



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E
TECNOLOGICAS



GABRIELA MOTA

**INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS
PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UMA
APLICAÇÃO À EQUAÇÃO DO TELÉGRAFO**

SOROCABA
FEVEREIRO DE 2025

Gabriela Mota

**Introdução aos métodos analíticos e numéricos para
equações diferenciais parciais: uma aplicação à
equação do Telégrafo**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, sob orientação da Prof.^a Dr.^a. Graciele P. Silveira.

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas

Orientadora: Graciele P. Silveira

Sorocaba
Fevereiro de 2025

Mota, Gabriela

Introdução aos métodos analíticos e numéricos para equações diferenciais parciais: uma aplicação à equação do telégrafo / Gabriela Mota -- 2025.
111f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): Graciele Paraguaia Silveira

Banca Examinadora: Davi Vieira Ramos de Oliveira,
Raphael de Oliveira Garcia

Bibliografia

1. EDPs. 2. Métodos das diferenças finitas. 3. Equação do Telégrafo. I. Mota, Gabriela. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Gabriela Mota, realizada em 13/02/2025.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Graciele Paraguaia Silveira (UFSCar)

Prof. Dr. Davi Vieira Ramos de Oliveira (IFBA)

Prof. Dr. Raphael de Oliveira Garcia (UNIFESP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Agradecimentos

À minha mãe, Elisabeth, e ao meu pai, Antonio, pelo apoio e suporte. Aos meus irmãos, Vinicius e Beatriz, pelo incentivo e pela paciência ao ouvir e ver o desenvolvimento do trabalho.

À orientadora, Prof.^a Dr.^a Graciele P. Silveira, por sugerir o tema, pela orientação ao longo do trabalho e pela prontidão em ajudar.

Aos colegas de curso, especialmente ao Eduardo pela dedicação e esforço inspirador e por ajuda em momentos difíceis, foi de grande motivação e incentivo. Também aos demais colegas, mesmo aqueles que seguiram outros caminhos, mas que também contribuíram com resoluções de exercícios, revisões e caronas.

Ao colega Gustavo pelo transporte no último ano, e pelas conversas durante o longo trajeto.

Aos professores que fizeram parte da minha jornada acadêmica, por contribuírem para que eu chegasse até aqui.

Aos professores que compuseram a banca examinadora, pelas correções e sugestões.

A todos que contribuíram na minha formação e realização do trabalho.

Resumo

No final do século XIX, Oliver Heaviside iniciou pesquisas sobre a transmissão de informações, desenvolvendo a equação do Telégrafo, que descreve a propagação de ondas e correntes em cabos. Desde então, essa equação diferencial parcial (EDP) tem sido amplamente estudada. Os objetivos deste trabalho foram apresentar uma introdução aos conceitos fundamentais de EDPs e às suas soluções numéricas, a partir do método das diferenças finitas. Um capítulo é dedicado à equação do Telégrafo, incluindo simulações numéricas para ilustrar sua aplicação. Além disso, o trabalho visa servir como material de referência para professores e estudantes, contribuindo para o ensino de EDPs por meio de uma sequência didática e da disponibilização dos códigos utilizados nas implementações numéricas.

Palavras-chave: EDPs, Método das Diferenças Finitas, Equação do Telégrafo.

Abstract

At the end of the 19th century, Oliver Heaviside began research on transmission of information, developing the Telegraph equation, which describes the propagation of waves and currents in cables. Since then, this partial differential equation (PDE) has been extensively studied. The objectives of this work were to present an introduction to the fundamental concepts of PDEs and their numerical solutions using the finite difference method. A dedicated chapter focuses on the Telegraph equation, including numerical simulations to illustrate the application. Additionally, the work seeks to serve as a reference material for teachers and students, contributing to the teaching of PDEs through a structured teaching sequence and the provision of codes used in the numerical implementations.

Keywords: PDEs, Finite Difference Method, Telegraph Equation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Aproximações da função f por série de Fourier.	28
Figura 2 – Barra sólida condutora de calor.	29
Figura 3 – Distribuições de temperatura em diversos instantes – Exemplo 3.1. . .	32
Figura 4 – Distribuições de temperatura em diversos instantes tridimensionalmente – Exemplo 3.1.	33
Figura 5 – Evolução da temperatura ao longo do tempo para alguns pontos da barra – Exemplo 3.1.	33
Figura 6 – Evolução da temperatura ao longo do tempo para alguns pontos da barra tridimensionalmente – Exemplo 3.1.	34
Figura 7 – Gráfico da temperatura u em função de x e de t – Exemplo 3.1.	34
Figura 8 – Distribuições de temperatura em diversos instantes – Exemplo 3.2. . .	37
Figura 9 – Gráfico da temperatura u em função de x e de t – Exemplo 3.2	38
Figura 10 – Distribuições de temperatura em diversos instantes – Exemplo 3.3. . .	41
Figura 11 – Evolução da temperatura ao longo do tempo para alguns pontos da barra – Exemplo 3.3.	41
Figura 12 – Corda puxada.	42
Figura 13 – Deslocamento vertical ao longo da corda num instante t	43
Figura 14 – Gráfico de $u(x, t)$ fixando valores de t – Exemplo 4.1.	47
Figura 15 – Gráfico de $u(x, t)$ fixando valores de x – Exemplo 4.1.	48
Figura 16 – Gráfico de $u(x, t)$ – Exemplo 4.1.	48
Figura 17 – O problema de Dirichlet em um retângulo.	52
Figura 18 – Gráfico de $u(x, t)$ – Exemplo 5.1.	54
Figura 19 – Curvas de nível de $u(x, y)$ – Exemplo 5.1.	55
Figura 20 – Discretização igualmente espaçada no intervalo $[a, b]$	57
Figura 21 – Aproximações para as derivadas geometricamente.	57
Figura 22 – Comparação entre diferenças atrasada, centrada e avançada.	60
Figura 23 – Malha no domínio espaço-tempo.	61
Figura 24 – Relação entre consistência, estabilidade e convergência.	64
Figura 25 – Discretização do domínio e condição inicial (■) e de contorno (◆). . . .	65
Figura 26 – O <i>stencil</i> para equação do Calor.	66
Figura 27 – Propagação da condição de contorno no esquema explícito.	67
Figura 28 – Instabilidade numérica no método explícito de condução de calor - Exemplo 3.1.	67
Figura 29 – O <i>stencil</i> para a equação da onda.	69
Figura 30 – Pontos necessários que não pertencem ao domínio.	69
Figura 31 – Condições de contorno em $[0, a] \times [0, b]$	70

Figura 32 – Discretização do domínio Ω e condição de contorno (\blacklozenge).	71
Figura 33 – O <i>stencil</i> para a equação de Laplace.	72
Figura 34 – Ordenação dos nós internos em linhas (<i>rowwise</i>).	73
Figura 35 – Gráfico da solução exata - Exemplo 7.1.	82
Figura 36 – Gráfico de u em diferentes instantes - Exemplo 7.1.	82
Figura 37 – Soluções numéricas - Exemplo 7.1.	83
Figura 38 – Gráfico da solução exata - Exemplo 7.2.	84
Figura 39 – Gráfico de u ao longo do tempo - Exemplo 7.2.	84
Figura 40 – Soluções numéricas - Exemplo 7.2.	85
Figura 41 – Gráfico da solução exata - Exemplo 7.3.	86
Figura 42 – Gráfico de u em diferentes instantes - Exemplo 7.3.	86
Figura 43 – Soluções numéricas - Exemplo 7.3.	87
Figura 44 – Gráfico da solução exata - Exemplo 7.4.	88
Figura 45 – Soluções numéricas - Exemplo 7.4.	88

Sumário

	Lista de ilustrações	8
1	INTRODUÇÃO	12
2	CONCEITOS INICIAIS	15
2.1	Equações Diferenciais	15
2.2	Problema de autovalor de Sturm-Liouville	18
2.3	Funções Trigonométricas	20
2.4	Série de Fourier	25
3	EQUAÇÃO DO CALOR	29
3.1	Condução do calor em uma barra	29
3.1.1	Condições de contorno homogêneas	30
3.1.2	Condições de contorno não homogêneas	35
3.1.3	Barra com extremidades isoladas	38
4	EQUAÇÃO DA ONDA	42
4.1	Propagação da onda em uma corda	42
4.1.1	Corda elástica com velocidade inicial nula	43
4.1.2	Corda elástica com velocidade inicial não nula	48
4.1.3	Problemas Mais Gerais	50
5	EQUAÇÃO DE LAPLACE	51
5.1	O problema de Dirichlet em um retângulo	51
6	O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	56
6.1	Discretização do domínio em \mathbb{R}	56
6.2	Discretização do domínio em \mathbb{R}^2	61
6.3	Consistência, Estabilidade e Convergência	63
6.4	Equação do Calor	64
6.5	Equação da Onda	68
6.6	Equação de Laplace	70
7	APLICAÇÃO: EQUAÇÃO DO TELÉGRAFO	76
7.1	Solução Analítica	77
7.2	Solução Numérica	79
7.3	Simulações Numéricas	81

8	ENSINO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA	89
8.1	Objetivos	89
8.2	Metodologias	89
8.3	Materiais	90
8.4	Introdução	90
8.5	Desenvolvimento	91
8.6	Conclusão	94
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	95
	REFERÊNCIAS	96
	APÊNDICE A – MÉTODOS ITERATIVOS	98
A.1	Gauss-Jacobi	98
A.2	Gauss-Seidel	99
A.3	Sobre-Relaxação Sucessiva (SOR)	100
	ANEXO A – CÓDIGO <i>PYTHON</i>	101
A.1	Pacotes	101
A.2	Equação do Calor	101
A.3	Equação da Onda	104
A.4	Equação de Laplace	106
A.5	Equação do Telégrafo	109

1 Introdução

O desenvolvimento do Cálculo no século XVII trouxe diversos avanços, especialmente na Física. A introdução de conceitos como os infinitesimais e o uso de limites possibilitou análises de fenômenos físicos, permitindo modelar esses problemas a partir de suas taxas de variação, representadas pelas derivadas. Esse tipo de modelagem resulta em equações descritas a partir da função e suas derivadas, que são denominadas de equações diferenciais.

Nas equações diferenciais, o objetivo é encontrar a função que satisfaz a equação. Essas equações são classificadas de acordo com o número de variáveis independentes da função incógnita. Se essa função depende de apenas uma variável, a equação é denominada de equação diferencial ordinária (EDO). Se a função depende de várias variáveis, suas derivadas serão parciais, e a equação é denominada equação diferencial parcial (EDP). As EDOs estão presentes em disciplinas básicas de diversos cursos da área de exatas, enquanto as EDPs, por sua maior complexidade, são mais comumente abordadas em cursos avançados de matemática ou em programas de pós-graduação.

A complexidade das EDPs ocorre devido à dificuldade de obter soluções analíticas, que só são possíveis em casos específicos. Nesse contexto, os métodos numéricos tornam-se ferramentas indispensáveis para a resolução de problemas reais modelados por EDPs. Entre esses métodos, destaca-se o método das diferenças finitas, amplamente estudado por sua simplicidade conceitual, com sua abordagem baseada na discretização do problema.

Este método utiliza aproximações para as derivadas em um ponto, utilizando valores da função em pontos vizinhos da malha. No caso de métodos explícitos, os valores obtidos inicialmente surgem diretamente a partir das condições iniciais. A partir desses valores iniciais, os demais pontos são calculados sequencialmente por relações explícitas que dependem apenas dos pontos adjacentes conhecidos. Por outro lado, nos métodos implícitos, é necessário resolver um sistema de equações, no qual cada equação está associada a um ponto onde se busca calcular o valor da função. Essa abordagem geralmente resulta em maior estabilidade.

Entretanto, problemas reais de grande escala frequentemente exigem implementação computacional. Desta forma, nesta dissertação são apresentados códigos que implementam as soluções numéricas para os problemas discutidos ao longo do texto. No caso das EDPs clássicas, as quais são abordadas apenas como exemplos, são disponibilizados os códigos em anexo, sem a realização de simulações numéricas. Já para a equação do Telégrafo, que constitui o objetivo principal deste estudo, foram incluídas tanto as implementações numéricas quanto as simulações correspondentes, com o intuito

de analisar seu comportamento e validar os métodos aplicados. Enquanto os objetivos específicos foram:

- Introduzir os conceitos iniciais para entendimento da resolução de EDPs;
- Apresentar a solução analítica para a equação do calor, da onda e de Laplace a partir do método de separação de variáveis;
- Explicar o método das diferenças finitas e utilizar para resolver numericamente as EDPs;
- Resolver numericamente a equação do Telégrafo;
- Implementar computacionalmente as soluções numéricas das EDPs;
- Propor uma sequência didática para o ensino de EDPs no ensino superior.

A partir deste estudo, busca-se pensar no ensino de EDPs no ensino superior, apresentando uma introdução de conceitos importantes da área. Viabilizando, por meio do texto e da sequência didática proposta, a organização didática da apresentação dos conceitos de EDPs, integrando aspectos teóricos e computacionais, com o objetivo de contribuir para o ensino no ensino superior.

Neste sentido, este trabalho utiliza a equação do Telégrafo para exemplificar a aplicação do método de diferenças finitas, uma vez que grande parte das referências concentra-se nas EDPs clássicas, que já são amplamente estudadas. Além disso, muitos artigos que abordam a equação do Telégrafo introduzem diretamente abordagens complexas e sofisticadas, dificultando a compreensão inicial do tema, como no caso de [Mohebbi e Dehghan \(2008\)](#), que resolvem utilizando a aproximação compacta de diferença finita de quarta ordem. Por outro lado, outros artigos partem diretamente para a abordagem geral da equação do Telégrafo a partir da versão fracionária, como em [Li e Cao \(2012\)](#).

Para as simulações foram utilizados os exemplos extraídos do artigo de [Saadatmandi e Dehghan \(2010\)](#), por fornecer a descrição completa dos problemas e a solução exata, permitindo comparar as soluções encontradas. Nesta referência, os autores calcularam a solução baseando-se nos polinômios de Chebyshev, expandindo a solução aproximada com polinômios de Chebyshev deslocados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 são apresentados os conceitos iniciais para o desenvolvimento da dissertação.

Nos Capítulos 3, 4 e 5 são exploradas as soluções analíticas da equação do calor, da onda e de Laplace respectivamente.

O Capítulo 6 apresenta o método das diferenças finitas aplicadas às EDPs clássicas.

O Capítulo 7 apresenta uma aplicação do método das diferenças finitas para a equação do Telégrafo, incluindo resultados obtidos em simulações computacionais.

O Capítulo 8 apresenta uma sequência didática voltada para o ensino de EDPs, abordando os tópicos tratados na dissertação. A proposta é direcionada a estudantes de graduação, com foco em proporcionar uma compreensão dos conceitos fundamentais de equações diferenciais parciais.

O Capítulo 9 apresenta as considerações finais.

Ao final do trabalho foi incluído o Apêndice A, contendo métodos iterativos úteis para solução do sistema resultante da aplicação do método das diferenças finitas para a equação de Laplace.

Por fim, em Anexo A são apresentados os códigos na linguagem *Python* utilizados para a solução numérica dos problemas apresentados ao longo da dissertação.

2 Conceitos Iniciais

Neste capítulo, serão revisados os tópicos essenciais que servirão de base para os capítulos subsequentes, incluindo o problema de autovalores, algumas propriedades das funções trigonométricas e a série de Fourier.

2.1 Equações Diferenciais

Na natureza observam-se diversos fenômenos que envolvem mudanças ao longo do tempo, o estudo do comportamento dessas taxas de variações contribuiu significativamente como ponto de partida para o ramo da Matemática que conhecemos atualmente como Cálculo. As primeiras investigações nesta área iniciaram-se com Arquimedes no intuito de determinar o perímetro e a área de uma circunferência (IÓRIO, 2018).

Entretanto, foi no século XVII que o cálculo começou a se desenvolver substancialmente, com contribuições de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Essas descobertas foram essenciais para a compreensão de muitos fenômenos naturais e impulsionaram avanços importantes em diversas áreas do conhecimento.

Com base nesses avanços, as equações diferenciais se tornaram uma ferramenta matemática fundamental para modelar uma variedade de fenômenos naturais.

Hoje as equações diferenciais nos ajudam a prever como as epidemias se propagarão, que lugar será atingido por um furacão e quanto devemos pagar por uma opção de compra de ações no futuro. Em todas essas áreas do esforço humano, as equações diferenciais surgiram como uma estrutura comum para descrever como as coisas mudam à nossa volta e dentro de nós (STROGATZ, 2022, p. 242-243).

As equações diferenciais são amplamente utilizadas, ao permitirem prever o comportamento futuro a partir do conhecimento das mudanças. Desta forma, uma equação diferencial relaciona uma função com suas derivadas, e sua solução é uma função ou uma família de funções que satisfaz essa relação.

Quando a função depende de uma única variável, as equações são chamadas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Por outro lado, quando a função depende de várias variáveis, as equações são denominadas Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Nas EDPs, a equação relaciona a função com suas derivadas parciais em relação a cada uma das variáveis independentes.

As EDPs constituem uma área de pesquisa ativa na matemática, com novas abordagens teóricas e computacionais sendo constantemente desenvolvidas para resolver

essas equações em contextos aplicados e abstratos. Elas permitem modelar problemas em diversas áreas, como física, química, biologia, economia, entre outras. Devido à importância desse tópico, esta pesquisa visa estudar as EDPs clássicas: a equação do calor, a equação da onda e a equação de Laplace, que descrevem, respectivamente, a difusão de calor, a propagação de ondas e a distribuição de potenciais em um campo.

Esta pesquisa foi realizada a partir do estudo da resolução analítica e numérica das equações, respectivamente pelo método de separação de variáveis e pelo método de diferenças finitas. Para a solução numérica, o método de diferenças finitas será implementado computacionalmente na linguagem *Python* e serão realizadas simulações e comparações entre as soluções obtidas analiticamente e numericamente.

A maioria dos fenômenos físicos, como a dinâmica dos fluidos, o magnetismo, a ótica e a propagação do calor, pode ser descrita por equações diferenciais parciais (FARLOW, 1993). As derivadas surgem nessas equações porque podem representar grandezas físicas como força, aceleração, velocidade, entre outras.

Uma EDP é uma equação da forma (IÓRIO, 2018):

$$F\left(x_1, \dots, x_n, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0,$$

onde x_1, \dots, x_n são as variáveis independentes, F é uma função dada e $u(x)$ é a função que se deseja determinar.

Os exemplos clássicos de EDPs:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{Equação do Calor}) \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{Equação da Onda}) \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (\text{Equação de Laplace}) \quad (2.1c)$$

Além dessa notação, pode-se representar as equações e de forma mais concisa:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad (2.2a)$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (2.2b)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (2.2c)$$

Ambas as notações possuem suas vantagens. Portanto, ambas serão apresentadas ao longo do texto, utilizando a mais conveniente para cada situação.

Dada a diversidade de EDPs, estas são classificadas com base em três características principais: ordem, linearidade e homogeneidade (FARLOW, 1993).

- **Ordem:** é a ordem da maior derivada parcial. Por exemplo:

$$xu_x - yu_y = x, \quad (\text{Primeira ordem})$$

$$u_t = uu_{xxx}. \quad (\text{Terceira ordem})$$

- **Linearidade:** Uma EDP é considerada *linear* se a função incógnita u e todas as suas derivadas parciais aparecerem de forma linear, ou seja, sem produtos entre elas, potências ou funções não lineares de u . Caso contrário, a equação é dita *não linear*. Por exemplo:

$$u_{xy} + u_y = \text{sen}(xy), \quad (\text{Linear}) \quad (2.3)$$

$$uu_t = u_x, \quad (\text{Não linear}) \quad (2.4)$$

$$u_t = \text{sen}(u) + u_{xx}. \quad (\text{Não linear}) \quad (2.5)$$

Além disso, uma equação é classificada como *semilinear* se a *parte principal*, que inclui as derivadas de maior ordem, é linear. Assim pode-se classificar a equação (2.5) como semilinear.

Especificamente, uma equação linear de segunda ordem de duas variáveis é da forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G. \quad (2.6)$$

onde A, B, C, D, E, F e G podem ser constantes ou funções de x e y .

- **Homogeneidade:** uma EDP linear é considerada *homogênea* se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo, caso contrário, diz-se que a EDP é *não homogênea*. Por exemplo:

$$u_{xy} = u_y - u, \quad (\text{Homogênea})$$

$$u_t + u_x = t. \quad (\text{Não homogênea})$$

Assim, pode-se dizer que (2.6) é dita homogênea se $G(x, y) = 0$.

Definição 2.1. Seja uma EDP semilinear de segunda ordem:

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (2.7)$$

com a, b e c contínuas em um intervalo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Denomina-se *discriminante* da equação a função $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y).$$

A partir do discriminante classificamos as EDP's.

Definição 2.2. No ponto $(y, x) \in \Omega$ a [Equação 2.7](#) é dita:

- (i) *parabólica* se $\delta(x, y) = 0$;
- (ii) *hiperbólica* se $\delta(x, y) > 0$;
- (iii) *elíptica* se $\delta(x, y) < 0$.

Assim, para a equação do calor (2.2a), da onda (2.2b) e de Laplace (2.2c) têm-se:

- **Equação do Calor:** os coeficientes são $a(x, t) = \alpha^2$, $b(x, t) = 0$ e $c(x, t) = 0$, logo

$$\delta(x, y) = 0^2 - 4\alpha^2 \cdot 0 = 0.$$

- **Equação da Onda:** os coeficientes são $a(x, t) = a^2$, $b(x, t) = 0$ e $c(x, t) = -1$, logo

$$\delta(x, y) = 0^2 - 4c^2 \cdot (-1) = 4c^2 > 0.$$

- **Equação de Laplace:** os coeficientes são $a(x, t) = 1$, $b(x, t) = 0$ e $c(x, t) = 1$, logo

$$\delta(x, y) = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0.$$

Desta forma, temos que a equação do calor (2.2a), da onda (2.2b) e de Laplace (2.2c) são exemplos respectivamente de equações parabólicas, hiperbólicas e elípticas.

Note que em geral δ varia ao longo do domínio da equação, logo pode ser classificada de formas distintas em cada ponto (FARLOW, 1993). Assim, caso seja classificada como parabólica para todo $(x, y) \in \Omega$, diz-se simplesmente que a EDP é parabólica. Analogamente, vale para os casos em que é hiperbólica ou elíptica.

2.2 Problema de autovalor de Sturm-Liouville

Esta seção visa introduzir o conceito de autovalores e autofunções, elementos essenciais para a compreensão de problemas envolvendo equações diferenciais parciais. Esse tópico será fundamental para a obtenção das soluções analíticas da equação do calor, da onda e de Laplace. Para mais informações sobre esse tópico, o leitor interessado poderá consultar as referências Boyce, Diprima e Meade (2020) e Li e Norris (2021).

O problema de Sturm-Liouville é dado por:

$$(p(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (2.8)$$

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0,$$

$$d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0, \quad d_1^2 + d_2^2 \neq 0,$$

onde λ e $y(x)$ são desconhecidos. Como $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ e $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ então significa que c_1 e c_2 nem d_1 e d_2 são simultaneamente nulos. Desenvolvendo a equação (2.8), tem-se:

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0,$$

O problema consiste em determinar os valores para λ tais que a solução é não trivial. A seguir é apresentado um caso particular em que $p(x) = r(x) = 1$ e $q(x) = 0$, é um exemplo simples, porém que é bastante utilizado para solução de equações diferenciais parciais, como o problema de condução de calor.

Exemplo 2.3. O problema (2.9) será determinar a função $y(x)$ não nula que satisfaça a equação diferencial ordinária (2.9a) e as condições de contorno (2.9b).

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (2.9a)$$

$$y(0) = y(L) = 0, \quad (2.9b)$$

onde λ é constante. Para determinar a solução da (2.9a) serão analisados separadamente cada caso para λ : positivo, negativo e zero. É necessário analisar separadamente pois a EDO possui diferentes soluções em cada caso.

Autovalor negativo ($\lambda < 0$). Seja $\lambda = -\mu^2$. Assim temos que $y'' - \mu^2 \cdot y = 0$, logo a equação característica é descrita como:

$$r^2 - \mu^2 = 0 \implies r = \pm\mu.$$

Portanto a solução da EDO é expressa por:

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},$$

onde A e B são constantes. Como a solução encontrada deve satisfazer as condições de contorno, têm-se:

$$\begin{cases} Ae^{\mu \cdot 0} + Be^{-\mu \cdot 0} = 0 \implies A + B = 0, \\ Ae^{\mu \cdot L} + Be^{-\mu \cdot L} = 0 \implies B = -Ae^{2\mu L}. \end{cases}$$

Assim, substituindo $B = -Ae^{2\mu L}$ em $A + B = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} A - Ae^{2\mu L} &= 0 \\ A(1 - e^{2\mu L}) &= 0 \\ A &= 0. \end{aligned}$$

Logo $A = B = 0$ e assim tem-se $y(x) = 0$, que não pode ocorrer pois supomos que y é não nula.

Autovalor zero ($\lambda = 0$). Assim temos que $y'' = 0$, logo a solução é dada por:

$$y(x) = Ax + B,$$

onde A e B são constantes. Como a solução encontrada deve satisfazer as condições de contorno, têm-se:

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B = 0 \implies B = 0, \\ A \cdot L + B = 0 \stackrel{B=0}{\implies} A \cdot L = 0 \implies A = 0. \end{cases}$$

Novamente obtém-se a solução trivial. Portanto só resta verificar se para $\lambda > 0$ possui solução não trivial.

Autovalor positivo ($\lambda > 0$). Seja $\lambda = \mu^2$. Assim temos que $X'' + \mu^2 \cdot X = 0$, logo a equação característica é descrita como:

$$r^2 + \mu^2 = 0 \implies r = \pm \mu i.$$

Portanto a solução da EDO é expressa por:

$$y(x) = A \cos \mu x + B \sen \mu x,$$

onde A e B são constantes. Como a solução encontrada deve satisfazer as condições de contorno, têm-se:

$$\begin{cases} A \cos \mu \cdot 0 + B \sen \mu \cdot 0 = 0 \implies A = 0 \\ A \cos \mu \cdot L + B \sen \mu \cdot L = 0 \stackrel{A=0}{\implies} B \sen \mu \cdot L = 0, \end{cases}.$$

Logo μL é múltiplo de π , ou seja, $\mu = \frac{n\pi}{L}$, com $n \in \mathbb{N}$. Desta forma as soluções não triviais da EDO (2.9a) são:

$$\boxed{y_n(x) = \sen \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}.} \quad (2.10)$$

onde os valores λ_n são denominados *autovalores* ou *valores característicos*. As soluções y_n , dependem de λ_n , essas funções são denominadas de *autofunções* ou *funções características*.

Note que a denominação segue de forma similar a teoria de matrizes e operadores lineares onde, λ é autovalor e x é autovetor associado a matriz A , se o sistema $Ax = \lambda x$ possui solução não trivial (ANTON; RORRES, 2012).

