

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia

CURSO DE ENGENHARIA FÍSICA

JULIA CAROLINA GONÇALVES

Quantização de Teoria de Cordas Bosônicas

São Carlos, SP
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA FÍSICA

JULIA CAROLINA GONÇALVES

QUANTIZAÇÃO DE TEORIA DE CORDAS BOSÔNICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título/grau de bacharel em Engenharia Física.

Orientação: Prof. Dr. Fernando David Marmolejo Schmidt

São Carlos, SP
2025

Ficha Catalográfica

Gonçalves, Julia Carolina

Quantização de Teoria de Cordas Bosônicas / Julia Carolina Gonçalves – 2025. 65f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Fernando David Marmolejo Schmitt

Banca Examinadora: Alex Eduardo de Bernardini, Javier Fernando Ramos Caro

Bibliografia

1. Teoria de cordas bosônicas. 2. Quantização via cone de luz. 3. Quantização covariante.
- I. Gonçalves, Julia Carolina. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180

JULIA CAROLINA GONÇALVES

QUANTIZAÇÃO DE TEORIA DE CORDAS BOSÔNICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título/grau de bacharel em Engenharia Física.

Universidade Federal de São Carlos.

São Carlos, __ de Fevereiro de 2025.

Orientador

Dr. Fernando David Marmolejo Schmitt
Universidade Federal de São Carlos

Examinador

Dr. Alex Eduardo de Bernardini
Universidade Federal de São Carlos

Examinador

Dr. Javier Fernando Ramos Caro
Universidade Federal de São Carlos

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus pais, Junior e Silmara, por todo o esforço para que eu pudesse realizar meus sonhos. Vocês foram meus pilares e amigos. Obrigada por todo sacrifício e, mesmo perante as dificuldades, não terem me deixado caminhar sozinha. Agradeço também ao meu irmão Rafael, por todas as conversas e incentivos desde que éramos crianças.

Agradeço também aos meus amigos, Milena, Leo, Luigi, Mário e Leo Zortea por todos os momentos e risadas que me proporcionaram. Mesmo alguns tendo entrado na minha vida mais recentemente, vocês me mostraram que existe um lado leve e bonito da vida quando compartilhamos com mais pessoas.

Agradeço ao meu companheiro e amor, Vinícius, pelas conversas sobre todos os assuntos possíveis e por acreditar sempre em mim. Você é como um raio de sol em um dia frio, obrigada por colorir minha vida com cores que nem imaginava que existiam.

Agradeço ao meu orientador, David, por toda a ajuda ao longo da minha graduação e por ter me acolhido com paciência desde o primeiro ano.

Agradeço a FAPESP pelas três bolsas concedidas durante a minha graduação que ajudaram a originar esse trabalho, e o apoio financeiro, que foi de importância inestimável.

Por fim, agradeço a todos que lutam por uma educação gratuita, inclusiva e libertadora.

RESUMO

GONÇALVES, Julia Carolina. *Quantização de Teoria de Cordas Bosônicas*. 2025. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Física) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos.

Surgida em 1969, a Teoria das Cordas foi formulada visando explicar as interações fortes. Entretanto, ao longo de seu desenvolvimento, percebeu-se que ela tinha potencial de ser tornar um modelo unificador das 4 interações fundamentais da Natureza. Mantendo os critérios usuais de quantização em conjunto com a cinemática padrão da covariância geral, seu único novo axioma é que, a nível fundamental, a matéria é constituída de objetos unidimensionais, as cordas. Apesar da sua simplicidade, a Teoria das Cordas é atualmente a principal proposta de unificação da Gravidade Quântica e a TQC. Desse modo, o estudo deste âmbito do conhecimento tem importância indubitável não apenas na Física de Altas Energias, mas também na Matemática e no entendimento do funcionamento do Universo. Sendo assim, o objetivo dessa monografia é apresentar duas formas de quantização da teoria de cordas, juntamente com a abordagem sobre teoria de calibre e teoria de campos conforme.

Palavras-chave: Teoria de Cordas Bosônicas. Quantização via Cone de Luz. Quantização Covariante. Teoria de Campos Conformes.

ABSTRACT

GONÇALVES, Julia Carolina. *Quantization of Bosonic String Theory*. 2025. Course conclusion work (Graduate in Physics Engineering) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos.

Developed in 1969, String Theory was formulated aiming to explain the strong interactions. However, throughout its development, it was noticed that the theory has the potential to become a unification model for the 4 fundamental interactions of nature. While keeping the usual patterns of quantization together with general covariance's standard kinematics, its only new axiom is that, in a fundamental level, the matter is composed of unidimensional objects: the strings. Despite of its simplicity, the String Theory is currently the main proposal for the unification of Quantum Gravity and QFT. Thereby, the study of this field of knowledge has an unquestionable importance, not only in the matter of High Energy Physics but also in mathematics and in understanding the Universe itself and its functioning. Therefore, the objective of this monograph is to present two approaches to the quantization of string theory, alongside a discussion on gauge theory and conformal field theory.

Keywords: Bosonic String Theory. Light Cone Quantization. Covariant Quantization. Conformal Field Theory.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Quantização de Sistemas Gauge	3
1.2	Coordenadas Cone de Luz	4
2	Cordas Não-Relativísticas	6
3	Cordas Relativísticas	10
3.1	A Ação de Nambu-Goto	11
3.2	Equações de Movimento	12
3.3	Primeira Parametrização da Corda	13
3.3.1	Gauge Estático	14
3.3.2	Parametrização Perpendicular de σ	16
3.4	Cargas Conservadas Na Folha de Mundo	18
4	Quantização Via Cone de Luz	21
4.1	Gauge Cone de Luz	21
4.1.1	Fixação do Parâmetro τ	21
4.1.2	Fixação do Parâmetro σ	22
4.1.3	Solução da Equação de Movimento	24
4.2	Quantização de Cordas Abertas	28
4.2.1	Relação de Comutação para os Osciladores	30
4.2.2	Os Modos de Virasoro	32
4.2.3	Recuperando a Invariância de Lorentz	33
4.2.4	Espaço de Estados	35
4.3	Quantização de Cordas Fechadas	36
5	Introdução à Teoria de Campos Conformes	38
5.1	Conceitos Básicos em Teoria de Campos Conformes	38
5.2	Grupo Conforme	39
5.3	Teoria de Campos Conformes em 2- Dimensões	40
5.4	Campos Primários	41
5.5	Tensor Energia-Momento	41
5.6	Expansão Produto de Operadores	41
5.7	Álgebra de Operadores de Campos Primários Quasi-Quirais	43
5.8	Produtos Ordenados Normalmente	43
5.9	Módulo de Verma	44

6	Quantização Covariante	46
6.1	Operadores de Virasoro de Cordas Abertas	47
6.2	Seleção de Vínculos	48
6.3	Espaço de Estados Covariantes	50
6.4	Operadores de Virasoro de Cordas Fechadas	52
6.5	A Ação de Polyakov	52
7	Conclusões	56

1 Introdução

A busca por unificações está historicamente presente na física: diferentes fenômenos foram reconhecidos como relacionados e teorias foram descobertas ou reformuladas. No século XIX, devido a Maxwell, tem-se a unificação entre a eletricidade e o eletromagnetismo. Em meados do século XX, o modelo de Weinberg-Salam de interações eletrofracas uniu o eletromagnetismo e a força fraca. A Cromodinâmica Quântica (CDQ) surge quantificando com sucesso a força forte [Zwiebach, 2009].

A junção de ambas unificações fez surgir o Modelo Padrão. Apesar de elegante e poderoso, ele ainda é incompleto, possuindo diversos problemas: muitos parâmetros a serem determinados; a união da gravidade e a teoria quântica produz uma Teoria Quântica de Campos (TQC) não renormalizável, sendo um forte sinal de que a unificação deve aparecer em altas energias; a teoria falha nas singularidades da relatividade geral; a teoria é antinatural, no sentido de que muitos parâmetros são menores do que o esperado. Urge, assim, a necessidade de se buscar uma nova teoria [Polchinski, 1998].

Em 1969, a Teoria das Cordas foi conjecturada e tinha como objetivo explicar a interação forte por meio da premissa de que, a nível fundamental, a matéria não consiste em partículas pontuais, mas em pequenos loops de cordas [Tong, 2009]. Com seu desenvolvimento, notou-se que a teoria também previa partículas fundamentais não necessárias para descrever a interação forte. Apesar da previsão de partículas como o fóton e o gráviton, a teoria também previa o táquion, o qual tem massa negativa e viaja mais rápido que a luz, criando um vácuo instável, inaceitável para uma teoria física. A resolução veio por meio da supersimetria, a qual relaciona partículas bosônicas e fermiônicas. Além disso, reduziu-se o número de dimensões, inicialmente previstas como 26, para 10 [Berkovits, 2004].

Dessarte, a Teoria das Cordas surge como a única em que, ao se espalhar a interação gravitacional, remove-se a divergência sem estragar a consistência da teoria gravitacional [Polchinski, 1998]. Assim, é possível enumerar os motivos para estudar tal teoria:

- É a principal proposta para uma teoria de unificação da Gravidade Quântica e da TQC, sendo uma teoria universal que lida tanto com as questões fundamentais da Relatividade quanto providencia um guia bem fundado para física de partículas além do Modelo Padrão;
- É amplamente aceito que a Teoria das cordas proporciona uma ferramenta poderosa para o estudo de teorias de campo de acoplamento forte via holografia, presente, por exemplo, na lei de Entropia de Bekenstein-Hawking. Tendo em vista a correspondência AdS/CFT, as considerações sobre o princípio holográfico se torna ainda mais interessante: tem-se uma dualidade de acoplamento forte-fraco, ou seja, fracamente acoplado, a teoria das cordas perturbativas no AdS é equivalente a uma teoria de campo fortemente acoplada. Existem aplicações desde a Teoria da Matéria Condensada (correspondência AdS/CMT)

até a Hidrodinâmica de Fluidos (AdS/Hidrodinâmica). Ainda que não seja a teoria da unificação, esses resultados sempre permanecerão válidos;

- A Teoria das Cordas tem fornecido exuberantes e frutíferas inter-relações entre a matemática e a física. A exemplo, tem-se o conceito de Simetria de Espelho, um correspondência um-para-um de variedades de Calabi-Yau. Há também o grupo teórico Monster Moonshine e a classificação de singularidades via diagramas DE Dynkin;
- A Teoria das Cordas tem desenvolvido numerosos resultados na Física de Altas Energias, sendo um conhecimento geral tão indispensável quanto uma base sólida em TQC para acompanhar os recentes desenvolvimentos atuais;
- A teoria é extremamente simples. O único novo axioma é que objetos fundamentais na natureza não são pontos, mas cordas unidimensionais. Isso então é combinado com a cinemática padrão da covariância geral com os processos usuais de quantização [Weigand, 2012].

Em suma, diversas abordagens convergem para uma única teoria: seja com o problema da divergência da gravidade quântica, a tentativa de explicar os padrões no Modelo Padrão, seja na busca de novas simetrias ou estruturas matemáticas úteis na construção de uma unificação, somos levados à teoria das cordas [Polchinski, 1998].

Uma forma de abordagem de quantização intuitiva e com uma bagagem matemática mais simples é por meio da quantização via cone de luz. Entretanto, sabe-se que a teoria de cordas é uma teoria invariante de Lorentz, mas, ao se realizar uma quantização via cone de luz, tal simetria não se manifesta mais. Em outras palavras, a escolha de uma coordenada particular X^+ para um tratamento especial esconde a simetria de Lorentz da teoria.

Um questionamento válido é se existe uma forma de realizar quantização mantendo a invariância de Lorentz manifesta. De fato, isso é possível, por meio da quantização covariante. Esta, além de preservar a simetria lorentziana de maneira explícita, também possibilita o tratamento de D0-branas. Ademais, a quantização covariante é a única forma que possibilita o cálculo do potencial taquiônico [Zwiebach, 2009].

Outro ponto notável é que esse método de quantização é útil para o cálculo de interações de cordas. A ação de Nambu-Goto é substituída pela ação de Polyakov [Weigand, 2012].

Para o entendimento mais completo a respeito da quantização covariante, é necessário o estudo da simetria conforme, que pode ser entendida como uma invariância sobre re-escala. Sistema com esse tipo de invariância não tem comprimento, massa ou escala de energia intrínseca. Teorias conformes 2D são ainda mais especiais pois o grupo de transformações conformes infinitesimais é de dimensão infinita, o que às vezes permite a possibilidade de resolver a teoria de maneira exata e completa (integráveis).

A invariância conforme tem papel importante em diferentes áreas, como

- Teoria de cordas, visto que a teoria de folha de mundo é uma teoria de campo conforme 2 dimensional;
- Em pontos fixos das equações do grupo de renormalização (GR), as quais se tornam invariantes de escala;
- Na correspondência AdS/CFT, a qual relaciona duas CFTs: uma teoria de supercorda em um espaço Anti-de-Sitter com uma teoria gauge supersmétrica na fronteira.

Teorias conformes bidimensionais normalmente possuem estruturas integráveis. A busca de teorias integráveis em dimensões maiores tornou-se um desafio na física teórica atual [Weigand, 2012]. Assim, pode-se afirmar que a linguagem na qual a Teoria de Cordas é escrita é a da CFT.

Em suma, essa monografia pretende abordar duas formas de quantização da Teoria de Cordas Bosônicas. Para tal, será feito o desenvolvimento do problema para cordas não relativísticas. Em seguida, será feita a Quantização via Cone de Luz. Para a compreensão clara da Quantização Covariante, também será abordada uma introdução à Teoria de Campos Conformes, seguida da segunda forma de quantização.

1.1 Quantização de Sistemas Gauge

Alguns sistemas físicos possuem uma simetria especial, chamada de simetria gauge (ou de calibre), como no caso da Teoria de Cordas. Teorias com tais propriedades necessitam passar por um processo denominado fixação, pois essas simetrias geram redundâncias, visto que têm-se graus de liberdade extras [Itzykson and Zuber, 1980].

Para exemplificar melhor o que essa liberdade significa, é possível imaginar um campo com simetria gauge como uma superfície de borracha, a qual pode ser esticada ou contraída, e, independentemente da forma que toma, descreve a mesma física.

Dessa forma, fixar o gauge implica em escolher uma maneira específica de descrever a superfície. Além disso, teorias de calibre que não forem fixadas, ao serem quantizadas, podem ter problemas na interpretação de estados físicos.

Desse modo, para quantização da Teoria de Cordas Bosônicas, é possível aplicar duas formas diferentes de realizar esse processo, as quais serão abordadas ao longo dessa tese. Em suma, é necessário quantizar e fixar o gauge para obter a forma final da teoria. Entretanto, essa sequência pode ser invertida [Tong, 2009].

Na quantização após a fixação do gauge, o primeiro processo a ser realizado é a fixação do gauge no nível clássico, visando eliminar redundâncias, para então seguir com o processo de quantização.

Com isso, tem-se a simplificação do tratamento dos graus de liberdade físicos, por meio da redução do espaço de fases, mas pode ocasionar a introdução de vínculos de primeira e segunda classe. Além do mais, essa redução de graus de liberdade gera equações de movimento mais simples e simplifica a estrutura algébrica do sistema.

Entretanto, esse método pode dificultar a identificação de certas simetrias e invariâncias, diferentemente do uso do formalismo covariante. A escolha arbitrária de um gauge também pode gerar ambiguidade na interpretação física, mitigada, em parte, pela presença de um gauge residual. Por fim, algumas fixações podem gerar anomalias e inconsistências ao se realizar o processo de quantização [Mandl and Shaw, 1984].

Outra forma de abordar a teoria é a quantização antes da fixação do calibre, ou seja, primeiramente faz-se a promoção das variáveis para operadores, para depois realizar o processo de fixação de calibre. Pode ser realizada uma fixação parcial antes da quantização, mas o principal ponto é que ainda haja algum grau de liberdade gauge ao se realizar a quantização.

Esse método é vantajoso pois a preservação da simetria resulta em uma teoria mais robusta e evita inconsistências na quantização. Além disso, ele permite a escolha de gauge mais vantajosa para o problema após a quantização.

Todavia, em algumas teorias é necessária a introdução de campos fantasmas para lidar com os graus de liberdade da simetria. Em alguns casos, pode haver o surgimento de anomalias que necessitam ser canceladas para manter a consistência da teoria [Itzykson and Zuber, 1980].

