

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

**Precificação de opções de ações: modelagem do  
processo estocástico que gera os preços**

**Vinícius Tognetti**

**Trabalho de Conclusão de Curso**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Precificação de opções de ações: modelagem do processo  
estocástico que gera os preços de opções européias

**Vinícius Tognetti**

**Orientador: Márcio Alves Diniz**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Bacharel em Estatística.

**São Carlos**

**Fevereiro de 2025**



FEDERAL UNIVERSITY OF SÃO CARLOS  
EXACT AND TECHNOLOGY SCIENCES CENTER  
DEPARTMENT OF STATISTICS

Pricing of stock options: modeling the stochastic process that  
generates the prices

**Vinícius Tognetti**

**Advisor: Márcio Alves Diniz**

Bachelors dissertation submitted to the Department of Statistics, Federal University of São Carlos - DEs-UFSCar, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor in Statistics.

**São Carlos**  
**February 2025**



Vinícius Tognetti

Precificação de opções de ações: modelagem do processo  
estocástico que gera os preços

Este exemplar corresponde à redação final do trabalho de conclusão de curso devidamente corrigido e defendido por Vinícius H Tognetti e aprovado pela banca examinadora.

Aprovado em 14 de Fevereiro de 2025

Banca Examinadora:

- Márcio Alves Diniz (Orientador(a))
- Luis Ernesto Salazar
- Renato Gava



# Resumo

A precificação de opções desempenha um papel fundamental nos mercados financeiros, sendo essencial para a tomada de decisões estratégicas por investidores (institucionais ou pessoa física) e gestores de risco. Nesse contexto, a volatilidade do ativo subjacente é um dos principais parâmetros do modelo de Black-Scholes, amplamente utilizado para precificar opções europeias. No entanto, a volatilidade não é observável diretamente, exigindo técnicas de estimação adequadas. Este trabalho foca em demonstrar a formulação desse modelo - desde as suposições econômicas sobre o funcionamento do mercado financeiro e passando pelas derivações matemáticas (usando Transformada de Fourier, Equação de Difusão e Equação de Chapman-Kolmogorov) - e na aplicação de métodos para calcular a volatilidade de um ativo. São explorados modelos como o Movimento Browniano Geométrico e o processo de Ornstein-Uhlenbeck para estimar o processo estocástico que gera os preços do ativo. Para tanto, é utilizado um algoritmo baseado na estimação por máxima verossimilhança usando a densidade de transição do processo.

**Palavras-chave:** *Estimação de processos estocásticos, volatilidade, precificação de opções, equação de Black-Scholes, opções europeias, movimento browniano geométrico, máxima verossimilhança..*



# Abstract

Option pricing plays a fundamental role in financial markets, being essential for strategic decision-making by investors (both institutional and individual) and risk managers. In this context, the volatility of the underlying asset is one of the main parameters of the Black-Scholes model, which is widely used for pricing European options. However, volatility is not directly observable, requiring appropriate estimation techniques. This study focuses on demonstrating the formulation of this model—from the economic assumptions about the functioning of financial markets to the mathematical derivations (using Fourier Transform, Diffusion Equation, and Chapman-Kolmogorov Equation)—as well as on the application of methods to calculate an asset's volatility. Models such as Geometric Brownian Motion and the Ornstein-Uhlenbeck process are explored to estimate the stochastic process that drives asset prices. To achieve this, an algorithm based on maximum likelihood estimation using the transition density of the process is employed.

**Keywords:** *Stochastic process estimation, volatility, option pricing, Black-Scholes equation, European options, Geometric Brownian motion, maximum likelihood.*



# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>13</b> |
| <b>2</b> | <b>Levantamento Bibliográfico</b>  | <b>15</b> |
| <b>3</b> | <b>Procedimentos Metodológicos</b>   | <b>17</b> |
| 3.1      | Mercado Financeiro e Bolsa de Valores . . . . .                                | 17        |
| 3.1.1    | Ações e Derivativos . . . . .  | 18        |
| 3.1.2    | Opções Europeias . . . . .   | 18        |
| 3.1.3    | Regime de capitalização contínua . . . . .                                     | 19        |
| 3.2      | Suposições de funcionamento do mercado de ações e derivativos . . . . .        | 20        |
| 3.3      | Processos Estocásticos . . . . .   | 22        |
| 3.3.1    | Passeio Aleatório . . . . .  | 24        |
| 3.3.2    | Processo de Wiener . . . . .   | 24        |
| 3.3.3    | Processo de Itô . . . . .  | 25        |
| 3.4      | Equação de Black-Scholes e sua solução . . . . .                               | 29        |
| 3.4.1    | Transformada de Fourier . . . . .  | 31        |
| 3.4.2    | Equação de Difusão . . . . .   | 33        |
| 3.4.3    | Solução da equação de Black-Scholes . . . . .                                  | 36        |
| 3.5      | Estimação de Processos Estocásticos . . . . .                                  | 44        |
| 3.5.1    | Equação de Chapman-Kolmogorov . . . . .  | 44        |
| 3.5.2    | Densidades de Transição . . . . .  | 47        |
| 3.6      | Estimação por Máxima Verossimilhança usando a densidade de transição . . . . . | 54        |
| <b>4</b> | <b>Conclusão</b>   | <b>65</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>  | <b>67</b> |

|   |   |    |
|---|---|----|
| A | Metodo das Curvas Caracteristicas                         | 69 |
| B | Código em Python para Estimacao de Maxima Verossimilhanca | 71 |

# Capítulo 1

## Introdução

O mercado financeiro tem sido objeto de estudo pelo seu papel importante no sistema capitalista e a promessa - no imaginário social - de altos ganhos financeiros. São muitas as suas vertentes (investimento, crédito, financiamento etc) mas o que tem ganhado bastante notoriedade popular nos últimos anos são os investimentos em renda fixa e os investimentos em renda variável. Estes últimos apresentam riscos maiores - risco é associado à variância do retorno do investimento - mas também recompensas esperadas maiores, e, assim, podemos entender que é natural estudar esta área para minimizar os riscos e maximizar os ganhos esperados.

Um dos nomes pioneiros nos estudos e divulgação de conhecimento acerca dos investimentos em renda variável foi Harry Markowitz - com sua abordagem de construção de carteira de ações - que possibilitou que o *know-how* de construção de carteiras fosse disseminado nas camadas populares ao invés de ficar restrito aos administradores de fundos de investimento e investidores profissionais. Outro nome, William Sharpe, foi responsável por modelos de precificação de ativos financeiros, tendo como abordagem principal o risco modelado por um modelo de regressão linear (Lo (2022)).

Tantos outros nomes contribuíram para essa disseminação de conhecimento e, à medida que o mercado financeiro foi se sofisticando e se tornando mais complexo, novos produtos financeiros derivados das ações foram surgindo - os chamados derivativos. A opção sobre uma ação é um derivativo em que o investidor (aquele que compra a opção) adquire o direito de comprar ou vender determinada ação num futuro (geralmente no período de um mês) a um preço acordado no presente. É fácil ver que, por exemplo, se um investidor compra uma opção de compra de uma ação adquirindo o direito de comprar esta ação num momento futuro por R\$10 e esta ação, depois de um período, passa a custar R\$15,

então é vantajoso que o investidor exerça seu direito de compra pelo valor prévio acordado pois ele estaria comprando uma ação com desconto - e essa é uma boa motivação para a modelagem dos preços desses derivativos. Note que se essa opção de compra custar R\$5 ou mais, não há ganho em adquirir esse direito.

A equação de Black-Scholes busca justamente precificar um tipo dessas opções - que podem ser exercidas somente em uma data específica (opções européias) - resumindo as relações em uma equação diferencial estocástica. Entendendo melhor seu funcionamento e aprimorando sua modelagem, podemos contribuir com a disseminação de conhecimento sobre como realizar boas decisões de investimento envolvendo opções às camadas populares, reduzindo seus riscos e maximizando seus ganhos.

Os preços de ativos em datas futuras são aleatórios mas seus retornos esperados podem depender dos retornos passados; como os preços são observados em função do tempo, temos aqui um processo estocástico de estados contínuos em tempo contínuo. A equação de Black-Scholes depende desse processo estocástico para estimação de seus parâmetros, então é importante a modelagem e estimação deste - para tanto utiliza-se o processo de Ornstein-Uhlenbeck, que envolve ideias como o Processo de Wiener. ([Hull \(1998\)](#)).

# Capítulo 2

## Levantamento Bibliográfico

Começaremos pelo levantamento bibliográfico. Alguns termos econômicos serão usados aqui mas não serão definidos nesse momento. As definições estão nas seções 3.1 e 3.2 do Capítulo 3.

A equação de Black-Scholes data da década de 1970, sendo primeiramente apresentada no artigo de Fisher Black e Myron Scholes [Black e Scholes \(1973\)](#), onde apresentaram a fórmula para precificação de opções dadas certas suposições sobre o funcionamento do mercado financeiro. Posteriormente, [Merton \(1973\)](#) ampliou o trabalho deles incluindo uma teoria sobre a precificação de derivativos referentes a um ativo com pagamento de dividendos e outros ajustes.

Os conceitos fundamentais sobre o entendimento da Equação de Black-Scholes podem ser encontrados em [Hull \(1998\)](#), onde John explora diversos derivativos - como o contrato a termo - e fornece uma formalização matemática sólida, incluindo sobre a Equação de Black-Scholes; e outra fonte importante é um artigo de Fisher Black publicado pela *Journal of Financial Economics* ([Black e Scholes \(1972\)](#)), onde ele aborda a aplicação deste modelo de precificação para outros tipos de ativos.

Fazendo uma extensão significativa ao modelo de Black-Scholes, [Heston \(1993\)](#) incluiu um modelo que considera a volatilidade estocástica - o que descreve mais precisamente as dinâmicas do mercado.

Algumas críticas realizadas ao modelo de Black-Scholes vieram de [Rubinstein \(1994\)](#), onde ele critica as suposições sobre o funcionamento do mercado financeiro utilizadas por Black e Scholes - principalmente sobre a volatilidade constante - e também de [Bakshi e Madan \(2000\)](#), que discutem as limitações práticas do modelo, focando nos problemas de estimação.

Veremos no decorrer desta monografia que o único parâmetro a ser estimado na Equação de Black-Scholes é a volatilidade ( $\sigma$ ). Algumas abordagens incluem a utilização de Processos Estocásticos como [Heston \(1993\)](#) que procura modelar a volatilidade observando-a como um Processo Estocástico ou [Engle \(1982\)](#) que usou um modelo GARCH para realizar a estimativa de volatilidade condicional da inflação no Reino Unido.

# Capítulo 3

## Procedimentos Metodológicos

### 3.1 Mercado Financeiro e Bolsa de Valores

Antes de entrar no desenvolvimento matemático para descrever o funcionamento do nosso ativo financeiro de interesse (opção europeia de compra de ação) vamos a algumas definições para entender melhor o contexto do que estamos falando aqui. Os conceitos-chaves para entender nesse momento são os de **regime de capitalização contínuo** e de **derivativo** ([Hull \(1998\)](#)).

**Definição 3.1.1 (Ativo financeiro)** *Chamamos de ativo financeiro a coisa que confere um direito a uma pessoa - física ou jurídica - e que pode ser transformada em moeda (liquidada).*

**Definição 3.1.2 (Mercado financeiro)** *Chamamos de mercado financeiro o local - seja físico ou virtual - onde é realizada a comercialização de ativos financeiros.*

O termo ativo financeiro compreende muitas coisas que não são necessariamente de nosso interesse aqui (como por exemplo financiamentos) e, assim, conseqüentemente o termo mercado financeiro vai conter mais do que estaremos focando aqui. Então, para restringir ao contexto, quando nos referirmos à ativos financeiros estaremos falando sobre ações ou derivativos (em particular, opções de ações) e quando dissermos mercado financeiro estaremos nos referindo à bolsa de valores - que é onde são negociados ações e derivativos.

### 3.1.1 Ações e Derivativos

Uma empresa qualquer pode ter a sua propriedade dividida entre algumas pessoas; geralmente, quando são fundadas sua propriedade pode ser dividida entre os fundadores. Quando é de interesse da empresa expandir sua operação, costuma-se buscar investimentos para tanto. São diversas as formas de adquirir investimento, e uma delas é realizar uma Oferta Pública Inicial (OPI) - daí dizemos que é uma empresa de **capital aberto** -, que consiste em oferecer ao público geral a oportunidade de se tornar sócio da empresa "comprando" um "pequeno pedaço" dela. À esse "pequeno pedaço" chamamos de ação.

**Definição 3.1.3 (Ação)** *Chamamos de ação uma parte da propriedade de uma empresa de capital aberto.*

Conforme o mercado financeiro foi se sofisticando, surgiram novos ativos financeiros, e um tipo específico deles foi criado com algum tipo de relação às ações. Como eles "derivam" das ações são chamados de derivativos.

**Definição 3.1.4 (Derivativo)** *Chamamos de derivativo um ativo financeiro negociado na bolsa de valores que depende dos valores de um ativo subjacente.*

### 3.1.2 Opções Europeias

Dentre os diferentes derivativos negociados na bolsa de valores um deles é chamado de opção. Este pode ser uma opção de compra de ação ou uma opção de venda de ação. Esse tipo de derivativo confere um direito de comprar (ou vender) uma ação a um valor previamente acordado entre as partes em uma data futura.

**Definição 3.1.5 (Opção de Ação)** *Chamamos de opção de ação o derivativo que concede um direito de compra ou venda de uma ação em uma data futura a um preço pré definido.*

*Algumas características importantes de uma opção de ação são:*

- **Preço de exercício:** *é o preço futuro em que a ação será comprada ou vendida, acordado no momento de fechar o contrato.*
- **Exercer a opção:** *é quando o detentor da opção decide utilizá-la.*

*Note que a opção de ação é um **direito**, é dizer, o detentor de uma opção **não** é obrigado a utilizá-la.*

Existem diversos tipos de opções de ação. O que focaremos aqui são as opções europeias, que têm como característica que seu detentor só pode exercê-la em uma data futura pré-determinada. Por exemplo, uma opção europeia de compra pode conceder o direito de se comprar uma ação da Petrobrás em 10/06/2025 por R\$15, mas não antes dessa data.

Agora, vamos entender como funciona o regime de capitalização contínua. É importante estudarmos isso pois, mais à frente, vamos supor que os preços de um ativo financeiro são capitalizados instantaneamente para realizar a modelagem do preço de uma opção.

### 3.1.3 Regime de capitalização contínua

Podemos entender o regime de capitalização contínua partindo da ideia de valor futuro.

**Definição 3.1.6 (Valor Futuro)** *Suponha que um valor  $M_0 \in \mathbb{R}_*^+$  seja emprestado por  $n \in \mathbb{N}_*$  períodos a uma taxa  $i \in \mathbb{R}_*^+$  constante.*

*Então, chamamos de **valor futuro** ( $VF$ ) a quantidade*

$$VF = M_0(1 + i)^n$$

A parcela  $(1 + i)^n$  de 3.1.6 faz referência ao **juros composto**.

Para definir o regime de capitalização contínua vamos encontrar um jeito de entender o que ocorre com  $VF$  num espaço infinitesimal de tempo.

Assim, considere que podemos dividir o período  $n$  em  $t$  subintervalos de mesmo tamanho  $\Delta_n$  de tal modo que em cada um desses subintervalos a taxa é de  $\frac{i}{\Delta_n}$ .

Então, temos que o **valor futuro** no final do período  $n$  é dado por

$$VF = M_0 \left( 1 + \frac{i}{\Delta_n} \right)^{\Delta_n t} \quad (3.1)$$

já que em  $n$  ocorrem  $t$  subintervalos de tamanho  $\Delta_n$ .