Assim como no caso de matrizes, a relevância do estudo dessas soluções está diretamente ligada às suas propriedades fundamentais. Além disso, o estudo de autovalores e autofunções é essencial para a obtenção de soluções analíticas de EDPs pelo método de separação de variáveis, pois permite decompor a solução em modos fundamentais associados a diferentes valores de λ .

2.3 Funções Trigonométricas

Nesta seção, são apresentados os principais resultados sobre as funções seno e cosseno, necessários para o estudo das séries de Fourier.

Definição 2.4. Uma função f é denominada *periódica* se existe T tal que:

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

e menor valor T que satisfaz (2.11) é denominado *período fundamental*.

As funções seno e cosseno são exemplos de funções periódicas. A seguir, será abordado o estudo das funções da forma:

$$\varphi_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.12a)$$

$$\psi_n(x) = \text{cos} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.12b)$$

Sabemos que o período dessas funções é $2L/n$. Além disso, podemos verificar sua paridade.

Definição 2.5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se $\forall x \in \mathbb{R}$:

- (i) $f(-x) = f(x)$ então f é par;
- (ii) $f(-x) = -f(x)$ então f é ímpar.

Portanto temos que φ_n é ímpar e ψ_n é par.

Proposição 2.6. *Seja $f_P(x)$, $g_P(x)$ funções pares e $f_I(x)$, $g_I(x)$ funções ímpares, então:*

- (i) $f_P(x) + g_P(x)$ é par;
- (ii) $f_I(x) + g_I(x)$ é ímpar;
- (iii) $f_P(x) \cdot g_P(x)$ é par;
- (iv) $f_I(x) \cdot g_I(x)$ é par;
- (v) $f_I(x) \cdot g_P(x)$ é ímpar;

Demonstração.

- (i) $(f_P + g_P)(-x) = f_P(-x) + g_P(-x) = f_P(x) + g_P(x) = (f_P + g_P)(x)$;
- (ii) $(f_I + g_I)(-x) = f_I(-x) + g_I(-x) = -(f_I(x) + g_I(x)) = -(f_I + g_I)(x)$;
- (iii) $(f_P \cdot g_P)(-x) = f_P(-x) \cdot g_P(-x) = f_P(x) \cdot g_P(x) = (f_P \cdot g_P)(x)$;
- (iv) $(f_I \cdot g_I)(-x) = f_I(-x) \cdot g_I(-x) = (-f_I(x)) \cdot (-g_I(x)) = f_I(x) \cdot g_I(x) = (f_I \cdot g_I)(x)$;
- (v) $(f_I \cdot g_P)(-x) = f_I(-x) \cdot g_P(-x) = -f_I(x) \cdot g_P(x) = -(f_I \cdot g_P)(x)$.

□

Proposição 2.7. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo limitado, então $\forall L > 0$:*

- (i) Se f é par, então $\int_{-L}^0 f(x)dx = \int_0^L f(x)dx$;
- (ii) Se f é ímpar, então $\int_{-L}^0 f(x)dx = -\int_0^L f(x)dx$.

Demonstração. Tomando $u = -x$, temos:

$$\int_{-L}^0 f(x)dx = \int_L^0 f(-u)(-du) = -\int_L^0 f(-u)du = \int_0^L f(-u)du.$$

Pela definição de função par e ímpar conclui-se a demonstração. \square

Proposição 2.8. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo limitado, então $\forall L > 0$:*

- (i) Se f é par, então $\int_{-L}^L f(x)dx = 2\int_0^L f(x)dx$;
- (ii) Se f é ímpar, então $\int_{-L}^L f(x)dx = 0$.

Demonstração. Note que:

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx.$$

Aplicando a proposição anterior conclui-se a demonstração. \square

A partir dessa proposição temos que:

$$\int_{-L}^L \varphi_n(x)dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \stackrel{\text{ímpar}}{=} 0, \quad (2.13a)$$

$$\int_{-L}^L \psi_n(x)dx = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \stackrel{\text{par}}{=} 2\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L = 0. \quad (2.13b)$$

Proposição 2.9. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo limitado com período fundamental T , então $\forall a \in \mathbb{R}$:*

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \\ &= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(y+T)dy \\ &= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(y)dy \\ &= \int_0^T f(x)dx. \end{aligned}$$

\square

Agora, é importante lembrar de algumas identidades trigonométricas que serão utilizadas para provar os próximos resultados.

As fórmulas de prostaférese são expressões que transformam o produto de funções trigonométricas em somas ou diferenças. Elas são especialmente úteis quando precisamos calcular integrais que envolvem produtos de senos e cossenos. As principais fórmulas de prostaférese são:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta, \quad (2.14a)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \beta \cos \alpha, \quad (2.14b)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta, \quad (2.14c)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta. \quad (2.14d)$$

Outras fórmulas são utilizadas para reduzir o expoente de uma determinada expressão envolvendo potências pares de senos ou cossenos.

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad (2.15a)$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (2.15b)$$

Definição 2.10. O *produto interno* de duas funções reais u e v no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ é definido por:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x)dx.$$

Além disso, dizemos que u e v são *ortogonais* no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$ se o produto interno é zero. Um conjunto de funções é denominado *conjunto ortogonal* se cada par de funções diferentes do conjunto é ortogonal.

Proposição 2.11. O conjunto $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ é um conjunto ortogonal em $[-L, L]$, e satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade (TOLSTOV, 1962):

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n \in \mathbb{N}, \\ 2L, & m = n = 0; \end{cases} \quad (2.16a)$$

$$\langle \psi_m, \varphi_n \rangle = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{N}; \quad (2.16b)$$

$$\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n; \end{cases} \quad (2.16c)$$

Demonstração. Mostraremos a seguir cada caso:

- $\langle \psi_m, \psi_n \rangle$ se $m \neq n$:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_m, \psi_n \rangle &= \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
&\stackrel{(2.14c)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{\pi x(m+n)}{L}\right) + \cos\left(\frac{\pi x(m-n)}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(m+n)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x(m+n)}{L}\right) + \frac{L}{\pi(m-n)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x(m-n)}{L}\right) \right] \Big|_{-L}^L \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{2L}{\pi(m+n)} \operatorname{sen}(\pi(m+n)) + \frac{2L}{\pi(m-n)} \operatorname{sen}(\pi(m-n)) \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- $\langle \psi_m, \psi_n \rangle$ se $m = n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_m, \psi_m \rangle &= \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\
&= \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\
&\stackrel{(2.15a)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L 1 + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x + \frac{L}{2m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \right] \Big|_{-L}^L \\
&= \frac{1}{2} \left[L + \frac{L}{2m\pi} \operatorname{sen}(2m\pi) - \left(-L + \frac{L}{2m\pi} \operatorname{sen}(-2m\pi) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[2L + \frac{2L}{2m\pi} \operatorname{sen}(2m\pi) \right] \\
&= L.
\end{aligned}$$

- $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle$ se $m = n = 0$:

$$\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi \cdot 0}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi \cdot 0}{L}\right) dx = \int_{-L}^L 1 dx = x \Big|_{-L}^L = L - (-L) = 2L.$$

- $\langle \psi_m, \varphi_n \rangle \forall m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\langle \psi_m, \varphi_n \rangle = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0,$$

pois $\psi_m \cdot \varphi_n$ é ímpar e pela 2.8 (ii) a integral de uma função ímpar no intervalo simétrico é igual a zero.

- $\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle$ se $m \neq n$:

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle &= \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &\stackrel{(2.14d)}{=} \frac{-1}{2} \int_{-L}^L \cos \left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L} \right) + \cos \left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \frac{-1}{2} \int_{-L}^L \cos \left(\frac{\pi x(m+n)}{L} \right) - \cos \left(\frac{\pi x(m-n)}{L} \right) dx \\
 &= \frac{-1}{2} \left[\frac{L}{\pi(m+n)} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x(m+n)}{L} \right) - \frac{L}{\pi(m-n)} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x(m-n)}{L} \right) \right] \Bigg|_{-L}^L \\
 &= \frac{-1}{2} \left[\frac{2L}{\pi(m+n)} \operatorname{sen}(\pi(m+n)) - \frac{2L}{\pi(m-n)} \operatorname{sen}(\pi(m-n)) \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

- $\langle \varphi_m, \varphi_m \rangle$ se $m = n$:

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle &= \int_{-L}^L \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2 \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx \\
 &\stackrel{(2.15b)}{=} \frac{1}{2} \int_{-L}^L 1 - \cos \left(\frac{2m\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{-L}{2m\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{2m\pi x}{L} \right) \right] \Bigg|_{-L}^L \\
 &= \frac{1}{2} \left[L + \frac{-L}{2m\pi} \operatorname{sen}(2m\pi) - \left(-L + \frac{-L}{2m\pi} \operatorname{sen}(-2m\pi) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[2L + \frac{-2L}{2m\pi} \operatorname{sen}(2m\pi) \right] \\
 &= L.
 \end{aligned}$$

□

2.4 Série de Fourier

Nesta seção serão apresentadas as séries de Fourier, essenciais para resolução de EDPs pelo método de separação de variáveis. As séries de Fourier foram estudadas inicialmente pelo matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier, e publicada em 1822 em seu livro *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria Analítica do Calor), em que apresenta a equação do calor e soluciona a partir das séries de Fourier.

A série de Fourier consiste em uma série trigonométrica, ou seja, consiste em uma soma infinita de senos e cossenos. A importância dessas séries está no fato de que muitas

funções periódicas podem ser representadas como uma série de Fourier. Suponha que a função $f(x)$ de período $2L$ possa ser expandida como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right). \quad (2.17)$$

Dada a função podemos determinar sua expansão a partir das relações de ortogonalidade entre a função seno e cosseno. Para isso, assume-se que (2.17) pode ser integrada termo a termo. A partir dessas hipóteses, serão determinados os coeficientes de Fourier.

Integrando (2.17) em $[-L, L]$, tem:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-L}^L \psi_m dx}_{(2.13b)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\int_{-L}^L \varphi_m dx}_{(2.13a)} = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-L}^L = a_0 L,$$

e portanto

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

Integrando o produto de ψ_n por (2.17) em $[-L, L]$, tem:

$$\int_{-L}^L \psi_n f(x) dx = \underbrace{\int_{-L}^L \psi_n \frac{a_0}{2} dx}_{(2.13b)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-L}^L \psi_n \psi_m dx}_{(2.16a)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\int_{-L}^L \psi_n \varphi_m dx}_{(2.16b)} = L a_n,$$

logo

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \psi_n f(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Integrando o produto de φ_n por (2.17) em $[-L, L]$, tem:

$$\int_{-L}^L \varphi_n f(x) dx = \underbrace{\int_{-L}^L \varphi_n \frac{a_0}{2} dx}_{(2.13a)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\int_{-L}^L \varphi_n \psi_m dx}_{(2.16b)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\int_{-L}^L \varphi_n \varphi_m dx}_{(2.16c)} = L b_n,$$

assim

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \varphi_n f(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deste modo, obtemos as fórmulas de Euler-Fourier para determinação dos coeficientes da série de Fourier de uma função $f(x)$:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+} \quad (2.18a)$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}} \quad (2.18b)$$

A partir das fórmulas de Euler-Fourier e da proposição (2.8), temos que se f é uma função ímpar ou par então ela pode ser expressa em termos só de senos ou cossenos, respectivamente. Em cada caso temos:

Se f é uma função ímpar então:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{ímpar}} dx \stackrel{\text{Prop.2.8}}{=} 0,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x) \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{par}} dx \stackrel{\text{Prop.2.8}}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

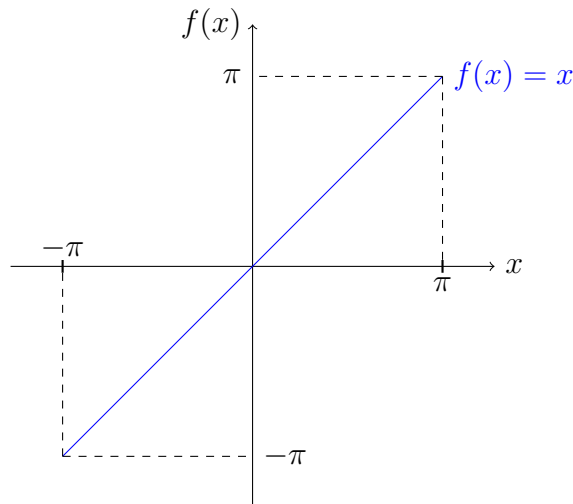
Se f é uma função par então:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{par}} dx \stackrel{\text{Prop.2.8}}{=} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \underbrace{f(x) \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}_{\text{ímpar}} dx \stackrel{\text{Prop.2.8}}{=} 0.$$

A seguir temos um exemplo de como encontrar a série de Fourier de uma função.

Exemplo 2.12. Seja a função $f(x) = x$ com $-\pi \leq x < \pi$.



Como f é uma função ímpar temos que $a_n = 0$ e tomando $L = \pi$ temos que:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sen(nx) dx = \frac{-2 \cos n\pi}{n}.$$

Assim, temos que:

$$b_n = \begin{cases} -2/n, & n \text{ é par} \\ 2/n, & n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

logo $b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$. Portanto a série de Fourier da função é:

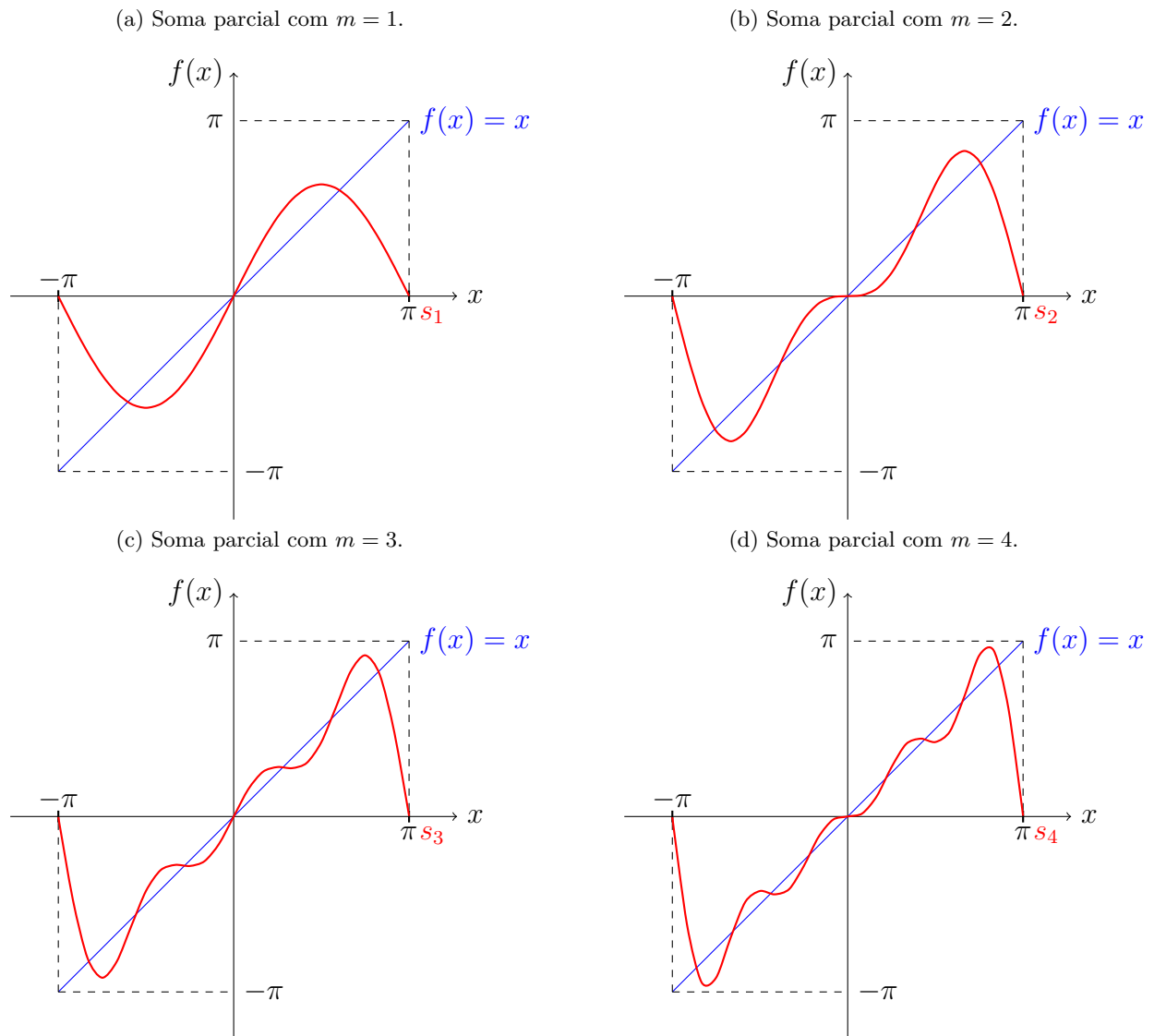
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

Afim de analisar a convergência da série para a função será definida a soma parcial:

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} \frac{2 \operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

Na [Figura 1](#) pode-se observar o comportamento da série no intervalo $[-\pi, \pi]$. Para valores de fora do domínio da função a série tem comportamento periódico de período 2π , pois foi tomado $L = \pi$.

Figura 1 – Aproximações da função f por série de Fourier.



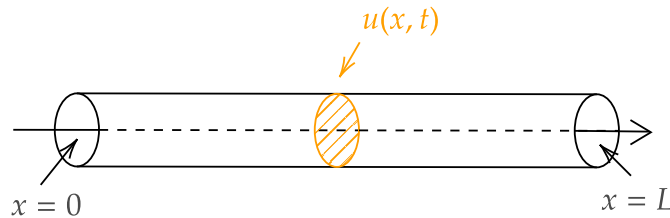
3 Equação do Calor

A equação do calor é uma das EDPs clássicas por modelar a difusão do calor em algum meio. Resolver essa equação significa encontrar a função u que determina a temperatura num determinado ponto ao longo do tempo. Note que o ponto pode ser especificado por uma, duas ou três coordenadas, descrevendo a difusão do calor em uma barra, chapa e num sólido, respectivamente. Na próxima seção será apresentado o método de separação de variáveis para resolução da equação do calor em uma barra.

3.1 Condução do calor em uma barra

Considere uma barra homogênea com seção reta uniforme. Além disso, que os lados da barra são isolados, ou seja, que não há troca de calor nas laterais da barra. Seja $u(x, t)$ a temperatura da seção reta da barra em abscissa x no instante t , conforme ilustra a [Figura 2](#).

Figura 2 – Barra sólida condutora de calor.



Fonte: Adaptado pela autora ([BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020](#)).

Desta forma, para determinar u será necessário resolver a equação diferencial parcial da condução de calor:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

em que α^2 representa a difusividade térmica do material. Além disso, suponha que a distribuição inicial de temperatura na barra é dada por:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

em que f é uma função conhecida e não nula. Por fim, considere fixa a temperatura nas extremidades da barra, essa será a condição de contorno. Nas próximas seções serão analisados separadamente o caso da condição de contorno homogênea e não homogênea.

3.1.1 Condições de contorno homogêneas

Nesta seção, veremos o caso da condição de contorno homogênea, ou seja, que a temperatura nas extremidades da barra é zero:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad t > 0. \quad (3.1)$$

Assim, procura-se determinar a função u que satisfaça a equação (3.2a), a condição inicial (3.2b) e a condição de contorno (3.2c).

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad 0 < x < L \quad t > 0, \quad (3.2a)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.2b)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t > 0. \quad (3.2c)$$

A seguir, será apresentada a resolução analítica da equação utilizando o método de separação de variáveis. Esse método remonta aos estudos de D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler, realizados no meio do século XVIII, durante suas investigações sobre ondas e vibrações (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020).

O método de separação de variáveis consiste em inicialmente supor que a solução de (3.2a) possa ser escrita como o produto de duas funções, uma que depende somente de x e outra que depende somente de t , ou seja, que existe $X(x)$ e $T(t)$ tais que:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (3.3)$$

Assim temos que $u_{xx} = X''T$ e $u_t = XT'$, substituindo em (3.2a), tem-se:

$$\alpha^2 X''T = XT'.$$

Separando as funções e suas derivadas de forma que cada membro da equação dependa somente de x e outra de t , obtém-se:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T}.$$

Note que fixando um valor de x concluímos que $\frac{T'}{\alpha^2 T}$ é constante para todo t , assim temos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Desta forma obtém-se duas EDOs:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (3.4a)$$

$$T' = -\alpha^2 \lambda T \quad (3.4b)$$

A solução da EDO (3.4b) é $T(t) = A \cdot e^{-\alpha^2 \lambda t}$ em que A é um coeficiente. Antes de obter a solução da outra equação, serão analisadas as implicações de escrever a função como o produto de duas funções e das condições de contorno (3.2c). Por (3.3) e pelas condições de contorno $u(0, t) = 0$ e $u(L, t) = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= X(0) \cdot T(t) = 0, \\ u(L, t) &= X(L) \cdot T(t) = 0. \end{aligned}$$

Se $T(t) = 0$ para todo t , então $u(x, t)$ é zero para todo x e t , o que não pode ocorrer pois foi suposto inicialmente que u é não nula. Portanto, a opção que resta é $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$. Assim, ao obter a solução de (3.4a) será necessário verificar se satisfaz essas duas condições.

Pelo Exemplo 2.3, as soluções não triviais da EDO (3.4a) são as autofunções associadas aos autovalores dados por:

$$X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Assim substituindo as soluções encontradas das EDOs em (3.3), tem-se:

$$u_n(x, t) = c_n \cdot e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que pelo princípio da superposição (para mais detalhes (ZILL; CULLEN, 2001a, p. 153)):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.6)$$

é solução da equação, desde que satisfaça a condição inicial (3.2b):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = f(x). \quad (3.7)$$

Desta forma, os coeficientes c_n devem ser tais que a série (3.7) convirja para $f(x)$ em $0 \leq x \leq L$. Como já mostrado no capítulo anterior, os coeficientes podem ser determinados por:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.8)$$

Assim, a solução da equação (3.2a) sob condição contorno (3.2c) e inicial (3.2b) é dada pela série (3.6) com os coeficientes obtidos pela equação (3.8). A partir da solução encontrada, conclui-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad \forall x \in [0, L]. \quad (3.9)$$

Independente da condição inicial, dependendo somente da condição de contorno.

Exemplo 3.1. Seja $u(x, t)$ a temperatura da barra com 50 cm de comprimento, difusividade térmica $\alpha^2 = 1$, isolada nas laterais e com temperatura inicial uniforme de 20 ao longo de toda a barra, enquanto a temperatura nas extremidades são mantidas fixas em 0.

A temperatura na barra satisfaz o problema de condução do calor (3.2a), (3.2c) e (3.2b), com $L = 50$, $f(x) = 20$ para $0 < x < 50$ e $f(x) = 0$ para $x = 0$ e $x = 50$. Assim, a solução do problema é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-\pi^2 n^2 t / 2500} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right),$$

onde, os coeficientes c_n são determinados pela expressão (3.8), isto é:

$$c_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} 20 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right) dx = \frac{2}{50} \left[-\frac{1000}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{50} \right) \right] \Bigg|_0^{50} = \frac{40}{n\pi} (1 - \cos nx).$$

Assim, temos que:

$$c_n = \begin{cases} \frac{80}{n\pi}, & n \text{ é ímpar} \\ 0, & n \text{ é par} \end{cases},$$

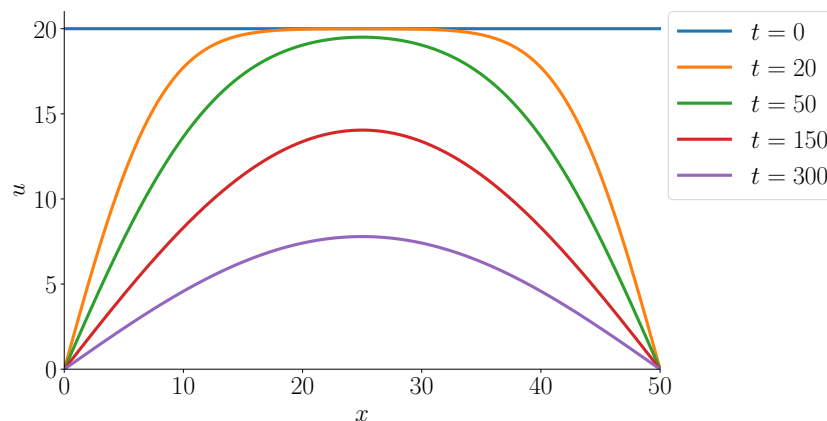
Desta forma, a solução é dada por:

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-1} e^{-\pi^2 n^2 t / 2500} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right).$$

Como a expressão possui um fator exponencial com expoente negativo, a série converge rapidamente, exceto para valores pequenos de t ou α^2 .

Ao fixar alguns valores de t , podemos observar a distribuição da temperatura ao longo da barra. A Figura 3 ilustra essa relação, mostrando que a temperatura diminui continuamente à medida que a barra perde calor pelas extremidades.

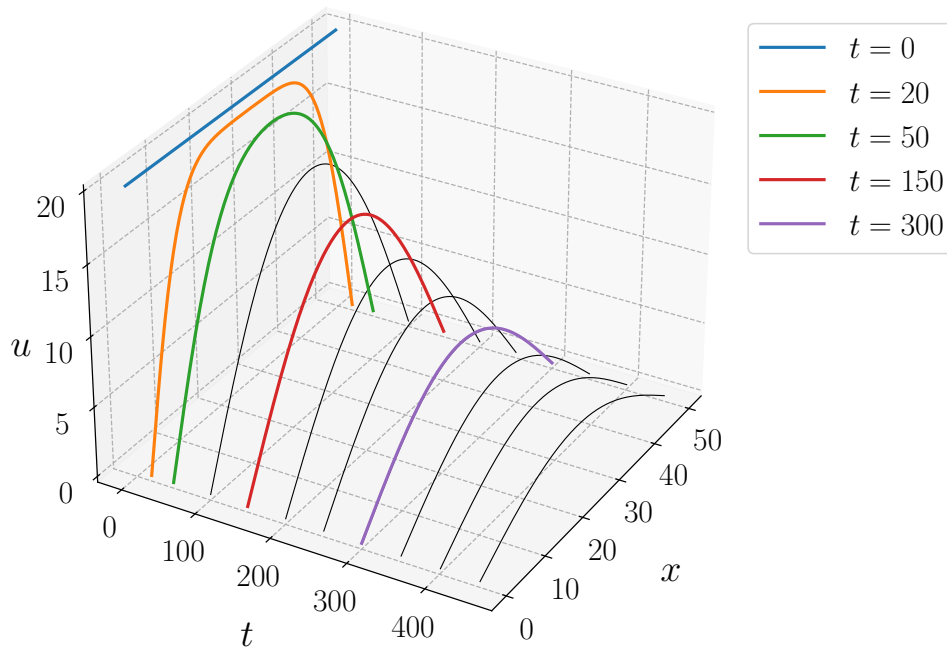
Figura 3 – Distribuições de temperatura em diversos instantes – Exemplo 3.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

As curvas da [Figura 3](#) são representadas na [Figura 4](#) de forma tridimensional. Além disso, foram considerados mais alguns valores de t , sendo possível ter uma melhor visualização do comportamento do gráfico da função.