1.2 Coordenadas Cone de Luz

Um sistema de coordenadas fundamental para o entendimento da quantização de cordas é o cone de luz, que permite que esse processo seja feito de forma mais direta. Para tal, definem-se as coordenadas x^+ e x^- dadas por [Zwiebach, 2009]

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^1), \quad (1)$$

$$x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 - x^1). \quad (2)$$

Nota-se que as demais coordenadas x^2, x^3, \dots, x^d permanecem as mesmas e são denominadas de coordenadas transversais. Assim, caso um feixe de luz se desloque no sentido positivo de x^1 , tem-se $x^- = 0$, da mesma forma que, caso ele se desloque para o sentido negativo, tem-se $x^+ = 0$.

A Figura 1 representa os eixos desse novo sistema de coordenadas e, levando em consideração que as novas coordenadas coincidem com o cone de luz, tem-se a justificativa do seu nome.

Define-se assim a coordenada x^+ como sendo a temporal e a x^- como a espacial do cone de luz. Tomando o diferencial das coordenadas,

$$2dx^+ dx^- = (dx^0)^2 - (dx^1)^2, \quad (3)$$

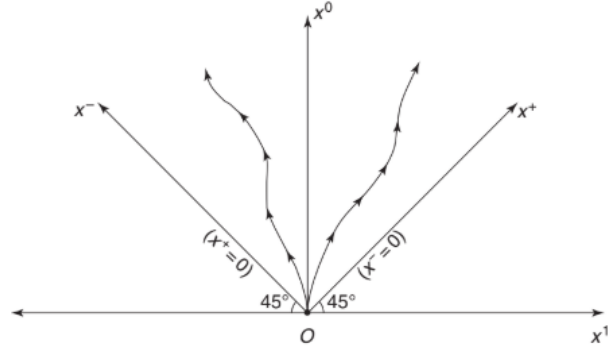


Figura 1: Diagrama espaço-temporal mostrando as coordenadas cone de luz. FONTE: [Zwiebach, 2009].

é possível encontrar que o intervalo invariante nesse sistema, para $D = 4$, é dado por

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (4)$$

Dessa forma, a métrica cone de luz é

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Uma propriedade interessante, e que será usada ao longo do desenvolvimento desta tese, é que para um vetor $\vec{a} = (a^+, a^-, a^2, a^3, \dots)$ tem-se a equivalência das quantidades

$$a_+ = -a^-, \quad a_- = -a^+. \quad (6)$$

Da mesma forma, é possível obter as componentes cone de luz do momento, as quais são dadas por

$$\begin{aligned} p^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 + p^1) = -p_-, \\ p^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 - p^1) = -p_+. \end{aligned} \quad (7)$$

Ademais, essa representação permite escrever um resultado similar ao que se obtém usando a métrica de Minkowski, $p^0 = -E/c$, uma vez que tempo e energia são variáveis conjugadas. Ao analisar a evolução temporal de uma partícula usando o sistema de coordenadas cone de luz, é possível obter a relação

$$\boxed{p^- = \frac{E_{1c}}{c}}, \quad (8)$$

em que E_{1c} é a energia na representação do cone de luz.

2 Cordas Não-Relativísticas

A compreensão da dinâmica de um objeto relativístico torna-se mais clara ao analisar seu comportamento em baixas velocidades. Desse modo, o estudo de cordas não-relativísticas é fundamental para o desenvolvimento contínuo da teoria e sua quantização.

Assim, suponha uma corda com densidade μ_0 submetida a uma tensão constante T_0 e comprimento total a . A Figura 2 mostra uma representação de um segmento infinitesimal dessa corda.

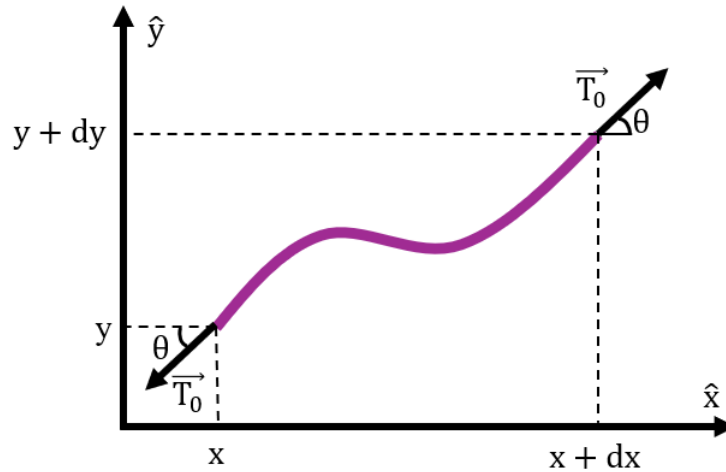


Figura 2: Representação esquemática de um segmento infinitesimal da corda não relativística, sujeita a uma tensão T_0 . FONTE: autoria própria.

Para construção de sua lagrangiana, encontra-se primeiramente a energia cinética T , que se dá pela soma das energias cinéticas de todos os segmentos infinitesimais da corda, expressa como [Zwiebach, 2009]

$$T = \int_0^a dx \left(\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right). \quad (9)$$

Nota-se que está sendo considerado apenas oscilações transversais na corda. De fato, ao se calcular a força horizontal, $F_h = T_0 \cos \theta$, para $\theta \ll 1$ tem-se que

$$F_h = T_0 \cos \theta = T_0 \sqrt{1 - \tan^2 \theta} = T_0 \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = T_0 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2, \quad (10)$$

onde foi usado que $\tan \theta \approx \sin \theta$ e expandiu-se em relação à dx/dy . A variação da força horizontal é dada por

$$dF_h = \left(T_0 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{dy}{dx'} \right)^2 \right)_{(x'=x+dx)} - \left(T_0 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{dy}{dx'} \right)^2 \right)_{(x'=x)}, \quad (11)$$

usando a definição de derivada via limites, encontra-se que

$$\frac{dF_h}{dx} = -T_0 \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2, \quad (12)$$

enquanto a variação da força vertical, dF_v , é expressa por

$$\frac{dF_v}{dx} = T_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2, \quad (13)$$

e, considerando que $dx/dy \ll 1$, conclui-se que $dF_h \ll dF_v$. Logo, é possível considerar apenas oscilações transversais na corda. A energia potencial é dada pelo trabalho necessário para esticar os segmentos. Sabe-se que o comprimento infinitesimal dl é dado por

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) dx. \quad (14)$$

O trabalho realizado para esticar um pedaço infinitesimal dl é [Zwiebach, 2009]

$$W = T_0(dl - dx) = \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx, \quad (15)$$

assim, a energia potencial é dada pela soma do trabalho em toda a corda

$$V = \int_0^a dx \left(\frac{1}{2}T_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right). \quad (16)$$

Usando as Equações 9 e 16 constrói-se de maneira direta a ação da corda,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left(\frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right), \quad (17)$$

que permite o cálculo das equações de movimento a partir de sua variação, ou seja,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \delta \left(\frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \int_0^a dx dt \left(\mu_0 \frac{dy}{dt} \frac{d(\delta y)}{dt} - T_0 \frac{dy}{dx} \frac{d(\delta y)}{dx} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Usando a derivada completa e rearranjando, encontra-se que

$$\delta S = \int_0^a dx \left[\frac{dx}{dt} \delta y \right]_{t_i}^{t_f} \mu_0 + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[-\frac{dx}{dy} \delta y \right]_0^a T_0 - \int_0^a dx \int_{t_i}^{t_f} dt \left[T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} - \mu_0 \frac{d^2 y}{dt^2} \right] \delta y. \quad (19)$$

Cada termo da Equação 19 deve se anular independentemente. O primeiro termo possui os tempos fixos, estando sujeito às condições iniciais e finais, estando representado pelas linhas

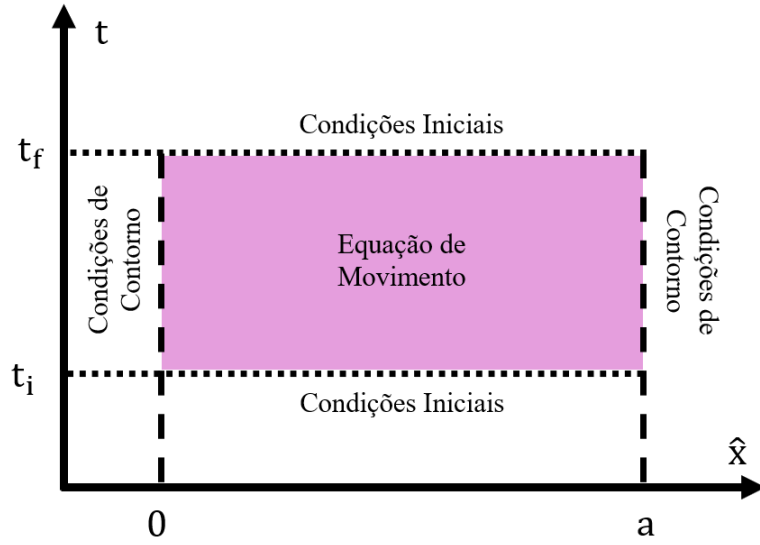


Figura 3: Domínio no qual a corda não relativística foi definido. Cada equação delimita uma das três regiões. FONTE: autoria própria.

pontilhadas na Figura 3, e deve respeitar

$$\frac{dy}{dt}\delta y(t_i, x) = \frac{dy}{dt}\delta y(t_f, x). \quad (20)$$

O segundo termo está fixo em relação aos pontos iniciais e finais da corda, e é ditado pelas condições de contorno, que podem ser de Neumann ou Dirichlet, sendo representadas pelas linhas tracejadas na Figura 3, e deve seguir a relação

$$\frac{dy}{dx}\delta y(t, 0) = \frac{dy}{dx}\delta y(t, a). \quad (21)$$

Por fim, o terceiro termo fornece a equação de movimento da corda não-relativística, que coincide com a equação de onda, expresso por

$$T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} - \mu_0 \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad (22)$$

a qual dita o comportamento da corda na região lilás na Figura 3.

É possível também fazer a análise do momento p da corda, que existe apenas na direção y , visto que não há deslocamento em outra direção. Seu valor é dado pela soma dos momentos infinitesimais, ou seja,

$$p = \mu_0 \int_0^a dx \frac{dy}{dt}. \quad (23)$$

Sua conservação depende da condição de contorno atuante, que pode ser vista explicitamente calculando

$$\frac{dp}{dt} = \mu_0 \int_0^a dx \frac{d^2 y}{dt^2} = \left[T_0 \frac{dy}{dx} \right]_0^a, \quad (24)$$

em que é possível perceber que caso a condição seja de Neumann, p será sempre conservado, enquanto para a condição de Dirichlet nem sempre isso será verdade. As condições de contorno

serão de suma importância no contexto relativísticos pois definirão as dimensões das D-branas, objetos em que a corda está com os extremos atados, as quais podem absorver o momento perdido [Zwiebach, 2009]. Isso será melhor explicado na Seção 4.

É possível também fazer uma análise do problema usando o momento canônico da corda. Apesar de não ser usual para baixas velocidades, no âmbito relativístico essa abordagem se mostra útil. Definindo os momentos canônicos como

$$\mathcal{P}^t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \quad \mathcal{P}^x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}. \quad (25)$$

Sabendo que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{y}, y')$ e calculando a variação da ação, é possível encontrar uma expressão equivalente à Equação 19, dada por

$$\delta S = \int_0^a dx [\mathcal{P}^t \delta y]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt [\mathcal{P}^x \delta y]_0^a - \int_0^a dx \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} \right] \delta y. \quad (26)$$

Por fim, é necessário comentar que a solução da Equação 22 depende de quais condições de contorno estão agindo, ou seja, se os extremos estão fixos ou livres. No Capítulo 4, a equação de onda será obtida por meio da fixação de gauge e será devidamente resolvida.

3 Cordas Relativísticas

Ao se observar o movimento de uma corda no espaço-tempo, sua evolução temporal traça uma superfície bidimensional denominada folha de mundo, como mostrado na Figura 4. Para desenvolver a ação que dita o movimento da corda, é necessário formular um objeto análogo ao tempo próprio para uma partícula relativística: a área própria.

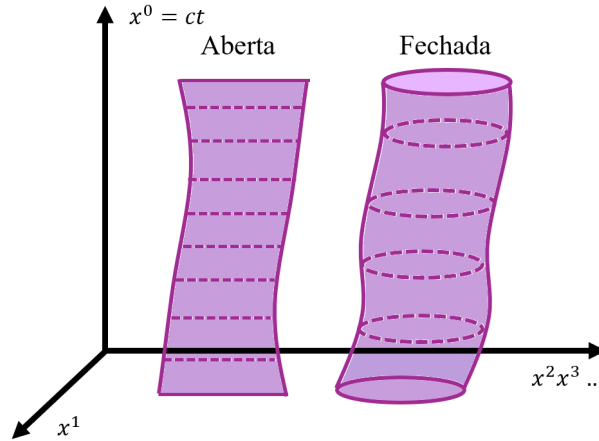


Figura 4: Superfície traçada pela corda aberta e fechada no espaço-tempo, conhecido como folha de mundo. FONTE: autoria própria.

A área própria é uma quantidade invariante de Lorentz definida a partir dos parâmetros da folha de mundo e a ação da corda, mais especificamente, a ação de Nambu-Goto, é definida sendo proporcional a essa quantidade.

Desse modo, inicia-se parametrizando uma superfície no espaço euclidiano, que pode ser entendida como um mergulho f de um espaço de parâmetros, \mathbb{R}^2 , em um espaço-alvo, \mathbb{R}^d , ou seja,

$$f : (\xi^1, \xi^2) \mapsto (x^1, x^2, x^3, \dots). \quad (27)$$

Para calcular um elemento infinitesimal de área no espaço alvo, observa-se um retângulo infinitesimal no espaço de parâmetros, formado por $d\xi^1$ e $d\xi^2$. Representado o mergulho dessas duas quantidades no espaço alvo como $d\vec{v}_1$ e $d\vec{v}_2$, os quais, por generalidade, formam um paralelogramo, é possível calcular a área formada entre ambos

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}, \quad (28)$$

e, sabendo que pode-se correlacionar o mergulho, por meio de

$$d\vec{v}_1 = \frac{d\vec{f}}{d\xi^1} d\xi^1, \quad d\vec{v}_2 = \frac{d\vec{f}}{d\xi^2} d\xi^2, \quad (29)$$

conclui-se que a área é dada por

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{d\vec{f}}{d\xi^1} \cdot \frac{d\vec{f}}{d\xi^1} \right) \left(\frac{d\vec{f}}{d\xi^2} \cdot \frac{d\vec{f}}{d\xi^2} \right) - \left(\frac{d\vec{f}}{d\xi^1} \cdot \frac{d\vec{f}}{d\xi^2} \right)^2}, \quad (30)$$

Uma informação importante é que a Equação 30 é invariante de reparametrizações. Esse fato também justifica a escolha das Equações 29 como sendo as mais simples, ou seja, $\vec{v}_1 = \vec{v}_1(\xi_1)$ e $\vec{v}_2 = \vec{v}_2(\xi_2)$, sem afetar o resultado final. Outra forma de escrever o diferencial de área na Equação 30 é usando a métrica induzida g , definida por

$$g_{\mu\nu} = \frac{d\vec{f}}{d\xi^\mu} \cdot \frac{d\vec{f}}{d\xi^\nu}, \quad (31)$$

em que $\mu, \nu = 1, 2$. Denotando $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$, a área pode ser escrita como

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}. \quad (32)$$

3.1 A Ação de Nambu-Goto

Tendo desenvolvido a teoria no espaço euclidiano \mathbb{R}^d , é possível estender facilmente a teoria no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$. O mergulho, $f(\xi_1, \xi_2)$ será renomeado como sendo $X^\mu(\tau, \sigma)$, chamado de coordenadas da corda. Nesse contexto, o parâmetro τ é relacionado com o tempo e o σ com a posição. Os extremos da folha de mundo possuem então σ constante e são parametrizados por τ , sendo assim, conclui-se que

$$\left(\frac{\partial X^0}{\partial \tau} \right) \Big|_{\text{extremos}} \neq 0. \quad (33)$$

Em espaços com métrica lorentziana, o determinante da métrica induzida é adaptado para garantir que o integrando seja definido e real [O'Neill, 1983]. Logo, a partir das propriedades geométricas da folha de mundo, é possível definir a área própria em termos de coordenadas parametrizadas, resultando no funcional de área

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{dX^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dX_\mu}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dX^\mu}{d\tau} \cdot \frac{dX_\mu}{d\tau} \right) \left(\frac{dX^\mu}{d\sigma} \cdot \frac{dX_\mu}{d\sigma} \right)} \quad (34)$$

Com a área funcional definida, é possível então definir uma ação para a corda relativística, proporcional à Equação 34. Fazendo uma análise dimensional, temos que a área em unidade de comprimento ao quadrado, L^2 . A ação deve ter unidade ML^2/T , em que M representa unidade de massa e T de tempo. Pode-se obter M/T dividindo a tensão da corda T_0 pela velocidade da luz c . Em suma, tem-se que a ação da corda pode ser escrita como

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (35)$$

em que $\sigma_1 > 0$ é uma constante e as novas notações representam

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X^{\mu'} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (36)$$

Novamente, é possível fazer uma análise pela perspectiva da métrica induzida. Tem-se que

$$-ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (37)$$

em que $\xi^1 = \tau$ e $\xi^2 = \sigma$. Assim, a métrica induzida é definida como

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\beta}. \quad (38)$$

Substituindo em (35) tem-se a Ação de Nambu-Goto com a invariância de reparametrização manifesta

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}. \quad (39)$$

3.2 Equações de Movimento

Calculado a ação, é possível encontrar facilmente a lagrangiana para obter as equações de movimento. Sabe-se que

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (40)$$

As equações de movimento podem ser derivadas diretamente pela variação da ação de Nambu-Goto, que busca estacionar o funcional em um caminho específico no espaço-tempo. Tem-se que

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right], \quad (41)$$

e, calculando separadamente as derivadas em relação à lagrangiana, encontra-se quantidades análogas às na Equação 25, dadas por

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^\tau &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \\ \mathcal{P}_\mu^\sigma &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (X')^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \end{aligned}} \quad (42)$$

e representam as densidades de momento da folha de mundo ao longo das direções temporal (τ) e espacial (σ). Substituindo os resultados na Equação 41, encontra-se que

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right). \quad (43)$$

Os dois termos presentes devem ser nulos para todas as variações de δX^μ . Assim, o segundo termo fornece a equação de movimento das cordas relativísticas, abertas ou fechadas,

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0}. \quad (44)$$

Ao se observar a Equação 42 é possível observar que a 44 é complicada de se resolver, porém, é possível fazer o uso da invariância de reparametrização para simplificá-la.

