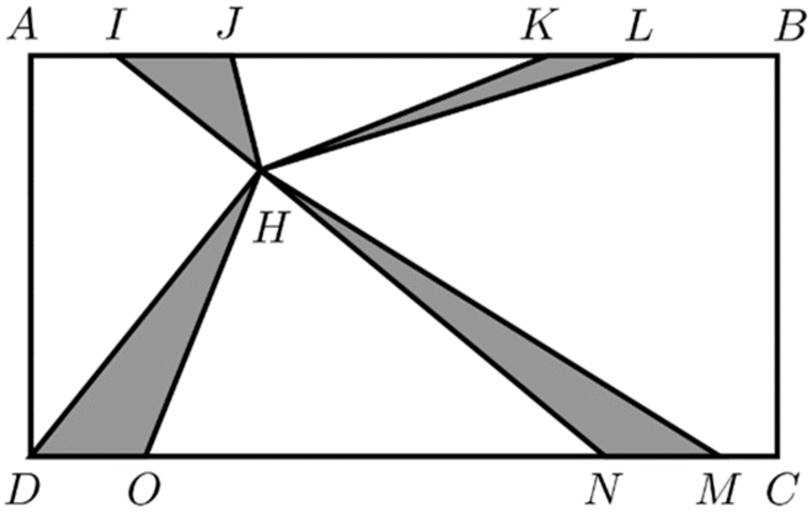
5.1 OBMEP - QUESTÃO 5, BANCO DE QUESTÕES NÍVEL 2 DE 2013

Consideremos a questão conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 – OBMEP - Questão 5, Banco de Questões Nível 2 de 2013

5 ***Área em cinza***

Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo, e o comprimento do segmento BC é igual a 2. Além disso, os comprimentos dos segmentos IJ, KL, DO e NM são todos iguais a 1. Determine a área da região pintada de cinza.



Fonte: http://obmep.org.br/provas.htm.

Como já mencionamos anteriormente, a primeira fase a realizar é a leitura de forma atenciosa para entender perfeitamente o que se pede e se atentar aos dados fornecidos que levará a criação da estratégia de resolução e análise da resposta.

Assim, podemos analisar e investigar a questão partindo das seguintes perguntas:

a) Quais dados foram fornecidos a partir da leitura do texto?

b) Quais dados podem identificar através da figura geométrica da questão?

c) O que se pede no exercício?

Partindo disso, temos as seguintes informações que irão ajudar na resolução. Para a primeira pergunta, do enunciado, temos um retângulo com segmento BC medindo 2 e quatro segmentos de comprimento 1 sendo eles IJ, DO, KL e NM. Continuando a leitura, nos deparamos com termos como: retângulo, segmento e área, que ao observarmos são conceitos apresentados na grade curricular do 5º ano, ou seja, conteúdos trabalhados nos anos anteriores.

A Figura 9 mostra a denominação dos polígonos.

Figura 9 – Polígonos segundo número de lados.

131. *Nome dos polígonos*

De acordo com o número *n* de lados, os polígonos recebem nomes especiais. Veja a seguir as correspondências:

n = 3 ⟶ triângulo ou trilátero ⟶ 3 lados
n = 4 ⟶ quadrângulo ou quadrilátero ⟶ 4 lados
n = 5 ⟶ pentágono ⟶ 5 lados
n = 6 ⟶ hexágono ⟶ 6 lados
n = 7 ⟶ heptágono ⟶ 7 lados
n = 8 ⟶ octógono ⟶ 8 lados
n = 9 ⟶ eneágono ⟶ 9 lados
n = 10 ⟶ decágono ⟶ 10 lados
n = 11 ⟶ undecágono ⟶ 11 lados
n = 12 ⟶ dodecágono ⟶ 12 lados
n = 15 ⟶ pentadecágono ⟶ 15 lados
n = 20 ⟶ icoságono ⟶ 20 lados

Fonte: Iezzi e Pompeo (2006, p. 135)

Essa parte da análise está relacionada à habilidade:

> **(EF05MA17)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 299).

Segundo Neto (2013, p. 63)

> Um quadrilátero é um retângulo se todos os seus ângulos internos forem iguais. ... a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a 360°, segue que um quadrilátero é um retângulo se, e só se, todos os ângulos internos foram iguais a 90°.

Para a segunda pergunta, a partir da Figura 8 do enunciado observamos que os pontos que definem os segmentos IJ, DO, KL e NM estão todos ligados a um ponto comum denominado H que se encontra dentro do retângulo $ABCD$. Essas ligações formam quatro triângulos, dois com bases na base superior do retângulo (segmento AB) e dois na base inferior do retângulo (segmento CD). Como os segmentos IJ, DO, KL e NM possuem medidas comuns igual a 1, observamos quatro triângulos com base medindo 1 e também que o segmento BC, que mede 2, representa a altura do retângulo.

Por fim, a terceira pergunta verificamos que o exercício pede que se calcule a área em da região em cinza, ou seja, a área ocupada pelos quatro triângulos.

Para a segunda fase o aluno deve fazer o levantamento de todos os conceitos, teoremas e propriedades matemáticas presente na questão. Além disso, o aluno já deverá ter contemplado as seguintes habilidades e competências da BNCC no seu processo educacional. Ver Quadro 1.

Quadro 1 – Habilidades e competências abordadas na Questão 5, Banco de Questões OBMEP, Nível 2 de 2013.

Objetivos de Conhecimento	Habilidades
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	**(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Fonte: Adaptada pelo autor a partir de Brasil (2018).

Já com relação ao plano de resolução, segue uma possível alternativa:

– Primeiro traçamos uma reta paralela ao lado AD, que passa no ponto H, indicando assim as alturas dos triângulos.

– Em seguida montamos uma relação entre as alturas dos triângulos com a altura do retângulo.

– Depois fazemos uso da fórmula da área de triângulos, pois o enunciado já traz a informação da medida das bases dos triângulos.

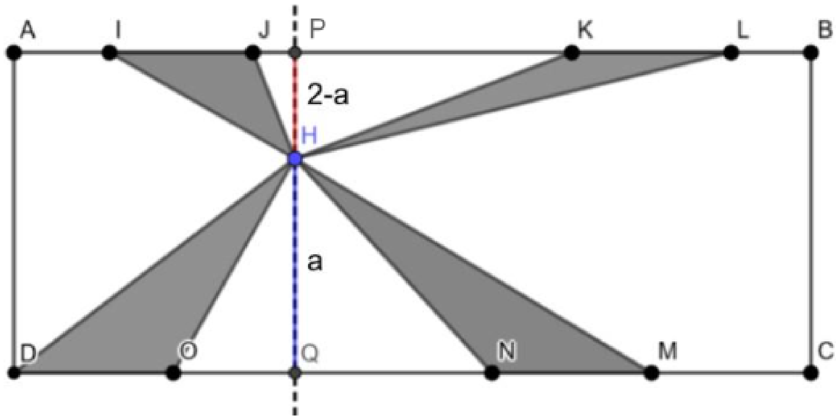
– Por fim, basta somarmos as áreas de todos os triângulos, chegando no valor procurado.

Das habilidades citadas no Quadro 1 destacamos a EF07MA31 e a EF07MA32 referentes aos conceitos de áreas de triângulos e quadriláteros na geometria plana.

Para a terceira fase, na resolução do problema, vamos fazer uso de todas as informações que extraímos do enunciado e da figura geométrica. Ressaltamos que os conhecimentos sobre os conteúdos de geometria são indispensáveis para a execução do plano, pois poderá ser necessária tanto a construção quanto a exploração geométrica, seja por meio de axiomas, teoremas ou conteúdos já estudados.

Traçando uma reta paralela ao segmento BC, que intercepta o ponto H, separamos as alturas em dois pares de triângulos. De certa forma, não sabemos exatamente o valor de cada altura. Porém, sabemos que essas duas alturas somadas resultam no valor 2. Se considerarmos a altura do segmento DC a H como a, a altura restante será $(2-a)$. Ver Figura 10.

Figura 10 – Resolução da questão 1 - 3ª fase.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir da Figura 8.

Calculamos as áreas dos triângulos. Para calcular a área do triângulo DOH (que chamaremos de A_1), segue:

$$A_1 = \frac{b.h}{2}.$$

A base, como sabemos, vale 1, e a altura denominamos como a. Assim,

$$A_1 = \frac{a}{2}.$$

Analogamente, a área do triângulo NMH (que chamaremos de A_2), também possui base medindo 1 e altura a. Segue que a soma das duas áreas é a mesma do dobro da área até então encontrada, ou seja,

$$A_1 + A_2 = 2\frac{a}{2} = a.$$

Resta calcularmos as áreas dos triângulos HIJ (que chamaremos de A_3) e HKL (que chamaremos de A_4). Assim,

$$A_3 = \frac{b.h}{2}.$$

Como sabemos, a base mede 1 e a altura mede $(2-a)$. Logo,

$$A_3 = \frac{1.(2-a)}{2} = \frac{2-a}{2}.$$

O triângulo HKL também possui base igual a 1 e altura igual a $(2-a)$. Assim, basta multiplicarmos A_3 por 2 que encontraremos a área sombreada restante, ou seja,

$$A_3 + A_4 = 2\left(\frac{2-a}{2}\right) = 2-a.$$

Como já calculamos a área de todos os triângulos, resta somente somar os valores

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = a + 2 - a = 2.$$

Segundo Pólya (1995) para a 4ª fase, a Validação, temos que ir além na resolução após encontrar o resultado final da questão. Devemos rever, reavaliar, ver se tem outra possibilidade de resolução e observar se é possível utilizar o processo em outra questão.

Com relação ao método utilizado, ele se mostrou sucinto e correto para a resolução.

Uma outra forma de resolução, após traçar a reta paralela a AD que passa por H e dividir a altura em duas partes complementares que resultam em 2, podemos observar que os pares de triângulos, após serem juntados, formam duas possíveis formas:

- Se encostarmos os pares de triângulos, formamos dois triângulos de base medindo 2, e mantemos a altura de ambos;

- Ou, se rotacionarmos um triângulo de cada base do retângulo e encostarmos nos triângulos que restaram, formamos dois paralelogramos de base 1 e mantemos as alturas iniciais descritas nos triângulos.

Assim, ao invés de calcular a área de quatro triângulos, calculamos a áreas de dois triângulos ou dois paralelogramos, encontrando o mesmo resultado.

