

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Alice Affonso Sassmannshausen

**Uma introdução à Equação de Dirac: álgebra,
matrizes e espinores**

Sorocaba

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CAMPUS SOROCABA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS PARA A SUSTENTABILIDADE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, QUÍMICA E MATEMÁTICA

Alice Affonso Sassmannshausen

Uma introdução à Equação de Dirac: álgebra, matrizes e espinores

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Federal de São Carlos, *Campus* Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Física. Sorocaba, 16 de dezembro de 2025.

Orientador: Prof. Dr. James Alves de Souza

Sorocaba

2025

Sassmannshausen, Alice Affonso

Uma introdução à Equação de Dirac: álgebra, matrizes e espinores / Alice Affonso Sassmannshausen -- 2025.
58f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador (a): James Alves de Souza

Banca Examinadora: Johnny Vilcarromero Lopez,
Gustavo Garcia Rigolin

Bibliografia

1. Mecânica Quântica Relativística. 2. Equação de Dirac.
3. Spin. I. Sassmannshausen, Alice Affonso. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -
CRB/8 6979



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - SOROCABA (CCFL-SO)
Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780
Telefone: (15) 32298859 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 9/2025/CCFL-So/CCTS/R

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

ALICE AFFONSO SASSMANNSHAUSEN

UMA INTRODUÇÃO À EQUAÇÃO DE DIRAC: ÁLGEBRA, MATRIZES E ESPINORES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Sorocaba, 16 de dezembro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Prof. Dr. James Alves de Souza
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Johnny Vilcarromero Lopez
Membro da Banca 2	Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin



Documento assinado eletronicamente por **James Alves de Souza, Docente**, em 16/12/2025, às 23:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Johnny Vilcarromero Lopez, Docente**, em 18/12/2025, às 20:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Garcia Rigolin, Professor(a) do Ensino Superior**, em 07/01/2026, às 13:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **2109541** e o código CRC **8AA4D01A**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.040908/2025-51

SEI nº 2109541

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA - SOROCABA (CCFL-SO)
Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780
Telefone: (15) 32298859 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-ADP nº 10/2025/CCFL-So/CCTS/R

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso
Ata da Defesa Pública (GDP-TCC-ADP)

Aos dezesseis dias do mês de dezembro de 2025, nas dependências da UFSCar - Campus Sorocaba, realizou-se a Defesa Pública do Trabalho de Conclusão de Curso da estudante **Alice Affonso Sassmannshausen** do Curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, devidamente matriculado na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, perante a Banca Examinadora, composta pelos Professores: Prof. Dr. James Alves de Souza, Prof. Dr. Johnny Vilcarromero Lopez e Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin, segundo o estabelecido nas Normas para apresentação de Trabalho de Conclusão do Curso.

Após a apresentação e arguições, a Banca deliberou, segundo os critérios estabelecidos nas normas supracitadas:

Nome do Docente	Função	Nota
Prof. Dr. James Alves de Souza	Orientador	10 (Dez)
Prof. Dr. Johnny Vilcarromero Lopez	Membro da Banca 1	10 (Dez)
Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin	Membro da Banca 2	10 (Dez)

Com isso, o Trabalho foi considerado **APROVADO**, com nota final **10 (Dez)**.

Sorocaba, 16 de dezembro de 2025.



Documento assinado eletronicamente por **James Alves de Souza, Docente**, em 16/12/2025, às 23:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Johnny Vilcarromero Lopez, Docente**, em 18/12/2025, às 20:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Garcia Rigolin, Professor(a) do Ensino Superior**, em 07/01/2026, às 13:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **2109515** e o código CRC **3534B236**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.040908/2025-51

SEI nº 2109515

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Ata, versão de 02/Agosto/2019

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais e ao meu irmão, Murilo, por me apoiarem, me ensinarem, serem meus maiores exemplos e por seu amor incondicional de sempre.

À toda a minha família, pelo incentivo e suporte constantes.

Aos meus amigos, que estão sempre presentes, mesmo quando não fisicamente, e que acreditaram em mim, inclusive nos momentos em que eu própria duvidei.

Ao meu orientador, professor Dr. James Alves de Souza, que, além de me orientar durante todo este trabalho, me ensinou muito ao longo de toda a graduação.

A todos os meus professores, por cada ensinamento, pelas trocas e pelos conselhos acadêmicos e sobre a vida.

Ao IEFEC, por sempre me lembrar de quão bela é a ciência.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram e continuam contribuindo para que eu me torne, a cada dia, a Alice que sou hoje, muito obrigada!

“The most beautiful experience we can have is the mysterious. It is the fundamental emotion which stands at the cradle of true art and true science”. (A experiência mais bela que podemos ter é o misterioso. É a emoção fundamental que está no berço da verdadeira arte e da verdadeira ciência.)

Albert Einstein

Resumo

A compreensão integrada entre a Mecânica Quântica e a Relatividade Restrita é essencial para descrever partículas elementares em regimes de altas energias, mas essa unificação raramente é explorada em profundidade na formação inicial de professores. Motivados por essa lacuna formativa, desenvolvemos uma introdução conceitual e matematicamente fundamentada à mecânica quântica relativística, com ênfase nas equações de onda covariantes e, em particular, na equação de Dirac. Partindo da incompatibilidade entre a equação de Schrödinger e os princípios da Relatividade Restrita, revisamos os fundamentos necessários de ambas as teorias, com o objetivo de construir um arcabouço coerente que permitisse discutir equações de onda relativísticas. A partir dessa base, apresentamos a equação de Klein-Gordon como primeira tentativa de formulação covariante. Embora consistente matematicamente, mostramos que ela apresenta limitações físicas relevantes, como a não positividade da densidade de probabilidade. A seguir, desenvolvemos a dedução da equação de Dirac, motivada pela necessidade de uma equação linear nas derivadas temporais e espaciais. Introduzimos as matrizes α e β , discutindo suas propriedades de anticomutação no contexto da álgebra de Clifford, e analisamos como essa estrutura matricial permite compatibilizar a relação energia-momento relativística com a interpretação probabilística da Mecânica Quântica. Estudamos também as soluções da equação de Dirac, mostrando a emergência natural do spin $1/2$, a existência de estados de energia negativa e sua interpretação moderna como antipartículas, resultado posteriormente confirmado com a descoberta experimental do pósitron. Por fim, ressaltamos a relevância formativa deste estudo ao reconstruirmos, de maneira acessível e sistemática, conceitos como espinores, operadores matriciais, densidades conservadas e transformações de Lorentz. Esse percurso tornou possível evidenciar não apenas a profundidade conceitual da equação de Dirac e seu papel histórico e epistemológico, mas também o tipo de visão integrada da Física teórica moderna que pode ser oferecida ao estudante de licenciatura. Tal integração reforça a importância das simetrias, das representações matemáticas e da articulação entre diferentes áreas da Física, ampliando o repertório conceitual do futuro docente e fortalecendo sua capacidade de compreender a Física como um conhecimento em permanente construção, sustentado por ideias fundamentais, rigor matemático e diálogo contínuo entre teoria e fenômenos naturais.

Palavras-chave: Mecânica Quântica Relativística. Equação de Dirac. Equação de Klein-Gordon. Spin. Espinores.

Abstract

The integrated understanding of Quantum Mechanics and Special Relativity is essential for describing elementary particles in high-energy regimes, yet this unification is rarely explored in depth during the initial training of physics teachers. Motivated by this educational gap, we developed a conceptually coherent and mathematically grounded introduction to relativistic quantum mechanics, with emphasis on covariant wave equations and, in particular, on the Dirac equation. Beginning with the incompatibility between the Schrödinger equation and the principles of Special Relativity, we reviewed the necessary foundations of both theories with the goal of constructing a consistent framework for discussing relativistic wave equations. Building on this basis, we presented the Klein-Gordon equation as the first attempt at a covariant formulation. Although mathematically consistent, we showed that it exhibits important physical limitations, such as the non-positivity of the probability density. We then developed the derivation of the Dirac equation, motivated by the need for a wave equation linear in both temporal and spatial derivatives. We introduced the matrices α and β , discussing their anticommutation properties in the context of Clifford algebra, and analyzed how this matrix structure reconciles the relativistic energy-momentum relation with the probabilistic interpretation of Quantum Mechanics. We also examined the solutions of the Dirac equation, showing the natural emergence of spin $1/2$, the existence of negative-energy states, and their modern interpretation as antiparticles, a prediction later confirmed experimentally with the discovery of the positron. Finally, we highlight the formative relevance of this study by reconstructing, in an accessible and systematic manner, concepts such as spinors, matrix operators, conserved densities, and Lorentz transformations. This trajectory made it possible to emphasize not only the conceptual depth of the Dirac equation and its historical and epistemological role, but also the type of integrated view of modern theoretical physics that can be offered to undergraduate students in teacher-training programs. Such integration reinforces the importance of symmetries, mathematical representations, and the articulation between different areas of physics, thereby expanding the conceptual repertoire of future teachers and strengthening their ability to understand physics as a body of knowledge in continuous development, supported by fundamental ideas, mathematical rigor, and a permanent dialogue between theory and natural phenomena.

Keywords: Relativistic Quantum Mechanics. Dirac Equation. Klein-Gordon Equation. Spin. Spinors.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE RESTRITA E MECÂNICA QUÂNTICA	14
2.1	Transformações de Lorentz e o Espaço-Tempo de Minkowski	14
2.2	Operadores na Mecânica Quântica: corrente e densidade de probabilidade	18
2.3	Unidades Naturais e Notações	22
3	INTRODUÇÃO À EQUAÇÃO DE DIRAC	25
3.1	À Procura por uma Equação Relativística	26
3.2	A Álgebra de Dirac	29
3.3	Soluções Relativísticas e Grau de Liberdade de Spin	34
3.3.1	Soluções da Equação de Dirac	35
3.3.2	O Spin na Equação de Dirac	42
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICES	48
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER: DENSIDADE E CORRENTE DE PROBABILIDADE	49
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON: DENSIDADE E CORRENTE DE PROBABILIDADE	51
	APÊNDICE C – MATRIZES DE DIRAC	53
	APÊNDICE D – FORMA COVARIANTE DA EQUAÇÃO DE DIRAC	57
	APÊNDICE E – EQUAÇÃO DE DIRAC: DENSIDADE E CORRENTE DE PROBABILIDADE	59

1 Introdução

O final do século XIX e o início do século XX marcaram uma profunda reformulação no entendimento da natureza, impulsionada pelo surgimento de duas teorias fundamentais: a Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica. Cada uma, à sua maneira, transformou radicalmente os conceitos de espaço, tempo, matéria e causalidade, inaugurando uma nova visão de mundo sustentada por princípios físicos e matemáticos que extrapolaram os limites da Física Clássica.

A Relatividade Restrita, formulada por Albert Einstein em 1905 a partir dos trabalhos de Lorentz e Poincaré, estabeleceu que as leis da Física são invariantes em todos os referenciais inerciais e que a velocidade da luz no vácuo é constante, independentemente do movimento da fonte ou do observador. Essa teoria rompeu com a noção newtoniana de espaço e tempo absolutos, introduzindo a unificação espaço-temporal e os conceitos de dilatação temporal, contração de Lorentz e equivalência massa-energia, formando o arcabouço teórico para o estudo de fenômenos de altas velocidades (RESNICK, 1968).

Por outro lado, a Mecânica Quântica, desenvolvida na primeira metade do século XX, emergiu da necessidade de explicar fenômenos microscópicos, como a estabilidade dos átomos, o espectro do hidrogênio e o efeito fotoelétrico, que não encontravam descrição adequada na Física Clássica. A teoria quântica introduziu a quantização de energia, o caráter ondulatório da matéria, o princípio da incerteza e o formalismo de operadores, tornando-se uma teoria fundamental da Física, com grande precisão experimental (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017).

Apesar dos enormes sucessos dessas duas teorias, tornou-se evidente que elas apresentam tensões conceituais (PESKIN; SCHROEDER, 1995; THALLER, 2013). Um exemplo marcante vem do fenômeno do emaranhamento quântico, que estabelece correlações instantâneas entre sistemas distantes e desafia a noção relativística de simultaneidade. Enquanto a Mecânica Quântica admite correlações não locais, a Relatividade impõe que nenhum sinal pode se propagar mais rápido que a luz. Ainda que não haja contradição operacional entre ambas, esse contraste sugere que uma descrição quântica plenamente relativística exige um formalismo próprio.

Neste sentido, uma questão natural surgiu: é possível construir uma teoria quântica compatível com a Relatividade Restrita, de modo a descrever partículas microscópicas que se movem a velocidades próximas à da luz? A resposta a essa pergunta está no âmbito da Mecânica Quântica Relativística, cujo objetivo é formular equações de onda covariantes, isto é, que preservem sua forma em qualquer referencial inercial (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; DIAS, 2021).

Desenvolver essa teoria, entretanto, demanda ferramentas matemáticas e conceituais mais amplas do que as utilizadas em cursos introdutórios de Física. Assim, neste trabalho buscamos construir uma introdução acessível e formativa ao tema das equações de onda relativísticas, com foco na equação de Dirac.

Para tornar o estudo acessível a estudantes de graduação em Licenciatura em Física, para os quais a Mecânica Quântica Relativística normalmente não faz parte da formação, revisitamos, de modo integrado, conceitos essenciais da Mecânica Clássica, Relatividade Restrita e Mecânica Quântica não relativística, apresentando a notação, as operações matriciais, a linguagem de quadrivetores e o formalismo espinorial de forma progressiva, evitando que o aparato matemático obscureça os aspectos físicos.