Note que essa manipulação ainda é equivalente a que foi apresentada mais acima; apesar de a taxa ser diferente, o valor está sendo capitalizado pelo mesmo período  $n$ .

Calculando o limite de  $VF$  quando  $\Delta_n \rightarrow \infty$  (juros recebido a cada instante) temos que

$$\lim_{\Delta_n \rightarrow \infty} VF = \lim_{\Delta_n \rightarrow \infty} M_0 \left(1 + \frac{i}{\Delta_n}\right)^{\Delta_n t} = M_0 e^{it} \quad (3.2)$$

O termo  $e^i$  em 3.2 é o juros instantâneo. Essa equação é o regime de capitalização contínua.

**Definição 3.1.7 (Capitalização Contínua)** *Suponha que um valor  $M_0 \in \mathbb{R}_*^+$  seja emprestado por  $t \in \mathbb{R}$  períodos a uma taxa  $i \in \mathbb{R}_*^+$  constante.*

*Um valor futuro submetido a um **regime de capitalização contínua** é dado por*

$$VF = M_0 e^{it}$$

Nos preocupamos aqui em falar sobre capitalização contínua pois ela é utilizada por vários modelos teóricos, inclusive pela Equação de Black-Scholes.

## 3.2 Suposições de funcionamento do mercado de ações e derivativos

Algumas suposições e definições serão necessárias para construir a ideia do modelo (Hull (1998)). Vamos a elas.

**Suposição 3.2.1 (Princípio da não-arbitragem)** *Suponhamos que o mercado em que os ativos estão sendo negociados **não** permite arbitragem.*

**Definição 3.2.1 (Arbitragem)** *Chamamos de arbitragem uma operação no mercado financeiro que resulta em um lucro certo (sem risco) maior do que a taxa de juros livre de risco.*

**Definição 3.2.2 (Taxa de juros livre de risco)** *Chamamos de taxa de juros livre de risco a taxa de juros pela qual se pode realizar um investimento com o mínimo de risco possível (aqui "livre de risco" é um eufemismo).*

*No caso do Brasil, essa taxa é a SELIC.*

Suponhamos, também, que caso ocorra uma situação onde é possível realizar uma operação de arbitragem, os próprios agentes do mercado financeiro irão acabar imediatamente com ela, dadas as seguintes suposições.

**Suposição 3.2.2** *É permitida a venda descoberta de ativos.*

**Definição 3.2.3 (Venda descoberta)** *Chamamos de venda descoberta a operação no mercado financeiro em que se vende um ativo sem possuí-lo.*

**Suposição 3.2.3** *Não há custo de transação sobre as operações no mercado financeiro.*

**Suposição 3.2.4** *Todos os ativos negociados no mercado financeiro são infinitamente divisíveis.*

**Suposição 3.2.5** *O ativo relacionado ao derivativo não rende dividendos (remuneração ao acionista pela detenção do ativo).*

**Suposição 3.2.6** *A negociação no mercado financeiro ocorre sempre em tempo contínuo.*

**Suposição 3.2.7** *A taxa de juros livre de risco permanece constante durante o período de vida do derivativo.*

**Suposição 3.2.8** *Toda operação de arbitragem contém algum risco.*

Ainda, faremos a seguinte suposição sobre as possibilidades de estratégia de um agente no mercado financeiro.

**Suposição 3.2.9 (Princípio do *hedge*)** *É sempre possível construir um portfólio de investimento que não resulta em perda ou ganho, independente do movimento do preço das ações no mercado.*

**Definição 3.2.4 (Portfólio de Investimento)** *Chamamos de portfólio de investimento (II) os valores investidos por um agente no mercado financeiro.*

Por fim, faremos a seguinte suposição sobre o movimento dos preços das ações.

**Suposição 3.2.10 (Movimento do preço das ações)** *Suponhamos que o movimento dos preços das ações siga um Processo de Itô.*

O Processo de Itô é um tipo de processo estocástico e precisamos de um desenvolvimento teórico para defini-lo apropriadamente - veremos isso nas próximas seções.

Note que como fizemos a suposição de que os ativos são infinitamente divisíveis e que as negociações se dão em tempo contínuo, e sabemos que o derivativo está relacionado a um ativo, é intuito pensar que poderíamos modelar o preço de um derivativo utilizando a derivada do preço do ativo de alguma maneira - e essa intuição está correta, conforme veremos mais adiante.

Todavia, veja, também, que supomos que o preço das ações varia conforme um processo estocástico. E a derivada de um processo estocástico não é trivial.

Portanto, nas próximas seções vamos nos aprofundar um pouco mais na teoria de Processos Estocásticos para definir bem o Processo de Itô e utilizar o Lema de Itô para, enfim, encontrar a Equação de Black-Scholes e resolvê-la.

### 3.3 Processos Estocásticos

Um processo estocástico pode ser formalmente definido como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por  $i \in I : (I \in \mathbb{N})$  ou  $(I \in \mathbb{R})$ . Aqui, no nosso contexto, cada uma dessas variáveis aleatórias representará o preço de uma determinada ação em um determinado instante e o índice será o tempo. Apesar de o preço e o tempo serem medidos de maneira discreta, vamos assumir que são contínuos - teremos, pois, um processo estocástico de estados contínuos em tempo contínuo.

#### Definição 3.3.1 (Processo Estocástico de estados contínuos em tempo contínuo)

Suponha que  $T \in \mathbb{R}^+$  e que  $X_t \in \mathbb{R}^+$ .

Chamamos a coleção

$$\{X_t : t \in T\}$$

de processo estocástico de estados contínuos em tempo contínuo.

Num processo estocástico, diremos que um valor  $X_t$  do processo depende de seus valores anteriores.

$$X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1$$

Se utilizarmos essa ideia, diremos que o preço de uma ação hoje depende de todos os seus valores desde que se iniciou sua negociação em bolsa. Porém, ainda faremos mais uma suposição acerca do funcionamento do mercado financeiro que afetará isso - a suposição de mercados fracamente eficientes.

**Suposição 3.3.1 (Mercados fracamente eficientes)** *Toda informação é pública e rapidamente (instantaneamente) incorporada ao preço.*

Podemos interpretar essa suposição dizendo que o padrão seguido pelos preços não fornece qualquer informação relevante para sua previsão, já que toda a informação está contida no preço atual.

O que temos como consequência dessa suposição é que para realizar uma previsão - digamos,  $X_{t+1}$  - só precisamos de  $X_t$ .

Daí, temos que

$$\mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1})$$

Esta estrutura caracteriza um processo de Markov.

**Definição 3.3.2 (Processo de Markov)** *Seja*

$$\{X_t : t \in T\}$$

*um processo estocástico de espaços contínuos em tempo contínuo.*

*Se*

$$f(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_1, x_0) = f(x_t | x_{t-1})$$

*onde  $f(\cdot)$  é a função de densidade de transição, então  $\{X_t : t \in T\}$  é um processo de Markov.*

Um caso especial de processo de Markov é chamado de passeio aleatório - que veremos logo em seguida.

### 3.3.1 Passeio Aleatório

Uma forma simples de um passeio aleatório é um processo estocástico em que se começa num valor  $x_0$  e temos que  $X_1 = x_0 + a : (\mathbb{P}(a = 1) = p \text{ e } \mathbb{P}(a = -1) = 1 - p)$  e  $X_t = X_{t-1} + a : (\mathbb{P}(a = 1) = p \text{ e } \mathbb{P}(a = -1) = 1 - p)$ , onde  $p \in [0, 1]$ . Este seria um passeio aleatório com incrementos ( $a$ ) discretos.

Se temos  $a \in \mathbb{R}$  então os incrementos são contínuos. Nesse caso, usaremos a notação  $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$  ao invés de  $a \in \mathbb{R}$ .

Daí, um valor  $X_t$  de um passeio aleatório irá depender de um valor inicial  $x_0$ , do valor passado  $X_{t-1}$  e do valor do incremento  $\varepsilon_t$ .

### 3.3.2 Processo de Wiener

Seja  $\{W_t : t \in T\}$  um Processo de Wiener. Este é um processo estocástico de estados contínuos em tempo contínuo e possui as seguintes características:

- O valor inicial do processo é zero.

$$W_0 = 0$$

- Os incrementos do processo (diferença entre dois valores seguidos) são independentes.

$$(\forall t_i, t_j \in [0, T] : t_i < t_j)(\Delta W_{t_j} := W_{t_j} - W_{t_i})(\Delta W_{t_k} \perp \Delta W_{t_s}, k \neq s)$$

- Os incrementos têm distribuição normal com média zero e variância igual a diferença entre os tempos de cada valor observado.

$$(\forall t_i, t_j \in [0, T] : t_i < t_j)(\Delta t := t_j - t_i)(W_{t_j} - W_{t_i} \sim N(0, \Delta t))$$

Podemos, então, escrever o incremento do Processo de Wiener como

$$\Delta W_{tn} = \varepsilon_{tn} \sqrt{\Delta t}, \varepsilon_t \sim N(0, 1), \varepsilon_{t_i} \perp \varepsilon_{t_j} \quad (3.3)$$

É de nosso interesse que investiguemos como  $W_t$  se altera entre os tempos  $t_1$  e  $t_1 + H$  ambos em  $[0, T]$ , onde  $H > 0$  pode ser dividido em  $n$  subintervalos de comprimento  $\Delta t$  de tal forma que  $n = \frac{H}{\Delta t}$ .

Veja que

$$\Delta W_{t_1+H} = W_{t_1+H} - W_{t_1} = \sum_{t=1}^n W_{t_i} = \sum_{t=1}^n \varepsilon_{t_i} \sqrt{\Delta t} = \sqrt{\Delta t} \sum_{t=1}^n \varepsilon_{t_i} \sim N(0, n(\sqrt{\Delta t})^2 = n\Delta t = H)$$

Então, a variância da variação de um Processo de Wiener cresce linearmente com o tempo e, portanto, é um processo não estacionário.

Fazendo  $\Delta t$  infinitesimal, podemos representar um incremento pequeno no processo de Wiener por

$$dW_t = \varepsilon_t \sqrt{dt} \quad (3.4)$$

Daqui podemos ver que

$$\mathbb{E}[dW_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t \sqrt{dt}] = 0$$

e que

$$\mathbb{V}[dW_t] = \mathbb{V}[\varepsilon_t \sqrt{dt}] = (\sqrt{dt})^2 \mathbb{V}[\varepsilon_t] = dt$$

Note que o Processo de Wiener não é diferenciável pois

$$\frac{\Delta W_t}{\Delta t} = \frac{\varepsilon \sqrt{\Delta t}}{\Delta t}$$

tende a infinito quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Então, para diferenciá-lo precisaremos do Lema de Itô.

### 3.3.3 Processo de Itô

O Processo de Itô é um tipo de processo estocástico em que os incrementos de  $X_t$  dependem linearmente de uma função da variável e do tempo proporcionalmente ao incremento do tempo e de outra função também da variável e do tempo mas proporcional a um processo de Wiener.

Formalmente,

**Definição 3.3.3 (Processo de Itô)** *O Processo de Itô pode ser definido por*

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t \quad (3.5)$$

em que  $a(X_t, t)$  é chamado de termo de drift e  $b(X_t, t)$  é chamado de coeficiente de difusão. Ambas são funções conhecidas.

Como  $\mathbb{E}[dW_t] = 0$  então

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[dX_t] &= \mathbb{E}[a(X_t, t)dt] + \mathbb{E}[b(X_t, t)dW_t] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[a(X_t, t)dt|X_t]] = \\ &= a(X_t, t)dt\end{aligned}$$

pois para duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  temos que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

e, também, veja que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[dX_t] &= \mathbb{E}[(dX_t)^2] - (\mathbb{E}[dX_t])^2 = \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(a(X_t, t))^2 dt^2 + 2a(X_t, t)b(X_t, t)dt dW_t + (b(X_t, t)dW_t)^2|X_t]] - (a(X_t, t))^2 dt^2 = \\ &= (b(X_t, t))^2 \mathbb{E}[(dW_t)^2] = \\ &= (b(X_t, t))^2 \mathbb{E}[\varepsilon_t^2 dt] = \\ &= (b(X_t, t))^2 dt \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \\ &= (b(X_t, t))^2 dt\end{aligned}$$

Agora, para derivar o Lema de Itô, usaremos uma extensão de um resultado conhecido do Cálculo Diferencial (Séries de Taylor). Para uma demonstração mais rigorosa veja [Kardar \(2007\)](#).

Seja  $F(X_t, t)$  uma função pelo menos duas vezes diferenciável em  $X_t$  e pelo menos uma vez diferenciável em  $t$ . Fazendo a expansão de sua diferencial total  $dF$  usando Séries de Taylor temos o seguinte

$$dF = \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial X_t^2} (dX_t)^2 + \dots \quad (3.6)$$

Os termos que têm  $dt^\alpha : \alpha > 1$  tendem a zero mais rapidamente que  $dt$  então podemos

desprez -los aqui. Note que para  $dX_t^\alpha : \alpha > 2$  são todos nulos pois (vamos simplificar a notac o de  $a(X_t, t)$  e  $b(X_t, t)$  para  $a$  e  $b$ )

$$\begin{aligned} (dX_t)^3 &= (adt + bdW_t)^3 = (a^2 dt^2 + 2abdt^{\frac{3}{2}}\varepsilon_t + b^2\varepsilon_t^2 dt)(adt + b\varepsilon_t dt^{\frac{1}{2}}) = \\ &= a^3 dt^3 + 2a^2 b dt^{\frac{5}{2}}\varepsilon_t + ab^2 \varepsilon_t^2 dt^2 + a^2 b \varepsilon_t dt^{\frac{5}{2}} + 2ab^2 dt^2 \varepsilon_t^2 + b^3 \varepsilon_t^3 dt^{\frac{3}{2}} \\ &\xrightarrow{dt \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Suponha  $n \in \mathbb{N} : n > 3$  temos que

$$(dX_t)^n = (dX_t)^3 (dX_t)^{n-3} \xrightarrow{dt \rightarrow 0} 0 (dX_t)^{n-3} = 0$$

Então fica provado que

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 3) (dX_t^n \xrightarrow{dt \rightarrow 0} 0)$$

Portanto, temos que

$$dF = \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial X_t^2} (dX_t)^2$$

Vamos, agora, investigar o que acontece com  $dX_t^2$ .

$$dX_t^2 = (a^2 dt^2 + 2abdt^{\frac{3}{2}}\varepsilon_t + b^2\varepsilon_t^2 dt) \xrightarrow{dt \rightarrow 0} b^2 \varepsilon_t^2 dt$$

Veja que

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 dt] = dt$$

e que

$$\mathbb{V}[\varepsilon_t^2 dt] = dt^2 \mathbb{V}[\varepsilon_t^2] \xrightarrow{dt \rightarrow 0} 0$$

Note que, se  $X$    uma variável aleatória,  $S_X$    seu suporte e  $a \in \mathbb{R}$ , temos, no caso discreto, que

$$\mathbb{P}(X = a) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_{S_X} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \neq a} x\mathbb{P}(X = x) + a\mathbb{P}(X = a) = a$$

$$\mathbb{P}(X = a) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = \sum_{S_X} x^2\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \neq a} x^2\mathbb{P}(X = x) + a^2\mathbb{P}(X = a) = a^2$$

$$\mathbb{P}(X = a) = 1 \Rightarrow \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = a^2 - a^2 = 0$$

Logo,

$$\mathbb{P}(X = a) = 1 \Rightarrow \mathbb{V}[X] = 0 \tag{3.7}$$

Por outro lado, supondo que  $\mathbb{V}[X] = 0$  e utilizando a desigualdade de Markov temos que ([James \(2010\)](#))

$$\mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \frac{1}{n}\right) \leq n\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \frac{1}{n}\right) = 0$$

Usando a propriedade de continuidade da probabilidade temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \frac{1}{n}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \frac{1}{n}\right) = \\ &= \mathbb{P}((X - \mathbb{E}[X])^2 > 0) = \mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) = 0 \end{aligned}$$

Daí

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X]) = \mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) + \mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$$

Já vimos que se  $\mathbb{P}(X = a) = 1$  então  $\mathbb{E}[X] = a$ .