Com relação a utilização desta resolução em outros exercícios, analisando os aqui selecionados, não é possível. Porém, o aluno pode utilizar em resoluções posteriores que sigam a mesma linha de raciocínio desta questão.

Uma forma de colocar isso em prática é levantar alguns questionamentos. Por exemplo:

- Se modificarmos a figura analisada, alterando a posição do ponto H, o plano de resolução e a resposta final seriam os mesmos?

– Por que foram escolhidos justamente quatro triângulos?

– Se mantermos as bases dos triângulos medindo 1 e ao invés dos quatro triângulos estarem em pares, na base superior e inferior, tivéssemos um triângulo em cada lado do retângulo, a área e o processo de resolução seriam os mesmos?

Com esses questionamentos o aluno tem que repensar, não só o resultado, mas todo plano executado até o momento, observando se é necessário alguma modificação.

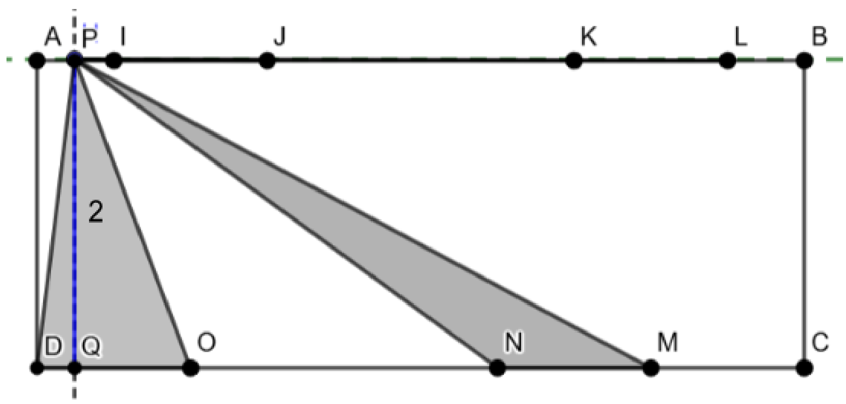
A primeira questão levantada é se podemos modificar a posição do ponto H e, ao fazer isso, se a área e o método de resolução continuam os mesmos.

Para resolvermos a questão, após observarmos que a altura do retângulo media 2, dividimos essa altura em duas partes: uma medindo a e a outra medindo $(2-a)$. Como não sabemos qual é o valor de a na questão original, podemos considerar que ele varia por qualquer valor ao longo da altura, pois, seja qual for o valor atribuído a a, logicamente, $(2-a)$ será o valor complementar para que a soma seja igual a 2.

Se traçarmos uma reta paralela ao lado AB pelo ponto H obtemos a Figura 10. Assim, temos a opção de modificar a posição de H ao longo dessa reta, no intervalo interno ao retângulo, mantendo assim a altura de todos os triângulos. Se observarmos bem, em qualquer posição que H estiver, a área sombreada será a mesma, pois as bases dos 4 triângulos seguem com as mesmas medidas e a altura também segue a mesma inicial $(a, 2-a)$. Podemos concluir que, ao modificar a posição de H, tanto vertical quanto horizontalmente, se mantendo dentro do retângulo, não irá alterar o valor da área sombreada, nem o método de resolução inicial.

Outra posição que podemos analisar para H é se ele se encontrar sob o lado AB, como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Resolução da questão 1 - 3ª fase.



Fonte: Elaborada pelo autor a partir da Figura 8.

Ao analisarmos essa configuração, observamos que não teríamos mais quatro triângulos, seriam apenas dois triângulos e dois segmentos de retas. Mas quanto a área? Seria a mesma?

Neste caso, temos dois triângulos com base medindo 1 e altura medindo 2. Assim,

$$A_{DOH} = \frac{b.h}{2} = \frac{1.2}{2} = 1.$$

O triângulo NMH também tem base de 1 e altura de 2, resultando na mesma área. Ou seja, a área desses dois triângulos somados resultaria em 2. Já os dois segmentos de reta não somariam à área, pois sabemos que a área de qualquer segmento de reta é nula. Assim, o plano estabelecido e a área seguiriam a mesma lógica. Reciprocamente mesmo se aplica se H estivesse sobre o segmento CD.

Portanto, tendo os triângulos HIJ e KLH com área somada igual a 2 e o segmento de reta DOH e HNM, com áreas nulas.

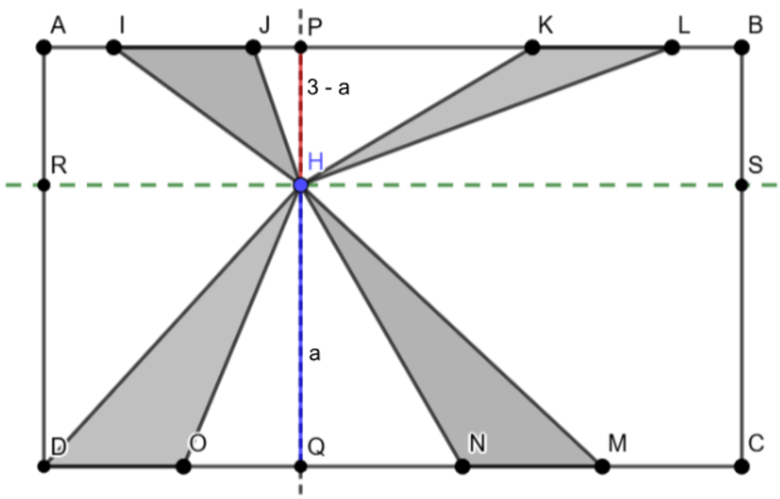
A segunda questão levantada diz respeito ao porquê de se ter usado exatamente quatro triângulos. O uso de quatro triângulos possibilitou montar uma relação direta entre a área sombreada e a altura do retângulo. Dessa forma, desde que a questão seja mantida originalmente, se alterarmos a altura do retângulo, seja ela qual for, a área sombreada terá o mesmo valor.

Por exemplo, podemos alterar o enunciado original por

> *Na figura a seguir, ABCD é um retângulo, e o comprimento do segmento BC é igual a 3. Além disso, os comprimentos dos segmentos IJ, KL, DO e NM são todos iguais a 1. Determine a área da região pintada de cinza.*

Quanto ao plano de resolução, vamos seguir o mesmo utilizado anteriormente na questão original. A única diferença é que a altura será dividida entre a e $(3 - a)$, como mostra a Figura 12.

Figura 12 – Figura alterada para a questão 1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para calcular a área do triângulo DOH (que chamaremos de A_1), segue:

$$A_1 = \frac{b.h}{2}.$$

Sabemos que a base vale 1 e a altura será denotada por a. Assim,

$$A_1 = \frac{1.a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Analogamente, a área do triângulo NMH (que chamaremos de A_2), também possui base medindo 1 e altura a. Assim, podemos afirmar que a soma das duas áreas é a mesma que o dobro da área até então encontrada. Logo,

$$A_1 + A_2 = 2\frac{a}{2} = a.$$

Resta calcularmos a área dos triângulos HIJ (que chamaremos de A_3) e HKL (que chamaremos de A_4). Segue que,

$$A_3 = \frac{b.h}{2}.$$

Sabemos que a base mede 1 e a altura mede $(3-a)$, assim:

$$A_3 = \frac{1.(3-a)}{2} = \frac{3-a}{2}.$$

Neste caso, o triângulo HKL também possui base igual a 1 e altura igual a $(3-a)$. Neste caso, basta multiplicarmos A_3 por 2 e assim, determinamos a área sombreada restante. Ou seja,

$$A_3 + A_4 = 2\left(\frac{3-a}{2}\right) = 3-a.$$

Por fim, somamos os valores das quatro áreas:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = a + 3 - a = 3.$$

Verificamos assim que, modificando a altura do retângulo e mantendo o restante dos dados fornecidos pela questão original, existe uma relação direta entre a área em cinza e a altura do retângulo. Na questão original a altura era 2 e a área em cinza, após calcular, resultou no valor 2. Nesta questão sugerida, mudamos a altura para 3 e verificamos que a área em cinza resultou no valor 3.

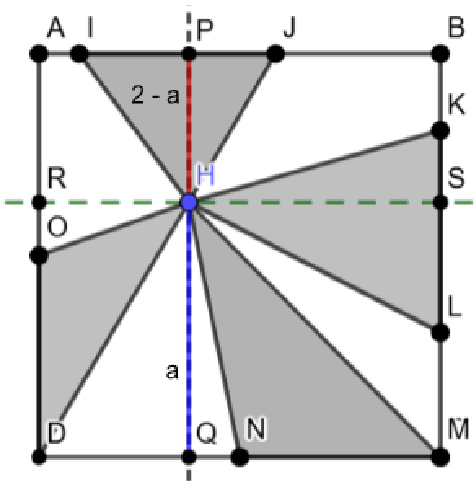
Se, na questão, fosse utilizada uma quantidade diferente de triângulos, mantendo as mesmas medidas nas bases dos triângulos, essa relação seria modificada.

Outro ponto a ser analisado em relação à quantidade de triângulos é que, após o cálculo da área sombreada, para que se possa modificar a posição de H, é necessário que o lado AB tenha a mesma quantidade de triângulos que o lado CD. Assim, ao modificar a altura dos triângulos do lado AB, a área modificada seria compensada pelos triângulos do lado CD, fazendo com que, dessa forma, o plano de resolução inicial continue mantendo a mesma eficácia.

Por fim, a terceira pergunta levantada foi analisar se, em vez de termos dois triângulos no lado AB e dois triângulos no lado CD, teríamos um em cada lado do retângulo, mantendo a medida 1 na base de todos os triângulos.

Neste caso, a única possibilidade de manter a área e o plano de resolução é se o retângulo tratado for um quadrado, como mostrado na Figura 13.

Figura 13 – Questão 1 mantendo a área e o plano de resolução.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, temos dois pares de triângulos com base medindo 1 e suas alturas sendo complementares na soma igual a 2. Os triângulos das bases do retângulo com alturas a e $(2-a)$, e os triângulos das laterais do retângulo com alturas d e $(2-d)$.