Nessa perspectiva, retomamos a base conceitual necessária para introduzir operadores quânticos, densidade de probabilidade, matrizes e transformações de Lorentz; discutimos a motivação histórica e formal para a construção de equações de onda compatíveis com a Relatividade; analisamos a equação de Klein-Gordon e como a equação de Dirac pode ser obtida, além de sua estrutura e algumas de suas soluções mais relevantes (FESHBACH; VILLARS, 1958; DIAS, 2021).

Todo o tratamento foi realizado com ênfase nas ideias fundamentais, evitando detalhamentos excessivamente técnicos e priorizando a compreensão conceitual e física.

Esta monografia está organizada em três seções principais: apresentamos uma revisão sucinta e integrada da Mecânica Quântica não relativística, da Relatividade Restrita e da estrutura matemática necessária para a formulação das equações relativísticas de onda, com o intuito de fornecer a base conceitual unificada para a construção de uma equação linear relativística (THALLER, 2013; STRANGE, 1998; VALENTE, 2019); analisamos as limitações das equações anteriores e introduzimos a álgebra de Clifford e as matrizes de Dirac para estabelecer o formalismo espinorial e a estrutura matemática que permitem compreender a formulação completa da equação (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; DIAS, 2021); por fim, derivamos as soluções da equação de Dirac para partículas livres, em repouso e em movimento, discutindo os estados de energia positiva e negativa e a emergência natural do spin $1/2$ (GRIFFITHS, 2008; KANE, 2000). Adicionalmente, examinamos o significado físico dessas soluções e sua relação com o surgimento da antimatéria.

Embora o tema seja de natureza avançada, sua abordagem pedagógica neste trabalho tem como objetivo não apenas apresentar a estrutura matemática da equação de Dirac, mas, sobretudo, fornecer ao estudante uma visão integrada da Física teórica moderna, valorizando o papel das simetrias, das representações matemáticas e da articulação conceitual entre diferentes áreas da Física.

2 Fundamentos da Relatividade Restrita e Mecânica Quântica

Para que possamos entender melhor a equação de Dirac, sua origem, fundamentação matemática e interpretação física, fizemos uma revisão breve e simplificada de alguns fundamentos físicos e matemáticos que norteiam a Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica.

Iniciamos com uma breve discussão sobre a invariância das leis físicas sob as transformações de Lorentz, introduzindo o conceito de espaço-tempo de Minkowski e o papel dos quadrivetores na descrição relativística da energia e momento. Em seguida, são apresentados os operadores fundamentais da Mecânica Quântica, responsáveis por associar grandezas físicas mensuráveis às derivadas temporais e espaciais, bem como o significado das densidades e correntes de probabilidade dentro do formalismo da Mecânica Quântica. Por fim, definimos as unidades naturais e as notações operatórias e matriciais que serão utilizadas ao longo de toda a monografia.

Como nosso trabalho não se propõe a discutir de forma exaustiva e com um alto nível de aprofundamento os fundamentos matemáticos e físicos da Relatividade Restrita e da Mecânica Quântica, convidamos o leitor a ler as obras de Dias (2021), Ryder (1996), Strange (1998), Sakurai e Napolitano (2013).

2.1 Transformações de Lorentz e o Espaço-Tempo de Minkowski

O desenvolvimento da Relatividade Restrita, formulada por Albert Einstein em 1905, teve como ponto de partida a necessidade de conciliar as leis do eletromagnetismo de Maxwell com os princípios da Mecânica Clássica. Enquanto a mecânica newtoniana admitia que o tempo e o espaço eram grandezas absolutas, isto é, independentes do referencial adotado, as equações de Maxwell indicavam que a velocidade da luz no vácuo (c), era a mesma em todos os referenciais inerciais. Essa incompatibilidade levou à formulação de uma nova concepção de espaço e tempo, baseada na ideia de que as leis físicas devem ter a mesma forma em todos os referenciais inerciais, princípio conhecido como invariância de Lorentz (STRANGE, 1998).

Para melhor entender essas relações, vamos considerar dois referenciais inerciais, S e S' , com coordenadas (x, y, z, t) e (x', y', z', t') , respectivamente, sendo que S' move-se com velocidade constante, \mathbf{v} , em relação à S . As transformações de Galileu relacionam as

coordenadas dos dois referenciais da seguinte forma (DIAS, 2021),

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad (2.1)$$

$$t' = t, \quad (2.2)$$

sendo t o tempo absoluto e os vetores posição e velocidade relativa descritos, respectivamente, por $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Porém, ao substituirmos essas transformações nas equações de Maxwell, verifica-se que a velocidade da luz permanece constante em todos os referenciais inerciais, o que evidencia a inadequação desse modelo para a descrição de fenômenos eletromagnéticos (DIAS, 2021).

Em decorrência disso, Einstein propôs dois postulados fundamentais. O primeiro afirma que as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, princípio que expressa a universalidade das leis naturais e a independência das equações físicas em relação ao estado de movimento do observador. O segundo postulado estabelece que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores, independentemente do movimento da fonte ou do sistema de referência (STRANGE, 1998; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017). A partir desses postulados, obtêm-se as transformações de Lorentz, dadas pelas equações 2.3, que asseguram que o intervalo espaço-temporal entre dois eventos seja o mesmo para todos os observadores inerciais.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.3a)$$

$$y' = y, \quad (2.3b)$$

$$z' = z, \quad (2.3c)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{xv}{c^2} \right), \quad (2.3d)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.4)$$

é o fator de Lorentz, responsável por garantir a invariância do intervalo de Minkowski, como veremos adiante, sob mudanças de referencial.

Uma das consequências diretas dessas transformações é a invariância do intervalo espaço-temporal, definida por

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \quad (2.5)$$

Ou seja, esse intervalo permanece o mesmo em todos os referenciais inerciais. Essa propriedade constitui a base matemática da Relatividade Restrita, pois garante que as leis físicas

escritas em termos de grandezas dependentes de s^2 , como energia e momento relativísticos, mantenham a mesma forma em qualquer referencial inercial.

Assim, o conceito de invariância de Lorentz está, portanto, associado à simetria do espaço-tempo. Uma equação física é dita covariante de Lorentz quando conserva sua forma sob as transformações de Lorentz. Esse princípio é essencial para a formulação de qualquer teoria física relativística, incluindo as equações de onda quânticas (STRANGE, 1998).

Como será discutido mais adiante, a equação de Schrödinger não é covariante sob as transformações de Lorentz, pois trata tempo e espaço de maneira assimétrica: é de primeira ordem em t e de segunda ordem em \mathbf{r} . A equação de Klein-Gordon, por outro lado, restaura essa simetria diferencial ao tratar espaço e tempo com a mesma ordem derivativa, constituindo a primeira tentativa consistente de incorporar a Relatividade Restrita à descrição quântica da matéria.

Além disso, as transformações de Lorentz revelam que o espaço e o tempo não são entidades independentes, como concebido na mecânica newtoniana, mas dimensões intrinsecamente relacionadas que compõem uma única estrutura geométrica: o espaço-tempo. Essa unificação foi formalizada em 1908 por Hermann Minkowski, que reformulou a Relatividade Restrita em termos geométricos, mostrando que os fenômenos físicos podem ser descritos com maior elegância e coerência em um espaço-tempo de quatro dimensões, três espaciais e uma temporal (RYDER, 1996; STRANGE, 1998; SAKURAI; NAPOLITANO, 2017).

Para descrever grandezas nesse espaço-tempo, é necessário distinguir entre vetores contravariantes (índices superiores) como $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ e vetores covariantes (índices inferiores) como $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z)$.

Assim, de maneira geral, uma grandeza física é dita invariante quando mantém o mesmo valor independentemente do sistema de referência adotado; isto é, quando sua forma permanece a mesma sob uma transformação de coordenadas, seja ela galileana ou de Lorentz. Em outras palavras, a invariância expressa que as leis da Física preservam a mesma estrutura matemática em todos os referenciais inerciais (DIAS, 2021).

Por outro lado, vetores e tensores possuem componentes que variam de um sistema de coordenadas para outro. Ao mudar de referencial, dois elementos se alteram simultaneamente: a base vetorial (os eixos) e as componentes numéricas que representam um vetor ou tensor. A grandeza física, seja um vetor geométrico real ou um gradiente, permanece a mesma, apenas sua descrição coordenada se modifica.

Vetores como deslocamentos e velocidades têm componentes que mudam no sentido inverso ao da transformação dos eixos. Se um eixo é alongado, a correspondente componente diminui para que o vetor geométrico continue representando a mesma seta no espaço. Essas grandezas são chamadas de *contravariantes*. Já gradientes e outras quantidades que medem

variações transformam-se de maneira complementar: suas componentes acompanham a mudança da “régua” usada para medir distâncias. Assim, quando um eixo é alongado, a componente do gradiente aumenta, pois a variação é medida por unidade de comprimento. Esses objetos são chamados de *covariantes*. Portanto, contravariância e covariância não descrevem grandezas diferentes, mas sim modos distintos pelos quais as componentes se reorganizam para representar a mesma entidade física em diferentes sistemas de coordenadas (DIAS, 2021).

Além disso, a relação entre componentes covariantes e contravariantes é estabelecida pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, o qual, como destaca Dias (2021), define a métrica que especifica a medida de distância no espaço-tempo. No espaço-tempo de Minkowski, esse tensor é dado por (RYDER, 1996)

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

e permite converter componentes covariantes em contravariantes ou vice-versa. Assim, um vetor covariante de posição, x_μ , relaciona-se com o vetor contravariante de posição, x^ν , a partir do tensor métrico pela seguinte relação

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu = g_{\mu 0} x^0 + g_{\mu 1} x^1 + g_{\mu 2} x^2 + g_{\mu 3} x^3. \quad (2.7)$$

Esta mostra como o tensor métrico atua como um “ponteiro” que abaixa ou levanta índices, conectando diretamente vetores contravariantes e seus correspondentes covariantes.

Podemos usar a convenção de soma de Einstein, na qual o símbolo de somatório fica implícito, de forma que a equação (2.7) pode ser reescrita como (RYDER, 1996),

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (2.8)$$

Podemos ainda estabelecer que, para relacionar um vetor contravariante com seu respectivo vetor covariante, fazemos, de maneira similar,

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \quad (2.9)$$

Assim, podemos definir o quadrivetor posição como $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ de modo que o seu “quadrado”, entendido como a contração com a métrica de Minkowski, é dado por

$$x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = t^2 - \mathbf{x}^2 \quad (2.10)$$

Além dos vetores covariantes e contravariantes, temos que o operador diferencial pode ser escrito como (RYDER, 1996),

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad (2.11)$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (2.12)$$

Dessa forma e de maneira análoga, podemos definir o quadrivetor momento, que relaciona a energia, E , com o momento linear, \mathbf{p} , como,

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (2.13)$$

Considerando as características e propriedades do espaço-tempo de Minkowski temos que o quadrimomento (quadrivetor momento), covariante e contravariante, tem um produto escalar que resulta em uma quantidade invariante, de forma que,

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (2.14)$$

Aqui utilizamos a notação m para a massa invariante (massa de repouso), como é usual na literatura moderna.

Portanto, podemos escrever que a relação relativística entre energia e momento é dada por (PESKIN e SCHROEDER, 1995),

$$E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2. \quad (2.15)$$

É importante destacar que, neste trabalho, estamos considerando um espaço-tempo plano de Minkowski, com coordenadas cartesianas e métrica constante, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ou $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$. Nesse caso, as grandezas covariantes e contravariantes permanecem relacionadas apenas por uma diferença de sinal nas componentes espaciais, de modo que podem ser tratadas como equivalentes para fins práticos. Assim, embora matematicamente distintos, uma vez que se transformam de maneira oposta sob as transformações de Lorentz, os vetores $x^\mu = (ct, x, y, z)$ e $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$ representam o mesmo objeto físico e, com isso podemos adotar $x^\mu = x_\mu$ sem prejuízo no significado físico (DIAS, 2021).

Essa simplificação é amplamente utilizada em formulações teóricas que consideram métricas planas e não compromete o rigor ou a consistência do formalismo. Porém, mantivemos essa breve recapitulação e a notação com índices superiores e inferiores por conveniência formal e para seguir o padrão matemático utilizado na definição do quadrivetor momento e na dedução da relação relativística entre energia e momento.

2.2 Operadores na Mecânica Quântica: corrente e densidade de probabilidade

Um dos princípios centrais da Mecânica Quântica consiste em associar a cada grandeza física mensurável, como energia, momento linear ou posição, um operador linear que atua sobre a função de onda do sistema, $\psi(\mathbf{r}, t)$. Essa correspondência entre

observáveis clássicos e operadores quânticos, frequentemente relacionada ao princípio de correspondência, estabelece o elo formal entre a Mecânica Clássica e a teoria quântica, permitindo reescrever relações físicas em termos de operadores diferenciais lineares (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; STRANGE, 1998).

Além disso, as funções de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$, que descrevem o estado quântico de uma partícula, pertencem a um espaço vetorial complexo conhecido como espaço de Hilbert. Nesse espaço, define-se um produto interno que permite calcular probabilidades, estabelecer a ortogonalidade entre estados e determinar valores esperados dos observáveis físicos. A estrutura de espaço de Hilbert é essencial porque garante que operadores hermitianos, como o hamiltoniano e o operador momento, possuam autovalores reais, correspondentes a grandezas mensuráveis (SHANKAR, 2012).

No presente trabalho, consideramos apenas a forma funcional desse formalismo, tratando as funções de onda como elementos desse espaço e os operadores como transformações lineares que atuam sobre elas, sem entrar nos aspectos matemáticos mais abstratos envolvidos na construção rigorosa do espaço de Hilbert.