A primeira parte da Equação 41 se refere às extremidades da corda. Note que o índice μ indica que há a necessidade de 2D condições de fronteira, D para todas as coordenadas no início da corda e D para as coordenadas no final da corda. Observa-se que há duas possibilidades para que o termo seja nulo. A primeira é dada pela condição de Dirichlet

$$\frac{\partial X^\mu}{d\tau}(\tau, \sigma^*) = 0, \quad \mu \neq 0. \quad (45)$$

Essa condição é válida apenas para as direções espaciais, vide Equação 33, e fixa os extremos da corda ao longo do tempo, o que implica que $\delta X^\mu(\tau, \sigma^*) = 0$. A segunda possibilidade é a condição dos pontos finais livres

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma^*) = 0. \quad (46)$$

Essa condição não impõe restrições aos extremos e pode ser aplicada à coordenada temporal. Para a parte espacial, ela age como uma condição de Neumann. As Equações 45 e 46 podem ser aplicadas combinadas de diferentes formas ao longo das D dimensões em cordas abertas (já que cordas fechadas não possuem extremos).

Por exemplo, para uma corda aberta com extremidades fixas, aplica-se a condição de Dirichlet ($\delta X^\mu(\tau, \sigma_*) = 0$), enquanto para extremos livres, utiliza-se Neumann ($P_\sigma^\mu(\tau, \sigma_*) = 0$).

Com a enunciação das possíveis condições de fronteira, é possível definir as chamadas D-Branas. Elas podem ser entendidas como objetos nos quais as cordas estão atadas. Por exemplo, se há uma condição de extremos livres e as demais são de Dirichlet, significa que o extremo da corda pode se mover apenas ao longo de uma dimensão; assim, a D-brana é formada por essa linha na qual a corda tem a liberdade de se movimentar.

Caso todas as condições de contorno sejam de extremos livres, é dito que há uma D-brana que preenche o espaço todo [Zwiebach, 2009].

3.3 Primeira Parametrização da Corda

O gauge pode ser entendido como um grau de liberdade que certas teorias possuem, e permite a visualização dessa mesma sobre pontos de vista diferentes. Além disso, a fixação de gauge é necessária para evitar ambiguidades no estudo de um sistema e evita redundâncias [Peskin and Schroeder, 1995].

No estudo em Teoria de Cordas, esse grau de liberdade pode ser usado também para a simpli-

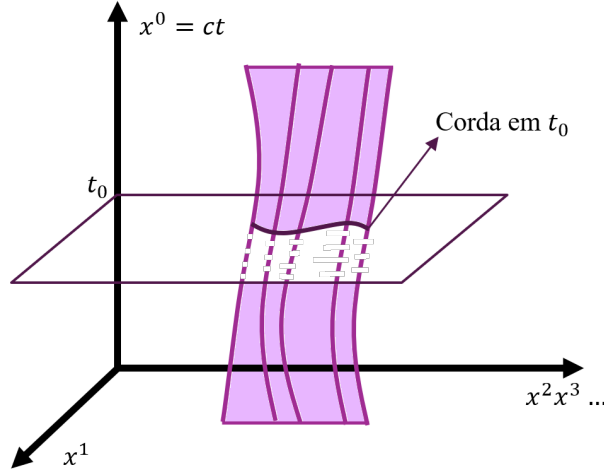


Figura 5: Representação do gauge estático usando a folha de mundo. FONTE: autoria própria.

ficação de equações complexas, permitindo encontrar as soluções das equações de movimento mais rapidamente e obter informações sobre o funcionamento do sistema sob diferentes óticas. Para tal, serão introduzidas formas mais simples e intuitivas de parametrização, permitindo o entendimento gradual e didático, que culminará na quantização via cone de luz.

3.3.1 Gauge Estático

Dada uma folha de mundo no espaço $\mathbb{R}^{1,d}$, considere $t = t_0$ a qual intersecta a folha de mundo ao longo de uma curva, que representa a corda vista pelo observador escolhido nesse referencial. Afirma-se, então, que essa curva possui um valor de τ constante, como pode ser visto na Figura 5. É possível representar, em termos das coordenadas da folha de mundo como

$$X^0(\tau, \sigma) \equiv ct(\tau, \sigma) = c\tau, \quad \forall \sigma \in [0, \sigma_1], \quad (47)$$

ou, usando todo o conjunto de coordenadas,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = ct, \vec{X}(t, \sigma), \quad (48)$$

sendo \vec{X} o vetor que representa as coordenadas espaciais. Calculando a derivada perante os dois parâmetros, tem-se

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \quad (49)$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial X^0}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \right) = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \right). \quad (50)$$

Um questionamento natural ao ver as Equações 49 e 50 é se é possível associar alguma velocidade à corda. A escolha de $\partial \vec{X} / \partial t$ aparenta ser a mais intuitiva, entretanto, não é fisicamente significativa, pois sua direção seria dada nas linhas de σ constantes, as quais não foram fixadas.

Note que, por ser um objeto sem subestrutura, não é possível observar para onde exatamente vai cada ponto na corda com o passar do tempo, ou seja, para falar de velocidade é inevitável que seja feita uma fixação de σ . Entretanto, há a possibilidade de descrever uma velocidade que seja invariante de reparametrizações, chamada de velocidade transversal, que representa o movimento de segmentos da corda ao longo de planos perpendiculares, independentemente da escolha de parametrização σ .

Para tal, dado um tempo t , escolhe-se um ponto p na corda e traça-se um hiperplano transversal a ele. Passado um tempo $t+dt$, suficientemente pequeno para que a corda ainda intersecte esse plano, ela o toca em um ponto p' . Assim, a velocidade transversal v_{\perp} é aquela associada ao movimento de p até p' [Zwiebach, 2009].

Para definir v_{\perp} matematicamente, inicia-se com uma função $s(\sigma)$ a qual mensura o tamanho da corda no intervalo $[0, \sigma_1]$, ou seja, $s(0) = 0$ e $s(\sigma_1)$ são o tamanho de toda a corda. Assim, ds pode ser interpretado como o tamanho do vetor $d\vec{X}$ em um intervalo $d\sigma$,

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| d\sigma \quad (51)$$

Calcula-se a variação de \vec{X} ao longo da corda derivando $\partial \vec{X} / \partial s$, a qual é um vetor unitário, como mostra

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 = 1. \quad (52)$$

Além disso, dado que $s = s(\sigma)$ e que a situação está sendo analisada com t constante, é possível escrever

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds}, \quad (53)$$

mostrando que, além de unitário, $\partial \vec{X} / \partial s$ é tangente à corda. Com isso, é possível definir v_{\perp} usando a Equação 53, pois ela pode ser usada para “remover” de $\partial \vec{X} / \partial t$ as partes não perpendiculares – ou seja, tangentes – à corda. Tem-se então que

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}. \quad (54)$$

É possível escrever a ação de Nambu-Goto usando v_{\perp} , por intermédio das Equações 49 e 50. Calculando a quantidade dentro da raiz na Equação 35 usando o gauge estático

$$(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma} \right)^2 (c^2 - v_{\perp}^2) \quad (55)$$

Substituindo na Equação 35 é possível descrevê-la como

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}. \quad (56)$$

3.3.2 Parametrização Perpendicular de σ

Com o que foi desenvolvido a respeito da parametrização de τ e a velocidade transversal v_{\perp} , é intuitivo desenvolver uma parametrização para σ tal que esta seja perpendicular às linhas de τ constantes. Assim, inicia-se em $t = 0$ com uma parametrização de σ . Passado $t = \epsilon$, sendo ϵ uma quantidade muito pequena, desenha-se segmentos perpendiculares à $t = 0$ na folha de mundo.

A primeira consequência dessa parametrização é que a derivada $\partial\vec{X}/\partial t$, a partir de agora, sempre será perpendicular a $\partial\vec{X}/\partial\sigma$, logo, a velocidade transversal na Equação 54 se torna

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} = 0 \implies v_{\perp} = \frac{\partial\vec{X}}{\partial t}. \quad (57)$$

Analisando os momentos canônicos nas Equações 42, é possível simplificá-las usando essas duas fixações de gauge, por meio das Equações 56 e 57, adquirindo a forma [Zwiebach, 2009]

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial\vec{X}^{\mu}}{ds}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial t}. \quad (58)$$

Com essas simplificações, é factível analisar com clareza a Equação de Movimento. Uma abordagem que permite uma análise mais simples é fazer o desenvolvimento primeiramente da parte temporal e depois da espacial. Tomando, desse modo, $\mu = 0$ na Equação 58 tem-se

$$\mathcal{P}^{\sigma 0} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial X^0}{ds} = 0, \quad (59)$$

$$\mathcal{P}^{\tau 0} = -\frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (60)$$

Substituindo na Equação de Movimento 44 obtém-se

$$\frac{\partial\mathcal{P}^{\tau 0}}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{P}^{\sigma 0}}{\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right) = 0. \quad (61)$$

Note que é obtida uma quantidade que é conservada ao longo do tempo, mas o que isso implica fisicamente? Considera-se um pequeno pedaço de corda associado à $d\sigma$, com um movimento bem definido – uma vez que o gauge foi fixado. Sabe-se que a energia de uma corda esticada em repouso, com comprimento a , é dada por [Zwiebach, 2009]

$$V = T_0 a, \quad (62)$$

além disso, nota-se que a quantidade conservada possui unidade de energia por comprimento, multiplicada por um fator de correção relativística, já que a corda está em movimento, logo,

tem-se que

$$\frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad (63)$$

representa a densidade de energia da corda. Ao se integrar essa quantidade ao longo de todo σ obtém-se

$$E = \frac{T_0}{c} \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad (64)$$

que representa a energia total da corda, a qual é conservada. Agora, é possível fazer a interpretação da parte espacial da Equação de Movimento 44. Para $\mu \neq 0$, a Equação 42 se torna

$$\vec{p}^{\sigma} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{ds}, \quad (65)$$

$$\vec{p}^{\tau} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}. \quad (66)$$

Substituindo na Equação de Movimento 44, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial v_{\perp}^2}{\partial t}, \quad (67)$$

em que é possível reescrever de uma forma familiar,

$$\frac{d}{d\sigma} \left(T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{\partial \vec{X}}{d\sigma} \right) = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2}. \quad (68)$$

Definindo a quantidade

$$A(\sigma) = \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad (69)$$

e impondo uma parametrização de modo que $A(\sigma) = 1$, desse modo, a Equação 68 se torna

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(T_0 \frac{d\vec{X}}{d\sigma} \right) &= \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2}, \\ \frac{d^2 \vec{X}}{d\sigma^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (70)$$

É possível analisar melhor a Equação 71, na qual, impondo sendo igual a 1 se torna

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad (71)$$

que, segundo a Equação 64 pode ser escrita como

$$d\sigma = \frac{dE}{T_0} \Rightarrow \int_0^{\sigma_1} d\sigma = \int_0^{\sigma_1} \frac{dE}{T_0} \quad \therefore \sigma_1 = \frac{E}{T_0}. \quad (72)$$

Em suma, conclui-se que a quantidade conservada expressa na Equação 63 é a energia em um pedaço infinitesimal da corda e que a energia total, na Equação 72 é diretamente proporcional ao tamanho que a corda possui. Reescrevendo a Equação 64 elevando ambos os lados ao quadrado, encontra-se uma equação importante para cálculos futuros,

$$1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{d\vec{X}}{d\sigma} \right)^2 \left(\frac{ds}{d\vec{X}} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{d\vec{X}}{d\sigma} \right)^2 = 1} \quad (73)$$

3.4 Cargas Conservadas Na Folha de Mundo

Ao se estudar uma teoria na Física, uma análise importante a ser feita é sobre as cargas que são conservadas e, conseqüentemente, suas simetrias. Estas permitem a simplificação e a previsibilidade do sistema que está sendo estudado.

Para a obtenção de correntes e cargas conservadas, é possível usar a lagrangiana para suas construções. Para uma abordagem mais generalista, é possível consultar [Lemos, 2023].

Assim, inicia-se fazendo uma variação das coordenadas de tal modo que não mude a lagrangiana, como

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) = \epsilon^\mu, \quad (74)$$

que se refere a uma translação. Sabe-se, observando a Equação 35 que a densidade de lagrangiana tem dependência das derivadas da coordenada, ou seja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{X}, X')$. Logo, fica explícito que a transformação na Equação 74 não altera \mathcal{L} . Constrói-se então a corrente conservada,

$$\epsilon^\mu j_\mu^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \epsilon^\mu, \quad (75)$$

a qual tem dependência dos momentos canônicos da folha de mundo,

$$j_\mu^\alpha = (j_\mu^0, j_\mu^1) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \right) = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma). \quad (76)$$

Logo, a equação de conservação da corrente é a mesma que a Equação de movimento

$$\partial \mathcal{P}_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (77)$$

Para a obtenção da carga conservada, integra-se sobre a componente $\mu = 0$ sobre o espaço. Integrando a densidade de momento \mathcal{P}_τ^μ ao longo da direção espacial σ , obtém-se a carga

conservada correspondente ao momento linear total da corda

$$\int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = p_\mu(\tau). \quad (78)$$

Esse resultado é esperado e coerente, visto que foi feita uma translação no espaço, na qual resulta, de fato, no momento linear como carga conservada. Dessa forma, conclui-se que \mathcal{P}_μ^τ é a densidade de momento do espaço-temporal que a corda possui. Nota-se que essa quantidade é conservada em relação a τ , pois

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \dot{\mathcal{P}}_\mu^\tau}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} d\sigma = - \mathcal{P}_\mu^\sigma \Big|_0^{\sigma_1} = 0, \quad (79)$$

se considera que os extremos das cordas são livres. Caso alguma das direções possua condições de contorno de Dirichlet, a conservação é dada pela soma do momento da corda e da D-brana que ela está atada [Zwiebach, 2009].

Nota-se que a Equação 78 informa que a definição e, conseqüentemente, a conservação do momento é dada quando fixa-se τ como constante. Entretanto, é possível mostrar que a conservação ocorre para qualquer que seja a curva na folha de mundo.