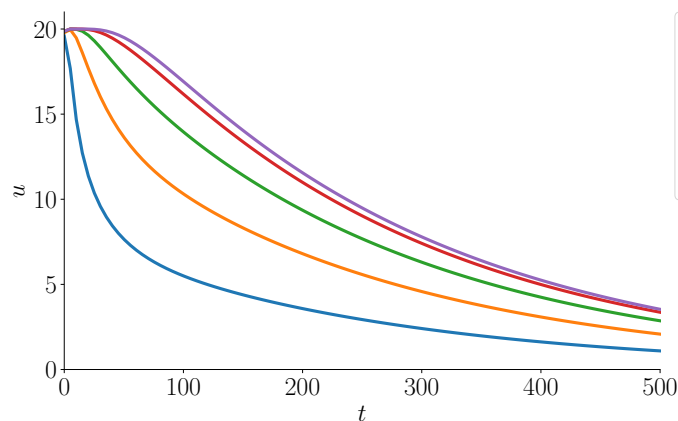
Figura 4 – Distribuições de temperatura em diversos instantes tridimensionalmente – Exemplo 3.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na [Figura 5](#), também é evidenciado o processo da diminuição de temperatura, em alguns pontos da barra.

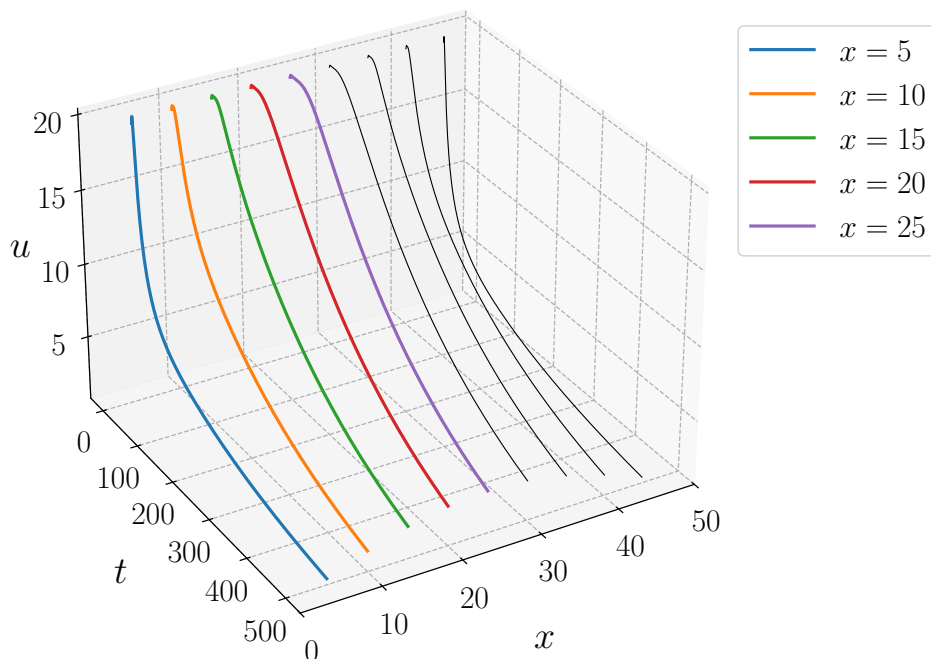
Figura 5 – Evolução da temperatura ao longo do tempo para alguns pontos da barra – Exemplo 3.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

A [Figura 6](#) ilustra tridimensionalmente as curvas ao se fixar os pontos x .

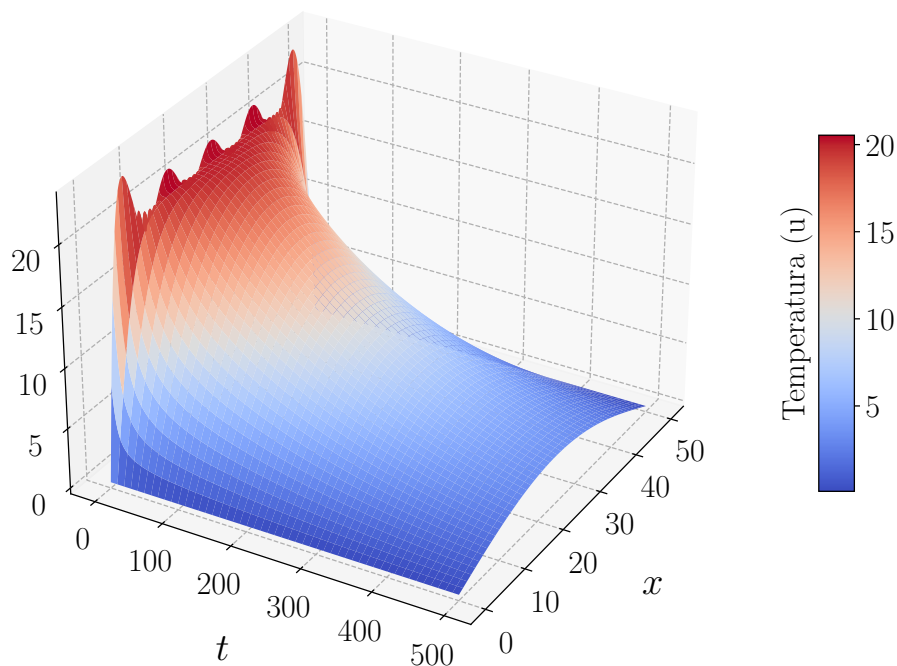
Figura 6 – Evolução da temperatura ao longo do tempo para alguns pontos da barra tridimensionalmente – Exemplo 3.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

Já a [Figura 7](#) representa o gráfico tridimensional de u em função de x e t , onde $u(x, t)$ é a temperatura da barra na abscissa x no instante t .

Figura 7 – Gráfico da temperatura u em função de x e de t – Exemplo 3.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

3.1.2 Condições de contorno não homogêneas

Nesta seção, veremos o caso da condição de contorno não homogênea, ou seja, que a temperatura nas extremidades da barra é diferente de zero. Sejam T_1 e T_2 as temperaturas da barra na abcissa 0 e L respectivamente, isto é,

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2 \quad t > 0. \quad (3.10)$$

Assim, procura-se determinar a função u que satisfaça a equação (3.11a), a condição inicial (3.11b) e a condição de contorno (3.11c).

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad 0 < x < L \quad t > 0, \quad (3.11a)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.11b)$$

$$u(0, t) = T_1 \quad u(L, t) = T_2 \quad t > 0. \quad (3.11c)$$

Note que, quando $t \rightarrow \infty$ a temperatura se estabilizará, seja a distribuição de temperatura descrita pela função v . Isso significa que, após um tempo suficiente, a temperatura em cada ponto da barra se estabiliza.

Como essa função não depende de t , então v é função só da variável x . Assim, $v_t = 0$, substituindo na equação (3.11a), conclui-se:

$$\alpha^2 v_{xx} = v_t \implies v'' = 0.$$

Logo a distribuição de temperatura estável é uma função linear de x . Como $v(x)$ deverá satisfazer as condições de contorno:

$$v(0) = T_1, \quad v(L) = T_2.$$

Portanto,

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1. \quad (3.12)$$

Suponha que $u(x, t)$ pode ser escrito como a soma de $v(x)$ e outra distribuição de temperatura $w(x, t)$, ou seja,

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t). \quad (3.13)$$

Substituindo a expressão (3.13) na equação (3.11a), tem-se:

$$\alpha^2 (v + w)_{xx} = (v + w)_t \implies \alpha^2 w_{xx} = w_t.$$

Além disso, $w(x, t)$ satisfaz as condições de contorno $w(0, t) = w(L, t) = 0$, pois

$$u(0, t) = v(0) + w(0, t) = T_1 \implies w(0, t) = \underbrace{u(0, t)}_{(3.11c)} - \underbrace{v(0)}_{(3.12)} = T_1 - T_1 = 0,$$

$$u(L, t) = v(L) + w(L, t) = T_2 \implies w(L, t) = \underbrace{u(L, t)}_{(3.11c)} - \underbrace{v(L)}_{(3.12)} = T_2 - T_2 = 0.$$

Ademais, satisfaz a condição inicial $w(x, 0) = f(x) - v(x)$, pois

$$u(x, 0) = v(x) + w(x, 0) \stackrel{(3.11b)}{\implies} w(x, 0) = f(x) - v(x). \quad (3.14)$$

Note que então $w(x, t)$ é a solução do problema resolvido na seção anterior, com condições de contorno homogêneas. Assim a solução desse problema será:

$$u(x, t) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.15)$$

onde os coeficientes c_n são determinados pela expressão:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - \frac{T_2 - T_1}{L}x - T_1 \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx. \quad (3.16)$$

Exemplo 3.2. Seja $u(x, t)$ a temperatura da barra com 30 cm de comprimento, difusividade térmica $\alpha^2 = 1$, isolada nas laterais e com temperatura inicial dada pela função $f(x) = 60 - 2x$, enquanto a temperatura nas extremidades são respectivamente 20 e 30. Desse modo, tem-se o problema:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad 0 < x < 30 \quad t > 0, \quad (3.17a)$$

$$u(x, 0) = 60 - 2x \quad 0 \leq x \leq 30, \quad (3.17b)$$

$$u(0, t) = 20 \quad u(30, t) = 30 \quad t > 0. \quad (3.17c)$$

Primeiramente, é necessário determinar a função $v(x)$, que representa o comportamento da temperatura $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$. A função $v(x)$ é dada pela equação (3.12), ou seja,

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 = \frac{50 - 20}{30}x + 20 = x + 20. \quad (3.18)$$

Assim, a solução do problema é dada por:

$$u(x, t) = x + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-n^2 \pi^2 t / 900} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right),$$

onde os coeficientes c_n são determinados pela expressão (3.16), isto é:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L} \int_0^L (f(x) - v(x)) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{2}{30} \int_0^{30} ((60 - 2x) - (x + 20)) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx \\ &= \frac{2}{30} \int_0^{30} (40 - 3x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx \\ &= \frac{2}{30} \left[- (40 - 3x) \frac{30}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \Big|_0^{30} + \frac{3 \cdot 30}{n\pi} \int_0^{30} \cos \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx \right] \end{aligned}$$

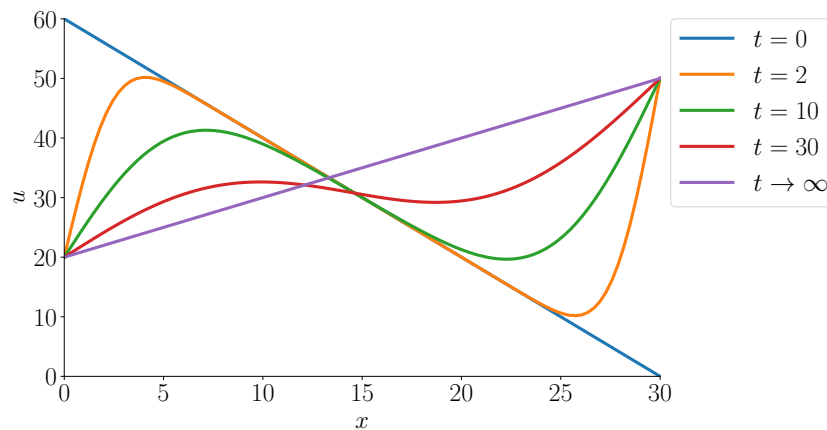
$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{30} \left[50 \frac{30}{n\pi} \cos n\pi + 40 \frac{30}{n\pi} + \frac{3 \cdot 30^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \right] \Bigg|_0^{30} \\
&= \frac{20}{n\pi} (5 \cos n\pi + 4),
\end{aligned}$$

logo $c_n = \frac{20}{n\pi} (5(-1)^n + 4)$. Desta forma, a solução é dada por:

$$u(x, t) = x + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n\pi} (5(-1)^n + 4) \cdot e^{-n^2 \pi^2 t / 900} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right).$$

Ao fixar alguns valores de t , podemos observar a distribuição da temperatura ao longo da barra. A [Figura 8](#) ilustra essa relação.

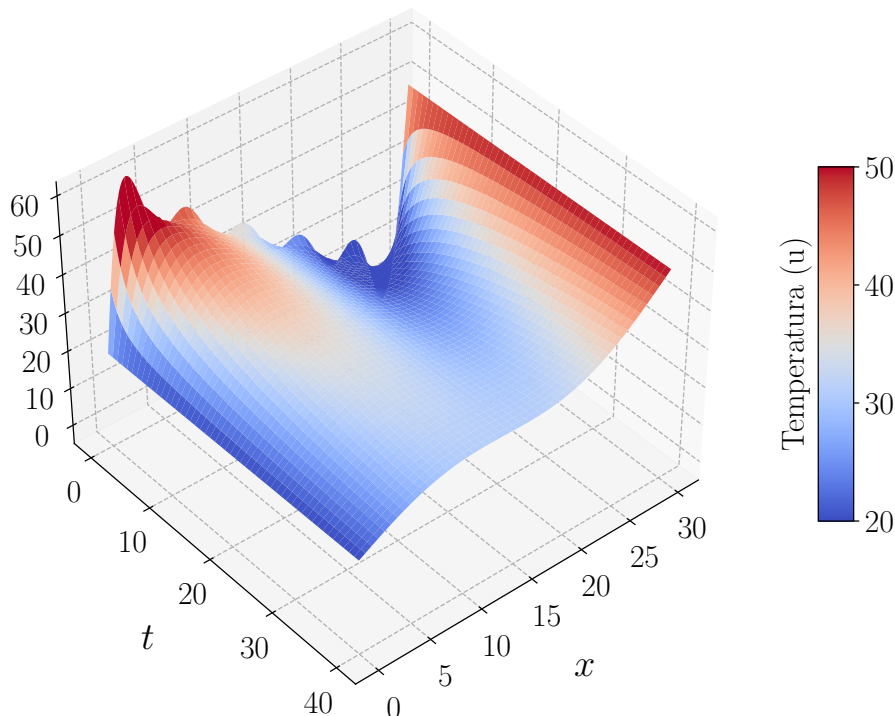
Figura 8 – Distribuições de temperatura em diversos instantes – Exemplo 3.2.



Fonte: Elaborado pela autora.

Já a [Figura 9](#) representa o gráfico tridimensional de u em função de x e t , onde $u(x, t)$ é a temperatura da barra na abscissa x no instante t .

Figura 9 – Gráfico da temperatura u em função de x e de t – Exemplo 3.2 .



Fonte: Elaborado pela autora.

3.1.3 Barra com extremidades isoladas

Suponha que as extremidades da barra são isoladas, ou seja, não há troca de calor com o meio externo. Assim a derivada de u em relação a variável espacial x é nula nas extremidades. Desta forma, as condições de contorno deste problema são:

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{3.19}$$

Logo, procura-se determinar a função u que satisfaça a equação (3.20a), a condição inicial (3.20b) e a condição de contorno (3.20c).

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L \quad t > 0, \tag{3.20a}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{3.20b}$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{3.20c}$$

Supondo que $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, tem-se que a equação do calor é equivalente a:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{3.21a}$$

$$T' = -\alpha^2 \lambda T. \tag{3.21b}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante e as condições de contorno são $X'(0) = X'(L) = 0$. A seguir serão analisadas as três possibilidades para λ : positivo, negativo e zero.

Autovalor negativo ($\lambda < 0$). Seja $\lambda = -\mu^2$. Assim temos que $X'' - \mu^2 \cdot X = 0$ cuja solução geral é dada por:

$$X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Logo, a derivada é $X'(x) = A\mu e^{\mu x} - B\mu e^{-\mu x}$ o que pelas condições de contorno $X'(0) = X'(L) = 0$ implica que $A = B = 0$. Desta forma, tem-se $u(x, t) = 0$, que não pode ocorrer pois supomos que u é não nula.

Autovalor zero ($\lambda = 0$). Se $\lambda = 0$, temos $X'' = 0$, cuja solução geral é:

$$X(x) = Ax + B.$$

Como $X'(x) = A$ então pela condição de contorno tem-se que $A = 0$. Já a segunda EDO é dada por $T' = 0$, cuja solução é dada por $T(x) = C$, onde C é um coeficiente. Com o produto das soluções duas EDOs obtém se

$$u_0(x, t) = \frac{c_0}{2}, \quad (3.22)$$

onde c_0 é uma constante.

Autovalor positivo ($\lambda > 0$). Seja $\lambda = \mu^2$, com $\mu > 0$ então $X'' + \mu^2 \cdot X = 0$ cuja solução geral é dada por:

$$X(x) = A \operatorname{sen}(\mu x) + B \operatorname{cos}(\mu x).$$

Portanto, $X'(x) = A\mu \operatorname{cos}(\mu x) - B\mu \operatorname{sen}(\mu x)$ o que pelas condições de contorno $X'(0) = X'(L) = 0$ implica que $A = 0$ e μL é um múltiplo de π . Conseqüentemente as soluções não triviais da EDO (3.21a) são as autofunções associadas aos autovalores dados por:

$$X_n(x) = \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.23)$$

Desta forma, a solução da EDO (3.21b) é dada por $T_n(t) = e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2}$. Pelo princípio da superposição, tem-se

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.24)$$

Pela condição inicial (3.20b):

$$u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x),$$

logo os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (3.25)$$

Note que $u(x, t) = c_0/2$ quando $t \rightarrow \infty$, logo $c_0/2$ representa a temperatura que a barra irá se estabilizar. Já que todo o calor inicial da barra se uniformizará ao longo do tempo atingindo um equilíbrio térmico, pois não há troca de calor em nenhum ponto da barra.

Exemplo 3.3. Considere o problema (3.21) com $\alpha^2 = 1$, $L = 30$ e $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t & 0 < x < 30 & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x & 0 \leq x \leq 30, \\ uu_x(0, t) &= u_x(30, t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

Como visto anteriormente a solução do problema é dada por (3.24) com coeficientes determinados por (3.25). Determinando o coeficiente c_0 :

$$c_0 = \frac{2}{30} \int_0^{30} x dx = \frac{2}{30} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{30} = 30,$$

logo conclui-se que a temperatura se estabilizará em 15. Enquanto os outros coeficientes c_n para $n \geq 1$, são determinados por:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{30} \int_0^{30} x \cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx \\ &= \frac{2}{30} \left[\frac{30x}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{30}\right) \Big|_0^{30} - \int_0^{30} \frac{30}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx \right] \\ &= \frac{2}{30} \left[\frac{30^2}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) \Big|_0^{30} \right] \\ &= \frac{60}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

Assim, temos que:

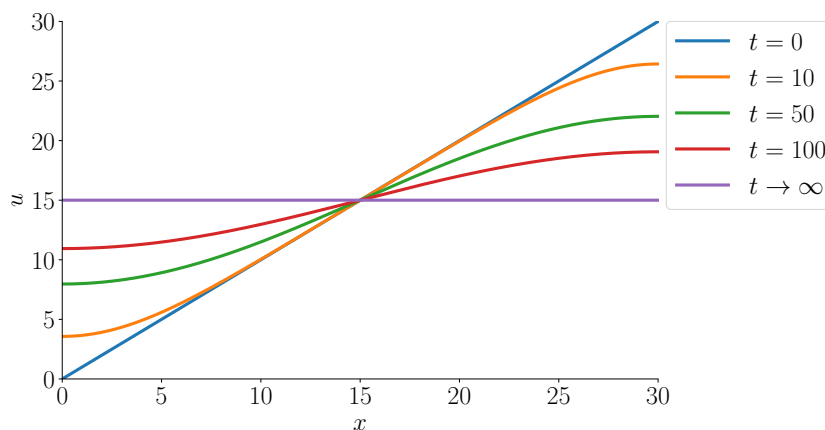
$$c_n = \begin{cases} -\frac{120}{(n\pi)^2}, & n \text{ é ímpar} \\ 0, & n \text{ é par} \end{cases}$$

Desta forma, a solução é dada por:

$$u(x, t) = 15 - \frac{120}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-2} e^{-\pi^2 n^2 t/900} \cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right).$$

A Figura 10 ilustra o decaimento da temperatura ao longo da barra com o passar do tempo. Além disso, a partir do gráfico verifica-se o fato destacado anteriormente de que metade do coeficiente c_0 é a temperatura que a barra se estabiliza, neste exemplo é 15.

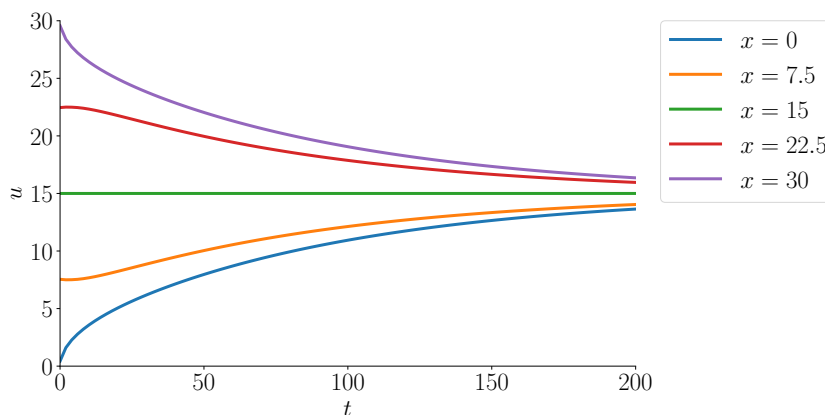
Figura 10 – Distribuições de temperatura em diversos instantes – Exemplo 3.3.



Fonte: Elaborado pela autora.

Outra maneira de visualizar o decaimento da temperatura ao longo da barra é observando o comportamento da temperatura ao longo do tempo em pontos específicos da barra, conforme ilustra a [Figura 11](#).

Figura 11 – Evolução da temperatura ao longo do tempo para alguns pontos da barra – Exemplo 3.3.



Fonte: Elaborado pela autora.

Os exemplos apresentados decorrem da aplicação da equação do calor em diferentes situações de distribuição de temperatura. Entretanto essa equação, formulada por Fourier, foi concebida para descrever a condução de térmica e, ao longo do tempo, expandiu sua aplicação para diversos campos, como destacado a seguir:

O método de Fourier começou a ser aplicado para analisar problemas em muitos campos além da transferência de calor: eletricidade, difusão química, fluidos em meios porosos, genética e economia. Também inspirou muitas pesquisas sobre a teoria das equações diferenciais. Quase dois séculos depois, a equação de condução de calor continua a constituir a base conceitual sobre a qual se baseia a análise de muitos sistemas físicos, biológicos e sociais ([NARASIMHAN, 1999](#)).

Por este motivo, a equação do calor é considerada uma das EDPs clássicas.

4 Equação da Onda

Neste capítulo, será explorada a segunda EDP clássica: a equação da onda. Essa equação modela problemas ondulatórios em meios contínuos, como ondas na água, ondas acústicas, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas. Resolver essa equação significa encontrar a função u que determina o deslocamento vertical da onda num determinado ponto ao longo do tempo.

Assim como a equação do calor, a equação da onda pode ser descrita em várias dimensões. No caso da equação da onda unidimensional tem-se:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt},$$

enquanto para bidimensional e tridimensional têm-se, respectivamente, (4.1) e (4.2):

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}, \quad (4.1)$$

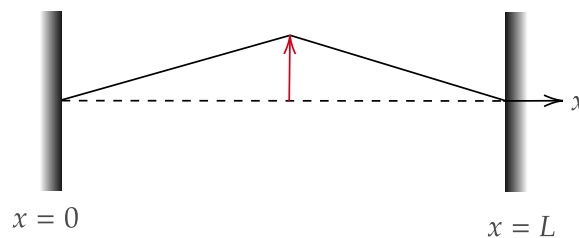
$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}, \quad (4.2)$$

em que x, y e z representam as variáveis espaciais e t a variável temporal.

4.1 Propagação da onda em uma corda

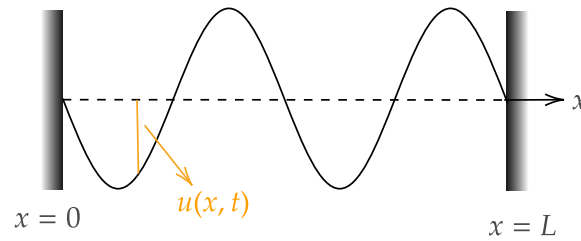
Suponha que uma corda elástica de comprimento L presa em dois suportes no mesmo nível horizontal, seja colocada em movimento ao ser deslocada da sua posição de equilíbrio e depois solta no instante inicial, conforme ilustra a [Figura 12](#).

Figura 12 – Corda puxada.



Fonte: Elaborado pela autora.

O problema consistirá em encontrar a função $u(x, t)$ que determina o deslocamento vertical da corda na abscissa x no instante t , como representado na [Figura 13](#).

Figura 13 – Deslocamento vertical ao longo da corda num instante t .

Fonte: Adaptado pela autora (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020).

Além disso, suponha que são desprezíveis os efeitos de amortecimento, assim tem-se que $u(x, t)$ satisfaz a equação da onda unidimensional:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4.3)$$

onde o coeficiente a é determinado por $a^2 = T/\rho$. Sendo T a tensão na corda e ρ a massa por unidade de comprimento do material.

Além de satisfazer a equação (4.3) devem ser consideradas também outras condições conhecidas. Primeiramente, como se supõe que a corda está fixa em dois suportes no mesmo nível, tem-se que a função será zero para qualquer instante nas posições $x = 0$ e $x = L$.

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Também será conhecido o deslocamento vertical ao longo da corda no instante inicial, descrita por uma função f .

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Por fim, a velocidade inicial será conhecida, descrita por uma função g .

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

Em seguida, serão analisadas separadamente as situações com velocidade inicial zero e com velocidade inicial diferente de zero

4.1.1 Corda elástica com velocidade inicial nula

Nesta seção, o problema será resolvido considerando a velocidade inicial nula (4.4d). Desta forma, o problema é descrito por (4.4).

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.4a)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.4b)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.4c)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.4d)$$

em que (4.4a), (4.4b), (4.4c) e (4.4d), representam respectivamente: a equação da onda, a condição de contorno na variável espacial x , condição inicial na variável temporal t e velocidade inicial. Assim, o objetivo é determinar a função u que satisfaz a (3.11a), a condição inicial (3.11b) e a condição de contorno (3.11c).

Para que as funções f e g satisfaçam a condição de contorno é necessário que:

$$f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0. \quad (4.5)$$

Neste exemplo, supõe-se que a corda entrou em movimento após ser retirada da sua posição de equilíbrio, o que implica que sua velocidade inicial é zero. Portanto, neste caso particular, considera-se que $g(x) = 0$.