Então, para este caso temos que

$$\mathbb{V}[X] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = a) = 1 \tag{3.8}$$

Portanto

$$\mathbb{V}[X] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = a) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = a$$

Voltando ao  $dX_t^2$ , usando esse resultado temos que

$$\mathbb{V}[\varepsilon_t^2 dt] = dt^2 \mathbb{V}[\varepsilon_t^2] \xrightarrow{dt \rightarrow 0} 0 \implies dX_t^2 \xrightarrow{dt \rightarrow 0} b^2 dt \quad (3.9)$$

Agora, substituindo as expressões para  $dX_t$  e  $dX_t^2$  em  $dF$  temos o Lema de Itô

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} dX_t + \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial X_t^2} (dX_t)^2 = \\ &= \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} [adt + bdW_t] + \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial X_t^2} (b^2 dt) = \\ &= \left[ a(X_t, t) \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} + \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial t} + \frac{b^2(X_t, t)}{2} \frac{\partial^2 F(X_t, t)}{\partial X_t^2} \right] dt + b(X_t, t) \frac{\partial F(X_t, t)}{\partial X_t} dW_t \end{aligned}$$

Antes não conseguíamos diferenciar uma função que continha o Processo de Wiener por conta de que ele é um Processo Estocástico. Agora, com o Lema de Itô em mãos, conseguimos.

Note que não temos um termo que representa a diferencial estocástica - nesse caso seria  $dX_t$ .

Agora, vamos seguir para encontrar, enfim, a equação de Black-Scholes e solucioná-la.

### 3.4 Equação de Black-Scholes e sua solução

Aqui precisamos lembrar do começo dessa monografia, antes do desenvolvimento teórico acerca de Processos Estocásticos.

Tinhamos uma série de suposições sobre o funcionamento do mercado financeiro que vão nos ajudar a modelar o preço de uma opção de compra européia, vale a pena relembrá-las se for o caso. Uma outra importante é

**Suposição 3.4.1 (Preço de uma opção de compra)** *Seja  $S_t$  o preço de uma ação no instante  $t$ . Diremos que uma opção  $C$  é função de  $S_t$  e de  $t$  - ou seja,  $C(S_t, t)$  - onde  $C(S_t, t)$  é derivável duas vezes em  $S_t$  e uma vez em  $t$ .*

Com essas suposições em mãos, vamos definir convenientemente o seguinte portfólio de investimento: compraremos uma unidade de  $C(S_t, t)$  e venderemos (lembre-se da suposição de venda a descoberto!)  $\frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t}$  da ação  $S_t$ .

Matematicamente,

$$\Pi = C(S_t, t) - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} S_t \quad (3.10)$$

Uma pequena variação no valor do nosso portfólio seria

$$d\Pi = dC(S_t, t) - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t$$

Previamente - antes do Lema de Itô - teríamos problema em lidar com  $dS_t$  (lembre-se da suposição de que os preços de uma ação segue um Processo de Itô!). Vamos supor que

$$a(S_t, t) = \mu S_t$$

$$b(S_t, t) = \sigma S_t$$

De modo que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Usando o Lema de Itô, temos que a diferencial completa de  $C$  é

$$dC = \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 = \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2 S_t}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2}$$

Lembre se, também, que pela condição de não arbitragem, o retorno obtido em um portfólio de *hedge* deve ser igual ao retorno que seria obtido pela taxa de juros livre de risco ( $r$ ) em um intervalo curtíssimo de tempo. Ou seja,

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Substituindo  $d\Pi$  e  $\Pi$  na equação temos

$$\begin{aligned}
dC(S_t, t) - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t &= r \left( C(S_t, t) - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} S_t \right) dt \\
\Leftrightarrow \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2 S_t}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} dS_t &= r \left( C(S_t, t) - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} S_t \right) dt \\
\Leftrightarrow \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} dt + \frac{\sigma^2 S_t}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} dt &= r \left( C(S_t, t) - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} S_t \right) dt \\
\Leftrightarrow \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S_t}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} &= r \left( C(S_t, t) - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} S_t \right) \\
\Leftrightarrow rC(S_t, t) - r \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} S_t - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} &= \frac{\sigma^2 S_t}{2} \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2}
\end{aligned}$$

que é a Equação de Black-Scholes.

**Definição 3.4.1 (Equação de Black-Scholes)** *Seja  $r$  a taxa de juros livre de risco,  $S_t$  o preço de uma ação no instante  $t$ ,  $C(S_t, t)$  o preço de uma opção de compra derivada daquela ação. A Equação de Black-Scholes é dada por*

$$rC(S_t, t) - r \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial S_t} S_t - \frac{\partial C(S_t, t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} S_t \frac{\partial^2 C(S_t, t)}{\partial S_t^2} \quad (3.11)$$

Essa equação é uma equação diferencial parcial e precisamos de técnicas apropriadas para resolvê-la. Usaremos um tipo de equação chamada de Equação de Difusão. Essa equação já tem solução conhecida - que é obtida usando a Transformada de Fourier. A ideia aqui é utilizar esta solução já conhecida para obter a solução da Equação de Black-Scholes.

Vamos, então, ver um pouco mais de teoria - abordando a Transformada de Fourier e a solução de uma Equação de Difusão ([STRAUSS \(1992\)](#)).

### 3.4.1 Transformada de Fourier

**Definição 3.4.2 (Transformada de Fourier (e sua inversa))** *Seja  $f$  integrável. A transformada de Fourier é dada por*

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixk} dx$$

em frequência angular  $k = 2\pi t$  temos

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi it} dt$$

E a sua transformada inversa é

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk$$

Vale ressaltar algumas propriedades que vão nos ajudar nos calculos.

A primeira é

$$g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \Rightarrow G(k) = \alpha_1 F_1(k) + \alpha_2 F_2(k) \quad (3.12)$$

**Prova.**

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \\ \Rightarrow G(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))e^{-ikx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1 f_1(x)e^{-ikx} + \alpha_2 f_2(x)e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1 f_1(x)e^{-ikx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_2 f_2(x)e^{-ikx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1 f_1(x)e^{-ikx} + \alpha_2 f_2(x)e^{-ikx} dx = \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-ikx} dx + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)e^{-ikx} dx = \\ &= \alpha_1 F_1(k) + \alpha_2 F_2(k) \end{aligned}$$

A segunda propriedade é

$$g(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] \Rightarrow G(k) = ikF(k) \quad (3.13)$$

**Prova.**

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{d}{dx}[f(x)] \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \frac{d}{dx} [e^{ikx}] dk = \\ &= ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk = ik f(x) \\ \Rightarrow G(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} ik f(x)e^{-ikx} dx = ik \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = ikF(k) \end{aligned}$$

E a terceira propriedade é sobre a convolução entre duas funções  $f$  e  $g$ . Primeiro, vamos definir convolução.

**Definição 3.4.3 (Convolução)** A convolução de duas funções  $f$  e  $g$  -  $(f * g)$  - é dada por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

A propriedade é

$$h(x) = (f * g)(x) \Rightarrow H(k) = F(k)G(k) \quad (3.14)$$

**Prova.**

$$\begin{aligned} h(x) &= (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\ \Rightarrow H(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right] e^{-ikx}dx \\ \stackrel{z=x-y}{\Rightarrow} H(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(y)dy \right] e^{-ik(z+y)}dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-ikz}dz \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky}dy = \\ &= F(k)G(k) \end{aligned}$$

Seguiremos, agora, para a equação de difusão.

### 3.4.2 Equação de Difusão

A equação de difusão é dada por

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Leftrightarrow u_t = Au_{xx} \quad (3.15)$$

onde  $u(x,0) = \phi(x)$  é a condição de contorno e  $A \in \mathbb{R}$ .

Sendo  $U(k,t)$  a transformada de Fourier de  $u(x,t)$ , podemos obter

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-ikx} dx = \frac{\partial U(k,t)}{\partial t} = U_t$$

Usando a segunda propriedade da transformada de Fourier temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = (ik)^2 U(k, t)$$

Ainda, para a consideração de contorno temos que

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx = U(k, 0)$$

Então, voltando à equação de difusão

$$\begin{aligned} u_t &= Au_{xx} \\ \Leftrightarrow u_t e^{-ikx} &= Au_{xx} e^{-ikx} \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-ikx} dx &= A \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} e^{-ikx} dx \\ \Leftrightarrow \frac{\partial U(k, t)}{\partial t} &= A(ik)^2 U(k, t) \end{aligned}$$

Usando o método de separação de variáveis temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(k, t)}{\partial t} &= A(ik)^2 U(k, t) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{U(k, t)} dU(k, t) &= A(ik)^2 dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{U(k, t)} dU(k, t) &= -Ak^2 dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{U(k, t)} dU(k, t) &= \int -Ak^2 dt \\ \Leftrightarrow \ln(U(k, t)) &= -Ak^2 t + C \\ \Leftrightarrow U(k, t) &= Ce^{-Ak^2 t} \end{aligned}$$

Usando a condição de contorno temos

$$U(k, 0) = Ce^{-Ak^2 \cdot 0} = C = \Phi(x) \Rightarrow U(k, t) = \Phi(k) e^{-Ak^2 t}$$

Se tomarmos  $F(k, t) = e^{-Ak^2 t}$  então temos que  $U$  é o produto de  $\Phi$  e  $F$ .

$$U(k, t) = \Phi(k) e^{-Ak^2 t} = \Phi(k) F(k, t)$$

Como  $U$  é o produto de duas transformadas de Fourier então, pela terceira propriedade, temos que

$$u(x, t) = (\phi * f)(x, t)$$

Podemos encontrar  $f$  usando a transformada inversa

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, t) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ak^2t} e^{ikx} dk$$

Tomando a derivada em relação a  $x$  para facilitar as contas

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ak^2t} e^{ikx} dk = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-Ak^2t} e^{ikx} dk$$

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned} u &= e^{ikx} \Rightarrow du = (ix) e^{ikx} dk \\ dv &= k e^{-Ak^2t} dk \Rightarrow v = \frac{e^{-Ak^2t}}{-2At} \end{aligned}$$

Então

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-Ak^2t} e^{ikx} dk = \frac{i}{2\pi} \left[ e^{ikx} \frac{e^{-Ak^2t}}{-2At} \Big|_{k=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-Ak^2t}}{-2At} (ix) e^{ikx} dk \right]$$

Para resolver a parcela  $uv$  da integração por partes, vamos analisar  $g(k) = e^{ikx} e^{-Ak^2t}$ .

Completando os quadrados do expoente temos que

$$g(k) = e^{ikx} e^{-Ak^2t} = \exp \left\{ - \left[ \left( k\sqrt{At} - \frac{ix}{2At} \right)^2 + \frac{x}{2At} \right] \right\}$$

Note que quando  $k \rightarrow \pm\infty$  temos que  $g(k) \rightarrow 0$ . Logo, a parcela  $uv$  da integração é igual a 0.

Seguindo, temos que

$$\frac{i}{2\pi} \left[ e^{ikx} \frac{e^{-Ak^2t}}{-2At} \Big|_{k=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-Ak^2t}}{-2At} (ix) e^{ikx} dk \right] = -\frac{x}{2At} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ak^2t} e^{ikx} dk = -\frac{x}{2At} f(x, t)$$

Chegamos em

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = -\frac{x}{2At} f(x, t)$$

Podemos resolver essa EDO por separação de variáveis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} &= -\frac{x}{2At} f(x, t) \\ \Rightarrow \frac{df(x, t)}{f(x, t)} &= -\frac{x dx}{2At} \\ \Rightarrow \int \frac{df(x, t)}{f(x, t)} &= -\frac{1}{2At} \int x dx \\ \Rightarrow \ln(f(x, t)) &= -\frac{x^2}{4At} + C \\ \Rightarrow f(x, t) &= C e^{-\frac{x^2}{4At}} \end{aligned}$$

Como

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ak^2 t} e^{ikx} dk$$

Então

$$C = f(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ak^2 t} e^{ik0} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ak^2 t} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2At}}{\sqrt{2At}} e^{-\frac{1}{2} \frac{k^2}{2At}} dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi At}}$$

Lembrando que  $u(x, t)$  é a convolução de  $f(x, t)$  e de  $\phi(x)$  temos que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi At}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4At}} \phi(y) dy$$

Essa é, pois, a solução da equação de difusão. Agora, para solucionar a equação de Black-Scholes, vamos manipulá-la de tal maneira que fique na mesma forma de uma equação de difusão e aplicar essa solução encontrada aqui.

### 3.4.3 Solução da equação de Black-Scholes

Agora que já temos todas as ferramentas em mãos, vamos formalizar a precificação de uma opção de compra europeia e resolver a equação.

Conforme a definição de uma opção europeia, temos os seguintes fatores que podem afetar o seu preço:

- O preço da ação de que foi derivada ( $S_t$ )
- O preço de exercício da opção (valor pré acordado de compra futura da ação) - chamado de *strike* ( $K$ )
- O tempo até o vencimento da opção ( $\tau = T - t$ )
- A taxa de juros livre de risco ( $r$ )
- A estimativa da volatilidade da ação no período  $\tau$  ( $\sigma$ )

Lembre-se que uma opção de compra permite que compremos uma ação numa data futura a um preço pré-acordado (*strike*). Assim, se o preço da ação hoje é maior que o preço de *strike* então poderíamos comprar a ação por um valor mais barato e vendê-la a um valor mais caro, executando um lucro, daí a opção deveria custar o mesmo valor desse lucro - por exemplo, se  $K = 10$  e  $S_t = 15$  então poderíamos obter 5 de lucro, é dizer, a opção deveria custar 5. No caso em que o preço de *strike* for maior que o preço da ação então é razoável pensar que a opção não tem valor algum aqui (afinal, quem iria comprar uma ação por 30 quando se pode pagar 10 por ela?). Então, podemos dizer que

$$C(S_t, t) = \max\{S_t - K, 0\}$$

o que, também, configura uma condição de contorno para  $C$ .

Prosseguindo para a solução da equação, como precificamos uma opção sempre no momento  $t < T$  ( $T$  é a data de exercício da opção) então podemos levar o seu preço hoje  $C(S_t, t)$  (que é disponível na bolsa de valores) para seu valor futuro, capitalizando por  $r$  da seguinte maneira

$$VF := u(x, \tau) = e^{r\tau} C(S_t, t) \tag{3.16}$$

Também, o valor da ação hoje  $S_t$  deve ser equivalente ao preço de exercício  $K$  descontado para  $t$  à taxa  $r$  menos a volatilidade do ativo ( $\frac{\sigma^2}{2}$ ) - pode entender como o risco do ativo - somada a um retorno aleatório da ação ( $x$ ).

$$S_t(x, \tau) = K \exp \left\{ - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + x \right\} \tag{3.17}$$

Daí, temos que

$$u(x, \tau) = e^{r\tau} C(S_t(x, \tau), T - \tau)$$

já que  $t = T - \tau$ .