Assim, de maneira geral, a linearidade dos operadores é uma propriedade fundamental do formalismo quântico. Isso significa que, para quaisquer funções de onda ψ_1 e ψ_2 e números complexos a e b , o operador \hat{A} satisfaz a relação,

$$\hat{A}(a\psi_1 + b\psi_2) = a\hat{A}\psi_1 + b\hat{A}\psi_2. \quad (2.16)$$

Temos ainda que, um operador \hat{A} é dito hermitiano quando satisfaz a condição,

$$\int \phi^*(\hat{A}\psi)d^3r = \int (\hat{A}\phi)^*\psi d^3r, \quad (2.17)$$

para quaisquer funções de onda ϕ e ψ pertencentes ao espaço de Hilbert. Ou seja, um operador hermitiano (também chamado de autoadjunto) é aquele que é igual ao seu adjunto, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, garantindo que os seus autovalores sejam reais.

Fisicamente, a hermiticidade é uma exigência fundamental para que as grandezas observáveis em Mecânica Quântica assumam valores reais. Em particular, quando o Hamiltoniano \hat{H} é hermitiano, a evolução temporal gerada por ele é unitária, garantindo a conservação da probabilidade total, conforme exige a interpretação estatística da função de onda. Operadores importantes como o Hamiltoniano (energia total) e o operador momento $\hat{\mathbf{p}}$ são hermitianos exatamente porque suas grandezas associadas são mensuráveis e, portanto, devem possuir autovalores reais.

Essa exigência permanece essencial no regime relativístico: na equação de Dirac, a hermiticidade do Hamiltoniano assegura que a densidade de probabilidade continue positiva e que sua integral total seja conservada ao longo do tempo.

Além disso, é útil introduzir os conceitos de comutadores e anticomutadores, que expressam as relações algébricas entre operadores. O comutador entre dois operadores \hat{A} e

\hat{B} é definido como

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.18)$$

Este objeto desempenha papel central na formulação quântica, desde as relações de incerteza até a estrutura das simetrias e grupos de Lie associados ao sistema físico.

Quando o comutador entre dois operadores é diferente de zero, dizemos que as grandezas correspondentes não comutam entre si e, portanto, não podem ser medidas simultaneamente com precisão arbitrária. Essa é a expressão formal do princípio da incerteza de Heisenberg. Um exemplo fundamental é a relação entre posição e momento:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \hat{x}_i\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{x}_i = i\hbar\delta_{ij} \quad (2.19)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Essa relação expressa o caráter essencialmente quântico da estrutura do espaço de estados.

De forma complementar, define-se o anticomutador de dois operadores como:

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (2.20)$$

Enquanto o comutador mede o grau de não comutatividade entre grandezas observáveis, estando diretamente ligado ao princípio da incerteza, o anticomutador mede o grau de simetria entre os operadores. Essa distinção torna-se essencial nas formulações relativísticas da Mecânica Quântica, pois a equação de Dirac, como veremos adiante, é construída a partir de operadores que satisfazem relações de anticomutação entre as matrizes α e β , garantindo simultaneamente a linearidade temporal e a compatibilidade com a relação energia-momento relativística.

Além disso, enquanto no formalismo clássico a energia de uma partícula livre ($V = 0$) é dada por $E = p^2/2m$, na Relatividade Restrita ela satisfaz

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.21)$$

Em ambos os casos, E e \mathbf{p} representam grandezas físicas mensuráveis, isto é, observáveis. Na Mecânica Quântica, essas quantidades passam a ser representadas por operadores lineares que atuam sobre o estado quântico do sistema, dado pela função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$.

Assim, o operador energia e o operador momento são descritos, respectivamente, por:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.22)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla. \quad (2.23)$$

A identificação dos operadores de energia e de momento decorre diretamente das relações de De Broglie e da estrutura ondulatória da matéria, sendo a única forma de garantir a linearidade e a superposição das soluções (GRIFFITHS, 2008). Essas substituições

formais refletem o princípio de correspondência entre grandezas clássicas e operadores quânticos, assegurando que as equações de onda reproduzam corretamente as relações de energia e de momento associadas às ondas de matéria (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017).

Assim, como discutido com mais detalhes na Seção 3.1, os operadores da Mecânica Quântica não apenas definem como as grandezas físicas são representadas matematicamente, mas também permitem um encadeamento conceitual do formalismo não relativístico de Schrödinger à formulação relativística das equações de Klein-Gordon e Dirac.

Além disso, duas ferramentas centrais, tanto matemáticas quanto físicas, que permeiam a Mecânica Quântica são a densidade de probabilidade e a corrente de probabilidade.

Na formulação de Schrödinger, o estado físico de uma partícula é descrito por uma função de onda complexa $\psi(\mathbf{r}, t)$, cuja interpretação probabilística foi proposta por Max Born em 1926. O módulo quadrado dessa função define a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em uma região do espaço no instante t :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.24)$$

Para que essa interpretação seja consistente, a função de onda deve ser normalizável, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = 1. \quad (2.25)$$

Essa condição garante que a probabilidade total de encontrar a mesma partícula em algum ponto do espaço seja igual a 1.

A conservação dessa probabilidade impõe que a variação temporal de $\rho(\mathbf{r}, t)$ esteja associada a um fluxo de probabilidade. Essa relação é expressa pela equação de continuidade, que, na forma diferencial, é dada por,

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2.26)$$

onde \mathbf{j} é o vetor corrente de probabilidade.

No Apêndice A, mostramos como a equação de continuidade, bem como as expressões da densidade e da corrente de probabilidade, podem ser derivadas diretamente da equação de Schrödinger dependente do tempo.

Dessa forma, para a mecânica quântica não relativística, temos:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \geq 0. \quad (2.27)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{i}{2m} \left(\psi(\mathbf{r}, t)\nabla\psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi(\mathbf{r}, t) \right) \quad (2.28)$$

Aqui, $\rho(\mathbf{r}, t)$ representa a probabilidade de presença da partícula em um ponto do espaço, enquanto que \mathbf{j} descreve o fluxo dessa probabilidade, ou seja, a taxa com que ela “se desloca” de uma região para outra.

Integrando a equação de continuidade sobre todo o espaço:

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = - \int \nabla \cdot \mathbf{j} d^3r. \quad (2.29)$$

Pelo teorema da divergência de Gauss, o termo à direita representa o fluxo total de probabilidade através da fronteira do volume. Se a função de onda tende a zero no infinito, esse fluxo desaparece:

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = 0. \quad (2.30)$$

Assim, a probabilidade total é conservada, uma condição essencial para a interpretação probabilística de Born. A mesma estrutura geral de continuidade permanecerá nas formulações relativísticas, embora com modificações importantes na forma da densidade e da corrente, especialmente quanto à interpretação física de sua positividade.

Além disso, o fato de o Hamiltoniano ser hermitiano está diretamente relacionado à conservação da probabilidade. Um Hamiltoniano hermitiano garante que a evolução temporal seja unitária, preservando a norma da função de onda:

$$\frac{d}{dt} \int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r = 0. \quad (2.31)$$

Em outras palavras, a hermiticidade de \hat{H} assegura que a probabilidade total permaneça constante, requisito fundamental que também orientará a formulação das equações relativísticas, como a de Dirac, nas quais o Hamiltoniano deve permanecer hermitiano para garantir densidades fisicamente interpretáveis.

Dessa forma, a estrutura apresentada nesta seção fornece a base conceitual que será estendida à Mecânica Quântica Relativística. A interpretação probabilística de Born e a exigência de hermiticidade do Hamiltoniano garantem a conservação da probabilidade no tempo. Entretanto, a equação de Schrödinger não é compatível com a Relatividade Restrita, o que exige uma nova equação de onda que preserve simultaneamente a linearidade temporal e a covariância relativística. Essa busca conduz às equações de Klein-Gordon e, posteriormente, de Dirac, que serão estudadas no capítulo seguinte.

2.3 Unidades Naturais e Notações

Para o desenvolvimento deste trabalho, adotamos o sistema de unidades naturais, no qual as constantes fundamentais da natureza, dadas pela velocidade da luz no vácuo c e pela constante de Planck reduzida $\hbar = h/(2\pi)$, são escolhidas como unidades de medida. Dessa forma, elas são definidas como numericamente iguais a 1,

$$c = \hbar = 1. \quad (2.32)$$

Essa escolha simplifica as expressões das equações relativísticas e quânticas, eliminando fatores constantes que não alteram a estrutura formal das leis físicas. Assim, energia, massa e momento passam a ter as mesmas dimensões, e o tempo e o espaço são expressos em unidades recíprocas de energia. Essa convenção é amplamente utilizada em textos de Mecânica Quântica Relativística e Teoria Quântica de Campos, como em Sakurai e Napolitano (2017), Peskin e Schroeder (1995) e Strange (1998), pois permite destacar a simetria entre as grandezas espaço-temporais e a natureza covariante das equações.

Adotamos também a assinatura métrica $g^{\mu\nu} = (+, -, -, -)$, melhor explicada na Seção 2.1, para o espaço-tempo de Minkowski. Dessa forma, o quadrado do quadri vetor de posição é dado pela equação (2.10) e a relação relativística energia-momento assume a forma

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (2.33)$$

Além disso, os índices gregos, como por exemplo μ e ν podem assumir os valores 0, 1, 2 e 3, correspondendo, respectivamente, às componentes temporal e espaciais de um quadri vetor. Já os índices latinos (i, j, k) são restritos às três componentes espaciais x, y e z , ou equivalentemente 1, 2 e 3, conforme a conveniência de notação.

Neste trabalho, fazemos uso da convenção de somatória de Einstein, segundo a qual a repetição de um mesmo índice em posições superior e inferior implica automaticamente uma soma sobre todos os valores permitidos para esse índice. Assim, por exemplo,

$$A_\mu B^\mu = \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu. \quad (2.34)$$

Essa convenção torna as expressões mais compactas e facilita a manipulação de equações tensoriais, especialmente no contexto relativístico.

Para a descrição dos operadores quânticos não matriciais, utiliza-se o acento circunflexo para indicar operadores atuando sobre funções de onda, como em \hat{E} , \hat{H} e \hat{p} . Contudo, para evitar uma notação muito carregada, no desenvolvimento das equações nós omitimos o acento circunflexo.

Temos também que a notação vetorial em negrito foi utilizada para grandezas tridimensionais, por exemplo,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z),$$

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z).$$

No contexto da equação de Dirac, as derivadas parciais são reunidas no quadri vetor derivada

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right),$$

que inclui uma componente temporal e três componentes espaciais. Em unidades naturais ($c = \hbar = 1$), essa definição coincide com a forma usual da derivada no espaço-tempo plano de Minkowski.

Adicionalmente, introduzimos as matrizes de Dirac γ^μ , que satisfazem as relações de anticomutação fundamentais da álgebra de Clifford associada ao espaço-tempo plano:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (2.35)$$

onde \mathbb{I} representa a matriz identidade. Essas relações definem a álgebra de Dirac, essencial para garantir que a equação de Dirac seja compatível com a relação energia-momento relativística e para descrever férmions relativísticos de spin $1/2$.

Portanto, a partir dessas convenções, todas as expressões e deduções apresentadas ao longo deste trabalho foram formuladas utilizando as unidades naturais e a notação descrita nesta seção, assegurando uniformidade conceitual e clareza matemática em todo o desenvolvimento.

3 Introdução à Equação de Dirac

Os fundamentos apresentados no capítulo anterior fornecem uma breve revisão quantitativa das expressões básicas da Relatividade Restrita e da Mecânica Quântica, destacando suas estruturas formais e domínios de aplicabilidade. Embora cada uma dessas teorias descreva adequadamente os fenômenos dentro de seus respectivos regimes, a análise de partículas elementares para altas energias exige um tratamento em que efeitos quânticos e relativísticos atuam simultaneamente. Nesse contexto, torna-se necessária uma formulação que integre ambos os aspectos em um único quadro teórico.

As tentativas iniciais de compatibilizar essas duas teorias levaram à formulação da equação de Klein-Gordon, que surge da aplicação direta do princípio de correspondência à relação relativística de energia e momento. Essa equação representou um importante avanço por incorporar a covariância de Lorentz à descrição quântica, mas mostrou-se insuficiente para descrever partículas com spin $1/2$, como o elétron. Além disso, sua estrutura de segunda ordem no tempo dificulta a interpretação probabilística, uma vez que a densidade de probabilidade resultante não é necessariamente positiva definida (DIAS, 2021; STRANGE, 1998).

Diante dessas limitações, foi preciso buscar uma nova formulação, uma equação de onda relativística linear, que preservasse a simetria entre tempo e espaço e permitisse uma interpretação probabilística consistente. Esse foi o ponto de partida do trabalho de Paul Dirac em 1928. Sua abordagem, ao mesmo tempo matemática e conceitualmente inovadora, procurou formular uma equação que fosse de primeira ordem nas derivadas temporais e espaciais, ou seja, linear em relação ao tempo, de modo a preservar a interpretação probabilística, e covariante sob transformações de Lorentz, assegurando a compatibilidade com a Relatividade Restrita (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; THALLER, 2013).

A busca por essa nova formulação levou Dirac à introdução de uma estrutura algébrica inédita, composta pelas matrizes α e β que possibilitaram linearizar a relação relativística e, ao mesmo tempo, incorporar naturalmente o spin como um grau de liberdade intrínseco da partícula. Essa reformulação não apenas solucionou os problemas da equação de Klein-Gordon, como também estabeleceu as bases para a descrição quântica relativística de partículas com spin $1/2$, consolidando o que hoje se conhece como equação de Dirac (THALLER, 2013; VALENTE, 2019).

Este capítulo tem como objetivo apresentar a construção conceitual e matemática dessa equação. Na Seção 3.1, revisamos os desenvolvimentos que levaram à formulação relativística das equações de onda, discutindo suas limitações e a motivação para uma teoria linear. Na Seção 3.2, analisamos o processo de linearização proposto por Dirac e as

propriedades algébricas necessárias das matrizes α e β . Por fim, na Seção 3.3, discutimos as soluções da equação de Dirac, o surgimento natural do spin relativístico e a interpretação física associada às partículas e antipartículas.

3.1 À Procura por uma Equação Relativística

A formulação da Mecânica Quântica no início do século XX representou uma ruptura com os paradigmas da Física Clássica ao introduzir um novo modo de compreender os fenômenos microscópicos. Enquanto a mecânica newtoniana descreve as partículas como entidades pontuais dotadas de trajetórias bem definidas, a Mecânica Quântica mostra que, à nível atômico, o comportamento das partículas é essencialmente probabilístico e governado por leis que expressam tanto aspectos corpusculares quanto ondulatórios (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; GRIFFITHS, 2008). Essa dualidade, demonstrada pelos trabalhos de Louis de Broglie, que atribuiu um comprimento de onda, $\lambda = h/p$, à matéria, forneceu o ponto de partida para que Erwin Schrödinger, em 1926, propusesse uma formulação matemática que descrevesse a evolução temporal dessas “ondas de matéria”.

Partindo da relação de de Broglie e explorando a analogia formal entre a propagação de ondas clássicas e o movimento de partículas quânticas, Schrödinger buscou uma equação que descrevesse a evolução temporal da função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$, a qual contém todas as informações observáveis de um sistema físico. Como ponto de partida, ele considerou uma onda plana tridimensional de amplitude A , descrita por (DIAS, 2021):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (3.1)$$

em que \mathbf{k} é o vetor de onda, $k = 2\pi/\lambda$ o seu módulo, $\omega = 2\pi\nu$ a frequência angular e i a unidade imaginária. Calculando as derivadas parciais apropriadas e utilizando $\mathbf{r} = (x, y, z)$, obtém-se uma equação diferencial linear que descreve a dinâmica temporal de ψ . O procedimento, detalhado em Dias (2021), conduz à forma hoje conhecida como equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = i\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

em que \hat{H} é o operador hamiltoniano, responsável por representar a energia total do sistema e atuar diretamente sobre a função de onda.

A formulação de Schrödinger introduziu uma nova forma de descrever o estado físico de um sistema: em vez de trajetórias e variáveis dinâmicas clássicas, passa-se a trabalhar com a função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$, cujo módulo quadrado define a densidade de probabilidade $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Como discutido no capítulo anterior, essa interpretação estabelece o caráter probabilístico da teoria e permite relacionar a equação de Schrödinger à equação de continuidade, garantindo a conservação da probabilidade e definindo a corrente associada, ver Apêndice A.

Apesar de seu sucesso em descrever sistemas de baixa velocidade ($v \ll c$), a equação de Schrödinger apresenta limitações fundamentais em regimes relativísticos. Sua assimetria entre tempo e espaço, primeira ordem temporal e segunda ordem espacial, impede que seja escrita de forma covariante e, portanto, incompatibiliza sua estrutura com o princípio de invariância de Lorentz. Essa limitação está diretamente ligada ao fato de a equação derivar da aproximação não relativística $E \approx p^2/2m$, obtida a partir da expansão da relação relativística energia-momento (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; GRIFFITHS, 2008).

Assim, quando a velocidade da partícula torna-se comparável à velocidade da luz, a descrição baseada na equação de Schrödinger deixa de ser válida. A necessidade de uma formulação compatível com a relação relativística completa,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (3.3)$$

motivou o desenvolvimento da equação de Klein-Gordon, formulada em 1926 por Oskar Klein e Walter Gordon. Essa equação representou a primeira tentativa bem-sucedida de estender a Mecânica Quântica ao regime relativístico (FESHBACH; VILLARS, 1958; DIAS, 2021).

Podemos fazer a dedução da equação de Klein-Gordon quase que de maneira direta a partir da equação de Schrödinger dependente do tempo, multiplicando ambos os lados de (3.2) por $(i \frac{\partial}{\partial t} + \hat{H})$, o que fornece

$$\left(i^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hat{H}^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.4)$$

Considerando o hamiltoniano ao quadrado como sendo $\hat{H}^2 = \hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4 = \hat{p}^2 + m^2$ e o operador momento ao quadrado, $\hat{p}^2 = (-i\hbar\nabla)^2 = -\nabla^2$, podemos primeiro substituir o hamiltoniano, de forma que,

$$\left(i^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\hat{p}^2 + m^2) \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.5)$$

e em seguida, substituindo o operador momento, obtemos:

$$\left(i^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.6)$$

Dividindo ambos os lados por $i^2 = -1$, tem-se

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.7)$$

que corresponde à equação de Klein-Gordon escrita em unidades naturais.

Essa forma torna explícita a simetria entre as derivadas temporais e espaciais, uma característica ausente na equação de Schrödinger. Na equação de Klein-Gordon, tanto o

termo $\partial^2/\partial t^2$ quanto o termo $-\nabla^2$ aparecem como derivadas de segunda ordem, refletindo a equivalência entre tempo e espaço postulada pela Relatividade Restrita. Essa simetria diferencial é precisamente a manifestação matemática da invariância de Lorentz: a equação preserva sua forma em todos os referenciais inerciais porque suas derivadas temporais e espaciais entram de maneira homogênea (THALLER, 2013; STRANGE, 1998).

Uma forma direta de verificar a consistência relativística da equação de Klein-Gordon é considerar uma solução do tipo onda plana, dada por

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}, \quad (3.8)$$

sendo A uma constante de normalização. Ao substituir essa solução na equação de Klein-Gordon (3.7) e calcular as derivadas correspondentes, obtém-se como condição de consistência a relação relativística entre energia e momento (DIAS, 2021):

$$E = \pm (\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} = \pm (\mathbf{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.9)$$

em unidades naturais.

Esse resultado mostra que a equação de Klein-Gordon reproduz exatamente a relação de dispersão da Relatividade Restrita, o que confirma sua compatibilidade com o regime relativístico e sua adequação para descrever partículas livres de spin zero.

No entanto, a relação (3.9) revela que a equação de Klein-Gordon admite soluções com energia positiva e negativa. Essa característica, ausente na equação de Schrödinger, levanta questões importantes sobre a interpretação física dessas soluções, especialmente no que diz respeito à definição e à conservação de uma densidade de probabilidade consistente (DIAS, 2021).

Para verificarmos isso, basta multiplicarmos a equação de Klein-Gordon (3.7) à esquerda por $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ e sua conjugada complexa, também à esquerda, por $\psi(\mathbf{r}, t)$ e subtrair as duas, para obter:

$$\psi^*(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi^*(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.10)$$

Manipulando (3.10), veja apêndice B, e comparando com a equação de continuidade (2.26), podemos identificar,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (3.12)$$

Temos, portanto, que a quantidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ pode assumir valores positivos ou negativos, uma vez que depende não apenas de $\psi(\mathbf{r}, t)$, mas também de sua derivada temporal,

$\partial\psi/\partial t$. Por esse motivo, ela não pode ser interpretada como densidade de probabilidade. Essa dificuldade decorre do fato de que a equação de Klein-Gordon é de segunda ordem no tempo: para determinar completamente o estado físico, são necessárias duas condições iniciais independentes, e isso se reflete na forma não positiva definida da densidade associada (DIAS, 2021).

Dessa forma, embora a equação de Klein-Gordon seja perfeitamente consistente com a Relatividade Restrita e descreva adequadamente partículas livres de spin 0 no regime relativístico, a densidade resultante da equação de continuidade não é sempre positiva. Consequentemente, $\rho(\mathbf{r}, t)$ não pode ser interpretada como a probabilidade de encontrar a partícula em uma dada região do espaço. Essa limitação evidencia um problema interpretativo fundamental da equação de Klein-Gordon e motiva a busca por uma equação linear em $\partial/\partial t$ que preserve simultaneamente a covariância relativística e a positividade da densidade de probabilidade, caminho que conduz naturalmente à formulação da equação de Dirac (FESHBACH; VILLARS, 1958; DIAS, 2021).

3.2 A Álgebra de Dirac

A formulação da equação de Klein-Gordon marcou um avanço importante ao incorporar de maneira direta a estrutura relativística ao tratamento quântico de partículas de spin zero. Como discutido, seu caráter de segunda ordem no tempo impôs limitações quando se buscava uma interpretação probabilística análoga à da mecânica quântica não relativística (STRANGE, 1998).

Diante desse cenário, Paul Dirac propôs outro caminho: construir uma equação de onda que fosse relativisticamente covariante, mas que preservasse também a linearidade temporal, característica central da equação de Schrödinger. A ideia era compatibilizar, em uma única formulação, a estrutura da Relatividade Restrita e o formalismo probabilístico da Mecânica Quântica, sem as dificuldades interpretativas encontradas na equação de Klein-Gordon.

Para isso, Dirac partiu da relação energia-momento relativística $H^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ e buscou reescrevê-la de forma linear, introduzindo os operadores matriciais α e β capazes de garantir a consistência com o princípio da relatividade:

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m. \quad (3.13)$$

Essa reescrita exigiu ampliar a natureza da função de onda, que deixa de ser escalar e passa a apresentar múltiplos componentes, uma mudança profunda, associada ao surgimento da estrutura matemática hoje conhecida como *Álgebra de Dirac*, intimamente relacionada às álgebras de Clifford (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; THALLER, 2013).

Antes de apresentar a construção da equação de Dirac propriamente dita, vamos discutir os elementos fundamentais dessa álgebra, pois ela fornece a estrutura matemática necessária para que a linearização da relação relativística energia-momento seja possível.

De maneira geral, a álgebra de Clifford é uma estrutura matemática que estende a álgebra vetorial ao incorporar a métrica do espaço associado, permitindo tratar, de forma unificada, objetos como vetores, planos e volumes por meio de um formalismo que integra geometria e álgebra. Essa estrutura é especialmente útil em contextos relativísticos, pois acomoda naturalmente produtos que dependem da assinatura do espaço-tempo, além de fornecer o arcabouço necessário para relações matriciais fundamentais, como as anticomutações que utilizaremos mais adiante na formulação da equação de Dirac (LOUNESTO, 2001; JR.; JR., 2016; VALENTE, 2019).

A chamada álgebra de Dirac é um caso particular da álgebra de Clifford definida especificamente no espaço-tempo de Minkowski. Sugerimos que, para estudos mais aprofundados acerca da Álgebra de Clifford, o leitor consulte os trabalhos de Lounesto (2001) e Jayme Vaz e Roldão da Rocha (2016). No caso relativístico, a álgebra relevante é a Clifford $(1, 3)$, definida pelas relações de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (3.14)$$

já apresentadas na equação (2.35). Essas relações refletem a assinatura $(+, -, -, -)$ da métrica de Minkowski, isto é, 1 componente temporal com sinal positivo e 3 componentes espaciais com sinal negativo. As matrizes de Dirac γ^μ constituem uma representação matricial concreta dessa álgebra e, portanto, incorporam naturalmente as propriedades relativísticas necessárias para a formulação da equação de Dirac.

Enquanto a álgebra de Clifford é uma construção abstrata, independente de representação específica, a álgebra de Dirac corresponde a uma de suas realizações matriciais explícitas, introduzida por Dirac para descrever partículas de spin $1/2$ de maneira compatível com a Relatividade Restrita. É justamente essa estrutura que torna possível linearizar a relação energia-momento relativística e obter a forma covariante da equação que leva seu nome.

Para demonstrar a construção da equação de Dirac, partimos da forma geral da equação de evolução quântica, análoga à equação de Schrödinger,

$$H\psi(\mathbf{r}, t) = i\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.15)$$

escrita em unidades naturais. Dirac propôs então que o Hamiltoniano de uma partícula relativística pudesse ser escrito como uma combinação linear entre o operador momento e a massa, isto é, $H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$. Substituindo essa expressão em (3.15), obtemos

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.16)$$

Portanto, a equação de Dirac pode ser escrita diretamente como

$$H\psi(\mathbf{r}, t) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.17)$$

A partir desse ponto, é necessário determinar a natureza dos operadores $\boldsymbol{\alpha}$ e β . Como atuam sobre o estado físico da partícula, eles devem ser operadores lineares e precisam satisfazer condições específicas. Em particular, ao elevarmos o Hamiltoniano ao quadrado, devemos recuperar a relação relativística energia-momento, $H^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, garantindo que a equação construída seja compatível com a expressão relativística fundamental para partículas livres. Essas condições conduzirão diretamente às relações de anticomutação que definem a álgebra de Dirac.

Com isso, podemos estabelecer que,

$$H^2\psi(\mathbf{r}, t) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)^2\psi(\mathbf{r}, t), \quad (3.18)$$

e, conforme demonstrado no Apêndice C, as matrizes $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ e β são operadores hermitianos (4×4) que satisfazem as relações de anticomutação

$$\alpha_i^2 = \mathbb{I}, \quad (3.19)$$

$$\beta^2 = \mathbb{I}, \quad (3.20)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (3.21)$$

$$\boldsymbol{\alpha}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha} = 0, \quad (3.22)$$

em que δ_{ij} é a delta de Kronecker, definida como sendo igual a 1 para $i = j$ e 0 para $i \neq j$.

Como consequência, as soluções da equação de Dirac deixam de ser funções escalares, como ocorre nas equações de Schrödinger e Klein-Gordon, e passam a ser vetores de quatro componentes:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \\ \psi_3(\mathbf{r}, t) \\ \psi_4(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

conhecidos como *espinores de Dirac*.

De maneira geral, um espinor é um tipo especial de vetor que, sob rotações e transformações relativísticas, não se comporta como um vetor comum, mas sim segundo uma representação de cobertura do grupo de Lorentz. Em outras palavras, uma rotação completa de 360° não devolve o espinor ao seu estado inicial, e sim ao seu negativo, evidenciando a natureza intrinsecamente quântica e não clássica do spin. Essa estrutura é necessária para descrever corretamente o comportamento de férmions, como o elétron, cujas propriedades não podem ser expressas por vetores ou escalares convencionais (STRANGE, 1998).

Portanto, o espinor de Dirac apresenta quatro componentes complexas que incorporam simultaneamente os graus de liberdade associados ao spin e à energia da partícula. Conforme mostraremos mais adiante, suas duas primeiras componentes estão relacionadas aos estados de energia positiva, enquanto as duas últimas correspondem às soluções de energia negativa, que mais tarde foram interpretadas como estados de antipartículas (GRIFFITHS, 2008). Assim, o espinor de Dirac unifica, em uma única entidade matemática, as propriedades quânticas e relativísticas do férmion, descrevendo de forma completa o comportamento da partícula livre com spin $1/2$.

A introdução das matrizes α_i e β foi o ponto de partida utilizado por Dirac para escrever uma equação linear no tempo, análoga à equação de Schrödinger. No entanto, a formulação covariante da equação de Dirac é mais naturalmente expressa em termos das matrizes γ^μ , que satisfazem a álgebra de Clifford discutida na equação (3.14). A equação covariante assume a forma

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.24)$$

em que utilizamos a convenção de somatório de Einstein.

No Apêndice D mostramos que existe a correspondência

$$\beta = \gamma^0, \quad (3.25)$$

$$\alpha_i = \gamma^0\gamma^i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.26)$$

Assim, a forma matricial original de Dirac e sua forma covariante expressa em termos das matrizes γ^μ são matematicamente equivalentes.

A equação (3.24) é dita covariante de Lorentz porque todos os seus termos aparecem organizados na forma de contrações tensoriais. O operador ∂_μ é o quadrivetor covariante de derivadas, enquanto as matrizes γ^μ formam um quadrivetor contravariante cuja transformação é consistente com a métrica de Minkowski e com as relações de anticomutação que definem a álgebra de Clifford.

A combinação $\gamma^\mu\partial_\mu$ constitui uma contração tensorial entre esses dois objetos, eliminando o índice μ e produzindo um operador que se comporta como um escalar relativístico, isto é, que mantém a mesma forma em qualquer referencial inercial. Embora seja um escalar do ponto de vista tensorial, esse objeto continua sendo um operador matricial que atua sobre o espinor $\psi(\mathbf{r}, t)$, preservando simultaneamente a linearidade e a covariância da equação de Dirac.

Portanto, a covariância da equação de Dirac decorre diretamente de sua construção tensorial e das propriedades das matrizes γ^μ , sem necessidade de ajustes adicionais (STRANGE, 1998).

A consistência da equação de Dirac com os fundamentos da Mecânica Quântica aparece de forma clara quando derivamos a equação de continuidade associada ao espinor

relativístico. Esse procedimento, demonstrado explicitamente no Apêndice E, leva naturalmente às expressões para a densidade ρ e a corrente de probabilidade \mathbf{j} , identificadas como,

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \quad \mathbf{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi,$$

as quais são positivas definidas e obedecem à lei de conservação global da probabilidade. Dessa forma, diferentemente do que ocorre na equação de Klein-Gordon, a equação de Dirac preserva integralmente a interpretação probabilística da função de onda, mantendo a coerência com os princípios da Mecânica Quântica enquanto incorpora os requisitos relativísticos.

Nesta formulação, utilizamos o hermitiano conjugado $\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) = \left(\psi^*(\mathbf{r}, t)\right)^T$, o qual é suficiente para construir a densidade e a corrente de probabilidade no contexto da equação de Dirac estudado neste trabalho. Contudo, é importante destacar que a expressão $\rho = \psi^\dagger \psi$ só é válida na representação padrão das matrizes de Dirac, também chamada *representação de Dirac*, na qual $\beta = \gamma^0 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Essa igualdade não é uma característica geral da teoria, mas sim uma consequência da escolha específica de representação.

Como vimos, nesta representação vale $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$. Contudo, em Mecânica Quântica Relativística, a definição correta do conjugado para espinores é o chamado *adjunto de Dirac*, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, de maneira que $\rho = \bar{\psi} \gamma^0 \psi$ reduz-se à expressão simples $\rho = \psi^\dagger \psi$. Isso pode ser verificado por substituição direta,

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\psi} \gamma^0 \psi = (\psi^\dagger \gamma^0) \gamma^0 \psi, \\ \rho &= \psi^\dagger (\gamma^0)^2 \psi, \\ \therefore \rho &= \psi^\dagger \psi. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Entretanto, no formalismo covariante completo, o objeto fundamental é sempre $\bar{\psi} \psi$, pois apenas ele se comporta como um escalar relativístico, transformando corretamente sob transformações de Lorentz e surgindo naturalmente nas correntes conservadas e nos termos de interação da teoria.

A escolha de trabalhar apenas com ψ^\dagger em nosso contexto é, portanto, totalmente adequada ao objetivo do trabalho. Ela permite analisar a conservação da probabilidade, interpretar fisicamente as quatro componentes do espinor e compreender a estrutura da equação de Dirac sem comprometer o rigor conceitual, ao mesmo tempo em que evita a complexidade adicional do formalismo covariante completo (RYDER, 1996; STRANGE, 1998).

Dessa forma, a construção da equação de Dirac representou um marco na consolidação da Mecânica Quântica Relativística. Ao introduzir operadores matriciais $\boldsymbol{\alpha}$ e β , e, posteriormente as matrizes γ^μ , da álgebra de Dirac, foi possível formular uma equação

linear em relação ao tempo e ao espaço, compatível com a Relatividade Restrita e capaz de descrever partículas de spin $1/2$ (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; GRIFFITHS, 2008). Essa forma linear preserva a interpretação probabilística da teoria, que havia sido perdida na equação de Klein-Gordon, e garante a covariância das leis físicas pela própria estrutura tensorial implícita de seus termos. Além disso, a formulação da densidade e corrente de probabilidade relativísticas asseguram que a conservação da probabilidade seja mantida em qualquer referencial inercial. Portanto, a equação de Dirac não apenas unifica a Mecânica Quântica e a Relatividade, mas também introduz, de maneira natural, o conceito de spin como uma consequência intrínseca de sua estrutura matemática (VALENTE, 2019).

Tendo estabelecido a forma covariante da equação de Dirac, suas propriedades algébricas e o significado físico de suas densidades relativísticas, passamos agora a investigar o conteúdo físico que emerge de suas soluções. A estrutura matricial da equação implica que sua solução não é um escalar, mas um espinor de quatro componentes, e é justamente dessa estrutura que surgem fenômenos sem análogo na mecânica quântica não relativística, como a existência natural de estados de energia negativa e a interpretação do spin como um grau de liberdade intrínseco da partícula (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; THALLER, 2013). A forma como essas soluções se comportam, e como garantem a positividade da densidade de probabilidade, revela não apenas a consistência interna da teoria, mas também sua capacidade de antecipar características fundamentais da matéria.

Na próxima seção compreenderemos explicitamente como solucionar a equação de Dirac e o que essas soluções nos dizem sobre partículas relativísticas de spin $1/2$.

3.3 Soluções Relativísticas e Grau de Liberdade de Spin

Com a estrutura matemática da equação de Dirac estabelecida, podemos agora examinar como suas soluções concretas descrevem o comportamento físico de partículas relativísticas. Nesta seção, analisamos inicialmente os estados estacionários (partículas livres em repouso) e, em seguida, os casos gerais de partículas com momento arbitrário. Isso permite identificar a origem das soluções de energia positiva e negativa e entender por que ambas são necessárias no formalismo.

Mostramos também como a equação de Dirac, ao ser resolvida explicitamente, revela de maneira natural a existência de antipartículas, uma previsão notável que antecedeu sua descoberta experimental. Finalmente, discutimos como o spin $1/2$ surge diretamente da estrutura espinorial da equação, não como um elemento adicional inserido à teoria, mas como um resultado matemático inevitável da própria construção da equação.

3.3.1 Soluções da Equação de Dirac

Para derivar e interpretar algumas das soluções fundamentais da equação de Dirac, tanto para partículas estacionárias quanto para partículas em movimento, vamos considerar a equação de Dirac na forma,

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla\psi(\mathbf{r},t) + m\beta\psi(\mathbf{r},t). \quad (3.28)$$

Para estabelecer uma solução para esta equação, consideramos primeiro o caso mais simples, dado por uma função de onda plana para uma partícula livre em um estado estacionário, ou seja, em repouso, com momento linear igual a zero, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = 0$.

Temos então que,

$$\psi(\mathbf{r},t) = u(E, \mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)}, \quad (3.29)$$

onde E é a energia e $u(E, \mathbf{p})$ é um espinor qualquer de 4 componentes e independente do tempo. Para simplificar as equações, adotamos a notação $u(E, \mathbf{p}) = u$ e $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi$.

Substituindo a função de onda (3.29) na equação de Dirac (3.28), obtemos a equação de Dirac independente do tempo:

$$Eu = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta)u \quad (3.30)$$

Considerando o caso estacionário, dividimos ambos os lados de (3.30) por m , de forma que,

$$\beta u(E, 0) = \lambda u(E, 0), \quad (3.31)$$

em que $\lambda = E/m$, em unidades naturais. Na notação tradicional, λ é definido como $\lambda = E/mc^2$.

A equação (3.31) mostra que u é autovetor de β com autovalor λ . Sabendo que u é um espinor arbitrário e que, na representação de Dirac, a matriz β pode ser escrita como

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

onde cada bloco é uma matriz identidade 2×2 , podemos decompor o espinor u em duas partes:

$$u = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

com u_a e u_b vetores coluna de duas componentes cada.

Aplicando a matriz β ao espinor u , temos:

$$\beta u = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a \\ -u_b \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

de maneira que a equação (3.31) pode ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} u_a \\ -u_b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Isso fornece o sistema:

$$u_a = \lambda u_a, \quad (3.36a)$$

$$u_b = -\lambda u_b. \quad (3.36b)$$

Portanto, se $u_a \neq 0$, então necessariamente $\lambda = +1$ (energia positiva $E = m$) e se $u_b \neq 0$, então $\lambda = -1$ (energia negativa $E = -m$).

Logo, as soluções para energia positiva, associadas a $\lambda = +1$, são da forma

$$u_a = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.37a)$$

$$u_b = 0, \quad (3.37b)$$

o que nos permite escrever

$$u_+ = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_1 e_1 + \phi_2 e_2, \quad (3.38)$$

onde e_1 e e_2 são as bases canônicas do espaço espinorial.

De modo análogo, as soluções correspondentes à energia negativa, $\lambda = -1$, são:

$$u_b = \begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}, \quad (3.39a)$$

$$u_a = 0, \quad (3.39b)$$

de forma que

$$u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \phi_3 e_3 + \phi_4 e_4. \quad (3.40)$$

As soluções obtidas para u_+ e u_- podem ser escritas como combinações lineares das bases canônicas do espaço espinorial. Para o caso de energia positiva ($\lambda = +1$), os espinores admitem duas soluções independentes, associadas às bases e_1 e e_2 . De modo análogo, para o caso de energia negativa ($\lambda = -1$), surgem outras duas soluções independentes, associadas às bases e_3 e e_4 .

Vemos então que, para uma partícula livre em repouso, a equação de Dirac possui quatro soluções independentes: duas com energia $+m$ e duas com energia de repouso $-m$, refletindo a estrutura diagonal da matriz $\beta = \text{diag}(+, +, -, -)$, cujos quatro autovalores determinam exatamente a existência dessas quatro soluções.

Substituindo as soluções u_+ e u_- na função de onda plana,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u e^{-iEt}, \quad (3.41)$$

obtêm-se as soluções explícitas:

$$\psi_+(\mathbf{r}, t) = (\phi_1 e_1 + \phi_2 e_2) e^{-imt}, \quad (3.42a)$$

$$\psi_-(\mathbf{r}, t) = (\phi_3 e_3 + \phi_4 e_4) e^{+imt}. \quad (3.42b)$$

Dessa forma, a decomposição do espinor nas quatro bases canônicas torna evidente que a equação de Dirac, mesmo no caso simples de uma partícula em repouso, já contém em sua estrutura matemática toda a riqueza de soluções associadas à existência de estados de energia positiva e negativa, que serão posteriormente interpretados em termos de partículas e antipartículas.

Podemos agora investigar se as soluções com energia negativa da equação de Dirac implicam ou não em uma densidade de probabilidade negativa, como ocorre na equação de Klein-Gordon. Para isso, consideramos a forma mais geral da solução para uma partícula livre em repouso:

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^4 \phi_i e_i e^{-iE_i t}, \quad (3.43)$$

onde os autoestados e_1 e e_2 correspondem aos autovalores positivos de β , com energia $E_i = +m$, enquanto e_3 e e_4 correspondem aos autovalores negativos, com energia $E_i = -m$.

A densidade de probabilidade relativística para os espinores de Dirac é dada por:

$$\rho(t) = \psi^\dagger(t) \psi(t). \quad (3.44)$$

Tomando o hermitiano conjugado da solução (3.43):

$$\psi^\dagger(t) = \sum_{i=1}^4 \phi_i^* e_i^\dagger e^{+iE_i t}. \quad (3.45)$$

Portanto, a densidade de probabilidade para uma partícula livre em repouso pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \phi_i^* \phi_j (e_i^\dagger e_j) e^{i(E_i - E_j)t}, \\ \rho(t) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \phi_i^* \phi_j \delta_{ij} e^{i\Delta t}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

sendo $\delta_{ij} = e_i^\dagger e_j$ a delta de Kronecker e $\Delta = E_i - E_j$.

Para os termos diagonais $i = j$, tem-se $\delta_{ij} = 1$ e $\Delta = 0$, de maneira que,

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^4 \phi_i^* \phi_j = \sum_{i=1}^4 |\phi_i|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 + |\phi_4|^2, \quad (3.47)$$

que é sempre positivo, independente do tempo.

Já os termos cruzados, fora da diagonal, $i \neq j$, para os quais $\delta_{ij} = 0$, não contribuem para $\rho(t)$. Dessa forma, a densidade de probabilidade total é dada por (3.47), sendo positiva para qualquer estado normalizável, e nula apenas no caso trivial em que todas as amplitudes ϕ_i são zero. Portanto, a densidade associada a qualquer solução da equação de Dirac para a partícula livre em repouso satisfaz necessariamente $\rho \geq 0$.

Esse resultado mostra que a presença das soluções de energia negativa não compromete a positividade da densidade de probabilidade. Diferentemente da equação de Klein-Gordon, na qual os sinais positivos e negativos de E entram diretamente na definição da densidade, na equação de Dirac cada componente contribui com um número real positivo, preservando a interpretação probabilística da teoria.

Podemos ainda verificar a solução da equação de Dirac para partículas não estacionárias e determinar qual a forma, nesse caso, do espinor $u(E, \mathbf{p})$. Para isso, vamos considerar a equação de Dirac no espaço de momentos, (3.30), ou seja, $Eu = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta)u$, e verificar se a função de onda plana (3.29), também é válida para casos no qual o momento é diferente de zero.

Para isso, vamos considerar a forma matricial padrão dos operadores α_i e β em função das matrizes de Pauli,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix},$$

para $i = x, y, z$.

Por definição tem-se que $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z$. Utilizando a forma em blocos,

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z \\ \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

em que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Logo,

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta = \begin{pmatrix} m\mathbb{I} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m\mathbb{I} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Escrevendo o espinor de Dirac como

$$u = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix},$$

em que u_a e u_b são dois espinores de Pauli (dois componentes), a equação matricial de Dirac pode ser escrita como:

$$Eu = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta)u, \\ E \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbb{I} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

cujo resultado é o sistema:

$$E u_a = m u_a + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) u_b, \quad (3.52a)$$

$$E u_b = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) u_a - m u_b, \quad (3.52b)$$

ou de maneira equivalente,

$$(E - m)u_a = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_b, \quad (3.53a)$$

$$(E + m)u_b = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})u_a. \quad (3.53b)$$

Isolando u_a e u_b , substituindo um no outro e utilizando o resultado fundamental $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2\mathbb{I}$, devido às relações de anticomutação das matrizes de Pauli, obtém-se,

$$u_a = \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{(E - m)(E + m)} u_a, \\ \therefore u_a = \frac{p^2}{E^2 - m^2} u_a. \quad (3.54)$$

Como estamos interessados em soluções não triviais ($u_a \neq 0$), devemos ter

$$E^2 = p^2 + m^2,$$

que é exatamente a relação relativística energia-momento. Este resultado mostra que a função de onda plana

$$\psi(\mathbf{r}, t) = u e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)}$$

é solução da equação de Dirac para uma partícula livre com $p \neq 0$.

Vamos obter agora as soluções explícitas para energia positiva considerando as soluções básicas para o espinor de Pauli u_a :

$$u_a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pelas equações (3.49) e (3.53b), tem-se para a primeira solução, $u_a^{(1)}$:

$$u_b^{(1)} = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Logo,

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_a^{(1)} \\ u_b^{(1)} \end{pmatrix} = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

sendo N_1 uma constante de normalização.

Realizando o mesmo procedimento, tem-se para a segunda solução positiva, $u_a^{(2)}$:

$$u_b^{(2)} = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

de maneira que,

$$u_2 = \begin{pmatrix} u_a^{(2)} \\ u_b^{(2)} \end{pmatrix} = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ -\frac{p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

sendo N_2 a constante de normalização correspondente.

Além de u_1 e u_2 , precisamos também encontrar as formas dos espinores u_3 e u_4 que correspondem às soluções com energia negativa. Para isso, escolhemos os espinores básicos para u_b :

$$u_b^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_b^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando agora as equações (3.49) e (3.53a), obtemos:

$$u_3 = \begin{pmatrix} u_a^{(3)} \\ u_b^{(3)} \end{pmatrix} = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} u_a^{(4)} \\ u_b^{(4)} \end{pmatrix} = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

sendo N_3 e N_4 constantes de normalização.

Para verificar a consistência das soluções encontradas, vamos considerar, por exemplo, o espinor u_1 e avaliar o seu comportamento no limite de uma partícula livre em repouso, isto é, para $\mathbf{p} = 0$:

$$u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N_1 e_1. \quad (3.61)$$

Vemos, portanto, que, no limite de repouso ($\mathbf{p} = 0$) a solução u_1 reduz-se à correspondente base canônica e_1 , recuperando exatamente a solução estacionária obtida anteriormente. O mesmo é observado para u_2, u_3 e u_4 , confirmando que estas soluções são consistentes e válidas para a equação de Dirac tanto para momento nulo quanto para momento diferente de zero.

Esses resultados evidenciam que a presença de soluções com energia positiva e negativa é uma consequência estrutural da própria equação de Dirac. As quatro soluções, duas com $E = +m$ e duas com $E = -m$, surgem naturalmente do caráter espinorial da teoria e estão diretamente relacionadas aos autovalores da matriz β . Conforme já discutido, diferentemente do que ocorre na equação de Klein-Gordon, as soluções de energia negativa não geram densidades de probabilidade negativas. Pelo contrário, elas contribuem de forma coerente para uma densidade global sempre positiva, preservando a interpretação probabilística da teoria.

No entanto, o significado físico das soluções de energia negativa não era evidente no momento da formulação original. Como discute Sakurai (2017), Dirac propôs que todos esses estados negativos estariam ocupados por elétrons em um “mar” infinito, o chamado *mar de Dirac*. Pelo princípio de exclusão de Pauli, nenhum elétron poderia decair para energias abaixo de seu estado, evitando o colapso para energias negativas. Uma ausência (“lacuna”) nesse mar se comportaria como uma partícula com carga oposta. Poucos anos depois, Carl Anderson identificou experimentalmente justamente esse objeto: o pósitron, a antipartícula do elétron (ANDERSON, 1933).

Com o desenvolvimento posterior da teoria quântica de campos, essa interpretação foi reformulada. Os estados de energia negativa passaram a ser compreendidos como estados de antipartículas com energia positiva, propagando-se de modo equivalente a uma evolução temporal invertida. Assim, a equação de Dirac não apenas incorpora naturalmente o spin $1/2$, mas também prevê a existência da antimatéria, uma das realizações mais profundas da física moderna (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017).

Além disso, a estrutura espinorial da equação de Dirac descreve partículas de spin seminteiro, os férmions, que obedecem à estatística de Fermi-Dirac e ao princípio de exclusão de Pauli. Esse comportamento contrasta com o dos bósons, de spin inteiro, que seguem a estatística de Bose-Einstein e podem ocupar o mesmo estado quântico. Essa distinção é fundamental: elétrons, prótons e nêutrons (férmions), compõem a matéria ordinária, enquanto fótons e glúons (bósons), são mediadores das interações fundamentais. Assim, ao unificar a Mecânica Quântica e a Relatividade, a equação de Dirac fornece a estrutura matemática que sustenta tanto a existência das antipartículas quanto a organização quântica da matéria.

3.3.2 O Spin na Equação de Dirac

A formulação da equação de Dirac trouxe consigo uma compreensão inédita sobre a estrutura interna das partículas relativísticas. Na época de Dirac, o spin era um conceito introduzido *ad hoc* para explicar fenômenos experimentais, como a estrutura fina do espectro atômico, mas não possuía uma fundamentação teórica clara. A equação de Dirac, contudo, revelou que o spin não é um acréscimo externo à teoria, e sim uma propriedade intrínseca da própria estrutura matemática que descreve férmions relativísticos.

A presença de um espinor de quatro componentes implica imediatamente que a partícula descrita pela equação deve possuir dois graus de liberdade internos, interpretados como spin “para cima” e “para baixo” para cada sinal de energia. As quatro soluções independentes da equação de Dirac para uma partícula livre correspondem a: duas soluções com energia positiva e spin $+1/2$ e $-1/2$, duas soluções com energia negativa e spin $+1/2$ e $-1/2$.

Para mostrar como o spin surge da própria estrutura do operador de momento angular relativístico, vamos partir do momento angular total \mathbf{J} definido como:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (3.62)$$

onde $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ é o momento angular orbital, e \mathbf{S} o momento angular intrínseco (spin), que ainda será determinado.

Na mecânica quântica não relativística, o momento angular orbital comuta com o Hamiltoniano (H_{nr}):

$$[H_{nr}, \mathbf{L}] = 0, \quad (3.63)$$

ou seja, é uma quantidade conservada.

Entretanto, o Hamiltoniano relativístico de Dirac é dado por:

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m.$$

Como α_i e β são matrizes que descrevem operadores no espaço espinorial, mas não dependem de \mathbf{r} tem-se que $[\beta, \mathbf{L}] = 0$ e $[\alpha_i, r_j] = 0$. Contudo, $[\alpha_i, p_j] = 0$ apenas se considerarmos que ambos atuam em espaços diferentes, com α_i atuando no espaço dos espinores e p_j no espaço de coordenadas. Dessa forma, o único termo não trivial é descrito por:

$$[H, \mathbf{L}] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}]. \quad (3.64)$$

Para calcular o comutador (3.64) podemos escrever $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = \sum_i \alpha_i p_i$, para $i = x, y, z$,

de maneira que:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}] &= [\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z, \mathbf{L}], \\ [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}] &= [\alpha_x p_x, \mathbf{L}] + [\alpha_y p_y, \mathbf{L}] + [\alpha_z p_z, \mathbf{L}], \\ \therefore [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{L}] &= ([\alpha_x p_x, \mathbf{L}], [\alpha_y p_y, \mathbf{L}], [\alpha_z p_z, \mathbf{L}]) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Considerando a componente j do vetor momento angular tem-se que,

$$[\alpha_i p_i, L_j] = \alpha_i [p_i, L_j] + [\alpha_i, L_j] p_i. \quad (3.66)$$

Como α_i é constante, $[\alpha_i, L_j] = 0$. Para avaliar o comutador $[p_i, L_j]$, vamos utilizar a relação fundamental,

$$[p_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} p_k, \quad (3.67)$$

em que ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, definido por: +1 para permutações cíclicas de (x, y, z) , -1 para permutações anticíclicas e 0 sempre que dois índices coincidem. Considerando a expressão explícita da componente j do momento angular orbital, $L_j = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_j = \epsilon_{jkl} r_k p_l$, a equação (3.66) torna-se:

$$\begin{aligned} [\alpha_i p_i, L_j] &= \alpha_i [p_i, L_j], \\ [\alpha_i p_i, L_j] &= \alpha_i (i\epsilon_{ijk} p_k) = i\epsilon_{ijk} \alpha_i p_k, \\ \therefore [\alpha_i p_i, L_j] &= -i (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})_j. \end{aligned} \quad (3.68)$$

O sinal negativo aparece porque $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$.

Esse último resultado mostra que o momento angular orbital não é conservado na teoria de Dirac, uma vez que $[H, \mathbf{L}] \neq 0$, tornando evidente que deve existir um outro termo, intrinsecamente associado ao caráter espinorial da partícula, cuja contribuição faça com que a quantidade fisicamente conservada seja o momento angular total (3.62).

Para que \mathbf{J} seja de fato uma constante de movimento, devemos ter

$$[H, \mathbf{J}] = [H, \mathbf{L}] + [H, \mathbf{S}] = 0. \quad (3.69)$$

Como demonstrado na equação (3.68), é necessário que o operador de spin \mathbf{S} satisfaça a relação

$$[H, \mathbf{S}] = +i (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}), \quad (3.70)$$

de modo que ambas as contribuições de (3.69) se cancelem exatamente.

O operador \mathbf{S} que satisfaz essa relação, na representação padrão de Dirac, é

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}, \quad (3.71)$$

onde,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

e σ são as matrizes de Pauli.

Essa escolha não é arbitrária, pois ela decorre do fato de que cada bloco σ_i satisfaz a álgebra de comutação $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, e, portanto, os operadores $S_i = 1/2\Sigma_i$ satisfazem a álgebra de momento angular quântico:

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k. \quad (3.73)$$

Os autovalores de cada Σ_i são ± 1 , e por isso os autovalores de S_i são $\pm 1/2$. Essa é exatamente a assinatura de uma partícula de spin $1/2$, como o elétron (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; STRANGE, 1998).

Dessa forma, o spin não é um ingrediente colocado artificialmente. Ele emerge inevitavelmente da estrutura matricial que Dirac introduziu para linearizar a relação relativística energia-momento.

Portanto, a equação de Dirac garante a conservação do momento angular total, introduz naturalmente o spin $1/2$ e unifica coerentemente Mecânica Quântica e Relatividade Restrita. O spin aparece no formalismo de Dirac como uma propriedade intrínseca da partícula, codificada diretamente nos operadores matriciais que definem a própria equação (SAKURAI; NAPOLITANO, 2017; STRANGE, 1998; THALLER, 2013).

4 Considerações Finais

Neste trabalho, minha intenção não foi desenvolver uma pesquisa original sobre a equação de Dirac, mas sim construir uma aproximação formativa a um tema que normalmente não faz parte da graduação em Licenciatura em Física. Ao escolher estudar a Mecânica Quântica Relativística e, em particular, a equação de Dirac, foi necessário revisar conteúdos fundamentais de diferentes áreas já estudadas na graduação, como mecânica clássica, física moderna, eletromagnetismo e física matemática, e integrá-los em uma estrutura teórica unificada para o tratamento de um problema físico mais amplo e historicamente relevante. O trabalho exigiu, por exemplo, compreender com profundidade a relação energia-momento relativística, manipular operadores e matrizes em espaços vetoriais, interpretar equações diferenciais parciais e trabalhar com simetrias e tensores no contexto da Relatividade Restrita. Esse processo desenvolveu habilidades matemáticas e conceituais que normalmente são trabalhadas de maneira fragmentada nas disciplinas do curso.

Uma das contribuições formativas mais significativas foi o estudo da estrutura matemática envolvida, especialmente a álgebra de Clifford, as matrizes de Dirac, o formalismo espinorial e a análise de soluções. Esses elementos, além de fundamentais para entender a natureza física de partículas de spin $1/2$, mostraram-se extremamente importantes para o desenvolvimento de habilidades essenciais à formação docente, como leitura crítica de textos teóricos, reconstrução de demonstrações matemáticas, clareza na argumentação e domínio de diferentes níveis de representação (algebraica, geométrica e física). Esse aprendizado reforça a importância de valorizar e compreender conceitos estruturantes de Física básica, como simetria, conservação e representação matemática, que são os alicerces dos desenvolvimentos teóricos mais sofisticados.

Do ponto de vista pedagógico, este trabalho demonstra que, mesmo temas considerados “avançados”, como a equação de Dirac, podem ser explorados na formação inicial de professores quando o objetivo não é dominar tecnicamente toda a teoria, mas compreender seus fundamentos conceituais e sua lógica de construção. Isso aproxima o estudante da forma como a ciência realmente é desenvolvida no contexto teórico: por meio da integração entre física e matemática, da análise crítica de limitações teóricas e da busca por coerência entre diferentes domínios do conhecimento.

Além disso, os desafios enfrentados no desenvolvimento da proposta evidenciam que trabalhar com temas fora da zona de conforto pode estimular autonomia intelectual, capacidade de pesquisa e habilidade de formular perguntas profundas. Essas são competências fundamentais na formação de professores, que precisam constantemente interpretar

novos conteúdos, avaliar materiais didáticos e adaptar saberes científicos complexos para diferentes níveis de ensino.

Outro aspecto relevante diz respeito aos possíveis benefícios para a prática docente no ensino básico. Embora a equação de Dirac não faça parte do currículo escolar, os conceitos trabalhados aqui, como simetria, relatividade, relação energia-momento, estrutura da matéria, antipartículas, representação matemática de grandezas físicas, entre outros, podem enriquecer aulas introdutórias de física moderna e contextualizar temas presentes nos livros didáticos, como o pósitron, a antimatéria e o modelo padrão. O domínio conceitual mais profundo permite ao futuro professor apresentar esses assuntos de forma rigorosa, atualizada e inspiradora para os estudantes.

Por outro lado, é importante reconhecer os limites desse tipo de abordagem em cursos de licenciatura. A profundidade matemática e física exigida pode representar um desafio para estudantes com formação básica ainda em consolidação. Nesse sentido, o trabalho reforça a importância de projetos orientados que permitam ao aluno avançar em seu próprio ritmo, com acompanhamento próximo e alinhamento entre expectativas e objetivos formativos. Quando bem conduzidos, desafios desse tipo não se tornam barreiras, mas oportunidades de crescimento intelectual.

Por fim, embora a equação de Dirac represente um dos marcos mais elegantes e revolucionários da física moderna, unificando relatividade, mecânica quântica e álgebra matricial e antecipando a existência da antimatéria, o valor deste trabalho está menos na sofisticação da teoria e mais no processo de aprendizagem que ele proporcionou. Reforço que, a trajetória investigativa desenvolvida ao longo desta monografia permitiu integrar conceitos, formalismos e métodos de diversas áreas da Física, fomentar pensamento crítico e consolidar competências essenciais para a minha formação científica e pedagógica.

Para além disso, como desdobramentos naturais deste trabalho, vislumbramos investigações futuras que ampliem a compreensão da Mecânica Quântica Relativística em nível introdutório, incluindo, por exemplo, o estudo da equação de Proca para partículas de spin 1, a exploração de campos escalares e férmions em contextos mais gerais, ou ainda análises comparativas entre diferentes equações de onda relativísticas. Tais extensões permitem aprofundar a articulação entre formalismo matemático e significado físico, fortalecendo a formação teórica e pedagógica do futuro docente e ampliando o diálogo entre relatividade, quantização e estrutura da matéria.

Sendo assim, concluo que este estudo se insere como um exemplo de que a formação de professores pode, e talvez deva, abrir espaço para experiências acadêmicas desafiadoras, que não apenas ampliem o repertório conceitual do futuro docente, mas também fortaleçam sua capacidade de compreender a Física como um conhecimento em construção, apoiado em ideias profundas, rigor matemático e diálogo permanente entre teoria e fenômenos naturais.

Referências

- ANDERSON, C. The positive electron. *Physical Review*, v. 43, p. 491–494, 1933.
- DIAS, I. P. L. *Introdução à mecânica quântica relativística: a equação de Klein-Gordon*. 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/14585>. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Física) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.
- FESHBACH, H.; VILLARS, F. Elementary relativistic wave mechanics of spin 0 and spin 1/2 particles. *Reviews of Modern Physics*, New York, v. 30, n. 1, p. 24–45, 1958.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles*. 2nd. ed. Weinheim: Wiley–VCH, 2008.
- JR., J. V.; JR., R. da R. *An Introduction to Clifford Algebras and Spinors*. Oxford: Oxford University Press, 2016.
- KANE, G. *Modern Elementary Particle Physics*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- LOUNESTO, P. Clifford algebras and spinors. In: *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001. p. 25–37.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, MA: Addison–Wesley, 1995.
- RESNICK, R. *Introduction to Special Relativity*. New York: John Wiley Sons Inc., 1968.
- RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics*. 2nd. ed. New York: Springer Science & Business Media, 2012.
- STRANGE, P. *Relativistic Quantum Mechanics: with applications in condensed matter and atomic physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- THALLER, B. *The Dirac Equation*. New York: Springer Science & Business Media, 2013.
- VALENTE, M. B. The dirac equation and its interpretations. *PhilSci Archive*, 2019. Acesso em: 02 jun. 2025. Disponível em: <<https://philsci-archive.pitt.edu/17065/>>.

Apêndices

APÊNDICE A – Equação de Schrödinger: densidade e corrente de probabilidade

Neste apêndice, demonstramos como a equação de Schrödinger leva à conservação da densidade de probabilidade por meio da equação de continuidade. Além disso, discutimos a limitação fundamental da equação de Schrödinger no regime relativístico, limitação essa que motivou o desenvolvimento da equação de Klein-Gordon.

Vamos considerar a equação de Schrödinger dependente do tempo, escrita em unidades naturais,

$$\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(r)\right)\psi(\mathbf{r}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.1})$$

Para uma partícula livre, $\hat{V}(r) = 0$, a equação (A.1) torna-se

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.2})$$

cujo conjugado complexo é

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*(\mathbf{r}, t) = -i\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.3})$$

Com isso, observamos que a equação de Schrödinger possui uma derivada de primeira ordem na componente temporal, mas derivadas de segunda ordem nas componentes espaciais. Essa assimetria implica que a equação não é covariante sob transformações de Lorentz, revelando sua natureza essencialmente não relativística.

Ainda assim, é possível demonstrar que a densidade de probabilidade é conservada no contexto dessa equação.

Para mostrar isso, utilizamos a definição de densidade, dada por,

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \geq 0, \quad (\text{A.4})$$

onde $\rho(\mathbf{r}, t)$ é sempre não negativa, uma vez que é dada pelo módulo quadrado da função de onda.

No entanto, a conservação da densidade de probabilidade não significa apenas que $\rho(\mathbf{r}, t) \geq 0$, mas sim que a probabilidade total no espaço é constante no tempo, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = 0. \quad (\text{A.5})$$

A condição $\rho \geq 0$ garante a interpretação probabilística, mas a conservação da probabilidade requer justamente a equação da continuidade.

Multiplicando a equação (A.2) à esquerda por $\psi^*(\mathbf{r}, t)$, a equação (A.3) por $\psi(\mathbf{r}, t)$ e subtraindo as duas, obtém-se:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi &= i\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}, \\ -\frac{1}{2m}\psi\nabla^2\psi^* &= -i\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}, \\ -\frac{1}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*) &= i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Pela equação (A.4) podemos identificar o segundo membro da equação (A.6) como sendo a derivada temporal de $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$, isto é, $\partial\rho/\partial t$. Adicionalmente, podemos reescrever o lado esquerdo da equação (A.6) usando a identidade vetorial

$$\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^* = \nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \quad (\text{A.7})$$

Rearranjando os termos tem-se:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\rho}{\partial t} &= -\frac{1}{2m}\nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \\ \therefore \frac{\partial\rho}{\partial t} &= -\frac{1}{2mi}\nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Identificando a corrente de probabilidade \mathbf{j} como o vetor cuja divergência aparece na equação (A.8):

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = -\frac{i}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \quad (\text{A.9})$$

chegamos à equação de continuidade:

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – Equação de Klein-Gordon: densidade e corrente de probabilidade

Neste apêndice mostramos como a equação de Klein-Gordon (KG) admite uma equação de continuidade.

A equação de KG em unidades naturais ($\hbar = c = 1$) é escrita como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Multiplicando a equação (B.1) à esquerda por ψ^* e a equação complexamente conjugada por ψ , e subtraindo as duas expressões, obtemos:

$$\psi^*(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi^*(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Desenvolvendo a equação (B.2)

$$\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi^* \nabla^2 \psi + m^2 \psi^* \psi - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} + \psi \nabla^2 \psi^* - m^2 \psi^* \psi = 0, \quad (\text{B.3})$$

tem-se que,

$$\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \psi^* \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \psi^* = 0. \quad (\text{B.4})$$

Podemos reorganizar os termos temporais e espaciais da equação (B.4) colocando derivadas em evidência. Para os termos temporais:

$$\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right). \quad (\text{B.5})$$

De modo análogo, usando a identidade $\nabla \cdot (f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$, para as funções escalares $f(\mathbf{r})$ e $g(\mathbf{r})$, os termos espaciais podem ser escritos como um divergente:

$$-\psi^* \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \psi^* = -\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (\text{B.6})$$

Assim, obtemos a equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (-\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*) = 0 \quad (\text{B.7})$$

Comparando a equação (B.7) com a equação geral de continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (\text{B.8})$$

identificamos a densidade e a corrente associadas (DIAS, 2021):

$$\rho = \frac{i}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{j} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (\text{B.10})$$

Conforme discutido na Seção 3.1, embora essa forma satisfaça formalmente a equação de continuidade, a densidade ρ não é positiva definida, pois depende linearmente de $\partial\psi/\partial t$ além de ψ e ψ^* . Assim, ρ pode assumir valores negativos mesmo para estados físicos, o que inviabiliza sua interpretação como densidade de probabilidade. Esse resultado está diretamente relacionado ao fato de que a equação de KG é de segunda ordem no tempo, exigindo duas condições iniciais independentes, o que impede que a densidade de probabilidade seja construída exclusivamente a partir de ψ .

APÊNDICE C – Matrizes de Dirac

A partir da hipótese

$$H = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m), \quad (\text{C.1})$$

vamos explicar, neste apêndice, o que são as matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ e β e quais propriedades devem satisfazer para garantir que a equação de Dirac seja compatível com a relação relativística

$$H^2 = E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (\text{C.2})$$

Elevando (C.1) ao quadrado, sendo $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, tem-se:

$$\begin{aligned} H^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m), \\ H^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + \beta^2 m^2 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \beta m + \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} m. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Desenvolvendo o primeiro termo da equação (C.3), sabendo que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_i A_i B_i$,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) = \sum_i \alpha_i p_i \sum_j \alpha_j p_j, \\ &= \alpha_x p_x \left(\sum_j \alpha_j p_j \right) + \alpha_y p_y \left(\sum_j \alpha_j p_j \right) + \alpha_z p_z \left(\sum_j \alpha_j p_j \right), \\ &= \sum_i \alpha_i^2 p_i^2 + \{\alpha_x, \alpha_y\} p_x p_y + \{\alpha_y, \alpha_z\} p_y p_z + \{\alpha_x, \alpha_z\} p_x p_z, \\ &= \sum_i \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i < j} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

com o anticomutador entre α_i e α_j dado por $\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i$.

Como p_i e β comutam entre si, $[p_i, \beta] = 0$, pois β não depende da posição nem do tempo, podemos escrever os dois últimos termos da equação (C.3) como:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \beta m + \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} m = (\boldsymbol{\alpha} \beta + \beta \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{p} m. \quad (\text{C.5})$$

Para que a equação (C.3) seja consistente com (C.2) é necessário que:

$$\alpha_i^2 = \mathbb{I}, \quad (\text{C.6})$$

$$\beta^2 = \mathbb{I}, \quad (\text{C.7})$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (\text{C.8})$$

$$\boldsymbol{\alpha} \beta + \beta \boldsymbol{\alpha} = 0, \quad (\text{C.9})$$

sendo δ_{ij} a delta de Kronecker, igual a 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.

Isso significa que o quadrado dos operadores α e β devem ser iguais ao operador identidade \mathbb{I} e todos os componentes de α e β devem anticomutar entre si. Não existem números reais ou complexos que satisfaçam simultaneamente essas relações. Entretanto, existem matrizes que satisfazem todas elas. Isso mostra que a equação de Dirac é necessariamente matricial e exige que o estado físico seja representado por um espinor de quatro componentes.

Para confirmar que a dimensão mínima das matrizes de Dirac α_i e β são 4×4 vamos partir da relação de anticomunicação (C.9), que fornece $\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i$. Outra informação útil é que α_i e β são matrizes invertíveis, pois o quadrado delas é igual a \mathbb{I} , conforme relações (C.6) e (C.7), de maneira que seus determinantes são não nulos. Logo,

$$\det(\alpha_i \beta) = \det(-\beta \alpha_i). \quad (\text{C.10})$$

Pela propriedade $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ podemos escrever,

$$\det(\alpha_i)\det(\beta) = \det(-1\beta)\det(\alpha_i) = \det(\beta)\det(-\mathbb{I})\det(\alpha_i). \quad (\text{C.11})$$

Cancelando $\det(\alpha_i)\det(\beta)$, não nulos, obtemos $\det(-\mathbb{I}) = 1$. Para verificar isso, vamos considerar o determinante de uma matriz identidade de ordem $n \times n$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 1.$$

Já o determinante da matriz $-\mathbb{I}_{n \times n}$ é dado por,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = (-1)^n.$$

Dessa forma, se n for ímpar $\det(-\mathbb{I}) = -1$ e se n for par $\det(-\mathbb{I}) = 1$. Portanto, a ordem n das matrizes de Dirac deve ser par.

Se considerarmos $n = 2$, as matrizes 2×2 , como as matrizes de Pauli, fornecem apenas três geradores com anticomutadores úteis, mas não permitem simultaneamente satisfazer todas as relações para α_i e β , equações (C.6) a (C.9). Uma forma prática de ver isso é observar que as três matrizes de Pauli σ_i ($i = 1, 2, 3$) e a identidade $\mathbb{I}_{2 \times 2} = \sigma_0$,

dadas por

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.12a})$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.12b})$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.12c})$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.12d})$$

formam uma base de dimensão 4, $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, insuficiente para acomodar quatro matrizes mutuamente relacionadas por anticomutadores, necessárias para a álgebra de Dirac.

Apesar de existirem quatro matrizes linearmente independentes nesta base, apenas as três matrizes de Pauli possuem propriedades úteis de anticomutação $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$, em analogia às relações (C.8) para α_i . A identidade σ_0 não anticomuta com nenhuma delas, ela comuta. Portanto, σ_0 não serve para exercer o papel da matriz β , porque ela teria que anticomutar com as matrizes σ_i , como em (C.9), o que é impossível.

Consequentemente, a menor possibilidade não trivial com n par e maior do que 2 é $n = 4$. Dessa maneira obtemos que a dimensão mínima das matrizes de Dirac é 4×4 . É por isso que a função de onda de Dirac tem quatro componentes (espinor de Dirac).

Uma vez estabelecida a dimensão mínima de 4×4 , Dirac buscou a solução mais simples utilizando as matrizes de Pauli como blocos 2×2 para construir explicitamente suas matrizes:

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13a})$$

$$\alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13b})$$

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13c})$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13d})$$

de modo que α_i e β surgem naturalmente como combinações matriciais que preservam as relações de anticomutação exigidas pela equação de Dirac.

APÊNDICE D – Forma Covariante da Equação de Dirac

Neste apêndice mostramos como as matrizes α_i e β podem ser reescritas na forma alternativa e mais compacta das matrizes de Dirac γ^μ .

Partimos da equação de Dirac escrita originalmente como

$$H\psi(\mathbf{r}, t) = (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta m)\psi(\mathbf{r}, t), \quad (\text{D.1})$$

e utilizamos os operadores diferenciais usuais,

$$H = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p = -i\nabla \quad \text{para} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Substituindo esses operadores em (D.1), obtemos

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i\alpha_x\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z} + \beta m\psi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{D.2})$$

Multiplicando ambos os lados da equação (D.2) por β e usando $\beta^2 = \mathbb{I}$, chegamos a

$$i\beta\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -i\beta\alpha_x\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x} - i\beta\alpha_y\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y} - i\beta\alpha_z\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z} + m\psi(\mathbf{r}, t). \quad (\text{D.3})$$

A partir de (D.3), identificamos naturalmente as matrizes de Dirac:

$$\beta = \gamma^0, \quad (\text{D.4})$$

$$\alpha_x = \beta\gamma^1, \quad (\text{D.5})$$

$$\alpha_y = \beta\gamma^2, \quad (\text{D.6})$$

$$\alpha_z = \beta\gamma^3, \quad (\text{D.7})$$

ou de forma compacta $\alpha_i = \gamma^0\gamma^i$.

Com isso, podemos definir os quadrivetores

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \quad \text{e} \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

e reescrever (D.1) na forma covariante:

$$\left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{D.8})$$

Na equação (D.8) aparece a combinação $\gamma^\mu \partial_\mu$, na qual o índice μ surge uma vez na posição superior e uma vez na posição inferior. Quando isso ocorre, podemos aplicar a *convenção de somatório de Einstein*. Essa convenção estabelece que toda vez que um índice aparece repetido dessa forma, deve-se entender que há uma soma implícita sobre todos os seus valores, sem necessidade de escrever o símbolo \sum . Logo,

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu \equiv \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (\text{D.9})$$

Utilizando essa notação compacta, a equação de Dirac assume sua forma usual e mais elegante:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (\text{D.10})$$

APÊNDICE E – Equação de Dirac: Densidade e Corrente de Probabilidade

Neste apêndice demonstramos como obter a densidade e a corrente de probabilidade associadas à equação de Dirac, a fim de verificar explicitamente se esta conserva a probabilidade ao longo do tempo.

Na equação de Dirac a função de onda não é um escalar complexo, como na equação de Schrödinger, mas sim um espinor de Dirac $\psi(\mathbf{r}, t)$, um vetor coluna de quatro componentes complexas. Por esse motivo, a densidade de probabilidade não pode ser escrita simplesmente como $\rho(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)$. Para construir a quantidade correta, precisamos introduzir o adjunto de Dirac, que envolve o hermitiano conjugado do espinor.

O complexo conjugado $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ é novamente um vetor coluna cujos elementos são os conjugados dos componentes de $\psi(\mathbf{r}, t)$. Tomando sua transposta, obtemos o espinor linha $\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) = \left(\psi^*(\mathbf{r}, t)\right)^T$. Explicitamente:

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1^* \\ \psi_2^* \\ \psi_3^* \\ \psi_4^* \end{pmatrix}^T = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ \psi_3^* \ \psi_4^*) \quad (\text{E.1})$$

Considerando a equação de Dirac na forma $H\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi$, sendo $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ e $H = i\partial\psi/\partial t$, temos que,

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\alpha_x\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial\psi}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial\psi}{\partial z} + \beta m\psi = 0. \quad (\text{E.2})$$

Vamos tomar o hermitiano conjugado de (E.2),

$$\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\dagger = \left(-i\alpha_x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^\dagger + \left(-i\alpha_y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^\dagger + \left(-i\alpha_z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^\dagger + (\beta m\psi)^\dagger, \quad (\text{E.3})$$

e considerar o fato de que as matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ e β são hermitianas,

$$\beta^\dagger = \beta, \quad (\text{E.4a})$$

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad (i = x, y, z). \quad (\text{E.4b})$$

Estas últimas propriedades podem ser facilmente demonstradas. Considerando a

matriz α_y , como exemplo,

$$\alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

o seu complexo conjugado é escrito como:

$$\alpha_y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

Tomando a transposta da matriz (E.6) mostramos que $\alpha_y^\dagger = \alpha_y$, ou seja,

$$(\alpha_y^*)^T = \alpha_y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_y. \quad (\text{E.7})$$

O mesmo é válido para as matrizes α_x , α_z e β .

Com isso, podemos reescrever a equação (E.3) como,

$$i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} + i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \alpha_x + i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y} \alpha_y + i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z} \alpha_z + m \psi^\dagger \beta = 0. \quad (\text{E.8})$$

Como as matrizes são constantes, não dependem de \mathbf{r} , e considerando que $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ e $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, podemos escrever a equação (E.8) de forma compacta:

$$\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} + (\nabla \psi^\dagger) \cdot \boldsymbol{\alpha} - i m \psi^\dagger \beta = 0, \quad (\text{E.9})$$

de maneira que a equação original (E.2) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla \psi) + i m \beta \psi = 0. \quad (\text{E.10})$$

Multiplicando (E.9) à direita por ψ e (E.10) à esquerda por ψ^\dagger e somando as duas equações, temos:

$$\left(\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} + (\nabla \psi^\dagger) \cdot \boldsymbol{\alpha} - i m \psi^\dagger \beta \right) \psi + \psi^\dagger \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla \psi) + i m \beta \psi \right) = 0. \quad (\text{E.11})$$

Reorganizando os termos de (E.11) e colocando $\partial/\partial t$ e ∇ em evidência,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \right) \psi + \psi^\dagger \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \left((\nabla \psi^\dagger) \cdot \boldsymbol{\alpha} - i m \psi^\dagger \beta \right) \psi + \psi^\dagger \left(\boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla \psi) + i m \beta \psi \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + (\nabla \psi^\dagger) \cdot \boldsymbol{\alpha} \psi + \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \cdot (\nabla \psi) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + \nabla \cdot (\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Note que, ao somar a equação de Dirac com seu hermitiano conjugado, os termos $+im\beta\psi$ e $-im\psi^\dagger\beta$ se cancelam. Para entender essa manipulação, é importante destacar que as matrizes de Dirac α_i e β são operadores lineares 4×4 que atuam sobre o espinor ψ . Elas não dependem das coordenadas do espaço-tempo, ou seja, são matrizes constantes. Isso significa que sua ação é puramente matricial: elas podem ser movidas para a esquerda ou para a direita em um produto, desde que a operação seja bem definida dimensionalmente, sem introduzir termos diferenciais adicionais ou correções funcionais.

Contudo, devemos lembrar que ψ é um vetor coluna 4×1 . Assim, a operação $\beta\psi$ é bem definida, pois trata-se de uma multiplicação de matriz 4×4 por vetor 4×1 . Já a expressão $\psi\beta$ não é definida, pois seria 4×1 vezes 4×4 . Por isso, nas manipulações com o hermitiano conjugado, o termo correto é $\psi^\dagger\beta$, que consiste em uma matriz 1×4 multiplicando outra 4×4 . Assim, o cancelamento entre $im\beta\psi$ e $-im\psi^\dagger\beta$ não decorre de uma “comutação” entre ψ e β , mas sim do fato de que ambos aparecem naturalmente com sinais opostos nas duas equações e são compatíveis entre si como produtos matriciais. O cancelamento é, portanto, puramente algébrico.

Além disso, ao tomar o hermitiano conjugado de expressões contendo produtos de operadores, utilizamos a regra fundamental da álgebra de operadores em espaços de Hilbert:

$$(AB\psi)^\dagger = \psi^\dagger B^\dagger A^\dagger. \quad (\text{E.13})$$

Ou seja, cada operador no produto é conjugado e a ordem é invertida. Como as matrizes de Dirac são hermitianas, $\alpha_i^\dagger = \alpha_i$ e $\beta^\dagger = \beta$, esse procedimento é direto. Assim, a passagem da equação original para a sua forma hermitiana conjugada segue rigorosamente as propriedades algébricas das matrizes de Dirac e a estrutura matemática do formalismo de operadores da Mecânica Quântica.

Voltando à equação (E.12), nota-se que ela é uma equação de continuidade da forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (\text{E.14})$$

que nos permite identificar uma expressão para a densidade de probabilidade ρ e a densidade de corrente \mathbf{j} como:

$$\rho = \psi^\dagger\psi, \quad (\text{E.15})$$

$$\mathbf{j} = \psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi. \quad (\text{E.16})$$

A expressão $\rho = \psi^\dagger\psi$ com os espinores de Dirac é descrita por:

$$\psi^\dagger\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4. \quad (\text{E.17})$$

Temos, portanto que,

$$\rho = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \geq 0. \quad (\text{E.18})$$

O resultado (E.18) nos permite definir ρ como uma densidade de probabilidade, porque $\psi^\dagger\psi$ é sempre positivo, por definição. Dessa forma, a equação (E.14) nos diz que a taxa de mudança da densidade de probabilidade em um pequeno volume no espaço (d^3r) é igual à taxa que a probabilidade deixa aquele volume (STRANGE, 1998). Isso resolve a dificuldade encontrada na equação de Klein-Gordon (KG), cuja densidade associada não é positiva definida. A equação de Dirac, por ser linear em $\partial/\partial t$, admite uma densidade positiva e interpretável como probabilidade, anulando assim o problema interpretativo da equação de KG.

Adicionalmente, a integral de ρ sobre todo o espaço, a qual fornece a probabilidade total de encontrar a partícula em algum lugar no espaço,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger\psi d^3r = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2) d^3r = 1, \quad (\text{E.19})$$

nos diz como normalizar um espinor, dado por um vetor de quatro componentes.