Novamente, será utilizado o método de separação de variáveis, ou seja, supõe-se que a solução pode ser escrita como o produto de duas funções, uma que só depende de x , enquanto outra só depende de t :

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Logo temos que $u_{xx} = X''T$ e $u_{tt} = XT''$, substituindo em (4.3):

$$a^2 X''T = XT''.$$

Separando as funções e suas derivadas de forma que cada membro da equação dependa somente de x e outra de t , obtém-se:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}.$$

Note que fixando um valor de x concluímos que $\frac{T''}{a^2 T}$ é constante para todo t , assim temos:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Desta forma, obtém-se duas EDOs:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (4.6a)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (4.6b)$$

Antes de obter a solução das EDOs, serão verificadas as implicações de escrever a função como o produto de duas funções. Por (4.1.1) e pelas condições de contorno (4.4b) e velocidade inicial zero (4.4d), temos que:

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \xrightarrow{T(t) \neq 0} X(0) = 0, \quad (4.7a)$$

$$u(L, t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \xrightarrow{T(t) \neq 0} X(L) = 0, \quad (4.7b)$$

$$u_t(x, 0) = X(x) \cdot T'(0) = 0 \xrightarrow{X(x) \neq 0} T'(0) = 0, \quad (4.7c)$$

Essas implicações ocorrem pois busca-se a solução não nula, portanto $T(t)$ e $X(x)$ são diferentes de zero. Assim, ao obter a solução das EDOs será necessário verificar se satisfaz $X(0) = X(L) = T'(0) = 0$.

A primeira EDO, (4.6a), foi resolvida no problema da difusão de calor, com a solução dada pela expressão (3.5). Verifica-se que a EDO admite solução não trivial quando λ é um autovalor, dado por

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.8)$$

associado à autofunção $\text{sen}(n\pi x/L)$.

Resta agora resolver a segunda EDO (4.6b). Substituindo (4.8) em (4.6b), obtém:

$$T'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} T = 0, \quad (4.9)$$

cuja solução é dada por:

$$T(t) = k_1 \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + k_2 \text{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad (4.10)$$

onde k_1 e k_2 são constantes. Note que $T(t)$ será solução se $T'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} T'(t) &= -\frac{n\pi a k_1}{L} \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + \frac{n\pi a k_2}{L} \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \\ T'(0) &= -\frac{n\pi a k_1}{L} \sin\left(\frac{n\pi a \cdot 0}{L}\right) + \frac{n\pi a k_2}{L} \cos\left(\frac{n\pi a \cdot 0}{L}\right) \\ T'(0) &= \frac{n\pi a k_2}{L}. \end{aligned}$$

Logo $k_2 = 0$, substituindo em (4.10):

$$T(t) = k_1 \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \quad (4.11)$$

Assim substituindo as soluções encontradas das EDOs em (4.1.1) tem-se:

$$u_n(x, t) = c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que pelo princípio da superposição:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right). \quad (4.12)$$

é solução da equação, desde que satisfaça a condição inicial (4.4c):

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = f(x). \quad (4.13)$$

Desta forma, os coeficientes c_n devem ser tais que a série (4.13) convirja para $f(x)$ em $0 \leq x \leq L$. Como já mostrado no capítulo anterior, os coeficientes podem ser determinados por:

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx. \quad (4.14)$$

Assim, a solução da equação (4.3) sob as condições (4.4b), (4.4c) e (4.4d) é dada pela série (4.12) com os coeficientes obtidos pela equação (4.14).

Exemplo 4.1. Seja a equação da onda em uma corda dada por:

$$4u_{xx} = u_{tt},$$

com a condição de contorno:

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x/10, & 0 \leq x \leq 10 \\ (30 - x)/20, & 10 < x < 30 \end{cases}.$$

Portanto, tem-se que o comprimento da corda é $L = 30$ e $a = 2$. Portanto, a solução é da forma (4.12) onde os coeficientes são determinados por (4.14). Obtendo os coeficientes:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{30} \int_0^{30} f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx. \\ &= \frac{2}{30} \left[\underbrace{\int_0^{10} \frac{x}{10} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx}_{\text{(I)}} + \underbrace{\int_{10}^{30} \frac{30 - x}{20} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx}_{\text{(II)}} \right] \end{aligned}$$

Resolução da parte (I):

$$\begin{aligned} &= \int_0^{10} \frac{x}{10} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx \\ &= -\frac{x}{10} \cdot \frac{30}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{30} \right) \Big|_0^{10} + \frac{1}{10} \int_0^{10} \frac{30}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx \\ &= -\frac{30}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) + \frac{3 \cdot 30}{(n\pi)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Resolução da parte (II):

$$= \int_{10}^{30} \frac{30 - x}{20} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{30} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{30-x}{20} \cdot \frac{30}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right) \Big|_{10}^{30} + \int_{10}^{30} \left(\frac{-1}{20} \cdot \frac{30}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{30}\right)\right) dx \\
&= \frac{30}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{30}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Retomando

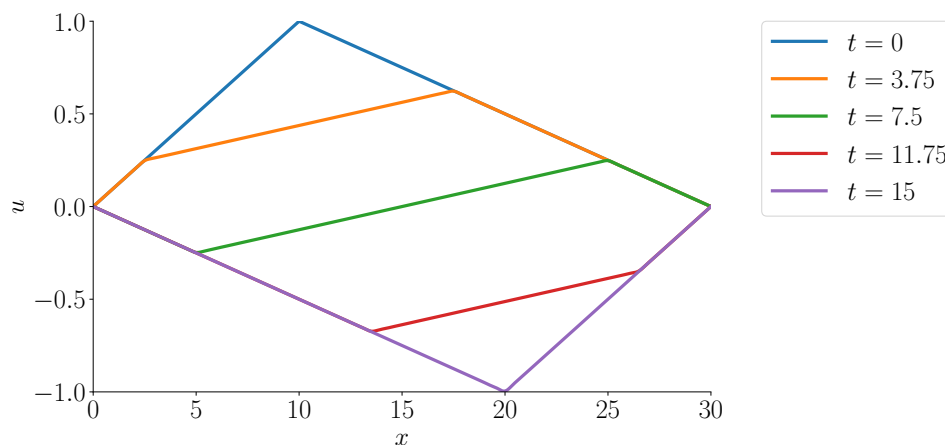
$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2}{30} \left[-\frac{30}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{3 \cdot 30}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{30}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{30}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right] \\
&= \frac{6}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3} + \frac{3}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{9}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, a solução do problema é dada por:

$$u(x, t) = \frac{9}{\pi^2} \sum_1^{\infty} n^{-2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{30}\right) \cos\left(\frac{2n\pi t}{30}\right)$$

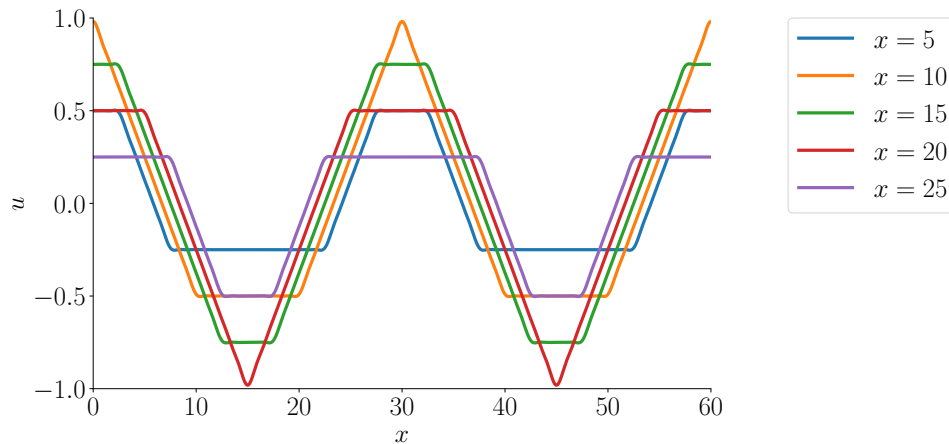
A [Figura 14](#) apresenta o deslocamento ao longo da corda $0 \leq x \leq 30$ fixados alguns instantes. A curva representa a forma da onda em um determinado instante.

Figura 14 – Gráfico de $u(x, t)$ fixando valores de t – Exemplo 4.1.



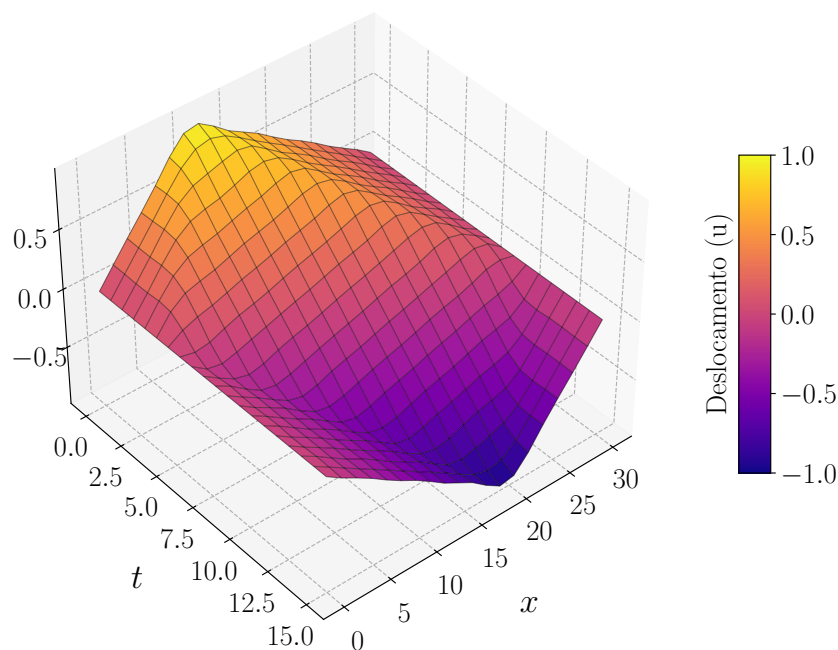
Fonte: Elaborado pela autora.

Já a [Figura 15](#) indica o deslocamento da corda ao longo do tempo fixados alguns pontos da corda.

Figura 15 – Gráfico de $u(x, t)$ fixando valores de x – Exemplo 4.1.

Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir é apresentada representação tridimensional da função u .

Figura 16 – Gráfico de $u(x, t)$ – Exemplo 4.1.

Fonte: Elaborado pela autora.

4.1.2 Corda elástica com velocidade inicial não nula

Nesta seção, o problema será resolvido supondo que a corda inicia seu movimento a partir da posição de equilíbrio, com uma velocidade inicial não nula. Desta forma o problema é descrito por (4.15).

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.15a)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.15b)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.15c)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.15d)$$

em que (4.15a), (4.15b), (4.15c) e (4.15d), representam respectivamente: a equação da onda, a condição de contorno na variável espacial x , condição inicial na variável temporal t e velocidade inicial.

Supondo que a solução é dada por $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, analogamente à seção anterior, obtém-se:

$$T(t) = k_1 \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad (4.16a)$$

$$X(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ associado aos autovalores } \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, n \in \mathbb{N}. \quad (4.16b)$$

Com a condição inicial (4.15c), tem-se:

$$u(x, 0) = X(x) \cdot T(0) = 0 \xrightarrow{X(x) \neq 0} T(0) = 0. \quad (4.17)$$

Por (4.16a) e (4.17):

$$T(0) = k_1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi a \cdot 0}{L}\right) + k_2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a \cdot 0}{L}\right) \implies k_1 = 0.$$

Portanto $T(t) = k \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at \cdot 0}{L}\right)$, logo

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Para satisfazer as condições iniciais, supõe-se que a função $u(x, t)$ pode ser expressa como uma combinação linear das soluções fundamentais (4.18).

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então por (4.15d) tem-se:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x) \quad (4.19)$$

Desta forma, os coeficientes k_n devem ser tais que a série (4.13) convirja para $g(x)$ em $0 \leq x \leq L$. Como demonstrado no capítulo anterior, os coeficientes podem ser determinados por:

$$\frac{n\pi a}{L} k_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.20)$$

Concluindo que a solução da equação (4.15a) sob as condições (4.15b), (4.15c) e (4.15d) é dada pela série (4.19) com os coeficientes obtidos pela equação (4.20).

4.1.3 Problemas Mais Gerais

Nesta seção, será abordada a solução de problemas mais gerais, nos quais tanto a posição inicial quanto a velocidade inicial são descritas por funções não nulas, o problema é dado por (4.21).

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.21a)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.21b)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.21c)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.21d)$$

em que (4.21a), (4.21b), (4.21c) e (4.21d), representam respectivamente: a equação da onda, a condição de contorno na variável espacial x , condição inicial na variável temporal t e velocidade inicial.

Suponha que $v(x, t)$ seja a solução do problema (4.4) associado à equação da onda com $g(x) = 0$, ou seja, com velocidade inicial nula, e que $w(x, t)$ seja a solução do problema (4.15) correspondente com $f(x) = 0$, isto é, com posição inicial nula.

Assim, a solução $u(x, t)$ é obtida pela adição das funções $v(x, t)$ e $w(x, t)$, ou seja:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (4.22)$$

Note que $u(x, t)$ satisfaz a equação da onda (4.21a):

$$a^2(v_{xx} + w_{xx}) = v_{tt} + w_{tt} \Rightarrow \underbrace{a^2 v_{xx} - v_{tt}}_{(4.4a)} + \underbrace{a^2 w_{xx} - w_{tt}}_{(4.15a)} = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0,$$

a condição de contorno (4.21b):

$$u(0, t) = v(0, t) + w(0, t) = 0 + 0 = 0,$$

$$u(L, t) = v(L, t) + w(L, t) = 0 + 0 = 0,$$

a condição inicial (4.21c):

$$u(x, 0) = v(x, 0) + w(x, 0) = f(x) + 0 = f(x),$$

e a velocidade inicial (4.21d):

$$u_t(x, 0) = v_t(x, 0) + w_t(x, 0) = 0 + g(x) = g(x).$$

Portanto (4.22) é solução do problema (4.21).

5 Equação de Laplace

Nesta seção, será explorada a terceira equação diferencial parcial (EDP) clássica: a equação de Laplace. A equação de Laplace pode ser descrita em várias dimensões, no caso bidimensional e tridimensional têm-se respectivamente (5.1a) e (5.1b):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (5.1a)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (5.1b)$$

Outra notação bastante comum é representar o primeiro membro da equação pelo *laplaciano* ∇^2 , definido por (FIGUEIREDO, 2009):

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

onde u é função de x_1, x_2, \dots, x_n .

O problema de encontrar uma solução para a equação de Laplace, onde os valores da função são especificados na fronteira, é chamado de problema de *Dirichlet*. Já quando os valores da derivada normal da função são definidos na fronteira, temos o que se denomina problema de *Neumann*. A seguir serão apresentadas as soluções dos principais casos.

5.1 O problema de Dirichlet em um retângulo

Considere o problema de encontrar a função $u(x, y)$ que satisfaz da equação de Laplace (5.2) no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$.

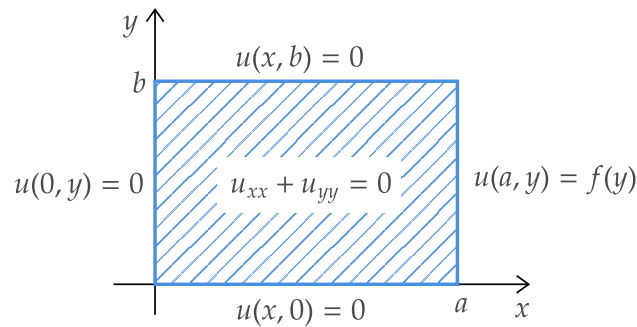
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (5.2)$$

sob as condições de contorno (5.3):

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad 0 < x < a, \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $f(y)$ é uma função em $0 < y < b$. Conforme ilustra a Figura 17.

Figura 17 – O problema de Dirichlet em um retângulo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Assim como os problemas do calor e da onda, a equação será resolvida supondo que:

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (5.4)$$

logo $u_{xx} = X''Y$ e $u_{yy} = XY''$, substituindo na (5.3), obtém-se:

$$X''Y + XY'' = 0. \quad (5.5)$$

Separando as funções e suas derivadas, de modo que cada membro da equação dependa somente de x e outra de y , obtém-se:

$$\frac{X''}{X} = \frac{-Y''}{Y} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

onde λ é uma constante. Logo, obtém-se duas EDOs:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad (5.6a)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0. \quad (5.6b)$$

De forma que as EDOs satisfazem as condições de contorno $Y(0) = Y(b) = X(0) = 0$, de fato substituindo (5.4) em (5.3) têm-se:

$$u(x, 0) = X(x) \cdot Y(0) = 0 \xrightarrow{X(x) \neq 0} Y(0) = 0, \quad (5.7a)$$

$$u(0, y) = X(0) \cdot Y(y) = 0 \xrightarrow{Y(y) \neq 0} X(0) = 0, \quad (5.7b)$$

$$u_t(x, b) = X(x) \cdot Y(b) = 0 \xrightarrow{X(x) \neq 0} Y(b) = 0. \quad (5.7c)$$

Essas implicações ocorrem pois busca-se a solução não nula, portanto $X(x)$ e $Y(y)$ são diferentes de zero. Note que a EDO (5.6b) sujeita as condições $Y(0) = Y(b) = 0$ já foi resolvida anteriormente, as soluções são as autofunções associadas aos autovalores dados por:

$$Y_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right), \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Substituindo os valores de λ em (5.6a), tem-se:

$$X'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X = 0,$$

cuja solução é dada pela expressão:

$$X(x) = A \cosh(n\pi x/b) + B \sinh(n\pi x/b),$$

onde A e B são coeficientes. Como $X(0) = 0$, tem-se:

$$A \cosh(0) + B \sinh(0) = 0 \implies A = 0.$$

Portanto $X(x)$ é proporcional a $\sinh(n\pi x/b)$. Assim, a solução fundamental é dada por:

$$u_n(x, y) = \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note que pelo princípio da superposição:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (5.9)$$

é solução da equação, desde que satisfaça a condição contorno não homogênea $u(a, y) = f(y)$:

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = f(y).$$

Desta forma, os coeficientes c_n devem ser tais que:

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy. \quad (5.10)$$

Assim, a solução da equação (5.2) sob as condições (5.3) é dada pela série (5.9) com os coeficientes obtidos pela equação (5.10).

Exemplo 5.1. Seja u que satisfaz a equação de Laplace no retângulo $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$ e que satisfaz as condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & u(x, 2) &= 0, & 0 < x < 3, \\ u(0, y) &= 0, & u(3, y) &= f(y), & 0 < y < 2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde a função $f(y)$ é dada por:

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2 \end{cases}.$$

Utilizando a (5.10) para determinar os coeficientes c_n :

$$\begin{aligned} c_n \sinh\left(\frac{3n\pi}{2}\right) &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy. \\ &= \left[\int_0^1 y \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy + \int_1^2 (2-y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dy \right] \\ &= \frac{8}{(n\pi)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

logo c_n é obtido por:

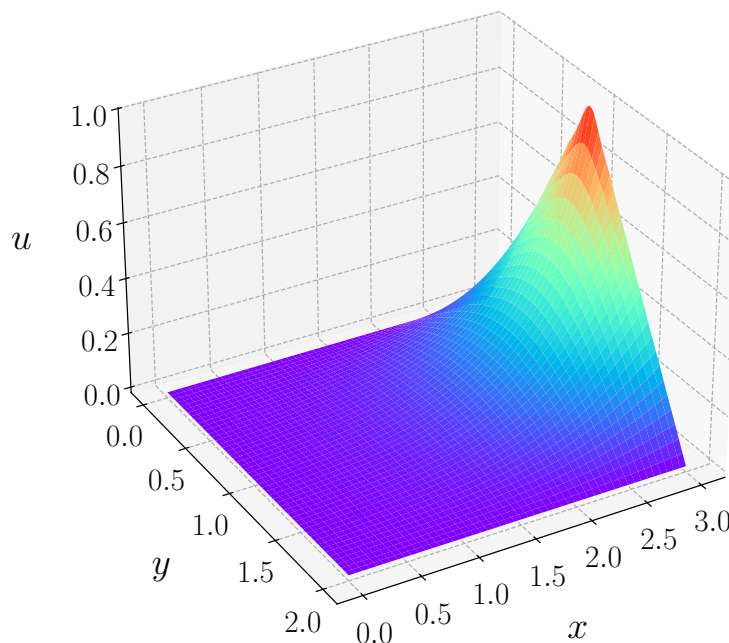
$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{(n\pi)^2 \operatorname{senh}(3n\pi/2)}.$$

Portanto, a função $u(x, y)$ é

$$u(x, y) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{(n\pi)^2 \operatorname{senh}(3n\pi/2)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right).$$

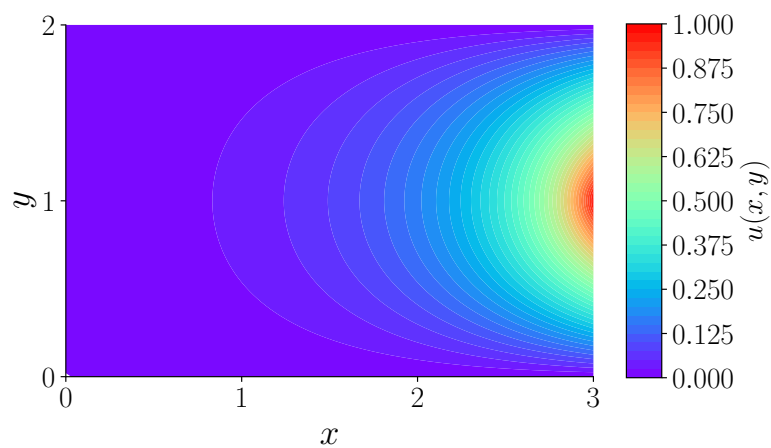
A Figura 18 ilustra o gráfico tridimensional da função u truncada para os 25 primeiros termos da série.

Figura 18 – Gráfico de $u(x, t)$ – Exemplo 5.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

A Figura 19 utiliza uma escala de cores para representar os valores de $u(x, y)$ para cada ponto no retângulo, onde quanto mais vermelho a função fica mais próxima de um e quanto mais roxa se aproxima de zero.

Figura 19 – Curvas de nível de $u(x, y)$ – Exemplo 5.1.

Fonte: Elaborado pela autora.

No capítulo a seguir, será apresentado o método das diferenças finitas e como pode ser aplicado para resolver as EDPs clássicas numericamente.

6 O Método das Diferenças Finitas

Os métodos numéricos são extremamente úteis para resolver problemas mais complexos, nos quais não é possível obter uma solução analítica. Por exemplo, suponha que se deseje determinar a temperatura de uma barra em determinados instantes em certos pontos. Se for possível encontrar uma solução analítica, basta utilizá-la para calcular a função nas variáveis desejadas. No entanto, quando a solução analítica não estiver disponível, como acontece em muitos casos práticos, por exemplo, quando se conhece apenas a temperatura inicial em alguns pontos da barra, será necessário recorrer aos métodos numéricos ([ASMAR, 2004](#)).

Neste capítulo será apresentado o método das diferenças finitas. O primeiro passo desse método consiste em discretizar a região onde se busca a solução, ou seja, transformar um intervalo $[a, b]$ em um conjunto de pontos no intervalo. Conseqüentemente, quanto mais pontos forem considerados menor será o erro da solução encontrada.

Nas seções seguintes, serão detalhadas separadamente a discretização do domínio em uma e duas variáveis.

6.1 Discretização do domínio em \mathbb{R}

Seja o intervalo $[a, b]$, a discretização igualmente espaçada transforma esse intervalo em um conjunto discreto de pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, onde a diferença entre os pontos consecutivos é constante. Neste caso, a diferença entre os pontos consecutivos é determinado pelo tamanho do intervalo dividido por n , ou seja, se h é o espaço entre os pontos então

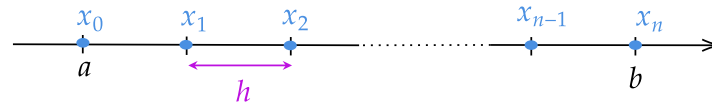
$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Assim, pode-se determinar o conjunto pelo tamanho do passo ou então pela quantidade de pontos. Estabelecendo a ordem nos elementos de forma que $x_{k-1} < x_k$ para $k = 1, 2, \dots, n$ e $x_0 = a$, então o elemento x_k é determinado por:

$$x_k = x_0 + k \cdot h \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Esse conjunto encontrado é frequentemente é denominado de *malha* e os pontos são conhecidos por *nós das malhas* ([CUNHA, 2003](#)). A [Figura 20](#) ilustra a discretização igualmente espaçada do intervalo $[a, b]$ no conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ em que o espaçamento entre os pontos é h .

Figura 20 – Discretização igualmente espaçada no intervalo $[a, b]$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Conforme descrito anteriormente, o primeiro passo do método será a discretização do domínio. A partir disso, o método busca determinar uma boa aproximação para o valor da função nos nós da malha. Seja $y(x_k)$ o valor exato da função no ponto x_k , enquanto y_k é a aproximação obtida então, tem-se:

$$y_k \simeq y(x_k) = y(x_0 + k \cdot h) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

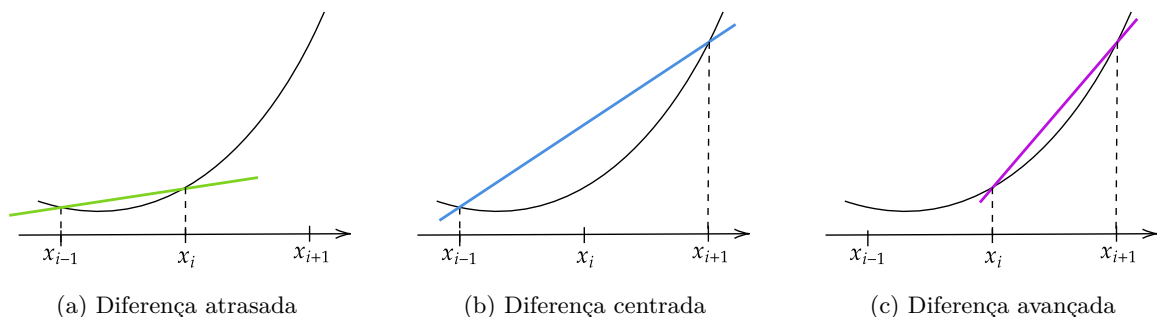
Por fim, é necessário definir as aproximações para as derivadas da função. Com as aproximações para as derivadas da função, juntamente com a discretização do domínio e da solução, será possível obter uma aproximação da solução resolvendo o sistema resultante.

Inicialmente, será analisada a derivada primeira. Neste caso, pode-se considerar três aproximações:

- (a) Diferença atrasada: $y'(x_i) \simeq \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$
- (b) Diferença centrada: $y'(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$
- (c) Diferença avançada: $y'(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

A [Figura 21](#) ilustra cada caso.

Figura 21 – Aproximações para as derivadas geometricamente.



Fonte: Elaborado pela autora.

Note que um ponto crucial para os métodos numéricos é garantir que o erro seja pequeno. Para avaliar este aspecto será utilizado o conceito ordem de erro.

Definição 6.1. Diz que a função $g(h)$ é $O(h^p)$, ou seja, está na ordem h^p , se existe uma constante $C > 0$ tal que $|g(h)| \leq C|h^p|$ (RUGGIERO; LOPES, 2000).