Derivando  $u$  em relação a  $\tau$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= re^{r\tau} C(S_t(x, \tau), T - \tau) + e^{r\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} [C(S_t, T - \tau)] = \\ &= re^{r\tau} C(S_t(x, \tau), T - \tau) + re^{r\tau} \left[ -\frac{\partial C}{\partial S_t} \text{Kexp} \left\{ -\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + x \right\} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \frac{\partial C}{\partial t} \right] = \\ &= e^{r\tau} \left[ rC(S_t(x, \tau), T - \tau) - S_t \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{\partial C}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

E derivando em relação a  $x$  obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} &= e^{r\tau} \frac{\partial C}{\partial S_t} \text{Kexp} \left\{ -\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + x \right\} = \\ &= e^{r\tau} \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} &= e^{r\tau} \frac{\partial C}{\partial S_t} \left[ \frac{\partial C}{\partial S_t} \text{Kexp} \left\{ -\left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + x \right\} S_t + S_t \right] = \\ &= e^{r\tau} \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t \right] \end{aligned}$$

Daí, fazendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \\ \Rightarrow e^{r\tau} \left[ rC(S_t(x, \tau), T - \tau) - S_t \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{\partial C}{\partial t} \right] &= \frac{\sigma^2}{2} e^{r\tau} \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t \right] \\ \Rightarrow rC(S_t(x, \tau), T - \tau) - S_t r \frac{\partial C}{\partial S_t} - \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} S_t^2 \end{aligned}$$

que é a Equação de Black-Scholes.

Então, conseguimos o primeiro objetivo que era transformá-la em uma equação de difusão. Agora, basta que apliquemos a solução encontrada na seção anterior.

Temos, pois, uma equação de difusão com  $A = \frac{\sigma^2}{2}$  e condição de contorno

$$\begin{aligned}
S_T(x, 0) &= Ke^x \\
\Rightarrow u(x, 0) &= C(S_t(x, 0), T) = \max\{S_T(x, 0) - K, 0\} = \\
&= \max\{Ke^x - K, 0\} = \max\{K(e^x - 1), 0\}
\end{aligned}$$

Aplicando a solução da equação de difusão, temos que

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau\frac{\sigma^2}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{\frac{4\sigma^2}{2\tau}}\right\} u(y, 0) dy = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} u(y, 0) dy = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} K(e^y - 1) dy
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
y < 0 &\Rightarrow K(e^y - 1) < 0 \Rightarrow \max\{K(e^y - 1), 0\} = 0 \\
y > 0 &\Rightarrow K(e^y - 1) > 0 \Rightarrow \max\{K(e^y - 1), 0\} = K(e^y - 1)
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} K(e^y - 1) dy = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} K(e^y - 1) dy + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} K(e^y - 1) dy
\end{aligned}$$

Como para  $y < 0$  temos  $\max\{K(e^y - 1), 0\} = 0$ , a segunda integral é igual a zero.

Distribuindo o produto e completando o quadrado, temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} K(e^y - 1) dy = \\
& = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty K \exp\left\{y - \frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} - K \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} dy = \\
& = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \left[ \int_0^\infty K \exp\left\{y - \frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} dy - \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2\tau}\right\} dm \right] = \\
& = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \left[ \int_0^\infty K \exp\left\{\frac{2y\sigma^2\tau - x^2 + 2xy - y^2}{2\sigma^2\tau}\right\} dy - \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dm \right] = \\
& = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \left[ \int_0^\infty K \exp\left\{\frac{2y\sigma^2\tau - x^2 + 2xy - y^2 \pm 2\sigma^2\tau x \pm \sigma^4\tau^2}{2\sigma^2\tau}\right\} dy + \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dm \right] = \\
& = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \left[ \int_0^\infty K \exp\left\{\frac{-y^2 + 2y(x + \sigma^2\tau) - (x + \sigma^2\tau)^2}{2\sigma^2\tau} + \frac{\sigma^2\tau(\sigma^2\tau + 2x)}{2\sigma^2\tau}\right\} dy + \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dm \right] = \\
& = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\} \left[ \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{[y - (x + \sigma^2\tau)]^2}{2\sigma^2\tau}\right\} dy + \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dm \right] = \\
& = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\} \left[ \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - (x + \sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dy + \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-x}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dm \right]
\end{aligned}$$

Fazendo troca de variáveis

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{y - (x + \sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \Rightarrow (y = \sigma\sqrt{\tau}z_1 + (x + \sigma^2\tau)^2) \wedge \left( \frac{dy}{dz_1} = \sigma\sqrt{\tau} \right) \\
y &\longrightarrow \infty \Rightarrow z_1 \longrightarrow \infty \\
y = 0 &\Rightarrow z_1 = \frac{-(x + \sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
z_2 &= \frac{m - x}{\sigma\sqrt{\tau}} \Rightarrow (m = \sigma\sqrt{\tau}z_2 + x) \wedge \left( \frac{dm}{dz_2} = \sigma\sqrt{\tau} \right) \\
m &\longrightarrow \infty \Rightarrow z_2 \longrightarrow \infty \\
m = 0 &\Rightarrow z_2 = \frac{-x}{\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \left[ \exp\left\{x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\} \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - (x + \sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dy + \right. \\
&\left. - \int_0^\infty K \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{m - x}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} dm \right] = \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \left[ \exp\left\{x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\} \int_{\frac{-(x+\sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}}^\infty K\sigma\sqrt{\tau} \exp\left\{-\frac{z_1^2}{2}\right\} dz_1 - \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{\tau}}}^\infty K\sigma\sqrt{\tau} \exp\left\{-\frac{z_2^2}{2}\right\} dz_2 \right] = \\
&= K \left[ \exp\left\{x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\} \int_{\frac{-(x+\sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_1^2}{2}\right\} dz_1 - \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{\tau}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_2^2}{2}\right\} dz_2 \right]
\end{aligned}$$

Como os integrandos são funções pares

$$\begin{aligned}
&K \left[ \exp\left\{x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\} \int_{\frac{-(x+\sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_1^2}{2}\right\} dz_1 - \int_{\frac{-x}{\sigma\sqrt{\tau}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_2^2}{2}\right\} dz_2 \right] = \\
&= K \left[ \exp\left\{x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\} \int_{-\infty}^{\frac{(x+\sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_1^2}{2}\right\} dz_1 - \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z_2^2}{2}\right\} dz_2 \right]
\end{aligned}$$

Note que ambas integrais são funções acumuladas de  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$ . Representando-a por  $\Phi$  temos

$$u(x, \tau) = K \left[ \exp\left\{x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right\} \Phi\left(\frac{(x + \sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right] \quad (3.18)$$

Mas como  $u(x, \tau) = e^{rt}C(S_t, t)$  temos

$$C(S_t, t) = Ke^{-rt} \left[ \exp \left\{ x + \frac{\sigma^2}{2} \tau \right\} \Phi \left( \frac{(x + \sigma^2 \tau)}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) \right] \quad (3.19)$$

que é a solução da equação de Black-Scholes.

Lembrando que

$$S_t(x, \tau) = K \exp \left\{ - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + x \right\} \Leftrightarrow x = \ln \left( \frac{S_t}{K} \right) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau$$

e que

$$\tau = T - t$$

Vejamos alguns exemplos de utilização da Equação de Black-Scholes.

**Exemplo 3.4.1** *Suponha que estamos interessados em uma opção de compra de ação da Cemig com preço de strike em R\$ 27 com data futura daqui 3 meses.*

*Sabemos que hoje o preço da ação está em R\$25, a taxa de juros livre de risco é de 10% ao ano e a volatilidade no período é de 20% ao ano. Antes de inserir os valores na fórmula devemos ajustar a data futura de mês para ano (3 meses = 0.25 ano). Daí, temos  $\tau = 0.25$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0.1$ ,  $K = 27$  e  $S_t = 25$ .*

$$x = \ln \left( \frac{7}{15} \right) + \left( 0.1 - \frac{0.2^2}{2} \right) 0.25 = -0.057$$

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= \\ &= 27e^{-(0.1)(0.25)} \left[ \exp \left\{ -0.057 + \frac{(0.2)^2}{2} (0.25) \right\} \Phi \left( \frac{(-0.057 + (0.2)^2(0.25))}{(0.2)\sqrt{(0.25)}} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \Phi \left( \frac{-0.057}{(0.2)\sqrt{(0.25)}} \right) \right] = 2.94 \end{aligned}$$

*Portanto, o preço da opção daqui a 3 meses estimado via Black-Scholes é R\$2,94.*

**Exemplo 3.4.2** *Suponha os mesmos dados do Exemplo 1 porém, agora, não sabemos a volatilidade e sabemos que o preço da opção é R\$ 2,10.*

Podemos, então, escolher valores para volatilidade em um grid para identificar o valor da volatilidade associado ao preço da opção (usaremos de 0.3 até 0.7).

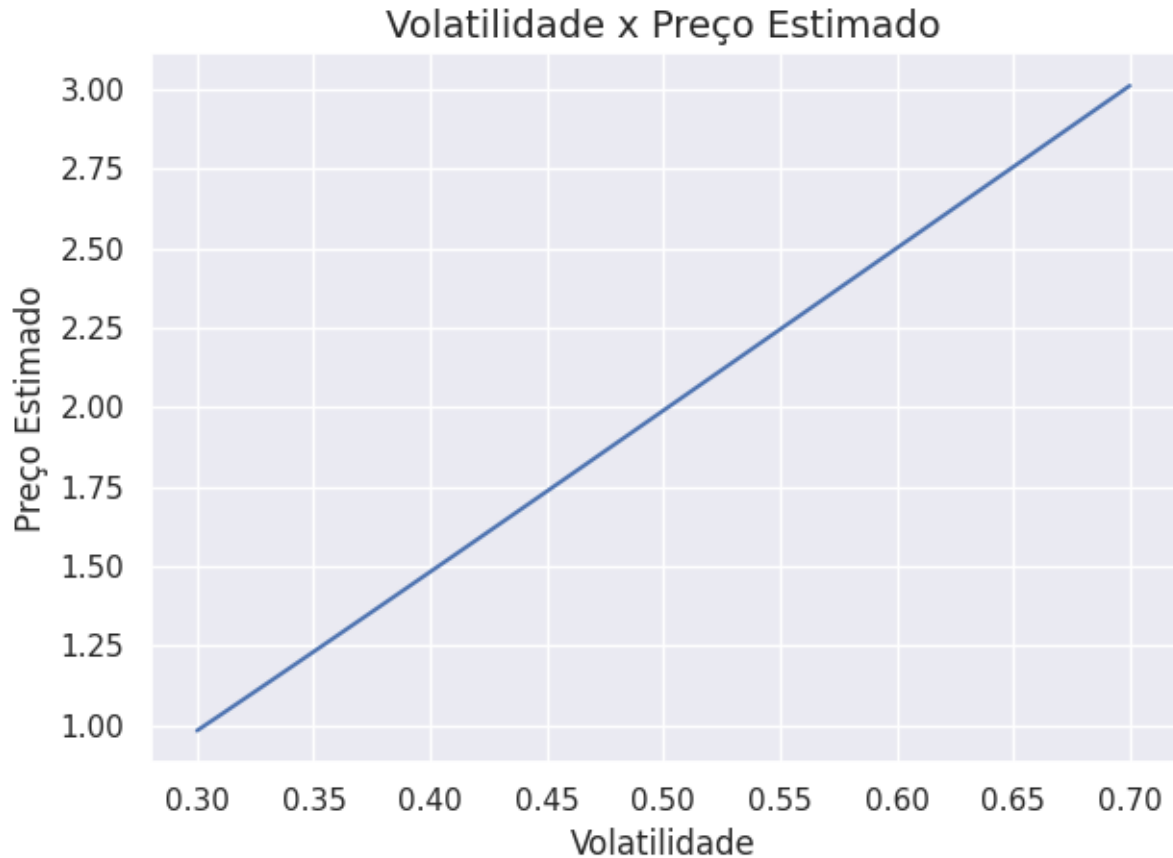


Figura 3.1: Curva dos preços estimados da opção em função da volatilidade.

Como o gráfico apresenta uma reta, podemos calcular a seguinte função da reta

$$y = -0.504 + 4.87x$$

Resolvendo para  $x$  usando  $y = 2.1$  temos

$$2.1 = -0.504 + 4.87x \Leftrightarrow x = \frac{2.1 + 0.504}{4.87} = 0.327$$

Portanto, a volatilidade estimada do período é 32,7%.

Em geral, temos todas as informações para a Equação de Black-Scholes (inclusive o preço da opção) menos a volatilidade. Usa-se a volatilidade como uma medida de risco as-

sociada à opção - quanto mais volatilidade maior é a variação de preço esperada e, assim, pode-se ter maiores prejuízos financeiros. O oposto também é verdade (pode-se ter lucros maiores) mas o racional de risco no mercado financeiro tende a ser mais conservador, isto é, se pesa mais as possibilidades de prejuízo do que as de lucro.

Então, vamos seguir para realizar estimação do processo estocástico que (supomos que) gera os preços. Teremos um parâmetro associado à volatilidade ( $\sigma$ ) e o objetivo maior será estimá-lo.

## 3.5 Estimação de Processos Estocásticos

Para estimar um processo estocástico vamos procurar definir sua densidade de transição e assumir que o processo segue ela. Para tanto, vamos utilizar a Equação de Chapman-Kolmogorov (ou Equação de Fokker-Planck) - que é um equação diferencial parcial - daí, a resolveremos utilizando o método das curvas características para chegar na densidade de transição. Com ela em mãos, vamos, por fim, estimar os parâmetros de interesse pelo método da máxima verossimilhança. Em geral, usa-se métodos numéricos para encontrar o ponto de máximo.

Começaremos deduzindo a Equação de Chapman-Kolmogorov para o Movimento Browniano com drift e depois apresentaremos a forma geral para um processo de Itô qualquer.

### 3.5.1 Equação de Chapman-Kolmogorov

Considere o Movimento Browniano com drift, que é definido por

$$dX_t = \alpha dt + \sigma^2 dW_t$$

Usaremos sua representação por um passeio aleatório em tempo contínuo. Para isso, primeiro discretizaremos um intervalo de comprimento  $t$  em  $n = \frac{t}{\Delta t}$  subintervalos discretos.

Em seguida, assumiremos que  $X$  pode aumentar em magnitude  $\Delta h$  com probabilidade  $p$  ou diminuir com probabilidade  $q = 1 - p$  em cada subintervalo. Tomaremos

$$p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{\sigma} \right) \Rightarrow q = 1 - p = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{\sigma} \right)$$

Para manter a variância de  $X_t - X_0$  independente da escolha de  $\Delta t$  estabeleceremos que

$$\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$$

Seja  $f(x; t|x_0; t_0)$  a densidade de transição de  $X$  no instante  $t$  dado que o processo estava em  $x_0$  no instante  $t_0$ . Logo,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b; t|x_0; t_0) = \int_a^b f(u; t|x_0; t_0) du$$

Entre os tempos  $t - \Delta t$  e  $t$ , a variável pode chegar até  $x$  ou aumentando de  $x - \Delta h$  com probabilidade  $p$  ou diminuindo de  $x + \Delta h$  com probabilidade  $q$ . Então,

$$f(x; t|x_0; t_0) = p \cdot f(x - \Delta h; t - \Delta t|x_0; t_0) + q \cdot f(x + \Delta h; t - \Delta t|x_0; t_0)$$

Expandindo  $f(x - \Delta h; t - \Delta t|x_0; t_0)$  em Série de Taylor até a segunda ordem em torno de  $(x; t)$  temos

$$\begin{aligned} f(x - \Delta h; t - \Delta t|x_0; t_0) &= f(x; t|x_0; t_0) + (x - \Delta h - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (t - \Delta t - t) \frac{\partial f}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{2} (x - \Delta h - x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (t - \Delta t - t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{1}{2} (x - \Delta h - x)(t - \Delta t - t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \dots = \\ &= f(x; t|x_0; t_0) - \Delta h \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \Delta h \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \dots \end{aligned}$$

com  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta h = \sigma\sqrt{\Delta t}$ , os termos maiores que  $\Delta h^2$  terão  $\Delta t^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 1$ , e irão mais rápido para zero do que  $\Delta t$ , então poderão ser desconsiderados.