Considera-se então segmento infinitesimal ao longo de uma curva Γ orientada no sentido anti-horário. Se $(d\tau, d\sigma)$ é paralelo à curva, pode-se escrever $(d\sigma, -d\tau)$ como sendo um vetor ortogonal. O fluxo infinitesimal sobre a superfície delimitada por essa curva é

$$j_\mu^\alpha \cdot (d\sigma, -d\tau) = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma) \cdot (d\sigma, -d\tau) = \mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau. \quad (80)$$

Assim, para obter o fluxo total, basta integrar sobre toda a curva Γ

$$p_\mu(\Gamma) = \oint_\Gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau), \quad (81)$$

que é nulo, devido ao Teorema de Green, que permite reescrever essa equação em termos do divergente sobre a superfície \mathcal{R} englobada por Γ , em conjunto com a Equação 44, resultando em um valor constante independente da curva escolhida, como mostra

$$p_\mu = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) d\tau d\sigma = 0. \quad (82)$$

Essa abordagem mostra que a conservação independe de como se escolhe dividir a folha de mundo, reforçando a consistência global do sistema.

A carga conservada discutida até agora está relacionada a uma translação. Outra transformação interessante de se estudar é a carga conservada perante uma transformação de Lorentz,

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu \text{ em que } \delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu. \quad (83)$$

Como já dito, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{X}, X')$, assim, os termos que aparecem nessa densidade de lagrangi-

ana são da forma

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}, \quad (84)$$

em que ξ^α e ξ^β podem ser iguais a σ ou τ . Se a invariância de Lorentz é obedecida, então a variação do termo deve ser nula. Desse modo,

$$\begin{aligned} \delta \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) &= \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \delta X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) \\ &= \epsilon_{\nu\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \epsilon_{\mu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\beta} \\ &= (\epsilon_{\nu\rho} + \epsilon_{\rho\nu}) \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = 0, \end{aligned} \quad (85)$$

visto que ϵ é antissimétrico. Em suma, tem-se que a ação da corda é invariante perante uma transformação de Lorentz. Naturalmente, perante essa invariância, sabe-se que é possível calcular a carga conservada associada. Desse modo, calculando a corrente conservada,

$$\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \epsilon^{\mu\nu} X_\nu = \left(-\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \right) (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha), \quad (86)$$

pois é possível estender a classificação de antissimetria para a corrente $j_{\mu\nu}^\alpha$. Assim, define-se a corrente

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha, \quad (87)$$

cuja carga conservada é dada por

$$M_{\mu\nu} = \int_\gamma (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma d\tau). \quad (88)$$

4 Quantização Via Cone de Luz

Encontradas as Equações de Movimento e tendo desenvolvido uma visão intuitiva da fixação de gauge, é possível iniciar o desenvolvimento a respeito da Quantização via Cone de Luz.

4.1 Gauge Cone de Luz

As fixações escolhidas até agora foram de suma importância para entender como o processo de escolha de um gauge, bem como mostrou resultados interessantes sobre a teoria. Entretanto, há uma forma de fixação de gauge que simplifica ainda mais as relações de vínculo, reduz o número de modos e permite uma interpretação física mais clara da teoria: a quantização via cone de luz.

4.1.1 Fixação do Parâmetro τ

Para tal, inicia-se com gauges cujo τ é equivalente a uma combinação linear de coordenadas da corda ¹,

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau. \quad (89)$$

Para entender melhor o que 89 significa, considera-se, nas coordenadas no espaço-tempo, duas soluções x_1^μ e x_2^μ para um mesmo valor de τ , que implica que

$$n_\mu(x_1^\mu - x_2^\mu) = 0, \quad (90)$$

ou seja, qualquer vetor que una dois pontos no espaço formado por essa fixação, é ortogonal a n_μ . Pensando na folha de mundo, se X^μ satisfaz 89 então ele pertence à folha de mundo e ao hiperplano. Fixando um τ , a união de todos os pontos X^μ que obedecem essa fixação formam a corda.

É importante notar que a Equação 89 não é invariante de Lorentz, assim, fixar n_μ implica em selecionar uma combinação linear particular das coordenadas. E, sabe-se que não existe combinação linear que é invariante de Lorentz pela esquerda. Essa é uma das principais desvantagens dessa forma de fixação [D. Lust, 1989].

É possível reescrever o parâmetro λ como $\tilde{\lambda} = (n \cdot p)\tau$, em que p^μ é o momento conservado da corda. Impondo τ como sendo adimensional, é necessário que

$$[\tilde{\lambda}] = \frac{[X]}{[p]} = \frac{L}{\frac{ML^2}{T}} = \frac{L}{T} \cdot \frac{T^2}{ML^2} = \frac{\text{velocidade}}{\text{força}} \quad \therefore \tilde{\lambda} \sim \frac{c}{T_0} = 2\pi\alpha'\hbar c^2. \quad (91)$$

Impondo que $c = \hbar = 1$ tem-se, conseqüentemente, que

$$L = T, \quad M = L^{-1}, \quad (92)$$

¹Note que, definindo $n_\mu = (1, 0, 0, \dots, 0)$ e $\lambda = c$, tem-se o gauge estático!

e implica que $[\alpha'] = [T_0]^{-1} = L^2$. Desse modo, a ação de Nambu-Goto, na Equação 35 se torna

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (93)$$

4.1.2 Fixação do Parâmetro σ

Feita a fixação de τ , é necessário então que se escolha uma para σ . Para isso, se estende a ideia usada no calibre estático, no qual a parametrização de σ é feita pela consideração de densidade de energia $\mathcal{P}^{\tau 0}$ constante. Em outras palavras, sabe-se que nesse gauge, tem-se $n_\mu = (1, 0, 0, \dots, 0)$ e que para um τ constante, $\mathcal{P}^{\tau 0}$ não varia. Assim, para que haja consistência, deve-se impor constância em $n_\mu \mathcal{P}^{\tau \mu}$ ².

Observando a Equação 58 tem-se que $ds/d\sigma$ é a única parte da equação que varia com a reparametrização de σ , logo, é possível escrever

$$\mathcal{P}^{\tau \mu}(\tau, \sigma) = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \mathcal{P}^{\tau \mu}(\tau, \tilde{\sigma}), \quad (94)$$

ou seja, dada uma parametrização de $\tilde{\sigma}$, é possível escolhê-la de tal forma que a derivada elimine a dependência de σ por meio da derivada permanecendo apenas a de τ . É possível fazer uma parametrização adicional, multiplicando por um fator constante, $\sigma \rightarrow b\sigma$, pois a independência de σ ainda é preservada, logo

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = a(\tau). \quad (95)$$

Integrando sobre todo $\sigma \in [0, \pi]$, obtém-se que

$$\int_0^\pi d\sigma n \cdot \mathcal{P}^\tau \implies n \cdot p = \pi a(\tau) \quad \therefore a(\tau) = \frac{n \cdot p}{\pi}. \quad (96)$$

Como $n \cdot p$ é uma quantidade conservada, tem-se que, para cordas abertas,

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{\pi} \quad (97)$$

é uma constante da folha de mundo. Consequentemente, analisando a Equação de Movimento 44, ao se fazer o produto interno com n_μ

$$\partial_\tau(n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \partial_\sigma(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0 \quad \therefore \partial_\sigma(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0, \quad (98)$$

ou seja, a quantidade $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ é independente de σ . Ao se considerar que o momento é conservado, assume-se que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ é nulo nos extremos da corda ³. Assim, devido à Equação 98, é possível concluir que o resultado é válido para toda a corda.

Bem como feito em cordas abertas, é possível encontrar uma quantidade conservada pare-

²Desse modo, a condição se estenderá para qualquer que seja n_μ .

³Isso advém da condição de contorno de Dirichlet.

cida com a da Equação 97, mas, integrando em $\sigma \in [0, 2\pi]$, que resulta em

$$\boxed{n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi}} \quad (99)$$

É possível estender o resultado obtido na Equação 98 para cordas fechadas? Sim, porém, nota-se que há algumas complicações ao se tentar a mesma estratégia usada em cordas abertas, já que não é conhecido nenhum ponto em que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ é nulo, nem onde $\sigma = 0$ está localizado. Voltando para a Equação 42, tem-se

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau(n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (100)$$

mas, sabe-se que $\partial_\sigma(n \cdot X)$ é nulo, já que o produto nesse gauge depende apenas de τ , logo, é necessário que $\dot{X} \cdot X'$ seja nulo para que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ também se anule. E, de fato, isso ocorre, pois os vetores são ortogonais entre si.

Em suma, tem-se que

$$\boxed{n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta\alpha'(n \cdot p)\tau, \quad n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau} \quad (101)$$

em que $\beta = 2$ para cordas abertas e $\beta = 1$ para cordas fechadas. É interessante também analisar as consequências que essa parametrização causa em \mathcal{P}^τ . Para tal, substitui-se a Equação 101 em \mathcal{P}^τ , considerando que $\dot{X} \cdot X' = 0$,

$$n \cdot p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(X')^2 \partial_\tau(n \cdot X)}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (102)$$

mas $n \cdot \dot{X} = 2\pi\alpha'(n \cdot p)$, logo,

$$1 = \frac{(X')^2}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \Rightarrow \dot{X}^2 + X' = 0. \quad (103)$$

Levando em consideração que $\dot{X} \cdot X' = 0$, encontra-se o vínculo

$$\boxed{(\dot{X} \pm X')^2 = 0} \quad (104)$$

Com auxílio da Equação 103, é possível simplificar as raízes dos momentos canônicos, de modo que encontra-se $\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2} = (X')^2$ e retorna

$$\boxed{\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu} \quad (105)$$

Substituindo na Equação de Movimento 44 obtém-se

$$\partial_\tau \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \right) + \partial_\tau \left(-\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu \right) = 0,$$

$$\boxed{\ddot{X}^\mu + X^{\mu\prime\prime} = 0} \quad (106)$$

ou seja, tem-se, nessa parametrização, uma equação de onda.

4.1.3 Solução da Equação de Movimento

Encontrado a Equação 106 é possível encontrar explicitamente sua solução. Para cordas abertas, supõem-se que as D-branas são do tipo que preenchem todo espaço, logo, todas as coordenadas satisfazem a condição de fronteira livre. A forma geral para a solução de 106 é, considerando f e g funções arbitrárias,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)). \quad (107)$$

As condições de contorno implicam que $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$, o que implica, devido à Equação 105 que

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0, \quad \text{em } \sigma = 0, \pi. \quad (108)$$

Substituindo esse resultado na Equação 107 para $\sigma = 0$, tem-se

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2} (f^{\mu\prime}(\tau) - g^{\mu\prime}(\tau)) = 0, \quad (109)$$

ou seja, como a derivada em relação a σ é igual, f e g se diferem a menos uma constante, que pode ser absorvida pela própria definição de f e conclui-se que

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)). \quad (110)$$

Usando agora a Equação 107 para $\sigma = \pi$, tem-se

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2} (f^{\mu\prime}(\tau + \pi) - f^{\mu\prime}(\tau - \pi)) = 0, \quad (111)$$

ou seja, f é uma função periódica em 2π . É possível escrever então f' como uma série de Fourier e integrá-la para obter uma expansão para f ,

$$f^{\mu\prime}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu)$$

$$\Rightarrow f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1} (A_n^\mu \cos nu + B_n^\mu \sin nu). \quad (112)$$

Substituindo essa expressão na Equação 110 obtém-se

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\omega} (A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma. \quad (113)$$

Para uma melhor interpretação física, é interessante construir a solução em função dos modos de expansão, definidos pela expressão

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau &= -\frac{i}{2} \left((B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau} \right), \\ &\equiv -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} \left(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau} \right). \end{aligned} \quad (114)$$

A escolha de $\sqrt{2\alpha'}$ é para que a_n^μ seja adimensional. Ao se quantizar, essas constantes serão fundamentais pois se tornarão os operadores de criação e aniquilação [Zwiebach, 2009]. Novamente, voltando à tentativa de atribuir significado físico para a equação 113, é interessante analisar o momento, tal que

$$\begin{aligned} p^\mu &= \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu \\ &\therefore f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu. \end{aligned} \quad (115)$$

Além disso, como f_0^μ é arbitrário, é possível escolhê-lo como $f_0^\mu = x_0^\mu$. Assim, a Equação 113 se torna

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau} \right) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (116)$$

Nota-se que a somatória começa em $n = 1$, assim, o segundo termo da expressão corresponde ao modo zero. É interessante fazer uma renomeação dos modos, por meio da definição

$$\begin{aligned} \alpha_0^\mu &= \sqrt{2\alpha'} p^\mu \\ \alpha_n^\mu &= a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (117)$$

em que $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$. Desse modo, é possível reescrever a Equação 116 como

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (118)$$

Para cálculos futuros, é interessante reescrever também os vínculos da Equação 104. Deri-

vando em relação a τ e σ a Equação 118, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{X}^\mu &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}, \\ X^{\mu'} &= -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \sin n\sigma e^{-in\tau}\end{aligned}\tag{119}$$

de modo que a Equação 104 se torna

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}\tag{120}$$

Até o momento, desenvolveu-se a Teoria com n_μ livre. A partir de agora, irá ser fixado

$$n_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right),\tag{121}$$

o que retorna o gauge cone de luz. As consequências dessa escolha podem ser vistas logo na Equação 89, uma vez que

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+,\tag{122}$$

em que é possível relacionar ambas as quantidades por meio da Equação 101,

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}.\tag{123}$$

A partir daqui, as coordenadas da folha de mundo serão escritas como $X^\mu = (X^+, X^-, X^I)$ em que X^I são chamadas coordenadas transversais e $I = 2, 3, 4, \dots, d$ ⁴. Usando a Equação 118 é possível escrever explicitamente as coordenadas cone de luz. As coordenadas transversais se tornam

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma,\tag{124}$$

e, observando a Equação 122, tem-se

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau,\tag{125}$$

que, comparando com 118, resulta em

$$x_0^+ = 0, \quad \alpha_n^+ = \alpha_{-n}^+ = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.\tag{126}$$

Como X^- é descrito em função de X^0 e X^1 , ele satisfaz as mesmas equações de onda, logo,

⁴Note que está sendo feito o uso de dois recursos: a fixação do gauge cone de luz, na qual atribui valor para n_μ e as coordenadas cone de luz, pois estas se tornam convenientes nessa escolha de gauge.

pode ser escrito usando 118,

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (127)$$

Também é possível formular a relação entre essa teoria com a álgebra que rege seus operadores: a Álgebra de Virasoro. Para tal, começa-se analisando o vínculo usando coordenadas cone de luz, usando a Equação 104

$$\begin{aligned} -2\left(\dot{X}^+ \pm X^{+'}\right)\left(\dot{X}^- \pm X^{-'}\right) + \left(\dot{X}^I \pm X^{I'}\right)^2 &= 0, \\ \therefore \dot{X}^- \pm X^{-'} &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\dot{X}^I \pm X^{I'}\right)^2. \end{aligned} \quad (128)$$

A equação acima mostra uma das vantagens do gauge cone de luz, pois se elimina a resolução de X^- usando uma raiz quadrada. Vê-se a necessidade de $p^+ > 0$, e será assumido isso durante toda a análise. É possível explicitar o vínculo usando as soluções encontradas em termos dos modos de oscilação. Usando a Equação 120,

$$\dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (129)$$

Assim, a Equação 128 se torna

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned} \quad (130)$$

e conclui-se que α_n^- pode ser expresso como

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (131)$$

Logo, encontrou-se uma solução completa da teoria, fixado p^+ , x_0^- , x_0^I e α_n^I . A Equação 131 é conhecida como Modos Transversais de Virasoro L_n^\perp

$$\boxed{L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I} \quad (132)$$

em que, para $n = 0$, tem-se a dependência dos momentos cone de luz

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = 2\alpha'p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp$$

$$\boxed{2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'}L_0^\perp} \quad (133)$$

Também é possível escrever os vínculos usando os Modos de Virasoro, que se tornam

$$\boxed{\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha'p^+} \left(\dot{X}^I \pm X'^I \right)^2} \quad (134)$$

Por fim, a única quantidade restante para analisar é $\mathcal{P}^{\tau-}$. Esta é possível obter-se facilmente substituindo a Equação 128 na Equação 42, que resulta em

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X'^I X'^I}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (135)$$

Ademais, é possível usar a equação de casca de massa para obter o operador M^2 em função dos modos de oscilação. Em coordenadas cone de luz, tem-se

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I, \quad (136)$$

e, desenvolvendo o produto dos momentos

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'}L_0^\perp = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2}\alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \right) = p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I, \quad (137)$$

encontra-se que

$$\boxed{M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I} \quad (138)$$

4.2 Quantização de Cordas Abertas

Feita a fixação do gauge alinhado com a mudança de coordenadas para cone de luz, é possível iniciar o processo de quantização. Para tal, é necessária a promoção de variáveis para operadores.