Neste caso, como busca-se avaliar o erro, a função $g(h)$ descreve o erro cometido ao utilizar o passo h . Além disso, deseja-se que, à medida que se diminui o passo h , o erro diminua rapidamente. Este aspecto é controlado pelo expoente p : quanto maior for p , mais rápida será a redução do erro conforme h diminui. Por exemplo, se $g(h)$ é $O(h^2)$, ao diminuir o passo h pela metade, o erro reduzirá para um quarto. Por outro lado, se $g(h)$ for $O(h)$, ao diminuir o passo h pela metade, o erro também será reduzido à metade.

A ferramenta crucial para definir $g(h)$ das aproximações será a série de Taylor. Utilizando esta técnica será determinada a ordem de $g(h)$ nas aproximações: (a) diferença atrasada, (b) diferença centrada e (c) diferença avançada.

Suponha que y têm derivadas até ordem $k + 1$ em x_i , então sua expansão em série de Taylor em torno de x_i é:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \dots + y^{(k)}(x_i) \frac{(x - x_i)^k}{k!} + y^{(k+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_i)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (6.1)$$

onde ξ está entre x e x_i . O último termo da expressão representa o erro da aproximação.

Assim, para $k = 1$ em (6.1) tem se:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + y''(\xi_x) \frac{(x - x_i)^2}{2!}. \quad (6.2)$$

Substituindo $x = x_{i+1}$ em (6.2):

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + y''(\xi_{i+1}) \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2}, \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i) + y'(x_i)h + y''(\xi_{i+1}) \frac{h^2}{2}, \end{aligned}$$

isolando a primeira derivada, obtém-se:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - y''(\xi_{i+1}) \frac{h}{2}.$$

Substituindo os valores exatos $y(x_{i+1})$ e $y(x_i)$ pelas estimativas y_{i+1} e y_i :

$$y'(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Substituindo $x = x_{i-1}$ em (6.2):

$$\begin{aligned} y(x_{i-1}) &= y(x_i) + y'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + y''(\xi_{i-1}) \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2}, \\ y(x_{i-1}) &= y(x_i) - y'(x_i)h + y''(\xi_{i-1}) \frac{h^2}{2}, \end{aligned}$$

isolando a derivada primeira, obtém-se:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} + y''(\xi_{i-1})\frac{h}{2}.$$

Substituindo os valores exatos $y(x_{i-1})$ e $y(x_i)$ pelas estimativas y_{i-1} e y_i :

$$y'(x_i) \simeq \frac{y_i - y_{i-1}}{h}.$$

Supondo que $y''(x)$ é limitada em $[a, b]$, então existe M tal que $y''(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, então as aproximações (a) e (c) são $O(h)$, pois:

(a) Diferença atrasada:

$$|g(h)| = \left| y'(x_i) - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right| = \left| y''(\xi_i)\frac{h}{2} \right| \leq \frac{M}{2}|h|.$$

(c) Diferença avançada:

$$|g(h)| = \left| y'(x_i) - \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right| = \left| y''(\xi_{i+1})\frac{h}{2} \right| \leq \frac{M}{2}|h|.$$

Tomando agora $k = 2$ em (6.1) tem se:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + y''(x_i)\frac{(x - x_i)^2}{2} + y'''(\xi_x)\frac{(x - x_i)^3}{3!}. \quad (6.3)$$

Substituindo $x = x_{i+1}$ em (6.3):

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + y''(x_i)\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + y'''(\xi_{i+1})\frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6}, \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} + y'''(\xi_{i+1})\frac{h^3}{6}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Substituindo $x = x_{i-1}$ em (6.3):

$$\begin{aligned} y(x_{i-1}) &= y(x_i) + y'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + y''(x_i)\frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2} + y'''(\xi_{i-1})\frac{(x_{i-1} - x_i)^3}{6}, \\ y(x_{i-1}) &= y(x_i) - y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} - y'''(\xi_{i-1})\frac{h^3}{6}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Fazendo (6.4) - (6.5), obtém-se:

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2y'(x_i)h + \frac{h^3}{6}(y'''(\xi_{i+1}) + y'''(\xi_{i-1})),$$

isolando a derivada primeira, obtém-se:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{12}(y'''(\xi_{i+1}) + y'''(\xi_{i-1})).$$

Substituindo os valores exatos $y(x_{i+1})$ e $y(x_{i-1})$ pelas estimativas y_{i+1} e y_{i-1} :

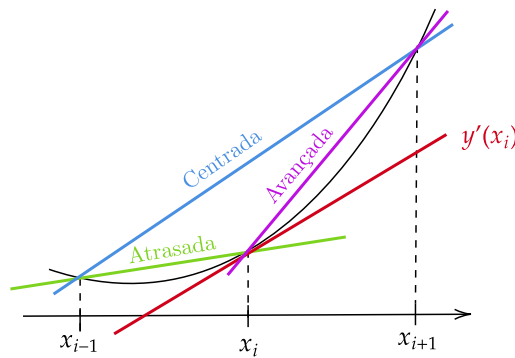
$$y'(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Assim a aproximação (b) é $O(h^2)$, pois:

$$|g(h)| = \left| y'(x_i) - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} \right| = \left| \frac{h^2}{12} (y'''(\xi_{i+1}) + y'''(\xi_{i-1})) \right| \leq \frac{M}{6} |h^2|.$$

Por essa razão, é chamada de aproximação de segunda ordem. Já as aproximações anteriores, com erro de $O(h)$, são denominadas de primeira ordem. A principal diferença entre elas está na precisão: aproximações de segunda ordem tendem a ser mais precisas conforme o passo da malha, h , é reduzido. Pode-se observar isso a partir da [Figura 22](#), note que a inclinação da reta que mais se aproxima da derivada da função no ponto é a diferença centrada.

Figura 22 – Comparação entre diferenças atrasada, centrada e avançada.



Fonte: Elaborado pela autora.

Agora será obtida a expressão para derivada segunda utilizando a diferença centrada.

Tomando $k = 3$ em (6.1) tem-se:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + y''(x_i) \frac{(x - x_i)^2}{2} + y'''(x_i) \frac{(x - x_i)^3}{3!} + y^{(4)}(\xi_x) \frac{(x - x_i)^4}{4!}. \quad (6.6)$$

Substituindo $x = x_{i+1}$ e $x = x_{i-1}$ em (6.6):

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i) \frac{h^2}{2} + y'''(x_i) \frac{h^3}{6} + y^{(4)}(\xi_{i+1}) \frac{h^4}{24}, \quad (6.7a)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - y'(x_i)h + y''(x_i) \frac{h^2}{2} - y'''(x_i) \frac{h^3}{6} + y^{(4)}(\xi_{i-1}) \frac{h^4}{24}. \quad (6.7b)$$

Fazendo (6.7a) + (6.7b), obtém-se:

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + \frac{h^4}{24} (y^{(4)}(\xi_{i+1}) + y^{(4)}(\xi_{i-1})).$$

isolando derivada segunda, obtém-se:

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{24}(y^{(4)}(\xi_{i+1}) + y^{(4)}(\xi_{i-1})).$$

Substituindo os valores exatos $y(x_{i+1})$, $y(x_i)$ e $y(x_{i-1})$ pelas estimativas y_{i+1} , y_i , y_{i-1} :

$$y''(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - 2y_i - y_{i-1}}{h^2}.$$

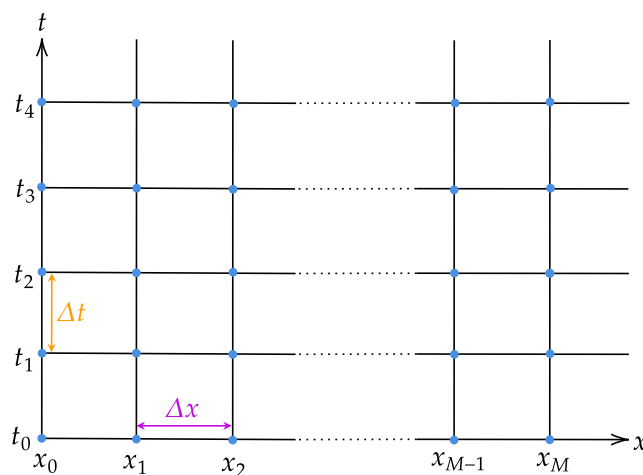
Analogamente aos exemplos anteriores, verifica-se que essa aproximação apresenta um erro de ordem $O(h^2)$.

6.2 Discretização do domínio em \mathbb{R}^2

Nesta seção, será feita a discretização do domínio em \mathbb{R}^2 , ou seja, no caso de funções de duas variáveis. Assim como na seção anterior, serão obtidas aproximações para as derivadas da função. No entanto, por se tratar de uma função de mais de uma variável, serão discutidas as aproximações das derivadas parciais. Esta seção introduzirá os conceitos fundamentais para a resolução numérica da equação a do calor, da onda e de Laplace.

Seja a função $u(x, t)$ onde x representa a variável espacial e t a variável temporal. Note que, neste exemplo precisa-se discretizar tanto x quanto t . Para isso, definem-se Δx e Δt , que correspondem, respectivamente, ao espaçamento entre os pontos de x e de t (THOMAS, 1995). Conforme ilustra a Figura 23.

Figura 23 – Malha no domínio espaço-tempo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Suponha que $x_0 = t_0 = 0$, então pode-se definir as coordenadas dos pontos:

$$x_k = k\Delta x, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M,$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n \leq N \quad (n \in \mathbb{N})$$

Além disso, será denotado por U_k^n a aproximação da função no ponto (x_k, t_n) . Assim como na seção anterior, o objetivo agora é obter aproximações para as derivadas da função u , com o intuito de reduzir o problema a uma forma discreta que possa ser resolvida.

Como a derivada parcial de u em relação à t é dada por

$$u_t(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t},$$

é razoável supor a aproximação

$$u_t(x_k, t_n) \simeq \frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\Delta t}.$$

Analogamente, utilizando a expansão da função em série de Taylor, como feito na seção anterior, é possível obter aproximações para as demais derivadas, juntamente com suas respectivas ordens de erro.

$$\text{Avançada no tempo: } u_t(x_k, t_n) \simeq \frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\Delta t}, \quad O(\Delta t) \quad (6.8)$$

$$\text{Avançada no espaço: } u_x(x_k, t_n) \simeq \frac{U_{k+1}^n - U_k^n}{\Delta x}, \quad O(\Delta x) \quad (6.9)$$

$$\text{Atrasada no tempo: } u_t(x_k, t_n) \simeq \frac{U_k^n - U_k^{n-1}}{\Delta t}, \quad O(\Delta t) \quad (6.10)$$

$$\text{Atrasada no espaço: } u_x(x_k, t_n) \simeq \frac{U_k^n - U_{k-1}^n}{\Delta x}, \quad O(\Delta x) \quad (6.11)$$

$$\text{Centrada no tempo: } u_t(x_k, t_n) \simeq \frac{U_k^{n+1} - U_k^{n-1}}{2\Delta t}, \quad O((\Delta t)^2) \quad (6.12)$$

$$\text{Centrada no espaço: } u_x(x_k, t_n) \simeq \frac{U_{k+1}^n - U_{k-1}^n}{2\Delta x}, \quad O((\Delta x)^2) \quad (6.13)$$

$$\text{Centrada no tempo: } u_{tt}(x_k, t_n) \simeq \frac{U_k^{n+1} - 2U_k^n + U_k^{n-1}}{(\Delta t)^2}, \quad O((\Delta t)^2) \quad (6.14)$$

$$\text{Centrada no espaço: } u_{xx}(x_k, t_n) \simeq \frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad O((\Delta x)^2) \quad (6.15)$$

6.3 Consistência, Estabilidade e Convergência

Antes de aplicar o método das diferenças finitas para obter a solução da EDP, é essencial verificar se a solução numérica se aproxima adequadamente da solução real. Para isso, deve-se garantir três aspectos fundamentais: a consistência, estabilidade e convergência.

A consistência da equação é garantida pela expansão da função em série de Taylor, que permite observar que, à medida que o tamanho da malha diminui, ou seja, quanto Δx e Δt tendem a zero a aproximação se aproxima do valor exato da suas derivadas. Assim, a aproximação de diferenças finitas é consistente com a EDP.

Definição 6.2. Um método numérico é considerado *consistente* se a solução da EDP satisfaz a aproximação no limite em que o tamanho da malha tende a zero (PINCHOVER; RUBINSTEIN, 2005).

Note que então ao utilizar valores para Δx e Δt próximos de zero, o erro envolvido nas aproximações ocorre devido ao truncamento realizado na expansão da série de Taylor.

Outro aspecto a ser considerado é a estabilidade, relacionado ao método numérico utilizado. Um método numérico é considerado estável se os erros não crescem a cada etapa de cálculo. Segundo Fortuna (2000), os métodos podem ser classificados em:

1. *Condicionalmente Estáveis*: quando existe uma condição que garante a estabilidade do método, como é o caso do método explícito em geral;
2. *Incondicionalmente Estáveis*: quando não necessita de nenhuma condição para garantir a estabilidade, em geral são os casos dos métodos implícitos;
3. *Incondicionalmente Instáveis*: quando o método não é estável independente das condições, esses métodos não devem ser utilizados.

Na apresentação de cada método, nas seções seguintes serão ditas quais as condições de estabilidade caso existam. Essas condições são essenciais para evitar o acúmulo de erros durante as etapas de cálculo.

Por fim, é necessário verificar a convergência.

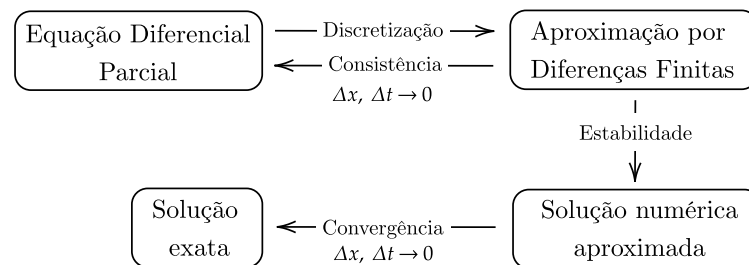
Definição 6.3. Um esquema numérico *converge* para um problema diferencial (EDP com condições iniciais ou de fronteira adequadas) se, no limite $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ a solução do problema discreto converge para a solução do problema diferencial original (PINCHOVER; RUBINSTEIN, 2005).

Em geral é complicado demonstrar a convergência, por isso, muitas vezes utiliza-se o Teorema 6.4 afim de garantir a convergência.

Teorema 6.4 (Teorema de Equivalência de Lax). *Se a discretização adotada é consistente e o método numérico é estável então quanto Δx e $\Delta t \rightarrow 0$ a solução numérica converge para a solução exata.*

A demonstração do teorema pode ser consultada em [Morton e Mayers \(2005\)](#). Esse resultado é extremamente importante pois diz que a consistência e estabilidade são condições suficientes para que seja convergente. A [Figura 24](#) sintetiza os conceitos discutidos nessa seção.

Figura 24 – Relação entre consistência, estabilidade e convergência.



Fonte: Adaptado pela autora ([FORTUNA, 2000](#))

6.4 Equação do Calor

Nesta seção será discutido em detalhes a aplicação método de diferenças finitas para o problema do calor [\(6.16\)](#):

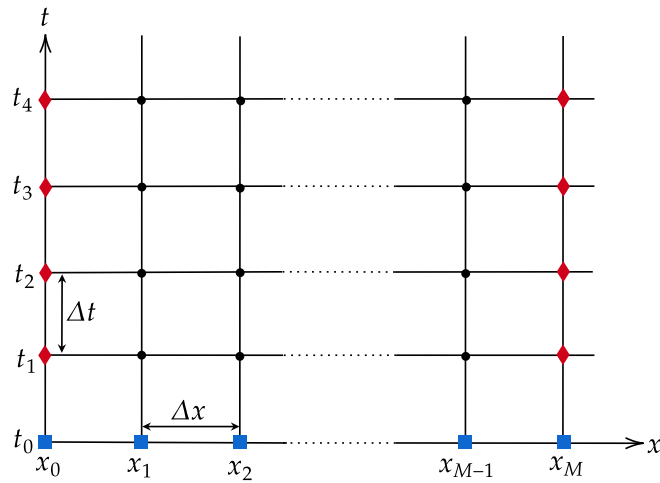
$$\alpha^2 u_{xx} = u_t \quad 0 < x < L \quad t > 0, \tag{6.16a}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L, \tag{6.16b}$$

$$u(0, t) = T_1 \quad u(L, t) = T_2 \quad t > 0. \tag{6.16c}$$

Ao realizar a discretização do domínio com espaçamento Δx e Δt , respectivamente para a variável espacial x e variável temporal t , obtém-se a malha ilustrada na [Figura 25](#).

Figura 25 – Discretização do domínio e condição inicial (■) e de contorno (◆).



Fonte: Elaborado pela autora

Na figura estão destacados os valores já conhecidos, a condição inicial e as condições de contorno. Assim,

$$\begin{aligned}
 U_k^0 &= f(x_k) = f(k\Delta x), \quad 0 \leq x_k \leq L \\
 U_0^n &= T_1, \quad t_n > 0, \\
 U_M^n &= T_2, \quad t_n > 0.
 \end{aligned}$$

Desta forma, o problema consiste em determinar as aproximações para a função nos nós internos, ou seja, para U_k^n com $1 \leq k \leq M - 1$ e $n \geq 1$.

Substituindo as aproximações (6.8) e (6.15) na equação do calor (6.16a):

$$\alpha^2 \frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\Delta t},$$

isolando U_k^{n+1} , obtém-se:

$$U_k^{n+1} = \frac{\alpha^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} (U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n) + U_k^n.$$

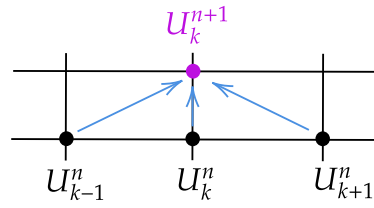
Definindo:

$$\sigma = \frac{\alpha^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{6.17}$$

tem-se:

$$\boxed{U_k^{n+1} = \sigma(U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n) + U_k^n} \tag{6.18}$$

A fórmula (6.18) é denominada *explícita*, pois é possível determinar explicitamente U_k^{n+1} a partir dos valores anteriores U_k^n e $U_{k\pm 1}^n$. A Figura 26 ilustra essa dependência.

Figura 26 – O *stencil* para equação do Calor.

Fonte: Elaborado pela autora

A ilustração apresenta a ideia das etapas que serão realizadas para a obtenção das aproximações dos valores da função. Note que como é dada a condição inicial, tem-se conhecidos os valores da primeira linha quando $n = 0$, com esses valores é possível determinar U_k^1 com $1 \leq k \leq M - 1$, com o conjunto de equações independentes (6.19).

$$\begin{aligned}
 U_1^1 &= \sigma(U_2^0 - 2U_1^0 + U_0^0) + U_1^0, \\
 U_2^1 &= \sigma(U_3^0 - 2U_2^0 + U_1^0) + U_2^0, \\
 &\vdots \\
 U_{M-1}^1 &= \sigma(U_M^0 - 2U_{M-1}^0 + U_{M-2}^0) + U_{M-1}^0.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

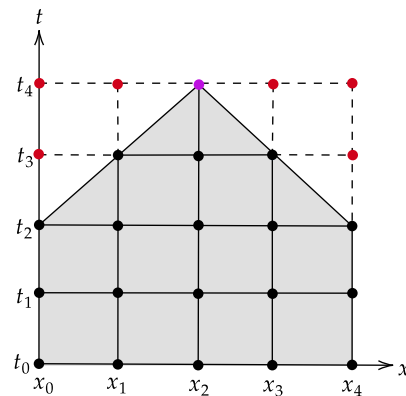
Agora com essas aproximações é possível determinar U_k^2 com $1 \leq k \leq M - 1$, com o conjunto de equações independentes (6.20).

$$\begin{aligned}
 U_1^2 &= \sigma(U_2^1 - 2U_1^1 + U_0^1) + U_1^1, \\
 U_2^2 &= \sigma(U_3^1 - 2U_2^1 + U_1^1) + U_2^1, \\
 &\vdots \\
 U_{M-1}^2 &= \sigma(U_M^1 - 2U_{M-1}^1 + U_{M-2}^1) + U_{M-1}^1.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Esse processo pode ser repetido de maneira recorrente até um certo n . Suponha que deseja-se obter a solução até um certo tempo T , então repete-se o processo até $n = \frac{T}{\Delta t}$.

Note que U_k^{n+1} no método explícito não depende das condições de fronteira no tempo $n + 1$, equivalente a um atraso na propagação das condições de fronteira, resultando em um tempo maior para que essas condições influenciem os nós mais internos do domínio. A Figura 27 exemplifica essa característica.

Figura 27 – Propagação da condição de contorno no esquema explícito.



Fonte: Elaborado pela autora

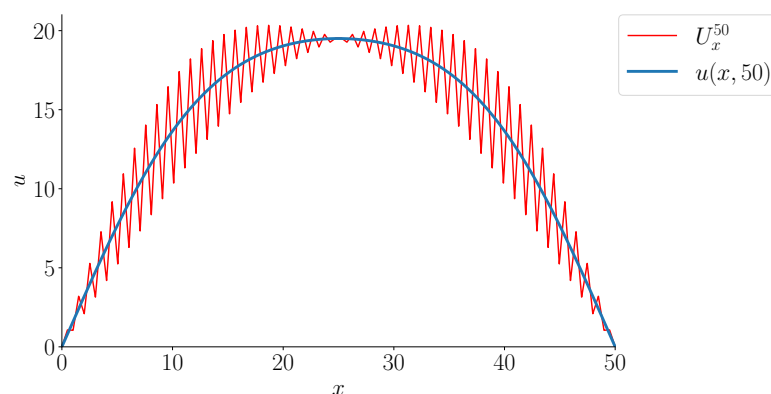
Na figura está destacada a região dos pontos que afetam a aproximação no ponto (x_2, t_4) . Note que as condições de contorno em $n = 3$ e $n = 4$ não exercem influência sobre a solução nesse ponto específico. Isso ocorre porque, no método explícito, a informação das condições de contorno é propagada com um atraso.

Esse fenômeno puramente numérico pode causar imprecisões na aproximação encontrada, especialmente em problemas onde as condições de fronteira são determinantes para a precisão do resultado. O método implícito não possui essa característica, porém, envolve um processo mais complexo para obter a solução aproximada.

O esquema explícito apresentado é condicionalmente estável, sendo a condição de estabilidade é $\sigma \leq 0,5$, sendo o valor σ definido anteriormente pela expressão (6.17). Caso σ valor ultrapasse o valor de 0.5, mesmo que minimamente pode produzir instabilidade na solução encontrada.

A Figura 28 compara a solução numérica e analítica obtida com o problema do exemplo 3.1 no mesmo instante de tempo $t = 50$. Para a solução numérica foram considerados $\Delta x = 0,5$ e $\Delta t = 0,126$, logo $\sigma = 0,504 > 0,5$.

Figura 28 – Instabilidade numérica no método explícito de condução de calor - Exemplo 3.1.



Fonte: Elaborado pela autora

Ao violar a condição de estabilidade, a solução numérica apresenta um comportamento oscilatório, resultando em grandes picos que comprometem a precisão dos resultados.

6.5 Equação da Onda

Nesta seção será discutida em detalhes a aplicação método de diferenças finitas para o problema da onda (6.21):

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (6.21a)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (6.21b)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6.21c)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.21d)$$

Considere a discretização do domínio com espaçamento Δx e Δt . A partir das condições (6.21b) e (6.21c), tem-se:

$$U_k^0 = f(x_k) = f(k\Delta x), \quad 0 \leq x_k \leq L,$$

$$U_0^n = 0, \quad t_n > 0,$$

$$U_M^n = 0, \quad t_n > 0.$$

Desta forma, o problema consiste em determinar as aproximações para a função nos nós internos, ou seja, para U_k^n com $1 \leq k \leq M - 1$ e $n \geq 1$. Realizando a substituição das derivadas de segunda ordem por meio das aproximações por diferenças centradas (6.14) e (6.15) na equação do calor (6.21a):

$$a^2 \left(\frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) = \frac{U_k^{n+1} - 2U_k^n + U_k^{n-1}}{(\Delta t)^2},$$

isolando U_k^{n+1} , obtém-se:

$$U_k^{n+1} = 2U_k^n - U_k^{n-1} + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n).$$

Denomina-se de *número de Courant* (LEVEQUE, 2007):

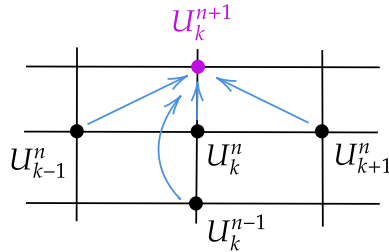
$$C = \frac{a\Delta t}{\Delta x}.$$

Assim, tem-se:

$$\boxed{U_k^{n+1} = 2U_k^n - U_k^{n-1} + C^2(U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n)}. \quad (6.22)$$

A fórmula (6.22) permite determinar U_k^{n+1} a partir dos valores anteriores U_k^n , $U_{k\pm 1}^n$ e U_k^{n-1} . A Figura 29 ilustra essa dependência.

Figura 29 – O stencil para a equação da onda.



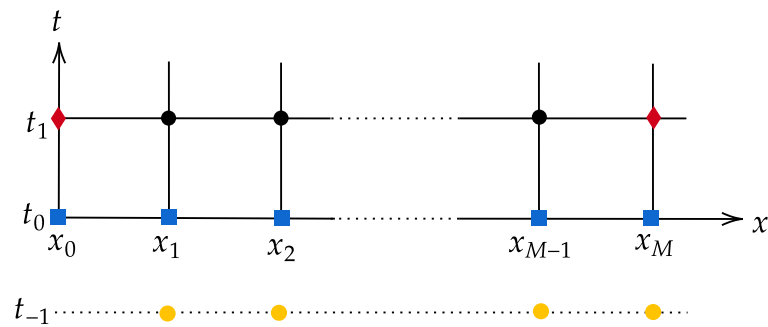
Fonte: Elaborado pela autora

Substituindo $n = 0$ em (6.22) afim de determinar U_k^1 , obtém-se:

$$U_k^1 = 2U_k^0 - U_k^{-1} + C^2(U_{k+1}^0 - 2U_k^0 + U_{k-1}^0). \quad (6.23)$$

Note, que surgem os termos U_k^{-1} que estão fora do domínio da função. A Figura 30 mostra os pontos que estão fora do domínio que serão necessários para determinar a aproximação da função em U_k^1 .

Figura 30 – Pontos necessários que não pertencem ao domínio.