Seguindo o mesmo raciocínio para  $f(x + \Delta h; t - \Delta t|x_0; t_0)$  teremos

$$f(x + \Delta h; t - \Delta t | x_0; t_0) = f(x; t | x_0; t_0) + \Delta h \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \\ + \frac{1}{2} \Delta h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \Delta h \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \dots$$

Então,

$$f(x; t | x_0; t_0) \approx p \left[ f(x; t | x_0; t_0) - \Delta h \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \Delta h \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right] + \\ + q \left[ f(x; t | x_0; t_0) + \Delta h \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \Delta h \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right] = \\ = f(x; t | x_0; t_0) - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} - \alpha \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \Rightarrow \frac{f(x; t | x_0; t_0)}{\Delta t} = \frac{f(x; t | x_0; t_0)}{\Delta t} - \frac{\partial f}{\partial t} - \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial f}{\partial x}$$

Essa é a Equação de Chapman-Kolmogorov para o Movimento Browniano com drift. Se a resolvermos usando o método das curvas característica chegaremos na mesma densidade de transição que começamos.

Para o Processo de Itô, temos que a Equação de Chapman-Kolmogorov associada é

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b^2(x; t) f(x; t | x_0; t_0)] - \frac{\partial}{\partial x} [a(x; t) f(x; t | x_0; t_0)]$$

Agora, prosseguiremos para resolver essa Equação usando o método das curvas características (veja Apêndice). Não existe uma solução geral para a Equação associada ao Processo de Itô - temos que resolver para cada caso. Os casos que exploraremos é o do processo de Ornstein-Uhlenbeck (que resultará numa densidade de transição com distribuição normal) e o do Movimento Browniano geométrico (que resultará numa densidade de transição lognormal). Essa segunda não tem uma distribuição de estado estacionário (a primeira tem) mas isso não será muito um problema na estimação pois trataremos os dados reais como um processo que ainda está em desenvolvimento, é dizer, que ainda não atingiu a distribuição estacionária.

Uma vez que encontremos essas densidades de transição podemos usá-las para realizar a estimação por máxima verossimilhança. Então, implementaremos um algoritmo para cada um dos casos usando dados reais e vamos comparar os resultados.

### 3.5.2 Densidades de Transição

#### Ornstein-Uhlenbeck

**Definição 3.5.1 (Processo de Ornstein-Uhlenbeck)** *O Processo de Ornstein-Uhlenbeck é um processo estocástico em tempo contínuo dado pela seguinte diferencial estocástica*

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dW_t$$

onde  $dW_t$  é o Processo de Wiener.

Note que o Processo de Ornstein-Uhlenbeck é um Processo de Itô com

$$a(X_t; t) = -\theta X_t$$

$$b(X_t; t) = \sigma$$

Então, a Equação de Chapman-Kolmogorov associada a ele é

$$\frac{\partial f(x; t)}{\partial t} = \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2} - \theta \frac{\partial}{\partial x} [x f(x; t)]$$

Essa EDP é mais fácil de ser resolvida pela sua transformada de Fourier. Então, vamos encontrar essa equação em termos de sua transformada.

A transformada de Fourier de  $f(x, t)$  é

$$\begin{aligned}
F(k; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x; t) dx \\
\Rightarrow \frac{\partial F(k; t)}{\partial k} &= \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ikx} f(x; t) dx \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{i} \frac{\partial F(k; t)}{\partial k} &= -i^2 \frac{1}{i} \frac{\partial F(k; t)}{\partial k} = i \frac{\partial F(k; t)}{\partial k} = i \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ikx} f(x; t) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ikx} f(x; t) dx
\end{aligned}$$

Pela terceira propriedade da transformada de Fourier temos

$$\frac{\partial}{\partial x}[xf(x; t)] = (ik)i \frac{\partial F(k; t)}{\partial k} = -k \frac{\partial F(k; t)}{\partial k}$$

Esse é o segundo termo do lado direito da equação.

Seguindo, a transformada inversa de  $f(x; t)$  é

$$\begin{aligned}
f(x; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k; t) dk \\
\Rightarrow \frac{\partial f(x; t)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik) e^{ikx} F(k; t) dk \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^2 e^{ikx} F(k; t) dk \\
(ik)^2 F(k; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx
\end{aligned}$$

Logo, a transformada de Fourier da equação de Chapman-Kolmogorov é

$$\frac{\partial F(k; t)}{\partial t} + \theta k \frac{\partial F(k; t)}{\partial k} = -\frac{\sigma^2}{2} k^2 F(k; t)$$

A condição inicial  $f(x_0; 0) = 1$  torna-se  $F(k; 0) = e^{-ikx_0}$ .

Usando o método das curvas características, o diferencial total dessa equação é

$$\frac{d}{ds}[F(k(s); t(s))] = \frac{\partial F(k; t)}{\partial k} \frac{dk(s)}{ds} + \frac{\partial F(k; t)}{\partial t} \frac{dt(s)}{ds}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} \frac{dF(s)}{ds} &= -\frac{k^2\sigma^2}{2}F(s) \Rightarrow \frac{dF(s)}{-\frac{k^2\sigma^2}{2}F(s)} = ds \\ \frac{dk(s)}{ds} &= \theta k \Rightarrow \frac{dk}{\theta k} = ds \\ \frac{dt(s)}{ds} &= 1 \Rightarrow dt = ds \\ &\Rightarrow dt = ds = \frac{dk}{\theta k} = \frac{dF(s)}{-\frac{k^2\sigma^2}{2}F(s)} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dk}{\theta k} &= \frac{dF}{-\frac{k^2\sigma^2}{2}F} \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{k^2\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\theta k} dk &= \frac{1}{F} dF \\ \Leftrightarrow -\frac{\sigma^2}{2\theta} \int k dk &= \int \frac{1}{F} dF \\ \Leftrightarrow -\frac{\sigma^2}{2\theta} \frac{k^2}{2} &= \ln(F) + C_1 \\ \Leftrightarrow F(k) &= C_1 e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{4\theta}} \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \frac{dk}{\theta k} &= dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\theta} \int \frac{1}{k} dk &= \int dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\theta} \ln(k) &= t + C_2 \\ \Leftrightarrow k(t) &= C_2 e^{\theta t} \end{aligned}$$

A condição inicial

$$k(0) = C_2 e^{\theta \cdot 0} = C_2 = k_0$$

$$\Leftrightarrow k_0 = k e^{-\theta t}$$

$$\Rightarrow F(k_0) = C_1 \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 k_0^2}{4\theta} \right\} = C_1 \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 k^2 e^{-2\theta t}}{4\theta} \right\} = e^{-ik_0 x_0}$$

$$\Rightarrow C_1 = \exp \left\{ -ik_0 x_0 + \frac{\sigma^2 k^2 e^{-2\theta t}}{4\theta} \right\}$$

$$\Rightarrow F(k; t) = \exp \left\{ -ike^{-\theta t} x_0 + \frac{\sigma^2 k^2 e^{-2\theta t}}{4\theta} - \frac{\sigma^2 k^2}{4\theta} \right\}$$

$$= \exp \left\{ -ike^{-\theta t} x_0 - \frac{\sigma^2 k^2}{2} \frac{1 - e^{-2\theta t}}{2\theta} \right\}$$

Para encontrarmos a densidade estacionária fazemos  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(k; t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ -ike^{-\theta t} x_0 - \frac{\sigma^2 k^2}{2} \frac{1 - e^{-2\theta t}}{2\theta} \right\} = \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 k^2}{2} \frac{1}{2\theta} \right\}$$

Até aqui encontramos a densidade estacionária da transformada de  $f(x; t)$ . Então, agora basta resolver a transformada inversa de  $F(k; t)$  para encontrar a densidade estacionária de  $f(x; t)$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 k^2}{2} \frac{1}{2\theta} + ikx \right\} dk = \\ &= \frac{\sqrt{\theta}}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2 \theta}{\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

Temos que a densidade de  $X$  em estado estacionário é

$$X_t \sim N \left( x_0 e^{-\theta t}; \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}) \right)$$

pois a transformada de Fourier de uma  $N(\mu; \sigma^2)$  é igual a  $\exp \left\{ -\mu ik - \frac{k^2 \sigma^2}{2} \right\}$ .

O que obtemos aqui nessa seção é que se supormos que o preço da ação varia conforme um Processo de Ornstein-Uhlenbeck, então a densidade que usaremos para estimação é essa acima.

Agora, vamos ver o que acontece se supormos que o preço das ações varia conforme um Movimento Browniano Geométrico.

### Movimento Browniano Geométrico

Começemos definindo-o.

**Definição 3.5.2 (Movimento Browniano Geométrico)** *O Movimento Browniano Geométrico é um processo de Itô dado pela seguinte diferencial estocástica.*

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

Aqui é mais interessante utilizar a transformação  $Y_t = \ln(X_t)$ . Daí,

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial X} &= \frac{1}{X} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} &= -\frac{1}{X^2}\end{aligned}$$

Usando o Lema de Itô temos

$$\begin{aligned}dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2X_t^2} (dX_t^2) = \\ &= \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t) - \frac{1}{2X_t^2} (\mu^2 X_t^2 dt^2 + 2\mu\sigma X_t^2 dt dW_t + \sigma^2 X_t^2 dW_t^2) = \\ &= \mu dt + \sigma dW_t - \frac{\mu^2}{2} dt^2 - \mu\sigma dt \sqrt{dt} \varepsilon - \frac{\sigma^2}{2} (\varepsilon \sqrt{dt})^2 = \\ &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t\end{aligned}$$

Lembre-se que quando  $dt$  tende a zero, os termos  $dt$  com expoente maiores do que 1 tendem a zero mais rapidamente e podemos ignorá-los (considerando-os como zero).

A Equação de Chapman-Kolmogorov para esse caso é

$$\frac{\partial g(y; t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) g(y; t) \right] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 g(y; t)}{\partial y^2}$$

Sabe-se que a condição inicial  $g(y_0; 0) = 1 \Leftrightarrow g(y_0; 0) = \delta(y - y_0)$ . Daí, a sua transformada é

$$G(k; 0) = \int_0^\infty \delta(y - y_0) e^{iky} dy = e^{-iky_0}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(k; t)}{\partial t} &= \int_0^\infty \frac{\partial g(y; t)}{\partial t} e^{-iky} dy = \\ &= -\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^\infty \frac{\partial g(y; t)}{\partial y} e^{-iky} dy + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 g(y; t)}{\partial y^2} e^{-iky} dy = \\ &= -\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ikG(k; t) + \frac{\sigma^2}{2} (ik)^2 G(k; t) = \\ &= \left[ -\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ik - \frac{k^2 \sigma^2}{2} \right] G(k; t) \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{G(k; t)} dG(k; t) &= \left[ -\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ik - \frac{k^2 \sigma^2}{2} \right] \int dt \\ \Leftrightarrow \ln(G(k; t)) &= \left[ -\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ik - \frac{k^2 \sigma^2}{2} \right] t + C = \\ \Leftrightarrow G(k; t) &= C \exp \left\{ \left[ -\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ik - \frac{k^2 \sigma^2}{2} \right] t \right\} \end{aligned}$$

Usando a condição inicial

$$G(k; 0) = C = e^{-iky_0}$$

Portanto

$$G(k; t) = \exp \left\{ \left[ -\left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ik - \frac{k^2 \sigma^2}{2} \right] t - ik y_0 \right\} = \exp \left\{ -ik \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + y_0 \right] - \frac{k^2 \sigma^2}{2} t \right\}$$

Aplicando a transformada inversa temos

$$\begin{aligned}
g(y; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G(k; t) e^{iky} dk = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp \left\{ -ik \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + y_0 \right] - \frac{k^2 \sigma^2}{2} t + ik y \right\} dk = \\
&= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{[y - ((\mu - \sigma^2/2)t + y_0)]^2}{2\sigma^2 t} \right\}
\end{aligned}$$

Como utilizamos a transformação  $Y = \ln(X)$  temos que

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(e^Y \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq \ln(X)) = F_Y(\ln(x)) \\
\Rightarrow f_X(x) &= \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} F_Y(\ln(x)) = f_Y(\ln(x)) \frac{1}{x} = \\
&= \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{[\ln(x) - ((\mu - \sigma^2/2)t + \ln(x_0))]^2}{2\sigma^2 t} \right\}
\end{aligned}$$

que é a densidade de uma log-normal. Note que, conforme enunciado antes, essa densidade de transição não tem distribuição estacionária - pois quando  $t \rightarrow \infty$  a função  $f$  tende a zero. Mas isso não nos importa porque podemos apenas supor que o processo que estamos observando (preço das ações) está ainda se desenvolvendo.

Por curiosidade, o Movimento Browniano é um outro nome para o Processo de Wiener; e chamamos de Movimento Browniano com drift o seguinte processo

$$dX_t = \alpha dt + \sigma dW_t$$

com  $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}$ . Note que é um Movimento Browniano com um deslocamento de locação e uma variação de escala. Quando inserimos a variável  $X_t$  neste processo, obtemos o Movimento Browniano Geométrico; e, generalizando-o, obtemos o Processo de Itô.

Agora que já deduzimos as expressões analíticas para os dois processos escolhidos, vamos, finalmente, à estimação. Lembre-se que, caso decida utilizar como suposição um outro processo estocástico diferente dos exemplificados aqui, basta encontrar sua densidade de transição da mesma maneira que foi feito aqui. Todavia, uma importante observação aqui é que esses dois processos escolhidos estão alinhados com as suposições de funcionamento do mercado financeiro feitas nas seções iniciais desse capítulo; então, ao

escolher um outro processo, tenha em mente que a teoria aqui é construída em cima daquelas suposições e é de bom grado seguimo-las, pois o foco da estimação é estimar o valor do parâmetro associado à volatilidade ( $\sigma$ ), que é atrelado à Equação de Black-Scholes, que, por sua vez, teve seu desenvolvimento a partir das suposições.

### 3.6 Estimação por Máxima Verossimilhança usando a densidade de transição

O algoritmo para a estimação é bem simples. Vejamos como é

- Primeiro, calculamos a função de log-verossimilhança.
- Segundo, a maximizamos usando (geralmente) algum método numérico.

Para o *input* de tempo  $t$  na função pensaremos em termos anualizados (da mesma maneira como fizemos com a volatilidade anteriormente), daí 1 dia seria considerado  $t = \frac{1}{252}$  ano, 1 mês seria  $t = \frac{1}{12}$  ano, e assim em diante. Note que para o dia teremos que considerar qual a frequência dos preços observados do ativo, por exemplo, se for uma ação em uma bolsa de valores provavelmente estamos pensando apenas em dias úteis e, então,  $t = \frac{1}{252}$  é razoável, mas, se pensarmos em outros ativos que são negociados em dias corridos (como é o caso do Bitcoin utilizado nos exemplos a seguir)  $t = \frac{1}{365}$  é mais adequado. Enfim, atente-se à frequência de negociação do ativo para definir o valor de  $t$ .

Para realizar a estimação, selecionaremos um determinado valor em um determinado tempo e realizaremos a simulação do próximo valor usando a densidade encontrada para cada um dos processos.

Agora veremos alguns resultados para a estimação usando cada um dos dois processos baseados nos preços do Bitcoin obtidos do Yahoo Finance. Apesar do Bitcoin fazer parte de um tipo de mercado um pouco diferente das ações negociadas em bolsa de valores (mercado de criptomoedas), a escolha desse ativo se deve para mostrar que os estudos de estimação de processos estocásticos desenvolvidos aqui não se restringem somente a ações. Mais à frente teremos aplicação em ações para voltar ao contexto do trabalho.