Para calcular a área de um triângulo com base medindo 1 e a altura a, temos:

$$A_1 = \frac{b.h}{2} = \frac{1 * a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Para calcular a área de um triângulo de base medindo 1 e altura $(2-a)$, temos:

$$A_2 = \frac{b.h}{2} = \frac{1.(2-a)}{2} = \frac{2-a}{2}.$$

Somando as duas áreas temos:

$$A_1 + A_2 = \frac{a}{2} + \frac{2-a}{2} = 1.$$

Agora, para calcular as área do um triângulo de base 1 e altura d, temos:

$$A_3 = \frac{b.h}{2} = \frac{d}{2}.$$

A3 = d/2 E a área do triângulo de base medindo 1 e altura $(2-d)$ será:

$$A_4 = \frac{b.h}{2} = \frac{1.(2-d)}{2} = \frac{2-d}{2}.$$

Somando as duas áreas temos:

$$A_3 + A_4 = \frac{d}{2} + \frac{2-d}{2} = 1.$$

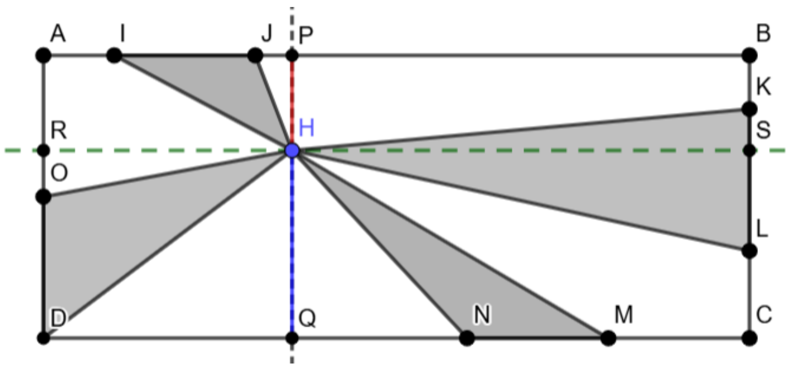
Para finalizar, somamos todas as áreas anteriormente calculadas. Assim,

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2.$$

Observamos que, se o retângulo da questão for um quadrado e os triângulos estiverem posicionados com suas bases uma em cada lado desse quadrado, a área permanece a mesma da questão inicial. Já o plano de resolução sofreu uma pequena alteração, deixando de trabalhar com apenas uma incógnita para representar as alturas e passando a utilizar duas (a e d).

Caso a figura não seja um quadrado, ambos passam por modificações. Ao colocar os quatro triângulos distribuídos na forma sugerida temos a configuração mostrada na Figura .

Figura 14 – Alterações nos triângulos da Questão 1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os triângulos que estão com a base sobre os segmentos AB e CD terão sua área calculada conforme a altura do retângulo, como já visto anteriormente. Já os triângulos com base nos segmentos BC e AD terão sua área calculada conforme a largura do retângulo.

Por exemplo:

> *Considere a questão inicial e acrescente que o segmento AB mede 4. Calcule a área sombreada.*

Neste caso, vamos calcular primeiramente a área dos triângulos HIJ e HNM.

A área dos triângulos HIJ e HNM já foram calculadas anteriormente e sabemos que somadas resultam em 1, isto é,

$$A_{HNM} + A_{HIJ} = 1.$$

Resta calcularmos a área dos outros dois triângulos (DHO e HKL).

O triângulo DHO tem base igual a 1 e altura medindo $(4-d)$. Assim,

$$A_{DHO} = \frac{b.h}{2} = \frac{1.(4-d)}{2} = 4 - \frac{b}{2}.$$

Já o triângulo HKL tem base igual a 1 e altura medindo d. Segue que

$$A_{HKL} = \frac{b.h}{2} = \frac{d}{2}.$$

Somando as duas áreas obtidas temos:

$$A_{DHO} + A_{HKL} = 4 - \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 2.$$

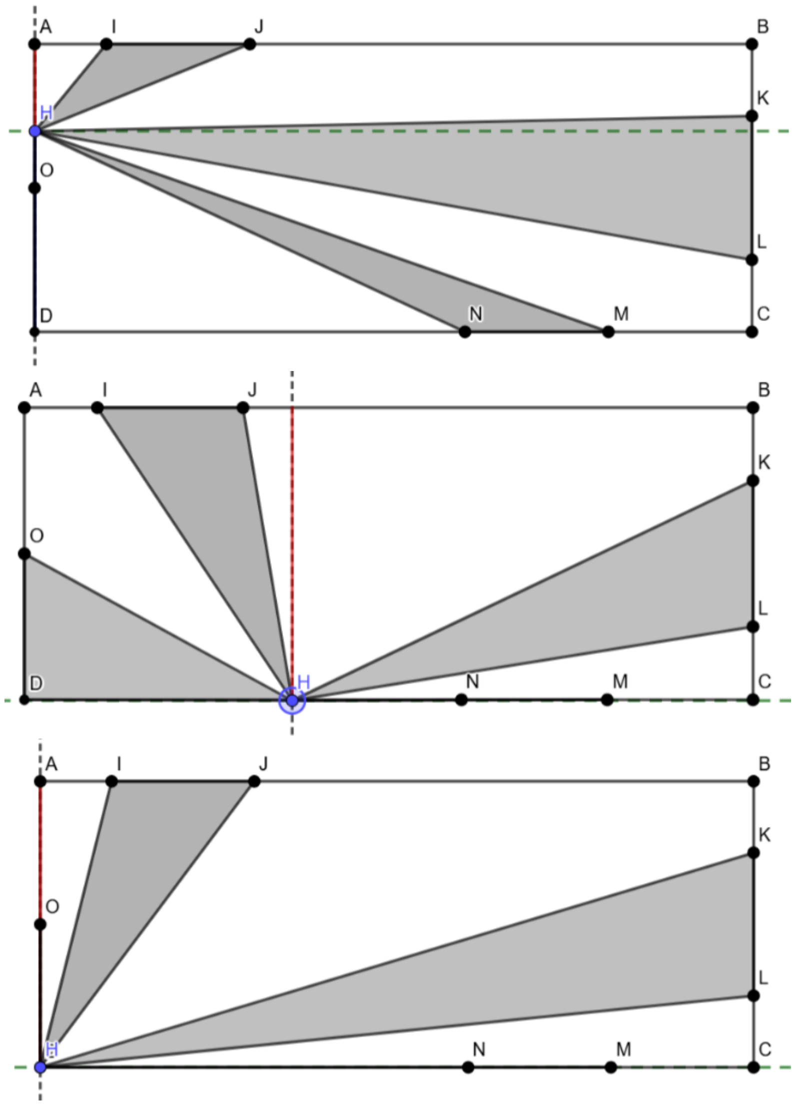
Por fim, somamos todas as áreas

$$\text{Área sombreada} = A_{HNM} + A_{HIJ} + A_{DHO} + A_{HKL} = 1 + 2 = 3.$$

Assim, mesmo trabalhando com quatro triângulos podemos perceber que a área sombreada com a altura do retângulo perdem a relação direta que tinham na questão original.

Após feito o cálculo da área sombreada, as relações de modificação do ponto H, anteriormente citadas, seguem tendo a mesma validade neste caso, como mostra a Figura 15.

Figura 15 – Alterações nos triângulos da Questão 1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

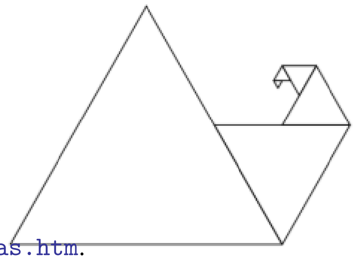
Vejamos o quanto discutimos em uma mesma questão após fazermos três questionamentos. Isso demonstra o quanto o professor estará instigando o raciocínio e o estudo matemático no estudante, realizando análises sobre diferentes pontos de vista e auxiliando-o para que a aprendizagem, no que diz respeito à estratégia de resolução de problemas, vá além de um simples ato de responder a uma questão dada pelo professor.

5.2 OBMEP - QUESTÃO 219, BANCO DE QUESTÕES NÍVEL 1 DE 2010

Consideremos a questão conforme mostra a Figura 16.

Figura 16 – OBMEP - Questão 219, Banco de Questões Nível 1 de 2010

219. ***Colando seis triângulos*** - Construa uma figura com seis triângulos equiláteros adjacentes, o primeiro com lado de comprimento 1 cm e os triângulos seguintes com lado igual à metade do lado do triângulo anterior, como indicado na figura dada. Qual o perímetro dessa figura?



Fonte: http://obmep.org.br/provas.htm.

Seguindo o método de resolução de Pólya (1995), a primeira fase a realizar é a leitura de forma atenciosa para entender perfeitamente o que se pede e se atentar aos dados fornecidos que nos levará a criação da estratégia de resolução e análise da resposta. Também vamos seguir os mesmos questionamentos feitos na questão discutida na seção anterior, visto que continuamos a trabalhar com a geometria.

a) Quais dados foram fornecidos a partir da leitura do texto?

b) Quais dados podem identificar através da figura geométrica da questão?

c) O que se pede na questão?

Partindo desses questionamentos, temos as seguintes informações que irão ajudar na resolução.