Observando as Equações 135, 127 e 123, nota-se que definindo as quantidades $X^I(\sigma)$, x_0^- , $\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)$ e p^+ obtém-se todos os valores necessários para descrever a Teoria. Desse modo, define-se como variáveis dinâmicas do sistema tais quantidades, cujas relações de comutações podem ser provadas como sendo [Zwiebach, 2009]

$$\boxed{[X^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')} \quad (139)$$

$$[x_0^-, p^+] = -i, \quad (140)$$

enquanto as demais relações são nulas entre si,

$$[x_0^-, X^I(\sigma)] = [x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = [p^+, X^I(\sigma)] = [p^+, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = 0. \quad (141)$$

Nota-se que os operadores estão na representação de Schrödinger, mas também é possível escrevê-los usando a representação de Heisenberg, de modo que tenham dependência explícita de τ

$$X^I(\tau, \sigma), x_0^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \text{ e } p^+(\tau). \quad (142)$$

Assim, é possível calcular o hamiltoniano do sistema. Ele deve gerar translação em τ e, como $X^+ = X^+(\tau)$, é possível escrever

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+}, \quad (143)$$

desse modo, lembrando que p^- é a energia de cone de luz, é possível escrever o hamiltoniano como

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-}, \quad (144)$$

substituindo a Equação 135 e usando a definição de densidade de momento na Equação 42, obtém-se H totalmente expresso totalmente em termos das variáveis dinâmicas.

$$\boxed{H(\tau) = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X'^I(\tau, \sigma) X'^I(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right)} \quad (145)$$

Com isso, é possível usar a relação $i\dot{\xi}(\tau, \sigma) = [\xi(\tau, \sigma), H(\tau)]$ não somente para averiguar se a escolha do hamiltoniano está correta, mas também calcular os comutadores das derivadas de X^μ . Para verificar se a escolha de H foi feita de maneira correta, é possível calcular a relação

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), H(\tau)] = \left[X^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right], \quad (146)$$

cuja segunda parte do hamiltoniano foi ignorada já que X^I comuta consigo mesmo. Fazendo o uso de 139, encontra-se que

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = \pi\alpha' \cdot 2 \cdot \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \quad (147)$$

que se mostra coerente com a Equação 42, sendo um forte indicador de que H foi escolhida de maneira correta. Outra relação de comutação útil além das relacionadas com as variáveis dinâmicas do sistema é a combinação $(\dot{X}^I \pm X'^I)$. Calculando inicialmente o comutador das derivadas separadamente, por meio da substituição da Equação 147 em 139, obtém-se

$$\left[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (148)$$

Derivando esse comutador em relação a σ ,

$$\left[X'^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (149)$$

Com isso, é possível obter o valor do comutador

$$\begin{aligned} & \left[\left(\dot{X}^I + X^{I'} \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^J + X^{J'} \right) (\tau, \sigma') \right] = \\ & \left[\dot{X}^I (\tau, \sigma), X^{J'} (\tau, \sigma') \right] + \left[X^{I'} (\tau, \sigma), \dot{X}^J (\tau, \sigma') \right], \end{aligned} \quad (150)$$

em que a igualdade é válida visto que as mesmas derivadas comutam entre si [Zwiebach, 2009]. O primeiro termo é dado pela Equação 149, enquanto o segundo pode ser calculado por meio dessa mesma equação,

$$- \left[X^{J'} (\tau, \sigma'), \dot{X}^I (\tau, \sigma) \right] = - (2\pi\alpha') i\eta^{II} \frac{d}{d\sigma'} \delta (\sigma' - \sigma) = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta (\sigma - \sigma'). \quad (151)$$

Generalizando, conclui-se que

$$\left[\left(\dot{X}^I \pm X^{I'} \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^J \pm X^{J'} \right) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta (\sigma - \sigma'), \quad (152)$$

e, conseqüentemente,

$$\left[\left(\dot{X}^I \pm X^{I'} \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^J \mp X^{J'} \right) (\tau, \sigma') \right] = 0. \quad (153)$$

4.2.1 Relação de Comutação para os Osciladores

Como já dito anteriormente, a escrita das soluções das equações de movimento usando os modos de oscilação é útil, pois gera uma interpretação física interessante ao se realizar a quantização [Zwiebach, 2009].

Nota-se que a Equação 129 é válida para o intervalo $[0, \pi]$, entretanto, é possível perceber que é possível estender para um período de 2π , visto que ela aceita valores negativos de σ . Desse modo, tem-se

$$\dot{X}^I - X^{I'} (\tau, -\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad \sigma \in [-\pi, 0]. \quad (154)$$

Ao se calcular o comutador

$$\left[\left(\dot{X}^I + X^{I'} \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^J + X^{J'} \right) (\tau, \sigma') \right] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta (\sigma - \sigma'), \quad (155)$$

e o comutador

$$\left[\left(\dot{X}^I - X^{I'} \right) (\tau, -\sigma), \left(\dot{X}^J - X^{J'} \right) (\tau, -\sigma') \right] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta (\sigma - \sigma'), \quad (156)$$

é possível notar que ambos retornam o mesmo valor. Assim, usando as Equações 129 e 154 encontra-se

$$\sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} e^{-im'(\tau + \sigma)} e^{-in'(\tau + \sigma')} \left[\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J \right] = 2\pi i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta (\sigma - \sigma'). \quad (157)$$

Integrando ambos os lados em σ e σ' de $[0, 2\pi]$, obtém-se

$$\boxed{[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}}. \quad (158)$$

Por fim, é necessário calcular o comutador de α com seu conjugado, e partir disso, será possível fazer conclusões significativas sobre a física que eles representam. Para $\mu = I$ na Equação 117 tem-se

$$\alpha_n^I = a_n^I\sqrt{n} \quad \text{e} \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger}\sqrt{n}, \quad n \geq 1, \quad (159)$$

e conseqüentemente, conclui-se dessa definição

$$(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (160)$$

Nota-se que enquanto α_n abrange qualquer inteiro, a_n é válido apenas para n positivo. Usando a Equação 158, é possível reescrevê-la como

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ}. \quad (161)$$

Substituindo pela definição de a_n^I tem-se

$$\begin{aligned} [\sqrt{m}a_m^I, \sqrt{n}a_n^{J\dagger}] &= m\delta_{m,n}\eta^{IJ} \\ \Rightarrow [a_m^I, a_n^{J\dagger}] &= \frac{m}{\sqrt{mn}}\delta_{m,n}\eta^{IJ}. \end{aligned} \quad (162)$$

É possível observar que o lado direito da equação não é nulo somente se $m = n$, logo, a expressão m/\sqrt{mn} sempre será 1, logo,

$$\boxed{[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n}\eta^{IJ}} \quad (163)$$

Além disso, com base na Equação 161 é possível concluir que $[a_m^I, a_{-n}^J] = 0$ e $[a_m^{I\dagger}, a_{-n}^{J\dagger}] = 0$. Logo, é possível concluir que $(a_m^I, a_m^{I\dagger})$ obedecem às mesmas relações que os operadores de aniquilação e criação de um oscilador harmônico simples [Zwiebach, 2009]. Estendendo esse conceito para o contexto dessa teoria, para cada direção transversal I há um par de operadores de criação e aniquilação para cada $m > 1$. Esse conceito pode ser aplicado para α_n , assim,

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_n^I \quad \text{são operadores de aniquilação,} \\ \alpha_{-n}^I \quad \text{são operadores de criação}(n \neq 1). \end{array}} \quad (164)$$

Escrevendo a Equação 124 explicitando os operadores, tem-se

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha'p^I\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{n}. \quad (165)$$

4.2.2 Os Modos de Virasoro

Até o momento, foi feita uma análise das coordenadas transversais e escreveu-se X^I usando os modos de expansão α_n . Um questionamento natural é como se dá essa análise para as coordenadas cone de luz. A expressão para X^+ está na Equação 125, enquanto a para X^- está na 127, enquanto os vínculos estão explicitados na Equação 128.

Nota-se que, ao passo que α_n foi promovido a operador, devido à Equação 132 indica que L_n^\perp também foi, sendo agora chamado de Operador de Virasoro Transversal. Entretanto, a definição para L_n^\perp precisa de um ajuste, visto que ela foi definida inicialmente com α_n sendo uma variável clássica, ou seja, que sempre comuta [Zwiebach, 2009].

Entretanto, como pode ser observado pela Equação 158, isso só ocorre quando se tem $p \neq p - n$. Ou seja, a única quantidade à qual é possível ter problemas de ordenamento ⁵ é para $n = 0$. Desse modo, sabe-se que L_0^\perp pode ser escrito como

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (166)$$

que pode ser reescrito, sabendo que $[\alpha_{-p}^I, \alpha_p^I] = p\eta^{II} = p(D - 2)$, tem-se

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D - 2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \quad (167)$$

Nota-se que, apesar da ordenação estar correta, tem-se um fator que diverge para o infinito. Para eliminar esse problema, utiliza-se do conceito de renormalização. Dada a função

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (168)$$

é possível usar sua continuação analítica para $s = -1$, em que obtém-se $\zeta(-1) = -1/12$. Dessa forma, L_0^\perp se torna

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I - \frac{1}{24} (D - 2). \quad (169)$$

A massa também pode ser reescrita a partir dessa renormalização. Usando a Equação da casca de massa

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a) - p^I p^I,$$

$$\boxed{M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I - \frac{1}{24} (D - 2) \right)} \quad (170)$$

⁵Essa preocupação com o ordenamento advém da interpretação física de α_n como operadores de criação e aniquilação. Em outras palavras, caso isso não seja revisado, L_n^\perp pode não estar bem definido para o estado de vácuo.

Uma observação importante a se fazer também sobre os operadores do Virasoro é que $(L_n^\perp)^\dagger = L_{-n}^\perp$ advém dessa mesma propriedade que os operadores α_n^I possuem [Zwiebach, 2009].

Feito o ordenamento normal, é possível fazer o cálculo dos comutadores de L_n^\perp . Estes formam a extensão central da álgebra de Witt e não comutam entre si [Di Francesco et al., 1997]. Para observar-se isso, inicia-se calculando o comutador

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [\alpha_{m-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^I [\alpha_p^I, \alpha_n^J] + [\alpha_{m-p}^I, \alpha_n^J] \alpha_p^I) = -n \alpha_{m+n}^J. \quad (171)$$

Escrevendo de maneira ordenada L_m^\perp , tem-se

$$L_m^\perp = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \alpha_{m-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \alpha_k^I \alpha_{m-k}^I, \quad (172)$$

possibilitando calcular o comutador, usando as Equações 171 e 172,

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (m-k) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (m-k) \alpha_k^I \alpha_{m+n-k}^I \quad (173)$$

Nota-se que os dois primeiros termos estão ordenados, porém, os dois últimos dependem de qual valor $m+n$ assume. Separa-se então em duas possibilidades, sendo a primeira $m+n \neq 0$, o que resulta em [Zwiebach, 2009]

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n) L_{m+n}^\perp \quad \text{se } m+n \neq 0. \quad (174)$$

A segunda possibilidade é $m+n=0$, encontra-se [Zwiebach, 2009]

$$[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] = 2m L_0^\perp + \frac{1}{12} (D-2) (m^3 - m) \quad \text{se } m+n=0 \quad (175)$$

Ambas as equações podem ser condensadas em apenas uma, que é expressa como

$$\boxed{[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n) L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}} \quad (176)$$

Por fim, é interessante citar que os operadores de Virasoro podem gerar reparametrizações infinitesimais na folha de mundo ao atuar nas coordenadas X^I [Di Francesco et al., 1997].

4.2.3 Recuperando a Invariância de Lorentz

A invariância de Lorentz é fundamental para uma teoria, pois garante que os resultados obtidos são válidos para todos os observadores. Entretanto, essa propriedade foi perdida com a escolha das coordenadas cone de luz. Para recuperá-la, é necessário que haja comutação dos

operadores de Lorentz⁶. Escrevendo a Equação 88 usando 116,

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \quad (177)$$

Como X^- não é uma função trivial das coordenadas transversais, M^{-I} torna-se a expressão mais delicada de se tratar [Zwiebach, 2009]. Analisando o comutador

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0. \quad (178)$$

Escrevendo a Equação 177 usando as coordenadas cone de luz, tem-se

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-), \quad (179)$$

escrevendo o segundo termo na forma hermitiana, ou seja, $x_0^I p^- = \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I)$, tem-se

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-). \quad (180)$$

Logo, o operador M^{-I} se torna

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^I) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp), \quad (181)$$

e o comutador pode ser escrito como

$$\begin{aligned} [M^{-I}, M^{-J}] &= -\frac{1}{\alpha' p^{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \\ &\times \left\{ m \left[1 - \frac{1}{24}(D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24}(D-2) + a \right] \right\} \end{aligned} \quad (182)$$

Assim o termo entre colchetes deve ser nulo termo a termo para que o comutador seja nulo. O primeiro termo informa que

$$\boxed{D = 26} \quad (183)$$

Ou seja, para que a invariância de Lorentz seja preservada, é necessário que 26 dimensões espaço-temporais! O segundo termo mostra que

$$\boxed{a = -1} \quad (184)$$

que é conhecido como peso conforme e será melhor explicado adiante.

⁶Assim como os operadores de Virasoro geram reparametrizações infinitesimais na folha de mundo, os geradores de Lorentz geram as transformações de Lorentz no espaço-tempo.

4.2.4 Espaço de Estados

Para a construção do espaço de estados, utiliza-se as componentes transversais \vec{p}_T e p^+ , desse modo, o estado fundamental é dado por

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (185)$$

que, por definição, deve ser aniquilado por

$$a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \text{ em que } I = 2, 3, \dots, 25, n \geq 1. \quad (186)$$

Desse modo, uma base geral pode ser escrita na forma

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} \left(a_n^{I\dagger}\right)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (187)$$

ou seja, pela aplicação de operadores de criação no estado fundamental, cuja quantidade de vezes que ele é aplicado é determinada por $\lambda_{n,I}$, uma constante positiva. O operador M^2 é de suma importância para a análise dos estados, e pode ser escrito usando o operador número, N^\perp de forma que

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I - 1 \right) = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1). \quad (188)$$

O comutador de N^\perp pode ser calculado usando 158, onde se encontra

$$[N^\perp, a_n^{I\dagger}] = n a_n^{I\dagger}, \quad [N^\perp, a_n^I] = -n a_n^I. \quad (189)$$

Conclui-se de imediato que $N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$. Desse modo, ao se aplicar N^\perp nos estados $a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ e $a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ obtém-se

$$N^\perp a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = [N^\perp, a_2^{I\dagger}] |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_2^{I\dagger} N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 2a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle,$$

$$N^\perp a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = [N^\perp, a_3^{J\dagger}] a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J\dagger} N^\perp a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 5a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (190)$$

Logo, o autoestado de N^\perp aplicado a um estado qualquer é igual à soma dos modos dos operadores de criação presentes. Generalizando,

$$N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}. \quad (191)$$

O produto interno do espaço de estados é definido introduzindo o conjugado hermitiano $\langle p^+, \vec{p}_T |$ tal que

$$\langle p'^+, \vec{p}'_T | p^+, \vec{p}_T\rangle = \delta(p'^+ - p^+) \delta(\vec{p}'_T - \vec{p}_T). \quad (192)$$

Sabe-se que a evolução temporal de um estado $|\lambda\rangle$ é dada por

$$|\lambda, \tau\rangle = e^{-iH\tau}|\lambda\rangle. \quad (193)$$

Desse modo, é possível analisar os estados, começando pelo estado fundamental, que é o único com N^\perp . O operador massa é

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (194)$$

Encontra-se $M^2 < 0$, o que pode ser visto como problemático, já que partículas dessa forma – chamadas de táquions – não foram observadas na natureza. Esse valor negativo indica instabilidade, visto que ao se calcular o potencial de um campo ϕ com tal propriedade, tem-se $V = \frac{1}{2}M^2\phi^2$, ou seja, a solução estacionária é instável.

Ao analisar-se o primeiro estado, para $N^\perp = 1$, tem-se $M^2 = 0$, estado sem massa. Isso significa que obtém-se

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \quad (195)$$

Assim, o estado sem massa pode ser escrito como a combinação linear acima, ou seja,

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (196)$$

A Equação 196 é idêntica à obtida para estados de fótons ao se analisar a teoria de Maxwell em coordenadas cone de luz [Zwiebach, 2009]. Ou seja, na Teoria de Cordas Bosônicas Abertas, tem-se estados de fótons, mesmo que tenha partido apenas da ação de Nambu-Goto, a qual não mostrava indícios de invariância de gauge eletromagnético.