Fonte: Elaborado pela autora

Para estimar esses pontos, será utilizada a condição (4.4d) que determina a velocidade inicial da corda. Substituindo a derivada u_t no ponto (x_k, t_0) por sua aproximação por diferença centrada (6.12) na condição inicial (4.4d), obtém-se:

$$\frac{U_k^1 - U_k^{-1}}{2\Delta t} = g(k\Delta x),$$

isolando U_k^{-1} , tem-se:

$$U_k^{-1} = U_k^1 - 2\Delta t \cdot g(k\Delta x).$$

Substituindo em (6.23):

$$U_k^1 = 2U_k^0 - U_k^1 + 2\Delta t \cdot g(k\Delta x) + C^2(U_{k+1}^0 - 2U_k^0 + U_{k-1}^0),$$

logo, para obter U_k^1 , utiliza-se a expressão:

$$U_k^1 = U_k^0 + \Delta t \cdot g(k\Delta x) + \frac{C^2}{2}(U_{k+1}^0 - 2U_k^0 + U_{k-1}^0). \quad (6.24)$$

Dessa forma, o algoritmo de resolução da equação começa definindo U_k^0 , U_0^n e U_M^n . Em seguida, esses valores são utilizados para calcular U_k^1 e, então, aplica-se a expressão (6.22) para obter as aproximações nos nós internos restantes, ou seja, para U_k^n com $1 \leq k \leq M$ e $n \geq 2$.

O critério de estabilidade é $|C| \leq 1$ (LI; NORRIS, 2021), ou seja,

$$\left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

6.6 Equação de Laplace

Nesta seção será aplicado o método de diferenças finitas para a equação de Laplace (6.25a) no retângulo $[0, a] \times [0, b]$, sob as condições de contorno (6.25b), (6.25c), (6.25d) e (6.25e).

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (6.25a)$$

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad 0 < x < a, \quad (6.25b)$$

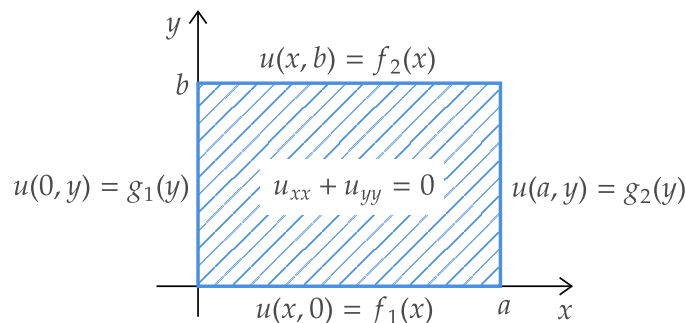
$$u(x, b) = f_2(x), \quad 0 < x < a \quad (6.25c)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad 0 < y < b, \quad (6.25d)$$

$$u(a, y) = g_2(y), \quad 0 < y < b, \quad (6.25e)$$

onde $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$ e $g_2(y)$ são funções conhecidas. A Figura 31 ilustra o problema, na fronteira são dadas as condições de contorno.

Figura 31 – Condições de contorno em $[0, a] \times [0, b]$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Considere a discretização da região $[0, a] \times [0, b]$, com espaçamento $h > 0$ em ambas as direções. Além disso, sejam

$$M = \frac{a}{h} \quad \text{e} \quad N = \frac{b}{h}. \quad (6.26)$$

Assim, tem-se a discretização dada pelos pontos (x_i, y_j) , com x_i e y_j dados por:

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M,$$

$$y_j = jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Pelas condições de contorno, têm-se:

$$U_i^0 = f_1(ih), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1,$$

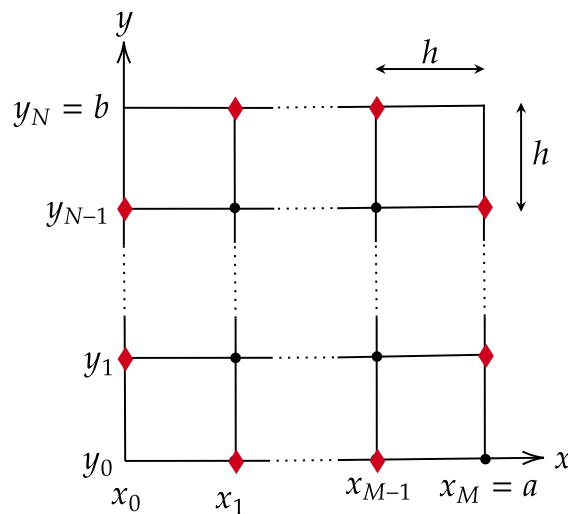
$$U_i^N = f_2(ih), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1,$$

$$U_0^j = g_1(jh), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$U_M^j = g_2(jh), \quad j = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Desta forma, os valores da fronteira são conhecidos, resta portanto determinar as aproximações U_i^j com $i = 1, 2, \dots, M - 1$ e $j = 1, 2, \dots, N - 1$. A [Figura 32](#), ilustra a discretização e destaca os valores da fronteira determinados pela condição de contorno.

Figura 32 – Discretização do domínio Ω e condição de contorno (♦).



Fonte: Elaborado pela autora

Utilizando a aproximação da segunda derivada por diferença centrada (6.15) em (6.25a), tem-se:

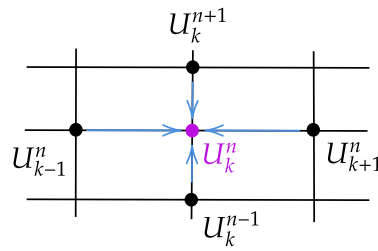
$$\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} + \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{h^2} = 0,$$

isolando U_i^j , obtém-se:

$$\boxed{U_i^j = \frac{1}{4}(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j + U_i^{j+1} + U_i^{j-1})}. \quad (6.27)$$

A fórmula (6.27) permite determinar U_i^j a partir aproximações dos pontos vizinhos: $U_{i\pm 1}^j$ e $U_i^{j\pm 1}$. A [Figura 33](#) mostra essa dependência.

Figura 33 – O stencil para a equação de Laplace.



Fonte: Elaborado pela autora

Desta forma, serão obtidas as aproximações para os nós internos da região Ω a partir do sistema linear obtido pela equação (6.27) em cada nó interno. Assim, o sistema terá $(M - 1)(N - 1)$ equações e $(M - 1)(N - 1)$ incógnitas.

Estrutura do Sistema de Equações

Afim de organizar e compreender melhor a estrutura gerada do sistema de equações, a equação (6.27) pode ser reescrita como:

$$\boxed{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j - 4U_i^j + U_i^{j+1} + U_i^{j-1} = 0.} \quad (6.28)$$

Note que os pontos (x_i, y_j) no interior da malha podem ser classificados em dois casos (KNABNER; ANGERMANN, 2003):

- i) Longe da Fronteira: os pontos vizinhos estão no interior da malha;
- ii) Perto da Fronteira: pelo menos um ponto vizinho pertence a fronteira.

No último caso, pode-se substituir U_r^s com (x_r, y_s) na fronteira pela respectiva condição de contorno e rearranjando-a para o lado direito da equação.

Exemplo 6.5. Sejam $M = N = 4$, correspondente a uma malha 5×5 . A malha interna corresponderá a uma malha 3×3 , a partir desses pontos serão obtidas as equações, formando um sistema de equações com nove equações e nove incógnitas.

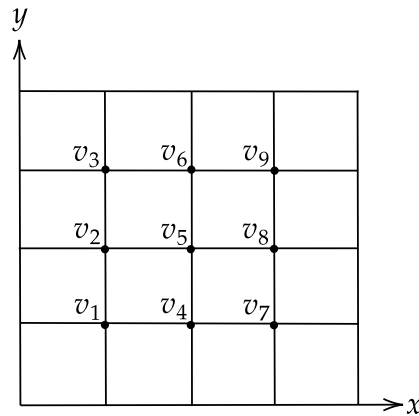
Li e Norris (2021) afirmam que é importante a estrutura matriz-vetor para resolução de um sistema algébrico usando métodos diretos, embora seja menos relevante para os métodos iterativos, como os de Jacobi e Gauss-Seidel. Note que, nesse caso, as incógnitas são U_i^j , com (x_i, y_i) no interior da malha, formando uma matriz 3×3 . Para utilizar a notação vetorial, os elementos dessa matriz podem ser ordenados de duas formas comuns: ordenação natural por linha (*rowwise*) ou por ordenação vermelho-preto (*red-black ordering*).

Na ordem natural por linha, as incógnitas e as equações são ordenadas linha a linha. Seja \vec{v} o vetor que contém os elementos U_i^j organizados conforme a ordem das linhas, ou seja:

$$\begin{aligned} v_1 &= U_1^1, & v_2 &= U_2^1, & v_3 &= U_3^1, \\ v_4 &= U_1^2, & v_5 &= U_2^2, & v_6 &= U_3^2, \\ v_7 &= U_1^3, & v_8 &= U_2^3, & v_9 &= U_3^3. \end{aligned}$$

A [Figura 34](#) apresenta tal disposição.

Figura 34 – Ordenação dos nós internos em linhas (*rowwise*).



Fonte: Elaborado pela autora

Considere as equações (6.28) em ordem e a notação v_k para representar U_i^j , para $k = 1, 2, \dots, 9$. Além disso, utilizando o processo descrito anteriormente de substituir as condições de contorno e reordenando-as para o lado direito da equação, obtém-se:

$$-4v_1 + v_2 + v_4 = -f_1(h) - g_1(h), \quad (1)$$

$$v_1 - 4v_2 + v_3 + v_5 = -f_1(2h), \quad (2)$$

$$v_2 - 4v_3 + v_6 = -f_1(3h) - g_2(h), \quad (3)$$

$$v_1 - 4v_4 + v_5 + v_7 = -g_1(2h) \quad (4)$$

$$v_2 + v_4 - 4v_5 + v_6 + v_8 = 0, \quad (5) \quad (6.29)$$

$$v_3 + v_5 - 4v_6 + v_9 = -g_2(2h), \quad (6)$$

$$v_4 - 4v_7 + v_8 = -f_2(h) - g_1(3h), \quad (7)$$

$$v_5 + v_7 - 4v_8 + v_9 = -f_1(2h), \quad (8)$$

$$v_6 + v_8 - 4v_9 = -f_1(3h) - g_2(3h). \quad (9)$$

O sistema (6.29) pode ser reescrito na sua forma matricial, como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -f_1(h) - g_1(h) \\ -f_1(2h) \\ -f_1(3h) - g_2(h) \\ -g_1(2h) \\ 0 \\ -g_2(2h) \\ -f_2(h) - g_1(3h) \\ -f_1(2h) \\ -f_1(3h) - g_2(3h) \end{bmatrix}}_{\vec{b}}. \quad (6.30)$$

Assim a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} T & I \\ I & T & I \\ & I & T \end{bmatrix},$$

onde $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz identidade e

$$T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Em geral, tomando uma malha $(n + 1) \times (n + 1)$, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} T & I & & & \\ I & T & I & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & I & T & I \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & & \\ & 1 & -4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

O sistema obtido pelo problema pode ser resolvido por métodos diretos ou por métodos indiretos. Porém, segundo [Smith \(1985\)](#), os métodos diretos não são práticos devido ao espaço necessário para armazenamento, nestes casos os métodos iterativos são preferíveis, principalmente em casos de matrizes esparsas. Nos métodos iterativos, a cada iteração obtém-se uma nova aproximação, esse processo é considerado convergente quando a diferença entre a solução exata e as aproximações sucessivas tende a zero conforme o número de iterações aumenta. O intuito é que as aproximações convirjam rapidamente para um valor de precisão especificado.

No [Apêndice A](#) são apresentados três métodos iterativos que podem ser utilizados para solução do sistema: Gauss-Jordan, Gauss-Seidel e Sobre-Relaxação Sucessiva (SOR)

- *Successive Over Relaxation*). A convergência desses métodos pode ser garantida se a matriz A for diagonalmente dominante, ou seja, o valor absoluto da diagonal principal é maior que a soma dos valores absolutos dos elementos restantes da mesma linha. Note que é o caso da matriz dos coeficientes do sistema (6.30), pois os elementos da diagonal principal é -4 , em valor absoluto é maior que a soma dos outros elementos da mesma linha (ZILL; CULLEN, 2001b).

7 Aplicação: Equação do Telégrafo

A invenção do telégrafo marcou uma revolução nos meios de comunicação no século XIX. Antes disso, a comunicação a longa distância era feita por meio de cartas, que, para locais distantes, podiam demorar meses para chegar, especialmente quando transportadas por navios. Assim, o telégrafo representou um avanço significativo, permitindo a transmissão de mensagens em questão de minutos. Apesar de hoje em dia o telégrafo não ser mais usado como meio de comunicação, os estudos e pesquisas realizadas para o seu desenvolvimento e aprimoramento são relevantes até hoje.

A principal barreira para o uso dos telégrafos era a comunicação entre continentes, o que levou ao desenvolvimento de cabos submarinos. O primeiro cabo submarino conectou Dover, na Grã-Bretanha, a Calais, na França, demonstrando a viabilidade dessa tecnologia. Após esse sucesso inicial, foi instalada a primeira linha transatlântica, ligando Grã-Bretanha e os Estados Unidos. No entanto, o cabo transatlântico falhou após apenas um mês de operação.

Após a falha inicial do cabo transatlântico em 1858, um segundo cabo foi instalado em 1866, desta vez com maior cuidado e provou ser um grande sucesso. Em 1885, já havia quase 160 mil quilômetros de cabos submarinos instalados, conectando praticamente todo o mundo. Essa vasta rede era frequentemente chamada de *sistema nervoso* do Império Britânico (HUNT, 1991).

Um dos principais nomes nas pesquisas sobre o desempenho dos cabos submarinos foi Oliver Heaviside (1850-1925). Iniciou sua carreira como telegrafista e, a partir da década de 1870, passou a se concentrar no estudo das ondas eletromagnéticas, com o objetivo de aprimorar a eficiência das linhas telegráficas de longa distância.

Heaviside fez muitas contribuições originais para a teoria da propagação de ondas eletromagnéticas através do seu desejo de desenvolver uma teoria abrangente da linha de transmissão e sua aplicação para problemas telegráficos do século XIX (DONAGHY-SPARGO, 2018, p. 4).

Antes de Heaviside, William Thomson (1824-1907) havia proposto a *lei dos quadrados*. Segundo essa lei, a relação entre o tempo de retardo (ou a velocidade de propagação de um sinal) era proporcional ao quadrado do comprimento do cabo. Em outras palavras, em cabos longos, a propagação do sinal era retardada de forma que o tempo de resposta aumentava com o quadrado do comprimento do cabo.

Heaviside provou que o resultado de Thompson estava incompleto, pois não levava em consideração a autoindução, descoberta por Michael Faraday (1791-1867) na década de 1830. Assim, com desenvolvimento da teoria do eletromagnetismo, baseada nas contribuições de Maxwell, Faraday e Thomson, Heaviside foi capaz de descrever de

forma precisa o comportamento dos circuitos com componentes indutivos e capacitivos, a partir da formulação da Equação do Telégrafo (7.1). Esta equação diferencial descreve a propagação de sinais em cabos de comunicação, levando em conta os efeitos de resistência, indutância e capacitância.

$$u_{xx} = (CL)u_{tt} + (CR + GL)u_t + (GR)u, \quad (7.1)$$

onde $u(x, t)$ é a tensão elétrica em cada instante e L, C, R, G são respectivamente a indutância, capacitância, resistência e condutância total do circuito.

Assim, o problema que envolve a equação do telégrafo é descrita pela equação:

$$u_{xx} = (CL)u_{tt} + (CR + GL)u_t + (GR)u, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

e pelas condições iniciais e de contorno

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (7.2a)$$

$$u_t(x, 0) = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (7.2b)$$

$$u(0, t) = g_0(t), \quad t > 0. \quad (7.2c)$$

$$u(L, t) = g_1(t), \quad t > 0. \quad (7.2d)$$

Além de sua aplicação na transmissão de informações, [Pereira \(2018\)](#) destaca que a equação do telégrafo também tem sido utilizada em estudos sobre liberação, transporte e absorção de fármacos estimulados por ultrassom. A seguir serão apresentadas as soluções analítica e numérica para a equação do telégrafo e simulações.

7.1 Solução Analítica

Considere a equação do telégrafo na forma:

$$c^2 u_{xx} = u_{tt} + au_t + bu, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (7.3)$$

com condições iniciais e de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Supondo que a solução $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, tem-se:

$$c^2 X''T = XT'' + aXT' + bXT,$$

dividindo ambos os lados por $c^2 XT$, obtém-se:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + aT' + bT}{c^2T} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

onde λ é uma constante. Desta forma obtém-se duas EDOs:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (7.5)$$

$$T'' + aT' + T(b + c^2\lambda) = 0. \quad (7.6)$$

As EDOs satisfazem as condições $X(0) = X(L) = T'(0) = 0$, de fato substituindo $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ em (7.4) têm-se:

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \xrightarrow{T(t) \neq 0} X(0) = 0, \quad (7.7a)$$

$$u(L, t) = X(L) \cdot T(t) = 0 \xrightarrow{T(t) \neq 0} X(L) = 0, \quad (7.7b)$$

$$u_t(x, 0) = X(x) \cdot T'(0) = 0 \xrightarrow{X(x) \neq 0} T'(0) = 0. \quad (7.7c)$$

Note que a EDO (7.5), sujeita as condições $X(0) = X(L) = 0$, já foi resolvida anteriormente, as soluções são as autofunções associadas aos autovalores dados por:

$$X_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.8)$$

Já a solução EDO (7.6) irá depender do discriminante da equação característica:

$$r^2 + ar + b + c^2\lambda_n = 0,$$

onde o discriminante é:

$$\Delta = a^2 - 4(b + c^2\lambda_n).$$

Será analisado cada caso isoladamente, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$:

Discriminante positivo ($\Delta > 0$). A equação característica possui duas raízes distintas:

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(b + c^2\lambda_n)}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4(b + c^2\lambda_n)}}{2}.$$

Assim a solução geral de $T_n(t)$ é dada por:

$$T_n(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

Discriminante zero ($\Delta = 0$). A equação característica possui duas raízes iguais:

$$r = r_1 = r_2 = -\frac{a}{2}.$$

Logo, a solução geral de $T_n(t)$ é dada por:

$$T_n(t) = Ae^{rt} + Bte^{rt}.$$

Discriminante negativo ($\Delta < 0$). A equação característica possui duas raízes complexas:

$$r = \frac{-a \pm i\sqrt{4(b + c^2\lambda_n) - a^2}}{2}.$$

Seja α a parte real e β a parte imaginária de r , logo

$$\alpha = -\frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\sqrt{4(b + c^2\lambda_n) - a^2}}{2}.$$

Assim a solução geral de $T_n(t)$ é dada por:

$$T_n(t) = Ae^{\alpha t} \cos \beta t + Be^{\alpha t} \sen \beta t.$$

Os coeficientes A e B são obtidos em cada caso a partir da condição $T'(0) = 0$.

Portanto a solução $u(x, t)$ é dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(t), \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}. \quad (7.9)$$

desde que satisfaça a condição contorno $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) T_n(0) = f(x).$$

Desta forma, os coeficientes c_n devem ser tais que:

$$c_n = \frac{2}{L \cdot T_n(0)} \int_0^L f(x) \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (7.10)$$

Assim, a solução da equação (7.3) sob as condições (7.4) é dada pela série (7.9) com os coeficientes obtidos pela equação (7.10).

7.2 Solução Numérica

Nesta seção, o método de diferenças finitas será implementado, para a resolução numérica da equação do telegrafo, dada por:

$$u_{xx} = \alpha u_{tt} + \beta u_t + \gamma u + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (7.11)$$

onde $\alpha = CL$, $\beta = CR + GL$, $\gamma = GR$ e a função f representa uma fonte externa. Com condições iniciais e de contorno (7.2).

Seja a discretização do domínio com espaçamento Δx e Δt . Além disso, seja T o tempo máximo. Assim as coordenadas da malha serão dadas por

$$x_k = k\Delta x, \quad k = 0, 1, \dots, M.$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

em que M e N são obtidos por

$$M = \frac{L}{\Delta x} \quad \text{e} \quad N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Assim, pelas condições inicial (7.2a) e pelas condições de contorno (7.2c) e (7.2d), têm-se:

$$U_k^0 = f_0(x_k) = f(k\Delta x), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

$$U_0^n = g_0(t_n) = g_0(n\Delta t), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

$$U_M^n = g_1(t_n) = g_1(n\Delta t), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Desta forma, o problema consiste em determinar as aproximações para a função nos nós internos, ou seja, para U_k^n com $1 \leq k \leq M - 1$ e $1 \leq n \leq N - 1$. Substituindo as aproximações (6.8) e (6.15) na equação do telegrafo (7):

$$\frac{U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n}{(\Delta x)^2} = \alpha \left[\frac{U_k^{n+1} - 2U_k^n + U_k^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right] + \beta \left[\frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{\Delta t} \right] + \gamma U_k^n + f(k\Delta x, n\Delta t),$$

isolando U_k^{n+1} , obtém-se:

$$U_k^{n+1} \left[\frac{\alpha}{(\Delta t)^2} + \frac{\beta}{\Delta t} \right] = \frac{U_{k+1}^n + U_{k-1}^n}{(\Delta x)^2} + U_k^n \left[\frac{2\alpha}{(\Delta t)^2} + \frac{\beta}{\Delta t} - \gamma - \frac{2}{(\Delta x)^2} \right] - \frac{\alpha}{(\Delta t)^2} U_k^{n-1} - f(k\Delta x, n\Delta t).$$

Definindo:

$$a = \frac{\alpha}{(\Delta t)^2} + \frac{\beta}{\Delta t}, \quad b = \frac{1}{(\Delta x)^2}, \quad c = \frac{2\alpha}{(\Delta t)^2} + \frac{\beta}{\Delta t} - \gamma - \frac{2}{(\Delta x)^2}, \quad d = \frac{\alpha}{(\Delta t)^2},$$

obtém-se:

$$a \cdot U_k^{n+1} = b \cdot (U_{k+1}^n + U_{k-1}^n) + c \cdot U_k^n - d \cdot U_k^{n-1} - f(k\Delta x, n\Delta t),$$

logo

$$\boxed{U_k^{n+1} = \frac{1}{a} \left[b \cdot (U_{k+1}^n + U_{k-1}^n) + c \cdot U_k^n - d \cdot U_k^{n-1} - f(k\Delta x, n\Delta t) \right]}. \quad (7.12)$$

Tomando $n = 0$ em (7.12), tem-se:

$$U_k^1 = \frac{1}{a} \left[b \cdot (U_{k+1}^0 + U_{k-1}^0) + c \cdot U_k^0 - d \cdot U_k^{-1} - f(k\Delta x, 0) \right]. \quad (7.13)$$

Note que surge o termo U_k^{-1} que não faz parte do domínio do problema. Portanto, utiliza-se a condição inicial (7.2b), como feito para o método das diferenças finitas para a

equação da onda. Substituindo a derivada u_t no ponto (x_k, t_0) por sua aproximação por diferença centrada (6.12) na condição inicial (7.2b), obtém-se:

$$\frac{U_k^1 - U_k^{-1}}{2\Delta t} = f_1(k\Delta x),$$

isolando U_k^{-1} , tem-se:

$$U_k^{-1} = U_k^1 - 2\Delta t \cdot f_1(k\Delta x).$$

Substituindo em (7.13):

$$U_k^1 = \frac{1}{a} \left[b \cdot (U_{k+1}^0 + U_{k-1}^0) + c \cdot U_k^0 - d \cdot (U_k^1 - 2\Delta t \cdot f_1(k\Delta x)) - f(k\Delta x, 0) \right],$$

logo, para obter U_k^1 , utiliza-se a expressão:

$$\boxed{U_k^1 = \frac{1}{a+d} \left[b \cdot (U_{k+1}^0 + U_{k-1}^0) + c \cdot U_k^0 + 2d\Delta t \cdot f_1(k\Delta x) - f(k\Delta x, 0) \right]} \quad (7.14)$$

Dessa forma, o algoritmo de resolução da equação começa definindo U_k^0 , U_0^n e U_M^n . Em seguida, esses valores são utilizados para calcular U_k^1 e, então, aplica-se a expressão (7.12) para obter as aproximações nos nós internos restantes, ou seja, para U_k^n com $1 \leq k \leq M$ e $n \geq 2$.

7.3 Simulações Numéricas

Nesta seção, serão apresentadas simulações numéricas para a solução da equação do telegráfo, utilizando os exemplos retirados do artigo de Saadatmandi e Dehghan (2010). Considere o problema dado pela equação do telégrafo (7.11) com condições (7.2)

Exemplo 7.1. Seja o problema:

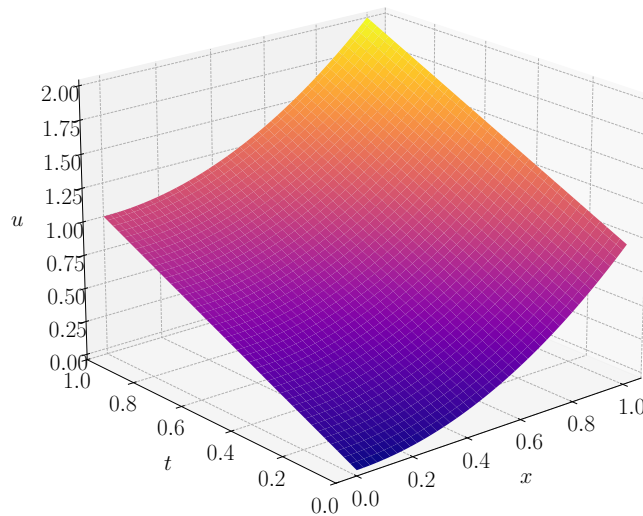
$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt} + u_t + u - x^2 - t + 1, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) &= 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= t, & 0 < t, \\ u(1, t) &= t + 1, & 0 < t. \end{aligned}$$

Assim os dados do problema são $L = \alpha = \beta = \gamma = 1$ e

$$f_0(x) = x^2, \quad f_1(x) = 1, \quad f(x, t) = -x^2 - t + 1, \quad g_0(t) = t, \quad g_1(t) = t + 1.$$

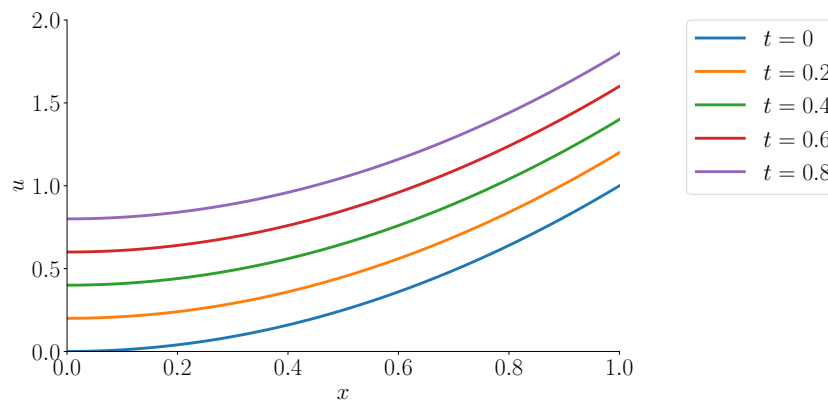
A solução exata do problema é a função $u(x, t) = x^2 + t$. A Figura 35 ilustra a solução analítica do problema no intervalo $0 < x, t < 1$.