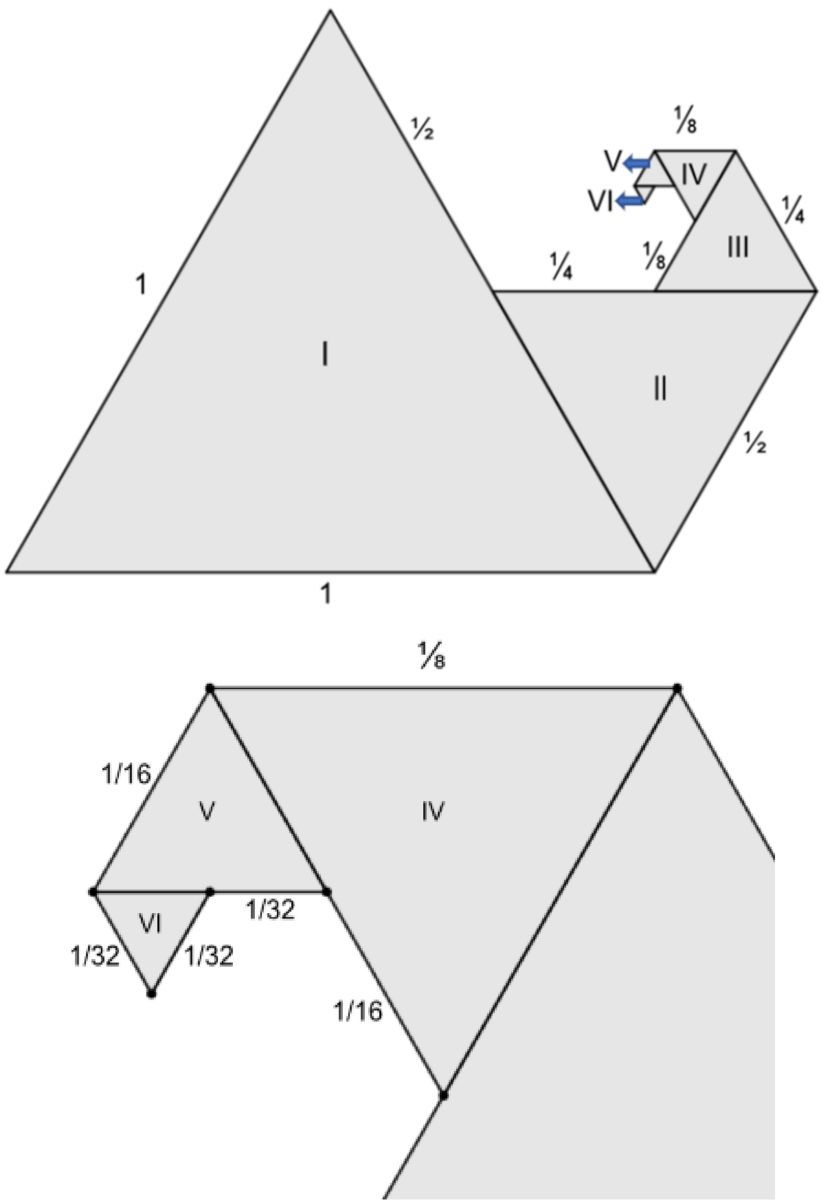
Para a primeira pergunta o enunciado nos fornece a informação que o primeiro triângulo equilátero tem lados medindo 1 cm e que os próximos estarão na razão $\frac{1}{2}$ comparados ao lado do triângulo anterior. Fazendo a leitura, nos deparamos com termos como, triângulo equilátero adjacente e perímetro, que ao observarmos são conceitos apresentados na grade curricular do 5º ano, ou seja, conteúdos que estão em processo de trabalho ou, possivelmente, já foram trabalhados. Essa parte da análise também está relacionada à habilidade:

> **(EF05MA17)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 297).

Segundo Neto (2013, p. 17), por definição, um triângulo ABC é equilátero, se $AB = AC = BC$.

Para a segunda pergunta, observamos a posição entre os triângulos equiláteros. A Figura 17 já conta com a medida de todos os lados dos triângulos que formam a figura. O primeiro, sabemos que tem lado medindo 1 e, como a razão entre eles é $\frac{1}{2}$, o segundo tem lado medindo $\frac{1}{2}$, o terceiro $\frac{1}{4}$, o quarto $\frac{1}{8}$, o quinto $\frac{1}{16}$ e o sexto $\frac{1}{32}$.

Figura 17 – Posicionamento dos triângulos formados na questão.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando a Figura 17 vamos descrever separadamente o perímetro de cada triângulo, que faz parte do perímetro da figura.

Para a terceira pergunta, observamos que a questão pede que se calcule o perímetro da figura formada pelos 6 triângulos equiláteros adjacentes.

Para a segunda fase da resolução de Pólya (1995), o aluno deverá fazer o levantamento de todo material, conceitos, teoremas e propriedades presentes na questão. O professor, por outro lado, deverá observar que as seguintes as competências e habilidades da BNCC são abordadas, como mostra o Quadro 2, tendo ciência de que elas já foram contempladas anteriormente no processo educacional dos alunos.

Quadro 2 – Habilidades e competências abordadas na Questão 219, Banco de Questões OBMEP, Nível 1 de 2010.

Objetivos de Conhecimento	Habilidades
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
Polígonos regulares	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Fonte: Adaptada pelo autor a partir de Brasil (2018).

Observando a BNCC verificamos que o conceito de perímetro vem sendo trabalhado desde o 4º ano, relacionada a habilidade:

> **(EF04MA20)** Medir e estimar comprimentos (incluindo perímetros), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local. (Brasil, 2018, p. 293).

Já com relação ao plano de resolução, segue uma possível alternativa a ser utilizada pelo aluno: visto que, na primeira fase do processo de resolução, foram descritas todas as medidas dos lados da figura formada, basta somá-las, resultando assim no perímetro procurado.

Para a terceira fase da resolução do problema, utilizamos toda informação que extraímos do enunciado e da figura geométrica da questão. Não podemos esquecer dos conceitos de geometria envolvidos na questão.

Como já temos na Figura 17 as medidas de todos os lados podemos simplesmente fazer a soma de todos esses valores. Vamos analisar separadamente os lados de cada triângulo que fazem parte da figura em questão:

- 1º triângulo = dois lados medindo 1 cm e um lado medindo $\frac{1}{2}$ cm.
- 2º triângulo = um lado medindo $\frac{1}{2}$ cm e um lado medindo $\frac{1}{4}$ cm.
- 3º triângulo = um lado medindo $\frac{1}{4}$ cm e um lado medindo $\frac{1}{8}$ cm.
- 4º triângulo = um lado medindo $\frac{1}{8}$ cm e um lado medindo $\frac{1}{16}$ cm.
- 5º triângulo = um lado medindo $\frac{1}{16}$ cm e um lado medindo $\frac{1}{32}$ cm.
- 6º triângulo = dois lados medindo $\frac{1}{32}$ cm.

Para o cálculo do perímetro total basta somarmos todas as medidas. Isto é,

$$P = 2 \times 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32},$$

ou ainda,

$$P = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} = \frac{127}{32}.$$

Logo, o perímetro da figura é igual a 3,96875 cm.

Para a fase de Validação, devemos rever, reavaliar, ver se tem outra possibilidade de resolução e observar se é possível utilizar o processo em outra questão.

Com relação ao processo de resolução, visto que o exercício já trazia a figura formada pelos seis triângulos, o método de colocar o valor de cada lado e somar todos, se mostra como um processo simples e eficaz no exercício original.

Sabendo que os lados dos triângulos possuem uma razão sob o lado do triângulo anterior, podemos afirmar que esse exercício poderia ser resolvido também utilizando os conceitos de Progressão (neste caso, como a razão dada é $1/2$, progressão geométrica).

Por fim, em relação a utilização desse método em outras resoluções, visto que não se aplica a nenhuma das outras questões selecionadas neste trabalho, resta afirmar que essa resolução pode ser utilizada posteriormente em questões similares.

Para a 4ª fase de Validação:

- É possível generalizar a questão de forma que calculamos o perímetro de uma figura no mesmo formato porém com quantidades diferentes de triângulos? O que precisamos observar para conseguir isto?

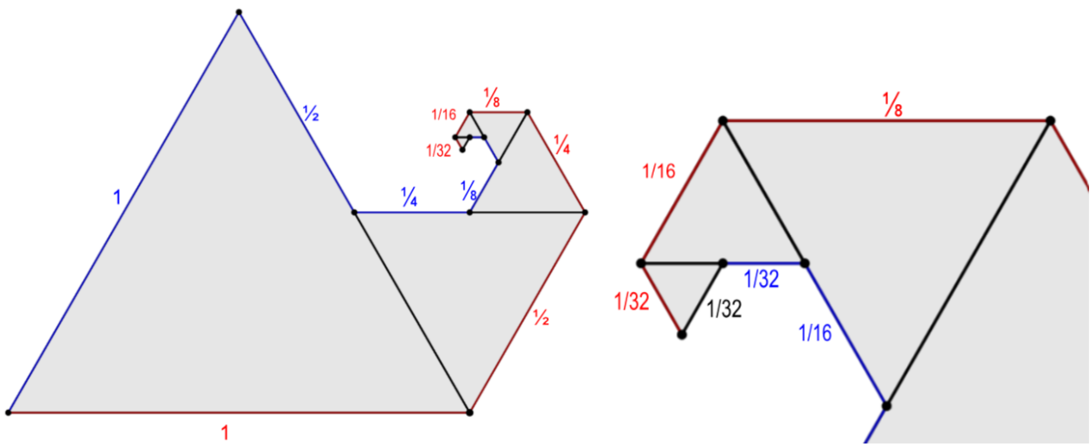
– Podemos fazer alguma outra alteração nessa questão para o auxílio no desenvolvimento do ensino aprendizado do aluno? Se sim, o que muda?

Para demonstrar se é possível generalizar a questão, precisamos primeiramente fazer um levantamento de informações a respeito do enunciado e da figura.

Observamos que entre as medidas dos lados dos triângulos existe uma razão que, como descrito pelo enunciado, é equivalente a metade da medida dos lados do triângulo anterior. Quando se fala em razão, na matemática, temos a ideia de progressões. Para as progressões temos a aritmética e a geométrica. Nessa questão, a razão entre os lados sendo a metade da medida do lado do triângulo anterior, nos faz descartar a progressão aritmética e passar a observar e estudar o exercício apenas com a progressão geométrica.

Já após estudar a figura, verificamos a existência dessa progressão geométrica. Para isso, basta fazermos a divisão, como sugere a Figura 18.

Figura 18 – Identificando a progressão geométrica nos triângulos formados na questão.



Fonte: Elaborada pelo autor.

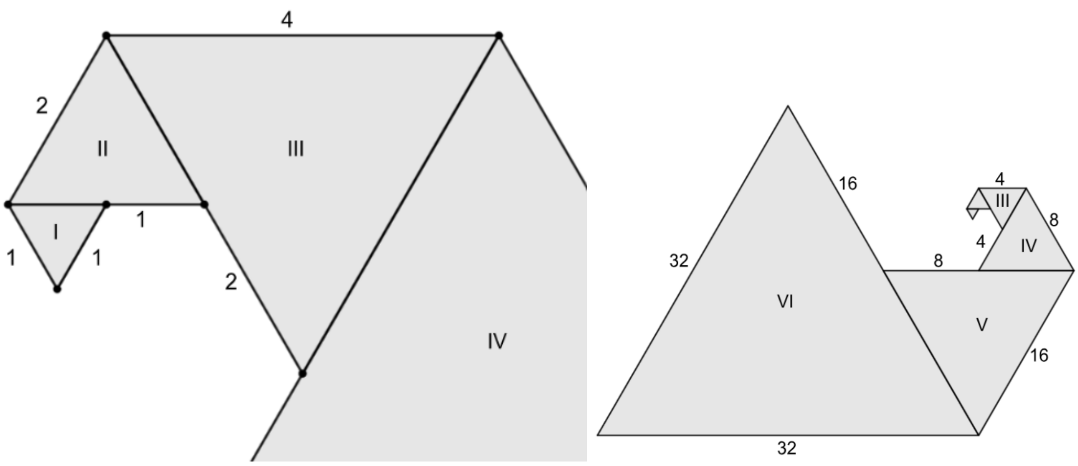
Fazendo a análise sobre os lados dos triângulos na Figura 18, identificados pelas cores, observamos que temos duas progressões geométricas que se repetem. O único ponto que não podemos deixar passar despercebido é que, após dividir o perímetro pelas duas cores (destacando as duas progressões geométricas), sempre sobra um dos lados do último triângulo (triângulo menor, ou n-ésimo triângulo). Assim, visto o conteúdo de Progressões Geométricas (ver Seção 3.4), sabemos que, após identificar o primeiro termo e a razão, é possível encontrar o n-ésimo termo da progressão geométrica. Concluímos, calculando o perímetro de qualquer figura deste modelo sem a necessidade de fazer a ilustração e somar todos os lados com auxílio da progressão geométrica. Determinamos o n-ésimo termo, somamos todos os termos da progressão geométrica (fórmula da soma de PG), multiplicamos por 2 (pois são duas PGs) e no final, somamos a medida de um lado do menor triângulo. Fizemos assim a generalização da questão.

Porém, quando falamos sobre a razão de uma PG temos alguns tipos (ver Seção 3.4). Na questão original, a_1 é maior que zero e menor que 1. Assim, temos que a PG é decrescente. Restando ainda a possibilidade de uma PG crescente, oscilante e estacionária.

Para a oscilante, a razão é menor que zero, e como estamos trabalhando com perímetro, descartamos essa possibilidade, uma vez que não têm realidade física. Resta então a razão maior que 1. Para a estacionária, a razão é zero, o que impossibilita o alinhamento de dois ou mais triângulos sendo assim também descartada neste processo.

Considerando a questão original e alterando a razão para 2, por exemplo, temos a Figura 19.

Figura 19 – Progressão geométrica de razão 2 nos triângulos formados na questão.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta forma, o primeiro triângulo passa a ser o menor, já que a PG é crescente. Para calcularmos o perímetro, basta somarmos todos os lados da figura. Ou seja,

$$P = 3\times 1 + 2*2 + 2*4 + 2*8 + 2*16 + 2*32 = 127 \text{ cm}.$$

Como descrito anteriormente, podemos eliminar o processo da ilustração e soma dos n lados da figura apenas com o uso dos conceitos de PG da seguinte maneira: $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 6$ e

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{2^6-1}{2-1} = 63 \text{ cm}.$$

Como a progressão aparece duplamente, multiplicamos S_n por 2, obtendo 126 cm.

Resta somar a medida de um lado do menor triângulo, ou seja, 1. Portanto, $P = 126+1 = 127$ cm.

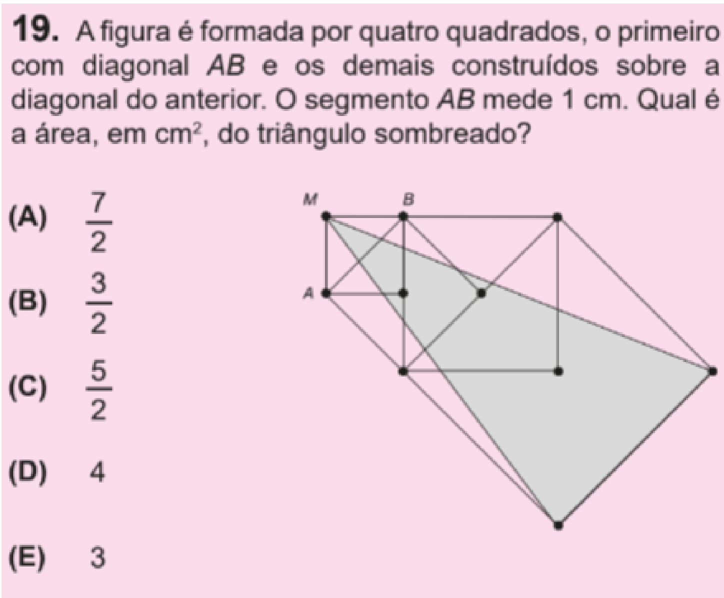
A generalização da questão se deu da seguinte maneira. A figura pode ter n triângulos e abrangem dois entre os três tipos de razões da PG. Isso se deve por estarmos trabalhando com perímetro e assim, descartamos a razão oscilante. O único ponto distinto entre o perímetro da figura após a troca da razão que está entre 0 e 1 para a razão maior que 1, considerando que a_1 será sempre um número positivo, é que a medida do lado do triângulo a ser somada no final do cálculo deixa de ser do último triângulo e passa a ser do primeiro. De forma geral, dizemos que deve-se somar a medida de um lado do menor triângulo pertencente a figura.

Novamente, com alguns questionamentos, permite a discussão de diferentes conteúdos e análises em cima de uma mesma questão anteriormente já resolvida pelo aluno.

5.3 OBMEP - QUESTÃO 19, BANCO DE QUESTÕES NÍVEL 2 DE 2024

Consideremos a questão conforme mostra a Figura 20.

Figura 20 – OBMEP - Questão 19, Banco de Questões Nível 2 de 2024


19. A figura é formada por quatro quadrados, o primeiro com diagonal *AB* e os demais construídos sobre a diagonal do anterior. O segmento *AB* mede 1 cm. Qual é a área, em cm^2, do triângulo sombreado?

(A) $\frac{7}{2}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{5}{2}$

(D) 4

(E) 3

Fonte: http://obmep.org.br/provas.htm.

Seguindo as fases de resolução de Pólya (1995), na primeira, deve-se fazer a leitura de forma atenciosa, entendendo o que a questão pede e obtendo todas as informações necessárias para a criação da estratégia de resolução.

Novamente se trata de uma questão de geometria, acompanhada de uma figura, seguiremos os mesmos questionamentos feitos nas questões anteriores.

a) Quais dados foram fornecidos a partir da leitura do texto?

b) Quais dados podem identificar através da figura geométrica da questão?

c) O que se pede no exercício?

Partindo desse ponto, temos as seguintes informações que irão ajudar na resolução.

Para a primeira pergunta temos que o segmento AB mede 1 cm e que é a diagonal do primeiro quadrado. Também fornece a informação que a medida do lado dos próximo quadrado será igual a diagonal do quadrado anterior.

Fazendo a leitura, nos deparamos com termos como quadrado, triângulo, diagonal e área, que ao observarmos são conceitos apresentados na grade curricular do 5º ano, ou seja, conteúdos que já foram trabalhados.

Essa parte da análise também está relacionada à habilidade:

> **(EF05MA17)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais (Brasil, 2018, p. 297).

Para a segunda pergunta, observamos a formação da figura como descrita pelo enunciado e também quais pontos formam o triângulo sombreado.

Para a terceira pergunta temos que o exercício pede para que se calcule a área do triângulo formado pela base do último quadrado e o ponto M.

Para a segunda fase da resolução de Pólya (1995), é necessário o levantamento dos conceitos presentes no material, teoremas e propriedades presentes na questão. O professor, por outro lado, deverá observar que as seguintes as competências e habilidades da BNCC são abordadas, como mostra o Quadro 3, tendo ciência de que elas já foram contempladas anteriormente no processo educacional dos alunos.

Quadro 3 – Habilidades e competências abordadas na Questão 19, Banco de Questões OBMEP, Nível 2 de 2024.

Objetivos de Conhecimento	**Habilidades**
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Continua na próxima página

Quadro 3 – *Continuação da página anterior.*

Objetivos de Conhecimento	**Habilidades**
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	**(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
Área de figuras planas. Área do círculo e comprimento de sua circunferência.	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
Polígonos regulares.	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

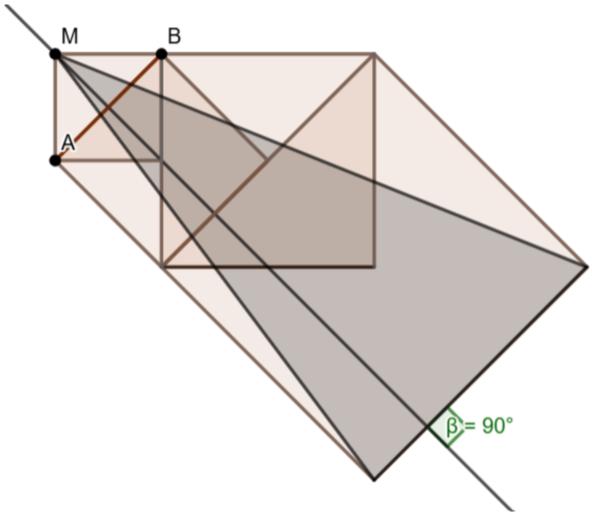
Fonte: Adaptada pelo autor a partir de Brasil (2018).

Já com relação ao plano de resolução, segue uma possível alternativa:

- Inicialmente traçamos uma reta perpendicular ao segmento de reta AB, que passa no ponto M. A parte dessa reta que pertence a figura, é a altura do triângulo em questão.
- Em seguida, partindo do segmento de reta AB, devemos calcular a medida da base do triângulo e também sua altura. Essa parte pode ser obtida a partir do uso da fórmula do teorema de Pitágoras.
- Após isso, basta fazer o uso da fórmula do cálculo da área de triângulos.

Para a terceira fase, resolvemos a questão.
Inicialmente, traçamos a altura do triângulo sombreado, como indicada na Figura 21.

Figura 21 – Altura do triângulo formado na Questão 19, Banco de Questões OBMEP, Nível 2 de 2024.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 21 mostra os pontos que dividem a altura do triângulo em três partes. Logo, a altura do triângulo sombreado é igual a

$$\frac{1}{2}\left[\text{medida de } AB\right] + \left[\text{medida de } AB\right] + 2 \times \left[\text{ medida de } AB\right] = \frac{7}{2}\left[\text{ medida de } AB\right].$$

Neste caso, a medida de AB é igual a 1 e a altura do triângulo é $\frac{7}{2}$. Portanto, a área do triângulo sombreado é $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} \times 2\right) = \frac{7}{2}$ cm^2.

Para a quarta fase, devemos rever, reavaliar, ver se tem outra possibilidade de resolução e observar se é possível utilizar o processo em outra questão.

O processo de resolução se mostra bem sucinto e eficaz para que se calcule o que foi pedido na questão. Com relação a uma outra possibilidade de resolução, ao invés de utilizar o teorema de Pitágoras, poderia ser utilizado a trigonometria, visto que temos em todos os quadrados a sua diagonal, formando assim triângulos isósceles retângulo. Com isso, usaria as funções trigonométricas sob o ângulo de $45°$, pois, possuindo um ângulo reto e os outros dois com mesma medida, utilizando o conceito de soma dos ângulos internos de um triângulo, concluímos este valor.

Sobre utilizar este processo de resolução em outra questão, observando as selecionadas neste trabalho, não seria possível. Porém, esse processo, após concluído, junta-se ao referencial de aprendizado do aluno, possibilitando possíveis futuras resoluções que farão uso desta resolução.

Para a generalização, consideremos a diagonal AB com medida d e, alterando a quantidade de quadrados, determinamos uma maneira para calcular a área do triângulo formado por uma quantidade n de quadrados.

Inicialmente, calculemos a medida dos lados dos quadrados sabendo que AB mede d. Neste momento, vamos precisar fazer uso de algumas habilidades e competências da BNCC, além das descritas na segunda fase da resolução desta questão. Elas são descritas no Quadro 4.

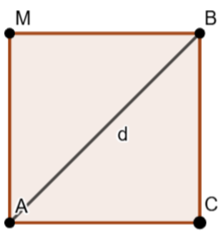
Quadro 4 – Habilidades e competências complementares para a Questão 19, Banco de Questões OBMEP, Nível 2 de 2024.

Objetivos de Conhecimento	Habilidades
Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração. Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Fonte: Adaptada pelo autor a partir de Brasil (2018).

Após complementar essas habilidades na questão, temos que o segmento AB mede d. Com isso, aplicando o Teorema de Pitágoras calculamos o lado do quadrado $ACBM$ (Ver Figura 22).

Figura 22 – Quadrado $ACBM$ formado.

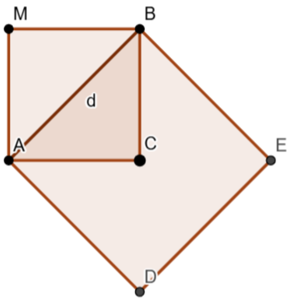


Fonte: Elaborada pelo autor.

Isto é, $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Logo, $a = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$.

Já o quadrado $ABED$ (Ver Figura 23) tem lados medindo d, uma vez que o segmento AB é um dos lados deste quadrado.

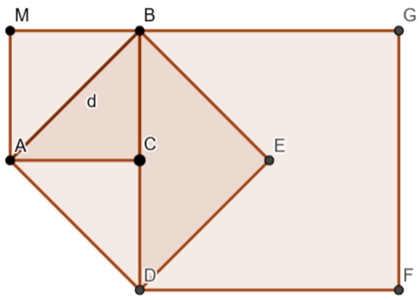
Figura 23 – Quadrado $ABED$ formado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo Teorema de Pitágoras calculamos o lado do quadrado $BDFG$ (Ver Figura 24).

Figura 24 – Quadrado $BDFG$ formado.

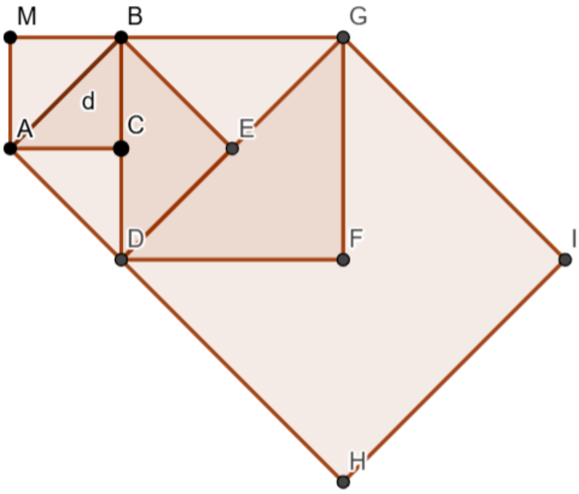


Fonte: Elaborada pelo autor.

Ou seja, $BD^2 = d^2 + d^2 = 2d^2$. Assim, $BD = d\sqrt{2}$.

Novamente pelo Teorema de Pitágoras, calculamos o lado do quadrado $DGIH$ (Ver Figura 25).

Figura 25 – Quadrado *DGIH* formado.

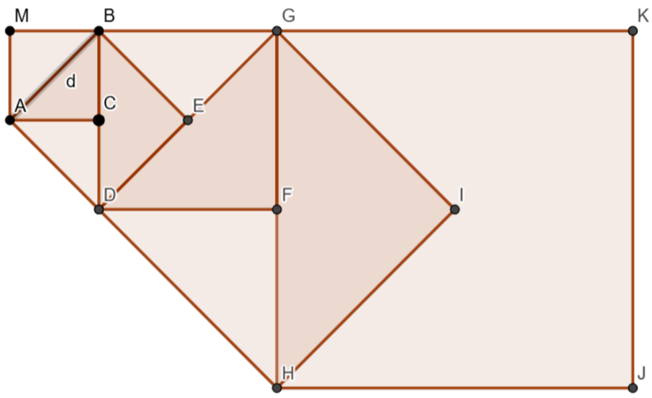


Fonte: Elaborada pelo autor.

Isto é, $DG^2 = (d\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2})^2 = 4d^2$. Logo, $DG = 2d$.

Se seguirmos para o quinto quadrado (Ver Figura 26), aplicando o Teorema de Pitágoras, calculamos o lado do quadrado $GHJK$.

Figura 26 – Quadrado *GHJK* formado.

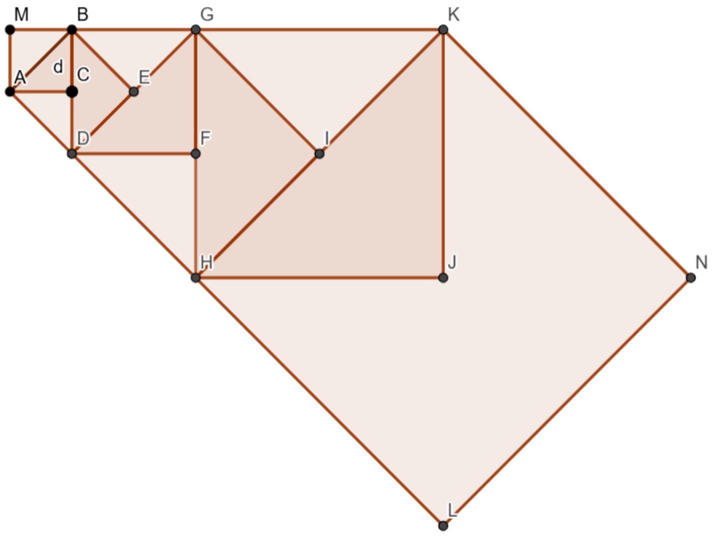


Fonte: Elaborada pelo autor.

Ou seja, $HG^2 = (2d)^2 + (2d)^2 = 8d^2$. Segue então que $HG = 2d\sqrt{2}$.

Para o sexto quadrado (Ver Figura 27), aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, determinamos o lado do quadrado $HKNL$.

Figura 27 – Quadrado $HKNL$ formado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Isto é, $HK^2 = (2d\sqrt{2})^2 + (2d\sqrt{2})^2 = 16d^2$. Logo, $HK = 4d$.

Neste momento, já é possível observar uma lei de formação, a medida dos lados dos quadrados, separados em grupos dos ímpares (1º, 3º, 5º, e assim por diante) e pares (2º, 4º, 6º, e assim por diante), formam uma progressão geométrica com razão q fixa, como demonstrado a seguir.

Separando as medidas dos lados dos quadrados ímpares, temos $d\dfrac{\sqrt{2}}{2}, d\sqrt{2}, 2d\sqrt{2}$. Verificamos que esta sequência é uma PG com $a_1 = d\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e razão 2.

Para as medidas dos quadrados pares, temos: $d, 2d, 4d$. Esta sequência também é uma PG com razão 2, com $a_1 = d$.

O objetivo do exercício é calcular a área do triângulo formado pela base do último quadrado junto ao ponto M. Para o cálculo dessa área, basta sabermos a quantidade de quadrados, observar se é uma quantidade ímpar ou par e trabalhar com as fórmulas do termo geral de uma PG (para encontrar o valor do lado do último quadrado e consequentemente o valor da base do triângulo) e soma de uma PG (para calcular a altura do triângulo). Após isso basta calcular a área sombreada.

Calculando a área do triângulo formado pelo n-ésimo quadrado temos que a base do triângulo é dada por $a_n = a_1.q^{n-1}$ e sua altura por

$$h = S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Se n for ímpar, a_1 será igual a $d\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Porém, se n for par, observamos uma questão importante a respeito da altura do triângulo, pois se utilizarmos $a_1 = d$, teremos a altura do triângulo formado pela base do n-ésimo quadrado (onde $n = 2m$, com m pertencendo ao conjunto dos naturais) e qualquer ponto que esteja entre o segmento AB. Neste caso, resta calcularmos a altura do triângulo ABM, a qual podemos afirmar que é igual a metade da diagonal do quadrado $ACBM$. Assim, a altura procurada é $\frac{d}{2}$. Logo, se n for par, $a_1 = \frac{d}{2}$.

Para finalizarmos, resta calcularmos a área do triângulo que pode ser obtida pela seguinte fórmula $A = \frac{b.h}{2}$ onde $b = a_n$ e $h = S_n$.

Assim, considerando as informações da questão inicial, a fórmula geral seria:

$$A = \frac{a_n \times S_n}{2} = \frac{(a_1 q^{n-1}) \left[a_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)\right]}{2}.$$

Substituindo a razão q por 2, temos:

$$A = \frac{(a_1 2^{n-1}) \left[a_1 \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right)\right]}{2} = \frac{a_1^2 2^{n-1}(2^n - 1)}{2}.$$

Logo, a fórmula geral pode ser descrita por:

$$A = a_1^2 2^{n-2}(2^n - 1)$$

Por exemplo, seguindo a questão original, qual a área do triângulo formado se tivermos 9 quadrados?

De acordo com a generalização realizada anteriormente, precisamos somente do valor do segmento AB, a quantidade de quadrados, observar se é uma quantidade ímpar ou par e fazer uso dos conceitos de PG e área de triângulos. Assim, para a questão inicial, o segmento AB mede 1 cm. A quantidade de quadrados é 9 (um valor ímpar). Sabemos que o valor de a_1 é igual a $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. Sabemos que d representa a medida do segmento AB, logo $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Substituindo os termos temos:

$$A = a_1^2 2^{n-2}(2^n - 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 2^{9-2}(2^9 - 1) = 32704 \text{ cm}^2.$$

Assim, sem a necessidade de fazer a figura e calcular, por Pitágoras, os lados dos quadrados, um a um, podemos afirmar que a área do triângulo formado pelos 9 quadrados é igual a 32704 cm^2.

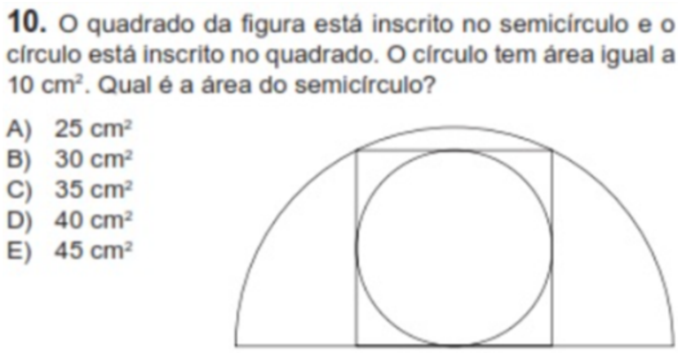
E se fossem 12 quadrados? Neste caso, devemos alterar o valor de a_1 e de n. O processo de resolução segue o mesmo. Como n é 12 (par), a_1 será igual a $\frac{1}{2}$. Substituindo, temos:

$$A = a_1^2 2^{n-2}(2^n - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 2^{12-2}(2^1 2 - 1) = 1048320\ \text{cm}^2.$$

5.4 OBMEP - QUESTÃO 10, BANCO DE QUESTÕES, PRIMEIRA FASE, NÍVEL 3 DE 2016

Primeiramente fazemos a leitura do enunciado com atenção. Ver Figura

Figura 28 – OBMEP - Questão 10, Banco de Questões, Primeira fase, Nível 3 de 2016



10. O quadrado da figura está inscrito no semicírculo e o círculo está inscrito no quadrado. O círculo tem área igual a 10 cm². Qual é a área do semicírculo?

A) 25 cm²
B) 30 cm²
C) 35 cm²
D) 40 cm²
E) 45 cm²

Fonte: http://obmep.org.br/provas.htm.

Novamente, baseamos nosso levantamento de informações sobre os três questionamentos utilizados nas duas primeiras questões deste trabalho.

a) Quais dados foram fornecidos a partir da leitura do texto?

b) Quais dados podem identificar através da figura geométrica da questão?

c) O que se pede no exercício?

Partindo disso, temos as seguintes informações que irão ajudar na resolução.

Para a primeira pergunta temos que a figura é formada por um círculo que está inscrito no quadrado que, por sua vez, está inscrito no semicírculo. Temos também que a área do círculo é 10 cm^2. Partindo da leitura do enunciado nos deparamos com os termos círculo e semicírculo. Termos esses que se encontram na grade curricular do 8º ano. Como se trata de uma questão do nível 3 da OBMEP, podemos afirmar que o conteúdo já foi trabalhado nos anos anteriores.

Segundo Dante (2018), circunferência é a figura formada por todos os pontos de um plano cuja medida da distância a um ponto do mesmo plano é sempre a mesma. Esse ponto específico é chamado de centro.

Já para o semicírculo nada mais é do que a metade do círculo. Isso pode ser provado pelo cálculo da área do setor circular. A área do setor circular, ver Capítulo 3.2, é $A = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360°}$. Uma vez que o ângulo da base do semicírculo é 180°, temos que $A = frac\pi r^2 180° 360° = \dfrac{\pi r^2}{2}$.

Para a segunda pergunta, a figura apenas ilustra o que foi descrito no enunciado, não trazendo nenhuma informação extra ou exclusiva.

E para a terceira pergunta, a questão pede que seja calculada a área do semicírculo partido da informação que a área do círculo é 10 cm^2.

Para a segunda fase da resolução, o aluno já deverá ter contemplado as seguintes habilidades e competências da BNCC no seu processo educacional. Ver Quadro 5.

Quadro 5 – Habilidades e competências abordadas na Questão 10, Banco de Questões, Primeira fase, Nível 3 de 2016.

Objetivos de Conhecimento	**Habilidades**
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Continua na próxima página

Quadro 5 – *Continuação da página anterior.*

Objetivos de Conhecimento	**Habilidades**
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	**(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
Área de figuras planas. Área do círculo e comprimento de sua circunferência.	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais.	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
Polígonos regulares.	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Fonte: Adaptada pelo autor a partir de Brasil (2018).

Das habilidades mostradas no Quadro 5 vamos dar destaque na EF06MA21, EF08MA19 e EF09MA14.

Com relação ao plano de resolução, segue uma possível alternativa:

– Primeiro devemos denominar os raios da circunferência e do semicírculo, por exemplo, r e R, respectivamente.

– Como o círculo está circunscrito no quadrado, podemos afirmar que o lado do quadrado mede $2r$.

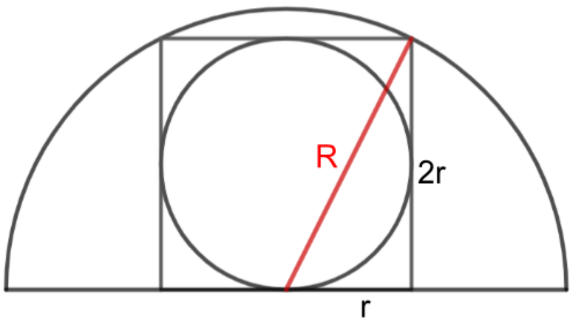
– Partindo do ponto de intersecção das três figuras a um ponto da intersecção do quadrado com o arco do semicírculo, formamos um triângulo retângulo, e assim, pelo Teorema de Pitágoras, conseguimos determinar uma relação entre R e r.

– Após isso, basta calcularmos o valor da área do semicírculo por meio de sua respectiva fórmula.

Para a terceira fase, na resolução do problema, faremos uso de toda informação extraída a partir do enunciado. Novamente, nesta questão, o conhecimento sobre os conteúdos de geometria se mostram necessários para colocar o plano estabelecido em ação.

Vamos denotar por r e R o raio da circunferência inscrita no quadrado e o raio do semicírculo, respectivamente. Como a circunferência está inscrita no quadrado, temos que o lado do quadrado mede $2r$. Observando o triângulo retângulo destacados na Figura 29.

Figura 29 – Informações obtidas para a resolução da Questão 10, Banco de Questões, Primeira fase, Nível 3 de 2016.



Fonte: Elaborada pelo autor.

e aplicando o Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$R^2 = (2r)^2 + r^2 = 5r^2.$$

Assim a área do semicírculo é

$$A = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{5}{2}\pi r^2.$$

Sabemos que πr^2 é igual a 10. Logo, $A = 25$ cm^2.

Para a quarta e última fase devemos rever, reavaliar e observar se é possível utilizar o processo em outra questão.

Quanto ao método, este se mostrou suficiente para a resolução correta do problema. No entanto, em relação à sua aplicação em outras questões — analisando aquelas selecionadas neste trabalho —, ele não se mostrou aplicável. Ainda assim, neste caso, esse processo de resolução integra-se ao conjunto de conhecimentos do aluno, conforme mencionado na segunda fase da resolução de problemas segundo Pólya (1995), o que poderá auxiliá-lo futuramente ao se deparar com exercícios semelhantes.

Para a generalização, consideramos a área do primeiro círculo fixada em 10 cm^2 (área dada pela questão) e também que o primeiro semicírculo será metade do segundo círculo; o segundo semicírculo será metade do terceiro círculo e assim sucessivamente. Podemos trabalhar sob os seguintes questionamentos:

– É possível generalizar esta questão a ponto de descobrirmos a área do n-ésimo semicírculo?

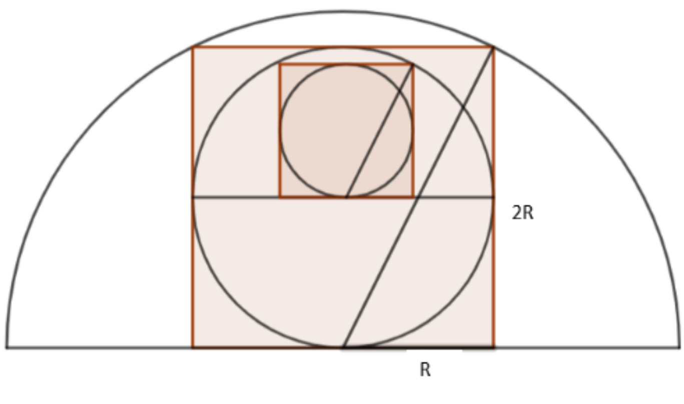
– O plano de resolução segue o mesmo?

– Caso seja possível generalizar esta questão, o processo inverso também se aplica, isto é, o primeiro semicírculo é a metade do primeiro círculo, dentro deste semicírculo temos um quadrado inscrito semicírculo com um círculo inscrito no quadrado, onde a metade desse círculo representa o segundo semicírculo, e assim sucessivamente (a razão da PG deve estar entre 0 e 1)?

A sequência da resolução será a mesma de antes. Faremos alguns exemplos para que possamos demonstrar o padrão.

Para esta questão, o raio da circunferência é R e a altura do quadrado é $2R$. Ver Figura 30.

Figura 30 – Resolução da Questão 10, Banco de Questões, Primeira fase, Nível 3 de 2016.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Primeiramente, calculamos a medida da hipotenusa do triângulo retângulo que possui os catetos medindo R e $2R$. Iremos nomear esta hipotenusa por D. Assim, $D^2 = R^2 + (2R)^2 = 5R^2$.

Substituindo D na área do segundo semicírculo obtemos:

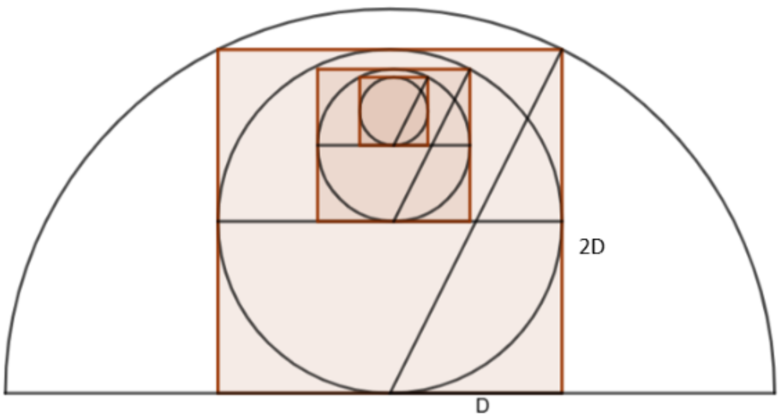
$$A = \frac{1}{2}\pi D^2 = \frac{5}{2}\pi R^2.$$

Sabendo que $R^2 = 5r^2$, segue que $A = \dfrac{25}{2}\pi R^2$.

Também sabemos que πr^2 é igual a 10. Logo, $A = 125$ cm^2.

Vamos repetir o processo mais uma vez e ver se a razão entre a primeira e a segunda área se mantém para as demais. Neste caso, o raio da circunferência é D e a altura do quadrado é $2D$. Ver Figura 31.

Figura 31 – Continuação da resolução da Questão 10, Banco de Questões, Primeira fase, Nível 3 de 2016.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Iniciamos calculando a medida da hipotenusa do triângulo retângulo que possui os catetos medindo D e $2D$. Iremos nomear esta hipotenusa por E. Logo, $E^2 = D^2 + (2D)^2 = 5D^2$.

A área do terceiro semicírculo é dada por $A = \dfrac{1}{2}\pi E^2$. Substituindo o valor de E^2 temos $A = \dfrac{5}{2}D^2$. Sabendo que D^2 é igual a $5R$ segue que $A = \dfrac{25}{2}R^2$. Por outro lado, sabemos que R^2 vale $5r^2$. Assim, $A = \dfrac{125}{2}\pi r^2$. Também sabemos que πr^2 é igual a 10. Logo, $A = 625$ cm^2.

As áreas encontradas foram:

– Primeiro semicírculo = 25 cm^2.

– Segundo semicírculo = 125 cm^2.

– Terceiro semicírculo = 625 cm^2.

Colocando no formato de sequência observamos que

a) $125 = 5 \times 25$ (área do segundo semicírculo = 5 vezes a área do primeiro semicírculo).

b) $625 = 5 \times 125$ (área do terceiro semicírculo = 5 vezes a área do segundo semicírculo).

Devemos observar que o valor das áreas dos semicírculos formam uma PG (Progressão Geométrica) com razão (q) igual a 5 e primeiro termo (a_1) igual a 25 cm^2.

Utilizando a fórmula de PG é possível calcularmos a área do n-ésimo semicírculo. Vimos anteriormente que a fórmula é dada por $a_n = a_1.q^{n-1}$.

Para o processo inverso, o método de resolução continua o mesmo, porém, ao invés de termos os valores dos catetos do triângulo retângulo formado, teremos a medida da hipotenusa. Já com relação aos catetos, eles seguem a mesma proporção dos anteriores (se um mede x, o outro mede $2x$).

Primeiro observamos que a medida do primeiro raio é r. Como já era conhecida a área do primeiro círculo, fica fácil calcularmos o valor de r. De fato, $\pi r^2 = 10$ e assim, $r^2 = \dfrac{10}{\pi}$.

O triângulo retângulo formado segue o mesmo padrão dos anteriores, porém em escala menor. Vamos nomear os catetos por x e $2x$. Pelo Teorema de Pitágoras segue que $r^2 = x^2 + (2x)^2 = 5x^2$. Visto que $\dfrac{10}{\pi}$ é igual a r^2 e que $5x^2$ também é igual a r^2, igualamos esses dois valores. Assim,

$$5x^2 = \frac{10}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{2}{\pi}.$$

A área do segundo semicírculo é dada por $A = \dfrac{1}{2}\pi x^2$. Substituindo o valor de x^2, $A = \dfrac{1}{2}\pi\dfrac{2}{\pi} = 1$ cm^2.

Vamos repetir o processo mais uma vez. Agora denotaremos o raio da circunferência por y e a altura do quadrado por $2y$. Pelo Teorema de Pitágoras, $x^2 = y^2 + (2y)^2 = 5y^2$. Visto que $\dfrac{2}{\pi}$ é igual a x^2 e que $5y^2$ também é igual a x^2, podemos igualar esses dois valores. Assim,

$$5y^2 = \frac{2}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{2}{5\pi}.$$

A área do terceiro semicírculo é dada por $A = \dfrac{1}{2}\pi y^2$. Substituindo o valor de y^2, segue $A = \dfrac{1}{2}\pi\dfrac{2}{5\pi} = \dfrac{1}{5}$ cm^2.

As áreas encontradas foram:

– Primeiro semicírculo = 5 cm^2.

– Segundo semicírculo = 1 cm^2.

– Terceiro semicírculo = $\dfrac{1}{5}$ cm^2.

Como sequência numérica observamos que

a) $1 = 5 \times \frac{1}{5}$ (área do segundo semicírculo = $\frac{1}{5}$ da área do primeiro semicírculo).

b) $\frac{1}{5} = 1 \times \frac{1}{5}$ (área do terceiro semicírculo = $\frac{1}{5}$ da área do segundo semicírculo).

Devemos observar que o valor das áreas dos semicírculos formam uma PG (Progressão Geométrica) com razão (q) igual a $\frac{1}{5}$ e primeiro termo (a_1) igual a 5 cm^2. Ou seja, o processo de generalização pode ser calculado tanto com uma razão maior que 1, quanto uma razão que está entre 0 e 1, uma vez que a área inicial é positiva. Como a questão trata o conceito de área, descartamos a razão oscilante.

Vamos agora fazer um exemplo, sem a necessidade de utilizar o Teorema de Pitágoras, apenas fazendo uso do processo generalizado.

Neste sentido, iremos fazer uso dos conceitos sobre PG, com a fórmula do cálculo de n-ésimo termo de uma PG, descrita por $a_n = a_1 q^{n-1}$, onde o valor de a_n a ser determinado representa a área do semicírculo desejado.

Por exemplo, fazendo uso da questão inicial, qual será a área do quinto semicírculo?

Para respondermos a essa pergunta, precisamos apenas da área do primeiro semicírculo, que já foi calculado anteriormente. Ou seja, $a_1 = 25$ cm^2. Como o exemplo pede a respeito do quinto semicírculo, concluímos que $n = 5$. Como estamos seguindo a questão inicial, sabemos que a razão será igual a 5, como calculado anteriormente. Resta fazer a substituição desses termos na fórmula, isto é,

$$a_5 = 25 \times 5^{5-1} = 15625 \text{ cm}^2.$$

E se fosse o processo inverso e quiséssemos calcular a área do quarto semicírculo?

O processo seria o mesmo, só temos que alterar os valores de q, a_1 e r. De fato, a área do primeiro semicírculo foi anteriormente calculada e $a_1 = 5$ cm^2. Como o exemplo pediu para o quarto semicírculo, temos que $n = 4$. Além disso, estamos fazendo o processo inverso e sabemos também que a razão será igual a $\frac{1}{5}$. Agora, basta fazermos a substituição desses termos na fórmula e obtemos

$$a_4 = 5\left(\frac{1}{5}\right)^{4-1} = \frac{1}{25} \text{ cm}^2.$$

Assim, encerramos o processo de generalização da questão, provando que é possível realizar este cálculo sem a necessidade de ilustrá-lo e aplicar o Teorema de Pitágoras e a fórmula da área do semicírculo uma a uma, utilizando apenas o conceito de progressão geométrica (PG).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho surgiu a partir da motivação de estender o ensino e a aprendizagem em sala de aula observando e fazendo uso das habilidades e competências da BNCC. Com o auxílio da Metodologia de Resolução de Problemas de Polya (Pólya, 1995), aplicado em quatro questões escolhidas no Banco de Questões da OBMEP, foi possível fazer com que o aluno fosse além de um simples ato de resolver um exercício para uma análise detalhada e estendida sob cada questão, abrangendo conceitos de geometria para resolver a questão de outro ponto de vista.

Podemos observar que as quatro fases da Metodologia de Polya são muito eficazes desde que o professor faça bom uso delas acompanhando o trabalho executado dos alunos.

Na validação das questões, ao fazer os questionamentos, o professor consegue direcionar diversas discussões e reflexões, permitindo que o aluno resolva a questão e mostre que o processo para chegar ao novo resultado final pode ser feito de diversas formas.

Neste trabalho, as validações seguiram a ideia da generalização das questões que, se observarmos, é um dos objetivos presentes no livro Pólya (1995). Para que o processo fosse realizado, nas questões selecionadas, foi necessário o uso de conteúdos de geometria e conceitos sobre progressão geométrica. Dessa forma, após realizar as validações dos exercícios, verificamos que passamos da consideração de um único elemento para tratar a questão como um conjunto de possibilidades de resolução, sem a necessidade de ficar desenhando a extensão das figuras ou tendo que repetir diversas vezes um mesmo cálculo.

Para uma futura extensão, desejamos fazer um estudo mais direcionado à formação do professor em sala de aula ao invés de analisar o processo do aluno, seria algo a agregar e complementar este trabalho.

REFERÊNCIAS

BONATTI, Izabella Lopes. **Explorando o desenvolvimento de competências no ensino de Geometria no Ensino Fundamental II, com problemas da OBMEP**. 2022. Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. Citado nas pp. 14, 27.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base**. [*S. l.*]: MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: `http://download.basenacionalcomum.mec.gov.br/`. Citado nas pp. 13, 14, 30, 31, 41, 43, 48, 49, 51, 58.

DANTE, Luiz Roberto. **Manual do Professor**. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018. Citado na p. 56.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Oswaldo *et al.* **Matemática - Volume único**. São Paulo: Atual, 2019. Citado na p. 16.

IEZZI, Gelson; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar - Geometria Plana**. São Paulo: Atual, 2006. v. 9. Citado na p. 30.

MEC. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc`. Acesso em: 26 nov. 2024. Citado na p. 12.

NETO, Antonio Caminha Munhoz. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT). Citado nas pp. 30, 41.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Página oficial**. Disponível em: `https://www.obm.org.br/quem-somos/historico/`. Acesso em: 10 nov. 2024. Citado na p. 12.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. **Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)**. 2018. Disponível em: `http://obmep2018.obmep.org.br/pic.htm`. Acesso em: 10 nov. 2024. Citado na p. 13.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Citado nas pp. 11, 24–26, 28, 33, 41, 42, 47, 48, 60, 64.

SILVA, Daniel Wesley da. **A história da Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e suas contribuições para o ensino e aprendizagem da matemática**. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Cacoal - RO, 2023. Citado na p. 12.