4.3 Quantização de Cordas Fechadas

O processo de quantização de cordas fechadas é análogo ao realizado para cordas abertas, visto que elas podem ser interpretadas como o conjunto de duas cordas abertas duplicadas [Zwiebach, 2009].

Com isso, o conjunto de operadores também respeita esse padrão de duplicidade, surgindo, para qualquer operador O , haverá outro independente \bar{O} , associado à solução geral tal que $[A, \bar{A}] = 0$. Entretanto, em razão da periodicidade de $\sigma \sim \sigma + 2\pi$ tem-se que $p = \bar{p}$ e $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0$. A solução geral é dada por

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n e^{-in\sigma}). \quad (197)$$

Isso também afeta os modos de Virasoro. Entretanto, como o modo zero não sofre essa duplicidade, tem-se que $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$. O operador M^2 também sofre alteração, visto que o operador

número depende dos modos, assim, obtém-se

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \tilde{N}^\perp - 2), \quad (198)$$

já que haverá o termo de correção da ordem normal de ambos os operadores. O estado fundamental também pode ser representado por $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ e o vetor base é dado por

$$|\lambda, \tilde{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (a_n^{J\dagger})^{\lambda_{n,J}} \right] \times \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\tilde{a}_n^{J\dagger})^{\tilde{\lambda}_{n,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (199)$$

Analisando o caso para massa nula, ou seja, $N^\perp = \tilde{N}^\perp = 1$, tem-se que o estado geral é dado por

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (200)$$

e é possível fazer a separação de $R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}$, em que S_{IJ} é a parte simétrica, a qual foi separada em traço ($S' \delta_{IJ}$) e uma matriz de traço nulo \hat{S}_{IJ} , e uma matriz antissimétrica.

Desse modo, há 3 grupos de estados linearmente independentes,

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (201)$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (202)$$

$$S' a_1^{I\dagger} a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (203)$$

A Equação 201 representa o estado de 1-partícula gráviton, mostrando que a teoria prevê a existência da gravidade, mesmo sem a inserção de uma métrica dinâmica ou o desenvolvimento a respeito da covariância.

A Equação 202 corresponde ao estado de 1-partícula do campo e Kalb-Ramond, que é um campo tensorial de dois índices $B_{\mu\nu}$. Outrossim, a Equação 203 pode ser interpretada como a generalização do campo de Maxwell.

Por fim, Equação 203, nota-se que o oscilador não possui índices, representando um campo escalar o qual tem a partícula dilaton associada [Zwiebach, 2009].

5 Introdução à Teoria de Campos Conformes

A simetria conforme pode ser entendida de maneira simplória como uma invariância sobre re-escala. Sistema com esse tipo de invariância não tem comprimento, massa ou escala de energia intrínseca. Teorias conformes 2D são ainda mais especiais pois o grupo de transformações conformes infinitesimais é de dimensão infinita, o que às vezes permite a possibilidade de resolver a teoria de maneira exata e completa (integráveis) [Weigand, 2012].

A invariância conforme tem papel importante em diferentes áreas, como Teoria de cordas, visto que a teoria de folha de mundo é uma teoria de campo conforme 2-dimensional.

Assim, pode-se afirmar que a linguagem na qual a Teoria de Cordas é escrita é a da CFT. Ou seja, é factível reavaliar e aprofundar os temas de quantização covariante e supercordas utilizando esse formalismo.

5.1 Conceitos Básicos em Teoria de Campos Conformes

Para o entendimento do que é uma Teoria Conforme, é necessário definir uma transformação conforme. Estas são transformações sobre o espaço que transformam localmente o ângulo entre 2 linhas, mas não necessariamente as distâncias. Considere um espaço de Minkowski d -dimensional, seja M uma variedade diferenciável e $\varphi(x)$ um mapa diferenciável tal que $\varphi : x \rightarrow x'$, em que $x, x' \in M$. Assim, x' é uma transformação conforme se obedece à relação [Blumenhagen, 2013]

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (204)$$

em que $\Lambda(x)$ é o fator de escala. Desse modo, uma teoria que possui invariância conforme é aquela cujas equações que a descrevem permanecem inalteradas perante a transformação enunciada na Equação 204.

Supondo uma transformação infinitesimal na forma $x'^{\rho} = x^{\rho} + \epsilon^{\rho}(x) + \varphi(\epsilon^2)$, em que $\epsilon \ll 1$, substituindo x'^{ρ} na Equação 204, a condição para que ela seja conforme é dada por [Blumenhagen, 2013]

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\mu\nu}. \quad (205)$$

Uma relação interessante que pode ser derivada da Equação 205 é que é necessário separar a análise de casos em duas: para transformações bidimensionais e para $d \geq 3$. Para ver isso, deriva-se em relação a ∂^{ν}

$$\partial_{\mu}(\partial \cdot \epsilon) + \square\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d}\partial_{\mu}(\partial \cdot \epsilon), \quad (206)$$

derivando agora em relação à ∂_{ν} ,

$$\partial_{\mu}\partial_{\nu}(\partial \cdot \epsilon) + \square\partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d}\partial_{\mu}\partial_{\nu}(\partial \cdot \epsilon), \quad (207)$$

mudando os índices $\mu \leftrightarrow \nu$ e usando novamente a Equação 205 obtém-se

$$\boxed{(\eta_{\mu\nu}\square + (d-2)\partial_\mu\partial_\nu)(\partial \cdot \epsilon) = 0.} \quad (208)$$

Assim, tem-se duas restrições, visto que o termo $(d-2)\partial_\mu\partial_\nu$ é nulo para $d = 2$.

Analisando para o caso em que $d \geq 3$, tem-se que a solução para $\epsilon(x)$ é

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho. \quad (209)$$

Analisando cada constante separadamente, encontra-se que cada uma está associada a transformações específicas, expressas abaixo, em que SCT são Transformações Especiais Conformes, em inglês.

	Transformações		Geradores	
a_μ	translações	$x'^\mu = x^\mu + a^\mu$	$P_\mu = -i\partial_\mu$	
$b_{\mu\nu}$	dilatações	$x'^\mu = \alpha x^\mu$	$D = -ix^\mu\partial_\mu$	(210)
$b_{\mu\nu}$	rotações	$x'^\mu = M^\mu{}_\nu x^\nu$	$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$	
$c_{\mu\nu\rho}$	SCT	$x'^\mu = \frac{x^\mu - (x \cdot x)b^\mu}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)}$	$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - (x \cdot x)\partial_\mu)$	

Para o caso de uma SCT finita, o fato de escala é dado por

$$\Lambda(x) = (1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x))^2, \quad (211)$$

e ela pode ser interpretada como uma inversão, seguida de uma translação e uma nova inversão. É notável dizer que uma SCT não é definida globalmente.

5.2 Grupo Conforme

O grupo conforme consiste no grupo das transformações conformes finitas e inversíveis, e a álgebra dessas transformações é a álgebra de Lie correspondente ao grupo conforme. Definindo $J_{\mu\nu}$ a partir dos geradores das transformações nomeadas acima, tem-se [Di Francesco et al., 1997]

$$\begin{aligned} J_{\mu,\nu} &= L_{\mu\nu}, & J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu), \\ J_{-1,0} &= D, & J_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \end{aligned} \quad (212)$$

$$[J_{mn}, J_{rs}] = i(\eta_{ms}J_{nr} + \eta_{nr}J_{ms} - \eta_{mr}J_{ns} - \eta_{ns}J_{mr}),$$

para $m, n = -1, 0, 1, 2, \dots, d-1$. O número total de geradores é dado por

$$\frac{(d+2)(d+1)}{2}. \quad (213)$$

Por exemplo, para $d = 4$, tem-se 15 geradores, divididos entre 4 translações, 6 rotações, 1 dilatação e 4 transformações especiais. É importante ressaltar que o grupo conforme é isomorfo à $SO(d+1, 1)$.

5.3 Teoria de Campos Conformes em 2- Dimensões

A Equação 205, que expressa a condição de invariância sobre transformações conformes, pode ser escrita em duas dimensões como

$$\partial_0 \epsilon_0 = \partial_1 \epsilon_1, \quad \partial_0 \epsilon_1 = -\partial_1 \epsilon_0, \quad (214)$$

as quais são conhecidas como Equações de Cauchy-Riemann. Funções que obedecem as Equações 214 são ditas holomórficas. Introduzindo as variáveis

$$\begin{aligned} z &= x^0 + ix^1, & \bar{z} &= x^0 - ix^1, \\ \epsilon &= \epsilon^0 + i\epsilon^1, & \bar{\epsilon} &= \epsilon^0 - i\epsilon^1, \\ \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), & \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1), \end{aligned}$$

e sabendo que $\epsilon(z)$ é holomórfica, conclui-se que uma transformação holomórfica $f(z) = z + \epsilon(z)$ origina uma transformação conforme infinitesimal bidimensional $z \mapsto f(z)$.

Assim, é possível fazer uma expansão de Laurent na forma

$$z' = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n (-z^{n+1}), \quad (215)$$

$$\bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n (-\bar{z}^{n+1}), \quad (216)$$

encontra-se que os geradores dessa transformação, l_n e \bar{l}_n são

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z \quad \text{e} \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}. \quad (217)$$

Ou seja, tem-se duas cópias independentes da Álgebra de Witt e com dimensão infinita, cujos comutadores são,

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= (m - n)l_{m+n}, & [\bar{l}_m, \bar{l}_n] &= (m - n)\bar{l}_{m+n}, \\ [l_m, \bar{l}_n] &= 0. \end{aligned} \quad (218)$$

Em suma, a álgebra de transformações conformes infinitesimais e bidimensionais é uma álgebra de Witt e infinita-dimensional [Blumenhagen, 2013]. Ao expandir para transformações globais, elas devem ser definidas na esfera de Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ e são geradas por $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$ cuja combinação gera rotações e dilatações bidimensionais, que podem ser sintetizadas de forma geral como transformações de Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}. \quad (219)$$

A álgebra de Witt admite extensão central, cujos elementos são denotados por L_n e obedecem

à álgebra de Virasoro com extensão central c

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}. \quad (220)$$

5.4 Campos Primários

Assim, é possível fazer algumas definições básicas para CFT bidimensionais. Campos que dependem apenas de z , isto é, $\phi(z)$ são ditos quirais, já campos que dependem apenas de \bar{z} , $\phi(\bar{z})$ são ditos anti-quirais. Se um campo $\phi(z, \bar{z})$ perante a transformação $z \mapsto \lambda z$ se transforma como

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi'(z, \bar{z}) = \lambda^h \bar{\lambda}^{\bar{h}} \phi(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}), \quad (221)$$

então ele tem dimensões conformes (h, \bar{h}) [Blumenhagen, 2013]. Caso o campo se comporte, perante essa transformação, como

$$\phi(z, \bar{z}) \mapsto \phi'(z, \bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})), \quad (222)$$

então ele é chamado de campo primário com dimensões conformes (h, \bar{h}) . Caso f seja uma transformação conforme global, ele é dito quasi-primário.

5.5 Tensor Energia-Momento

O Teorema de Noether afirma que para simetria contínua de uma teoria de campo, há uma corrente conservada j_μ . No de uma CFT, é possível escrever a corrente como

$$j_\mu = T_{\mu\nu} \epsilon^\nu, \quad (223)$$

em que $T_{\mu\nu}$ é chamado tensor energia-momento. Usando a conservação da corrente, é possível provar que seu traço é nulo [Blumenhagen, 2013]. Consequentemente, para o caso bidimensional e usando coordenadas complexas novamente, $T(z, \bar{z})$ é conservado na forma

$$d_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \quad \text{e} \quad d_{\bar{z}} T_{zz} = 0, \quad (224)$$

ou seja, as componentes não nulas do tensor energia-momento são campos anti-quirais e quirais, respectivamente.

5.6 Expansão Produto de Operadores

Dado um campo $\phi(z, \bar{z})$ com dimensões conformes h e \bar{h} , expandindo-o em uma série de Laurent, é possível encontrar seu estado assintótico, dado por

$$|\phi\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z}) |0\rangle = \phi_{-h, -\bar{h}} |0\rangle. \quad (225)$$

Para que seja bem definido, é necessário que não haja singularidade em $z = 0$, logo, tem-se que

$$\phi_{n,\bar{m}}|0\rangle = 0 \quad \text{para} \quad n > -h, \quad \bar{m} > -\bar{h}. \quad (226)$$

Calculando o conjugado de $\phi_{n,\bar{m}}$ usando os modos de Laurent, encontra-se que

$$(\phi_{n,\bar{m}})^\dagger = \phi_{-n,-\bar{m}}. \quad (227)$$

logo, os estados assintóticos no formato ket podem ser escritos na forma

$$\langle\phi| = \lim_{w,\bar{w} \rightarrow \infty} w^{2h} \bar{w}^{2\bar{h}} \langle 0|\phi(w, \bar{w}) = \langle 0|\phi_{+h,+ \bar{h}} \quad (228)$$

em que, da mesma forma, para que sejam bem definidos, devem obedecer

$$\phi_{n,\bar{m}}|0\rangle = 0 \quad \text{para} \quad n < h, \quad \bar{m} < \bar{h}. \quad (229)$$

Uma ferramenta fundamental em CFT é a expansão do produto operador (OPE), que diz o que ocorre quando dois operadores locais estão próximos. Assim, a OPE informa que esses dois operadores podem ser aproximados para uma soma de operadores em um desses dois pontos. Matematicamente, tem-se, dados os campos $\mathcal{O}_i(z, \bar{z})$ e $\mathcal{O}_j(w, \bar{w})$

$$\mathcal{O}_i(z, \bar{z})\mathcal{O}_j(w, \bar{w}) = \sum_k C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w})\mathcal{O}_k(w, \bar{w}), \quad (230)$$

em que $C_{ij}^k(z-w, \bar{z}-\bar{w})$ são os coeficientes da OPE que dependem apenas da separação entre os pontos.

A ideia de OPE também surge ao se analisar a carga conservada Q , relacionada a uma transformação conforme, cujo gerador obedece à relação $\delta\phi = [Q, \phi]$. O comutador é avaliado para tempos iguais. Desse modo, a carga conservada pode ser obtida por uma integral de contorno,

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (dz T(z)\epsilon(z) + d\bar{z} \bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})), \quad (231)$$

e a relação com o gerador se torna

$$\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\phi(w, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz [T(z)\epsilon(z), \phi(w, \bar{w})] + \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\bar{z} [\bar{T}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}), \phi(w, \bar{w})]. \quad (232)$$

A expressão acima pode ser ambígua pois não se sabe se w e \bar{w} estão dentro ou fora do contorno. Nesse sentido, é necessário fazer uma ordenação radial, para que as funções de correlação sejam bem definidas. Nesse caso, essa ordenação é uma OPE [Blumenhagen, 2013].

Assim, expansão do produto operador (OPE) para o tensor energia-momento é dada por

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w, \bar{w}) &= \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w, \bar{w}) + \dots, \\ \bar{T}(\bar{z})\phi(w, \bar{w}) &= \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}}\partial_{\bar{w}}\phi(w, \bar{w}) + \dots \end{aligned} \quad (233)$$

A OPE do tensor energia-momento consigo mesmo é expressa na forma

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots \quad (234)$$

Essa conclusão é possível pois os modos de Laurent do tensor energia-momento satisfazem a álgebra de Virasoro.

5.7 Álgebra de Operadores de Campos Primários Quasi-Quirais

As funções de correlação de n-pontos são objetos estudados em teorias de campos e normalmente são computadas por quantização canônica ou por integrais de caminho. Um recurso útil são as Identidades de Ward, que são a manifestação quântica de simetria [Blumenhagen, 2013]. Matematicamente, a identidade de Ward é expressa por

$$\begin{aligned} & \langle T(z)\phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_N(w_N, \bar{w}_N) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{h_i}{(z-w_i)^2} + \frac{1}{z-w_i} \partial_{w_i} \right) \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_N(w_N, \bar{w}_N) \rangle. \end{aligned} \quad (235)$$

A simetria das transformações globais $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ determina as funções de 2 e 3 pontos para campos quasi-primários, dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \langle \phi_i(z)\phi_j(w) \rangle &= \frac{d_{ij}\delta_{h_i, h_j}}{(z-w)^{2h_i}}, \\ \langle \phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3) \rangle &= \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_1+h_3-h_2}}, \end{aligned} \quad (236)$$

em que d_{ij} e C_{123} são constantes de estrutura.