Vejamos a série de preços do Bitcoin em dólares americanos, no período de Setembro de 2014 até Fevereiro de 2025.

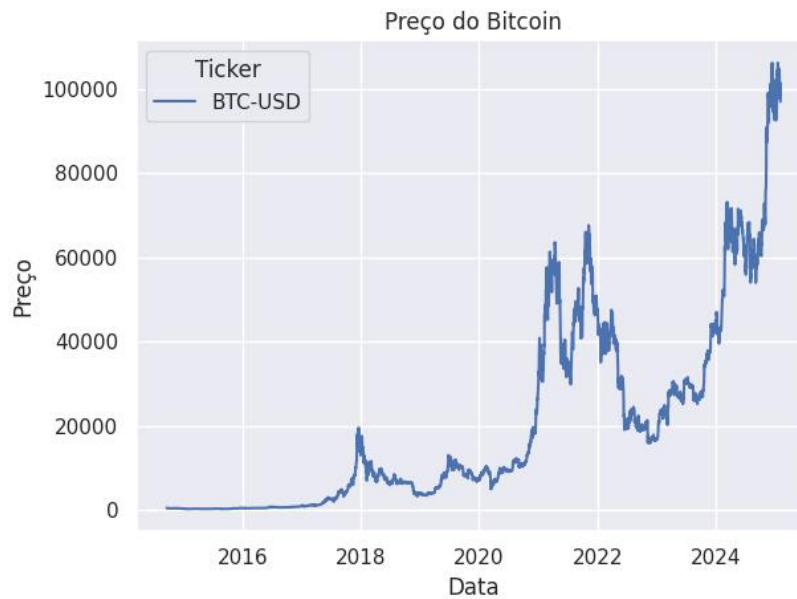


Figura 3.2: Evolução dos preços do Bitcoin.

E o logaritmo dos preços diferenciados uma vez.

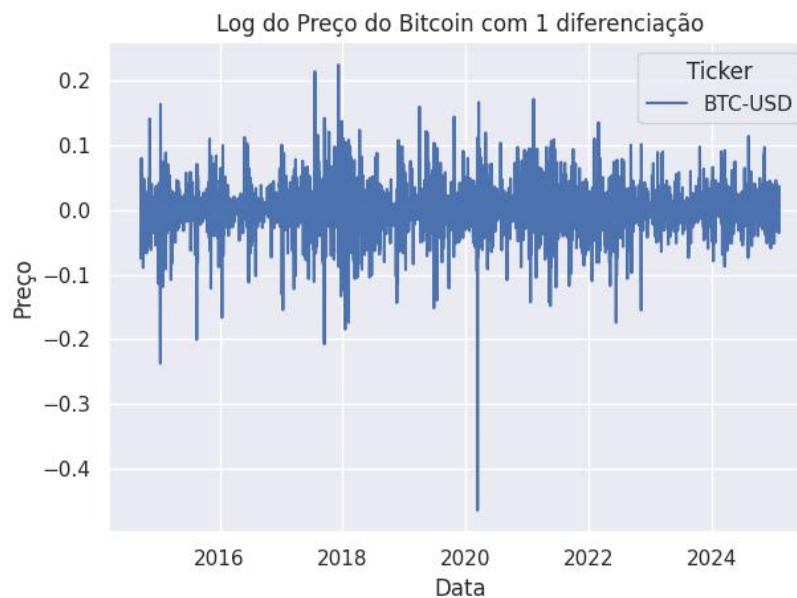


Figura 3.3: Log dos preços do Bitcoin diferenciado uma vez.

Essa série apresenta uma tendência de alta e parece apresentar alguma sazonalidade anual. Veja, pelo gráfico de autocorrelações parciais, que temos significativa influência do preço anterior (lag 1), o que corrobora com a suposição de mercados fracamente eficientes.

O movimento sinuoso nos valores de lag mais altos também sugere que há sazonalidade na série de preços.

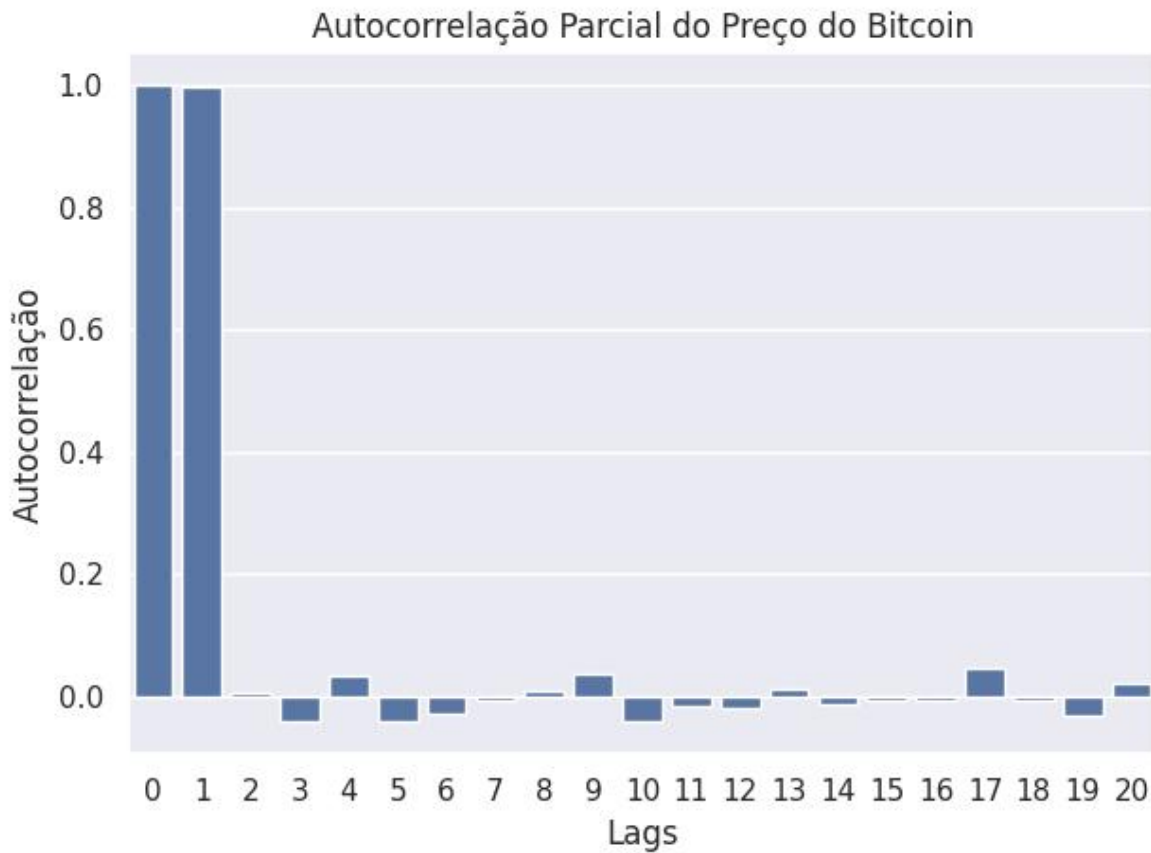


Figura 3.4: Gráfico de autocorrelações parciais do Bitcoin.

Faremos todas as estimações utilizando os preços diários.

Vamos começar pelo processo de Ornstein-Uhlenbeck.

### Ornstein-Uhlenbeck

Conforme vimos antes, para esse processo temos uma densidade estacionária normal.

$$X_t \sim N \left( x_0 e^{-\theta t}, \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta t}) \right)$$

Calculando a log-verossimilhança, temos

$$l(\theta, \sigma | \mathbf{x}) = -\frac{n}{2} \ln \left( \frac{\pi \sigma^2}{\theta} (1 - e^{-2\theta t}) \right) - \frac{\theta}{\sigma^2 (1 - e^{-2\theta t})} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0 e^{-\theta t})^2$$

Realizando a estimação obtemos

$$\hat{\theta} = -0.291$$

$$\hat{\sigma} = 1844$$

Note que o valor de  $\theta$ , que está associado ao valor anterior do preço, é relativamente alto (podemos entender que 29% do valor atual do preço é influenciado pelo preço anterior), sugerindo que o preço atual contém informação sobre o preço futuro. Isso, também, reforça a suposição de mercados fracamente eficientes. Note que o valor do parâmetro associado à volatilidade é bem alto, sugerindo que há bastante risco nesse ativo.

Uma vez estimados os parâmetros, realizamos uma simulação dos valores do processo usando a distribuição estacionária e obtemos o seguinte gráfico.

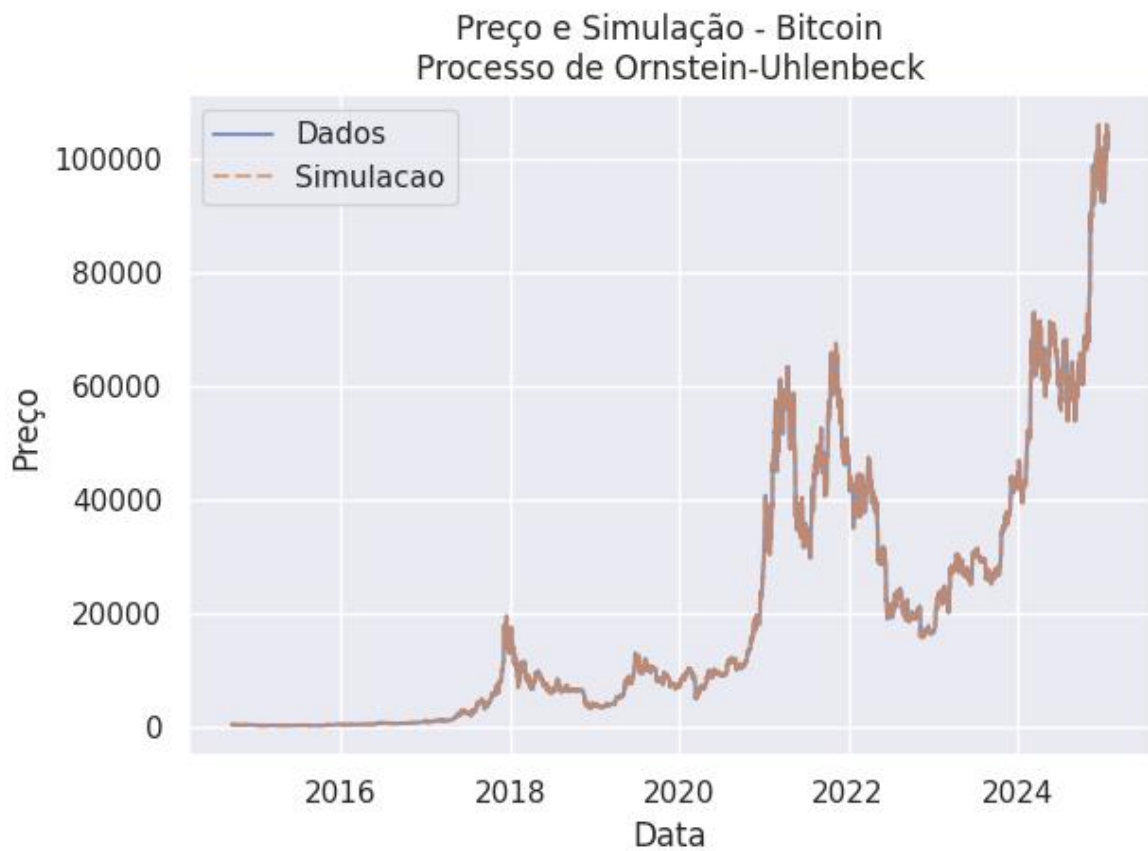


Figura 3.5: Gráfico de linhas do preço real do Bitcoin e do preço simulado.

Veja como aparentemente os valores simulados são praticamente os mesmos que os reais.

Vejamos, agora, um gráfico com os resíduos (diferença entre simulação e valor real), e podemos notar algo interessante.

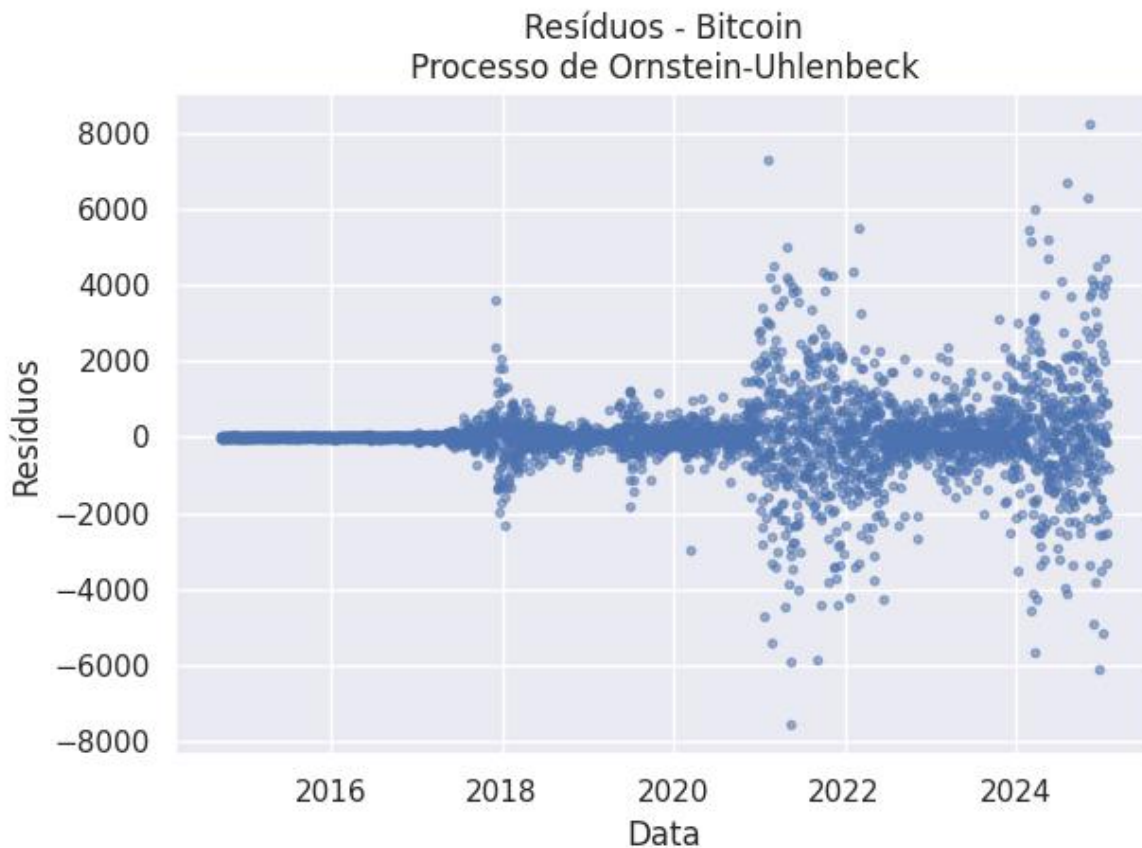


Figura 3.6: Gráfico de resíduos para o processo de Ornstein-Uhlenbeck.

Note como que ao passar do tempo os valores absolutos dos resíduos vão ficando cada vez maiores, sugerindo que a variância varia de acordo com o tempo. Aqui podemos ver que a suposição de variância constante que fizemos para a modelagem não parece muito razoável. Este não é um problema desconhecido: outras modelagens usando a Equação de Black-Scholes propõem o uso de uma volatilidade estocástica (uma volatilidade que muda com o tempo).

Seguiremos para o Movimento Browniano Geométrico agora.

## Movimento Browniano Geométrico

Vimos que o Movimento Browniano não tem distribuição estacionária, então usaremos a densidade de transição.

$$X_t|x_0 \sim LN \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \ln(x_0); \sigma^2 t \right)$$

Obtemos, então, a seguinte log-verossimilhança.

$$l(\mu, \sigma|\mathbf{x}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi t \sigma^2) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \frac{1}{2\sigma^2 t} \sum_{i=1}^n \left[ \ln(x_i) - \ln(x_0) - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]^2$$

Realizando a estimação, obtemos

$$\hat{\mu} = 3.709$$

$$\hat{\sigma} = 0.5786$$

A interpretação aqui não é muito trivial pois os dois parâmetros estão associados ao valor passado. Mas, entretanto, podemos perceber como o parâmetro associado à volatilidade ( $\sigma$ ) é bem menor aqui em comparação com o exemplo anterior. Isso se dá pois, na definição do processo,  $\sigma$  multiplica o valor passado, daí podemos entender que seu valor está associado a uma proporção daquele.

Vejam um gráfico com os valores estimados.

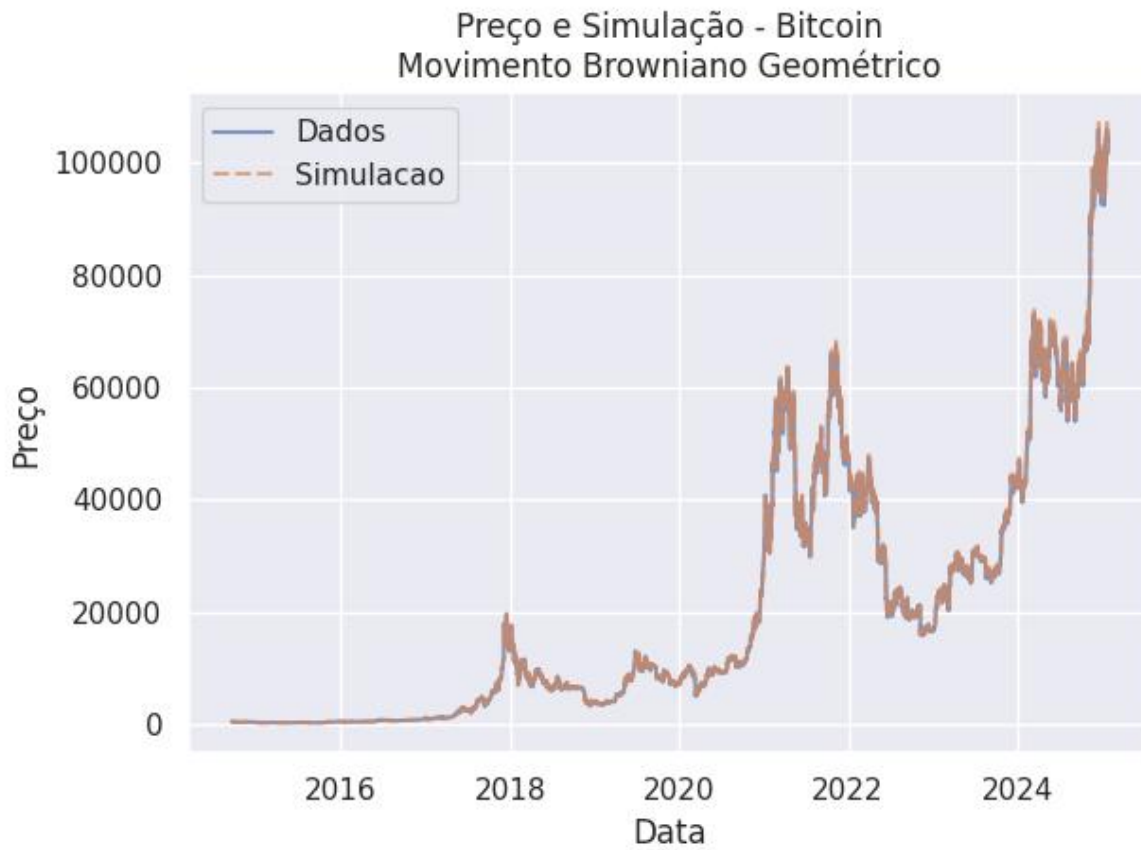


Figura 3.7: Gráfico de linhas com os preços observados do Bitcoin e os preços simulados.

Neste caso também parece que os valores simulados estão muito próximos dos observados.

Vejamos o gráfico dos resíduos.

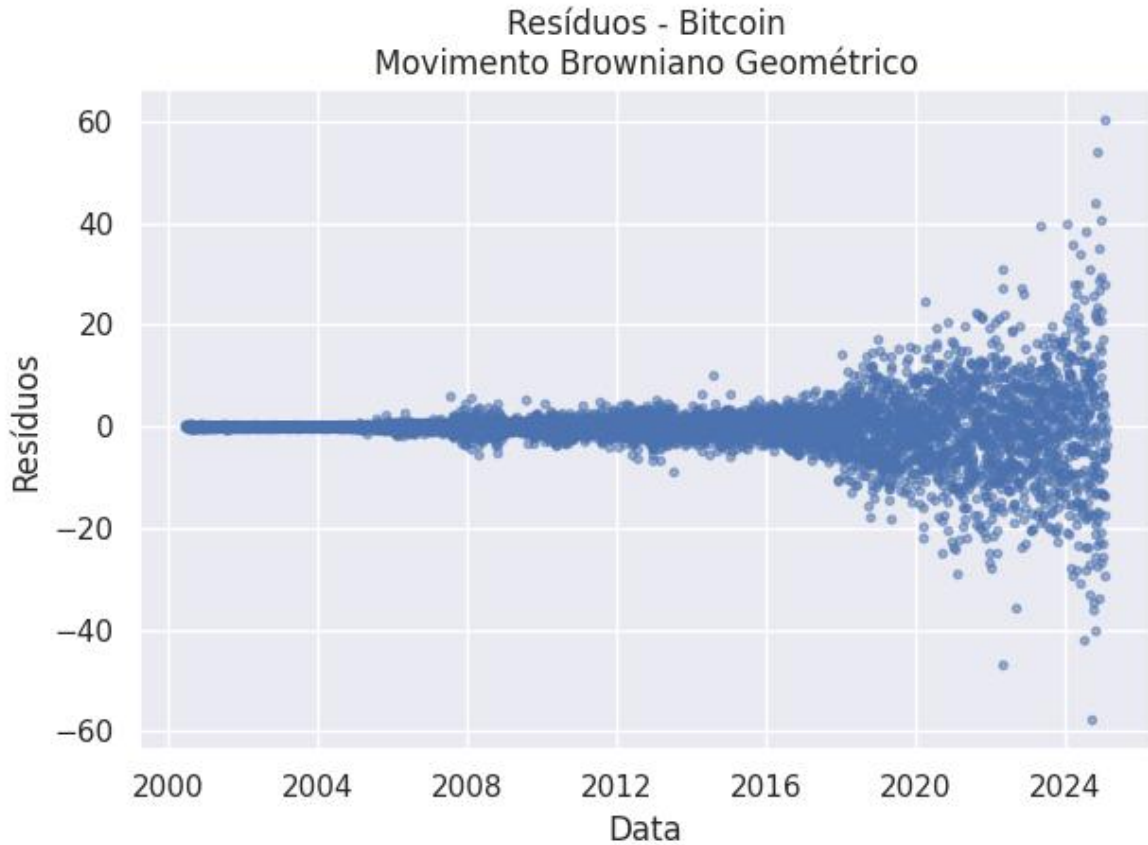


Figura 3.8: Gráfico de resíduos para o Movimento Browniano Geométrico.

Note que temos o mesmo comportamento do que antes, reforçando a ideia da utilização de uma volatilidade estocástica na modelagem. Veja, também, que os resíduos aqui são bem menores do que os observados no outro processo, sugerindo que o Movimento Browniano Geométrico é mais adequado para os preços do Bitcoin.

Analisando o gráfico de resíduos dos dois processos, podemos ver que para Ornstein-Uhlenbeck os resíduos assumem valores maiores do que para o Movimento Browniano Geométrico, indicando que o ajuste pelo segundo é mais adequado do que pelo primeiro. Também, usamos a densidade estacionária para Ornstein-Uhlenbeck, enquanto a série de preços do Bitcoin não apresenta estacionariedade.

Agora, veremos uma tabela com 48 ações (3.1) e suas estimativas de volatilidade usando os dois processos para efeito de comparação. Incluso, também, o período em dias - que é o tamanho da amostra. Veja o código utilizado no Apêndice.

Os valores obtidos não são diretamente comparáveis por conta da maneira como o parâmetro relacionado à volatilidade ( $\sigma$ ) entra na definição de cada um dos processos. Mas, podemos interpretá-los como valor absoluto (para Ornstein-Uhlenbeck) ou como proporção do valor passado (para Movimento Browniano Geométrico).

Veja, no gráfico de dispersão, como os valores estimados para cada um dos processos parecem ter uma correlação. Isso nos indica que ambos os processos trazem informações parecidas sobre  $\sigma$ .



Figura 3.9: Gráfico de dispersão para as estimações de volatilidade para cada um dos processos estudados aqui.

Aqui, enfim, encerramos os estudos. Seguiremos para a conclusão para recapitular o que foi feito nesta monografia.

| Ticker | Nome do Ativo                               | Período em Dias | Orn-Uhlen  | Mov Brow Geo |
|--------|---|-----------------|------------|--------------|
| AAPL   | Apple Inc.                                  | 16118           | 14.927000  | 0.447522     |
| MSFT   | Microsoft Corporation                       | 14201           | 28.976000  | 0.334759     |
| GOOGL  | Alphabet Inc. (Google)                      | 7467            | 19.464000  | 0.304274     |
| AMZN   | Amazon.com, Inc.                            | 10120           | 22.601000  | 0.551608     |
| META   | Meta Platforms, Inc. (Facebook)             | 4638            | 82.392000  | 0.398333     |
| NFLX   | Netflix, Inc.                               | 8286            | 101.206000 | 0.559368     |
| NVDA   | NVIDIA Corporation                          | 9503            | 13.358000  | 0.598004     |
| PYPL   | PayPal Holdings, Inc.                       | 3494            | 47.452000  | 0.382690     |
| INTC   | Intel Corporation                           | 16388           | 8.043000   | 0.402151     |
| AMD    | Advanced Micro Devices, Inc.                | 16388           | 19.986000  | 0.592051     |
| DIS    | The Walt Disney Company                     | 23037           | 13.570000  | 0.315001     |
| V      | Visa Inc.                                   | 6159            | 32.791000  | 0.287417     |
| JNJ    | Johnson Johnson                             | 23037           | 9.790000   | 0.228413     |
| PFE    | Pfizer Inc.                                 | 19234           | 3.843000   | 0.274395     |
| BABA   | Alibaba Group Holding Limited               | 3784            | 55.079000  | 0.408878     |
| XOM    | Exxon Mobil Corporation                     | 23037           | 8.388000   | 0.229638     |
| CVX    | Chevron Corporation                         | 23037           | 12.218000  | 0.256359     |
| WMT    | Walmart Inc.                                | 19149           | 4.041000   | 0.291662     |
| KO     | The Coca-Cola Company                       | 23037           | 3.814000   | 0.229199     |
| NKE    | Nike, Inc.                                  | 16128           | 13.359000  | 0.341399     |
| MCD    | McDonald's Corporation                      | 21392           | 15.580000  | 0.304291     |
| BA     | Boeing Company                              | 23037           | 33.198000  | 0.339036     |
| GS     | Goldman Sachs Group, Inc.                   | 9401            | 53.692000  | 0.360355     |
| IBM    | International Business Machines Corporation | 23037           | 14.027000  | 0.251492     |
| T      | AT T Inc.                                   | 15044           | 2.169000   | 0.246491     |
| VZ     | Verizon Communications Inc.                 | 15044           | 4.426000   | 0.235711     |
| PEP    | PepsiCo, Inc.                               | 19234           | 10.748000  | 0.242205     |
| HD     | The Home Depot, Inc.                        | 15834           | 27.783000  | 0.363445     |
| ABBV   | AbbVie Inc.                                 | 4409            | 22.398000  | 0.264989     |
| UNH    | UnitedHealth Group Incorporated             | 14713           | 43.487000  | 0.397273     |
| WFC    | Wells Fargo Company                         | 19234           | 6.403000   | 0.327787     |
| C      | Citigroup Inc.                              | 17557           | 39.788000  | 0.398550     |
| JPM    | JPMorgan Chase Co.                          | 16388           | 15.195000  | 0.351736     |
| MA     | Mastercard Incorporated                     | 6823            | 54.932000  | 0.326788     |
| AXP    | American Express Company                    | 19234           | 17.906000  | 0.347163     |
| TGT    | Target Corporation                          | 18969           | 18.666000  | 0.324855     |
| CAT    | Caterpillar Inc.                            | 23037           | 21.401000  | 0.295458     |
| GE     | General Electric Company                    | 23037           | 17.410000  | 0.274644     |
| SAP    | SAP SE                                      | 10725           | 21.463000  | 0.381890     |
| LMT    | Lockheed Martin Corporation                 | 17557           | 35.207000  | 0.303193     |
| CSCO   | Cisco Systems, Inc.                         | 12765           | 7.754000   | 0.392963     |
| MRK    | Merck Co., Inc.                             | 23037           | 7.194000   | 0.248791     |
| AMGN   | Amgen Inc.                                  | 15201           | 25.385000  | 0.376737     |
| SQ     | Block, Inc. (Square)                        | 3358            | 58.404000  | 0.577490     |
| SPG    | Simon Property Group, Inc.                  | 11368           | 19.351000  | 0.340026     |
| MS     | Morgan Stanley                              | 11662           | 13.165000  | 0.443421     |
| TMO    | Thermo Fisher Scientific Inc.               | 16388           | 47.581000  | 0.316605     |
| ISRG   | Intuitive Surgical, Inc.                    | 8992            | 47.808000  | 0.480791     |

Tabela 3.1: Tabela com os ativos e as estimações do parâmetro associado à volatilidade.



# Capítulo 4

## Conclusão

Nesta monografia, tínhamos como objetivo a estimação de um processo estocástico que supomos que gera os preços de um ativo. O ponto principal era encontrar maneiras de estimar a volatilidade ( $\sigma$ ) do ativo.

O estudo até chegar neste ponto foi construtivo, começando por nos contextualizar sobre o que é o mercado financeiro, bolsa de valores, ativos financeiros e derivativos, bem como estabelecemos algumas definições de alguns conceitos relacionados a eles. Em seguida, para iniciar a modelagem dos preços de uma opção de compra européia, fizemos algumas suposições sobre o funcionamento do mercado financeiro.

Para deduzir a Equação de Black-Scholes, começamos estudando sobre processos estocásticos, entendendo como funciona um processo estocástico em tempo contínuo, conhecemos processos importantes como o Processo de Wiener e o Processo de Itô. A partir deste último, descobrimos uma maneira de lidar com diferenciais estocásticas, transformando-as em diferenciais ordinárias utilizando o Lema de Itô (que deduzimos utilizando Séries de Taylor).

Com essas ferramentas em mãos, partimos para encontrar a Equação de Black-Scholes, que é utilizada para precificar uma opção. Para desenvolvê-la, começamos de uma diferencial estocástica que transformamos utilizando o Lema de Itô, e depois a resolvemos utilizando a Transformada de Fourier e a solução da Equação de Difusão.

Por fim, chegamos à estimação de processos estocásticos e, para tanto, utilizamos a

Equação de Chapman-Kolmogorov para obter a função de densidade de transição e aplicamos o método da máxima verossimilhança para estimar os parâmetros do processo - em particular, o parâmetro associado à volatilidade. Vimos que o Movimento Browniano Geométrico ofereceu um melhor ajuste que o processo de Ornstein-Uhlenbeck.