Figura 35 – Gráfico da solução exata - Exemplo 7.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

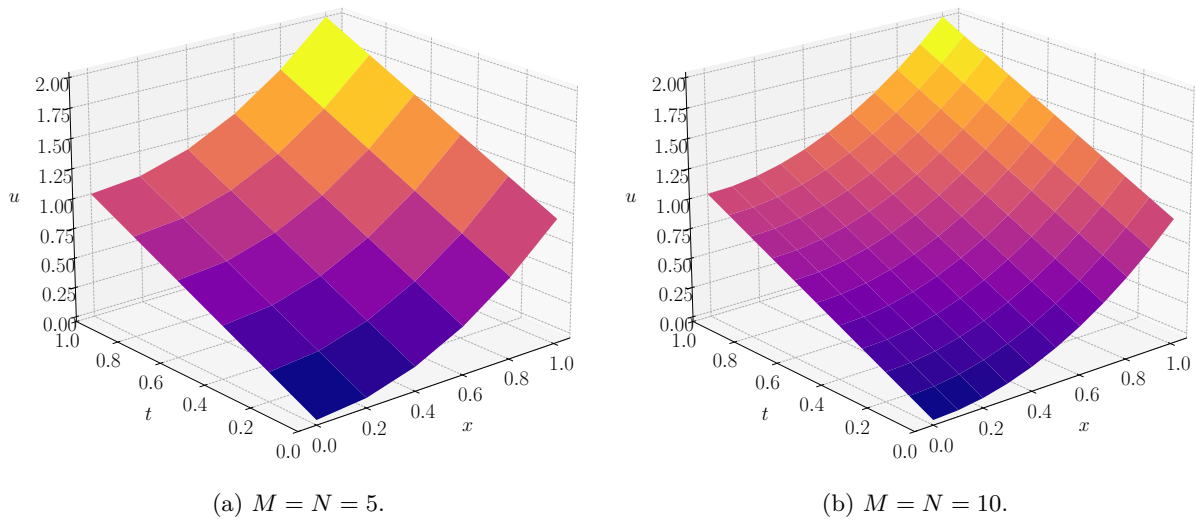
Note que na [Figura 36](#), pode-se observar que para cada instante o gráfico é uma parábola com concavidade para cima, conforme o tempo aumenta a parábola se desloca verticalmente para cima.

Figura 36 – Gráfico de u em diferentes instantes - Exemplo 7.1.

Fonte: Elaborado pela autora.

A partir do método das diferenças finitas, foram obtidas as aproximações, considerando $T = 1$, o tempo máximo. As soluções são apresentadas na [Figura 37](#).

Figura 37 – Soluções numéricas - Exemplo 7.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

Em ambos os casos não foi possível avaliar o erro por ser pequeno, sendo limitado pela precisão de ponto flutuante no *Python* de 16 algarismos significativos.

Exemplo 7.2. Seja o problema:

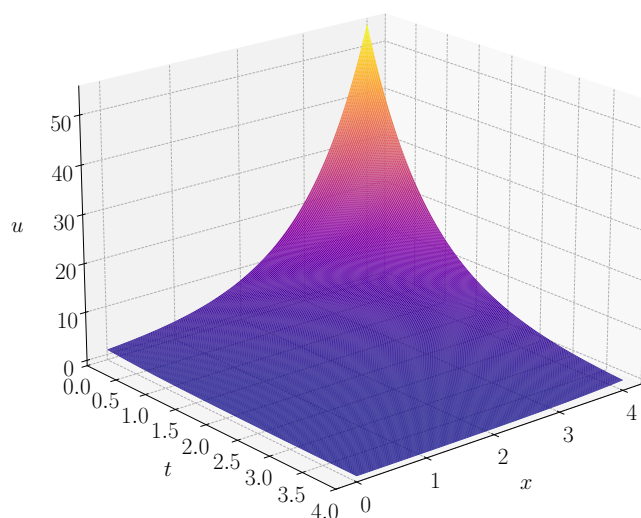
$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= u_{tt} + u_t + u, & 0 < x < 4, & \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= \exp(x), & 0 \leq x \leq 4 \\
 u_t(x, 0) &= -\exp(x), & 0 \leq x \leq 4 \\
 u(0, t) &= \exp(-t), & 0 < t, \\
 u(4, t) &= \exp(4 - t), & 0 < t.
 \end{aligned}$$

Assim os dados do problema são $L = 4$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$ e

$$f_1(x) = \exp(x), \quad f_2(x) = -\exp(x), \quad f(x, t) = 0, \quad g_1(t) = \exp(-t), \quad g_2(t) = \exp(4-t).$$

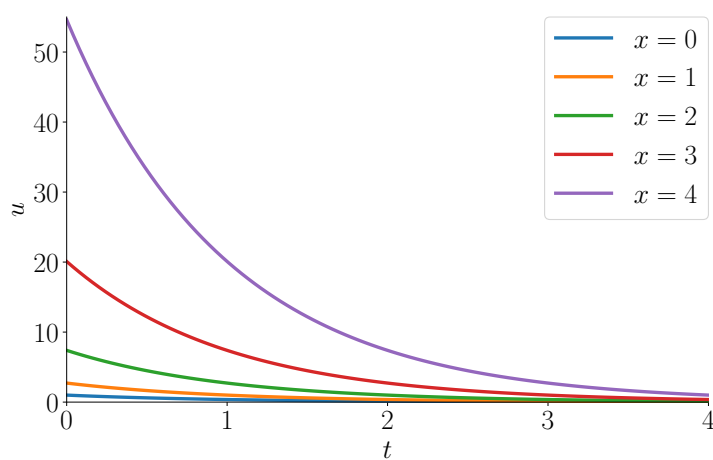
A solução exata do problema é a função $u(x, t) = \exp(x - t)$. A [Figura 38](#) mostra a solução analítica no intervalo $0 < x, t < 4$.

Figura 38 – Gráfico da solução exata - Exemplo 7.2.



Fonte: Elaborado pela autora.

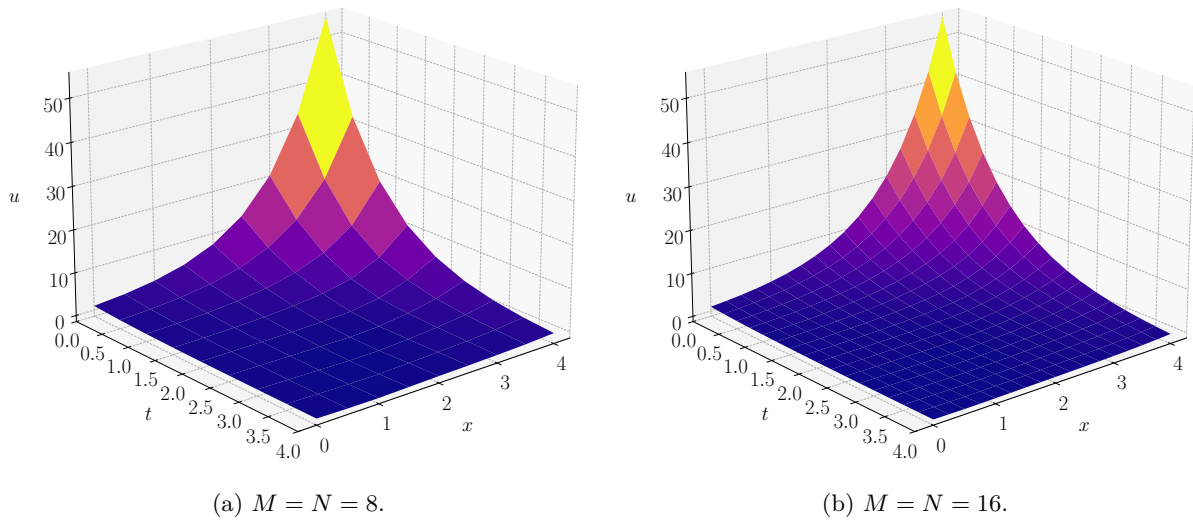
A [Figura 39](#) exibe o gráfico da função para cada abscissa x , permitindo verificar que ao longo do tempo a função u decai exponencialmente.

Figura 39 – Gráfico de u ao longo do tempo - Exemplo 7.2.

Fonte: Elaborado pela autora.

A partir do método das diferenças finitas, foram obtidas as aproximações, considerando $T = 4$, o tempo máximo. As soluções são apresentadas na [Figura 40](#).

Figura 40 – Soluções numéricas - Exemplo 7.2.



Fonte: Elaborado pela autora.

O erro absoluto máximo, com cinco casas decimais, foi de 1,06629 em (a) e 0,67142 em (b).

Exemplo 7.3. Seja o problema:

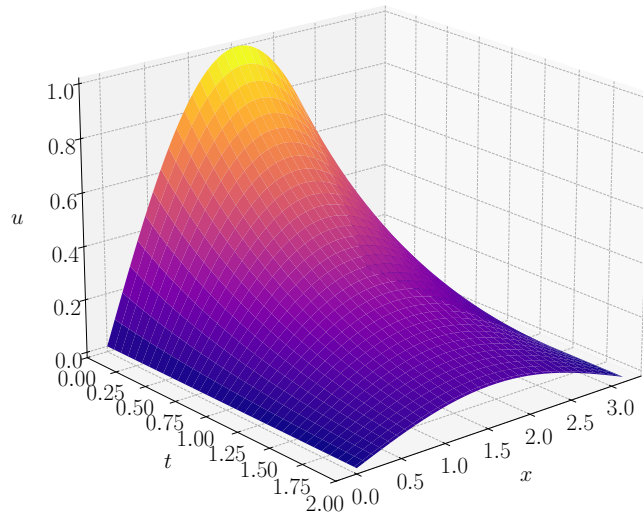
$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= u_{tt} + 4u_t + 2u, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= \text{sen } x & 0 \leq x \leq \pi, \\
 u_t(x, 0) &= -\text{sen } x, & 0 \leq x \leq \pi, \\
 u(0, t) &= 0, & 0 < t, \\
 u(\pi, t) &= 0, & 0 < t.
 \end{aligned}$$

Assim os dados do problema são $L = \pi$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$ e

$$f_1(x) = \text{sen } x, \quad f_2(x) = -\text{sen } x, \quad f(x, t) = 0, \quad g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = 0.$$

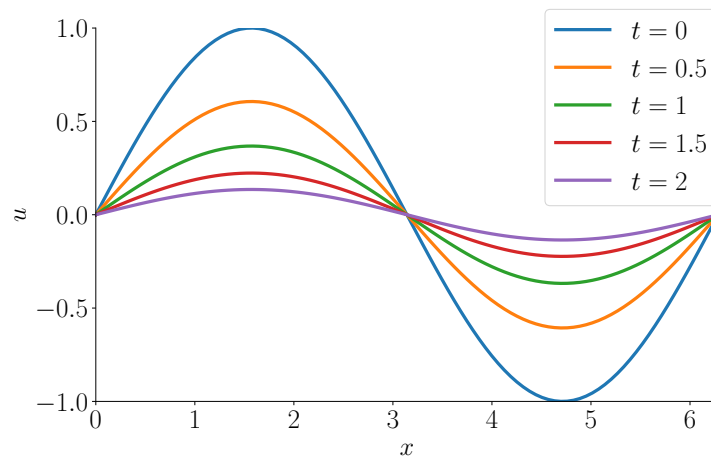
A solução exata é dada pela função $u(x, t) = \exp(-t) \text{sen } x$. A Figura 41 expõe a solução analítica do problema no intervalo $0 < x < \pi$.

Figura 41 – Gráfico da solução exata - Exemplo 7.3.



Fonte: Elaborado pela autora.

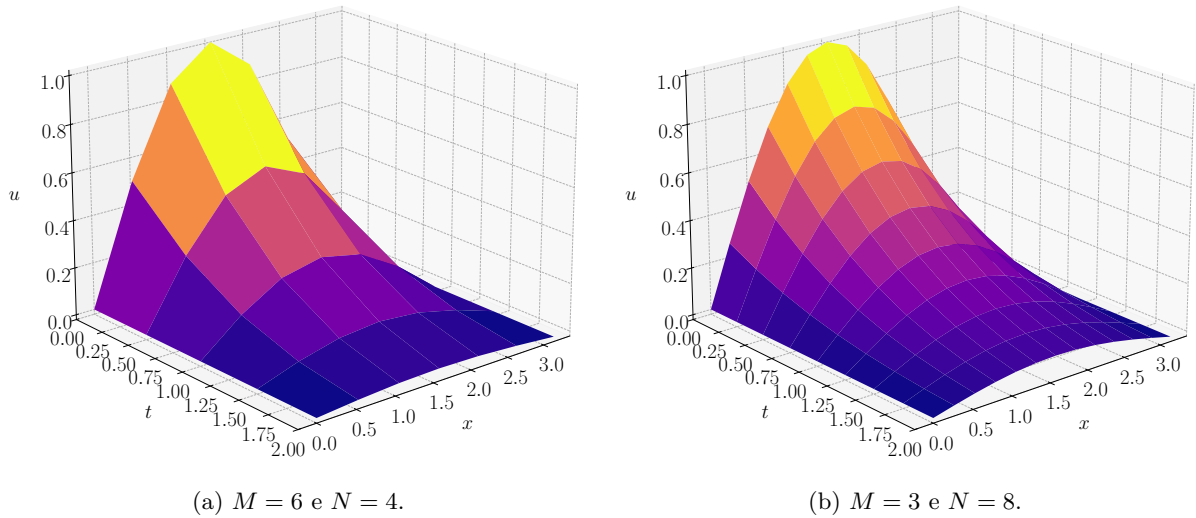
A Figura 42 mostra que a função possui comportamento ondulatório de período 2π . Além disso, conforme o tempo aumenta o fator e^{-t} tende a zero então pelo teorema do confronto u tende a zero, dado que o outro fator $\sin(x)$ é limitado.

Figura 42 – Gráfico de u em diferentes instantes - Exemplo 7.3.

Fonte: Elaborado pela autora.

A partir do método das diferenças finitas, foram obtidas as aproximações, considerando $T = 2$, o tempo máximo. As soluções são apresentadas na Figura 43.

Figura 43 – Soluções numéricas - Exemplo 7.3.



Fonte: Elaborado pela autora.

O erro absoluto máximo, com cinco casas decimais, foi de 1,0872 em (a) e 0.05480 em (b).

Exemplo 7.4. Seja o problema:

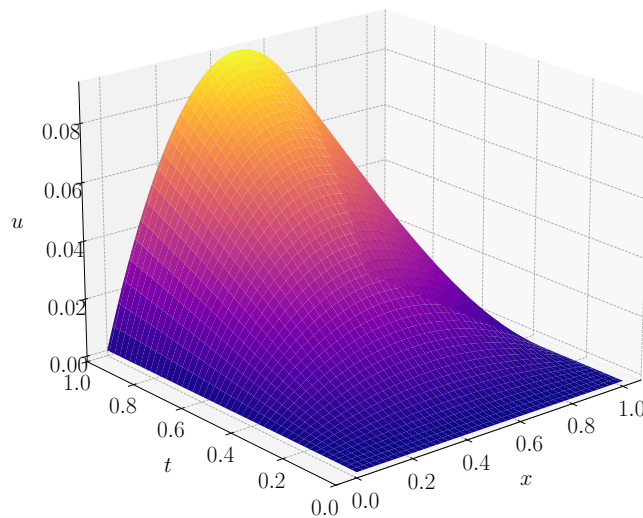
$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= u_{tt} + u_t + u, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\
 u(0, t) &= u(1, t) = 0, & 0 < t.
 \end{aligned}$$

Neste caso, os dados do problema são $L = \alpha = \beta = \gamma = 1$ e

$$f_1(x) = f_2(x) = 0, \quad g_1(t) = g_2(t) = 0, \quad f(x, t) = (2t - 2 - t^2) \cdot (x - x^2) \exp(-t) - 2t^2 \exp(-t).$$

A solução exata é a função $u(x, t) = t^2(x - x^2) \exp(-t)$. A Figura 44 ilustra a solução analítica do problema no intervalo $0 < x, t < 1$.

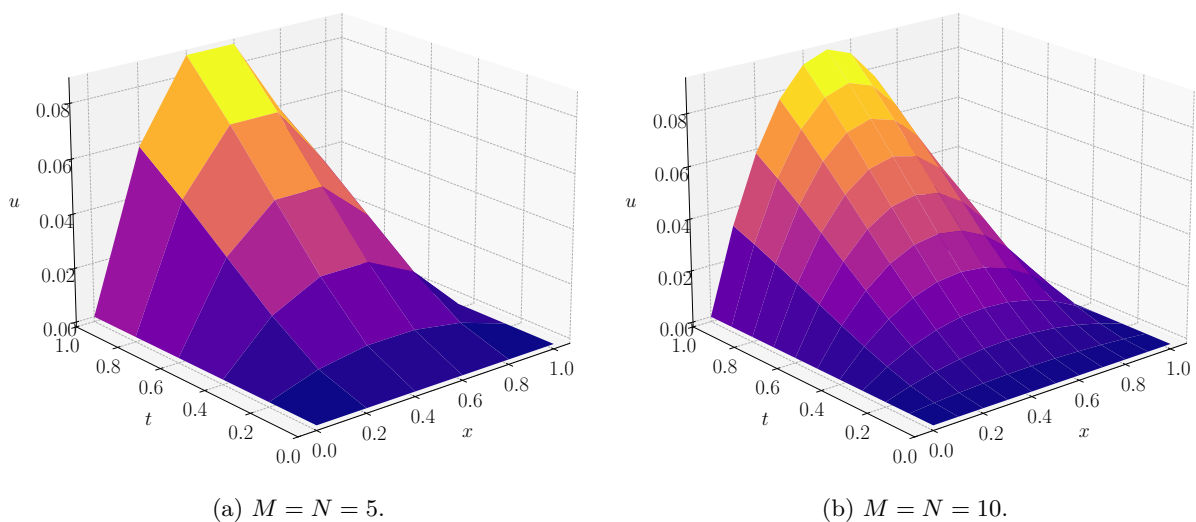
Figura 44 – Gráfico da solução exata - Exemplo 7.4.



Fonte: Elaborado pela autora.

A partir do método das diferenças finitas, foram obtidas as aproximações, considerando $T = 1$, o tempo máximo. As soluções são apresentadas na Figura 45.

Figura 45 – Soluções numéricas - Exemplo 7.4.



Fonte: Elaborado pela autora.

O erro absoluto máximo, com cinco casas decimais, foi de 0,00106 em (a) e 0,00086 em (b).

Testando outros valores, verificou-se que o método não é incondicionalmente estável, ou seja, existem valores de Δx e Δt que o método apresenta instabilidade. Garantir a estabilidade do método é fundamental para determinar as soluções, para isso, pode-se estudar a condição de estabilidade do esquema apresentado na seção anterior. Neste estudo, esses critérios não serão abordados devido à sua complexidade e por não estarem no escopo do objetivo principal, além das limitações de tempo para uma análise detalhada.

8 Ensino: Sequência Didática

Este capítulo foi destinado para a proposta de uma sequência didática introdutória sobre equações diferenciais parciais. Por ser um tópico extremamente abrangente na matemática, este plano não busca se aprofundar, sendo o objetivo principal de introduzir o assunto a partir dos exemplos clássicos de EDPs e discutir suas classificações. Essa sequência didática foi pensada para um curso de duração de 30h de introdução a EDPs e métodos analíticos e numéricos para resolução.

São pré-requisitos para o curso:

- Cálculo de funções de uma variável e de várias variáveis;
- Equações diferenciais ordinárias;
- Sequências e séries;
- Programação e algoritmos.

8.1 Objetivos

O objetivo principal é introduzir o tema das equações diferenciais parciais, explorando as EDPs clássicas: equação do calor, equação da onda e equação de Laplace. Utilizando linguagem de programação *Python* como auxílio para a resolução numérica e visualização gráfica das soluções.

Enquanto os objetivos específicos são:

- Classificar as EDPs em relação à ordem, linearidade e homogeneidade;
- Classificar como parabólicas, hiperbólicas ou elípticas;
- Identificar as clássicas em contextos físicos;
- Resolver analiticamente pelo método de separação de variáveis;
- Representar soluções em termos de séries de Fourier;
- Resolver numericamente pelo método das diferenças finitas.

8.2 Metodologias

Esta sequência didática utilizará como metodologia aulas expositivas e a realização de um projeto, com o objetivo de unir o aprendizado teórico e prático. O projeto permitirá que os alunos apliquem os conhecimentos teóricos em diversas situações, promovendo uma aprendizagem mais significativa.

8.3 Materiais

Os materiais necessários para o desenvolvimento da proposta são:

- Laboratório de informática para acesso a computadores;
- *Integrated Development Environment* (IDE) para a escrita e compilação do código. Sugestões de IDE's: *Visual Studio Code*, *PyCharm* e *Jupyter Notebook*;
- Linguagem de programação *Python*, versão 3.12;
- Pacotes sugeridos: *NumPy* e *Matplotlib*.

Referências sugeridas para o curso:

- Capítulo 10: [Boyce, Diprima e Meade \(2020\)](#);
- Livro: [Figueiredo \(2009\)](#);
- Capítulos 1 a 5: [Olver \(2014\)](#);
- Documentação *Python*: Python Software Foundation ([2021](#));

8.4 Introdução

Os computadores, atualmente, são ferramentas essenciais em diversas áreas da vida cotidiana, estando presentes em quase tudo, de forma direta ou indireta. Isso ocorre devido ao seu poder de processamento, que permite realizar uma variedade de tarefas de maneira rápida e eficiente.

Na matemática, os computadores desempenham um papel fundamental na resolução de problemas, principalmente aqueles que podem ser resolvidos por métodos iterativos. No entanto, para que isso seja possível, é necessário fornecer à máquina um algoritmo de resolução que representa a teoria desenvolvida pelos matemáticos. A partir desse algoritmo, a máquina realiza o procedimento mecânico para obter uma boa aproximação.

Assim, a habilidade de programação torna-se fundamental, por permitir ao aluno designar o computador a resolver problemas de grande porte ou alta complexidade. Por esse motivo, os cursos de ciências exatas têm incluído cada vez mais disciplinas relacionadas à programação. Diferentemente dessas disciplinas específicas, esta sequência didática propõe uma abordagem unificada, apresentando conceitos matemáticos junto à aplicação computacional. O objetivo é desenvolver tanto o conhecimento matemático quanto as habilidades de programação simultaneamente.

Esta abordagem pode ser tomada em diversas disciplinas da grade curricular dos cursos de ciências exatas, mas principalmente na disciplina de Cálculo Numérico, no qual o objetivo principal não é verificar a habilidade do aluno em executar cálculos repetitivos, mas sim em compreender e desenvolver a fundamentação teórica. Embora a resolução

manual seja frequentemente necessária durante o curso, problemas reais, aqueles que envolvem grande volume de dados ou alta complexidade, exigem soluções computacionais.

Portanto, esta sequência didática busca integrar a área da matemática e da programação, promovendo uma formação mais completa e alinhada às demandas do mundo moderno. A resolução computacional não substitui a manual em todos os casos, mas é indispensável para enfrentar os desafios mais avançados e preparar os alunos para aplicarem seus conhecimentos em contextos reais.

O tópico escolhido para essa integração são as EDPs, uma vez que essa área permite a aplicação de métodos numéricos que podem ser implementados de forma acessível por meio de programação, contribuindo para a compreensão e a exploração prática dos conceitos envolvidos.

8.5 Desenvolvimento

A seguir, é apresentado um resumo dos conteúdos que serão abordados em cada aula, bem como as metodologias propostas e as situações-problema a serem exploradas. Para o desenvolvimento dessa sequência didática sugere-se a disponibilidade de 15 aulas, considerando 2 horas a duração da hora-aula.

Aula 1 e 2: Conceitos Iniciais

- Apresentação das EDPs e suas aplicações;
- Classificação quanto à ordem, linearidade e homogeneidade;
- Classificação como parabólicas, hiperbólicas ou elípticas;
- Representação de funções como uma soma de termos de uma série de Fourier;
- Revisão das fórmulas para o cálculo dos coeficientes de Fourier.

Aula 3 e 4: Equação do Calor

- Introduzir o conceito de autovalor e autofunção;
- Apresentar a equação do calor para o problema de condução de calor em uma barra com condições de contorno homogêneas e não homogêneas e em uma barra com extremidades isoladas;
- Utilizar o método de separação de variáveis para resolver analiticamente os problemas;
- Mostrar a aplicação da série de Fourier para determinar os coeficientes da solução, com base na condição inicial e no princípio da superposição;
- Em todas as situações apresentar os gráficos de distribuição da temperatura ao longo da barra e do tempo;

- Exibir cortes horizontais e verticais no gráfico, afim de facilitar sua visualização e análise.

Aula 5: Equação da Onda

- Apresentar a equação da onda para o problema de propagação da onda em uma corda elástica com velocidade inicial nula e não nula;
- Resolver analiticamente os dois problemas de forma similar ao problema de condução do calor;
- Nos dois casos apresentar os gráficos de do deslocamento da corda ao longo do tempo;
- Exibir cortes horizontais e verticais no gráfico, afim de facilitar sua visualização e análise.

Aula 6: Equação de Laplace

- Apresentar a equação de Laplace para o problema de Dirichlet em um retângulo;
- Resolver de forma similar as equações anteriores;
- Exibir o gráfico tridimensional da solução obtida;
- Exibir as curvas de nível provenientes do gráfico tridimensional.

Aula 7: Avaliação I

Aplicar uma prova sobre as classificações das EDPs e das soluções analíticas das EDPs clássicas.

Aula 8: Introdução a discretização do domínio em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2

- Apresentar a discretização do domínio em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 ;
- Obter as expressões das aproximações para as derivadas de uma função em um ponto, utilizando as diferenças atrasada, centrada e avançada;
- Determinação da ordem de erro das aproximações a partir da série de Taylor.

Aula 9: Método das diferenças finitas para a equação do calor

- Utilizar o método de diferenças finitas para obter a expressão explícita para solução da equação do calor;
- Apresentar o critério de estabilidade e analisar a instabilidade por meio de gráficos comparativos.

Aula 10: Método das diferenças finitas para a equação da onda

- Utilizar o método de diferenças finitas para obter a expressão explícita para solução da equação da onda;
- Mostrar para isso é necessário obter aproximações para pontos fora do domínio;
- Determinar as aproximações para os pontos fora do domínio a partir da diferença centrada e da condição inicial;
- Apresentar o critério de estabilidade e analisar a instabilidade por meio de gráficos comparativos.

Aula 11: Método das diferenças finitas para a equação de Laplace

- Utilizar o método de diferenças finitas para obter a expressão implícita para solução da equação da onda;
- Identificar o padrão presente na estrutura do sistema linear obtido pelo método implícito;
- Apresentar os métodos iterativos Gauss-Jordan, Gauss-Seidel e SOR para solução do sistema.

Aula 12: Avaliação II

Aplicar uma prova sobre método de diferenças finitas para solução das EDPs clássicas.

Aula 13: Equação do Telégrafo

- Aplicação do método de diferenças finitas para obter a expressão explícita para solução da equação do telégrafo;
- Mostrar para isso é necessário obter aproximações para pontos fora do domínio;
- Determinar as aproximações para os pontos fora do domínio a partir da diferença centrada e da condição inicial;
- Realizar simulações.

Aula 14 e 15: Apresentação Projeto

Nas duas últimas aulas, os alunos apresentarão seus projetos. Para isso o professor terá previamente separado a classe em grupos de 4 à 5 estudantes. O projeto consistirá na elaboração de um código na linguagem *Python*, aplicando o método das diferenças finitas a uma das três equações estudadas. Caso necessário, o professor poderá atribuir a mesma equação a mais de um grupo.

Os critérios de avaliação do projeto serão:

- Código condizente com as expressões matemáticas;
- Verificação do critério de estabilidade se houver;
- Apresentação do gráfico da solução;
- Realização de três simulações.

8.6 Conclusão

A sequência didática proposta busca unir conceitos matemáticos e a programação, favorecendo um aprendizado interdisciplinar. Por meio dessa sequência, espera-se que os estudantes desenvolvam tanto as bases teóricas sobre EDPs e seus métodos de resolução quanto à implementação computacional desses métodos. Essa abordagem permite não apenas a consolidação do aprendizado, mas também o desenvolvimento de habilidades de programação.

Assim, os alunos deverão conseguir compreender os critérios de estabilidade, aplicar métodos numéricos em diferentes contextos, avaliando suas potencialidades em situações reais. Além disso, espera-se que os estudantes ampliem sua capacidade de trabalhar em equipe, organizando-se para apresentar soluções computacionais claras e bem estruturadas. Essa experiência visa contribuir na preparação profissional e acadêmica.

9 Considerações Finais

Neste trabalho, foram obtidas as soluções analíticas das EDPs clássicas e da equação do telégrafo pelo método de separação de variáveis. A ideia principal desse método consiste na decomposição da função solução, permitindo transformar o problema inicial, geralmente mais complexo, em EDOs. Para isso, as séries de Fourier tiveram papel fundamental para a determinação dos coeficientes da solução, evidenciando sua relevância para a obtenção de soluções de EDPs.

Além disso, foram obtidas soluções numéricas para as equações, utilizando o método das diferenças finitas. O método consiste em discretizar o domínio e aproximar as derivadas a partir dos valores da função em pontos vizinhos, baseado no conceito do coeficiente angular da reta secante. Por meio dessa abordagem, o problema contínuo é transformado em um sistema de equações lineares, cuja solução permite calcular os valores aproximados da função em uma malha. Esse método mostrou-se eficaz para resolver problemas difíceis de resolver analiticamente, proporcionando resultados precisos e podendo ser melhorado a partir do refinamento da malha.

Uma das grandes vantagens do método das diferenças finitas é sua capacidade de transformar problemas grandes e complexos em diversos problemas menores, de resolução sistemática. Contudo, o aumento da complexidade numérica com o refinamento da malha demanda o uso de computadores para garantir eficiência e precisão nos cálculos. Portanto, foi realizada uma implementação computacional em *Python*, para simular o método numérico e ilustrar os conceitos abordados. Além disso, o código desenvolvido pode auxiliar estudantes e pesquisadores interessados em aplicar métodos numéricos em equações diferenciais.

As equações estudadas neste trabalho foram: do calor, da onda, de Laplace e do Telégrafo. Em cada uma foram apresentadas as soluções analíticas e numéricas. Entretanto, o caso escolhido para realizar as simulações foi a equação do Telégrafo por ser, dentre as equações, a que mais encontra dificuldade de obter referências com simulações numéricas com o método de diferenças finitas. A partir dos resultados obtidos, notou-se que o método foi eficiente, assim como foi para as outras equações.

Por fim, além dos desenvolvimentos teóricos e computacionais, foi proposto um capítulo voltado ao ensino de EDPs, com uma sequência didática destinada a docentes. Essa proposta busca organizar de forma prática a apresentação dos conceitos, integrando aspectos teóricos e computacionais. Dessa forma, espera-se que este trabalho contribua tanto para o ensino quanto para a prática de resolução de EDPs, proporcionando um material introdutório para estudantes e docentes do ensino superior.

Referências

- ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra linear com Aplicações*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- ASMAR, N. H. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. 2. ed. New Jersey: Pearson, 2004.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA; MEADE, D. B. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical Methods for Engineers*. 7. ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015.
- CUNHA, M. C. C. *Métodos Numéricos*. 2. ed. São Paulo: UNICAMP, 2003.
- DONAGHY-SPARGO, C. On heaviside's contributions to transmission line theory: waves, diffusion and energy flux. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 376, n. 2134, p. 20170457, 2018. Acesso em: 11 nov. 2024. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.2017.0457>>.
- FARLOW, S. J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Mineola, New York: Dover Publications, 1993.
- FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Projeto Euclides).
- FORTUNA, A. de O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos básicos e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- HUNT, B. J. *The Maxwellians*. New York: Cornell University Press, 1991. (Cornell History of Science Series).
- IÓRIO, V. *EDP, um curso de graduação*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- KNABNER, P.; ANGERMANN, L. *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 2003. v. 44. (Texts in Applied Mathematics, v. 44).
- LEVEQUE, R. J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2007.
- LI, C.; CAO, J. A finite difference method for time-fractional telegraph equation. In: *Proceedings of 2012 IEEE/ASME 8th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 314–318.
- LI, Z.; NORRIS, L. *An Introduction to Partial Differential Equations (with Maple)*. Singapore: World Scientific, 2021.

- MOHEBBI, A.; DEHGHAN, M. High order compact solution of the one-space-dimensional linear hyperbolic equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, v. 24, n. 5, p. 1222–1235, 2008. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/num.20313>>.
- MORTON, K. W.; MAYERS, D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2005.
- NARASIMHAN, T. N. Fourier's heat conduction equation: History, influence, and connections. *Reviews of Geophysics*, v. 37, n. 1, p. 151–172, 1999. Disponível em: <<https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/1998RG900006>>.
- OLSEN-KETTLE, L. *Numerical solution of partial differential equations*. The University of Queensland, 2011. Disponível em: <<http://espace.library.uq.edu.au/view/UQ:239427>>.
- OLVER, P. J. *Introduction to Partial Differential Equations*. 1. ed. New York: Springer, 2014. (Undergraduate Texts in Mathematics).
- PEREIRA, M. M. D. *Modelos Discretos para a Equação do Telégrafo: Convergência e estabilidade*. Dissertação de Mestrado, Coimbra, 2018.
- PINCHOVER, Y.; RUBINSTEIN, J. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2005.
- PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. *Python Documentation*. 2021. Acesso em: 26 de out. de 2024. Disponível em: <<https://www.python.org/doc/>>.
- RUGGIERO, M. A. G. R.; LOPES, V. L. D. R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2000.
- SAADATMANDI, A.; DEHGHAN, M. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the chebyshev tau method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, v. 26, n. 1, p. 239–252, 2010. Acesso em: 20 dez. 2024. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/num.20442>>.
- SMITH, G. D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite difference methods*. 3. ed. [S.l.]: Clarendon Press, 1985. (Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series).
- STROGATZ, S. *O poder do infinito*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sextante, 2022.
- THOMAS, J. W. *Numerical Partial Differential Equations: Finite difference methods*. 1. ed. New York: Springer, 1995. v. 22. (Texts in Applied Mathematics, v. 22).
- TOLSTOV, G. P. *Fourier Series*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1962. Translated by R. A. Silverman.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2001. v. 1.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2001. v. 2.

APÊNDICE A – Métodos Iterativos

No [Capítulo 6](#), foi apresentado o método das diferenças finitas para as equações: do calor, da onda e de Laplace. Nas equações do calor e da onda, foram obtidas expressões explícitas para calcular as aproximações. Enquanto para a equação de Laplace, foi obtida uma expressão implícita, que requer a resolução de um sistema esparso. Além disso, quanto menor o espaçamento tomado, maior a malha e conseqüentemente maior o sistema, o que torna a solução direta inviável devido o tempo computacional. Para contornar esse problema, métodos iterativos oferecem uma boa alternativa, pois aproveitam a esparsidade do sistema e economizam espaço de armazenamento.

Os métodos iterativos partem de estimativa inicial $x^{(0)}$, a cada iteração a estimativa é atualizada, convergindo para a solução exata x^* . Neste apêndice será apresentado um breve resumo dos métodos iterativos: Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel e SOR(ω). Para mais detalhes o leitor poderá consultar: [Ruggiero e Lopes \(2000\)](#), [Chapra e Canale \(2015\)](#) e [Olsen-Kettle \(2011\)](#).

A.1 Gauss-Jacobi

O método de Gauss-Jacobi consiste em transformar o sistema $Ax = b$ em $x = Cx + g$. Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n. \end{cases}$$

Supondo que $a_{ii} \neq 0$ para todo i , o sistema pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n), \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n), \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}). \end{cases}$$

Em notação matricial tem-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{11} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}}_g$$

O método de Gauss-Jacobi consiste em, a partir de uma estimativa inicial $x^{(0)}$, obter $x^{(k+1)}$ pela relação recursiva:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g.$$

Um critério de convergência é dado pelo teorema:

Teorema A.1. *Seja um sistema linear $Ax = b$, se para cada linha i*

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \tag{A.1}$$

então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema, independente de $x^{(0)}$.

Portanto uma condição suficiente para convergência é que a os coeficientes da diagonal sejam maiores que a soma dos valores absolutos dos outros coeficientes da equação, quando isso ocorre a matriz é denominada *diagonalmente dominante*. Embora essa condição seja suficiente, não é necessária, ou seja, mesmo que a inequação (A.1) não seja satisfeita o método pode funcionar. Entretanto, muitos problemas, como o estudado neste trabalho satisfazem esse critério, garantindo a convergência do método.

A.2 Gauss-Seidel

Assim como no método de Gauss-Jacobi o método de Gauss-Seidel consiste em transformar o sistema em $x = Cx + g$. A diferença entre os dois métodos ocorre nas iterações. No método de Gauss-Seidel, ao obter $x_1^{(1)}$ o valor já é utilizado para obter $x_2^{(1)}$, ou seja, não é necessário concluir a primeira iteração para utilizar os resultados parciais. De forma geral, tem-se:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}), \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}). \end{cases}$$

A.3 Sobre-Relaxação Sucessiva (SOR)

O método da sobre-relaxação sucessiva conhecido por SOR (*successive over-relaxation*) é uma variação do método de Gauss-Seidel, onde é introduzido um fator de relaxamento ω .

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), \quad 1 \leq i \leq n.$$

O método é classificado de acordo com o fator ω de acordo:

- (i) $0 < \omega < 1$ é denominado sub-relaxamento;
- (ii) $\omega = 1$ é o método de Gauss-Seidel;
- (iii) $1 < \omega$ é denominado sobre-relaxação.

A escolha adequada para ω pode auxiliar a convergência do método, diminuindo o número de iterações necessárias para uma boa aproximação. Este fator é extremamente útil em sistemas que são resolvidos diversas vezes.

ANEXO A – Código *Python*

As soluções numéricas foram obtidas utilizando *Python* 3. A seguir, serão apresentados os códigos utilizados para cada equação. Inicialmente, serão listados os pacotes necessários, seguidos pelos códigos separados para cada equação: calor, onda e Laplace. Cada seção incluirá a parte referente à solução e a parte destinada à construção do gráfico.

A.1 Pacotes

Os pacotes utilizados e suas respectivas funcionalidades:

NumPy

A biblioteca *NumPy* oferece suporte a *arrays* de qualquer dimensão, sendo mais eficientes em termos de memória do que as listas do *Python*. Ela permite operações vetorizadas, eliminando a necessidade de *loops* explícitos e, assim, tornando o código mais conciso e eficiente. Além disso, o *NumPy* disponibiliza uma ampla gama de funções matemáticas, incluindo funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Matplotlib

Matplotlib é uma biblioteca de visualização de dados em *Python* que permite criar diversos tipos de gráficos, como linhas, dispersão, barras e histogramas, com grande flexibilidade. Dentro da biblioteca, o subpacote *pyplot* oferece uma interface de alto nível que simplifica a criação de gráficos de forma rápida e intuitiva, permitindo adicionar facilmente títulos, rótulos e legendas.

Para utilização desses pacotes utilizam-se o códigos para a importação:

```
1 ##### IMPORTAR #####
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
```

A.2 Equação do Calor

O código apresentado a seguir resolve numericamente o problema (6.16). Nos dados iniciais devem ser colocados os dados do problema, neste caso foram considerados os dados do Exemplo 3.2. No campo de definições deve se escolher o tempo máximo e a

quantidade divisões, caso o valor escolhido não satisfaça a condição de estabilidade será exibida a mensagem “Critério de estabilidade violado”.

```
1 ##### DADOS DO PROBLEMA #####
2 a = 1 # Difusividade térmica
3 L = 30 # Comprimento da barra
4
5 # Condição de Contorno
6 T_1 = 20 # Temperatura em x=0
7 T_2 = 50 # Temperatura em x=L
8
9 # Condição Inicial:
10 def f(x):
11     return 60-2*x
12
13 ##### DEFINIR #####
14 T = 40 # Tempo máximo
15 M = 80 # Dividir L em M partes
16 N = 600 # Dividir T em N partes
17
18 ##### MÉTODO #####
19 # Determina o espaçamento da malha
20 dx = L/M
21 dt = T/N
22
23 # Verifica a estabilidade
24 sigma = a**2*dt/((dx)**2)
25 if sigma > 0.5:
26     print("Critério de estabilidade violado")
27     exit() # Interrompe
28
29 # Cria a matriz das soluções U_k^n
30 U = np.zeros((M+1, N+1))
31
32 # Valores iniciais para U
33 U[:,0] = f(np.arange(0, M + 1) * dx) # Condição de Inicial
34 U[0, 1:N+1] = T_1 # Condição de Contorno
35 U[M, 1:N+1] = T_2 # Condição de Contorno
36
```

```

37 for n in range(0, N):
38     U[1:M, n + 1] = U[1:M, n] + sigma * (U[2:M + 1, n] - 2 * U[1:M, n] +
        ↪ U[0:M - 1, n])

```

No código acima, evitou-se a inserção de loops para reduzir o tempo computacional. As linhas 33 a 38 poderiam ser substituídas por:

```

1 # Valores iniciais para U
2 for k in range(0, M+1): # Condição de Inicial
3     U[k,0] = f(k*dx)
4 for n in range(1, N+1): # Condição de Contorno
5     U[0,n] = T_1
6     U[M,n] = T_2
7
8 for n in range(0, N):
9     for k in range(1, M):
10        U[k, n+1] = U[k, n] + sigma * (U[k+1, n] - 2 * U[k, n] + U[k-1, n])

```

Entretanto, devido à vantagem computacional, a primeira abordagem foi escolhida.

A seguir é apresentado a parte do código utilizado para a construção do gráfico.

```

1 ##### GRÁFICO 3D #####
2 x = np.arange(M+1) # Coordenadas x
3 t = np.arange(N+1) # Coordenadas t
4 X, Y = np.meshgrid(x, t)
5
6 # Criando a figura para plotagem 3D
7 fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
8 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
9
10 # Definindo limites de coloração
11 vmin = 20 # Limite inferior
12 vmax = 50 # Limite superior
13
14 surf = ax.plot_surface(X*dx, Y*dt, U.T, vmin=vmin, vmax=vmax,
    ↪ cmap='coolwarm', edgecolor='none', antialiased=True)
15 ax.invert_yaxis() # Inverte o sentido do eixo t
16
17 # Ajustar o ângulo de visão
18 ax.view_init(elev=40, azim=230)

```

```
19
20 # Configurações do gráfico
21 ax.set_xlabel(r'$x$', labelpad=20)
22 ax.set_ylabel(r'$t$', labelpad=20)
23 ax.set_zlabel(r'$u$')
24
25 # Barra de cores para indicar temperatura
26 cbar = fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.5, aspect=10)
27 cbar.set_label('Temperatura (u)')
28 cbar.ax.yaxis.set_label_position('left')
29
30 plt.show() # Exibe o gráfico
```

A.3 Equação da Onda

O código apresentado a seguir resolve numericamente o problema (??). Nos dados iniciais devem ser colocados os dados do problema, neste caso foram considerados os dados do Exemplo 4.1. No campo de definições deve se escolher o tempo máximo e a quantidade divisões.

```
1 ##### DADOS DO PROBLEMA #####
2 a = 2 # Coeficiente
3 L = 30 # Comprimento da corda
4
5 # Condição de Contorno
6 U_0 = 0 # Posição inicial em x=0
7 U_M = 0 # Posição inicial em x=L
8
9 # Condição Inicial:
10 def f(x):
11     return np.where((0 <= x) & (x <= 10), x / 10,
12                    np.where((10 < x) & (x < 30), (30 - x) / 20, 0))
13
14 # Velocidade inicial
15 def g(x):
16     return np.zeros_like(x)
17
18 ##### DEFINIR #####
19 T = 15 # Tempo máximo
```

```

20 M = 40 # Dividir L em M partes
21 N = 300 # Dividir T em N partes
22
23 ##### MÉTODO #####
24 # Determina o espaçamento da malha
25 dx = L/M
26 dt = T/N
27
28 # Verifica a estabilidade
29 C = a*dt/dx # Número de Courant
30 if abs(C) > 1:
31     print("Critério de estabilidade violado")
32     print(C)
33     exit() # Interrompe
34
35 # Cria a matriz das soluções U_k^n
36 U = np.zeros((M+1, N+1))
37
38 # Valores iniciais para U
39 U[:,0] = f(np.arange(0, M + 1) * dx) # Condição de Inicial
40 U[0, 1:N+1] = U_0 # Condição de Contorno
41 U[M, 1:N+1] = U_M # Condição de Contorno
42
43 # U_k^1
44 U[1:M, 1] = U[1:M, 0] + dt*g(np.arange(1, M)*dx) + C**2/2*(U[2:M + 1, 0]
    ↪ - 2 * U[1:M, 0] + U[0:M - 1, 0])
45
46 for n in range(1, N):
47     U[2:M, n + 1] = 2*U[2:M, n] - U[2:M, n-1] + C**2 * (U[3:M + 1, n] - 2
    ↪ * U[2:M, n] + U[1:M - 1, n])

```

A seguir é apresentada a parte do código utilizado para a construção do gráfico.

```

1 ##### GRAFICO 3D #####
2 x = np.arange(M+1) # Coordenadas x
3 t = np.arange(N+1) # Coordenadas t
4 X, Y = np.meshgrid(x, t)
5
6 # Criando a figura para plotagem 3D
7 fig = plt.figure(figsize=(10, 7))

```

```

8 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
9
10 # Definindo limites de coloração
11 vmin = -1 # Limite inferior
12 vmax = 1 # Limite superior
13
14 surf = ax.plot_surface(X*dx, Y*dt, U.T, vmin=vmin, vmax=vmax,
    ↪ cmap='plasma', edgecolor='none', antialiased=True)
15 ax.set_ylim(0,T)
16 ax.invert_yaxis() # Inverte o sentido do eixo t
17
18 # Ajustar o ângulo de visão
19 ax.view_init(elev=40, azim=230)
20
21 # Configurações do gráfico
22 ax.set_xlabel(r'$x$', labelpad=20)
23 ax.set_ylabel(r'$t$', labelpad=20)
24 ax.set_zlabel(r'$u$')
25
26 # Barra de cores para indicar o deslocamento
27 cbar = fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.5, aspect=10)
28 cbar.set_label('Deslocamento (u)')
29 cbar.ax.yaxis.set_label_position('left')
30
31 plt.show() # Exibe o gráfico

```

A.4 Equação de Laplace

O código apresentado a seguir resolve numericamente o problema (6.25). Nos dados iniciais devem ser colocados os dados do problema, neste caso foram considerados os dados do Exemplo 5.1. No campo de definições, devem ser escolhidos o fator de relaxação, o espaçamento da malha, o erro máximo e o número máximo de iterações. O número máximo de iterações serve como uma medida de segurança, garantindo que o processo de cálculo seja interrompido caso a convergência não seja alcançada dentro do limite de iterações estipulado.

```

1 ##### DADOS DO PROBLEMA #####
2 a = 3 # Comprimento eixo x
3 b = 2 # Comprimento eixo y

```

```

4
5 # Condições de Contorno
6 def f1(x): return 0 # Borda inferior
7 def f2(x): return 0 # Borda superior
8 def g1(y): return 0 # Borda esquerda
9 def g2(y):          # Borda direita
10     return np.where((0 <= y) & (y <= 1), y,
11                    np.where((1 < y) & (y < 2), 2-y, 0))
12
13 ##### DEFINIR #####
14 Omega = 1.77 # Fator de Relaxação
15 h = 0.05     # Espaçamento da malha
16 tol = 1e-5   # Erro máximo
17 max = 500    # Quantidade máxima de iterações
18
19 ##### MÉTODO #####
20 M = int(a/h) # Dividi a em M partes
21 N = int(b/h) # Dividi b em N partes
22
23 # Cria a matriz das soluções U_i^j
24 U = np.zeros((M+1, N+1))
25
26 # Definindo condições de contorno
27 U[:, 0] = f1(np.arange(0, M + 1) * h) # Borda inferior
28 U[:, -1] = f2(np.arange(0, M + 1) * h) # Borda superior
29 U[0, :] = g1(np.arange(0, N + 1) * h) # Borda esquerda
30 U[-1, :] = g2(np.arange(0, N + 1) * h) # Borda direita
31
32 erro = tol + 1 # Inicia a variável que armazena o erro
33 iteracao = 0   # Inicia a contagem das iterações
34
35 while erro > tol and iteracao < max:
36     erro = 0          # Reseta o erro a cada iteração
37     Utemp = U.copy() # Matriz temporária, copia da matriz U
38     for i in range(1,M):
39         for j in range(1, N):
40             U[i,j] = (1-Omega)*Utemp[i,j] +
41                 ↪ Omega*(Utemp[i+1,j]+Utemp[i-1,j]+Utemp[i,j+1]+Utemp[i,j-1])/4
42             erro = np.maximum(erro, np.abs(U[i,j] - Utemp[i,j]))

```

```
42     Utemp = U.copy() # Atualiza a matriz temporária
43     iteracao += 1
44     # print(f'Iteração {iteracao}, Erro = {erro}')
```

Para adaptar o código para o método de Gauss-Seidel basta definir $\omega = 1$. Já para o método de Jacobi, é necessário remover a linha 42, que atualiza da matriz temporária. Dessa forma, a matriz temporária só será atualizada ao final de cada iteração.

A seguir é apresentado a parte do código utilizado para a construção do gráfico.

```
1 ##### GRAFICO 3D #####
2 x = np.arange(M+1) # Coordenadas x
3 y = np.arange(N+1) # Coordenadas t
4 X, Y = np.meshgrid(x, y)
5
6 # Criar o gráfico 3D
7 fig = plt.figure(figsize=(20, 8))
8 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
9
10 # Definindo vmin e vmax
11 vmin = 0 # Valor mínimo que você deseja para a coloração
12 vmax = 1 # Valor máximo que você deseja para a coloração
13
14 # Adicionar a superfície com um novo colormap
15 surf = ax.plot_surface(X*h, Y*h, U.T, cmap='rainbow', vmin=vmin,
    ↳ vmax=vmax, edgecolor='none', antialiased=True) # Suavizar a pintura
16 ax.invert_yaxis() # Inverte o sentido do eixo y
17
18 # Ajustar o ângulo de visão
19 ax.view_init(elev=30, azim=230)
20
21 # Configurações do gráfico
22 ax.set_xlabel(r'$x$', labelpad=20)
23 ax.set_ylabel(r'$y$', labelpad=20)
24 ax.set_zlabel(r'$u$')
25
26 plt.show() # Exibe o gráfico
```

A.5 Equação do Telégrafo

O código apresentado a seguir resolve numericamente o problema (7.11). Nos dados iniciais devem ser colocados os dados do problema, neste caso foram considerados os dados do Exemplo 7.1. No campo de definições, devem ser escolhidos o tempo máximo, comprimento e a quantidade de divisões.

```
1 ##### DADOS DO PROBLEMA #####
2 alpha = 1
3 beta = 1
4 gamma = 1
5
6 # Condição Inicial
7 def f0(x): return x**2
8 def f1(x): return 1
9
10 # Condição de Contorno
11 def g0(t): return t
12 def g1(t): return 1+t
13
14 # Fonte externa
15 def f(x,t): return -x**2-t+1
16
17 ##### DEFINIR #####
18 T = 1 # Tempo máximo
19 l = 1 # Comprimento
20 M = 10 # Dividir l em M partes
21 N = 10 # Dividir T em N partes
22
23 ##### MÉTODO #####
24 # Determina o espaçamento da malha
25 dx = l/M
26 dt = T/N
27
28 # Variáveis auxiliares
29 a = alpha/dt**2 + beta/dt
30 b = 1/dx**2
31 c = 2*alpha/dt**2 + beta/dt - gamma - 2/dx**2
32 d = alpha/dt**2
33
```

```

34 # Cria a matriz das soluções  $U_k^n$ 
35 U = np.zeros((M+1, N+1))
36
37 # Valores iniciais para U
38 U[0:M+1, 0] = f0(np.arange(0, M+1) * dx) # Condição de Inicial
39 U[0, 1:N+1] = g0(np.arange(1, N+1) * dt) # Condição de Contorno
40 U[M, 1:N+1] = g1(np.arange(1, N+1) * dt) # Condição de Contorno
41
42 #  $U_k^1$ 
43 U[1:M, 1] = (b*(U[2:M+1,0]+U[0:M-1,0])+c*U[1:M,0]+2*d*dt*f1(np.arange(1,
    ↪ M)*dx)-f(np.arange(1, M)*dx,0))*(1/(a+d))
44
45 for n in range(1, N):
46     U[1:M, n + 1] =
    ↪ (1/a)*(b*(U[2:M+1,n]+U[0:M-1,n])+c*U[1:M,n]-d*U[1:M,n-1]-f(np.arange(1,
    ↪ M)*dx,n*dt))

```

A seguir é apresentado a parte do código utilizado para a construção do gráfico.

```

1 ##### GRAFICO 3D #####
2 x = np.arange(M+1) # Coordenadas x
3 t = np.arange(N+1) # Coordenadas t
4 X, Y = np.meshgrid(x*dx, t*dt)
5
6 # Criando a figura para plotagem 3D
7 fig = plt.figure(figsize=(14, 12))
8 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
9
10 surf = ax.plot_surface(X, Y, U.T, cmap='plasma', edgecolor='none',
    ↪ antialiased=True)
11
12 ax.set_ylim(0,T)
13
14 # Ajustar o ângulo de visão
15 ax.view_init(elev=20, azim=230)
16
17 # Configurações do gráfico
18 ax.set_xlabel(r'$x$', labelpad=20)
19 ax.set_ylabel(r'$t$', labelpad=20)
20 ax.set_zlabel(r'$u$', labelpad=20)

```

Além disso, caso a solução exata seja conhecida, pode-se utilizar o código a seguir para calcular o erro absoluto em cada ponto e identificar o valor máximo desse erro.

```
1 ##### ERRO #####
2 # Solução exata
3 def u(x, t): return x**2+t
4
5 # Calcula a solução exata
6 U_exata = u(X, Y)
7
8 # Calcula o erro absoluto
9 Erro = abs(U_exata - U.T)
10
11 # Imprime o erro absoluto máximo
12 print(f'Erro absoluto máximo: {np.max(Erro)}')
```