A forma geral para OPE de dois campos quasi-primários pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned} \phi_i(z)\phi_j(w) &= \sum_{k, n \geq 0} C_{ij}^k \frac{a_{ijk}^n}{n!} \frac{1}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k-n}} \partial^n \phi_k(w), \\ a_{ijk}^n &= \binom{2h_k+n-1}{n}^{-1} \binom{h_k+h_i-h_j+n-1}{n}, \\ C_{ijk} &= C_{ij}^l d_{lk}. \end{aligned} \quad (237)$$

5.8 Produtos Ordenados Normalmente

É natural se impor uma prescrição de ordem ao produto de campos em um mesmo ponto, ou seja, definir-se um ordenamento normal. De maneira simplória, essa definição pode ser entendida como o ato de colocar operadores de criação à direita, para que haja coerência na aplicação de operadores ⁷.

⁷Esse caso já foi abordado no Capítulo 4 para ordenamento do Operador de Virasoro L_0^\perp .

Desse modo, é necessário definir os critérios para classificar os operadores. Levando em consideração a Equação 226 e considerando que operadores de criação devem criar estados de energia positiva, conclui-se que

$$\boxed{\phi_n \text{ com } n > -h \text{ são operadores de aniquilação,}} \quad (238)$$

$$\boxed{\phi_n \text{ com } n \leq -h \text{ são operadores de criação.}} \quad (239)$$

Feita a classificação, é possível discutir sobre a parte regular de um OPE, que dá naturalmente origem a um produto ordenado normalmente (NOP), expresso como

$$\phi(z)\chi(w) = \text{sing.} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-w)^n}{n!} N(\chi\partial^n\phi)(w), \quad (240)$$

em $N(\dots)$ expressa o ordenamento normal dos operadores e é escrito explicitamente na forma

$$N(\chi\phi)_n = \sum_{k>-h^\phi} \chi_{n-k}\phi_k + \sum_{k\leq-h^\phi} \phi_k\chi_{n-k}. \quad (241)$$

Um fato importante a ser citado é que o NOP de campos quasi-primários, geralmente, não é quasi-primário, mas pode ser projetado para que seja [Blumenhagen, 2013]. O principal exemplo é o tensor energia-momento. Usando a Equação 234 em conjunto com 240, tem-se

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + N(TT)(w) + \dots, \quad (242)$$

cujos coeficientes são

$$C_T^T \frac{a_{222}^2}{2!} \quad \text{onde} \quad a_{222}^2 = \binom{5}{2}^{-1} \binom{3}{2} = \frac{3}{10} \quad \text{e} \quad C_T^T = 2. \quad (243)$$

Note que o índice k atua sobre todos os campos quasi-primários na Equação 237, assim, espera-se um termo de ordem 0 $((z-w)^0)$. Denotando-o por $\mathcal{N}(TT)$ encontra-se

$$\mathcal{N}(TT) = N(TT) - \frac{3}{10}\partial^2 T, \quad (244)$$

ou seja, um campo quasi-primário ordenado normalmente.

5.9 Módulo de Verma

Considerando o tensor energia-momento, a expansão de Laurent para $T(z)$ e $\partial T(z)$, bem como os estados assintóticos correspondentes são

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \quad \longleftrightarrow \quad L_{-2}|0\rangle \\ \partial T(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n-2)z^{-n-3} L_n \quad \longleftrightarrow \quad L_{-3}|0\rangle \end{aligned} \quad (245)$$

Com isso, é possível determinar o estado correspondente de dois tensores energia-momento em NOP. A expansão de Laurent para $N(TT)$ é dada por

$$N(TT) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-4} N(TT)_n, \quad (246)$$

mas, a expressão geral para o ordenamento normal é dada por

$$N(TT)_n = \sum_{k > -2} L_{n-k} L_k + \sum_{k \leq -2} L_k L_{n-k}, \quad (247)$$

em que o primeiro termo se anula e o segundo termo contribui apenas para $n - k \leq -2$. Considerando que $n = -4$, encontra-se

$$N(TT)_{-4}|0\rangle = L_{-2}L_{-2}|0\rangle \quad \text{e} \quad N(TT) \longleftrightarrow L_{-2}L_{-2}|0\rangle. \quad (248)$$

É possível mostrar algo similar para $N(T\partial T) \longleftrightarrow L_{-2}L_{-3}|0\rangle$, motivando a definição de que, para cada estado $|\phi\rangle$ no chamado Módulo de Verma

$$\{L_{k_1} \dots L_{k_n}|0\rangle : k_i \leq -2\}, \quad (249)$$

é possível encontrar um campo $F \in \{T, \partial T, \dots, N\}$ com a propriedade de $\lim_{z \rightarrow 0} F(z)|0\rangle = |\phi\rangle$.

Por fim, é útil introduzir a definição de família conforme. Analisando a atuação dos modos do tensor energia-momento agindo sobre um estado $|h\rangle$, tem-se [Blumenhagen, 2013]

Campo	Estados	Nível
$\phi(z)$	$\phi_{-h} 0\rangle = h\rangle$	0
$\partial\phi$	$L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	1
$\partial^2\phi$	$L_{-1}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	2
$N(T\phi)$	$L_{-2}\phi_{-h} 0\rangle$	2
$\partial^3\phi$	$L_{-1}L_{-1}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	3
$N(T\partial\phi)$	$L_{-2}L_{-1}\phi_{-h} 0\rangle$	3
$N(\partial T\phi)$	$L_{-3}\phi_{-h} 0\rangle$	3
\vdots	\vdots	\vdots

(250)

A partir disso, conclui-se que para cada campo primário $\phi(z)$ tem-se infinitos campos descendentes dados pela derivada ∂^k e tomando os NOP com T . O conjunto

$$[\phi(z)] := \{\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \dots, N(T\phi), \dots\}, \quad (251)$$

é denominado família conforme [Blumenhagen, 2013].

6 Quantização Covariante

Como já citado, apesar de eficiente, a quantização via cone de luz não manifesta a simetria de Lorentz devido ao tratamento especial da coordenada X^+ , sendo necessário recuperá-la impondo as dimensões críticas.

Uma forma de quantizar deixando a simetria manifesta é usando a quantização covariante, que possibilita o estudo de D0-branas, fornece um melhor entendimento das equações e o cálculo do potencial do táquion. Com estudo prévio realizado no Capítulo 5, a compreensão dessa técnica se dá de maneira mais fluída.

Como já visto no Capítulo 4, existe uma classe de gauge dada pela Equação 89 a qual gera o gauge estático e o gauge cone de luz, de acordo com a escolha de n_μ [Zwiebach, 2009]. Entretanto, foi visto também que, para qualquer n_μ , é válido o vínculo

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \quad (252)$$

Note que, devido à invariância para a escolha de n_μ , o gauge ainda não está totalmente fixado. Além disso, esse vínculo faz com que as Equações de onda sejam da forma

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu\prime\prime} = 0, \quad (253)$$

e continuam válidas as definições de momento canônico

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^{\mu}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu. \quad (254)$$

Desse modo, a Quantização Covariante parte desse ponto, tomando como válidas as Equações 252, 253 e 254, sem fixar completamente o gauge [Zwiebach, 2009]. A ação usada para esse caso é a mesma que foi usada nas coordenadas via cone de luz, todavia, usando índices de Lorentz, ou seja,

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu), \quad (255)$$

cuja hamiltoniana pode ser facilmente calculada como sendo,

$$\begin{aligned} H &= \int d\sigma (\mathcal{P}_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L}) \\ &= \int d\sigma \left(\mathcal{P}_\mu \dot{X}^\mu - \frac{1}{4\pi\alpha'} \left((2\pi\alpha' \mathcal{P})^2 - X'^2 \right) \right) \\ &= \pi\alpha' \int d\sigma \left(\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} + \frac{X' \cdot X'}{(2\pi\alpha')^2} \right). \end{aligned} \quad (256)$$

Nota-se a semelhança com a Equação 145, divergindo apenas nos índices. Do mesmo modo, é natural introduzir os operadores, ao quantizar, $X^\mu(\tau, \sigma)$ e $\mathcal{P}^\mu(\tau, \sigma)$ e postular as relações de

comutação

$$[X^\mu(\tau, \sigma) \cdot \mathcal{P}^\nu(\tau, \sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (257)$$

Observa-se que, nesse caso, admite-se $\mu = 0$, e configura-se para que o comutador de coordenadas com coordenadas e momentos com momentos seja nulo.

6.1 Operadores de Virasoro de Cordas Abertas

Uma diferença fundamental que pode ser comentada até agora sobre as duas formas de quantização é que, enquanto a quantização cone de luz usa os vínculos para resolver X^- em termos de X^I , a quantização covariante impõe os vínculos nos estados da teoria [Zwiebach, 2009].

Sabe-se que as coordenadas podem ser escritas em termos de osciladores, na forma

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (258)$$

de modo que os vínculos podem ser escritos na forma

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (259)$$

Novamente, como não houve mudanças, as relações de comutação entre os osciladores, elas permanecem iguais às via cone de luz, com a modificação do índice para μ , tal que

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad [a_m^\mu, a_n^{\nu\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{\mu\nu}, \quad (260)$$

em que, para $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ e a relação abaixo é válida

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}. \quad (261)$$

Na mecânica quântica usual, a dependência espacial está incorporada e a temporal é dada pela Equação de Schrödinger, na mecânica quântica covariante, a dependência temporal e espacial estão incorporadas e a Equação de Schrödinger precisa ser alterada.

De modo análogo ao que já foi discutido, é possível introduzir os operadores de Virasoro, visto que tem-se uma Teoria Conforme. Escrevendo os vínculos, tem-se

$$\left(\dot{X} \pm X'\right)^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad L_n = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^\mu \alpha_{p,\mu} \quad (262)$$

cujo comutador é dado por

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}, \quad (263)$$

ou seja, que respeita o comutador de uma álgebra de Witt com extensão central, a álgebra de Virasoro.

6.2 Seleção de Vínculos

Ao se basear no caso clássico, tem-se, intuitivamente, que todos os estados quânticos deveriam ser aniquilados pelos operadores de Virasoro; entretanto, ao se impor os vínculos, pode-se perceber que nenhum estado sobreviveria.

Desse modo, algumas restrições devem ser impostas, não apenas devido a esse fato, mas também em razão da comparação com a quantização via de luz. Ambas as formas de quantização analisam a mesma teoria, dessa forma, devem gerar a mesma física. Nota-se que, ao passo que a via cone de luz possui 24 osciladores, sem nenhuma restrição, a quantização covariante geraria 26 osciladores.

Assim como na quantização via cone de luz, inicia-se analisando L_0 . Novamente, percebe-se que ele não está ordenado normalmente, sendo novamente necessário a imposição de que $(L_0 + a)$ aniquile todos os estados [Tong, 2009].

Recorrendo à imposição que ambas as quantizações devem gerar a mesma teoria, bem como o peso conforme sempre será o mesmo, sabe-se que $a = -1$. Isso resultará na compatibilidade dos espectros. Dessarte, o vínculo quântico será

$$(L_0 - 1)|\phi\rangle = 0. \quad (264)$$

Essa relação é quem determinará M^2 . Escrevendo L_0 explicitamente,

$$L_0 - 1 = \frac{1}{2}\alpha_0^\mu\alpha_{0,\mu} + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^\mu\alpha_{p,\mu} - 1 = \alpha'p^2 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}na_n^{\mu\dagger}a_{n,\mu} = 0. \quad (265)$$

Desse modo, o operador massa ao quadrado é dado por

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + N), \quad N = \sum_{n=1}^{\infty}na_n^{\mu\dagger}a_{n,\mu}. \quad (266)$$

O resultado obtido tem a mesma forma que na quantização via cone de luz, a não ser pela mudança de N^\perp para N . Um fato para se atentar é que essa nova forma do operador número pode sugerir que haja contribuições negativas por parte dos osciladores tipo tempo. Analisando explicitamente N

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}n\left(-a_{n,0}^\dagger a_{n,0} + \sum_{i=1}^{25}a_{n,i}^\dagger a_{n,i}\right). \quad (267)$$

Entretanto, tem-se que, pela Equação 158, $[a_{n,0}, a_{n,0}^\dagger] = -1$, e a contribuição do primeiro termo de M^2 é dada por

$$\left[-na_{n,0}^\dagger a_{n,0}, a_{n,0}^\dagger\right] = +na_{n,0}^\dagger, \quad (268)$$

ou seja, uma contribuição também positiva. Logo, tem-se a concordância entre os espectros [Zwiebach, 2009].

Outro problema que pode surgir em razão dos osciladores com índices temporais é a possi-

bilidade de surgir estados com norma negativa, visto que, se um estado $|\chi\rangle$ tem norma positiva, então $a_{n,0}^\dagger|\chi\rangle$ terá norma negativa,

$$\langle\chi|\chi\rangle = \langle\Phi|a_{n,0}a_{n,0}^\dagger|\Phi\rangle = \langle\Phi|[a_{n,0}, a_{n,0}^\dagger]|\Phi\rangle = -\langle\Phi|\Phi\rangle < 0, \quad (269)$$

Esse resultado é inaceitável para um estado quântico, exigindo novas restrições para corrigir esse problema. Assim, será necessário aniquilar esses estados. Isso não pode ser feito por outro estado além de $L_0 - 1$. Por exemplo, se isso ocorresse para ordem 2, a relação

$$L_2|\Phi\rangle = L_{-2}|\Phi\rangle = 0, \quad (270)$$

o comutador deve aniquilar esse estado também, assim,

$$[L_2, L_{-2}]|\Phi\rangle = L_2(L_{-2}|\Phi\rangle) - L_{-2}(L_2|\Phi\rangle) = 0. \quad (271)$$

Entretanto, pela Equação 263, tem-se $[L_2, L_{-2}] = 4L_0 + \frac{D}{2}$, o que implica em

$$\left(4(L_0 - 1) + 4 + \frac{D}{2}\right)|\Phi\rangle = \left(4 + \frac{D}{2}\right)|\Phi\rangle = 0. \quad (272)$$

Esse resultado, além de mostrar que nenhum estado além de $L_0 - 1$ pode cancelar os estados, também indica que L_n e L_{-n} não podem aniquilar o mesmo estado.

Desse modo, impõem-se que

$$(L_0 - 1)|\Phi\rangle = 0, \quad (273)$$

e que um dos resultados abaixo seja verdadeiro,

$$L_n|\Phi\rangle \stackrel{?}{=} 0, \quad n > 0, \quad (274)$$

$$L_{-n}|\Phi\rangle \stackrel{?}{=} 0, \quad n > 0. \quad (275)$$

Ambos os resultados implicam que $\langle\Phi|L_n|\Phi\rangle = 0$, $n \neq 0$. Escolhe-se que a Equação 274 seja verdadeira. Assim, o hermitiano conjugado é

$$\begin{aligned} \langle\Phi|L_{-n} &= 0, & \text{para } n > 0, \\ \langle\Phi|L_n &= 0, & \text{para } n < 0. \end{aligned} \quad (276)$$

Além disso, será mantida a imposição sobre os osciladores de modo positivo que são de aniquilação e os negativos de criação. Logo, todos os operadores de Virasoro com índice positivo devem aniquilar estados físicos [Zwiebach, 2009].

Os estados que são aniquilados por operadores de Virasoro de ordem positiva são chamados de primários. Essa é uma condição necessária, mas não suficiente para que um estado seja físico.

Os estados admissíveis são aqueles que são primários e são aniquilados por $L_0 - 1$. Com isso, é possível definir um descendente de Virasoro: dado um estado primário, seu descendente

é aquele que pode ser escrito como a combinação linear finita do produto de operadores de Virasoro de ordem negativa agindo sobre esse estado primário [Zwiebach, 2009].

Por exemplo, se $|p\rangle$ é um estado primário, então $L_{-1}|p\rangle$, $(L_{-2}L_{-1} + L_{-4}L_{-3})|p\rangle$ são exemplos de descendentes. Todos os descendentes são ortogonais ao primário.

Vale também definir um estado nulo, que é quando o estado primário e descendente. Ele possui esse nome pois, se somarmos um estado primário a um estado nulo, esse novo estado primário tem o mesmo produto interno com os estados que o geraram.

6.3 Espaço de Estados Covariantes

Nessa forma de quantização, as componentes de p^μ são operadores independentes e comutam entre si, desse modo, a caracterização do estado fundamental será rotulada por $|p\rangle$. Na representação das posições, o mesmo ocorre, e x^μ é representado por $|x\rangle$. Nota-se que há tanto estados de posição quanto pontos no espaço-tempo.