O mais importante aqui foi a estimação da volatilidade, que, na prática, é o único valor da precificação de uma opção que não é conhecido (o preço de uma opção é conhecido, basta que procuremos na bolsa de valores). A partir da volatilidade estimada, podemos ter uma noção do quanto de risco uma opção pode ter, auxiliando a tomada de decisão de um investidor qualquer.

# Referências Bibliográficas

- Bakshi, G. e Madan, D. B. (2000). Spanning and derivative security valuation. *Journal of Financial Economics*, **55**(1).
- Black, F. e Scholes, M. (1972). The effects of dividend yield and option pricing. *Journal of Financial Economics*, **2**(1).
- Black, F. e Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**(3).
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, **50**(4).
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, **6**(2).
- Hull, J. C. (1998). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, third edition.
- James, B. (2010). *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*. Projeto Euclides.
- Kardar, M. (2007). *Statistical Physics of Fields*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lo, A. W. (2022). *Em busca do Portifólio Perfeito*. Alta Books.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**(1).
- Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *Journal of Finance*, **49**(3).
- STRAUSS, W. A. (1992). *Partial Differential Equations: An Introduction*. Wiley.



# Apêndice A

## Metodo das Curvas Caracteristicas

Esse e um metodo de resolucao para equacoes diferenciais parciais assim como a solucao da Equacao de Difusao.

Seja  $u(x, y)$  uma funcao que satisfaz

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

onde

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\u_y &= \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}$$

Um caso particular importante e

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c_0(x, y)u + c_1(x, y)$$

A funcao  $u$  gera uma superficie. Podemos parametriza-la por um único parametro  $s$  e temos a condicao inicial

$$\Gamma = \Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s)) , s \in I \subset \mathbb{R}$$

A equacao do caso particular pode ser escrita como

$$(a, b, c_0u + c_1) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0$$

Dai temos que o vetor  $(u_x, u_y, -1)$  é normal à superfície de  $u$  e que o vetor  $(a, b, c_0u + c_1)$  está no plano tangente à superfície de  $u$ .

Então, o sistema de equações

$$\begin{aligned}\frac{dx(s)}{ds} &= a(x(s), y(s)) \\ \frac{dy(s)}{ds} &= b(x(s), y(s)) \\ \frac{du(s)}{ds} &= c_0(x(s), y(s))u(s) + c_1(x(s), y(s))\end{aligned}$$

define as curvas que pertencem à superfície de solução.

Portanto, para utilizar esse método basta encontrar esse sistema e resolvê-lo para  $u$  levando em conta as condições iniciais de seu problema.

# Apêndice B

## Código em Python para Estimacao de Maxima Verossimilhanca

Segue o código em Python que foi utilizado nessa monografia.

```
1
2 # -----+
3 # 0) Importando os modulos necessarios |
4 # -----+
5
6 import numpy as np # Calculo Vetorizado
7 import pandas as pd # Manipulacao de dados tabulares
8 import matplotlib.pyplot as plt # Graficos
9 import seaborn as sns # Graficos estilizados
10 import yfinance as yf # Dados do Yahoo Finance
11 from scipy.optimize import minimize # Funcao de minimizacao do
    pacote Scipy
12
13 # -----+
14 # 1) Definindo as funcoes de logverossimilhanca para |
15 # o processo de Orneistein-Uhlenbeck e para o Movimento |
16 # Browniano Geometrico |
17 # -----+
18
19 # Criando uma funcao com a logverossimilhanca para Orneistein-
    Uhlenbeck
```

```

20 def lv_ou(parametros, dados, t):
21
22     # Separando o vetor de parametros em variaveis
23     theta, sigma = parametros
24
25     # Calculando o tamanho da amostra
26     n = len(dados)
27
28     # Calculando a funcao de verossimilhanca
29     res = - (n / 2) * np.log(np.pi * sigma ** 2 / \
30         theta * (1 - np.exp(-2 * theta * t))) \
31         - theta / ( sigma ** 2 * (1 - np.exp(-2 * theta * t))) \
32         * np.sum((dados[1:] - dados[:n-1] * np.exp(-theta * t)) **
33             2)
34
35     # Retornando o resultado negativo
36     return -res
37
38 # Criando uma funcao com a logverossimilhanca para o Movimento
39 # Browniano
40 # Geometrico
41 def lv_mb(parametros, dados, t):
42
43     # Separando o vetor de parametros em variaveis
44     mu, sigma = parametros
45
46     # Calculando o tamanho da amostra
47     n = len(dados)
48
49     # Calculando a funcao de verossimilhanca
50     res = -n / 2 * np.log(2 * np.pi * sigma**2 * t) - 1 / (2 *
51         sigma**2 * t) * np.sum(
52             (np.log(dados[1:]) - np.log(dados[:n-1]) - (mu - 0.5 *
53                 sigma**2) * t) ** 2
54         )

```

```
51
52 # Retornando o resultado negativo
53 return -res
54
55 # -----+
56 # 3) Puxando os dados de preços diário do Bitcoin |
57 # -----+
58
59 # Definindo o ticker
60 ticker = "BTC-USD"
61
62 # Definindo o período (1 ano, 1 mês, 5 anos etc)
63 periodo = "max"
64
65 # Baixando os preços do Bitcoin
66 dados = yf.download(ticker, period=periodo)
67
68 # -----+
69 # 4.1) Orneistein-Uhlenbeck: Otimização da |
70 # logverossimilhança, simulação do processo |
71 # e visualização dos resultados |
72 # -----+
73
74 # Otimização Orneistein-Uhlenbeck
75 # OBS: para saber se o método convergiu basta rodar print(
76 resultado)
77 resultado = minimize(lv_ou,
78                     [1, 1],
79                     args=(dados['Close'].values, 1/365),
80                     bounds=[(None, None), (1e-5, None)])
81
82 # Calculando um vetor de médias estimadas
83 mu = dados['Close'] * np.exp(-resultado.x[0] * (1/365))
84
85 # Calculando a variância estimada
```

```
85 sig_2 = (resultado.x[1] ** 2) / (2 * resultado.x[0]) * (1 - np.  
    exp(-2 * resultado.x[0] * (1/365)))  
86  
87 # Criando um vetor para guardar os valores simulados,  
    inicializado com  
88 # o primeiro valor de preco observado  
89 simulacao = [dados['Close'].values[0]]  
90  
91 # Looping para iterar entre os indices da amostra  
92 for i in range(1, len(dados['Close'])):  
93  
94     # Simulando o valor x_i usando x_(i-1)  
95     simulacao.append(np.random.normal(mu.values[i-1], np.sqrt(sig_2  
        )))  
96  
97 # Tranformando o tipo de dado do vetor de simulacao para uma  
    array numpy  
98 simulacao = np.array(simulacao)  
99  
100 # Escolhendo o tema padrao do pacote seaborn para o estilo dos  
    graficos  
101 sns.set_theme()  
102  
103 # Inicializando um DataFrame  
104 df = pd.DataFrame()  
105  
106 # Incluindo os valores do preco do Bitcoin e da simulacao no  
    DataFrame  
107 df['Dados'] = dados_acao['Close']  
108 df['Simulacao'] = simulacao  
109  
110 # Plotando o preco e a simulacao  
111 sns.lineplot(data=df, alpha=0.7)  
112  
113 # Definindo o titulo do grafico
```

```

114 plt.title('Preco e Simulacao - Bitcoin\nOrneistein-Uhlenbeck')
115
116 # Definindo o nome dos eixos
117 plt.xlabel('Data')
118 plt.ylabel('Preco')
119
120 # Forcando que a legenda apareca no grafico
121 plt.legend()
122
123 # Ajustando a figura
124 plt.tight_layout()
125
126 # Salvando o grafico
127 plt.savefig('bitcoin_ou.jpg')
128
129 # Limpando a figura do grafico
130 plt.clf()
131
132 # Calculando alguns erros
133 df['Erro'] = df['Dados'] - df['Simulacao']
134 df['Erro Quadratico'] = df['Erro'] ** 2
135 df['Erro Percentual Absoluto'] = abs(df['Erro'] / df['Dados'])
136
137 # Plotando um grafico dos residuos
138 plt.plot(df['Erro'], linestyle='', marker='.', alpha=0.5)
139 plt.title('Residuos - Bitcoin\nOrneistein-Uhlenbeck')
140 plt.xlabel('Data')
141 plt.ylabel('Residuos')
142 plt.tight_layout()
143 plt.savefig('bitcoin_ou_erro.jpg')
144
145 # -----+
146 # 4.2) Movimento Browniano Geometrico: Otimizacao da |
147 # logverossimilhanca, simulacao do processo          |
148 # e visuazilacao dos resultados                       |

```

```
149 # -----+
150
151 # Otimizacao Movimento Browniano Geometrico
152 # OBS: para saber se o metodo convergiu basta rodar print(
      resultado)
153 resultado = minimize(lv_mb,
154                      [1, 1],
155                      args=(dados['Close'].values, 1/365))
156
157 # Calculando um vetor de medias estimadas
158 mu = (resultado.x[0] - resultado.x[1] ** 2 / 2) / 365 \
159       + np.log(dados['Close'])
160
161 # Calculando a variancia estimada
162 sig_2 = (resultado.x[1] ** 2) / 365
163
164 # Criando um vetor para guardar os valores simulados,
      inicializado com
165 # o primeiro valor de preco observado
166 simulacao = [dados['Close'].values[0]]
167
168 # Looping para iterar entre os indices da amostra
169 for i in range(1, len(dados['Close'])):
170
171     # Simulando o valor x_i usando x_(i-1)
172     simulacao.append(np.random.lognormal(mu.values[i-1], np.sqrt(
          sig_2)))
173
174 # Tranformando o tipo de dado do vetor de simulacao para uma
      array numpy
175 simulacao = np.array(simulacao)
176
177 # Escolhendo o tema padrao do pacote seaborn para o estilo dos
      graficos
178 sns.set_theme()
```

```
179
180 # Inicializando um DataFrame
181 df = pd.DataFrame()
182
183 # Incluindo os valores do preco do Bitcoin e da simulacao no
      DataFrame
184 df['Dados'] = dados['Close']
185 df['Simulacao'] = simulacao
186
187 # Plotando o preco e a simulacao
188 sns.lineplot(data=df, alpha=0.7)
189
190 # Definindo o titulo do grafico
191 plt.title('Preco e Simulacao - Bitcoin\nMovimento Browniano
      Geometrico')
192
193 # Definindo o nome dos eixos
194 plt.xlabel('Data')
195 plt.ylabel('Preco')
196
197 # Forcando que a legenda apareca no grafico
198 plt.legend()
199
200 # Ajustando a figura
201 plt.tight_layout()
202
203 # Salvando o grafico
204 plt.savefig('bitcoin_mb.jpg')
205
206 # Limpando a figura do grafico
207 plt.clf()
208
209 # Calculando alguns erros
210 df['Erro'] = df['Dados'] - df['Simulacao']
211 df['Erro Quadratico'] = df['Erro'] ** 2
```

```
212 df['Erro Percentual Absoluto'] = abs(df['Erro'] / df['Dados'])
213
214 # Plotando um grafico dos residuos
215 plt.plot(df['Erro'], linestyle='', marker='.', alpha=0.5)
216 plt.title('Residuos - Bitcoin\nMovimento Browniano Geometrico')
217 plt.xlabel('Data')
218 plt.ylabel('Residuos')
219 plt.tight_layout()
220 plt.savefig('bitcoin_mb_erro.jpg')
221
222 # -----+
223 # 5) Estimacao da volatilidade para diversos ativos |
224 # -----+
225
226 # Dicionario com o mapeamento dos simbolos para os nomes das
    empresas
227 ativos = {
228     'AAPL': 'Apple Inc.',
229     'MSFT': 'Microsoft Corporation',
230     'GOOGL': 'Alphabet Inc. (Google)',
231     'AMZN': 'Amazon.com, Inc.',
232     'META': 'Meta Platforms, Inc. (Facebook)',
233     'NFLX': 'Netflix, Inc.',
234     'NVDA': 'NVIDIA Corporation',
235     'PYPL': 'PayPal Holdings, Inc.',
236     'INTC': 'Intel Corporation',
237     'AMD': 'Advanced Micro Devices, Inc.',
238     'DIS': 'The Walt Disney Company',
239     'V': 'Visa Inc.',
240     'JNJ': 'Johnson Johnson',
241     'PFE': 'Pfizer Inc.',
242     'BABA': 'Alibaba Group Holding Limited',
243     'XOM': 'Exxon Mobil Corporation',
244     'CVX': 'Chevron Corporation',
245     'WMT': 'Walmart Inc.',
```

```
246     'KO': 'The Coca-Cola Company',
247     'NKE': 'Nike, Inc.',
248     'MCD': 'McDonald\'s Corporation',
249     'BA': 'Boeing Company',
250     'GS': 'Goldman Sachs Group, Inc.',
251     'IBM': 'International Business Machines Corporation',
252     'T': 'AT&T Inc.',
253     'VZ': 'Verizon Communications Inc.',
254     'PEP': 'PepsiCo, Inc.',
255     'HD': 'The Home Depot, Inc.',
256     'ABBV': 'AbbVie Inc.',
257     'UNH': 'UnitedHealth Group Incorporated',
258     'WFC': 'Wells Fargo Company',
259     'C': 'Citigroup Inc.',
260     'JPM': 'JPMorgan Chase Co.',
261     'MA': 'Mastercard Incorporated',
262     'AXP': 'American Express Company',
263     'TGT': 'Target Corporation',
264     'CAT': 'Caterpillar Inc.',
265     'GE': 'General Electric Company',
266     'SAP': 'SAP SE',
267     'LMT': 'Lockheed Martin Corporation',
268     'CSCO': 'Cisco Systems, Inc.',
269     'MRK': 'Merck Co., Inc.',
270     'AMGN': 'Amgen Inc.',
271     'SQ': 'Block, Inc. (Square)',
272     'SPG': 'Simon Property Group, Inc.',
273     'MS': 'Morgan Stanley',
274     'TMO': 'Thermo Fisher Scientific Inc.',
275     'ISRG': 'Intuitive Surgical, Inc.'
276 }
277
278 # Criando um dicionario para guardar os valores das estimacoes
279 estimacoes = {'Ticker': [],
280               'Nome do Ativo': []},
```

```
281         'Periodo em Dias': [],
282         'Orn-Uhlen': [],
283         'Mov Brow Geo': []}
284
285 # Looping para iterar entre os tickers enumerados
286 for i, ticker in enumerate(ativos.keys()):
287
288     # Baixando os precos do i-esimo ativo
289     dados = yf.download(ticker, period='max')
290
291     # Otimizacao Orneistein-Uhlenbeck
292     resultado_ou = minimize(lv_ou,
293                             [1, 1],
294                             args=(dados['Close'].values, 1/252),
295                             bounds=[(None, None), (1e-5, None)])
296
297     # Otimizacao Movimento Browniano Geometrico
298     resultado_mb = minimize(lv_mb,
299                             [1, 1],
300                             args=(dados['Close'].values, 1/252),
301                             method='COBYLA',
302                             bounds=[(-np.inf, np.inf), (1e-5, np.inf)])
303
304     # Salvando os resultados no dicionario
305     estimacoes['Ticker'].append(ticker)
306     estimacoes['Nome do Ativo'].append(ativos[ticker])
307     estimacoes['Periodo em Dias'].append((dados['Close'].index.max
308         () \
309             - dados['Close'].index.min
310             ()).days)
311     estimacoes['Orn-Uhlen'].append(round(resultado_ou.x[1], 3))
312     estimacoes['Mov Brow Geo'].append(round(resultado_mb.x[1], 6))
313
314 # Transformando o dicionario em um DataFrame
315 df_estimacoes = pd.DataFrame(estimacoes)
```