A Hamiltoniana pode ser expressa, usando a Equação 256 como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \left(\dot{X}^2 + X'^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \frac{1}{2} \left(\left(\dot{X} + X' \right)^2 + \left(\dot{X} - X' \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^\pi d\sigma L_n \left(e^{-in\sigma} + e^{in\sigma} \right) e^{-in\tau}, \end{aligned} \quad (277)$$

a qual é nula para todos os valores $n \neq 0$. Entretanto, é necessário lembrar da necessidade de fazer o ordenamento normal de L_0 , e conclui-se que

$$H = L_0 - 1 = \alpha' p^2 + N - 1. \quad (278)$$

Ou seja, a expressão de vínculo é a mesma para o hamiltoniano, o que impossibilita introduzir a equação de Schrödinger. Esse resultado é esperado devido à natureza dos estados, visto que eles já possuem o rótulo temporal [Zwiebach, 2009].

Dessarte, a Equação de Schrödinger se torna um vínculo, que fixa a relação entre a parte temporal e espacial dos estados, ao passo que, na representação do espaço de momentos, ela impõe a relação de casca de massa. Esse vínculo, então, é dado por

$$H|\phi\rangle = 0. \quad (279)$$

Assim, é possível construir os vetores da base do espaço de Hilbert dessa teoria, agindo os operadores de criação sobre o estado fundamental,

$$|r\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{\mu=0}^{25} \left(a_n^{\mu\dagger} \right)^{\lambda_{n,\mu}} |p\rangle, \quad (280)$$

em que $\lambda_{n,\mu}$ é um inteiro positivo e representa a quantidade de vezes que o operador de criação atuou no estado. Nota-se que, ao passo que a quantização via cone de luz, todos os estados de base eram físicos, nesse caso, apenas aqueles que são admissíveis e não descendentes.

Analisando o estado de vácuo, tem-se que ele é aniquilado pelos operadores L_n , tais que $n \geq 1$, restando somente o vínculo

$$0 = (L_0 - 1) |p\rangle = (\alpha' p^2 - 1) |p\rangle \longrightarrow p^2 = 1/\alpha', \quad (281)$$

mostrando um resultado coerente com o obtido na outra forma de quantização. O estado de vácuo não é descendente, visto que não existem estados com autovalor negativos para o gerar.

O estado de fóton é obtido para $N = 1$ sendo atuado somente uma vez, sendo dado por $\xi_\mu a_1^{\mu\dagger} |p\rangle$. Aplicando o vínculo a esse estado, tem-se

$$0 = (\alpha' p^2 + N - 1) \xi_\mu a_{-1}^\mu |p\rangle = \alpha' p^2 \xi_\mu a_{-1}^\mu |p\rangle \implies p^2 = 0. \quad (282)$$

A presença do operador a_1^μ permite que a condição de ser admissível seja testada para $L_{n \leq 2}$. Aplicando o operador de primeira ordem, é possível obter

$$0 = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \xi_\mu a_{-1}^\mu |p\rangle = \sqrt{2\alpha'} p^\mu \xi_\mu |p\rangle \implies p \cdot \xi = 0. \quad (283)$$

Assim, tem-se que p deve ser um vetor tipo-luz, o que permite a escolha de $p_\mu = (p_0, p_0, \dots)$, permitindo escrever a restrição como

$$\xi_0 + \xi_1 = 0. \quad (284)$$

Entretanto, comparando com a quantização via cone de luz, que indica que há $D - 2$ polarizações independentes, esse resultado mostra $D - 1$. Logo, é necessário outro vínculo. Para tal, usa-se o fato de que dois estados físicos se diferem por um estado nulo [Zwiebach, 2009]. Assim, observa-se que os seguintes estados são equivalentes

$$\xi^\mu \sim \xi^\mu + ip^\mu \epsilon, \quad (285)$$

devido à $p^2 = 0$ e à sua ortogonalidade com ξ . Usando novamente o referencial escolhido anteriormente, tem-se

$$\xi^0 \sim \xi^0 - ip^\mu \epsilon, \quad (286)$$

$$\xi^1 \sim \xi^1 + ip^\mu \epsilon, \quad (287)$$

o que implica que é possível escolher uma representação da polarização na forma

$$\xi_0 - \xi_1 = 0. \quad (288)$$

Logo, tem-se de fato a imposição de $D - 2$ polarizações independentes aos estados físicos.

6.4 Operadores de Virasoro de Cordas Fechadas

O tratamento de cordas fechadas é feito de maneira análoga ao feito para cordas abertas. Os modos de expansão para esse caso são dados por

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}), \quad (289)$$

novamente, permitindo a abordagem de que a corda fechada é duas cópias de cordas abertas. Os modos zero devem continuar coincidindo, assim como na quantização via cone de luz. Analisando os vínculos, tem-se

$$\begin{aligned} (\dot{X}^\mu + X^{\mu'})^2 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^\mu \bar{\alpha}_{n-p, \mu} \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n e^{-in(\tau+\sigma)} \\ (\dot{X}^\mu - X^{\mu'})^2 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^\mu \alpha_{n-p, \mu} \right) e^{-in(\tau-\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in(\tau-\sigma)}, \end{aligned} \quad (290)$$

em que os operadores de Virasoro são dados por

$$\bar{L}_n = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^\mu \bar{\alpha}_{n-p, \mu}, \quad L_n = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^\mu \alpha_{n-p, \mu} \quad (291)$$

As definições de estados primários, descendentes e nulos permanecem as mesmas para esse caso. Desse modo, para que um estado seja físico, ele deve respeitar

$$(L_n - \delta_{n,0}) |\Psi\rangle = 0, \quad (\bar{L}_n - \delta_{n,0}) |\Psi\rangle = 0, \quad n \geq 0. \quad (292)$$

Para $n = 0$, encontra-se que

$$\begin{aligned} (L_0 - 1) |\Psi\rangle &= \left(\frac{\alpha'}{4} p^2 + N - 1 \right) |\Psi\rangle = 0, \\ (\bar{L}_0 - 1) |\Psi\rangle &= \left(\frac{\alpha'}{4} p^2 + \bar{N} - 1 \right) |\Psi\rangle = 0, \end{aligned} \quad (293)$$

sendo N e \bar{N} os operadores número covariantes que devem ser iguais. A expressão para M^2 é dada por

$$M^2 = -p^2 = \frac{4}{\alpha'}(N - 1) = \frac{4}{\alpha'}(\bar{N} - 1), \quad (294)$$

e, fazendo o uso dos vínculos para os operadores números, encontra-se [Zwiebach, 2009]

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N + \bar{N} - 2). \quad (295)$$

6.5 A Ação de Polyakov

Apesar da elegância da ação presente na Equação 255, ela possui alguns problemas, por exemplo, a necessidade de inserir manualmente os vínculos. Entretanto, é possível desenvolver

uma ação mais funcional. Reescrevendo a Equação 255 na forma

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (296)$$

em que os índices das coordenadas das cordas contraem com os índices espaço-temporais da métrica $\eta_{\mu\nu}$, e foram introduzidos índices referentes à folha de mundo, tais que

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}, \quad \xi^\alpha = (\xi^1, \xi^2) = (\tau, \sigma). \quad (297)$$

Tais índices contraem com a métrica de Minkowski bidimensional,

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (298)$$

A ação de Polyakov envolve uma nova métrica para folha de mundo, $h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$. Esta métrica é uma variável dinâmica na ação, do mesmo tipo usada na relatividade geral bidimensional, assim, tem suas próprias equações de campo [Zwiebach, 2009]. As equações de movimento serão dadas em função da métrica $\eta_{\mu\nu}$ e $h_{\alpha\beta}$. Desse modo, a ação de Polyakov é dada por

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (299)$$

Do mesmo modo, $h = \det(h_{\alpha\beta})$, bem como

$$h^{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 2. \quad (300)$$

Um questionamento natural é se h possui coerência com os vínculos de Virasoro. Como h é uma matriz simétrica 2×2 , têm-se 3 entradas independentes, ao passo que há 2 vínculos de Virasoro. Definindo a quantidade

$$M^{\alpha\beta} = \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \quad (301)$$

Embora de a matriz ser de ordem 2, para que o resultado fique explícito, denota-se seu tamanho por n , assim, calculando o determinante

$$\det(M^{\alpha\beta}) = (\sqrt{-h})^n \det(h^{\alpha\beta}) = \frac{(-h)^{\frac{n}{2}}}{\det(h_{\alpha\beta})} = \frac{(-h)^{\frac{n}{2}}}{h} = -(-h)^{\frac{n}{2}-1} \quad (302)$$

Simplificando para $n = 2$, encontra-se

$$\det(M^{\alpha\beta}) = -1. \quad (303)$$

Uma matriz de ordem 2 cujo determinante é uma constante possui apenas 2 variáveis independentes, desse modo, tem-se a coerência com os vínculos [Zwiebach, 2009]. Com isso, é

possível iniciar a variação da ação de Polyakov. Iniciando em relação à coordenada X^μ ,

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\delta X^\mu) \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \delta X^\mu \partial_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \right),\end{aligned}\quad (304)$$

que resulta na equação

$$\partial_\alpha \left(\sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu \right) = 0. \quad (305)$$

A variação da ação em relação à métrica h é feita de maneira didática ao se calcular separadamente a variação da métrica. Assim,

$$\delta h = \delta \det (h_{\alpha\beta}) = h (h^{\alpha\beta} \delta h_{\beta\alpha}) = -h \delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (306)$$

A variação de $\delta(\sqrt{-h})$ é dada por

$$\delta(\sqrt{-h}) = -\frac{1}{2} \frac{\delta h}{\sqrt{-h}} = -\frac{1}{2} \frac{(-h) \delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}}{\sqrt{-h}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-h} \delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (307)$$

Dessa forma, encontra-se que a variação da ação é dada por

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} \left(-\frac{1}{2} \delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} (h^{\nu\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X) + \delta h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} \delta h^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X) \right).\end{aligned}\quad (308)$$

O que possibilita encontrar a Equação de Movimento

$$\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \cdot \partial_\delta X) = 0 \quad (309)$$

$$\boxed{\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} (h^{\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta}) = 0}. \quad (310)$$

Analisando a Equação 310, nota-se que $(h^{\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta})$ não possui índices livres, logo, $h^{\alpha\beta}$ é proporcional a $\gamma^{\alpha\beta}$ em todos os pontos da folha de mundo. Dessa forma, a Equação 310 tem como solução

$$h_{\alpha\beta} = f^2(\xi) \gamma_{\alpha\beta}, \quad (311)$$

em que $f^2(\xi)$ é uma função não nula na folha de mundo. Algo notável é que esse reescalamento não altera a ação de Polyakov. Dessarte, a Equação 299 é dita ser invariante de reescala (transformações de Weil). Escolhendo a reparametrização na forma

$$h_{\alpha\beta} = \rho^2(\xi) \eta_{\alpha\beta}, \quad (312)$$

essa escolha pode ser interpretada como uma fixação parcial de gauge, chamada de gauge con-

forme. A Equação 310 se torna

$$\partial_\alpha (\eta^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu) = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta X^\mu = 0.$$

$$\partial_\alpha X \cdot \partial_\beta X - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (-\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \quad (313)$$

Para $\alpha = \beta = 1$ tem-se

$$\dot{X}^2 + \frac{1}{2} (-\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{X}^2 + X'^2 = 0} \quad (314)$$

Para $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ encontra-se

$$\boxed{\dot{X} \cdot X' = 0} \quad (315)$$

E, para $\alpha = \beta = 2$ tem-se

$$X'^2 - \frac{1}{2} (-\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{X}^2 + X'^2 = 0} \quad (316)$$

Ou seja, as Equações de se reduzem aos vínculos de Virasoro, ao se considerar o gauge conforme.

7 Conclusões

Esse trabalho permitiu uma breve introdução à Teoria de Cordas Bosônicas, de forma compreensível a nível de graduação. Iniciou-se desenvolvendo sobre a corda clássica, que possibilitou uma visão mais clara para o procedimento de quantização. Em seguida, introduziu-se a ação de Nambu-Goto, definindo a folha de mundo - trajetória que a corda descreve no espaço-tempo – a qual é descrita pelos parâmetros τ e σ .

Com isso, iniciou-se o processo de fixação de gauge. O primeiro a ser analisado foi o gauge estático, que aparenta ser o calibre mais imediato de ser fixado. Entretanto, percebeu-se que essa fixação resultava em equações de movimento complexas de serem resolvidas analiticamente. Assim, utilizou-se o gauge cone de luz, devido à invariância de reparametrização que a ação de Nambu-Goto possui.

Isso possibilitou a simplificação das equações de movimento e a quantização da corda. Foi possível notar que as soluções das equações de movimento retornam uma equação que possui duas partes: a que expressa o movimento da corda como um corpo extenso, e a que mostra como os pulsos que se propagam na corda se comportam, por meio dos modos de vibrações.

Em analogia ao que se é realizado na primeira quantização, fez-se as escolhas dos operadores dependentes e independentes do tempo, bem como as suas relações de comutação. Notou-se que os modos da corda possuíam um comportamento análogo aos operadores de criação e aniquilação que agem em um estado de vácuo. Foi possível desenvolver brevemente a álgebra de Virasoro, responsável por gerar reparametrizações nas coordenadas das cordas.

A fim de recuperar a invariância de Lorentz, encontrou-se que essa é respeitada somente se a teoria possuir 26 dimensões espaço-temporais. Desenvolveu-se o espaço de estados, sendo possível encontrar um táquion, cujo operador M^2 é negativo, bem como o fóton e o gráviton.

Em seguida, introduziu-se os conceitos básicos sobre Teorias de Campos Conformes, visto que a Teoria de Cordas pode ser tratada como tal. Desenvolveu-se o conceito de transformação conforme e o grupo conforme, trabalhando-os principalmente em duas dimensões. Viu-se que a álgebra dessas transformações, a álgebra de Witt, aceita extensão central, que é conhecida como Álgebra de Virasoro. Trabalhou-se os conceitos de campos primários e de tensor energia-momento. Além disso, desenvolveu-se melhor sobre expansão produto de operadores e produtos ordenados normalmente.

Por fim, estudou-se a quantização covariante, que preserva desde o início a invariância de Lorentz. Trabalhou-se o conceito de operadores primários, descendentes, admissíveis e nulos e como eles definem um estado físico. Analisou-se o espaço de estados, e foi possível concluir que ambas as formas de quantização geravam o mesmo espectro. Também foi abordada a ação de Polyakov, que gera os vínculos de Lorentz naturalmente por meio da introdução de uma métrica $h^{\alpha\beta}$ como variável dinâmica. Encontraram-se as equações de movimento e, impondo o gauge conforme, foi possível verificar que os mesmos vínculos e equações de movimento presentes no gauge cone de luz emergiram naturalmente.

Conclui-se que as duas formas de quantização possuem suas vantagens e desvantagens e que o estudo de ambas é fundamental para o entendimento completo da teoria de cordas bosônicas. Além disso, conhecimento sobre o funcionamento de sistemas gauge e campos conformes bidimensionais complementa o entendimento dos resultados obtidos.

Referências

- [Berkovits, 2004] Berkovits, N. (2004). Theoretical motivation for studying superstrings. *Brazilian Journal of Physics*, 34(4A):1327–1329.
- [Blumenhagen, 2013] Blumenhagen, D. (2013). *Conformal Field Theory*. Springer.
- [D. Lust, 1989] D. Lust, S. T. (1989). *Lectures on string theory*. Lecture Notes in Physics. Springer, Inp0346, springer edition.
- [Di Francesco et al., 1997] Di Francesco, P., Mathieu, P., and Senechal, D. (1997). *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media.
- [Itzykson and Zuber, 1980] Itzykson, C. and Zuber, J.-B. (1980). *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill.
- [Lemos, 2023] Lemos, N. A. (2023). *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física.
- [Mandl and Shaw, 1984] Mandl, F. and Shaw, G. (1984). *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons, 2nd edition.
- [O’Neill, 1983] O’Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, New York.
- [Peskin and Schroeder, 1995] Peskin, M. E. and Schroeder, D. V. (1995). *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- [Polchinski, 1998] Polchinski, J. (1998). *String Theory*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1nd edition.
- [Tong, 2009] Tong, D. (2009). Lectures on string theory.
- [Weigand, 2012] Weigand, T. (2012). Introduction to string theory.
- [Zwiebach, 2009] Zwiebach, B. (2009). *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition.