



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Introdução às Variedades Tóricas

Autor: *Nelson Amorim Júnior*

Orientadora: *Profa.^ª Dra. Thaís Maria Dalbello*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso 2

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Alex Carlucci Rezende

Luciene Nogueira Bertoncello

Thaís Maria Dalbello

São Carlos, 15 de fevereiro de 2024.

Introdução às Variedades Tóricas

Autor: *Nelson Amorim Júnior*

Orientadora: *Profa.^a Dra. Thaís Maria Dalbello*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso 2

Curso: Licenciatura em Matemática

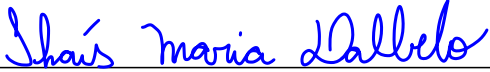
Professores Responsáveis: Alex Carlucci Rezende

Luciene Nogueira Bertoncello

Thaís Maria Dalbello

São Carlos, 15 de fevereiro de 2024.

Nelson Amorim Junior


Thaís Maria Dalbello

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à minha família que sempre me forneceu todo tipo de apoio e contribuiu em minha formação pessoal. Agradeço também aos inúmeros professores que tive durante toda minha trajetória, dos docentes da minha educação básica, até os que foram presentes nesta graduação, em especial minha orientadora Thaís Maria Dalbelo, que me acompanhou indiretamente e diretamente desde do meu primeiro semestre. Por fim, agradeço aos meus amigos e colegas que me auxiliaram durante todo esse período, tanto academicamente, quanto socialmente, em especial aqueles que estiveram comigo durante o difícil período remoto.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar o conceito de variedades tóricas afins, bem como os elementos necessários para esta definição. Em um primeiro momento, utilizando os cones para tal definição e posteriormente os semigrupos afins, para uma definição mais geral. Além disso, pretendemos caracterizar esse objeto e explorar importantes exemplos dessa classe de variedades, tal como a descrição da normalização das variedades tóricas via elementos da geometria convexa.

Palavras-chaves: Variedades algébricas afins; Toro algébrico; Variedades tóricas afins; Variedades tóricas normais.

Abstract

The main goal of this work is to study the concept of affine toric varieties, as well as the elements of convex geometry necessary for their definition. At first, using the cones for this definition and posteriorly the affine semigroups, for a more general definition. Furthermore, we intend to characterize this object and explore important examples of this class of varieties, such as the description of the normalization of toric varieties via elements of convex geometry.

Keywords: Affine algebraic varieties; Algebraic torus; Affine toric varieties; Normal toric varieties.

Sumário

Introdução	5
1 Preliminares	7
1.1 Teoria dos anéis	7
1.2 Localização e anéis normais	20
1.3 Topologia, função contínua e compactos	24
2 Teorema da base de Hilbert	30
2.1 Anéis noetherianos	30
3 Geometria algébrica	34
3.1 Variedades algébricas afins	34
3.2 Anel de coordenadas e Nullstellensatz	40
3.3 Variedades algébricas normais	43
4 Geometria convexa e semigrupos	48
4.1 Geometria convexa	48
4.2 Semigrupos	52
5 Variedades tóricas por cones	55
5.1 Variedades tóricas associadas a cones	55
6 Toro e a classificação das variedades tóricas	59
6.1 Toro algébrico	59
6.2 Caracterização das variedades tóricas	65
7 Variedades tóricas normais e saturação de semigrupos	72
7.1 Saturação e normalização	72
Referências Bibliográficas	81

Introdução

Uma ação de um grupo em uma variedade é uma poderosa ferramenta matemática, que nos ajuda a estudar importantes aspectos geométricos e topológicos de tal variedade. Um importante exemplo é a ação do toro algébrico $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ em uma variedade algébrica X que, no caso específico em que esta ação é quase-transitiva e efetiva, a variedade X é chamada de variedade tórica.

A teoria de variedades tóricas tem sido amplamente estudada devido a sua importância em vários domínios da matemática. Essa teoria pode ser vista como um ponto de interação entre combinatória e geometria algébrica, relacionando o estudo combinatório com ações tóricas algébricas.

Um dos aspectos mais interessantes das variedades tóricas é que muitas questões que, em geral são difíceis, admitem soluções simples e concretas no caso tórico, o que torna essa classe de variedades uma importante fonte de exemplos.

Nesse sentido, a normalização de variedades tóricas determinadas por semigrupos não saturados é um perfeito exemplo. Em [3], os autores apresentam o conceito de semigrupo saturado e provam que uma variedade tórica é normal se, e somente se, pode ser obtida através de um semigrupo saturado. Além disso, dada uma variedade tórica não normal, proveniente de um semigrupo não saturado, os autores descrevem como obter uma normalização de tal variedade produzindo um semigrupo saturado a partir do semigrupo original e de elementos da geometria convexa.

Na primeira parte do trabalho, estudamos alguns tópicos relevantes da álgebra comutativa. Em seguida, realizamos um estudo introdutório da geometria algébrica, verificando alguns resultados relevantes, como o teorema de Nullstellensatz. Posteriormente, estudamos elementos da geometria convexa. Tais elementos nos permitiu construir determinados semigrupos, que definiram as variedades tóricas geradas por cones.

Nesta segunda etapa do trabalho, estudamos as variedades tóricas do ponto de vista clássico, buscando definir as variedades tóricas através do toro algébrico. Posteriormente, trabalhamos para caracterizar, de forma geral, as variedades tóricas, utilizando semigrupos afins. Além disso, apresentamos as variedades tóricas normais e mostramos que essas correspondem exatamente as variedades tóricas determinadas por cones fortemente convexos. Ao fim, vimos uma forma eficiente de normalizar as variedades tóricas não normais, através do processo de saturação de um semigrupo.

Capítulo 1

Preliminares

Para definirmos as variedades algébricas que auxiliarão na construção das variedades tóricas afins, necessitamos deste capítulo preliminar que servirá como uma revisão de alguns conceitos da álgebra comutativa e da topologia que serão extremamente importantes ao longo desse estudo.

1.1 Teoria dos anéis

Alguns conceitos iniciais da álgebra comutativa são fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Nesta seção veremos brevemente os principais resultados e definições da teoria dos anéis.

Definição 1.1.1 (Anel). Dado um conjunto $R \neq \emptyset$ e duas operações binárias $+$ e \cdot , a tripla $(R, +, \cdot)$ será chamada de *anel* se satisfazer:

- i) $\forall r, s, t \in R$, então $(r + s) + t = r + (s + t)$;
- ii) $\exists 0 \in R$, tal que $0 + r = r, \forall r \in R$;
- iii) $\forall r \in R, \exists r' \in R$, tal que $r + r' = 0$;
- iv) $\forall r, s \in R$, então $r + s = s + r$;
- v) $\forall r, s, t \in R$, então $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$;
- vi) $\forall r, s, t \in R$, então $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$ e $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$.

Exemplo 1.1.2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são todos anéis com as operações usuais de soma e multiplicação. Além disso, tais anéis têm duas propriedades extras, recebendo o nome de anéis comutativos com unidade.

Definição 1.1.3. Diremos que $(R, +, \cdot)$ é um *anel comutativo com unidade* se satisfaz:

- vii) $\forall r, s \in R$, então $r \cdot s = s \cdot r$;
- viii) $\exists 1 \in R$, tal que $1 \cdot r = r = r \cdot 1, \forall r \in R$.

Nesse estudo, estamos interessados apenas nos anéis comutativos com unidade. Dito isso, a partir deste momento, *todos* os anéis $(R, +, \cdot)$ serão considerados comutativos com unidade e iremos nos referir a eles apenas como anel R . Também, por convenção, dados dois elementos $r, s \in R$, denotaremos $r \cdot s$ por rs , quando não houver ambiguidades a respeito dessa operação.

A seguir, temos um dos exemplos de anéis mais importantes para esse trabalho.

Exemplo 1.1.4. Dados um anel R e uma variável/indeterminada x , definimos o conjunto $R[x] := \{ f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in R, 0 \leq i \leq n \}$ e chamamos seus elementos de polinômios com coeficientes em R . Tal conjunto é um anel com as operações:

$$\begin{aligned} +: R[x] \times R[x] &\longrightarrow R[x] \\ (f, g) &\longmapsto +(f, g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet: R[x] \times R[x] &\longrightarrow R[x] \\ (f, g) &\longmapsto \bullet(f, g), \end{aligned}$$

em que, dados $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in R[x]$ com $m \leq n$ ambos naturais, temos que

$$\begin{aligned} +(f, g) = f + g &:= \sum_{k=0}^n c_k x^k, \text{ tal que } c_k = (a_k + b_k) \text{ e } 0 \leq k \leq n \\ \bullet(f, g) = f \cdot g &:= \sum_{l=0}^{n+m} d_l x^l, \text{ tal que } d_l = \sum_{\lambda=0}^l (a_\lambda \cdot b_{l-\lambda}) \text{ e } 0 \leq l \leq n + m. \end{aligned}$$

Denominamos $R[x]$ de *anel de polinômios com coeficientes em R* .

Referente a um anel de polinômios, podemos definir alguns conceitos associados a um polinômio pertencente a esse anel.

Definição 1.1.5. Seja $f \in R[x]$, onde $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ com $a_n \neq 0$. Diremos que a_n é o *coeficiente líder* de f e que $\partial(f) := n$, é o *grau* de f . Se o coeficiente líder do polinômio for 1, o polinômio é dito *mônico*. Ainda, se $\alpha \in A \supseteq R$, um segundo anel contendo R , diremos que $f(\alpha) := a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n \in A$ é a *avaliação* do polinômio f em α .

Perceba que podemos construir anéis de polinômios com múltiplas variáveis, afinal dado um anel R , sabemos que $A = R[x]$ é um anel, logo $B = A[y] = R[x][y]$ também será um anel. Baseado nessa ideia, de forma indutiva, obtemos o anel $R[x_1][x_2]\dots[x_m]$, chamado de *anel de polinômios em m variáveis com coeficientes em R* , o qual denotaremos por $R[x_1, x_2, \dots, x_m]$.

Dado um anel R , podemos tomar o cartesiano desse conjunto $R \times \dots \times R =: R^n$, sendo n o número de vezes que R aparece no cartesiano. Ao considerar as operações do anel

R , tomadas sobre cada coordenada dos elementos $(r_1, \dots, r_n) \in R^n$, nos resulta que R^n é também um anel.

A seguir, temos a definição de dois tipos especiais de anéis, que aparecerão com frequência nesse estudo.

Definição 1.1.6 (Domínio de integridade). Diremos que um anel R é um *domínio de integridade* se dados $r, s \in R$ tais que $r \cdot s = 0$, então $r = 0$ ou $s = 0$.

Definição 1.1.7 (Corpo). Diremos que um elemento $r \in R$, é *invertível* ou uma *unidade*, se existir um elemento $r^{-1} \in R$, tal que $r \cdot r^{-1} = 1$. Nesse caso, r^{-1} será chamado de *inverso* de r . Dizemos que R^\times é o conjunto de todas as unidades de R . Por fim, um anel R é um *corpo* se $R \setminus \{0\} = R^\times$.

Vejam os seguinte resultado que relaciona ambas as definições.

Proposição 1.1.8. *Todo corpo R é um domínio de integridade.*

Demonstração. Dados $x, y \in R$ tais que $x \cdot y = 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $x \neq 0$. Logo, como R é corpo sabemos, que $\exists x^{-1} \in R$, então multiplicando de ambos os lados temos:

$$x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 \Rightarrow 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0. \quad \square$$

Exemplo 1.1.9. Os anéis \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} dos números racionais, reais e complexos, respectivamente, são corpos. Perceba que a recíproca da proposição anterior não é válida, afinal existem domínios de integridade que não são corpos. Por exemplo, o anel dos inteiros \mathbb{Z} , é um domínio, entretanto 1 e -1 são os únicos elementos que possuem inverso.

Dentre os corpos \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} , apenas o corpo dos complexos tem a propriedade especial de ser algebricamente fechado. Corpos desse tipo serão fundamentais nas definições e resultados do Capítulo 3.

Definição 1.1.10. Um corpo R é dito *algebricamente fechado*, se para todo polinômio não constante $f \in R[x]$, i.e. com $\partial(f) > 0$, existe $\alpha \in R$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Como dito anteriormente, o corpo \mathbb{C} é um exemplo de corpo algebricamente fechado, tal fato é consequência direta do *Teorema Fundamental da Álgebra*.

Os ideais são as subestruturas mais importantes associadas a um anel, cuja definição é a seguinte.

Definição 1.1.11 (Ideal). Um subconjunto I de um anel R é chamado de *ideal* se satisfazer:

- i) $0 \in I$;
- ii) $\forall r, s \in I$, então $r + s \in I$;

iii) $\forall r \in R$ e $\forall i \in I$, então $a \cdot i \in I$.

Segue um exemplo de ideal.

Exemplo 1.1.12. Dados um anel R e um subconjunto finito $S = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq R$. O conjunto $(a_1, \dots, a_n) := \{y \in R \mid y = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \text{ em que } \lambda_i \in R \text{ e } i = 1, \dots, n\}$ é um ideal de R . De fato, dados $y = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$ e $z = \sum_{i=0}^n \mu_i a_i$, temos que

$$0 = \sum_{i=0}^n 0 \cdot a_i \Rightarrow 0 \in (a_1, \dots, a_n),$$

$$y + z = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i + \sum_{i=0}^n \mu_i a_i = \sum_{i=0}^n (\lambda_i + \mu_i) a_i \Rightarrow y + z \in (a_1, \dots, a_n),$$

$$\text{por fim dado } r \in R, \text{ temos que } ry = r \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^n (r \lambda_i) a_i \in (a_1, \dots, a_n).$$

Tal ideal será chamado de *ideal finitamente gerado por S* .

Em um anel R qualquer, temos ao menos dois ideais finitamente gerados: o ideal nulo $(0) = \{0\}$ e o próprio anel $(u) = (1) = R$, onde $u \in R^\times$. Esses serão ditos *ideais triviais* de R .

A partir de dois ideais de um anel, é possível realizar operações entre eles, gerando novos ideais.

Exemplo 1.1.13. Sejam R um anel e I, J ideais desse anel. As seguintes operações entre os ideais I, J serão ideais.

- $I \cap J := \{x \mid x \in I \text{ e } x \in J\}$;
- $I + J := \{x + y \mid x \in I \text{ e } y \in J\}$;
- $I \cdot J := \{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \mid x_i \in I \text{ e } y_i \in J\}$;
- $\sqrt{I} := \{r \in R \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ com } r^m \in I\}$.

A verificação de que os três primeiros são de fato ideais de R é direta. Bastando-nos mostrar que \sqrt{I} , dito *ideal radical*, é um ideal. Com efeito, observe que $0 \in I \subseteq \sqrt{I}$, afinal todo elemento $r \in I$ pode ser escrito como $r^1 \in I$. Se $r \in \sqrt{I}$ e $a \in R$, existe um natural m tal que $r^m \in I$, logo $(ar)^m = ar \cdots ar = (a \cdots a) \cdot (r \cdots r) = a^m r^m$, que pertence a I pela propriedade (iii) da definição de ideal, implicando que $ar \in \sqrt{I}$. Agora, dados $r, s \in \sqrt{I}$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $r^m \in I$ e $s^n \in I$. Perceba que para qualquer natural l , com $l > n$, temos que $s^l \in I$. Tome a seguinte potência de $r + s$:

$$\begin{aligned} (r + s)^{m+n} &= \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} r^{(m+n)-k} \cdot s^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{m+n}{k} \underbrace{r^m}_{\in I} \cdot r^{n-k} \cdot s^k + \sum_{k=n+1}^{m+n} \binom{m+n}{k} r^{(m+n)-k} \cdot \underbrace{s^k}_{\in I}, \end{aligned}$$

garantindo que $(r + s)^{m+n} \in I$, ou seja, $r + s \in \sqrt{I}$.

Na sequência, utilizando um ideal, definimos uma relação de equivalência em um anel. O conjunto das classes dessa relação formará um anel, o anel quociente, um dos protagonistas dentro da teoria dos anéis.

Definição 1.1.14. Seja A um anel e I um ideal, definimos a seguinte relação de equivalência entre dois elementos $x, y \in A$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I.$$

Com essa relação, definimos a *classe de equivalência* de $x \in A$

$$x + I := \{ y \in A \mid x \sim y \}.$$

Também utilizaremos a notação \bar{x} para a classe de x , ou seja $\bar{x} = x + I$. Por fim, definimos o conjunto de todas as classes de equivalência dessa relação.

$$\frac{A}{I} := \{ \bar{x} \mid x \in A \}.$$

Proposição 1.1.15. Dados A um anel e I um ideal, o conjunto $\frac{A}{I}$, com as operações $+$ e \cdot definidas por:

$$\begin{aligned} +: \frac{A}{I} \times \frac{A}{I} &\longrightarrow \frac{A}{I} \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\longmapsto \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} \\ \\ \cdot: \frac{A}{I} \times \frac{A}{I} &\longrightarrow \frac{A}{I} \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\longmapsto \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}, \end{aligned}$$

é um anel e o denominaremos como anel quociente.

Demonstração. Provemos que as operações estão bem definidas. Sejam $a, b, c, d \in A$ tal que $a \sim b$, $c \sim d$ e que $\bar{a} = \bar{b}$, $\bar{c} = \bar{d}$.

A soma está bem definida pois

$$\begin{aligned} \bar{a} = \bar{b} \text{ e } \bar{c} = \bar{d} &\Rightarrow b \in \bar{a} \text{ e } d \in \bar{c} \Rightarrow a - b \in I \text{ e } c - d \in I \Rightarrow \\ \underbrace{a - b}_{\in I} + \underbrace{c - d}_{\in I} &\in I \Rightarrow (a + c) - (b + d) \in I \Rightarrow \overline{a + c} = \overline{b + d}. \end{aligned}$$

Bem como o produto, uma vez que

$$\begin{aligned} a - b \in I \text{ e } c - d \in I &\Rightarrow a(\underbrace{c - d}_{\in I}) + (\underbrace{a - b}_{\in I})d \in I \Rightarrow \\ ac - ad + ad - bd &\in I \Rightarrow ac - bd \in I \Rightarrow \overline{a \cdot c} = \overline{b \cdot d}. \end{aligned}$$

Agora, verifiquemos as oito propriedades de anel, dados \bar{x}, \bar{y} e $\bar{z} \in \frac{A}{I}$ temos:

- i) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \overline{(x + y)} + \bar{z} = \overline{(x + y) + z} = \overline{x + (y + z)} = \bar{x} + \overline{(y + z)} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z});$
- ii) dado 0 de A , temos que $\bar{0} \in \frac{A}{I}$ e veja que $\bar{0} + \bar{x} = \overline{0 + x} = \bar{x};$
- iii) existe $-x \in A$ tal que $x + (-x) = 0$, logo $\overline{-x} \in \frac{A}{I}$ e veja que $\bar{x} + \overline{-x} = \overline{x + (-x)} = \bar{0};$
- iv) $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} = \overline{y + x} = \bar{y} + \bar{x};$
- v) $(\bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{z} = \overline{(x \cdot y)} \cdot \bar{z} = \overline{(x \cdot y) \cdot z} = \overline{x \cdot (y \cdot z)} = \bar{x} \cdot \overline{(y \cdot z)} = \bar{x} \cdot (\bar{y} \cdot \bar{z});$
- vi) $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \overline{(x + y)} \cdot \bar{z} = \overline{(x + y) \cdot z} = \overline{x \cdot z + y \cdot z} = \overline{x \cdot z} + \overline{y \cdot z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z};$
- vii) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y} = \overline{y \cdot x} = \bar{y} \cdot \bar{x}.$
- viii) dado 1 de A , temos que $\bar{1} \in \frac{A}{I}$ e veja que $\bar{1} \cdot \bar{x} = \overline{1 \cdot x} = \bar{x}.$ □

No que segue, apresentamos a definição e propriedades de aplicações especiais entre anéis. Uma função entre dois anéis, quando preserva as operações, recebe o nome de homomorfismo.

Definição 1.1.16 (homomorfismo). Sejam A e B dois anéis. Dizemos que a função $\phi: A \rightarrow B$ é um *homomorfismo de anéis* se $\forall a, b \in A$ tivermos:

- i. $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$
- ii. $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$
- iii. $\phi(1_A) = 1_B.$

Se ainda ϕ for uma função bijetora, diremos que ϕ é um *isomorfismo de anéis* e que A e B são *isomorfos* e denotaremos por $A \cong B$.

Observação 1.1.17. A primeira condição acima garante que $\phi(a - b) = \phi(a) - \phi(b)$, $\phi(-a) = -\phi(a)$ e que $\phi(0) = 0$, ou seja tais propriedades são válidas para todo homomorfismo de anéis.

A aplicação do anel A no anel B , que faz $a \mapsto 0$, é trivialmente um homomorfismo, chamado de *homomorfismo nulo*. Vejamos outros exemplos de homomorfismo de anéis.

Exemplo 1.1.18. Seja $I \subseteq A$ um ideal de um anel A . A aplicação

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow \frac{A}{I}, \\ x &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetor de anéis, chamada de *projeção canônica*. De fato, π é sobrejetora por construção e dados $x, y \in A$ temos que

$$i) \pi(x + y) = \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} = \pi(x) + \pi(y)$$

$$\text{ii) } \pi(x \cdot y) = \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y} = \pi(x) \cdot \pi(y)$$

$$\text{iii) } \pi(1) = \overline{1}.$$

Exemplo 1.1.19. Sejam A e B anéis, tal que $A \subseteq B$. As aplicações $i : A \hookrightarrow B$ e $\pi_j : A^n \rightarrow A$, que fazem $a \mapsto a$ e $(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) \mapsto a_j$, são homomorfismos de anéis, sendo i um homomorfismo injetivo, chamado de *inclusão* e π_j um homomorfismo sobrejetivo, chamado de *projeção da j -ésima coordenada*.

Definição 1.1.20 (Extensão). Sejam A e B dois anéis. Se existir um homomorfismo injetor $\phi : A \rightarrow B$, diremos que o anel B é uma *extensão* de A . Particularmente, quando $B \supseteq A$ a inclusão do exemplo anterior garante que B é uma extensão de A .

Na sequência, definimos um conjunto a partir de um homomorfismo. Tal conjunto será na verdade um ideal.

Definição 1.1.21. Seja $\phi : A \rightarrow B$ um homomorfismo entre os anéis A e B , definimos o *núcleo* de ϕ , como o seguinte conjunto

$$\ker \phi = \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}.$$

A respeito do núcleo de um homomorfismo de anéis temos alguns resultados essenciais, dados pela seguinte proposição.

Proposição 1.1.22. *Se $\phi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de anéis, então:*

- 1) $\ker \phi$ é um ideal de A ;
- 2) ϕ é injetora $\Leftrightarrow \ker \phi = \{0\}$.

Demonstração. Do fato que ϕ é homomorfismo implica que $0 \in \ker \phi$. Dados $a, b \in \ker \phi$ e $x \in A$, temos que

$$\begin{aligned} \phi(a + b) &= \phi(a) + \phi(b) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow a + b \in \ker \phi; \\ \phi(a \cdot x) &= \phi(a) \cdot \phi(x) = 0 \cdot \phi(x) = 0 \Rightarrow a \cdot x \in \ker \phi. \end{aligned}$$

Portando, $\ker \phi$ é um ideal de A . Agora, suponha que ϕ é injetora, tome $a \in \ker \phi$, assim $\phi(a) = 0 = \phi(0) \Rightarrow a = 0$, então $\ker \phi = \{0\}$. Por outro lado, suponha que $\ker \phi = \{0\}$ e considere $a, b \in A$ tais que $\phi(a) = \phi(b)$, logo

$$\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow \phi(a - b) = 0 \Rightarrow a - b \in \ker \phi \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b,$$

concluindo que ϕ é injetora. □

Definiremos a seguir, dois ideais com propriedades especiais.

Definição 1.1.23 (Ideais primos e maximais). Seja A um anel e I um ideal próprio, isto é, $I \subsetneq A$. Dizemos que:

- 1) I é um *ideal primo* se dados $x, y \in A$ tais que $xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$;
- 2) I é um *ideal maximal* se dado $J \subseteq A$ ideal, tal que $I \subseteq J \Rightarrow J = I$ ou $J = A$.

A respeito dos ideais primos, temos o seguinte resultado que relaciona um primo com seu ideal radical.

Proposição 1.1.24. *Seja $I \subseteq A$ um ideal primo de um anel A , então $\sqrt{I} = I$.*

Demonstração. A inclusão $I \subseteq \sqrt{I}$ é facilmente verificada. De fato, dado $a \in I$, basta tomar $1 \in \mathbb{N}$, afinal $a^1 \in I \Rightarrow a \in \sqrt{I}$.

Agora, dado $a \in \sqrt{I}$, por definição existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m \in I$. Como I é ideal primo temos que

$$a \in I \text{ ou } a^{m-1} \in I.$$

Em ambos os casos conclui-se que $a \in I$. □

O seguinte teorema caracteriza os ideais primos e maximais de um anel, e é uma ferramenta extremamente útil para trabalhar com esses objetos.

Teorema 1.1.25. *Sejam A um anel e I um ideal de A . Então:*

- 1) I é *próprio* se, e somente se, $A^\times \cap I = \emptyset$;
- 2) I é *ideal primo* se, e somente se, é *próprio* e $\frac{A}{I}$ é *domínio de integridade*;
- 3) I é *ideal maximal* se, e somente se, é *próprio* e $\frac{A}{I}$ é *corpo*.

Demonstração. Seja $I \subseteq A$ um ideal do anel A . Provemos as equivalências.

- 1) Suponha que I seja próprio, e considere, por absurdo, que existe $u \in A^\times \cap I$. Então, $1 = u \cdot u^{-1} \in I$, pela definição de ideal. Assim, dado $a \in A$, temos que $a = a \cdot 1 \in I$, garantindo que $I = A$, uma contradição. Por outro lado, se $A^\times \cap I = \emptyset$, temos que $1 \notin I$, afinal $1 \in A^\times$, portanto $I \subsetneq A$.

- 2) Para a ida, tome $\bar{x}, \bar{y} \in \frac{A}{I}$ tal que $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0}$, então

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{0} \Rightarrow xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I \Rightarrow \bar{x} = \bar{0} \text{ ou } \bar{y} = \bar{0},$$

implicando que $\frac{A}{I}$ é domínio. Reciprocamente, se $x, y \in A$ tais que $x \cdot y \in I$, tem-se que

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \bar{0} \text{ ou } \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

Logo, I é ideal primo.

3) Suponha I maximal e seja $\bar{u} \in \frac{A}{I}$, em que $\bar{u} \neq \bar{0}$, logo $u \notin I$. Definimos o ideal $J = I + (u)$. Perceba, que $I \subsetneq J$, como I é maximal temos que $J = A$. Assim

$$1 = x + au, \text{ onde } x \in I \text{ e } a \in A.$$

Tomando a respectiva classe temos

$$\bar{1} = \bar{x} + \bar{a}\bar{u} \Rightarrow \bar{1} - \bar{a}\bar{u} = \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{u} = \bar{1},$$

concluindo que $\frac{A}{I}$ é um corpo. Para a volta, suponha que exista um ideal J , tal que $I \subsetneq J$. Tomemos $x \in J \setminus I$, logo $\bar{x} \neq \bar{0}$, como $\frac{A}{I}$ é corpo existe \bar{y} tal que

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1} \Rightarrow \overline{xy - 1} = \bar{0} \Rightarrow xy - 1 \in I.$$

Defina $v := xy - 1 \in I$. Veja que $v \in J$, afinal $I \subsetneq J$. Com isso,

$$1 = xy - v \in J \Rightarrow J = A.$$

Portanto, I é ideal maximal. □

Uma consequência deste teorema é o seguinte.

Corolário 1.1.26. *Todo ideal maximal de um anel A é também ideal primo.*

Demonstração. Decorre diretamente do teorema anterior e da Proposição 1.1.8. □

Abaixo temos dois lemas simples, que posteriormente serão utilizados, cuja verificação de ambos é direta.

Lema 1.1.27. *Sejam $\phi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis e I_B um ideal do anel B . Então, $\phi^{-1}(I_B)$ é um ideal de A .* □

Lema 1.1.28. *Sejam $\phi : A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis e I_A um ideal do anel A . Então, $\phi(I_A)$ é um ideal de B .* □

O seguinte teorema, que identifica os ideais de um anel com os ideais do seu anel quociente, será de suma importância no decorrer deste trabalho

Teorema 1.1.29 (Teorema da Correspondência). *Sejam A um anel e I um ideal. Existe uma correspondência biunívoca entre os ideais J de A que contém I , e os ideais \bar{J} do anel $\frac{A}{I}$.*

Demonstração. Definimos os seguintes conjuntos:

$$W := \{\text{ideais } J \text{ de } A \mid I \subseteq J\} \text{ e } U := \left\{ \text{ideais } \bar{J} \text{ de } \frac{A}{I} \right\}.$$

Considerando a projeção canônica π , tomemos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow W \\ \bar{J} &\longmapsto \pi^{-1}(\bar{J}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.1.27, $\pi^{-1}(\bar{J})$ é um ideal de A . Dado $a \in I$, sabemos que $\pi(a) = \bar{0} \in \bar{J}$, logo $I \subseteq \pi^{-1}(\bar{J})$ e dessa forma ϕ está bem definida. Agora, tomemos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : W &\longrightarrow U \\ J &\mapsto \pi(J). \end{aligned}$$

A projeção π é sobrejetora, então o Lema 1.1.28 garante que α está bem definida. Prove-mos que α é a inversa de ϕ . De fato, dados $J \in W$ e $\bar{J} \in U$ quaisquer, temos que

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \phi)(\bar{J}) &= \alpha(\pi^{-1}(\bar{J})) = \pi(\pi^{-1}(\bar{J})); \\ (\phi \circ \alpha)(J) &= \phi(\pi(J)) = \pi^{-1}(\pi(J)). \end{aligned}$$

Das definições de imagem e imagem inversa de um conjunto segue que $\pi(\pi^{-1}(\bar{J})) \subseteq \bar{J}$ e que $J \subseteq \pi^{-1}(\pi(J))$. Tome $x \in \bar{J} \subseteq \frac{A}{I}$, assim

$$\exists x_0 \in A; \pi(x_0) = x \Rightarrow \pi(x_0) \in \bar{J} \Rightarrow x_0 \in \pi^{-1}(\bar{J}) \Rightarrow x \in \pi(\pi^{-1}(\bar{J})) \Rightarrow \bar{J} \subseteq \pi(\pi^{-1}(\bar{J})).$$

Logo, $\pi(\pi^{-1}(\bar{J})) = \bar{J}$. Por fim, dado $y \in \pi^{-1}(\pi(J))$, temos que $\pi(y) \in \pi(J)$, implicando que $\pi(y) = \pi(j)$, para algum $j \in J$. Então

$$\bar{y} = \bar{j} \Rightarrow y - j \in I \subseteq J \Rightarrow y - j \in J.$$

Assim, $y = j + (y - j) \in J$, ou seja, $\pi^{-1}(\pi(J)) \subseteq J$. Portanto, $(\alpha \circ \phi)(\bar{J}) = \bar{J}$ e $(\phi \circ \alpha)(J) = J$, concluindo que ϕ é uma bijeção entre U e W . \square

Definição 1.1.30. Sejam R e A dois anéis. Dizemos que o anel A é uma R -álgebra quando existe um homomorfismo de anéis $\varphi : R \rightarrow A$. Também diremos que A é uma R -álgebra finitamente gerada se existir um homomorfismo sobrejetor ϕ da seguinte forma

$$\phi : R[x_1, x_2, \dots, x_n] \twoheadrightarrow A.$$

A partir de dois anéis é possível definir o seguinte grupo.

Definição 1.1.31. Sejam A e B dois anéis. Denotamos por $Hom(A, B)$ o conjunto de todos os homomorfismos de A em B . Tal conjunto, com a operação soma de função, é um grupo e será chamado de *grupo dos homomorfismos de A em B* .

Teorema 1.1.32 (Propriedade Universal do Quociente). *Sejam A e B dois anéis e $I \subseteq A$ um ideal de A . Considerando o conjunto*

$$Hom_I(A, B) = \{\eta \in Hom(A, B) \mid \eta(I) = 0\},$$

então temos uma bijeção

$$\begin{array}{ccc} Hom(A/I, B) & \xrightarrow{\cong} & Hom_I(A, B) \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ \pi \\ \bar{\phi} & \longleftarrow & \phi, \end{array}$$

em que $\bar{\phi}$ é definido por

$$\begin{aligned}\bar{\phi} : A/I &\rightarrow B \\ \bar{a} &\mapsto \phi(a).\end{aligned}$$

Demonstração. Denotemos por f a aplicação

$$\begin{aligned}f : \text{Hom}(A/I, B) &\longrightarrow \text{Hom}_I(A, B) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ \pi.\end{aligned}$$

Observemos que f está bem definida. De fato, dado $\psi \in \text{Hom}(A, B)$, certamente $\psi \circ \pi \in \text{Hom}(A, B)$ e dado $x \in I$ temos que $(\psi \circ \pi)(x) = \psi(\pi(x)) = \psi(\bar{0}) = 0$, logo $\psi \circ \pi \in \text{Hom}_I(A, B)$. Agora definimos a aplicação g

$$\begin{aligned}g : \text{Hom}_I(A, B) &\longrightarrow \text{Hom}(A/I, B) \\ \phi &\longmapsto \bar{\phi}.\end{aligned}$$

Provemos que g está bem definida, isto é, dado $\phi \in \text{Hom}_I(A, B)$ deveremos ter que $\bar{\phi} \in \text{Hom}(A/I, B)$. Primeiramente temos que $\bar{\phi}$ está bem definida, afinal

$$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow a - b \in I \Rightarrow \phi(a - b) = 0 \Rightarrow \phi(a) = \phi(b) \Rightarrow \bar{\phi}(\bar{a}) = \bar{\phi}(\bar{b}).$$

Dados $\bar{x}, \bar{y} \in A/I$, temos que

- i) $\bar{\phi}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{\phi}(\overline{x + y}) = \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = \bar{\phi}(\bar{x}) + \bar{\phi}(\bar{y});$
- ii) $\bar{\phi}(\bar{x} \cdot \bar{y}) = \bar{\phi}(\overline{x \cdot y}) = \phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y) = \bar{\phi}(\bar{x}) \cdot \bar{\phi}(\bar{y});$
- iii) $\bar{\phi}(\bar{1}) = \phi(1) = 1.$

Então, $\bar{\phi} \in \text{Hom}(A/I, B)$, garantindo que g está bem definida. Por fim, verifiquemos que $f \circ g = g \circ f = \text{Id}$. Tome $\psi \in \text{Hom}(A/I, B)$ e $\phi \in \text{Hom}_I(A, B)$, logo

$$(f \circ g)(\phi) = f(\bar{\phi}) = \bar{\phi} \circ \pi \quad \text{e} \quad (g \circ f)(\psi) = g(\psi \circ \pi) = \overline{\psi \circ \pi}.$$

Em fim, temos

$$(\bar{\phi} \circ \pi)(u) = \bar{\phi}(\pi(u)) = \bar{\phi}(\bar{u}) = \phi(u) \quad \text{e} \quad (\overline{\psi \circ \pi})(\bar{v}) = (\psi \circ \pi)(v) = \psi(\pi(v)) = \psi(\bar{v}),$$

para todo $u \in A$ e todo $\bar{v} \in A/I$, ou seja, $(f \circ g)(\phi) = \phi$ e $(g \circ f)(\psi) = \psi$. Portanto, f é uma bijeção. \square

Observação 1.1.33. Podemos interpretar tal teorema da seguinte forma: dado um homomorfismo $\phi : A \rightarrow B$ tal que $I \subseteq \ker \phi$, existe um único homomorfismo $\bar{\phi} : A/I \rightarrow B$, em que $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$. Isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\phi} & B \\
 \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\phi} & \\
 A/I & &
 \end{array}$$

Feito isso, como consequência do teorema anterior, provamos o importante teorema do isomorfismo, que nos permite construir um isomorfismo entre dois anéis, a partir de um dado homomorfismo.

Corolário 1.1.34 (Teorema do Isomorfismo). *Seja $\phi: A \rightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor entre os anéis A e B , então temos que*

$$\frac{A}{\ker \phi} \cong B.$$

Demonstração. A Propriedade Universal do Quociente nos garante a existência do homomorfismo $\bar{\phi}$, dado por

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}: A/\ker \phi &\rightarrow B \\
 \bar{a} &\mapsto \phi(a).
 \end{aligned}$$

Dado $b \in B$ qualquer, existe $a \in A$ tal que $\phi(a) = b$, afinal ϕ é sobrejetora. Assim, $\bar{\phi}(\bar{a}) = \phi(a) = b$, resultando que $\bar{\phi}$ também é sobrejetora. Agora, veja que

$$\bar{x} \in \ker \bar{\phi} \Leftrightarrow \bar{\phi}(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker \phi \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}.$$

Logo, $\ker \bar{\phi} = \{\bar{0}\}$, implicando que $\bar{\phi}$ é injetora. Portanto, $\bar{\phi}$ é um isomorfismo e, por sua vez, $A/\ker \phi \cong B$. \square

No próximo exemplo, construiremos um isomorfismo entre um anel A e um anel quociente do anel de polinômios em n variáveis com coeficientes em A .

Exemplo 1.1.35. Sejam A um anel e $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ um ponto fixado. Temos o seguinte homomorfismo ϕ (o homomorfismo de avaliação em a)

$$\begin{aligned}
 \phi: A[x_1, \dots, x_n] &\rightarrow A \\
 p &\mapsto p(a).
 \end{aligned}$$

Considere o ideal $I := (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$. Tomando $f \in I$, tal polinômio será da seguinte forma $f = q_1(x_1 - a_1) + q_2(x_2 - a_2) + \dots + q_n(x_n - a_n)$, onde $q_i \in A[x_1, \dots, x_n]$. Assim,

$$\phi(f) = q_1(a)(a_1 - a_1) + q_2(a)(a_2 - a_2) + \dots + q_n(a)(a_n - a_n) = 0 \Rightarrow f \in \ker \phi.$$

Pelo Teorema 1.1.32, existe o homomorfismo $\alpha := \bar{\phi}$ dado por

$$\begin{aligned}
 \alpha: \frac{A[x_1, \dots, x_n]}{I} &\rightarrow A \\
 \bar{p} &\mapsto p(a).
 \end{aligned}$$

Notemos que α é um isomorfismo. Isso é garantido verificando que o homomorfismo β é seu inverso

$$\beta : A \rightarrow \frac{A[x_1, \dots, x_n]}{I}$$

$$v \mapsto \bar{v}.$$

Perceba que \bar{v} é a classe do polinômio constante v . Seja $v \in A$, logo $(\alpha \circ \beta)(v) = \alpha(\bar{v}) = v(a)$, como $v \in A$, temos que $v(a) = v$, então $\alpha \circ \beta = Id$. Para o outro lado, notemos que

$$\begin{aligned} x_i - a_i &\in (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n), \text{ com } i = 1, \dots, n \\ \Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) - p(a_1, \dots, a_n) &\in I, \forall p \in A[x_1, \dots, x_n] \\ \Rightarrow \overline{p(x_1, \dots, x_n)} &= \overline{p(a_1, \dots, a_n)} \text{ no anel } \frac{A[x_1, \dots, x_n]}{I}. \end{aligned} \quad (1)$$

Por fim, dado $\bar{p} \in \frac{A[x_1, \dots, x_n]}{I}$, temos

$$(\beta \circ \alpha)(\bar{p}) = \beta(p(a)) = \overline{p(a)} \stackrel{(1)}{=} \bar{p} \Rightarrow (\beta \circ \alpha)(\bar{p}) = \bar{p} \Rightarrow \beta \circ \alpha = Id.$$

Portanto, de fato α é um isomorfismo, ou seja

$$\frac{A[x_1, \dots, x_n]}{(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)} \cong A.$$

A partir de um grupo e um conjunto não vazio podemos definir uma operação binária, que é compatível a operação do grupo. Tal aplicação recebe o nome de ação.

Definição 1.1.36 (Ação). Sejam G um grupo e $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Diremos que a aplicação $\mu : G \times X \rightarrow X$ é uma *ação algébrica* de G em X se:

- i) $\mu(1, x) = x$, para todo $x \in X$;
- ii) $\mu(a \cdot b, x) = \mu(a, \mu(b, x))$, para todos $a, b \in G$ e $x \in X$.

Quando a ação μ em contexto for evidente, adotaremos a seguinte notação: $\mu(a, x) = a \cdot x$. A seguir, veremos alguns resultados que dizem respeito a teoria de grupos.

Lema 1.1.37.

a) *Sejam G um grupo abeliano e H um subgrupo. Se G/H é abeliano livre. Então,*

$$G = H \oplus K, \text{ onde } K \text{ é um subgrupo de } G, \text{ tal que } K \cong G/H$$

b) *Se G é um grupo abeliano livre de posto finito. Então, todo subgrupo de G é abeliano livre de posto menor ou igual ao de G . \square*

A prova de ambos os resultados acima não será apresentada neste trabalho, porém podem ser vistas, respectivamente, em [13] (Cor. 153) e [10] (Prop. 9.13).

Proposição 1.1.38. *Seja G um grupo abeliano aditivo finitamente gerado e livre de torção (i.e. O zero é o único elemento de ordem finita). Então, G é um grupo abeliano livre de posto finito, ou seja, $G \cong \mathbb{Z}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Provemos, primeiramente que existem um inteiro não nulo ℓ e um conjunto linearmente independente finito $H \subseteq G$, tais que $\ell G \subseteq \mathbb{Z}H$ ($\mathbb{Z}H$ denota o subgrupo gerado por H). Provemos este fato por indução sobre a quantidade de elementos que geram G . Suponha que G tenha apenas um gerador, desta forma, tome $\ell = 1$, $H = \{o\}$ e veja que $1 \cdot G \subseteq \mathbb{Z}H$, além disso H é linearmente independente pelo fato que G é de torção livre. Como hipótese de indução, suponha que a afirmação seja válida para G com $n - 1$ geradores. Prosseguindo, suponha que o conjunto $T = \{o_1, \dots, o_n\}$ gera G , caso o conjunto T for linearmente independente, basta tomar $H = T$ e $\ell = 1$. Caso contrário, a equação $\gamma_1 o_1 + \dots + \gamma_n o_n = 0$, implica que ao menos um coeficiente é não nulo, suponho sem perda de generalidade, que $\gamma_n \neq 0$. Tome o grupo G' gerado por $\{o_1, \dots, o_{n-1}\}$ e perceba que $\gamma_n o_n \in G'$. A hipótese de indução garante que existe um inteiro ℓ' e um conjunto linearmente independente finito $H \subseteq G'$, tais que $\ell' G' \subseteq \mathbb{Z}H$. Escolha $\ell = \gamma_n \ell'$ e como T gera G temos, para todo $g \in G$ que

$$\ell g = \gamma_n \ell' (b_1 o_1 + \dots + b_n o_n) = \ell' \underbrace{(\gamma_n b_1 o_1 + \dots + \gamma_n b_{n-1} o_{n-1})}_{\in G'} + \ell' \underbrace{(b_n \gamma_n o_n)}_{\in G'},$$

implicando que ambos os termos da esquerda estejam em $\ell' G' \subseteq \mathbb{Z}H$. Portanto, $\ell g \in \mathbb{Z}H$, para todo $g \in G$, verificando o resultado.

Agora, assumamos que existam $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $H \subseteq G$, de acordo com a afirmação acima. Defina o homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G$, tal que $\varphi(g) = \ell g$. Note que $\varphi(g) = 0$ se, e somente se, $\ell g = 0$ que só irá ocorrer para $g = 0$, afinal G é livre de torção. Concluindo que φ é injetora, isto é, $G \cong \varphi(G)$. Além disso, $\varphi(G) = \ell G$, por definição, sabemos que $\ell G \subseteq \mathbb{Z}H$, ou seja, $G \cong \ell G \subseteq \mathbb{Z}H$. Em fim, temos que G é um subgrupo do grupo abeliano livre de posto finito $\mathbb{Z}H$, pelo Lema 1.1.37, segue o resultado. \square

1.2 Localização e anéis normais

Nesta seção, estudamos alguns objetos algébricos especiais, como os anéis normais. Posteriormente, tais anéis definirão as variedades tóricas normais. Iniciamos pela seguinte relação de equivalência, que generaliza o conceito de fração.

Definição 1.2.1. Sejam A um anel e $S \subseteq A$ um subconjunto fechado pela operação produto, com $1 \in S$. Definimos a relação \equiv em $A \times S$

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S \text{ tal que } (at - bs)u = 0.$$

Proposição 1.2.2. *A relação “ \equiv ” em $A \times S$, nas condições da definição anterior, é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Dados $(a, s) \in A \times S$, temos que $(as - sa)u = 0$ para todo $u \in S$, garantindo a reflexividade. Caso $(a, s) \equiv (b, t)$, existe $u \in S$ tal que $(at - bs)u = 0$. Note que:

$$(at - bs)u = 0 \Leftrightarrow -1(at - bs)u = 0 \Leftrightarrow (bs - at)u = 0,$$

resultando que $(b, t) \equiv (a, s)$. Por fim, se $(a, s) \equiv (b, t)$ e $(b, t) \equiv (c, r)$, então existem $u, v \in S$ tais que $(at - bs)u = 0$ e $(br - ct)v = 0$, implicando que $atu = bsu$ e $brv = ctv$. Logo,

$$brv = ctv \Rightarrow br = ct \text{ e } atu = bsu \Rightarrow atur = bsur = brsu,$$

substituindo br por ct na equação $atur = brsu$, nos dá que $(ar - cs)tu = 0$. Como $tu \in S$, concluímos que $(a, s) \equiv (c, r)$. \square

Definição 1.2.3. Sejam A um anel e S um subconjunto, não vazio de A , fechado pela operação produto, com $1 \in S$. Dizemos que $S^{-1}A$ é o conjunto das classes de equivalência de “ \equiv ” em $A \times S$. A classe que contém o elemento (a, s) será representada por $\frac{a}{s}$. Além disso, as seguintes operações

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at + bs}{st} \quad \text{e} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{ts},$$

definem em $S^{-1}A$ uma estrutura de anel (o zero deste anel é a classe $\frac{0}{1}$ e a unidade é a classe $\frac{1}{1}$). Tal anel é chamado de *anel de frações* ou *localização* de A com respeito a S .

A seguir, vejamos alguns exemplos de anéis de frações.

Exemplo 1.2.4 (Corpo de frações). Seja A um domínio de integridade e tomando $S = A \setminus \{0\}$. A localização de A com respeito a S será um corpo. De fato, como A é um domínio de integridade, naturalmente $S^{-1}A$ também será. Basta mostrarmos que um elemento não nulo em $S^{-1}A$ tem inverso multiplicativo. Dado $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$, com $a \neq 0$, dessa forma $a \in S$. Logo,

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1},$$

afinal $(as \cdot 1 - 1 \cdot sa)u = 0$, para todo $u \in S$. Além disso, $S^{-1}A$ é uma extensão de A . Com efeito, considere $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$ tal que $\varphi(x) = \frac{x}{1}$, a aplicação φ é um homomorfismo injetor. A verificação de que é um homomorfismo é direta e, para a injetividade, tome $x, y \in A$ tais que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Assim,

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} \Rightarrow (x, 1) \equiv (y, 1) \Rightarrow (x - y)u = 0 \text{ para algum } u \text{ em } S,$$

implicando que $x = y$, afinal $u \neq 0$ e A é domínio de integridade. Dessa forma, o corpo $S^{-1}A$ é uma extensão de A . Ainda, por propriedade universal é possível afirmar que esse é o “menor” corpo que contém o domínio A , isto é, se houver um corpo \mathbb{K} extensão de A , então \mathbb{K} contém um subcorpo isomorfo a $S^{-1}A$. Por fim, devido a sua unicidade, a menos de isomorfismo, o corpo $S^{-1}A$ será chamado de *corpo de frações* de A e o denotaremos por $\text{Frac}(A)$.

Exemplo 1.2.5. Seja P um ideal primo de um anel A qualquer. Se $a, b \in S := A \setminus P$, o produto ab também deve estar em S , caso contrário estaria em P , implicando na contradição de que $a \in P$ ou $b \in P$. Certamente $1 \in S$, pelo fato que P é próprio, permitindo tomarmos a localização $A_P := S^{-1}A$. Verifiquemos que A_P é um *anel local*, isto é, que tem apenas um ideal maximal. De fato, o conjunto

$$M = \left\{ \frac{a}{s} \in A_P \mid a \in P \right\},$$

é trivialmente um ideal de A_P . Considere que exista um ideal $I \subseteq A_P$, tal que $M \subseteq I$. Se $M \neq I$, existe $\frac{x}{y} \in I \setminus M$. Logo, $x \notin P$, garantindo que $x, y \in S$. Dessa forma, $\frac{x}{y}$ é uma unidade, pelo Teorema 1.1.25, temos que $I = A_P$ e, por sua vez, que M é um ideal maximal. Supondo que exista um segundo ideal maximal $Q \neq M$, então Q deveria conter algum elemento que não está em M e pelos mesmos argumentos esse seria uma unidade, contradizendo o fato de Q ser maximal. Portanto, o ideal M é o único maximal do anel A_P , ou seja, A_P é um anel local e é dito *localização de P* .

Por fim, temos um anel de frações associado a um elemento do anel.

Exemplo 1.2.6. Dados A um anel e um elemento $h \in A$. Então, o anel $A_h := S^{-1}A$, em que $S = \{h^l \mid l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, está bem definido. O anel A_h recebe o nome de *localização de A em h* .

Prosseguindo, definimos o conceito de elemento integral e de normalização.

Definição 1.2.7 (Fecho integral e extensão integral). Seja $B \supseteq A$ uma extensão de anéis. Diremos que um elemento $b \in B$ é *integral* sobre A , se existe um polinômio mônico $p \in A[x]$, tal que $p(b) = 0$. Com isso, podemos definir o seguinte subconjunto

$$\hat{A} = \{b \in B \mid b \text{ é integral sobre } A\}$$

de B , que contém A . O conjunto $\hat{A} \subseteq B$ é nomeado de *fecho integral* ou *normalização* de A em B . Ainda, uma extensão de anéis $R \supseteq S$ é chamada de *extensão integral* se todo elemento de R é integral sobre S .

Na sequência, apresentaremos um resultado que nos auxiliará na compreensão desses objetos. A demonstração desse lema não será feita e pode ser encontrada em [16](Cap 8; Lem. 8.3.1 e Cor. 8.1.6).

Lema 1.2.8. *Sejam $B \supseteq A$ e $C \supseteq B$ extensões de anéis. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

- 1) *O fecho integral \hat{A} , de A em B , é um subanel de B que contém A .*
- 2) *Se $B \supseteq A$ e $C \supseteq B$ são extensões integrais. Então, $C \supseteq A$ é uma extensão integral.*

A seguir, definiremos os anéis normais. Tais objetos terão um papel essencial no estudo das variedades algébricas normais.

Definição 1.2.9 (Anel normal). Sejam A um domínio de integridade e $\mathbb{F} = \text{Frac}(A)$ o corpo de frações. Diremos que A é um *anel normal* ou *integralmente fechado* se A coincidir com seu fecho integral com relação a \mathbb{F} , ou seja, $A = \hat{A}$.

Observação 1.2.10. Dados A um domínio de integridade e $\mathbb{F} = \text{Frac}(A)$ seu corpo de frações. Notemos que o nome normalização de A em \mathbb{F} que \hat{A} recebe não é por acaso. Na verdade, \hat{A} é um anel normal. De fato, pela primeira parte do Lema 1.2.8, $N := \hat{A}$ é um anel tal que $A \subseteq N \subseteq \mathbb{F}$. Em particular o anel \mathbb{F} é uma extensão de N , então podemos tomar \hat{N} , o fecho integral de N em \mathbb{F} . Resultando na seguinte cadeia de extensões

$$A \subseteq \hat{A} = N \subseteq \hat{N} \subseteq \mathbb{F}.$$

Perceba que $N \supseteq A$ e $\hat{N} \supseteq N$ são ambas extensões integrais, pela segunda parte do Lema 1.2.8, temos que $\hat{N} \supseteq A$ é uma extensão integral. Dessa forma, todo elemento de \hat{N} pertence a \mathbb{F} e é integral sobre A , ou seja, $\hat{N} \subseteq \hat{A}$. Portanto, $\hat{A} = \hat{N} = \hat{\hat{A}}$, garantindo que \hat{A} é sempre um anel normal.

Neste momento, estamos interessados em estudar os domínios de fatoração única, que se relacionam com os anéis normais. Para isso, vejamos as seguintes definições.

Definição 1.2.11 (Irreduzível e DFU). Sejam A um anel e $r \in A$, tal que $r \neq 0$ e $r \notin A^\times$. O elemento r é dito *irreduzível* se sempre ocorre a seguinte implicação:

$$\text{Se } r = ab, \text{ para } a, b \in A \Rightarrow a \in A^\times \text{ ou } b \in A^\times.$$

Seja D um domínio de integridade. Então, D é um *domínio de fatoração única*, ou *DFU*, se todo elemento não nulo que não é uma unidade se expressa de forma única, a menos de unidades, como produto finito de elementos irreduzíveis.

Dito isso, estudamos o seguinte lema, que nos fornece uma classe de anéis normais.

Lema 1.2.12. *Todo DFU é um anel normal.*

Demonstração. Seja R um DFU. Em particular, é um domínio de integridade. Tome $u \in \hat{R}$, como R é de fatoração única, podemos escrever $u = \frac{p}{q}$, tal que $p, q \in R$, $q \neq 0$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, isto é, p, q não têm fatores em comuns a menos de unidades, basta tomar a fatoração de p e q e “cancelar” os fatores irreduzíveis iguais. Por definição, u é raiz de algum polinômio mônico em $R[x]$, dessa forma existem $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in R$ tais que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + \lambda_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + \lambda_1\frac{p}{q} + \lambda_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por $q^n \in R$

$$p^n + \lambda_{n-1}p^{n-1}q + \dots + \lambda_1pq^{n-1} + \lambda_0q^n = 0 \implies p^n = q(-\lambda_{n-1}p^{n-1} - \dots - \lambda_0q^{n-1}),$$

implicando que q tem fatores irreduzíveis em comum com p ou que q é uma unidade. Entretanto, o $\text{mdc}(p, q) = 1$. Concluindo, que q é uma unidade, garantindo que $u \in R$. \square

Uma consequência imediata deste lema, segue do fato que todo anel de polinômios sobre um corpo \mathbb{K} é *DFU*. Logo, o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é normal.

Por fim, apresentaremos um lema a respeito de anéis normais. O resultado a seguir será essencial na demonstração de um teorema do Capítulo 7.

Lema 1.2.13.

a) *Sejam R_α , α pertencente a um conjunto de índices J , domínios de integridade normais, com o mesmo corpo de frações \mathbb{K} . Então,*

$$\bigcap_{\alpha \in J} R_\alpha \text{ é normal.}$$

b) *Seja R um domínio de integridade normal, com o corpo de frações \mathbb{K} e $S \subseteq R$ um conjunto fechado pelo produto. Então, o anel $S^{-1}R$ é normal.*

Demonstração.

a) Seja $S = \bigcap_{\alpha \in J} R_\alpha$, certamente S é um domínio e $S \subseteq R_\alpha \subseteq \mathbb{K}$, para todo $\alpha \in J$. Considere $\mathbb{F} = \text{Frac}(S) \supseteq S$ e lembremos que este é o menor corpo que contém S . Logo, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$. Tome $s \in \mathbb{F}$, integral sobre S , assim existe $f \in S[x]$ tal que $f(s) = 0$. Da definição de S , temos que $f \in R_\alpha[x]$, $\forall \alpha$ e por hipótese, os anéis R_α são normais. Portanto, o elemento $s \in \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ será integral sobre R_α , implicando que $s \in \bigcap_{\alpha \in J} R_\alpha = S$.

b) Suponha que $k \in \mathbb{K}$ seja integral sobre $S^{-1}R$. Então, irá existir $r_0, \dots, r_{n-1} \in R$ e $s_0, \dots, s_{n-1} \in S$, tais que

$$k^n + \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}k^{n-1} + \dots + \frac{r_0}{s_0} = 0.$$

Considere $s = s_0 \cdots s_{n-1} \in S$, naturalmente temos que $\frac{s}{s_i} \in S$ e $s \frac{r_i}{s_i} \in R$, para todo i . Assim,

$$s^n k^n = \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} s^n k^{n-1} + \dots + \frac{r_0}{s_0} s^n = (sk)^n + s \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}} (sk)^{n-1} + \dots + s^n \frac{r_0}{s_0} = 0,$$

garantindo que $sk \in \mathbb{K}$ é integral sobre R . Logo, $sk \in R$, afinal R é normal. Note que

$$k = \frac{sk}{s} \in S^{-1}R \Rightarrow \text{o anel } S^{-1}R \text{ é normal.}$$

□

1.3 Topologia, função contínua e compactos

Nesta seção, apresentamos a definição de espaços topológicos junto de alguns outros conceitos, como o de função contínua e espaços compactos, tais objetos serão essenciais nos próximos capítulos.

Definição 1.3.1 (Topologia). Sejam X um conjunto não vazio e τ uma coleção de subconjuntos de X . O conjunto τ será chamado de *topologia* e o par (X, τ) será dito *espaço topológico* se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- i) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$;
- ii) Se $A_1, \dots, A_n \in \tau$, então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$;
- iii) Se $A_\lambda \in \tau$, com $\lambda \in L$, então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.

Nessas condições, os elementos de τ recebem o nome de *abertos* em X .

Um exemplo de espaço topológico é o espaço euclidiano (\mathbb{R}^n, τ) , em que \mathbb{R}^n goza da métrica usual e os conjuntos abertos de τ são aqueles que coincidem com seu interior. Mais precisamente, dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ está no *interior* do subconjunto $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, i.e. $a \in \text{int}(Y)$, se existe alguma bola aberta B , tal que $a \in B \subseteq Y$. Dito isso, é fácil perceber que um conjunto A é aberto se, e somente se, $A = \text{int}(A)$.

De forma geral, todo espaço métrico M admite uma topologia, no qual o interior de um conjunto é definido a partir a métrica, como acima.

Observamos, que o conceito de ponto interior pode ser definido de forma análoga para um espaço topológico (X, τ) qualquer, ou seja, não apenas para aqueles provenientes de espaços métricos. Nesse caso trocamos bola aberta por um aberto da coleção τ .

Em um espaço topológico (X, τ) qualquer, dizemos que o complementar de um aberto em X é um *fechado* em X , isto é, dado $A \in \tau$, o conjunto $F = A^c = X \setminus A$ é fechado. Denotaremos por τ^c o conjunto de todos os fechados de X . Temos a seguinte observação, utilizando os conjuntos fechados.

Observação 1.3.2. Seja (X, τ) um espaço topológico. Decorre da definição que os conjuntos X e \emptyset são abertos e fechados. Além disso, dados F_1, \dots, F_n fechados, em que $F_i = (A_i)^c$ e $A_i \in \tau$, então pelas leis de De Morgan temos

$$F_1 \cup \dots \cup F_n = (A_1)^c \cup \dots \cup (A_n)^c = (A_1 \cap \dots \cap A_n)^c \in \tau^c.$$

Agora, dada uma família de fechados $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$, onde $F_\lambda = (A_\lambda)^c$ e $A_\lambda \in \tau$, novamente as leis de De Morgan garantem que

$$\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} (A_\lambda)^c = \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right)^c \in \tau^c.$$

Com a observação acima, podemos estabelecer uma segunda definição de topologia, completamente equivalente, utilizando os fechados.

Definição 1.3.3. Sejam X um conjunto não vazio e $\bar{\tau}$ uma coleção de subconjuntos de X . O conjunto $\bar{\tau}$ recebe o nome de *topologia por fechados* se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- i) $X \in \bar{\tau}, \emptyset \in \bar{\tau}$;
- ii) Se $F_1, \dots, F_n \in \bar{\tau}$, então $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \bar{\tau}$;
- iii) Se $F_\lambda \in \bar{\tau}$, com $\lambda \in L$, então $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \bar{\tau}$.

Nessas condições, os elementos de $\bar{\tau}$ recebem o nome de *fechados* em X (e o complementar dos fechados são os abertos).

Para um subconjunto $W \subseteq X$, em que (X, τ) é um espaço topológico, podemos tomar uma *topologia induzida*, a partir de τ . Basta considerar que os conjuntos abertos de W são da forma $A_W = A \cap W$, onde $A \in \tau$. Tais conjuntos são chamados de *abertos relativos* e a reunião de todos eles será uma topologia em W . Naturalmente, os fechados em W serão expressos da mesma forma:

$$F_W = W \setminus A_W = W \setminus (A \cap W) = (W \setminus A) \cup \underbrace{(W \setminus W)}_{=\emptyset} = W \setminus A = W \setminus (X \setminus F) = F \cap W.$$

Agora, conseguimos definir os conceitos de função contínua e homeomorfismo.

Definição 1.3.4 (Função contínua). Uma aplicação $f : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ entre espaços topológicos, é dita *contínua* se, dado qualquer aberto A_2 de X_2 , tivermos que $f^{-1}(A_2)$ é um aberto em X_1 . Isto é, a imagem inversa de aberto é aberto. Ainda, se f for bijetora cuja função inversa é também contínua, diremos que X_1 e X_2 são *homeomorfos* e que f é um *homeomorfismo*.

Convencionamos chamar de espaço topológico, ou apenas espaço, o conjunto X , quando não houver ambiguidade com relação à topologia de (X, τ) .

A seguir, temos um lema com diversos resultados úteis a respeito de funções contínuas, cujas demonstrações serão omitidas aqui, porém podem ser encontradas em [11] e [9].

Lema 1.3.5. *Sejam X_1, \dots, X_n espaços topológicos (X_i representa o espaço (X_i, τ_i)). Então, são válidas as seguintes afirmações:*

- 1) Se $f : X_1 \rightarrow X_2$ e $g : X_2 \rightarrow X_3$ forem ambas funções contínuas, então a composição $g \circ f : X_1 \rightarrow X_3$ é contínua;
- 2) Se $f : X_1 \rightarrow X_2$ é uma função contínua e $Y \subseteq X_1$, então a restrição $f|_Y : Y \rightarrow X_2$ é contínua;
- 3) A função $f : X_1 \rightarrow X_2 \times X_3$, definida por $f(x) = (f_2(x), f_3(x))$ é contínua se, e somente se, as funções coordenadas $f_2 : X_1 \rightarrow X_2$ e $f_3 : X_1 \rightarrow X_3$ são ambas contínuas;
- 4) Seja E é um espaço vetorial normado sobre um corpo \mathbb{K} , em particular é um espaço métrico. Se as funções $f, g : X_1 \rightarrow E$ e $\alpha, \beta : X_1 \rightarrow \mathbb{K}$ são contínuas, com $\beta(x) \neq 0 \forall x \in X_1$, então as seguintes funções são contínuas

$$f + g : X_1 \rightarrow E, \quad \alpha \cdot f : X_1 \rightarrow E \quad e \quad \frac{\alpha}{\beta} : X_1 \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto f(x) + g(x) \quad x \mapsto \alpha(x)f(x) \quad x \mapsto \frac{\alpha(x)}{\beta(x)};$$

5) Considere o anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, com \mathbb{K} corpo. Diremos que uma função $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ é polinomial se existe um polinômio $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, tal que $p(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$. Toda função polinomial f é contínua.

Em seguida, apresentaremos a definição do fecho de um conjunto e também de ponto de acumulação.

Definição 1.3.6. Sejam X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subconjunto. Um ponto $a \in Y$, recebe o nome de *ponto aderente* a Y , se todo aberto A , contendo a , satisfizer $A \cap Y \neq \emptyset$. O conjunto dos pontos aderentes a Y , denotado por \bar{Y} , é chamado de *fecho* de Y . Um ponto $b \in Y$ leva o nome de *ponto de acumulação* de Y se todo aberto B , tal que $b \in B$, implicar que $B \cap (Y \setminus \{b\}) \neq \emptyset$. O conjunto dos pontos de acumulação de Y é denotado por Y' e os pontos que não são de acumulação são chamados de *isolados*.

Nas condições dessa definição, se a não é aderente a Y , então existe um aberto A que contém a , tal que $A \cap Y = \emptyset$ se, e somente se, $a \in A \subseteq X \setminus Y$, garantindo que $a \in \text{int}(X \setminus Y)$, logo $X \setminus \bar{Y} = \text{int}(X \setminus Y)$. Nos permitindo obter a seguinte equivalência para um subconjunto $F \subseteq X$:

$$F \text{ é fechado} \Leftrightarrow X \setminus F \text{ é aberto} \Leftrightarrow X \setminus F = \text{int}(X \setminus F) \Leftrightarrow X = F \cup \text{int}(X \setminus F) \Leftrightarrow F = \bar{F}.$$

Dessa forma, podemos dizer que um conjunto é fechado se coincide com seu fecho. Um subconjunto $D \subseteq X$ será dito *denso* em X se $\bar{D} = X$. Agora, mostremos o seguinte resultado

Proposição 1.3.7. *Seja X um espaço topológico. Tome um subconjunto $Y \subseteq X$, então*

$$\bar{Y} = Y \cup Y'.$$

Demonstração. Das definições acima, segue que as inclusões $Y \subseteq \bar{Y}$ e $Y' \subseteq \bar{Y}$ sempre ocorrem. Restando-nos ter de provar a inclusão $\bar{Y} \subseteq Y \cup Y'$. Dado $a \in \bar{Y}$, então para todo aberto A contendo o ponto a , temos que existe $x \in A \cap Y$. Note que, se $x = a \Rightarrow a \in Y$, caso contrário $x \neq a$ e, como $A \cap (Y - \{a\}) \neq \emptyset$, então $a \in Y'$. Em ambos os casos, $a \in Y \cup Y'$, como queríamos demonstrar. \square

Neste momento, exibiremos a definição de conjunto compacto. Tais conjuntos serão úteis posteriormente na demonstração de um teorema importante.

Definição 1.3.8. Sejam $K \subseteq X$ um subconjunto do espaço topológico X . Diremos que uma família de abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$, com L um conjunto de índices qualquer, é uma *cobertura* de K se

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Se existe $L' \subseteq L$, tal que $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda' \in L'} \subseteq \{A_{\lambda}\}_{\lambda \in L}$ e ainda

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda' \in L'} A_{\lambda'},$$

dizemos que $\{A_{\lambda'}\}_{\lambda' \in L'}$ é uma *subcobertura* de K . Estabelecemos que K é *compacto* se qualquer cobertura de K admitir uma subcobertura finita.

O teorema de Borel-Lebesgue, encontrado em [11], garante que nos espaços euclidianos, como \mathbb{R}^n , os conjuntos compactos são precisamente os fechados e limitados¹. Além disso, o autor mostra que o produto cartesiano finito de subconjuntos compactos é compacto.

Chamaremos de conjunto *discreto*, os conjuntos que só possuem pontos isolados. Vejamos um lema envolvendo conjuntos discretos e compacidade.

Lema 1.3.9. *Sejam X um espaço topológico e $C \subseteq X$ um subconjunto discreto. Então,*

C é compacto se, e somente se, C é finito.

Demonstração. Caso C for finito, é evidente que há uma subcobertura finita para qualquer cobertura de C . Por outro lado, recordemos que o fato de que C tem apenas pontos isolados, implica que para todo $x \in C$ existe um aberto $A_x \ni x$, tal que $A_x \cap C = \{x\}$. Veja que $\{A_x\}_{x \in C}$ é uma cobertura de C , afinal

$$C = \bigcup_{x \in C} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in C} A_x.$$

Suponha, por absurdo, que C não seja finito. Tome $C' \subsetneq C$, assim existe $b \in C \setminus C'$. Logo temos que $b \notin A_x$, para todo x em C' . Concluindo que

$$b \notin \bigcup_{x \in C'} A_x \Rightarrow C \not\subseteq \bigcup_{x \in C'} A_x.$$

Então, não existe nenhum subconjunto de C' que torne $\{A_x\}_{x \in C'}$ uma subcobertura de $\{A_x\}_{x \in C}$, entretanto tal fato é um absurdo, já que C é compacto por hipótese. \square

Em fim, enunciaremos um resultado que garante que funções contínuas levam compactos em compactos.

Proposição 1.3.10. *Seja $f : X_1 \rightarrow X_2$, uma função contínua entre dois espaços topológicos. Se $Q \subseteq X_1$ é um compacto em X_1 , então a imagem $f(Q)$ também é compacta em X_2 .*

Demonstração. Tome uma cobertura aberta $\{A_{\lambda}\}_{\lambda \in L}$ da imagem $f(Q)$, isto é,

$$f(Q) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_{\lambda}, \text{ tal que } A_{\lambda} \text{ é aberto de } X_2.$$

¹Lembremos que um subconjunto de um espaço métrico é limitado se existe alguma bola aberta contendo tal subconjunto.

Como f é contínua, temos que $f^{-1}(A_\lambda)$ é aberto para todo λ , implicando que o conjunto $Q \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(A_\lambda)$. Entretanto, Q é compacto, então existe uma subcobertura finita $f^{-1}(A_{\lambda_1}), \dots, f^{-1}(A_{\lambda_m})$ tal que

$$\begin{aligned} Q &\subseteq f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{\lambda_m}) \Rightarrow \\ f(Q) &\subseteq f(f^{-1}(A_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(A_{\lambda_m})) \\ &\subseteq A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_m}. \end{aligned}$$

Portanto, a imagem $f(Q)$ é compacta. □

Capítulo 2

Teorema da base de Hilbert

Neste capítulo estudaremos exclusivamente uma classe de anéis, os anéis noetherianos. Tais objetos têm uma estrutura bem familiar, que irá nos auxiliar no estudo dos anéis de polinômios, por meio de um crucial resultado, chamado de Teorema da Base de Hilbert.

2.1 Anéis noetherianos

Definição 2.1.1. Um anel A será dito *Noetheriano* se satisfazer alguma das três afirmações equivalentes:

- i) Todo ideal I do anel A é finitamente gerado.
- ii) Toda cadeia ascendente de ideais de A estabiliza, ou seja, dada uma cadeia de ideais $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de tal forma que

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots,$$

então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $I_{i+1} = I_j, \forall j > i$.

- iii) Toda coleção não vazia de ideais possui um elemento maximal com relação à inclusão.

A seguir, verificamos que essa definição está bem posta, ou seja, que as três afirmações são equivalentes.

Demonstração. (i \Rightarrow ii) Seja $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma cadeia ascendente de ideais de A , definimos $J = \bigcup_j I_j$ e verificamos que J é um ideal:

- $0 \in I_j \subseteq J \Rightarrow 0 \in J$;
- Dados quaisquer $a, b \in J$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a, b \in I_k$, logo $a + b \in I_k \subseteq J \Rightarrow a + b \in J$;
- Dado $c \in J$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c \in I_m$, logo $\forall x \in A$ temos $cx \in I_m \subseteq J \Rightarrow cx \in J$.

Como J é ideal por hipótese $J = (a_1, \dots, a_r)$, $a_i \in A$, dessa forma existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_1, \dots, a_r \in I_{j_0}$, implicando que

$$J = (a_1, \dots, a_r) \subseteq I_{j_0} \subseteq J \Rightarrow I_{j_0} = J.$$

Agora, perceba que, dado $j \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0$, temos que $I_{j_0} \subseteq I_j \subseteq J = I_{j_0}$, portanto $I_j = I_{j_0}, \forall j > j_0$.

(ii \Rightarrow iii) Seja C uma coleção não vazia de ideais de A , de tal forma que não exista um elemento maximal com relação à inclusão em C . Como $C \neq \emptyset$, existe $I_1 \in C$ tal que I_1 não é o maximal, ou seja, $\exists I_2 \in C$ tal que $I_1 \subsetneq I_2$. Suponha que exista $I_1, I_2, \dots, I_n \in C$ de forma que $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_n$, pela definição de C sabemos que I_n não é maximal, então $\exists I_{n+1} \in C$ tal que

$$I_n \subsetneq I_{n+1} \Rightarrow I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq I_n \subsetneq I_{n+1} \subsetneq \dots, \forall n \in \mathbb{N},$$

logo $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma cadeia ascendente de ideais que não estabiliza.

(iii \Rightarrow i) Sejam I um ideal de A e S_I um conjunto definido por

$$S_I := \{J \text{ ideais de } A \mid J \subseteq I \text{ e } J \text{ é finitamente gerado}\}.$$

Veja que $S_I \neq \emptyset$, afinal $(0) \subseteq I$ e (0) é finitamente gerado, logo S_I por hipótese admite um elemento maximal; seja M o maximal de S_I , naturalmente $M \subseteq I$. Suponha, por absurdo, que $I \not\subseteq M$, então existe $x \in A$ tal que $x \in I$ e $x \notin M$. Como M é finitamente gerado, temos que o ideal $M + (x)$ também será. Perceba que $M + (x) \subseteq I$, afinal $M \subseteq I$ e $(x) \subseteq I$. Portanto, $M + (x) \in S_I$. Note que $M \subsetneq M + (x)$, já que $x \notin M$, contradizendo o fato de que M é o maximal de S_I . Implicando que $I = M$, garantindo que I é finitamente gerado. \square

Com essa definição em mãos, percebemos que a estrutura de um anel noetheriano é bem familiar, na verdade concluímos que a maioria dos anéis conhecidos são noetherianos. Por exemplo, observamos facilmente que todo corpo \mathbb{K} é noetheriano, já que os únicos ideais de um corpo são o (0) e (1) . Os *domínios de ideais principais (D.I.P.)* são os anéis cujo todos os ideais são principais, no qual um ideal recebe o nome de *principal* se é gerado por apenas um elemento. Nesse caso, todo D.I.P. é um anel noetheriano.

Os anéis de polinômios são objetos algébricos fundamentais nesse estudo, sendo de suma importância que esses anéis tenham boas propriedades, como as de um anel noetheriano. O Teorema da Base de Hilbert, que mostraremos a seguir, fornece uma condição necessária para que o anel de polinômios seja noetheriano.

Teorema 2.1.2 (Teorema da base de Hilbert). *Seja A um anel noetheriano, então $A[x]$ é noetheriano.*

Demonstração. Seja $I \neq (0)$ um ideal qualquer de $A[x]$, provaremos que I é finitamente gerado. Para todo inteiro $m \geq 0$ definimos o conjunto:

$$J_m = \{a \in A \mid a \text{ é coeficiente líder de algum } f(x) \in I \text{ onde } \partial(f(x)) = m\} \cup \{0\}.$$

Verifica-se que J_m é um ideal de A para todo m . De fato,

- $0 \in J_m$ por definição;
- Dados $a, b \in J_m$, tomemos os respectivos polinômios $f(x), g(x) \in I$ de grau m com coeficientes líderes a, b . Certamente $f(x) + g(x) \in I$ e $\partial(f(x) + g(x)) \leq m$, se $\partial(f(x) + g(x)) = m$, então $a + b \in J_m$, caso contrário $\partial(f(x) + g(x)) < m$, implicando que $a + b = 0 \in J_m$;
- Dados $y \in A$, $c \in J_m$ e $u(x) \in I$ o polinômio de grau m com coeficiente líder c , se $yc \neq 0$, então $\partial(yu(x)) = m$ e $yu(x) \in I$, logo $yc \in J_m$, por outro lado se $yc = 0$, então $yc \in J_m$.

Perceba que dado $f(x) \in I$ o polinômio $xf(x)$ pertence a I e tem o mesmo coeficiente líder de $f(x)$. Logo,

$$J_m \subseteq J_{m+1}, \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por hipótese A é noetheriano, então a cadeia ascendente de ideais acima é estacionária, isto é, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m > m_0, J_{m+1} = J_{m_0}$. Para cada $m \in \{0, 1, \dots, m_0\}$ sabemos que $J_m = (\alpha_1^m, \alpha_2^m, \dots, \alpha_r^m)$, com $\alpha_k^m \in A$ e k variando de $1, \dots, r$. Cada α_k^m tem seu respectivo polinômio $Q_k^m(x) \in I$, de grau m , cujo α_k^m é o seu coeficiente líder. Dito isso, definimos o conjunto:

$$S_m = \bigcup_{k=1}^r Q_k^m(x).$$

Veja que S_m é um conjunto finito, afinal para cada m existe um número finito r de geradores do ideal J_m . Ainda, tomemos o conjunto $S := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{m_0}$. Como cada S_m é finito certamente S também é. Do fato que $S \subseteq I$, temos que $(S) \subseteq I$ e mostremos que $I \subseteq (S)$.

Dado $f(x) \in I$, faremos uma indução sobre $\partial(f(x)) = n$ para garantir que $f(x) \in (S)$. Se $n = 0$, então $f(x) = a$ e $a \in J_0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_r^0)$, nesse caso $Q_k^0(x) = \alpha_k^0, \forall k$, implicando que $S_0 = \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_r^0\} \subseteq S$, e conseqüentemente $f(x) = a \in (S)$. Suponha que, dado $g(x) \in I$ tal que $\partial(g(x)) < n$, então $g(x) \in (S)$ (perceba que essa é a hipótese de indução). Agora temos dois casos a considerar:

- Se $0 < n \leq m_0$, seja C_f o coeficiente líder de $f(x)$, logo $C_f \in J_n$, então

$$C_f = t_1 \alpha_1^n + t_2 \alpha_2^n + \dots + t_{r_1} \alpha_{r_1}^n, \text{ com } t_k \in A \text{ e } k \text{ variando em } 1, \dots, r_1,$$

e tomemos então o seguinte polinômio

$$h(x) := t_1 Q_1^n(x) + t_2 Q_2^n(x) + \dots + t_{r_1} Q_{r_1}^n(x).$$

Como $Q_k^n(x) \in S, \forall k$, temos que $h(x) \in (S)$. Além disso, cada termo $t_k Q_k^n(x)$ é da forma $t_k \alpha_k^n x^n + p_k(x)$, onde $p_k(x)$ é algum polinômio de grau $n - 1$. Logo, colocando x^n em evidência em $h(x)$, verificamos que o coeficiente líder de $h(x)$ é C_f e ainda que $\partial(h(x)) = n$.

- Se $m_0 < n$, sabemos que $J_n = J_{m_0}$, seja C_f o coeficiente líder de $f(x)$, logo $C_f \in J_{m_0}$, então

$$C_f = t_1\alpha_1^{m_0} + t_2\alpha_2^{m_0} + \cdots + t_{r_2}\alpha_{r_2}^{m_0}, \text{ com } t_k \in A \text{ e } k \text{ variando em } 1, \dots, r_2,$$

e tomemos então o seguinte polinômio

$$h(x) := t_1x^{n-m_0}Q_1^{m_0}(x) + t_2x^{n-m_0}Q_2^{m_0}(x) + \cdots + t_{r_2}x^{n-m_0}Q_{r_2}^{m_0}(x).$$

Como $Q_k^n(x) \in S, \forall k$, temos que $h(x) \in (S)$. Além disso, cada termo da forma $t_kx^{n-m_0}Q_k^{m_0}(x)$ pode ser reescrito como $t_kx^{n-m_0}\alpha_k^{m_0}x^{m_0} + p_k(x)$, onde $p_k(x)$ é algum polinômio de grau $n-1$. Note que,

$$t_kx^{n-m_0}\alpha_k^{m_0}x^{m_0} + p_k(x) = t_k\alpha_k^{m_0}x^{(n-m_0+m_0)} + p_k(x) = t_k\alpha_k^{m_0}x^n + p_k(x).$$

Assim, colocando x^n em evidência em $h(x)$, verificamos que o coeficiente líder de $h(x)$ é C_f e ainda que $\partial(h(x)) = n$.

Em ambos os casos encontramos um polinômio $h(x)$ tal que $\partial(h(x)) = n$ e seu coeficiente líder é igual ao de $f(x)$. Dito isso, tomando $p(x) := f(x) - h(x)$, vemos que $p(x) \in I$ e $\partial(p(x)) < n$, então pela hipótese de indução $p(x) \in (S)$. Por fim

$$p(x) = f(x) - h(x) \Rightarrow f(x) = \underbrace{h(x)}_{\in(S)} + \underbrace{p(x)}_{\in(S)} \Rightarrow f(x) \in (S).$$

Portanto, $I \subseteq (S) \Rightarrow I = (S)$, como S é finito podemos concluir que I é um ideal finitamente gerado de $A[x]$. \square

A seguir, temos um corolário imediato desse teorema, que nos diz quando o anel de polinômios de r variáveis é noetheriano.

Corolário 2.1.3. *Se A é noetheriano, então $A[x_1, \dots, x_r]$ é noetheriano.*

Demonstração. Pelo TBH (2.1.2) $A[x_1]$ é noetheriano, assim $A[x_1, x_2] := (A[x_1])[x_2]$ é também noetheriano. Supondo por indução que $A[x_1, \dots, x_r]$ é noetheriano temos que $A[x_1, \dots, x_r, x_{r+1}] := (A[x_1, \dots, x_r])[x_{r+1}]$ é noetheriano, novamente pelo TBH. \square

Capítulo 3

Geometria algébrica

O objeto principal do trabalho é apresentar as variedades tóricas afins, em particular aquelas geradas a partir de cones, que são um tipo especial de variedade algébrica. Para definir tais objetos será necessário estudar os elementos presentes na geometria algébrica, como a topologia de Zariski e o teorema de Nullstellensatz.

3.1 Variedades algébricas afins

Nesta seção, utilizaremos a álgebra comutativa para introduzir alguns conceitos da geometria algébrica, como o de espaço afim, a topologia de Zariski e por fim a definição de variedade algébrica.

Definição 3.1.1. Seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado. Dizemos que o *espaço afim*, denotado por $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ de dimensão n sobre o corpo \mathbb{K} é

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n := \mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}.$$

Observação 3.1.2. A partir de agora \mathbb{K} denotará um corpo algebricamente fechado.

Na sequência, definimos um subconjunto especial do espaço afim, que são os zeros de um conjunto de polinômios dado.

Definição 3.1.3. Dado $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, o *conjunto algébrico afim* definido a partir de S é o conjunto $\mathbf{V}(S) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ das raízes comuns de todos os polinômios de S , isto é

$$\mathbf{V}(S) := \{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0), \forall f \in S \}.$$

Com respeito aos conjuntos algébricos, temos a seguinte proposição, que nos fornece propriedades desses conjuntos.

Proposição 3.1.4. *Sejam $S, S' \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tais que $S \subseteq S'$. Então, $\mathbf{V}(S') \subseteq \mathbf{V}(S)$. Além disso, temos a seguinte igualdade $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}((S))$, lembrando que (S) é o ideal gerado por S .*

Demonstração. Se $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(S')$, temos por definição que $f(a) = 0$ para todo $f \in S'$. Em particular, vale para todo $p \in S$, afinal $S \subseteq S'$. Logo, $p(a) = 0, \forall p \in S$, então $\mathbf{V}(S') \subseteq \mathbf{V}(S)$.

Como $S \subseteq (S)$, pelo resultado acima, tem-se que $\mathbf{V}((S)) \subseteq \mathbf{V}(S)$. Assim, dados $a \in \mathbf{V}(S)$ e uma $f \in (S)$ qualquer, temos que

$$f = g_1 s_1 + \dots + g_r s_r, \text{ em que } g_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \text{ e } s_i \in S.$$

Aplicando a em f

$$f(a) = g_1(a) \underbrace{s_1(a)}_{=0} + \dots + g_r(a) \underbrace{s_r(a)}_{=0} \Rightarrow f(a) = 0.$$

Logo, para toda $f \in (S)$, temos que $f(a) = 0$, implicando que $a \in \mathbf{V}((S))$, concluindo que $\mathbf{V}(S) = \mathbf{V}((S))$. \square

Observação 3.1.5. Como \mathbb{K} é noetheriano, então $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é noetheriano. Sabemos que todo ideal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é finitamente gerado, ou seja, existe um conjunto finito $T \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, tal que $I = (T)$. Pelo resultado anterior, temos que $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(T)$.

Para prosseguir neste estudo, faz-se necessário estabelecermos uma estrutura topológica sobre o espaço afim, que irá conectar elementos algébricos com topológicos.

Lema 3.1.6 (Topologia de Zariski). *Em um espaço afim $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, valem as seguintes propriedades*

- i) $\mathbf{V}((0)) = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ e $\mathbf{V}((1)) = \emptyset$;
- ii) $\mathbf{V}(I_1) \cup \dots \cup \mathbf{V}(I_r) = \mathbf{V}(I_1 \cdots I_r)$, no qual I_1, \dots, I_r são ideais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $r \in \mathbb{N}$;
- iii) $\bigcap_{j \in L} \mathbf{V}(I_j) = \mathbf{V}\left(\sum_{j \in L} I_j\right)$, no qual I_j é ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\forall j \in L$.

Tais propriedades satisfazem a Definição 1.3.3, garantindo que $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ admite uma topologia por fechados.

Demonstração. Seja $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ um espaço afim, então

- i) Todo elemento de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ avaliado no polinômio nulo é zero, logo $\mathbf{V}((0)) = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Um polinômio constante, não nulo, $a \in (1) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, é sempre diferente de 0, assim $\mathbf{V}((1)) = \emptyset$.
- ii) Se $a^i = (a_1^i, \dots, a_n^i) \in \mathbf{V}(I_i)$, então $f^i(a^i) = 0, \forall f^i \in I_i$. Um elemento do ideal $I_1 \cdots I_r$ é da forma

$$f_1^i h_1 + \dots + f_k^i h_k, \text{ em que } h_j \in I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_r.$$

Perceba que

$$f_1^i(a^i)h_1(a^i) + \cdots + f_k^i(a^i)h_k(a^i) = 0.$$

Logo, $a^i \in \mathbf{V}(I_1 \cdots I_r)$, assim $\mathbf{V}(I_i) \subseteq \mathbf{V}(I_1 \cdots I_r)$, e como é válido para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, tem-se que $\mathbf{V}(I_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(I_r) \subseteq \mathbf{V}(I_1 \cdots I_r)$.

Provemos que $\mathbf{V}(I_1 \cdots I_r) \subseteq \mathbf{V}(I_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(I_r)$ por indução. Se $a \in \mathbf{V}(I_1 \cdot I_2)$ tal que

$$a \notin \mathbf{V}(I_1) \Rightarrow \exists f \in I_1; f(a) \neq 0.$$

Dado $g \in I_2$ sabemos que $fg \in I_1 \cdot I_2$, implicando que

$$(fg)(a) = 0 \Rightarrow g(a) = 0 \Rightarrow a \in \mathbf{V}(I_2) \Rightarrow \mathbf{V}(I_1 \cdot I_2) \subseteq \mathbf{V}(I_1) \cup \mathbf{V}(I_2).$$

Agora, suponha que $\mathbf{V}(I_1 \cdots I_r) \subseteq \mathbf{V}(I_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(I_r)$. Seja $b \in \mathbf{V}(I_1 \cdots I_r \cdot I_{r+1})$, tal que

$$b \notin \mathbf{V}(I_{r+1}) \Rightarrow \exists h \in I_{r+1}; h(b) \neq 0.$$

Da mesma forma que anteriormente, teremos que $b \in \mathbf{V}(I_1 \cdots I_r)$, resultando que

$$\mathbf{V}(I_1 \cdots I_r \cdot I_{r+1}) \subseteq \mathbf{V}(I_1 \cdots I_r) \cup \mathbf{V}(I_{r+1}) \subseteq \mathbf{V}(I_1) \cup \cdots \cup \mathbf{V}(I_r) \cup \mathbf{V}(I_{r+1}).$$

iii) Se $a \in \bigcap_{j \in L} \mathbf{V}(I_j)$, segue que

$$\begin{aligned} a \in \mathbf{V}(I_j), \forall j \in L &\Rightarrow f^j(a) = 0, \forall f^j \in I_j \text{ e } \forall j \in L \\ &\Rightarrow f^1(a) + \cdots + f^j(a) + \cdots = 0 \\ &\Rightarrow a \in \mathbf{V}\left(\sum_{j \in L} I_j\right). \\ &\Rightarrow \bigcap_{j \in L} \mathbf{V}(I_j) \subseteq \mathbf{V}\left(\sum_{j \in L} I_j\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, perceba que se $x \in I_j$, para algum j , então $x \in I_j + (0) \subseteq \sum_{j \in L} I_j$.

Assim, $I_j \subseteq \sum_{j \in L} I_j$, $\forall j \in L$. Pela Proposição 3.1.4, temos que

$$\mathbf{V}\left(\sum_{j \in L} I_j\right) \subseteq \mathbf{V}(I_j), \forall j \in L.$$

Portanto, $\mathbf{V}\left(\sum_{j \in L} I_j\right) \subseteq \bigcap_{j \in L} \mathbf{V}(I_j)$. □

Observação 3.1.7. Note que os conjuntos algébricos afins, $\mathbf{V}(S)$, são os fechados dessa topologia. A partir desse momento, a *topologia de Zariski* será a topologia padrão abordada.

Vejamos a definição do conceito topológico de irredutível.

Definição 3.1.8. Um subconjunto $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é chamado de *irredutível* se não pode ser expresso como união de dois fechados relativos a Y próprios, caso contrário este será dito *redutível*.

O conceito de irredutibilidade será fundamental na definição das variedades algébricas afins, que é o principal componente da geometria algébrica e, por sua vez, deste trabalho.

Definição 3.1.9 (Variedade algébrica). Uma *variedade algébrica afim* é um conjunto algébrico afim irredutível.

Exploremos dois exemplos de conjuntos redutíveis e irredutíveis nessa topologia.

Exemplo 3.1.10. Temos dois conjuntos algébricos afins, o primeiro redutível e o segundo é uma variedade algébrica afim

- Se tomarmos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n = 2$ e os seguintes ideais do anel $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, $I = (-x_1^2 + x_2)$ e $J = (x_2)$. O conjunto $V = \mathbf{V}(I \cdot J) \subseteq \mathbb{C}^2$ é redutível, afinal $\mathbf{V}(I \cdot J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ e $\mathbf{V}(I) \cap V$, $\mathbf{V}(J) \cap V$ são ambos fechados próprios de V .
- Agora, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o próprio conjunto \mathbb{C}^n é uma variedade algébrica afim. De fato, suponha que \mathbb{C}^n seja união de dois fechados próprios. Nesse caso, tem que existir ideais $I \neq (0)$ e $J \neq (0)$ (ambos diferentes do ideal nulo, afinal $\mathbf{V}((0))$ não é próprio), tais que

$$\mathbb{C}^n = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J),$$

implicando que existe algum polinômio não nulo que se anula em todo o \mathbb{C}^n , porém isso nunca ocorre.

A seguir, definiremos um subconjunto do anel de polinômios, cujos elementos anulam um determinado conjunto do espaço.

Definição 3.1.11. Dado $Y \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ definimos o seguinte subconjunto de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

$$\mathbf{I}(Y) := \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in Y\}.$$

O próximo resultado, nos fornece algumas propriedades desse subconjunto, incluindo o fato de ser um ideal.

Proposição 3.1.12. Dados $Y, Z \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, temos que

- 1) $\mathbf{I}(Y)$ é um ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$;
- 2) Se $Y \subseteq Z$, então $\mathbf{I}(Z) \subseteq \mathbf{I}(Y)$;
- 3) $\mathbf{I}(Y \cup Z) = \mathbf{I}(Y) \cap \mathbf{I}(Z)$.

Demonstração.

- 1) O polinômio nulo pertence à $\mathbf{I}(Y)$. Assim, dados $f, g \in \mathbf{I}(Y)$ e $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ temos que

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0, \forall x \in Y;$$

$$(f \cdot p)(x) = f(x) \cdot p(x) = 0 \cdot p(x) = 0, \forall x \in Y,$$

concluindo que $\mathbf{I}(Y)$ é de fato um ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

- 2) Dado $f \in \mathbf{I}(Z)$, então $f(x) = 0$, para todo $x \in Z$. Em particular, $Y \subseteq Z$, logo $f(y) = 0, \forall y \in Y$, implicando que $f \in \mathbf{I}(Y)$.

- 3) Dado $f \in \mathbf{I}(Y) \cap \mathbf{I}(Z)$, segue que $f(y) = 0, \forall y \in Y$, e $f(z) = 0, \forall z \in Z$, ou seja, $f(x) = 0, \forall x \in Y \cup Z$. Portanto, $f \in \mathbf{I}(Y \cup Z)$. Por outro lado temos que

$$Y \subseteq Y \cup Z \text{ e } Z \subseteq Y \cup Z \xRightarrow{2)} \mathbf{I}(Y \cup Z) \subseteq \mathbf{I}(Y) \text{ e } \mathbf{I}(Y \cup Z) \subseteq \mathbf{I}(Z).$$

Logo, $\mathbf{I}(Y \cup Z) \subseteq \mathbf{I}(Y) \cap \mathbf{I}(Z)$. □

A respeito dos conjuntos algébricos e desse ideal, verificamos uma relação, através da seguinte proposição.

Proposição 3.1.13. *Seja $\mathbf{V}(S) = X$ um conjunto algébrico afim qualquer de $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, onde $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Então, $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) = X$.*

Demonstração. Dado $s \in S$, por definição temos que $s(x) = 0, \forall x \in \mathbf{V}(S)$. Perceba que

$$s \in \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{V}(S)\} = \mathbf{I}(X).$$

Logo, $S \subseteq \mathbf{I}(X)$. Pela Proposição 3.1.4, temos que $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) \subseteq \mathbf{V}(S) = X$. Por outro lado, dado $x \in X$, segue da definição de $\mathbf{I}(X)$ que

$$f(x) = 0, \forall f \in \mathbf{I}(X) \Rightarrow x \in \{a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n \mid g(a) = 0, \forall g \in \mathbf{I}(X)\} = \mathbf{V}(\mathbf{I}(X)),$$

resultando que $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) = X$. □

A proposição anterior nos descreve o conjunto $\mathbf{V}(\mathbf{I}(X))$. Contudo, dentro da geometria algébrica também é importante compreendermos a estrutura do ideal $\mathbf{I}(\mathbf{V}(Z))$, que será caracterizado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1.14 (Teorema dos zeros de Hilbert). *Seja Z um ideal qualquer de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Então, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(Z)) = \sqrt{Z}$.*

Demonstração. Dado $f \in \sqrt{Z}$, existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $f^r \in Z$. Tomando $x \in \mathbf{V}(Z)$, temos que $f^r(x) = 0$. Do fato que \mathbb{K} é domínio de integridade, tem-se que $f(x) = 0$, logo $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(Z))$.

Para a outra inclusão, tomemos $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(Z))$ e o ideal $J = (Z)$ no anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$ (com $n+1$ variáveis). Com a noção de produto de ideais $J = Z \cdot \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$. Considere

agora o seguinte ideal $J + (yf - 1) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$. Suponha que $\mathbf{V}(J + (yf - 1)) \neq \emptyset$. Assim,

$$\begin{aligned} & \exists (a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbf{V}(J + (yf - 1)) = \mathbf{V}(J) \cap \mathbf{V}((yf - 1)) \\ \Leftrightarrow & (a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbf{V}((Z)) \text{ e } (a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbf{V}((yf - 1)) \\ \Leftrightarrow & (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(Z) \text{ e } b \cdot f(a_1, \dots, a_n) = 1. \end{aligned}$$

Como $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(Z))$ e $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(Z)$, temos que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, uma contradição, afinal $b \cdot f(a_1, \dots, a_n) = 1$. Então, $\mathbf{V}(J + (yf - 1)) = \emptyset$, pelo Lema 3.1.6 (topologia de Zariski), temos que $J + (yf - 1) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$, garantindo que $1 \in J + (yf - 1)$. Pelo Corolário 2.1.3, Z é finitamente gerado, logo $Z = (p_1, \dots, p_r)$. Assim, existem polinômios h, g_1, g_2, \dots, g_r pertencentes a $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$ tais que $1 = h(yf - 1) + \sum_{i=1}^r g_i \cdot p_i$. Em termos das respectivas variáveis, obtemos que

$$1 = h(x_1, \dots, x_n, y) \cdot (yf(x_1, \dots, x_n) - 1) + \sum_{i=1}^r g_i(x_1, \dots, x_n, y) \cdot p_i(x_1, \dots, x_n).$$

Agora, tome $y = \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}$, logo

$$1 = \sum_{i=1}^r g_i \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)} \right) \cdot p_i(x_1, \dots, x_n).$$

Seja $m \in \mathbb{N}$ o maior expoente dentre todas as variáveis dos polinômios g_1, \dots, g_r . Multiplicando a equação acima por f^m , temos que

$$\begin{aligned} f^m &= \sum_{i=1}^r f^m g_i \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)} \right) \cdot p_i(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^r s_i(x_1, \dots, x_n) \cdot p_i(x_1, \dots, x_n), \text{ onde } s_i = f^m g_i. \end{aligned}$$

Veja que cada $s_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, portanto $f^m \in Z$, conseqüentemente $f \in \sqrt{Z}$. \square

Ademais, podemos caracterizar as variedades algébricas, isto é, iremos classificar todos os conjuntos irredutíveis da topologia de Zariski, graças a seguinte proposição.

Proposição 3.1.15. *Um conjunto algébrico $X \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ é uma variedade algébrica afim se, e somente se, $\mathbf{I}(X)$ é ideal primo.*

Demonstração. (\Rightarrow) Dados $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tais que $fg \in \mathbf{I}(X)$, logo $(fg) \subseteq \mathbf{I}(X)$. Pelas Proposições 3.1.4 e 3.1.13, temos que $X = \mathbf{V}(\mathbf{I}(X)) \subseteq \mathbf{V}((fg)) = \mathbf{V}((f) \cdot (g))$, assim pelo Lema 3.1.6

$$X = \mathbf{V}((f)) \cup \mathbf{V}((g)) \Rightarrow X = (X \cap \mathbf{V}((f))) \cup (X \cap \mathbf{V}((g))).$$

Como X é irredutível por hipótese, então $X = (X \cap \mathbf{V}((f)))$ ou $X = (X \cap \mathbf{V}((g)))$. Sem perda de generalidade, suponha que $X = (X \cap \mathbf{V}((f)))$, implicando $X \subseteq \mathbf{V}((f))$ e, por

fim, que $f \in \mathbf{I}(X)$.

(\Leftarrow) Suponha que $X = Y_1 \cup Y_2$, onde Y_1 e Y_2 são fechados próprios de X . Pela Proposição 3.1.12, temos que $\mathbf{I}(X) = \mathbf{I}(Y_1) \cap \mathbf{I}(Y_2)$. Agora, suponha por absurdo, que $\mathbf{I}(X) \neq \mathbf{I}(Y_1)$ e $\mathbf{I}(X) \neq \mathbf{I}(Y_2)$. Assim, existem $a \in \mathbf{I}(Y_1)$ e $b \in \mathbf{I}(Y_2)$, tais que $a \notin \mathbf{I}(Y_2)$ e $b \notin \mathbf{I}(Y_1)$. Logo,

$$ab \in \mathbf{I}(Y_1) \text{ e } ab \in \mathbf{I}(Y_2) \Rightarrow ab \in \mathbf{I}(Y_1) \cap \mathbf{I}(Y_2) = \mathbf{I}(X).$$

Por hipótese $\mathbf{I}(X)$ é primo, então $a \in \mathbf{I}(Y_2)$ ou $b \in \mathbf{I}(Y_1)$, absurdo. Portanto, temos que $\mathbf{I}(X) = \mathbf{I}(Y_1)$ ou $\mathbf{I}(X) = \mathbf{I}(Y_2)$. Pela Proposição 3.1.13 tem-se que $X = Y_1$ ou $X = Y_2$, concluindo que X é irredutível. \square

Utilizando essa caracterização, exibiremos um exemplo de variedade algébrica afim.

Exemplo 3.1.16. O ideal $I = (x_2^2 - x_1^3 - x_1^2)$ contido no anel $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ é primo, afinal é gerado por um polinômio irredutível. Então, concluímos que

$$\mathbf{V}(I) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3 + x^2\}$$

é uma variedade algébrica afim, chamada de cúspide transladada. De fato, observe que $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ é o ideal \sqrt{I} , pelo Teorema 3.1.14. Sabemos que $I = \sqrt{I}$, pela Proposição 1.1.24, garantindo que $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I$ que é primo.

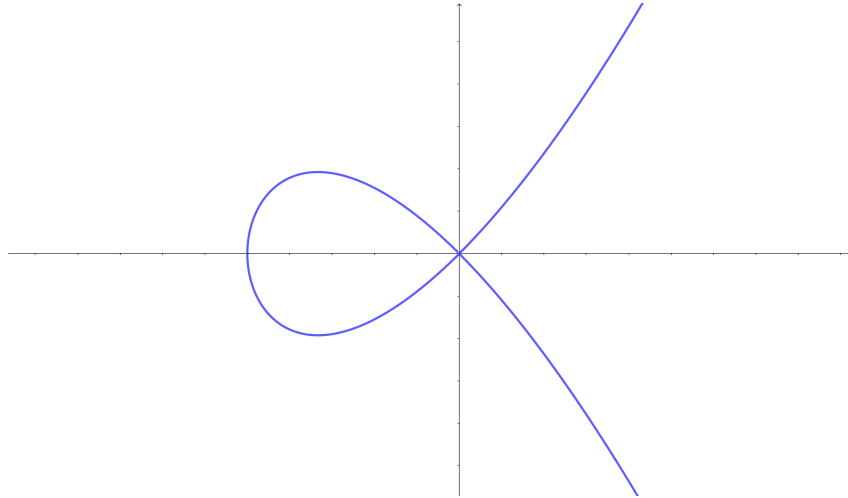


Figura 3.1: $\mathbf{V}(I)$ em \mathbb{C}^2 (representação real).

Observação 3.1.17. Perceba que o exemplo anterior é completamente arbitrário com relação ao polinômio irredutível que gera o ideal. Portanto, todo ideal I , gerado por um polinômio irredutível em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, implica que $\mathbf{V}(I)$ é uma variedade algébrica afim.

3.2 Anel de coordenadas e Nullstellensatz

Agora, vemos a definição do principal objeto algébrico associado a um conjunto algébrico $V \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$, este é o anel de coordenadas $\mathbb{K}[V]$ desse conjunto, que tem uma

correspondência com as funções polinomiais em V e carrega informações relevantes sobre o conjunto algébrico. Em seguida, estudamos um importante teorema da geometria algébrica, o teorema de Nullstellensatz que faz uma ponte entre conceitos geométricos, os pontos do espaço, com conceitos algébricos, ideais maximais do anel de polinômios.

Definição 3.2.1. Sejam \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado e $V = \mathbf{V}(I) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico afim, para algum ideal I de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. O *anel de coordenadas* associado a V é o anel

$$\mathbb{K}[V] := \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\mathbf{I}(V)}.$$

Um anel de coordenadas $\mathbb{K}[V]$ é uma \mathbb{K} -álgebra finitamente gerada, pela projeção canônica $\pi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[V]$. Além disso, tal anel tem uma estrutura de espaço vetorial, sobre \mathbb{K} , compatível com a estrutura de anel, em que a multiplicação por escalar é $\alpha \cdot (p + \mathbf{I}(V)) := \alpha p + \mathbf{I}(V)$, para $\alpha \in \mathbb{K}$ e $p + \mathbf{I}(V) \in \mathbb{K}[V]$. O anel de coordenadas é finitamente gerado pelas classe \bar{x}_j e os elementos de $\mathbb{K}[V]$ podem ser vistos como funções polinomiais avaliadas em V , através do seguinte homomorfismo sobrejetor de anéis

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathcal{P}(V) \\ p &\longmapsto F : V \rightarrow \mathbb{K} \\ & \quad x \mapsto p(x), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{P}(V) = \{f : V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ é polinomial em } V\}$ e uma função f é dita *polinomial em* V se existir $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f(x) = p(x)$ para todo $x \in V$. Pela definição do anel $\mathcal{P}(V)$, o homomorfismo ϕ é sobrejetor e seu núcleo é exatamente os polinômios tais que $p(x) = 0, \forall x \in V$, ou seja, $\ker \phi = \mathbf{I}(V)$, garantindo que $\mathbb{K}[V]$ é isomorfo a $\mathcal{P}(V)$, pelo teorema dos isomorfismos. Então, $\mathbb{K}[V] \cong \mathcal{P}(V)$.

Pela definição do anel de coordenadas $\mathbb{K}[V]$, pela caracterização dos ideais primos dada no Teorema 1.1.25 e pela Proposição 3.1.15 temos as seguintes equivalências:

$\mathbb{K}[V]$ é domínio de integridade $\Leftrightarrow \mathbf{I}(V)$ é ideal primo $\Leftrightarrow V$ é variedade algébrica afim.

O teorema de Nullstellensatz é um resultado essencial da geometria algébrica, que irá fornecer uma boa caracterização das variedades tóricas afins, geradas por cones, posteriormente. Para estudar tal teorema utilizaremos o seguinte lema da teoria de extensão de corpos:

Lema 3.2.2. *Sejam \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado, não enumerável, e $\mathbb{K} \hookrightarrow L$ uma extensão de corpos. Se $\dim_{\mathbb{K}} L$ for enumerável, então a extensão $\mathbb{K} \hookrightarrow L$ é algébrica. \square*

Tomando nota que uma extensão de corpos $\mathbb{K} \hookrightarrow L$ é *algébrica* quando todo $\alpha \in L$ é raiz de algum polinômio $p \in \mathbb{K}[x]$, i.e. $p(\alpha) = 0$. Dito isso, enunciaremos o teorema de Nullstellensatz.

Teorema 3.2.3 (Teorema de Nullstellensatz). *Seja \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado. Então,*

$$\text{Specm } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = \{(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\},$$

onde $\text{Specm } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ denota o conjunto de todos os ideais maximais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Demonstração. Tome $I \in \text{Specm } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e veja que $L := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$ é um corpo. Agora, considere o homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K} &\longrightarrow L \\ k &\mapsto k + I. \end{aligned}$$

Note que ϕ é uma inclusão entre os corpos, isto é, um homomorfismo injetor. De fato, é um homomorfismo tal que $\phi(k) = 0 \Leftrightarrow k \in I \Leftrightarrow k = 0$, já que I é ideal próprio e não pode conter unidades, que nesse caso são os elementos de \mathbb{K} , o que garante que ϕ é injetora. Em outras palavras, $\mathbb{K} \hookrightarrow L$ é uma extensão de corpos por ϕ . O anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é um espaço vetorial de dimensão enumerável, e como sua projeção canônica π no espaço vetorial L é sobrejetora, teremos que $\text{Dim}_{\mathbb{K}} L$ é enumerável. Assim, pelo Lema 3.2.2 temos que $\mathbb{K} \hookrightarrow L$ é uma extensão algébrica. Dado $\alpha \in L$, tomemos o polinômio mônico minimal $p \in \mathbb{K}[x]$ associado a α , ou seja, $p(\alpha) = 0$, p é irredutível e o ideal (p) contém todos os polinômios de $\mathbb{K}[x]$ que α é raiz. Logo, \mathbb{K} é algebricamente fechado e os polinômios irredutíveis são lineares, isto é

$$p = x - \alpha \in \mathbb{K}[x] \Rightarrow \exists \alpha' \in \mathbb{K}, \text{ tal que } \alpha' \xrightarrow{\phi} \alpha.$$

Isso prova que ϕ é um isomorfismo. Portanto, para todo $x_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, existe $a_i \in \mathbb{K}$ tal que

$$\phi(a_i) = x_i + I \iff a_i + I = x_i + I \iff x_i - a_i \in I, \forall i = 1, \dots, n,$$

garantindo que $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subseteq I$. Denotamos o ponto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ por a e o ideal $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ por M , consideremos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{M} &\rightarrow \mathbb{K} \\ \bar{p} &\mapsto p(a). \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 1.1.35, o homomorfismo φ na verdade é um isomorfismo, implicando que $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/M$ é um corpo e que M é um ideal maximal. Entretanto, $M \subseteq I$, resultando que $I = M \Rightarrow \text{Specm } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \subseteq \{(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$. Perceba que a inclusão contrária é obtida pelos mesmos argumentos referentes ao isomorfismo φ . \square

Observação 3.2.4. Dado um ideal J de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, então $J \subseteq (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ se, e somente se, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(J)$. De fato, utilizando o isomorfismo φ da demonstração acima:

$$\begin{aligned}
 & J \subseteq (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \\
 \iff & \overline{f(x_1, \dots, x_n)} = \bar{0}, \forall f(x_1, \dots, x_n) \in J \\
 \iff & \varphi(\overline{f(x_1, \dots, x_n)}) = 0, \forall f(x_1, \dots, x_n) \in J \\
 \iff & f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f(x_1, \dots, x_n) \in J \\
 \iff & (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(J).
 \end{aligned}$$

Como consequência deste fato e do teorema de Nullstellensatz, foi possível demonstrar o corolário a seguir, que na prática será o que utilizaremos ao longo do trabalho.

Corolário 3.2.5. *Seja $\mathbf{V}(S) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ um conjunto algébrico afim. Há uma correspondência biunívoca entre os conjuntos.*

$$\text{Specm}(\mathbb{K}[\mathbf{V}(S)]) \text{ e } \{a \in \mathbf{V}(S)\}.$$

Demonstração. Denotemos o conjunto algébrico $\mathbf{V}(S)$ por Y . Pelo teorema de Nullstellensatz, os ideais maximais de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ são da forma $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, para algum ponto $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Se $\mathbf{I}(Y) \subseteq (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, do Teorema da Correspondência 1.1.29 existe um único ideal maximal em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathbf{I}(Y) = \mathbb{K}[Y]$, que corresponde ao ideal $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$; chamemos de M_a tal ideal maximal de $\mathbb{K}[Y]$. Novamente pelo Teorema da Correspondência, todo ideal maximal do anel de coordenadas $\mathbb{K}[Y]$ é da forma M_a , para algum $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. Dessa forma, definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}
 f : \text{Specm}(\mathbb{K}[Y]) &\rightarrow Y \\
 M_a &\mapsto a.
 \end{aligned}$$

Mostremos que f é uma bijeção. Veja que f é injetora, afinal dados dois ideais maximais tal que suas imagens por f coincidem, então os pontos irão coincidir, implicando que os ideais são iguais. Para a sobrejetividade de f , recordamos que $Y = \mathbf{V}(\mathbf{I}(Y))$, para qualquer conjunto algébrico, assim dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in Y = \mathbf{V}(\mathbf{I}(Y))$, segue da observação anterior que $\mathbf{I}(Y) \subseteq (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, logo $f(M_a) = a$. \square

Observação 3.2.6. Grande parte dos resultados apresentados nesse capítulo, até então, são válidos para um corpo \mathbb{K} algebricamente fechado. O corpo dos complexos \mathbb{C} é algebricamente fechado, logo todos esses resultados ocorrem neste corpo. Sendo assim, a partir desse momento utilizaremos o corpo dos complexos por padrão. Neste caso, o conjunto afim $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ será simplesmente denotado por \mathbb{C}^n , munido da topologia de Zariski.

3.3 Variedades algébricas normais

Nesta seção, focamos nosso estudo nas variedades algébricas normais. Apresentaremos a definição deste objeto e construiremos alguns exemplos de variedades normais e normalizaremos uma variedade não normal.

Inicialmente, veremos que alguns abertos de um conjunto algébrico afim V , com a topologia de Zariski induzida, são conjuntos algébricos afins.

Exemplo 3.3.1. Seja V um conjunto algébrico em \mathbb{C}^n . Dado $f + \mathbf{I}(V) \in \mathbb{C}[V] \setminus \{0\}$, considere o conjunto

$$V_f = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\} \subseteq V.$$

Sabemos que $\mathbf{I}(V)$ é finitamente gerado, assim existem $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tais que $\mathbf{I}(V) = (f_1, \dots, f_s)$. Tome $g \in f + \mathbf{I}(V)$ e observe que

$$V_f = V \setminus \mathbf{V}(g),$$

implicando que V_f é um aberto de V . Agora, considere uma nova variável y e o conjunto algébrico $W := \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s, 1 - gy) \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$. Perceba que $1 - gy \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y]$. Para um ponto $(u_1, \dots, u_n, v) \in W$, temos que $1 - g(u_1, \dots, u_n)v = 0$. Tomemos a projeção

$$\begin{aligned} h : \quad W &\rightarrow V_f \\ (u, v) &:= (u_1, \dots, u_n, v) \mapsto u = (u_1, \dots, u_n), \end{aligned}$$

que está bem definida. De fato, dado $(u, v) \in W$ temos que $f_j(h(u, v)) = f_j(u) = 0, \forall j$ e $g(h(u, v)) = g(u) = \frac{1}{v} \neq 0$. Então, $h(u, v) \in V$ e $h(u, v) \notin \mathbf{V}(g)$, resultando que $h(u, v) \in V \setminus \mathbf{V}(g) = V_f$. Naturalmente, a aplicação h é sobrejetora. Além disso, dados $(u, v_1), (u', v_2) \in W$ tais que $h(u, v_1) = h(u', v_2)$, teremos que $u = u'$ e $\frac{1}{v_1} = g(u) = g(u') = \frac{1}{v_2}$, implicando que $(u, v_1) = (u', v_2)$. Portanto, h é uma bijeção, permitindo identificar o aberto V_f do conjunto V com um conjunto algébrico $W \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, isto é, obtemos uma correspondência entre um aberto em V com um fechado W em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

Ainda sobre esse exemplo, podemos obter $V_f \subseteq V$ utilizando localização. De fato, basta tomar a localização de $\mathbb{C}[V]$ no ponto f , que é o anel $\mathbb{C}[V]_f = S^{-1}\mathbb{C}[V]$, onde $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. Com um pouco mais de esforço algébrico, o autor [8] (Lemma. 1.1.13), prova que $\text{Specm}(\mathbb{C}[V]_f) = \text{Specm}(\mathbb{C}[V])_f$ e que $\mathbb{C}[V]_f$ é o anel de coordenadas de V_f , o que implica que $V_f = \text{Specm}(\mathbb{C}[V]_f)$.

A seguir, construiremos um anel a partir do exemplo anterior. Tal anel será chamado de anel de polinômios de Laurent e terá um papel fundamental neste trabalho.

Exemplo 3.3.2. Seja $V = \mathbb{C}^n$ um conjunto algébrico. Defina $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e considere o conjunto $(\mathbb{C}^*)^n$. Note que

$$(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{V}(x_1 \cdots x_n),$$

ou seja, o conjunto $(\mathbb{C}^*)^n$ é um aberto em V . Então, temos que $V_{x_1 \cdots x_n} = (\mathbb{C}^*)^n$ é um conjunto algébrico em \mathbb{C}^{n+1} e que $\mathbb{C}[V]_{x_1 \cdots x_n}$ é o seu anel de coordenadas. Observemos que

$$\mathbb{C}[V] = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{\mathbf{I}(\mathbb{C}^n)} = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{(0)} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow \mathbb{C}[V]_{x_1 \cdots x_n} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}.$$

Podemos representar um polinômio $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ qualquer da seguinte forma:

$$p = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

com um número finito de coeficientes $\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \neq 0$ complexos. Sendo assim, um elemento w no anel $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}$, pela definição de localização $x_1 \cdots x_n$, será:

$$w = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} \lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \frac{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}{x_1^l \cdots x_n^l}, \text{ para algum } l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ e finitos } \lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \neq 0.$$

Feito isso, perceba que as variáveis em cada um dos finitos monômios de w têm um número inteiro como expoente. Portanto, iremos representar os elementos do anel $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}$ como a seguinte soma finita:

$$\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

isto é, são polinômios cujos expoentes são números inteiros. Concluindo, este anel especial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}$ recebe o nome de *anel de polinômios de Laurent* e será denotado por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}]$ ou $\mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$.

No que segue, exibiremos a definição de um tipo especial de variedade algébrica, que é a classe das variedades normais.

Definição 3.3.3 (Variedade normal). Uma variedade algébrica V é uma *variedade normal* se $\mathbb{C}[V]$ é normal.

Perceba que a definição está bem posta, já que $\mathbb{C}[V]$ é um domínio de integridade. Um exemplo imediato de variedade normal é $V = \mathbb{C}^n$, afinal $\mathbf{I}(\mathbb{C}^n) = (0)$, logo $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, que é um *DFU*.

Agora, veremos um exemplo de uma variedade algébrica não normal.

Exemplo 3.3.4. A cúspide $V = \mathbf{V}(x^3 - y^2) = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid u^3 = v^2\}$, é uma variedade algébrica, pois $(x^3 - y^2) = \mathbf{I}(V)$ é ideal primo. O respectivo anel de coordenadas é $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x, y]/\mathbf{I}(V)$. Já o corpo de frações desse domínio será o seguinte

$$\mathbb{C}(V) := \text{Frac}(\mathbb{C}[V]) = \{\bar{f}/\bar{g} \mid \bar{f}, \bar{g} \in \mathbb{C}[V] \text{ e } g \notin (x^3 - y^2)\}.$$

Com isso, considere o polinômio mônico $p = z^2 - \bar{x}$ pertencente a $(\mathbb{C}[V])[z]$, o anel de polinômios com uma variável com coeficientes em $\mathbb{C}[V]$. Veja que $\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)^2 = \frac{\bar{x}}{1}$, afinal $1 \cdot \bar{y}^2 + \mathbf{I}(V) - (x^2 \cdot \bar{x} + \mathbf{I}(V)) = \bar{y}^2 - x^3 + \mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V) = \bar{0}$. Logo, $p(\bar{y}/\bar{x}) = 0$, isto é, o elemento \bar{y}/\bar{x} é integral sobre $\mathbb{C}[V]$. Contudo, \bar{y}/\bar{x} não pertence a $\mathbb{C}[V]$. Com efeito, suponha que pertença, então deverá existir $q \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $\bar{q} = \bar{y}/\bar{x}$, implicando que $\bar{q}\bar{x} = \bar{y}$ e, por sua vez, garante que $qx - y \in (x^3 - y^2)$. Dessa forma, existirá $s \in \mathbb{C}[x, y]$ em que $qx - y = s(x^3 - y^2)$, resultando que $y \in (x, x^3 - y^2)$, uma contradição. Concluindo, que $\mathbb{C}[V]$ não contém seu fecho integral. Portanto, $\mathbb{C}[V]$ não é um anel normal e consequentemente V também não é uma variedade normal.

Posteriormente, trabalhamos ainda sobre esse exemplo de variedade não normal, com o objetivo de identificar a sua normalização. Neste momento do trabalho encontramos a normalização de $\mathbb{C}[V]$ de forma “braçal”, entretanto mais a frente no projeto faremos isso de uma maneira mais elegante.

Exemplo 3.3.5. Nas condições do exemplo anterior, buscamos encontrar a normalização de $\mathbb{C}[V]$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad \mathbb{C}[V] &\rightarrow \mathbb{C}[t] \\ p(x, y) + \mathbf{I}(V) &\mapsto p(t^2, t^3), \end{aligned}$$

que é um homomorfismo do anel de coordenadas no anel de polinômios de uma variável. Para verificar que está bem definido, tomemos dois polinômios $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ pertencentes a uma mesma classe, por definição $p(x, y) - q(x, y) \in (x^3 - y^2)$, isto é, existe $F(x, y)$ tal que $p(x, y) - q(x, y) = F(x, y) \cdot (x^3 - y^2)$. Note que

$$\varphi(p(x, y) + \mathbf{I}(V)) - \varphi(q(x, y) + \mathbf{I}(V)) = p(t^2, t^3) - q(t^2, t^3) = F(t^2, t^3) \cdot ((t^2)^3 - (t^3)^2) = 0,$$

nos permitindo concluir que $\varphi(p(x, y) + \mathbf{I}(V)) = \varphi(q(x, y) + \mathbf{I}(V))$. Agora, observe que $\mathbb{C}[V]$ é gerado, como espaço vetorial complexo, pelo conjunto dos elementos da forma $\bar{x}^i \bar{y}^j$ com $i, j \geq 0$. Ainda, podemos reduzir este conjunto utilizando o fato que $\bar{y}^2 = \bar{x}^3$, ou seja, o conjunto $G := \{\bar{x}^i \bar{y}^j \mid i \geq 0 \text{ e } j \in \{0, 1\}\}$ gera $\mathbb{C}[V]$. Prosseguindo, devemos computar a imagem do conjunto gerador. Variando os inteiros i, j teremos que $\varphi(G) = \{1, t^2, t^3, t^4, t^5, \dots\}$, que é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{C}[t]$, uma base para a imagem $A := \varphi(\mathbb{C}[V])$. Por fim, tome um elemento $\bar{p} \in \ker \varphi$, então ele será escrito da seguinte forma $\bar{p} = \lambda_1 \cdot \bar{1} + \lambda_2 \cdot \bar{x} + \lambda_3 \cdot \bar{y} + \lambda_4 \cdot \bar{x}^2 + \lambda_5 \cdot \bar{x}\bar{y} + \dots \in \mathbb{C}[V]$ e será tal que $\varphi(\bar{p}) = 0$. Entretanto, sabemos que sua imagem será

$$\varphi(\bar{p}) = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t^2 + \lambda_3 \cdot t^3 + \lambda_4 \cdot t^4 + \lambda_5 \cdot t^5 + \dots = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i \geq 1,$$

garantindo que $\bar{p} = \bar{0}$ e, por sua vez, que φ é injetora. Assim, a imagem A é isomorfa a $\mathbb{C}[V]$. O corpo de frações de A é o menor corpo que contém a base $\{1, t^n \mid n \geq 2\}$ e, em particular, irá conter o elemento $t = t^3/t^2$. Logo, todos os geradores de $\mathbb{C}[t]$ estão nesse corpo, implicando que $\text{Frac}(A) = \text{Frac}(\mathbb{C}[t])$. Dito isso, a normalização \hat{A} de A sobre $\text{Frac}(A)$, será exatamente $\mathbb{C}[t]$. Com efeito, dado $f \in \hat{A}$ tem-se que $f \in \text{Frac}(A) = \text{Frac}(\mathbb{C}[t])$ e é integral sobre A . Como $A \subseteq \mathbb{C}[t]$, temos que f também é integral sobre $\mathbb{C}[t]$, donde segue que $f \in \widehat{\mathbb{C}[t]}$. Daí, chegamos que $f \in \mathbb{C}[t] = \widehat{\mathbb{C}[t]}$, afinal este é um anel normal. Por outro lado, dado $p \in \mathbb{C}[t]$ qualquer, considere seu termo constante $\alpha_0 := p(0)$. Tomemos o seguinte polinômio mônico:

$$g(x) := x^2 - 2\alpha_0 x + \alpha_0 - (p - \alpha_0)^2 = (x - \alpha_0)^2 - (p - \alpha_0)^2,$$

atentando-se ao fato que seus coeficientes $-2\alpha_0$ e $\alpha_0 - (p - \alpha_0)^2$ estão no anel A , concluímos que g é mônico e pertence a $A[x]$. Como $g(p) = 0$, temos que p é integral sobre A ,

garantindo que $\mathbb{C}[t] \subseteq \hat{A}$ e fornecendo-nos a igualdade $\hat{A} = \mathbb{C}[t]$. Por fim, perceba que a normalização do anel A , gerado por $\{1, t^2, t^3, t^4, t^5, \dots\}$, foi obtida adicionando o elemento $t = t^3/t^2$, presente no corpo de frações, a este anel. Façamos o mesmo para o anel de coordenadas $\mathbb{C}[V]$, através do isomorfismo φ^{-1} de A em $\mathbb{C}[V]$. O elemento do anel de frações $\mathbb{C}(V)$ que é levado em t^3/t^2 , por φ , é exatamente \bar{y}/\bar{x} . Logo, a normalização de $\mathbb{C}[V]$ será o espaço vetorial complexo gerado por $\mathbb{C}[V] \cup \{\bar{y}/\bar{x}\}$:

$$\mathbb{C}[\bar{y}/\bar{x}] := \left\{ \sum_{i=0}^k a_i \bar{x}^i + \sum_{i=0}^l b_i \bar{x}^i \bar{y} + \sum_{i=0}^m c_i \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right)^i \mid a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}, \text{ e } k, l, m \geq 0 \right\} \subseteq \mathbb{C}(V).$$

Capítulo 4

Geometria convexa e semigrupos

Neste momento, exploramos alguns objetos que compõem a geometria convexa, como os cones e as faces. Na sequência, identificamos que tais objetos caracterizam um semigrupo. Por fim, estudamos o importante Lema de Gordon que garante que tal semigrupo é finitamente gerado, fato que nos permitirá definir as variedades tóricas afins a partir de tal semigrupo.

4.1 Geometria convexa

Nesta seção, estudamos alguns elementos da geometria convexa, sendo o cone o principal objeto abordado. Veremos também o cone dual e faces, associados a um cone dado.

Definição 4.1.1 (Cone). Dado um conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ de vetores em \mathbb{R}^n , o conjunto

$$\sigma = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r; \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = \text{Cone}(\{v_1, \dots, v_r\})$$

é chamado de *cone* e os vetores v_i são ditos geradores de σ .

Seja o cone $\sigma = \text{Cone}(\{v_1, \dots, v_r\})$. Dados $x, y \in \sigma$, onde $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ e $y = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$, com $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, para $t \in [0, 1]$, temos que

$$z = tx + (1-t)y = t \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + (1-t) \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{(t\alpha_i + (1-t)\beta_i)}_{\geq 0} v_i \in \sigma.$$

Logo, todo cone σ é um conjunto convexo em \mathbb{R}^n .

Agora, consideremos o grupo aditivo $N = \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, que chamaremos de *grade*. Sejam $(\mathbb{R}^n)^*$ o dual de \mathbb{R}^n e $M \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$ um grupo tal que $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$. Tal grupo será chamado de *grade dual* de N . A definição geral desses grupos pode ser vista em 6.1.8.

Diremos que σ é *um cone grade* se todos os seus geradores pertencem à grade $N = \mathbb{Z}^n$. Ainda, σ será dito *fortemente convexo* se $\sigma \cap -\sigma = \{0\}$, em que $-\sigma = \{-x \mid x \in \sigma\}$. A dimensão $\dim(\sigma)$ de um cone σ é a dimensão do subespaço $W \subseteq \mathbb{R}^n$ gerado por σ , e a codimensão $\text{codim}(\sigma)$ é dada por $\dim(\mathbb{R}^n) - \dim(W)$.

A seguir, definiremos o conceito de cone dual.

Definição 4.1.2. Seja $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone e considere $(\mathbb{R}^n)^*$ o espaço vetorial dual de \mathbb{R}^n . O cone dual associado será o seguinte conjunto

$$\sigma^\vee := \{f \in (\mathbb{R}^n)^* \mid f(v) \geq 0, \forall v \in \sigma\}.$$

Podemos utilizar o teorema da representação de Riesz, para facilitar o entendimento do cone grade. Tal teorema garante que existe um ponto $u \in \mathbb{R}^n$, para cada funcional f de σ^\vee , tal que $\langle u, v \rangle = f(v) \geq 0$, para todo $v \in \sigma$. Na prática, o cone dual será visto da seguinte forma

$$\sigma^\vee = \{u \in \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}.$$

Veamos o seguinte resultado, que relaciona um cone grade com o cone dual. Para a demonstração desse resultado, utilizaremos o fato que $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ é um cone se, e somente se, σ é interseção finita de semiespaços de \mathbb{R}^n (tal afirmação pode ser vista em [5])

Proposição 4.1.3. Se $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ é cone grade, então o cone dual $\sigma^\vee \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$ é cone grade.

Demonstração. Primeiro precisamos provar que σ^\vee é um cone. Seja $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ o conjunto dos geradores de σ . Os semiespaços associados a cada gerador são dados por

$$E_{v_i} := \{x \in \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_i \rangle \geq 0\}.$$

Tome $u \in \sigma^\vee$, logo

$$\langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma \Leftrightarrow \left\langle u, \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right\rangle \geq 0, \forall \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Leftrightarrow \langle u, v_i \rangle \geq 0, \forall i \Leftrightarrow u \in \bigcap_{i=1}^m E_{v_i},$$

nos restando que $\sigma^\vee = \bigcap E_{v_i}$, ou seja, σ^\vee é um cone. Note que cada semiespaço E_{v_i} é gerado, como cone, por $2n - 1$ vetores. Basta tomar uma esfera $S(0, \|v_i\|)$, centrada na origem de raio igual à norma do vetor v_i , assim teremos $2n - 2$ vetores $w_j^i \in S(0, \|v_i\|) \cap N$ tais que $\langle w_j^i, v_i \rangle = 0$. Os vetores w_j^i estão na grade N e junto de v_i geram o semiespaço E_{v_i} , para todo $j = 1, \dots, 2n - 2$. Assim, o conjunto

$$\left\{ v_i, w_j^i \mid v_i, w_j^i \in \bigcap_{i=1}^m E_{v_i} \text{ e } j = 1, \dots, 2n - 2 \right\} \subseteq N$$

é finito e gera a interseção $\bigcap E_{v_i} = \sigma^\vee$. Portanto, o cone dual σ^\vee é cone grade. \square

Ademais, para um cone $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, tem-se que dual de σ^\vee é um cone $(\sigma^\vee)^\vee \subseteq \mathbb{R}^n$. O autor [8] (Lemma 1.2.6) mostra que $\sigma = (\sigma^\vee)^\vee$. Ainda, com respeito aos cones, definimos as faces desses objetos.

Definição 4.1.4. Dado $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\lambda^* \in \sigma^\vee \cap M$, tome o vetor $\lambda \in \mathbb{R}^n$ correspondente a λ^* pelo teorema da representação de Riesz. Então, o conjunto

$$\tau := \sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma \mid \langle v, \lambda \rangle = 0\},$$

é dito *face* de σ e denotamos por $\tau \prec \sigma$.

A respeito das faces de um cone verificamos algumas propriedades desses objetos.

Proposição 4.1.5. *Sejam $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ e τ uma face de σ .*

- 1) *A face τ é um cone em \mathbb{R}^n ;*
- 2) *Toda interseção finita de faces é também uma face;*
- 3) $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$;
- 4) *Se $\mu \prec \tau$, então $\mu \prec \sigma$;*
- 5) *Há uma correspondência biunívoca entre as faces de σ e as faces de σ^\vee . Tal associação leva uma face τ de σ em uma face τ^* de σ^\vee , tal que $\dim(\tau) = \text{codim}(\tau^*)$.*

Demonstração. Suponha que o cone σ seja gerado por $\{v_1, \dots, v_r\}$ e que $\lambda \in \mathbb{R}^n$ seja o respectivo vetor associado a $\lambda^* \in \sigma^\vee \cap M$, que define a face $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$.

- 1) Dado $w \in \tau \subseteq \sigma$, temos que $w = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$, para $\alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Como $w \in \lambda^\perp$ teremos que

$$\langle w, \lambda \rangle = 0 \Rightarrow \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r, \lambda \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1 \langle v_1, \lambda \rangle + \dots + \alpha_r \langle v_r, \lambda \rangle = 0.$$

Pela definição, $\lambda^* \in \sigma^\vee \cap M$, logo $\alpha_i \langle v_i, \lambda \rangle \geq 0$, para todo $i = 1, \dots, r$. Note que, como a soma desses termos se anula, caso $\langle v_i, \lambda \rangle \neq 0$, então necessariamente $\alpha_i = 0$, implicando que w é combinação linear dos vetores v_k , tais que $\alpha_k \neq 0$, isto é, w pertence ao cone gerado por esses v_k .

- 2) Considerando $\lambda_1^*, \dots, \lambda_s^* \in \sigma^\vee \cap M$, podemos tomar a interseção das faces correspondentes:

$$\bigcap_{j=1}^s (\sigma \cap \lambda_j^\perp).$$

Dado $w \in \bigcap_{j=1}^s (\sigma \cap \lambda_j^\perp)$, temos que $\langle w, \lambda_j \rangle = 0$, para todo $j = 1, \dots, s$. Com isso, junto do fato que cada $\lambda_j \in \sigma^\vee$, temos as equivalências

$$w \in \bigcap_{j=1}^s (\sigma \cap \lambda_j^\perp) \Leftrightarrow \langle w, \lambda_1 \rangle + \dots + \langle w, \lambda_s \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle w, \sum_{j=1}^s \lambda_j \right\rangle = 0 \Leftrightarrow w \in \sigma \cap \gamma^\perp,$$

em que $\gamma = \lambda_1 + \dots + \lambda_s \in \mathbb{R}^n$. Assim, temos a igualdade $\bigcap_{j=1}^s (\sigma \cap \lambda_j^\perp) = \sigma \cap \gamma^\perp$, garantindo que a interseção das faces é uma face de σ .

- 3) Se $w \in \sigma^\vee$, então $\langle w, v \rangle \geq 0$, para todo $v \in \sigma \supseteq \tau$. Como a face está no cone, em particular, temos que $\langle w, u \rangle \geq 0$, para todo $u \in \tau$, implicando que $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$.

- 4) Sejam $\gamma^* \in \tau^\vee \cap M$ o funcional e $\gamma \in \mathbb{R}^n$ o ponto associados à face $\mu \prec \tau$, ou seja, $\mu = \tau \cap \gamma^\perp$. Tome $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in \sigma$. Assim,

$$\langle v, a\lambda + \gamma \rangle = \alpha_1(a\langle v_1, \lambda \rangle + \langle v_1, \gamma \rangle) + \dots + \alpha_r(a\langle v_r, \lambda \rangle + \langle v_r, \gamma \rangle),$$

e como $\lambda \in \sigma^\vee$, temos que $\langle v_i, \lambda \rangle \geq 0$. Dessa forma, podemos tomar a de tal forma que $a\lambda + \gamma \in \sigma^\vee$, isto é, tal que $a\langle v_i, \lambda \rangle + \langle v_i, \gamma \rangle \geq 0$, para todo $i = 1, \dots, r$. Dito isso, μ será a face de σ caracterizada pelo ponto $a\lambda + \gamma$, então $\mu = \sigma \cap (a\lambda + \gamma)^\perp$. \square

Na sequência, tomaremos um cone em \mathbb{R}^2 e construiremos/visualizaremos alguns dos objetos que definimos a respeito de um cone.

Exemplo 4.1.6. Seja $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ um cone grade gerado por $v_1 = e_2$ e $v_2 = 2e_1 - e_2$. Logo,

$$\sigma = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = (2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2); \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

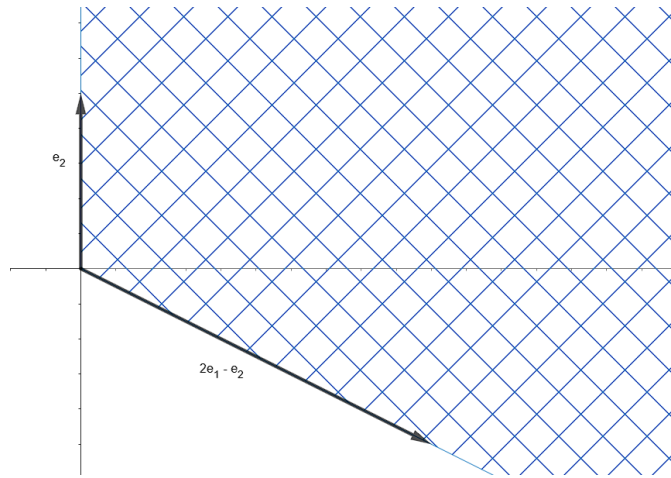


Figura 4.1: Cone σ no plano \mathbb{R}^2 .

Para encontrar seu cone dual σ^\vee , observamos que o dual de um cone qualquer sera a interse~c~ao dos semiespa~cos E_{v_i} , em que $E_{v_i} := \{u \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle v_i, u \rangle \geq 0\}$. Nesse caso, temos

$$\sigma^\vee = \{v \in (\mathbb{R}^2)^* \mid \langle e_2, v \rangle \geq 0 \text{ e } \langle 2e_1 - e_2, v \rangle \geq 0\}.$$

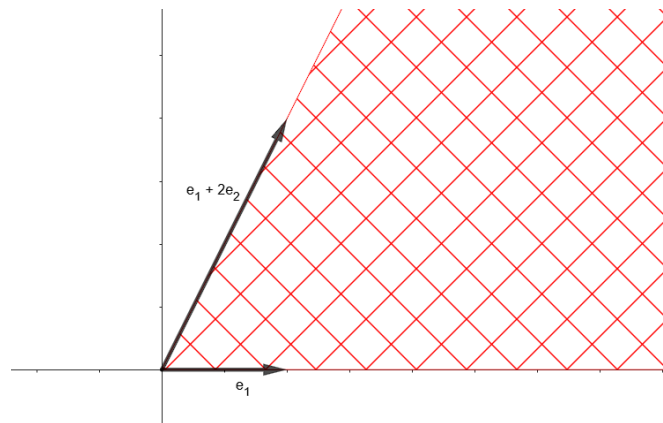


Figura 4.2: Cone dual de σ representado no plano \mathbb{R}^2 .

Em fim, encontraremos as faces de σ . Para tanto, devemos escolher funcionais do cone dual que estão na grade dual, isto é, tomar $\lambda^* \in \sigma^\vee \cap M$. Tomemos $\lambda_1^* \cong e_1 := \lambda_1$. Sabendo que um elemento do cone é forma $v = (2\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$, temos

$$\langle v, \lambda_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0.$$

Logo, a face τ_1 associada ao funcional λ_1^* é da forma $\tau_1 = \{(0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, que é o cone gerado por $v_1 = e_2$.

Analogamente, ao tomar $\lambda_2^* \cong e_1 + 2e_2 := \lambda_2$, verifica-se que dado $v \in \sigma$, temos

$$\langle v, \lambda_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_2 + 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0.$$

Desta forma, a face associada será $\tau_2 = \{(2\alpha_2, -\alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ o cone gerado pelo vetor $v_2 = 2e_1 - e_2$.

Tomando agora $\lambda_3^* \cong e_1 + e_2 := \lambda_3$, teremos para um $v \in \sigma$ que

$$\langle v, \lambda_3 \rangle = 0 \Leftrightarrow 2\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_2,$$

e como ambos são reais não negativos, tem-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, implicando que a face é $\tau_3 = \{0\}$.

Por fim, se tomarmos $\lambda_3^* \cong 0$, de maneira direta teremos que $\tau_4 = \sigma$. Perceba, que para quaisquer outros funcionais escolhidos em $\sigma^\vee \cap M$, resultaria em uma dessas quatro faces. Logo, as faces são respectivamente os cones gerados por $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{0\}$ e $\{v_1, v_2\}$.

4.2 Semigrupos

Na sequência, estudamos a estrutura algébrica que o conjunto $\sigma \cap N$ possui. Tal interseção apresenta uma estrutura de *semigrupo*.

Definição 4.2.1 (Semigrupo). Seja S um conjunto não vazio e $+$ uma operação binária em S . Diremos que S é um *semigrupo* se $+$ satisfazer:

- 1) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in S$;
- 2) $x + y = y + x, \forall x, y \in S$;
- 3) $\exists e \in S; x + e = e + x = x, \forall x \in S$;
- 4) $x + y = x + z \Rightarrow y = z, \forall x, y, z \in S$.

O conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ certamente é um semigrupo. De forma geral, o cartesiano finito dos naturais, com o zero, é um semigrupo aditivo. A seguir, temos a definição de semigrupo finitamente gerado.

Definição 4.2.2. Dados $y_1, \dots, y_t \in \mathbb{Z}^r$, temos que o conjunto

$$\langle y_1, \dots, y_t \rangle := \{ \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_t y_t \mid \lambda_i \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{Z}^r,$$

é um subsemigrupo de aditivo \mathbb{Z}^r . Diremos que $\langle y_1, \dots, y_t \rangle$ é o *semigrupo finitamente gerado* por $\{y_1, \dots, y_t\}$.

Lema 4.2.3. *Sejam $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone e $N = \mathbb{Z}^n$ sua grade. Então, o conjunto $\sigma \cap N$ é um semigrupo.*

Demonstração. De fato, dado $x, y \in \sigma \cap N$, sabemos que estes se escrevem da forma $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, em que $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, logo $x + y \in N = \mathbb{Z}^n$, afinal $x_i + y_i \in \mathbb{Z}$. Como ambos pertencem ao cone, temos que $x = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j$ e $y = \sum_{j=1}^m \beta_j v_j$, onde $\{v_1, \dots, v_m\}$ são os geradores de σ , então $x + y = \sum_{j=1}^m (\alpha_j + \beta_j) v_j$, implicando que $x + y \in \sigma$. Portanto, $x + y \in \sigma \cap N$. As demais propriedades se verificam, por serem válidas em \mathbb{R}^n , concluindo que $\sigma \cap N$ é um semigrupo. \square

Neste momento, estudamos o Lema de Gordon, um dos resultados mais relevantes de todo o trabalho, que garante a existência de um semigrupo finitamente gerado, associado a um cone grade. Tal semigrupo será essencial posteriormente na definição de variedade tórica.

Teorema 4.2.4 (Lema de Gordon). *Se $\sigma \in \mathbb{R}^n$ é um cone grade, então $\sigma \cap N$ é um semigrupo finitamente gerado.*

Demonstração. Já verificamos que $\sigma \cap N$ é um semigrupo. Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ os geradores do cone. Tomemos o seguinte conjunto $K := \left\{ \sum_{i=1}^r t_i v_i \mid t_i \in [0, 1] \right\}$ e a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] \times \dots \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t_1, \dots, t_r) &\mapsto t_1 v_1 + \dots + t_r v_r. \end{aligned}$$

Denotemos o cartesiano $[0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ por Q . Perceba que $\phi = \phi_1 + \dots + \phi_r$, em que as funções ϕ_i são tais que $\phi_i(t_1, \dots, t_r) = t_i v_i$ e possuem o mesmo domínio e contradomínio que ϕ . Dessa forma, ϕ é contínua, pelo Lema 1.3.5, pois é soma de funções contínuas. O conjunto Q é compacto, afinal é o cartesiano dos intervalos $[0, 1]$ que são fechados e limitados.

Portanto, pela Proposição 1.3.10, a imagem de ϕ é compacta e, como $\phi(Q)$ é exatamente o conjunto K , obtemos que K é compacto. A grade N é discreta, garantindo que $K \cap N \subseteq N$ também seja um conjunto discreto. Logo, o conjunto $K \cap N$ só tem pontos isolados, ou seja, o conjunto de seus pontos de acumulação $(K \cap N)'$ é vazio, o que por sua vez a Proposição 1.3.7 nos garante que $K \cap N$ é fechado, afinal

$$\overline{K \cap N} = (K \cap N) \cup (K \cap N)' = K \cap N \cup \emptyset = K \cap N.$$

Sendo assim, $K \cap N$ é compacto, já que é fechado e está contido no compacto K . Mas, $K \cap N$ é um conjunto de pontos isolados e compacto, pelo Lema 1.3.9, o conjunto $K \cap N$ é finito.

Por fim, provaremos que $\langle K \cap N \rangle = \sigma \cap N$. Tome $v \in \sigma \cap N$, em particular $v \in \sigma$, implicando que $v = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$, com $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Perceba que $\lambda_i = m_i + t_i$, onde $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $t_i \in [0, 1]$, para todo índice i . Deste modo,

$$v = \sum_{i=1}^r (m_i + t_i) v_i = \sum_{i=1}^r m_i v_i + \sum_{i=1}^r t_i v_i = \sum_{i=1}^r m_i v_i + 1 \cdot \sum_{i=1}^r t_i v_i. \quad (4.1)$$

Como σ é cone grade temos que $v_i \in N$. Além disso, $v_i \in K$, basta tomar $t_i = 1$ e zero nos demais índices. Consequentemente, $v_i \in K \cap N$, $\forall i = 1, \dots, r$. Por outro lado, $\sum_{i=1}^r t_i v_i \in K$, pela definição deste conjunto. Ademais, do fato que v e $\sum_{i=1}^r m_i v_i$ pertencem à grade, tem-se que $\sum_{i=1}^r t_i v_i \in N$, graças à estrutura de grupo de N . Dito isso, $\sum_{i=1}^r t_i v_i \in K \cap N$. Logo, a equação (4.1) nos garante que $v \in \langle K \cap N \rangle$. \square

Como σ^\vee é um cone grade, quando σ é grade, temos que $S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$ é um semigrupo finitamente gerado, e tal objeto irá nos auxiliar na construção de um anel especial no próximo capítulo.

Observação 4.2.5. Para o cone do Exemplo 4.1.6, os geradores do cone dual σ^\vee não são suficientes para gerar o semigrupo S_σ . Para isso, é necessário adicionar o vetor $(1, 1)$, i.e. $S_\sigma = \langle e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2 \rangle$.

Capítulo 5

Variedades tóricas por cones

Neste capítulo, utilizaremos grande parte do que foi apresentado anteriormente, para definir e compreender um subconjunto das variedades tóricas afins, as variedades tóricas associadas a um cone. Partindo de um cone σ , tomaremos os geradores do semigrupo finitamente gerado S_σ para construir um anel que irá determinar a variedade tórica associada.

5.1 Variedades tóricas associadas a cones

Primeiramente, definiremos um anel nos polinômios de Laurent a partir de um semigrupo S_σ . Tal anel será crucial para a definição das variedades tóricas via cones.

Seja $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ o anel de polinômios de n variáveis com coeficientes complexos. Considere o anel de polinômios de Laurent $\mathbb{C}[z, z^{-1}] := \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$, como definido no Exemplo 3.3.2. Recordando que neste anel de polinômios os expoentes pertencem a \mathbb{Z} . Considere a aplicação $\theta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, tal que

$$\theta(\alpha) = \theta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}. \quad (5.1)$$

Tal aplicação é um isomorfismo de grupos, entre o grupo aditivo \mathbb{Z}^n e o grupo multiplicativo dos polinômios mônicos de Laurent. De fato, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, temos que $\theta(\alpha + \beta) = z^{\alpha + \beta} = z^\alpha \cdot z^\beta = \theta(\alpha) \cdot \theta(\beta)$. A sobrejetividade ocorre naturalmente. Já para a injetividade, suponha que $\theta(\alpha) = \theta(\beta)$, então $z^\alpha = z^\beta \Rightarrow z^{\alpha - \beta} = 1$, implicando que $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

Baseado nisso, sempre podemos identificar um elemento da grade \mathbb{Z}^n com um polinômio mônico de Laurent. Na sequência, apresentaremos a definição do suporte de um polinômio de Laurent.

Definição 5.1.1. Dado um polinômio de Laurent $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \lambda_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, onde $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$, definimos o *suporte* de f como sendo o conjunto

$$\text{Supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_\alpha \neq 0\}.$$

A partir dessa definição, podemos construir um anel e na sequência mostrar como esse se relaciona com o anel de polinômios de r variáveis com coeficientes complexos.

Proposição 5.1.2. *Se $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ é um cone grade, então o conjunto*

$$R_\sigma := \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] \mid \text{Supp}(f) \subseteq S_\sigma\}$$

é uma \mathbb{C} -álgebra finitamente gerada, isto é, existe um homomorfismo $\phi: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] \rightarrow R_\sigma$ sobrejetor.

Demonstração. Verificamos de forma direta que R_σ é um subanel de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Seja $\{b_1, \dots, b_r\}$ os geradores do semigrupo S_σ , em que cada $b_i = (\beta_1^i, \dots, \beta_n^i) \in \mathbb{Z}^n$. Definimos $\mathbb{C}[u] := \mathbb{C}[u_1, \dots, u_r]$, no qual $u_i = z^{b_i} := z_1^{\beta_1^i} \cdots z_n^{\beta_n^i}$. Notemos que $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \lambda_\alpha z^\alpha \in R_\sigma$ se, e somente se, $\alpha = \mu_1 b_1 + \cdots + \mu_r b_r$ tal que $\mu_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \lambda_\alpha z^{\mu_1 b_1 + \cdots + \mu_r b_r} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \lambda_\alpha (z^{b_1})^{\mu_1} \cdots (z^{b_r})^{\mu_r} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \lambda_\alpha (u_1)^{\mu_1} \cdots (u_r)^{\mu_r} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \lambda_\alpha u^\mu ; \mu \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^r \text{ e } \lambda_\alpha \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f \in \mathbb{C}[u]. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\mathbb{C}[u] = R_\sigma$. Tomando o anel de polinômios usual de r variáveis, com coeficientes complexos, $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]$, definimos o seguinte homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} h: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] &\longrightarrow \mathbb{C}[u_1, \dots, u_r] \\ \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} \lambda_\gamma x^\gamma &\longmapsto \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} \lambda_\gamma u^\gamma. \end{aligned}$$

Decorre da definição de h que este é um homomorfismo sobrejetor, implicando que R_σ é uma \mathbb{C} -álgebra finitamente gerada. \square

Finalmente, temos em mãos todas as ferramentas necessárias para a definição das variedades tóricas afins.

Definição 5.1.3 (Variedade tórica associada a σ). Dado $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone grade, a variedade tórica afim associada é $X_\sigma := \text{Specm}(R_\sigma)$.

A seguir, construiremos um exemplo de variedade tórica afim.

Exemplo 5.1.4. Consideremos o cone $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ do Exemplo 4.1.6. Então, podemos construir a variedade tórica associada a esse cone. O semigrupo S_σ associado é $\langle e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2 \rangle$. Denotemos $b_1 = (1, 0), b_2 = (1, 1), b_3 = (1, 2)$. Escrevendo R_σ como na demonstração anterior, temos $R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]$, em que $u_1 = z^{(1,0)} = z_1, u_2 = z^{(1,1)} = z_1 z_2$ e $u_3 = z^{(1,2)} = z_1 z_2^2$. Tomando o seguinte epimorfismo de anéis

$$\begin{aligned} h: \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] &\rightarrow \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] \\ \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^2} \lambda_\gamma x^\gamma &\mapsto \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^2} \lambda_\gamma u^\gamma, \end{aligned}$$

e observando que $b_1 + b_3 = 2b_2$, encontramos a seguinte relação $u_1 u_3 = z_1^2 z_2^2 = (z_1 z_2)^2 = u_2^2$. Logo $u_1 u_3 - u_2^2 = 0$, assim $h(x_1 x_3 - x_2^2) = 0$, implicando que $\ker h = (x_1 x_3 - x_2^2) := I_\sigma$. Pelo Teorema do Isomorfismo 1.1.34, temos:

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]}{I_\sigma} \cong \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] = R_\sigma.$$

Perceba que R_σ é um domínio de integridade, afinal \mathbb{C} é domínio de integridade. Portanto, $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/I_\sigma$ é domínio de integridade, garantindo que I_σ é ideal primo. Sabemos que $\sqrt{I_\sigma} = I_\sigma$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert 3.1.14, temos que $I_\sigma = \sqrt{I_\sigma} = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I_\sigma))$. Logo,

$$\mathbb{C}[\mathbf{V}(I_\sigma)] = \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]}{\mathbf{I}(\mathbf{V}(I_\sigma))} = \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]}{I_\sigma} \cong R_\sigma.$$

O Teorema de Nullstellensatz 3.2.5 implica que $\text{Specm}(R_\sigma) \cong \text{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{V}(I_\sigma)]) \longleftrightarrow \mathbf{V}(I_\sigma)$. Por fim, tem-se que $X_\sigma = \text{Specm}(R_\sigma) \cong \mathbf{V}(I_\sigma)$. Então, podemos concluir que a variedade tórica associada a σ são os pontos da seguinte forma

$$X_\sigma = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 x_3 = x_2^2; x \in \mathbf{V}(I_\sigma)\}.$$

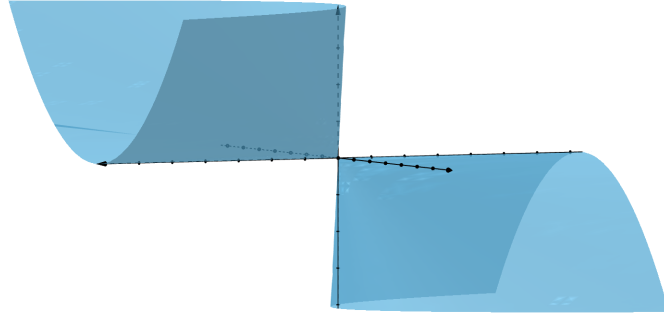


Figura 5.1: X_σ em \mathbb{C}^3 (representação real)

Observação 5.1.5. O processo realizado no exemplo acima pode ser generalizado para um cone grade qualquer. Bastará apenas identificar as relações entre os geradores do semigrupo. Dado σ um cone grade, tal que $S_\sigma = \langle b_1, \dots, b_r \rangle$, tomemos L como o conjunto de todas as relações aditivas entre os b_i 's, ou seja,

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^r v_i b_i = \sum_{i=1}^r w_i b_i \mid v_i, w_i \in \mathbb{Z} \text{ e } v_i \neq w_i, \forall i = 1, \dots, r \right\}.$$

Considerando o homomorfismo sobrejetor $h: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] \rightarrow \mathbb{C}[u_1, \dots, u_r]$ da Proposição 5.1.2 e denotando por m a cardinalidade de L , temos que cada uma das m relações de L corresponde a uma relação multiplicativa entre os u_i 's. Chamemos de L^* o conjunto de todas essas relações

$$L^* = \left\{ \prod_{i=1}^r u_i^{v_i} = \prod_{i=1}^r u_i^{w_i} \mid v_i, w_i \in \mathbb{Z} \text{ e } v_i \neq w_i, \forall i = 1, \dots, r \right\}.$$

Assim, para cada polinômio $p_j \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r]$, tal que $p_j := \prod_{i=1}^r x_i^{v_i} - \prod_{i=1}^r x_i^{w_i}$, teremos que $h(p_j) = \prod_{i=1}^r u_i^{v_i} - \prod_{i=1}^r u_i^{w_i} = 0$, $\forall j = 1, \dots, m$. Portanto, $I_\sigma := \ker h = (p_1, \dots, p_m)$. Seguindo os mesmos passos do exemplo conclui-se que

$$X_\sigma = \mathbf{V}(I_\sigma) = \{x = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r \mid p_1(x) = \dots = p_m(x) = 0\}.$$

Logo, temos que toda variedade tórica afim gerada por um cone σ é uma variedade algébrica afim determinada pelo ideal primo I_σ .

Por fim, o leitor pode se perguntar o porquê tais variedades recebem o nome de “tóricas”. Na verdade toda variedade tórica X_σ , associada ao semigrupo finitamente gerado $S_\sigma \subseteq \mathbb{Z}^n$, se relaciona intrinsecamente ao *toro algébrico* n -dimensional, que é o grupo multiplicativo $(\mathbb{C}^*)^n$. Vejamos o seguinte exemplo que mostra como ambos os objetos interagem, através de uma ação algébrica do toro sobre a variedade algébrica.

Exemplo 5.1.6. Seja $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ o cone do Exemplo 4.1.6 e considere a variedade tórica afim X_σ associada, que obtemos no Exemplo 5.1.4. Então, podemos definir a seguinte ação do toro $(\mathbb{C}^*)^2$ em X_σ :

$$\begin{aligned} \mu : (\mathbb{C}^*)^2 \times X_\sigma &\rightarrow X_\sigma \subseteq \mathbb{C}^3 \\ (t, x) &\mapsto t \cdot x = (t^{b_1}x_1, \dots, t^{b_3}x_3). \end{aligned}$$

Tomando os seguintes pontos $p_1 = (1, 0, 0)$, $p_2 = (0, 0, 1)$, $p_3 = (1, 1, 1)$ e $p_4 = (0, 0, 0)$ pertencentes à variedade X_σ , as órbitas desses pontos, pela ação μ , são os seguintes conjuntos:

- A órbita de p_1 é o conjunto $\{(t_1, t_2) \cdot p_1 = (t_1, 0, 0) \mid t_1 \in \mathbb{C}^*\} = \mathbb{C}^* \times \{0\} \times \{0\}$;
- A órbita de p_2 é o conjunto $\{(t_1, t_2) \cdot p_2 = (0, 0, t_1 t_2^2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*\} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}^*$;
- A órbita de p_3 é o conjunto $\{(t_1, t_2) \cdot p_3 = (t_1, t_1 t_2, t_1 t_2^2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*\} = (\mathbb{C}^*)^2$;
- A órbita de p_4 é o conjunto $\{(t_1, t_2) \cdot p_4 = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0, 0)\}$.

Na verdade, essas são todas as órbitas da ação. De forma geral, o ponto $(1, \dots, 1)$ sempre irá determinar uma órbita, que é exatamente o toro n -dimensional, ou seja, a inclusão $(\mathbb{C}^*)^n \hookrightarrow X_\sigma$ sempre ocorre. Veremos no próximo capítulo que esta relação de inclusão se estende às variedades tóricas não necessariamente geradas por cones.

Capítulo 6

Toro e a classificação das variedades tóricas

Neste capítulo, apresentaremos os objetos e os resultados centrais deste trabalho. Inicialmente, definindo o toro algébrico que dá nome a esse estudo, focando nas principais características desse objeto algébrico. Posteriormente, veremos a definição clássica das variedades tóricas afins e uma série de resultados a respeito delas. Por último, estudaremos o teorema que caracteriza as variedades tóricas.

6.1 Toro algébrico

Nesta seção, iremos definir o toro e alguns dos conceitos associados a este objeto. Por fim, exibiremos a definição das variedades tóricas afins. O toro será um conjunto algébrico e para defini-lo se faz necessário a noção de isomorfismo entre conjuntos algébricos:

Definição 6.1.1. Seja $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ uma aplicação entre dois conjuntos algébricos. Tome o homomorfismo induzido $\phi^* : \mathbb{C}[V_2] \rightarrow \mathbb{C}[V_1]$, no qual $\phi^*(h) = h \circ \phi$, para $h \in \mathbb{C}[V_2]$. Dizemos que V_1 e V_2 são isomorfos se ϕ^* for um isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras.

Sabemos que $(\mathbb{C}^*)^n$ é um conjunto algébrico, graças ao Exemplo 3.3.2. Além disso, o conjunto $(\mathbb{C}^*)^n$ tem uma estrutura de grupo através da multiplicação coordenada-coordenada. Dito isso, podemos apresentar a definição

Definição 6.1.2 (Toro). Seja $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}^r$ um conjunto algébrico afim. Então, \mathbb{T} recebe o nome de *toro algébrico* se for isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^n$, para algum n natural. O toro \mathbb{T} herda a estrutura de grupo multiplicativo de $(\mathbb{C}^*)^n$, através do isomorfismo.

Novamente, pelo Exemplo 3.3.2, o conjunto $(\mathbb{C}^*)^n$ é uma variedade algébrica, para todo n natural, ou seja, todo toro $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^n$ é um conjunto algébrico irredutível.

Para trabalharmos com o toro é necessário a definição de dois conceitos associados a este objeto. O carácter é o primeiro deles.

Definição 6.1.3 (Caráter). Um caráter de um toro \mathbb{T} é uma aplicação $\chi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$, tal que χ é um homomorfismo de grupos.

No caso em que $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$, a proposição à seguir caracteriza seus caracteres.

Proposição 6.1.4. *Os caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$ são as aplicações de $(\mathbb{C}^*)^n$ em \mathbb{C}^* , dadas da seguinte forma:*

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto t^m := t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}, \text{ para algum } m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Demonstração. Fixe a ordem lexicográfica monomial no anel dos polinômios de Laurent $\mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$. Seja $L(p)$ e $M(p)$, respectivamente, o menor e o maior termo de um polinômio p . Dado um caráter qualquer $\phi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$, tome o correspondente homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras $\phi^* : \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$, de acordo com a Definição 6.1.1. Suponha que $\phi^*(x_1) = p$ e $\phi^*(x_1^{-1}) = q$. Logo,

$$pq = \phi^*(x_1) \cdot \phi^*(x_1^{-1}) = \phi^*(x_1 x_1^{-1}) = \phi^*(1) = 1 \circ \phi = 1.$$

Consequentemente, temos que $L(p)L(q) = L(pq) = 1 = M(pq) = M(p)M(q)$, implicando que $L(p) = M(p)$, ou seja, p é um monômio. Dessa forma, temos que $\phi^*(x_1) = p = \alpha x^m \in \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$, com $\alpha \in \mathbb{C}^*$ e $m \in \mathbb{Z}^n$. Pela definição desse homomorfismo, $\phi^*(x_1) = x_1 \circ \phi = \alpha x^m$ e como x_1 é a função polinomial de \mathbb{C}^* em \mathbb{C} , tal que $t \mapsto t$, temos que

$$\alpha t^m = \alpha x^m(t) = (x_1 \circ \phi)(t) = x_1(\phi(t)) = \phi(t), \quad \forall t \in (\mathbb{C}^*)^n,$$

garantindo que $\phi(t) = \alpha t^m$. Por fim, temos que $\alpha = 1$, afinal ϕ é homomorfismo de grupos e devemos ter que $\phi(1) = 1$. \square

Nesse sentido, quando $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ há um caráter χ^m para cada $m \in \mathbb{Z}^n$, tal que $\chi^m(t) := t^m$. Logo, temos o seguinte isomorfismo de grupo aditivos $\text{Hom}((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}^n$. Para o caso geral, o conjunto dos caracteres de \mathbb{T} é o grupo $M = \text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$, onde M é um grupo abeliano livre de posto igual à dimensão de \mathbb{T} . Diremos que para cada $m \in M$ tem-se um caráter $\chi^m : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$.

O segundo conceito a ser definido, também será um homomorfismo envolvendo o toro algébrico.

Definição 6.1.5 (1-parâmetro). Um subgrupo a um parâmetro ou 1-parâmetro subgrupo de um toro algébrico \mathbb{T} é uma aplicação $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}$, tal que λ é um homomorfismo de grupos.

De forma análoga, quando $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$, temos que existe um 1-parâmetro subgrupo λ^u , para todo $u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, onde $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ é descrito por:

$$\lambda^u(t) = (t^{b_1}, \dots, t^{b_n}).$$

Resultando no isomorfismo $Hom(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) \cong \mathbb{Z}^n$. Já de forma geral, o grupo composto pelos 1-parâmetros de \mathbb{T} será $N = Hom(\mathbb{C}^*, \mathbb{T})$, em que N é um grupo abeliano livre de posto igual a dimensão do toro.

Na verdade, o toro algébrico pode ser estudado do ponto de vista dos grupos algébricos lineares. Baseado nessa teoria, obtemos alguns resultados úteis que apresentaremos no lema a seguir. A prova desses resultados não será feita nesse trabalho, entretanto pode ser obtida em [7] e [15].

Lema 6.1.6.

I) *Sejam \mathbb{T} um toro e W um espaço vetorial complexo de dimensão finita, tal que \mathbb{T} age linearmente em W , isto é, a aplicação $w \mapsto t \cdot w$ é uma ação e um operador linear de W em W , para todo $t \in \mathbb{T}$. Então, temos que $W = \bigoplus_{m \in M} W_m$, onde W_m é o seguinte autoespaço, para $m \in M$:*

$$W_m = \{w \in W \mid t \cdot w = \chi^m(t)w \text{ para todo } t \in \mathbb{T}\}.$$

II) *Sejam $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ dois toros e $\phi : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ um homomorfismo de grupos. Então, a imagem $\phi(\mathbb{T}_1) \subseteq \mathbb{T}_2$ será um toro e um conjunto fechado de \mathbb{T}_2 .*

III) *Sejam \mathbb{T} um toro e $H \subseteq \mathbb{T}$ um subgrupo. Se H é uma variedade algébrica em \mathbb{T} , então H é um toro. \square*

Observação 6.1.7. Existe uma aplicação bilinear natural $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$, onde M e N são, respectivamente, os grupos dos caracteres e dos 1-parâmetros subgrupos do toro \mathbb{T} . De fato, dados $\chi \in M$ e $\lambda \in N$, a composição $\chi \circ \lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ é um caráter do toro \mathbb{C}^* , pela Proposição 6.1.4, existe um único $\ell \in \mathbb{Z}$ associado a esse caráter. Assim, fica definido $\langle \chi, \lambda \rangle = \ell$.

Quando $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$, tal aplicação será o produto interno usual de \mathbb{R}^n . Com efeito, como $M = \mathbb{Z}^n$ e $N = \mathbb{Z}^n$, tomemos $m = (a_1, \dots, a_n), u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ e posteriormente χ^m e λ^u . Agora, perceba que a composição $\chi^m \circ \lambda^u$ toma um $t \in \mathbb{C}^*$ e faz

$$t \mapsto (t^{b_1}, \dots, t^{b_n}) \mapsto (t^{b_1})^{a_1} \dots (t^{b_n})^{a_n} = t^{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n} = t^\ell, \text{ em que } \ell = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

ou seja, $\langle m, u \rangle = \ell = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, que é o produto interno usual.

Além disso, tal aplicação identifica o grupo N com o grupo dos homomorfismos de M em \mathbb{Z} , isto é, existe uma correspondência biunívoca entre os grupos N e $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$. Em outras palavras, para cada homomorfismo $\phi : M \rightarrow \mathbb{Z}$, existe um único 1-parâmetro subgrupo λ , tal que $\phi(\chi) = \langle \chi, \lambda \rangle$ para todo χ . A verificação desse fato, segue de forma análoga a demonstração do teorema da representação de Riesz para espaços vectoriais. Naturalmente, também temos a identificação contrária, entre o grupo M e o grupo $Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$.

Já em termos do produto tensorial, dados \mathbb{T} um toro e N o grupo dos 1-parâmetros, obtemos o seguinte isomorfismo canônico $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong \mathbb{T}$, através de $\lambda \otimes t \mapsto \lambda(t)$. Logo, para cada grupo abeliano livre N de posto finito, existe um único toro associado $\mathbb{T}_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$.

Concluimos, que ao tomar o isomorfismo $\mathbb{T}_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$, induzimos os isomorfismos $M \cong \mathbb{Z}^n$ e $N \cong \mathbb{Z}^n$, resultando que a imagem dos caracteres, em cada ponto, é um monômio de Laurent e a imagem de cada 1-parâmetro subgrupo por um complexo é uma curva monomial em $(\mathbb{C}^*)^n$.

Definição 6.1.8 (Grade). Uma *grade* é um grupo abeliano livre de posto finito. Em outras palavras, um grupo será uma grade se for isomorfo a \mathbb{Z}^n , para algum $n \in \mathbb{N}$.

Assim, o grupo dos caracteres M e o grupo dos 1-parâmetros subgrupos N de um toro \mathbb{T} são ambos grades. Por outro lado, dado uma grade N qualquer de posto n , pela Observação 6.1.7 existe um único toro $\mathbb{T}_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$, tal que N é a grade dos 1-parâmetros e, por sua vez, uma única grade $M \cong \mathbb{Z}^n$ dos caracteres de \mathbb{T}_N .

A seguir, apresentaremos a definição das variedades tóricas afins, objeto central deste trabalho.

Definição 6.1.9 (Variedade tórica afim). Uma *variedade tórica afim* é uma variedade algébrica V contendo o toro $\mathbb{T}_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$ como um subconjunto aberto e denso de Zariski, tal que a ação de \mathbb{T}_N sobre si mesmo estende-se a uma ação algébrica $\mathbb{T}_N \times V \rightarrow V$. Dizemos que a dimensão de uma variedade tórica é igual à dimensão do toro que a define.

Perceba que esta definição é demasiadamente diferente da Definição 5.1.3 de variedade tórica associado a um cone σ , contudo veremos ao longo deste capítulo que a definição via cones satisfaz a definição geral de variedades tóricas.

Ademais, estudamos alguns exemplos de variedades tóricas. A princípio veja que $(\mathbb{C}^*)^n$ e \mathbb{C}^n são ambas tóricas, afinal o toro $(\mathbb{C}^*)^n$ é um aberto em si mesmo e é aberto em \mathbb{C}^n , pelo Exemplo 3.3.2.

Exemplo 6.1.10. A variedade algébrica V do Exemplo 3.3.4 é tórica. Mostremos que V contém o toro \mathbb{C}^* como um aberto. Lembremos que $V = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid u^3 = v^2\}$, e como $\{0\}$ é um fechado, naturalmente $V \setminus \{0\}$ é um aberto. Basta observar que

$$V \setminus \{0\} = V \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t^2, t^3) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*,$$

onde o isomorfismo é dado pela aplicação $t \mapsto (t^2, t^3)$. Com isso, $\mathbb{C}^* \cong V \setminus \{0\} \subseteq V$, garantindo que V contém um toro aberto e denso. Tomando um elemento $t' = (t^2, t^3)$ pertencente ao toro $V \setminus \{0\}$ e um elemento $x = (u, v)$ de V , provemos que a aplicação $t' \cdot x = (t^2u, t^3v)$, dada pelo produto em cada coordenada, é uma ação algébrica $V \setminus \{0\} \times V \rightarrow V$. De fato, sabemos que $u^3 = v^2$, afinal $x \in V$. Logo,

$$(t^2u)^3 = t^6u^3 = (t^3)^2v^2 = (t^3v)^2 \Rightarrow t' \cdot x = (t^2u, t^3v) \in V.$$

Ainda, para $1' = (1^2, 1^3)$ e $s' = (s^2, s^3)$ temos que $1' \cdot x = (1^2u, 1^3v) = x$ e $(s't') \cdot x = (s^2t^2u, s^3t^3v) = s' \cdot (t' \cdot x)$. Portanto, a ação do produto em $V \setminus \{0\}$ estende-se a uma ação em V , implicando que V é uma variedade tórica.

Na sequência, incorporamos o conceito de variedade algébrica normal, visto na Definição 3.3.3, ao conceito de variedade tórica.

Definição 6.1.11 (Variedades tóricas normais). Seja V uma variedade tórica. Se V for uma variedade normal, dizemos que V é uma *variedade tórica normal*. Caso contrário, V é dita *variedade tórica não normal*.

Pelos Exemplos 3.3.4 e 6.1.10, $V = \mathbf{V}(x^3 - y^2)$ é uma variedade tórica não normal. Posteriormente, classificaremos as variedades tóricas normais, que serão exatamente as variedades tóricas geradas por cones fortemente convexos.

Vejam os seguinte lema, que garante a existência de um homomorfismo entre duas grades de caracteres.

Lema 6.1.12. *Sejam $V_1 \cong (\mathbb{C}^*)^n$ e $V_2 \cong (\mathbb{C}^*)^s$ duas variedades tóricas e $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ um homomorfismo de grupos. Então, existe um homomorfismo $M_2 \rightarrow M_1$, onde M_i é a grade dos caracteres de V_i .*

Demonstração. Temos, a menos de isomorfismos, o seguinte homomorfismo $\phi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s$. Considere o respectivo homomorfismo induzido $\phi^* : \mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^s] \rightarrow \mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n]$, definido na Definição 6.1.1. Pelo Exemplo 3.3.2, sabemos que os anéis de coordenadas $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^s]$ e $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n]$ são exatamente $\mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_s^\pm]$ e $\mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$, respectivamente. Perceba que ϕ^* leva polinômios mônicos de Laurant em polinômios mônicos de Laurant. Agora, considere os isomorfismos $\theta_1 : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^s$ e $\theta_2 : \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{Z}^n$, definidos na Equação 5.1. Por fim, sabemos que $M_1 \cong \mathbb{Z}^n$ e $M_2 \cong \mathbb{Z}^s$. Então, a menos de isomorfismos, temos a seguinte composição que será um homomorfismo de grades:

$$M_2 \xrightarrow{\theta_2} \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_s^\pm] \xrightarrow{\phi^*} \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm] \xrightarrow{\theta_1^{-1}} M_1.$$

□

Neste momento, foi possível a definição de um importante mapa envolvendo o toro. Dado um toro $\mathbb{T}_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$ com a grade M dos caracteres, podemos tomar um subconjunto finito $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M \cong \mathbb{Z}^n$, resultando nos caracteres $\chi^{m_i} : \mathbb{T}_N \rightarrow \mathbb{C}^*$. Com isso, temos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}_N &\rightarrow \mathbb{C}^s \\ t &\mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)). \end{aligned}$$

Tal aplicação gera uma variedade tórica associada ao conjunto \mathcal{A} , que é o fecho de Zariski da imagem de $\varphi_{\mathcal{A}}$, isto é, o conjunto $U_{\mathcal{A}} := \overline{\varphi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}_N)}$ é uma variedade tórica. Para tal afirmação vejamos a seguinte proposição:

Proposição 6.1.13. *Sejam $\mathcal{A} \subseteq M$ um subconjunto finito da grade e $\mathbb{Z}\mathcal{A} \subseteq M$ a subgrade gerada por \mathcal{A} . Então, $U_{\mathcal{A}}$ é uma variedade tórica afim, cuja grade dos caracteres do toro correspondente é $\mathbb{Z}\mathcal{A}$. Em particular, a dimensão de $U_{\mathcal{A}}$ é o posto de $\mathbb{Z}\mathcal{A}$.*

Demonstração. Ao restringirmos o mapa $\varphi_{\mathcal{A}}$, no contradomínio, ao toro $(\mathbb{C}^*)^s$

$$\varphi'_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}_N \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s,$$

obtemos um homomorfismo entre toros. Denotando por $T := \varphi'_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}_N)$, sabemos que T é um toro fechado em $(\mathbb{C}^*)^s$, pelo Lema 6.1.6. Note que $U_{\mathcal{A}}$ é um fechado em \mathbb{C}^s , assim $U_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$ é um fechado em $(\mathbb{C}^*)^s$. Daí, seguem as igualdades

$$U_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s = \overline{\varphi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}_N)} \cap (\mathbb{C}^*)^s = \overline{\varphi'_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}_N)} = \bar{T} = T,$$

resultando que $U_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s = T$. Como $(\mathbb{C}^*)^s$ é um aberto em \mathbb{C}^s , teremos que T é um aberto em $U_{\mathcal{A}}$ e o fecho de T com relação a $U_{\mathcal{A}}$ é o próprio conjunto $U_{\mathcal{A}}$, implicando que T é denso em $U_{\mathcal{A}}$. O fato que T é um toro implica, em particular, que T é irredutível, garantindo o mesmo para $U_{\mathcal{A}}$, afinal caso contrário resultaria na contradição de T não ser irredutível. Agora, é possível definir uma ação de T nos pontos de \mathbb{C}^s , emprestando a ação da variedade tórica $(\mathbb{C}^*)^s$ que contém T . Dados $t = (t_1, \dots, t_s) \in T$ e $v = (v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{C}^s$, definimos a ação da seguinte forma:

$$t \cdot v = (t_1, \dots, t_s) \cdot (v_1, \dots, v_s) \mapsto (t_1 v_1, \dots, t_s v_s) \in \mathbb{C}^s.$$

Tal ação é contínua, pelo Lema 1.3.5, logo é uma aplicação fechada, que leva conjuntos algébricos em conjuntos algébricos. Fazendo essa ação sobre o próprio T , ficamos com $T = t \cdot T$, já que T é um grupo multiplicativo. Então, $T = t \cdot T \subseteq t \cdot U_{\mathcal{A}}$, afinal $T \subseteq U_{\mathcal{A}}$. Como a ação preserva fechados, $t \cdot U_{\mathcal{A}}$ será um conjunto algébrico, contendo T . Entretanto, $U_{\mathcal{A}}$ é o menor fechado contendo T , assim $U_{\mathcal{A}} \subseteq t \cdot U_{\mathcal{A}}$. Repetindo tal raciocínio para t^{-1} ao invés de t , resulta em $U_{\mathcal{A}} \subseteq t^{-1} \cdot U_{\mathcal{A}}$ e efetuando novamente a ação por t nesses dois conjuntos teremos que

$$t \cdot U_{\mathcal{A}} \subseteq t \cdot t^{-1} \cdot U_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}} \subseteq t \cdot U_{\mathcal{A}} \Rightarrow U_{\mathcal{A}} = t \cdot U_{\mathcal{A}}.$$

Logo, a ação de t sobre o toro T induziu uma ação $T \times U_{\mathcal{A}} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$, concluindo que $U_{\mathcal{A}}$ é de fato uma variedade tórica afim, associada ao toro T . Agora, chamemos de M' a grade dos caracteres do toro T , por definição $T \cong (\mathbb{C}^*)^r$, para algum r tal que $r \leq s$. Dessa maneira, a menos de isomorfismos, temos a projeção $\pi : \mathbb{T}_N \rightarrow T$, onde $\pi(t) = \varphi'_{\mathcal{A}}(t)$, e a inclusão $i : T \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^s$. Assim, o homomorfismo $\varphi'_{\mathcal{A}}$ faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_N & \xrightarrow{\pi} & T \\ & \searrow \varphi'_{\mathcal{A}} & \downarrow i \\ & & (\mathbb{C}^*)^s \end{array}$$

Esse diagrama induz um diagrama sobre as grades, através do Lema 6.1.12, da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} M & \longleftrightarrow & M' \\ & \swarrow \phi_{\mathcal{A}} & \uparrow \\ & & \mathbb{Z}^s \end{array}$$

em que $\phi_{\mathcal{A}}$ é um homomorfismo que leva a base canônica $\{e_1, \dots, e_s\}$ de \mathbb{Z}^s nos respectivos de $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$. Com efeito, dado $e_i \in \{e_1, \dots, e_s\}$ sabemos que o homomorfismo $\phi_{\mathcal{A}}$, por construção, faz $e_i \mapsto x^{e_i} = x_i \mapsto x_i \circ \varphi'_{\mathcal{A}}$, em que

$$x_i \circ \varphi'_{\mathcal{A}}(t) = x_i(\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) = \chi^{m_i}(t) = t^{m_i}, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}_N \Rightarrow x_i \circ \varphi'_{\mathcal{A}} = x^{m_i}.$$

Conseqüentemente, temos que $e_i \mapsto x^{m_i} \mapsto m_i$, isto é, $\phi_{\mathcal{A}}(e_i) = m_i$, garantindo que $\phi_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}^s) = \mathbb{Z}\mathcal{A}$ e, por sua vez, como o diagrama é comutativo, a grade M' é isomorfa à imagem de $\phi_{\mathcal{A}}$. Portanto, $M' \cong \mathbb{Z}\mathcal{A}$ de posto igual a dimensão do toro T , que é a dimensão da variedade tórica $U_{\mathcal{A}}$. \square

6.2 Caracterização das variedades tóricas

Neste momento, nosso objetivo é apresentar a caracterização das variedades tóricas afins. Para isso, veremos diversos resultados a respeito das variedades tóricas. Inicialmente, estudaremos o ideal $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$ associado à variedade tórica $U_{\mathcal{A}}$ que construímos na Proposição 6.1.13.

Proposição 6.2.1. *Sejam \mathbb{T}_N um toro, M a grade dos caracteres e $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ um subconjunto finito. Então, o ideal da variedade tórica afim $U_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$ será:*

$$\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) = (\{x^a - x^b \mid a, b \in \mathbb{N}^s \text{ e } a - b \in \ker \phi_{\mathcal{A}}\}) := I_{\mathcal{A}},$$

onde $\phi_{\mathcal{A}}$ é o homomorfismo de grades de \mathbb{Z}^s em M , da demonstração anterior, que leva $(u_1, \dots, u_s) \mapsto \sum_{i=1}^s u_i m_i$.

Demonstração. Note que, os elementos do núcleo $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in \ker \phi_{\mathcal{A}}$ são tais que $\sum_{i=1}^s \ell_i m_i = 0$. Agora, tomemos $a = (a_1, \dots, a_s)$ e $b = (b_1, \dots, b_s)$, tais que $a, b \in \mathbb{N}^s$ e $a - b \in \ker \phi_{\mathcal{A}}$. Mostremos que o polinômio $p = x^a - x^b$ pertence ao ideal $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$. De fato, tome $y \in \varphi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}_N)$, então $y = (\chi^{m_1}(t_0), \dots, \chi^{m_s}(t_0))$, para algum $t_0 \in \mathbb{T}_N$. Assim,

$$y^a - y^b = (\chi^{m_1}(t_0))^{a_1} \dots (\chi^{m_s}(t_0))^{a_s} - (\chi^{m_1}(t_0))^{b_1} \dots (\chi^{m_s}(t_0))^{b_s} = \chi^{\sum_{i=1}^s a_i m_i}(t_0) - \chi^{\sum_{i=1}^s b_i m_i}(t_0),$$

a última igualdade segue do fato que χ^{m_i} pertence ao grupo abeliano livre M e que $a_i, b_i \in \mathbb{N}$. Como $a - b$ está no núcleo, temos que $\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i$, implicando que $\chi^{\sum_{i=1}^s a_i m_i} = \chi^{\sum_{i=1}^s b_i m_i}$, garantindo que $y \in \mathbf{V}(\{p\})$. Dessa forma, $U_{\mathcal{A}} = \overline{\varphi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}_N)} \subseteq \overline{\mathbf{V}(\{p\})} = \mathbf{V}(\{p\})$, isto é, $p \in \mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$.

Para a outra inclusão, $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) \subseteq I_{\mathcal{A}}$, tome uma ordem monomial \succeq em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ e considere o isomorfismo $\mathbb{T}_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$. Suponha que $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) \setminus I_{\mathcal{A}}$ seja não vazio e escolha $p \in \mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) \setminus I_{\mathcal{A}}$, tal que seu termo líder $x^\alpha = \prod_{i=1}^s x_i^{\alpha_i}$ é mínimo em $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) \setminus I_{\mathcal{A}}$, com respeito à ordem monomial, pelo isomorfismo $M = \mathbb{Z}^n$ e $\varphi_{\mathcal{A}}(t) = (t^{m_1}, \dots, t^{m_s}) \in U_{\mathcal{A}}$, para $t \in \mathbb{T}_N$. Logo, $p(t^{m_1}, \dots, t^{m_s}) = 0$, ou seja, $p(\varphi_{\mathcal{A}}(t))$ é o polinômio identicamente nulo nas variáveis t_1, \dots, t_n , implicando em alguns cancelamentos envolvendo o termo x^α desse polinômio. Tal fato garante a existência de um termo $x^\beta = \prod_{i=1}^s x_i^{\beta_i} \preceq x^\alpha$ em p , tal que

$$\prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{\beta_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^s \alpha_i m_i = \sum_{i=1}^s \beta_i m_i \Rightarrow \alpha - \beta \in \ker \phi_{\mathcal{A}} \Rightarrow x^\alpha - x^\beta \in I_{\mathcal{A}}.$$

Assim, definimos o polinômio $q := p - x^\alpha + x^\beta$, que certamente se anula em $U_{\mathcal{A}}$ e não pertence a $I_{\mathcal{A}}$, pois, caso contrário, p pertenceria ao ideal $I_{\mathcal{A}}$. Portanto, $q \in \mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) \setminus I_{\mathcal{A}}$, porém o termo líder de q é menor que x^α , uma contradição pela minimalidade de x^α . \square

Na sequência, alinhado com essa proposição, definimos dois tipos de ideais especiais.

Definição 6.2.2. Seja $L \subseteq \mathbb{Z}^s$ uma subgrade qualquer, o ideal

$$I_L = (\{x^a - x^b \mid a, b \in \mathbb{N}^s \text{ e } a - b \in L\})$$

é chamado de *ideal grade*. Quando um ideal grade for primo ele será dito *ideal tórico*.

Perceba que o ideal $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$ é primo, afinal $U_{\mathcal{A}}$ é irredutível, acarretando pela Proposição 6.2.1, que $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$ é um ideal tórico. Ademais, vimos o seguinte teorema que caracteriza os ideais tóricos.

Teorema 6.2.3. *Um ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ é tórico se, e somente se, é um ideal primo gerado por binômios.*

Demonstração. A ida decorre diretamente da definição. Suponha que I seja primo, tal que $I = (x^{\gamma_1} - x^{\mu_1}, \dots, x^{\gamma_k} - x^{\mu_k})$, com $\gamma_i, \mu_i \in \mathbb{N}^s$. Defina $T := \mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$, que contém $(1, \dots, 1)$ e é um subgrupo de $(\mathbb{C}^*)^s$. A variedade $\mathbf{V}(I)$ é irredutível, garantindo que T é irredutível em $(\mathbb{C}^*)^s$. Pelo Lema 6.1.6, temos que T é um toro. Considerando a inclusão $i : T \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^s$ e a projeção da j -ésima coordenada $\overline{\pi_j}$ de $(\mathbb{C}^*)^s$ em \mathbb{C}^* , temos os caracteres $\pi_j = \overline{\pi_j} \circ i$ do toro T . Então, o conjunto $\mathcal{A} = \{\pi_1, \dots, \pi_s\}$ define o homomorfismo $\varphi_{\mathcal{A}} : T \rightarrow \mathbb{C}^s$, que será uma inclusão, afinal $\varphi_{\mathcal{A}}(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_s(t)) = t$. Assim, pelos mesmos argumentos da demonstração da Proposição 6.1.13, temos

$$T = \varphi'_{\mathcal{A}}(T) = \overline{\varphi_{\mathcal{A}}(T)} \cap (\mathbb{C}^*)^s = U_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \Rightarrow U_{\mathcal{A}} = \mathbf{V}(I).$$

Concluindo, $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$, pelo Teorema 3.1.14. Como I é primo, temos que $I = \mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$. Por fim, pela Proposição 6.2.1, tal ideal é tórico. \square

Agora, voltemos a trabalhar com os semigrupos. Tais objetos algébricos tem um papel fundamental na caracterização das variedades tóricas.

Definição 6.2.4 (Semigrupo afim). Um semigrupo S recebe o nome de *semigrupo afim* se for possível mergulhá-lo em alguma grade M e se existir um subconjunto finito $\mathcal{A} \subseteq S$, tal que S seja finitamente gerado por \mathcal{A} , isto é, $S = \langle \mathcal{A} \rangle$.

Observação 6.2.5. Seja S um semigrupo afim, gerado por \mathcal{A} . Se $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_r\} \subseteq S$, temos que

$$S = \langle \mathcal{A} \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r \mid \lambda \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_i a \mid \lambda_i \in \mathbb{N} \right\} =: \mathbb{N}\mathcal{A}.$$

A partir deste momento, utilizaremos a segunda forma de escrita para os semigrupos finitamente gerados por \mathcal{A} , isto é $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$. Além disso, por conveniência, iremos considerar que o conjunto dos naturais \mathbb{N} contém o zero.

O exemplo mais simples de semigrupo afim é o semigrupo \mathbb{N}^n . Afinal, está na grade \mathbb{Z}^n e é finitamente gerado pela base canônica da grade. De forma geral, para um conjunto finito qualquer \mathcal{A} em uma grade M , temos que $\mathbb{N}\mathcal{A} \subseteq M$ é um semigrupo afim. A menos de isomorfismo, todo semigrupo afim é dado desta maneira.

A seguir, construiremos uma álgebra a partir de um semigrupo afim.

Definição 6.2.6 (Álgebra semigrupo). Sejam M a grade dos caracteres de um toro \mathbb{T}_N e $S \subseteq M$ um semigrupo afim, de modo que cada $m \in M$ corresponde a um caráter χ^m . Então

$$\mathbb{C}[S] := \left\{ \sum_{m \in S} c_m \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C} \text{ e } c_m \neq 0 \text{ para uma quantidade finita de } m's \right\},$$

com a multiplicação $\chi^m \cdot \chi^{m'} := \chi^{m+m'}$, é uma \mathbb{C} -álgebra, isto é, tal conjunto é um espaço vetorial complexo e um anel, cujas operações são compatíveis. Nestas condições, $\mathbb{C}[S]$ é dita *álgebra semigrupo*.

A verificação de que a definição está bem posta, ou seja, que o conjunto é de fato uma \mathbb{C} -álgebra, será omitida. Note que, a princípio, tal objeto algébrico é puramente formal. Contudo, veremos que este tem uma conexão com os anéis de polinômios e os anéis de coordenadas.

Observe que o semigrupo afim S gera, como espaço vetorial, a álgebra semigrupo $\mathbb{C}[S]$. Se $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$, para $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$, temos que a álgebra é finitamente gerada por $\{\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}\}$ e escrevemos $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$. No que segue, vejamos dois exemplos de álgebra semigrupo.

Exemplo 6.2.7. Seja $S = \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$, onde a base canônica $\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_n\}$ faz $\mathbb{N}\mathcal{A} = \mathbb{N}^n$. Logo,

$$\mathbb{C}[\mathbb{N}^n] = \mathbb{C}[\chi^{e_1}, \dots, \chi^{e_n}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

Tal igualdade de \mathbb{C} -álgebras finitamente geradas é garantida pelo fato que $x_i = \chi^{e_i}$, para todo i . De fato, dado $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$, temos que

$$\chi^{e_i}(t) = t_1^0 \cdots t_i^1 \cdots t_n^0 = t_i = x_i(t), \quad \forall t \in (\mathbb{C}^*)^n \Rightarrow x_i = \chi^{e_i}.$$

Exemplo 6.2.8. Seja a grade $M = \mathbb{Z}^n$, tal que $\mathcal{A} = \{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica. Então, M será um semigrupo afim, finitamente gerado por $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Logo,

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] = \mathbb{C}[\chi^{e_1}, \dots, \chi^{e_n}, \chi^{-e_1}, \dots, \chi^{-e_n}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}].$$

Exatamente como no Exemplo 6.2.7, é possível verificar que $\chi^{\pm e_i} = x_i^{\pm 1}$, garantindo a igualdade acima. Entretanto, sabemos que o anel à direita é o anel de polinômios de Laurent e, pelo Exemplo 3.3.2, este é o anel de coordenadas do toro $(\mathbb{C}^*)^n$. Portanto, a álgebra semigrupo da grade coincide com o anel de coordenadas do toro. Por fim, temos o mesmo, a menos de isomorfismos, para um toro qualquer $\mathbb{T}_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$ e sua grade dos caracteres $M \cong \mathbb{Z}^n$, isto é, $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[\mathbb{T}_N]$.

Vejam os anéis de semigrupos afins resultam em variedades tóricas, através da seguinte proposição.

Proposição 6.2.9. *Dado $S \subseteq M$ um semigrupo afim. Então:*

- a) $\mathbb{C}[S]$ é um domínio de integridade e finitamente gerado, como \mathbb{C} -álgebra;
- b) $\text{Specm}(\mathbb{C}[S])$ é uma variedade tórica afim, cujo toro tem $\mathbb{Z}S$ como sua grade dos caracteres. Em particular, se $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$, para $\mathcal{A} \subset M$ finito, então $\text{Specm}(\mathbb{C}[S]) = U_{\mathcal{A}}$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ seja tal que $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$. Então, $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$, que é uma \mathbb{C} -álgebra finitamente gerada por $\{\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}\}$. Como $S \subseteq M$, naturalmente temos que $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$. Pelo Exemplo 6.2.8, $\mathbb{C}[M]$ é o anel de polinômios de Laurent e, em particular, é um domínio de integridade, garantindo a primeira parte da demonstração. Considere o homomorfismo de toros $\varphi_{\mathcal{A}}$, como definido na seção anterior,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}_N &\rightarrow \mathbb{C}^s \\ t &\mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)). \end{aligned}$$

De acordo com a Definição 6.1.1, temos um homomorfismo $\pi := \varphi_{\mathcal{A}}^*$ associado:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] &\rightarrow \mathbb{C}[M] \\ x_i &\mapsto \chi^{m_i}, \end{aligned}$$

lembrando que $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ é o anel de coordenadas de \mathbb{C}^s e $\mathbb{C}[M]$ é o anel de coordenadas de \mathbb{T}_N . Logo,

$$p = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} \lambda_{\alpha} x^{\alpha} \in \ker \pi \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} \lambda_{\alpha} \chi^{m_1 \alpha_1} \dots \chi^{m_s \alpha_s} = 0 \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}_N) \subseteq \mathbf{V}(\{p\}) \Leftrightarrow p \in \mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}).$$

A última equivalência foi verificada na demonstração da Proposição 6.1.13. Então, $\ker \pi = \mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$ e, por sua vez,

$$\mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}] = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]}{\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})} = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]}{\ker \pi} \cong \pi(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]) = \mathbb{C}[S].$$

Portanto, $\text{Specm}(\mathbb{C}[S]) = \text{Specm}(\mathbb{C}[U_{\mathcal{A}}]) = U_{\mathcal{A}}$. Por fim, como $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$, temos a seguinte igualdade de grades $\mathbb{Z}S = \mathbb{Z}\mathcal{A}$ e sabemos que $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ é a grade dos caracteres do toro correspondente a $U_{\mathcal{A}}$, verificando o resultado. \square

Vejam os seguintes exemplos de variedade tórica determinada por um semigrupo.

Exemplo 6.2.10. Considere o semigrupo afim $S = \{0, 2, 3, 4, 5, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$. Observe que o conjunto $\mathcal{A} = \{2, 3\}$ gera S . Pela demonstração da Proposição 6.2.9, sabemos que

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^2, \chi^3] \cong \frac{\mathbb{C}[x, y]}{\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})}.$$

Além disso, o homomorfismo $\phi_{\mathcal{A}}$ é tal que $\phi_{\mathcal{A}}(u_1, u_2) = 2u_1 + 3u_2$. Logo, o elemento $(3, -2)$ determina completamente o $\ker \phi_{\mathcal{A}}$, dessa forma

$$\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) = (x^3 - y^2) \Rightarrow U_{\mathcal{A}} = \mathbf{V}(\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})) = \mathbf{V}(x^3 - y^2).$$

Ou seja, a variedade tórica determinada por S é a cúspide do Exemplo 3.3.4. Note que agora verificamos este fato de uma maneira mais simples do que no Exemplo 6.1.10.

Na sequência, construiremos uma ação algébrica do toro \mathbb{T}_N na álgebra semigrupo $\mathbb{C}[M]$, induzida da ação de \mathbb{T}_N sobre si mesmo, dada pelo produto.

Exemplo 6.2.11. Sejam \mathbb{T}_N um toro e M a grade dos caracteres. Dados $t \in \mathbb{T}_N$ e $f \in \mathbb{C}[M]$, temos a aplicação $\mu : \mathbb{T}_N \times \mathbb{C}[M] \rightarrow \mathbb{C}[M]$ que faz $(t, f) \mapsto t \cdot f$, tal que

$$(t \cdot f)(p) = f(t^{-1}p), \text{ para todo } p \in \mathbb{T}_N.$$

A aplicação μ é uma ação algébrica. Com efeito, recordemos que $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[\mathbb{T}_N]$, ou seja, toda $f \in \mathbb{C}[\mathbb{T}_N]$ é uma função polinomial de \mathbb{T}_N em \mathbb{C} , como $t^{-1}p \in \mathbb{T}_N$, tem-se que $f(t^{-1}p) \in \mathbb{C}$, para todo $p \in \mathbb{T}_N$. Logo, $t \cdot f$ é uma função polinomial de \mathbb{T}_N em \mathbb{C} , isto é, $\mu(t, f) = t \cdot f$ pertence a $\mathbb{C}[\mathbb{T}_N] = \mathbb{C}[M]$, garantindo que a função está bem definida. As demais propriedades, para que μ seja uma ação, se verificam trivialmente.

Em fim, para provarmos o teorema que caracteriza as variedades tóricas, necessitamos deste último lema.

Lema 6.2.12. *Seja $A \subseteq \mathbb{C}[M]$ um subespaço estável sob a ação μ , isto é, $\mu(\mathbb{T}_N \times A) \subseteq A$, onde μ é ação definida no exemplo anterior. Então*

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C}\chi^m,$$

em que $\mathbb{C}\chi^m$ é o subespaço complexo gerado por χ^m .

Demonstração. Seja $A' = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C}\chi^m$ e note que $A' \subseteq A$, afinal todo χ^m está em A . Para a outra inclusão, tome $f \in A$, tal que $f \neq 0$. Como $A \subseteq \mathbb{C}[M]$ temos

$$f = \sum_{m \in \beta} c_m \chi^m, \text{ onde } \beta \subseteq M \text{ é finito e } c_m \neq 0, \forall m \in \beta.$$

Considere o subespaço vetorial B gerado por $\{\chi^m \mid m \in \beta\}$, assim $f \in A \cap B$. Note que $\mu(t, \chi^m) = t \cdot \chi^m = \chi^m(t^{-1})\chi^m$. De fato, dado $p \in \mathbb{T}_N$ obtemos

$$(t \cdot \chi^m)(p) = \chi^m(t^{-1}p) = \chi^m(t^{-1})\chi^m(p) \Rightarrow t \cdot \chi^m = \underbrace{\chi^m(t^{-1})}_{\in \mathbb{C}} \chi^m \Rightarrow t \cdot \chi^m \in B.$$

Então, a ação μ é estável em B e como é estável em A , por hipótese, será estável na interseção $A \cap B$. Ainda, $A \cap B \subseteq B$ é um subespaço vetorial de dimensão finita. Logo, a restrição de μ em $A \cap B$ é uma ação algébrica do toro \mathbb{T}_N em um espaço vetorial de dimensão finita, pelo Lema 6.1.6, temos que

$$A \cap B = \bigoplus_{m \in M} W_m, \text{ onde } W_m = \{\chi^r \in A \cap B \mid t \cdot \chi^r = \chi^m(t)\chi^r, \forall t \in \mathbb{T}_N\}.$$

Perceba que os $\chi^r \in W_m \setminus \{0\}$ são os autovetores simultâneos de todos os t em \mathbb{T}_N , ou seja, a interseção $A \cap B$ é gerada por um conjunto de caracteres, que são autovetores, de $A \cap B$, em outras palavras, existe $E \subseteq A \cap B$, tal que $A \cap B$ é finitamente gerado por E . Em particular, $f = \sum_{m \in E} c_m \chi^m \in A \cap B$, tal que $\chi^m \in A \cap B \subseteq A$. Portanto, a última equação nos garante que

$$f \in \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C}\chi^m = A' \Rightarrow A = A'.$$

□

Finalmente, podemos enunciar o principal resultado desta seção. Este resultado une os diversos resultados que abordamos, com respeito às variedades tóricas, para, em fim, caracterizá-las.

Teorema 6.2.13 (Caracterização das variedades tóricas). *Seja V uma variedade algébrica. São equivalentes as afirmações:*

- a) V é uma variedade tórica afim;
- b) $V = U_{\mathcal{A}}$, para algum conjunto finito \mathcal{A} de uma grade;
- c) V é uma variedade definida por um ideal tórico;
- d) $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S])$, para algum semigrupo afim S .

Demonstração. Verifiquemos as implicações:

- (d) \Rightarrow (a) Decorre imediatamente da Proposição 6.2.9;
- (b) \Rightarrow (a) Consequência direta da Proposição 6.1.13;

(d) \Rightarrow (b) Como S é semigrupo afim, existem uma grade $M \supseteq S$ e um conjunto $\mathcal{A} \subseteq M$ finito, tal que $\mathbb{N}\mathcal{A} = S$, pela Proposição 6.2.9, $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S]) = U_{\mathcal{A}}$;

(b) \Rightarrow (c) Por hipótese $V = U_{\mathcal{A}} = \mathbf{V}(\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}))$, pela Proposição 6.2.1, o ideal $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$ é tórico. Logo, V é uma variedade definida por um ideal tórico;

(c) \Rightarrow (b) Temos que $V = \mathbf{V}(I)$, em que I é um ideal tórico, por definição, existe uma subgrade $L \subseteq \mathbb{Z}^s$, tal que $I = I_L$. Tome $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$, de tal forma que $\ker \phi_{\mathcal{A}} = L$. Assim, $I = I_L = I_{\mathcal{A}}$, pela Proposição 6.2.1, temos que $I = \mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})$. Portanto, $V = \mathbf{V}(\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})) = U_{\mathcal{A}}$;

(a) \Rightarrow (d) Seja V uma variedade tórica afim, contendo o toro \mathbb{T}_N como um aberto e denso, com M sua grade dos caracteres. A inclusão $i : \mathbb{T}_N \hookrightarrow V$ induz um homomorfismo de anéis de coordenadas $i^* : \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{T}_N]$, onde $i^*(h) = h \circ i$. Dados $h, g \in \mathbb{C}[V]$, tais que $h \circ i = g \circ i$, implicando que $h = g$ no conjunto $i(\mathbb{T}_N)$. Como h, g são funções contínuas e $i(\mathbb{T}_N)$ é denso em V , temos que $h = g$ em V . Logo, o homomorfismo i^* é injetor e como o anel de coordenadas de \mathbb{T}_N é a álgebra semigrupo $\mathbb{C}[M]$, obtemos que $\mathbb{C}[V]$ é uma subálgebra de $\mathbb{C}[M]$. Por definição, o toro \mathbb{T}_N age em V , pela extensão da ação de \mathbb{T}_N em si próprio, dada pela multiplicação em cada coordenada, ou seja, $tv \in V$, para todo $t \in \mathbb{T}_N$ e para todo $v \in V$. Agora, considere a ação μ definida no Exemplo 6.2.11 de \mathbb{T}_N na álgebra $\mathbb{C}[V]$. Dados $t \in \mathbb{T}_N$ e $f \in \mathbb{C}[V]$ a aplicação $\mu(t, f) = t \cdot f$ faz

$$p \mapsto f(\underbrace{t^{-1}p}_{\in V}) \Rightarrow f(t^{-1}p) \in \mathbb{C} \Rightarrow t \cdot f \in \mathbb{C}[V],$$

garantindo que $\mu(\mathbb{T}_N \times \mathbb{C}[V]) \subseteq \mathbb{C}[V]$. Pelo Lema 6.2.12,

$$\mathbb{C}[V] = \bigoplus_{\chi^m \in \mathbb{C}[V]} \mathbb{C}\chi^m.$$

Então, temos que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$, onde $S := \{m \in M \mid \chi^m \in \mathbb{C}[V]\} \subseteq M$ é um semigrupo. No Exemplo 6.2.8, vimos que $\mathbb{C}[M] \supseteq \mathbb{C}[V]$ é uma \mathbb{C} -álgebra finitamente gerada, resultando no mesmo para $\mathbb{C}[V]$. Assim, existem $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[V]$, tais que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]$. Para todo índice i , temos

$$f_i \in \bigoplus_{m \in S} \mathbb{C}\chi^m \Rightarrow f_i = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i \chi^{m_j^i}, \text{ onde } k_i \in \mathbb{N}, \lambda_j^i \in \mathbb{C} \text{ e } m_j^i \in S.$$

Considere o subconjunto $\mathcal{D} = \{m_1^1, \dots, m_{k_1}^1, \dots, m_1^s, \dots, m_{k_s}^s\}$ do semigrupo S . Concluindo, dado $m \in S$ sabemos que $\chi^m \in \mathbb{C}[V]$ e, por sua vez, que

$$\chi^m = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} c_{\alpha} f^{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} c_{\alpha} \left(\prod_{i=1}^s f_i \right)^{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} c_{\alpha} \left(\prod_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j^i \chi^{m_j^i} \right)^{\alpha} \Rightarrow m \in \mathbb{N}\mathcal{D}.$$

Portanto, S é um semigrupo afim e $\text{Specm}(\mathbb{C}[S]) = \text{Specm}(\mathbb{C}[V]) = V$, no qual a última igualdade decorre do Corolário 3.2.5. \square

Capítulo 7

Variedades tóricas normais e saturação de semigrupos

Neste capítulo, estudaremos as variedades tóricas normais. Iremos caracterizar tais variedades, através dos cones e das demais noções da geometria convexa. Posteriormente, apresentaremos o processo de normalização das variedades tóricas, utilizando os semigrupos saturados.

7.1 Saturação e normalização

Para o estudo das variedades tóricas normais, será necessário os conceitos relacionados aos cones estabelecidas no Capítulo 4, junto da definição dos semigrupos saturados. Em um primeiro momento, precisamos retomar algumas noções estabelecidas, para uma definição mais adequada.

Definição 7.1.1 (Grade dual). Seja $N \cong \mathbb{Z}^n$ uma grade. Definimos o seguinte espaço vetorial real $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, de dimensão n . A *grade dual* de N é o grupo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ contido no espaço vetorial dual $(N_{\mathbb{R}})^*$.

Observação 7.1.2. Se N for uma grade, tal que \mathbb{T}_N é seu toro algébrico associado e M é a grade dos caracteres desse toro. Então, pela Observação 6.1.7, M é a grade dual de N (e N é a grade dual de M). Além disso, para o espaço dual, vale que $(N_{\mathbb{R}})^* = M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Assim, no caso específico que $\mathbb{T}_N = (\mathbb{C}^*)^n$, sabemos que $N = \mathbb{Z}^n$, logo para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in N$ e $x \in \mathbb{R}$ o produto tensorial faz $a \otimes x \mapsto (x^{a_1}, \dots, x^{a_n}) \in \mathbb{R}^n$. Portanto, temos que $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ e, por sua vez, que $M_{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}^n)^*$.

Então, todos os resultados verificados e os conceitos definidos, no Capítulo 4, sobre cones, cones duais e faces, podem ser naturalmente estendidos, para que façam sentido em grades M e N quaisquer. Para tal, basta trocar o espaço vetorial \mathbb{R}^n por $N_{\mathbb{R}}$ e o espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$ por $M_{\mathbb{R}}$. A partir deste momento, consideraremos que os objetos da geometria convexa estão definidos nestes espaços vetoriais mais gerais.

A seguir, vejamos a seguinte proposição, que melhor caracteriza o conceito de cone fortemente convexo, cuja prova será omitida neste momento.

Proposição 7.1.3. *Seja σ um cone contido no espaço n dimensional $N_{\mathbb{R}}$, isto é, $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$. Então,*

$$\begin{aligned} \{0\} \text{ é uma face de } \sigma &\Leftrightarrow \sigma \text{ não contém um subespaço de } N_{\mathbb{R}} \text{ de dimensão positiva} \\ &\Leftrightarrow \sigma \cap (-\sigma) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \sigma \text{ é fortemente convexo} \\ &\Leftrightarrow \dim(\sigma^\vee) = n. \end{aligned}$$

□

Prosseguindo, temos uma consequência direta desta proposição, que garante a existência de um conjunto gerador canônico, para um cone grade e fortemente convexo $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$. Tais geradores são determinados pelas arestas ρ de σ , onde uma *aresta* de um cone σ é uma face $\rho \prec \sigma$, tal que $\dim(\rho) = 1$.

Corolário 7.1.4. *Sejam $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ um cone grade e fortemente convexo e ρ_1, \dots, ρ_r todas as arestas de σ , que são semirretas, afinal σ é fortemente convexo. Então, obtemos que $\sigma = \text{Cone}(\{u_{\rho_1}, \dots, u_{\rho_r}\})$, onde u_{ρ_i} é o único gerador do semigrupo afim $\rho_i \cap N$.*

Agora, note que para um cone grade $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ qualquer, o Teorema 4.2.4 garante que $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ é um semigrupo afim. Tal fato nos dá o seguinte teorema.

Teorema 7.1.5. *Seja $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ um cone grade. Então*

$$U_\sigma := \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma]),$$

é uma variedade tórica afim. Além disso,

$$\dim(U_\sigma) = n \Leftrightarrow \text{O toro de } U_\sigma \text{ é o toro } \mathbb{T}_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \sigma \text{ é fortemente convexo.}$$

Demonstração. Pela Proposição 6.2.9, U_σ é uma variedade tórica afim, cujo toro tem $\mathbb{Z}S_\sigma \subseteq M$ como sua grade dos caracteres. Agora, como a dimensão da variedade coincide com a dimensão do toro, que é igual ao posto de sua grade, temos que

$$\dim(U_\sigma) = n \Leftrightarrow \text{posto}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n.$$

Sabemos que o toro de U_σ é \mathbb{T}_N se, e somente se, suas grades de caracteres coincidem, equivalentemente, se vale que $\text{posto}(\mathbb{Z}S_\sigma) = n$. Por fim, como S_σ é um semigrupo afim, existe um conjunto finito $\mathcal{A} \subseteq S_\sigma$, tal que $\mathbb{N}\mathcal{A} = S_\sigma$. Logo,

$$n = \text{posto}(\mathbb{Z}S_\sigma) = \text{posto}(\mathbb{Z}\mathcal{A}) = \dim(\text{Span}(\mathcal{A})) = \dim(\text{Cone}(\mathcal{A})) = \dim(\sigma^\vee).$$

Portanto, pela Proposição 7.1.3 e as equivalências acima, temos o resultado desejado. □

Observação 7.1.6. Note que este teorema une a primeira parte deste trabalho com esta segunda etapa. De fato, tal resultado garante que a Definição 5.1.3 satisfaz, de forma geral, a Definição 6.1.9; basta perceber que o anel R_σ , da maneira como foi definido, é exatamente a álgebra semigrupo $\mathbb{C}[S_\sigma]$, ou seja, $X_\sigma = U_\sigma$. Finalmente, garantindo que a primeira definição está bem posta.

Neste momento, apresentaremos um exemplo de uma variedade tórica determinada por um cone em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 7.1.7. Considere o cone $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subseteq N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$, com a grade $N = \mathbb{Z}^3$. Neste caso, σ é grade e fortemente convexo.

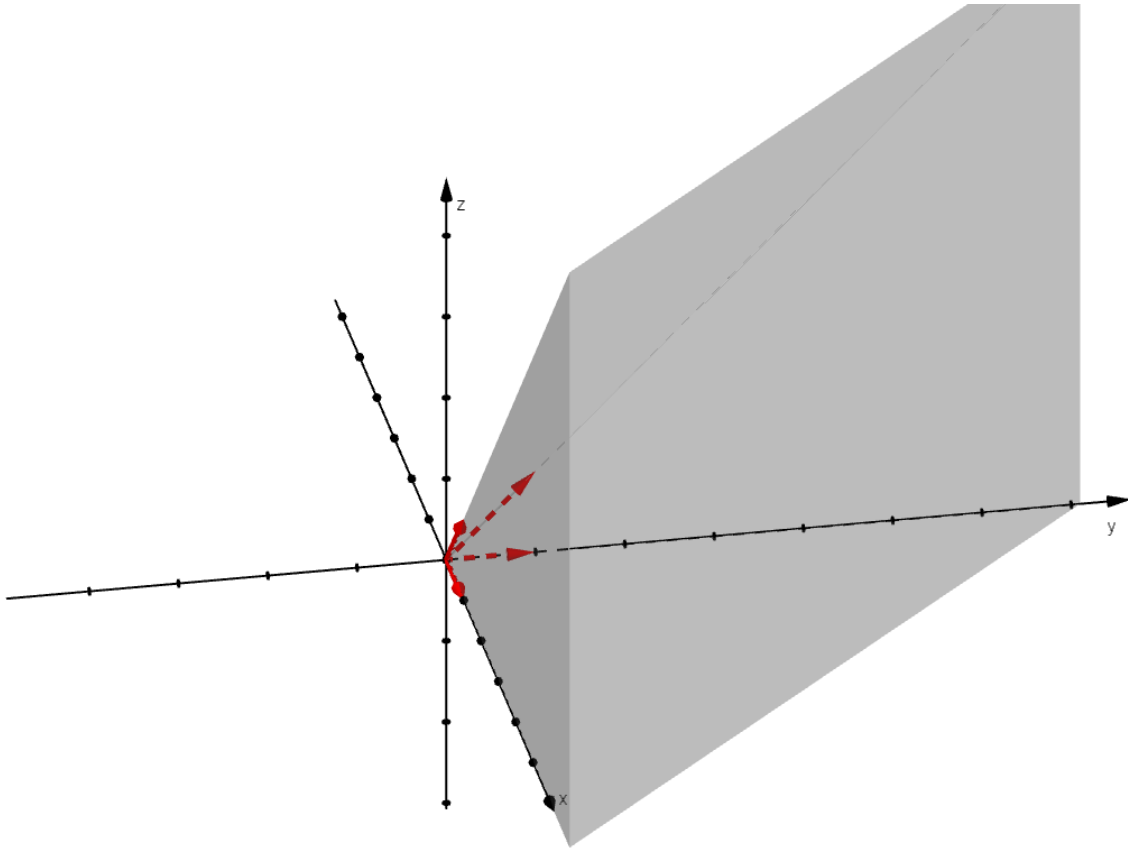


Figura 7.1: Representação do cone σ em \mathbb{R}^3

Note que o cone dual σ^\vee será gerado pelos vetores normais as facetas, onde as facetas são as faces de codimensão 1. Assim,

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3).$$

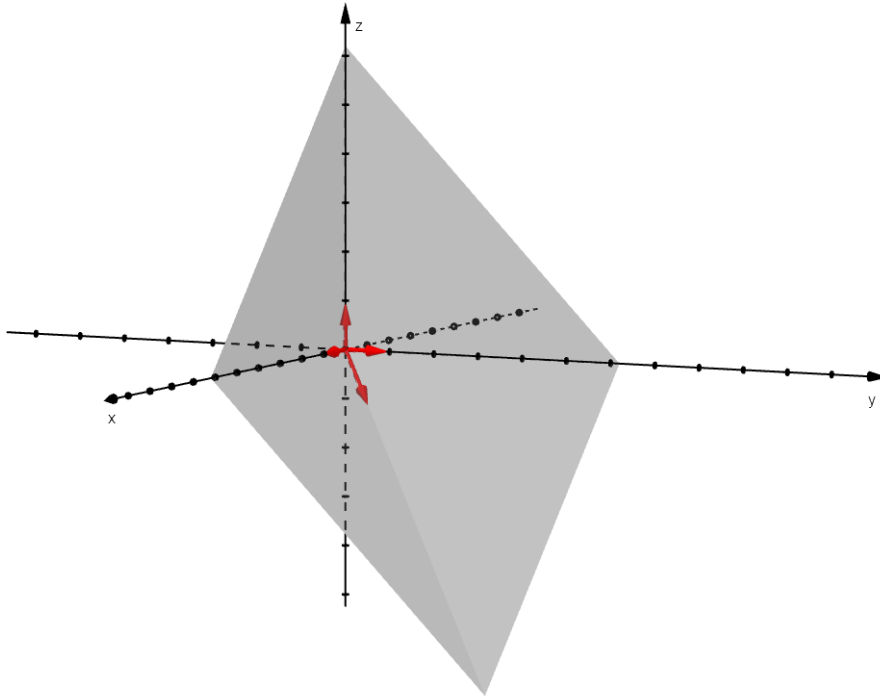


Figura 7.2: Representação do cone dual σ^\vee em \mathbb{R}^3

Ainda, o semigrupo afim $S_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^3$ será gerado pelos mesmos geradores de σ^\vee , ou seja, $S_\sigma = \mathbb{N}\mathcal{A}$, onde $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$.

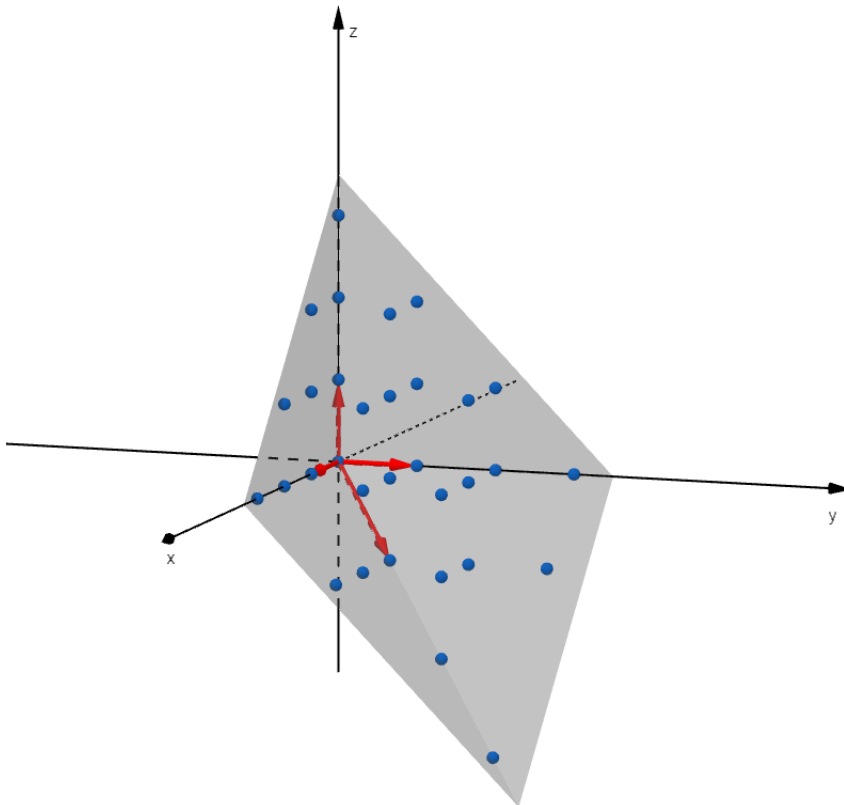


Figura 7.3: Representação do semigrupo afim S_σ em \mathbb{R}^3

Visto isso, podemos obter a álgebra semigrupo.

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[\chi^{e_1}, \chi^{e_2}, \chi^{e_3}, \chi^{e_1+e_2-e_3}] = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_1x_2x_3^{-1}].$$

Agora, utilizando o isomorfismo de demonstração da Proposição 6.2.9.

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_1x_2x_3^{-1}] \cong \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]}{\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})}.$$

Assim, para $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{Z}^4$ tem-se que

$$\phi_{\mathcal{A}}(u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_1 + u_4)e_1 + (u_2 + u_4)e_2 + (u_3 - u_4)e_3.$$

Nos resultando que o núcleo deste homomorfismo é dado por

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \ker \phi_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_4 = 0 & \Rightarrow u_1 = -u_4 \\ u_2 + u_4 = 0 & \Rightarrow u_2 = -u_4 \\ u_3 - u_4 = 0 & \Rightarrow u_3 = u_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = (-u_4, -u_4, u_4, u_4).$$

Então, os pontos $a = (1, 1, 0, 0)$ e $b = (0, 0, 1, 1)$, são tais que

$$a, b \in \mathbb{N}^4 \text{ e } a - b = (1, 1, -1, -1) \in \ker \phi_{\mathcal{A}}.$$

Logo, temos que $\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}}) = (x^a - x^b) = (x_1x_2 - x_3x_4)$. Portanto,

$$U_\sigma = \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \mathbf{V}(\mathbf{I}(U_{\mathcal{A}})),$$

ou seja, $U_\sigma = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{C}^4 \mid v_1v_2 = v_3v_4\}$.

Na sequência, definiremos os semigrupos afins saturados.

Definição 7.1.8 (Semigrupo saturado). Seja $S \subset M$ um semigrupo afim. Diremos que S é um *semigrupo saturado* se sempre vale a seguinte implicação:

$$\text{Para todo } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ e } \forall m \in M, \text{ tais que } km \in S \Rightarrow m \in S.$$

A seguir, enunciaremos o teorema que caracteriza as variedades tóricas normais.

Teorema 7.1.9 (Caracterização das variedades tóricas normais). *Seja V uma variedade tórica afim, cujo \mathbb{T} é seu toro. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) V é normal;
- b) $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S])$, onde $S \subseteq M$ é um semigrupo afim saturado;
- c) $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = U_\sigma$, onde $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ e $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ é grade e fortemente convexo;

Demonstração. Primeiramente, pelo Teorema 6.2.13, sabemos que $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S])$ e que $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[V]$, para algum semigrupo afim S na grade de \mathbb{T} . Ainda, pela Proposição 6.2.9, a grade dos caracteres de \mathbb{T} é $M = \mathbb{Z}S$. Suponha que n seja a dimensão de V , logo $\text{posto}(M) = n$.

(a) \Rightarrow (b) Se V é normal, por definição $\mathbb{C}[V]$ é integralmente fechado no corpo de frações $\mathbb{F} = \text{Frac}(\mathbb{C}[V])$. Suponha que $km \in S$, para algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $m \in M$. Como $m \in M$, temos que o homomorfismo $\chi^m : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$ é uma função polinomial em \mathbb{T} . Do fato que \mathbb{T} é um aberto denso de V , obtemos que χ^m é uma função racional em V , isto é, $\chi^m \in \mathbb{F}$. Veja que $\chi^{km} \in \mathbb{C}[S]$, afinal $km \in S$. Tome o polinômio $p = z^k - \chi^{km} \in (\mathbb{C}[S])(z) = (\mathbb{C}[V])(z)$ e note que

$$p(\chi^m) = (\chi^m)^k - \chi^{km} = 0.$$

Logo, $\chi^m \in \widehat{\mathbb{C}[V]}$, implicando, por hipótese, que $\chi^m \in \mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$. Portanto, temos que $m \in S$, para todo k , garantindo que S é um semigrupo afim saturado.

(b) \Rightarrow (c) Seja $\mathcal{A} \subseteq S \subseteq M$ um conjunto finito, tal que $\mathbb{N}\mathcal{A} = S$. Então, o semigrupo S está contido no cone grade $\text{Cone}(\mathcal{A}) \subseteq M_{\mathbb{R}}$. Observe que

$$n = \text{posto}(M) = \text{posto}(\mathbb{Z}S) = \text{posto}(\mathbb{Z}\mathcal{A}) = \dim(\text{Cone}(\mathcal{A})),$$

e defina o cone dual $\sigma = (\text{Cone}(\mathcal{A}))^\vee$. Como, de forma geral, o cone dual de um dual coincide com o cone original, temos que $\dim(\sigma^\vee) = \dim(\text{Cone}(\mathcal{A})) = n$. Pelas Proposições 4.1.3 e 7.1.3, concluímos que σ é um cone grade e fortemente convexo. Veja que $S \subseteq M$ e $S \subseteq \sigma^\vee = \text{Cone}(\mathcal{A})$, implicando que $S \subseteq \sigma^\vee \cap M = S_\sigma$. Mostremos que $S_\sigma \subseteq S$, usando o fato que S é saturado. Considere o espaço vetorial racional $M_{\mathbb{Q}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, e perceba que $M \subseteq M_{\mathbb{Q}} \subseteq M_{\mathbb{R}}$. Da definição de cone, obtemos

$$\text{Cone}(\mathcal{A}) \cap M_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{u \in \mathcal{A}} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \text{ e } \lambda_u \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Assim, tome $v \in \sigma^\vee \cap M \subseteq \sigma^\vee \cap M_{\mathbb{Q}}$, pela igualdade acima, existem $u_1, \dots, u_r \in \mathcal{A}$ e $\lambda_{u_1}, \dots, \lambda_{u_r} \in \mathbb{Q}$, tais que

$$v = \lambda_{u_1} u_1 + \dots + \lambda_{u_r} u_r.$$

Sabemos que os racionais $\lambda_{u_i} =: \frac{\alpha_{u_i}}{\beta_{u_i}}$ são todos positivos, logo o número $k = \prod_{i=1}^r \beta_{u_i}$ é um natural não nulo. Dessa forma

$$kv = \gamma_{u_1} u_1 + \dots + \gamma_{u_r} u_r, \text{ onde } \gamma_{u_i} \in \mathbb{N}, \forall i.$$

Portanto, como $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$, temos que $kv \in S$. Por fim, o semigrupo S é saturado, garantindo que $v \in S$ e, por sua vez, que $S = S_\sigma$.

(c) \Rightarrow (a) Tome as arestas ρ_1, \dots, ρ_r do cone grade fortemente convexo $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$. Pelo Corolário 7.1.4, temos que $\sigma = \text{Cone}(\{u_{\rho_1}, \dots, u_{\rho_r}\})$. Além disso, cada gerador determina um semiespaço

$$E_{u_i} = \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle x, u_i \rangle \geq 0\} = (\rho_1)^\vee.$$

Pela demonstração da Proposição 4.1.3, obtemos que $\sigma^\vee = \bigcap E_{u_i} = \bigcap (\rho_i)^\vee$, tomando a interseção com a grade M nos resulta que

$$\sigma^\vee \cap M = \bigcap_{i=1}^r (\rho_i)^\vee \cap M \Rightarrow S_\sigma = \bigcap_{i=1}^r S_{\rho_i} \Rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}\left[\bigcap_{i=1}^r S_{\rho_i}\right].$$

Então, ficamos com $\mathbb{C}[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^r \mathbb{C}[S_{\rho_i}]$, afinal

$$\chi^m \in \mathbb{C}\left[\bigcap_{i=1}^r S_{\rho_i}\right] \Leftrightarrow m \in S_{\rho_i}, \forall i \Leftrightarrow \chi^m \in \mathbb{C}[S_{\rho_i}], \forall i \Leftrightarrow \chi^m \in \bigcap_{i=1}^r \mathbb{C}[S_{\rho_i}].$$

Portanto, para mostrar que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^r \mathbb{C}[S_{\rho_i}]$ é um anel normal, pelo Lema 1.2.13, é suficiente garantir que cada $\mathbb{C}[S_{\rho_i}]$ é normal. Dessa forma, basta verificar que $\mathbb{C}[S_\rho]$ é normal, em que ρ é um cone semirreta grade em $N_{\mathbb{R}}$. Considere u_ρ o gerador do semigrupo $\rho \cap N$ e suponha, por absurdo, que existe $k > 1$ tal que $\frac{1}{k}u_\rho \in N$, neste caso $\frac{1}{k}u_\rho$ pertenceria ao semigrupo $\rho \cap N$, entretanto $\frac{1}{k}u_\rho \notin \mathbb{N}u_\rho$. Sendo assim, $\frac{1}{k}u_\rho \notin N$, $\forall k > 1$, garantindo que u_ρ é o único gerador do semigrupo $Y := \rho \cap N$.

Tome a subgrade $L := \mathbb{Z}Y$, provemos que N/L é livre de torção. De fato,

$$z \in L \Leftrightarrow z = k_1v_1 - k_2v_2; k_1, k_2 \in \mathbb{N} \text{ e } v_1, v_2 \in Y \Leftrightarrow z \in Y - Y = \{m_1 - m_2 \mid m_1, m_2 \in Y\}.$$

Suponha que $km \in \mathbb{Z}Y = L$, com $k > 1$ inteiro e $m \in Y \subseteq N$. Então, pelas equivalências acima, $km = m_1 - m_2$, em que $m_1, m_2 \in Y = \rho \cap N$. Assim,

$$m + m_2 = \frac{m_1 - m_2}{k} + m_2 = \frac{m_1}{k} - \frac{m_2}{k} + \frac{km_2}{k} = \left(\frac{1}{k}\right)m_1 + \left(\frac{k-1}{k}\right)m_2 \in \rho,$$

afinal $0 \leq \frac{1}{k}, \frac{k-1}{k} \leq 1$ e ρ é um cone e, por sua vez, convexo. Então, $m + m_2 \in Y$, implicando que $m = (m + m_2) - m_2 \in \mathbb{Z}Y = L$. Usando este fato, mostraremos que N/L é livre de torção, isto é, que N/L não tem elemento, não nulo, com ordem finita. Com efeito, tome $m \in N$ tal que $m \notin L$ e suponha que $(m + L)^k = 0$, para algum inteiro $k > 1$. Equivalentemente, estamos supondo que $km \in L$ para algum $k > 1$ e $m \in N$. Entretanto, de acordo com o que foi visto acima, temos que $m \in L$, uma contradição. Logo, N/L é livre de torção. Seja $B = \{o_1, \dots, o_n\}$ uma base para N o grupo abeliano livre de posto n . Note que a projeção canônica $\pi : N \rightarrow N/L$ implica que $\mathcal{B} = \pi(B)$ gera N/L , afinal para todo $\bar{m} \in N/L$, existem $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$m = \gamma_1 o_1 + \dots + \gamma_n o_n \Rightarrow \pi(m) = \bar{m} = \gamma_1 \bar{o}_1 + \dots + \gamma_n \bar{o}_n \in \mathbb{Z}\mathcal{B}.$$

Perceba que \mathcal{B} é finito. Pela Proposição 1.1.38, o grupo N/L é abeliano livre de posto finito. Ainda, pelo Lema 1.1.37, a menos de isomorfismos, temos que $N = L \oplus N/L$. Como $\mathbb{N}u_\rho = Y$ e da unicidade desse gerador, temos que $L = \mathbb{Z}u_\rho$. Dessa forma, existe uma base $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ de N , tal que $g_1 = u_\rho$ e $\langle u_\rho, g_i \rangle = 0$, para todo $i = 2, \dots, n$. Sabemos que o cone dual ρ^\vee coincide com o semiespaço E_{u_ρ} . Pela demonstração da Proposição 4.1.3, o cone ρ^\vee é gerado por $\{u_\rho, w_2, \dots, w_n, w_1^{-1}, \dots, w_n^{-1}\} \subseteq M$, tais que $\langle u_\rho, w_i^\pm \rangle = 0$, para todo $i = 2, \dots, n$. Naturalmente, cada w_j^\pm é o correspondente a g_j^\pm no espaço dual M . Dito

isso, a menos de isomorfismos o semigrupo afim $S_\rho = \rho^\vee \cap M$ é gerado por $\{g_1, g_2^\pm, \dots, g_n^\pm\}$. Logo, como $M \cong \mathbb{Z}^n$, obtemos

$$\mathbb{C}[S_\rho] = \mathbb{C}[\chi^{g_1}, \chi^{g_2}, \dots, \chi^{g_n}, \chi^{-g_2}, \dots, \chi^{-g_n}] \cong \mathbb{C}[\chi^{e_1}, \chi^{e_2^\pm}, \dots, \chi^{e_n^\pm}] = \mathbb{C}[x_1, x_2^\pm, \dots, x_n^\pm],$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica e a última igualdade é garantida pelo fato que $\chi^{e_j^\pm} = x_j^\pm$, visto no Exemplo 6.2.8. Concluindo, de maneira análoga ao que foi realizado no Exemplo 3.3.2, temos a seguinte igualdade de anéis de coordenada

$$\mathbb{C}[S_\rho] = \mathbb{C}[x_1, x_2^\pm, \dots, x_n^\pm] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \cdots x_n},$$

no qual $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \cdots x_n}$ é a localização do anel de polinômios $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ no subconjunto multiplicativo do monômio $x_2 \cdots x_n$. Em fim, o Lema 1.2.13 garante que a localização $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_{x_2 \cdots x_n}$ é normal, afinal $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel normal (é um *DFU*), isto é, o anel $\mathbb{C}[S_\rho]$ é normal, implicando finalmente, que $\mathbb{C}[S_\sigma]$ é normal e conseqüentemente que V é uma variedade normal. \square

O corolário a seguir garante que um semigrupo é sempre saturado. Tal resultado decorre de forma direta dos dois teoremas anteriores.

Corolário 7.1.10. *Seja $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ um cone grade e fortemente convexo. Então, S_σ é um semigrupo afim saturado.*

Demonstração. Pelo Teorema 7.1.5, $U_\sigma = \text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ é uma variedade tórica. Já pelo Teorema 7.1.9, temos que S_σ é um semigrupo afim saturado. \square

Agora, é possível pensar na normalização de uma variedade tórica não normal V , com a noção de semigrupos saturados. Se $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S])$ é uma variedade tórica, para algum S semigrupo afim, cujo toro tem $M = \mathbb{Z}S$ como grade, podemos *saturar* o semigrupo S , isto é, encontrar algum semigrupo $S' \supseteq S$ saturado, tal que $\mathbb{C}[S']$ seja a normalização de $\mathbb{C}[V]$.

Proposição 7.1.11. *Seja $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[S])$ uma variedade tórica, tal que $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$ é um semigrupo afim e $M = \mathbb{Z}S$ é a grade do toro de V . Então, o anel $\mathbb{C}[S_\sigma]$ é a normalização de $\mathbb{C}[S]$, onde $\sigma := (\text{Cone}(\mathcal{A}))^\vee$.*

Demonstração. Mostremos que $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ é grade e fortemente convexo. Veja que

$$n = \text{posto}(M) = \text{posto}(\mathbb{Z}S) = \text{posto}(\mathbb{Z}\mathcal{A}) = \dim(\text{Cone}(\mathcal{A})).$$

Sabemos que $(\text{Cone}(\mathcal{A})^\vee)^\vee = \text{Cone}(\mathcal{A})$, logo $\dim(\sigma^\vee) = \dim(\text{Cone}(\mathcal{A})) = n$. Pela Proposição 7.1.3, o cone σ é fortemente convexo. Como $\mathcal{A} \subseteq M$, temos que $\text{Cone}(\mathcal{A})$ é grade, implicando, pela Proposição 4.1.3, que σ é cone grade. Então, pelo Corolário 7.1.10, obtemos que S_σ é um semigrupo afim saturado. Dessa forma, pelo Teorema 7.1.9, temos que o anel $\mathbb{C}[S_\sigma]$ é normal. Portanto, como S é gerado por \mathcal{A} , tem-se que $S \subseteq \text{Cone}(\mathcal{A}) = \sigma^\vee$, ou seja, $S \subseteq \sigma \cap M = S_\sigma$, garantindo que $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[S_\sigma]$. \square

Observação 7.1.12. A inclusão $i : \mathbb{C}[S] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_\sigma]$ é um homomorfismo de anéis de coordenadas, que induz um homomorfismo $\phi : U_\sigma \rightarrow V$ de variedades, tal que $i = \phi^*$, onde ϕ^* é dado pela Definição 6.1.1. Este homomorfismo ϕ é único e será chamado de *mapa de normalização* de V .

Por fim, façamos o seguinte exemplo de saturação de um semigrupo afim.

Exemplo 7.1.13. Considere o semigrupo $S \subseteq \mathbb{Z}$ do Exemplo 6.2.10, que é gerado por $\mathcal{A} = \{2, 3\}$. Sabemos que este define a variedade tórica $V = \mathbf{V}(x^3 - y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$. Note que $k \cdot 1 \in S$, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, entretanto $1 \notin S$, implicando que S não é saturado e, por sua vez, que V não é normal. Assim, podemos normalizar a variedade V , através da saturação de S . Perceba que

$$\text{Cone}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sigma = (\text{Cone}(\mathcal{A}))^\vee = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S_\sigma = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}.$$

Portanto, a variedade tórica normal será

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[\mathbb{N}] = \mathbb{C}[x_1] \Rightarrow U_\sigma = \text{Specm}(\mathbb{C}[x_1]) = \mathbb{C}.$$

Neste caso, a variedade \mathbb{C} é a normalização da cúspide V e o mapa de normalização é a aplicação $\phi : \mathbb{C} \rightarrow V$ que faz $t \mapsto (t^2, t^3)$.

Lembremos que nos Exemplos 3.3.4 e 3.3.5 mostramos, com demasiado esforço algébrico, justamente que tal variedade não é normal e calculamos sua normalização. Contudo, fica evidente o contraste entre as abordagens, afinal neste Exemplo 7.1.13 apenas utilizamos a combinatória presente nos semigrupos afins e nos objetos da geometria convexa.

Referências Bibliográficas

- [1] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading, MA, (1969).
- [2] BRASSELET, J. P., *Introduction to toric varieties*. Publicações Matemáticas, IMPA, (2004).
- [3] COX, D. A.; LITTLE, J. B.; SCHENCK, H. K., *Toric varieties*. American Mathematical Soc., (2011).
- [4] DALBELO, T. M., *Superfícies multitóricas, obstrução de Euler e aplicações*. Tese de Doutorado, USP São Carlos, (2014).
- [5] FULTON, W., *Introduction to Toric Varieties*. Annals of Math. Studies 131, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1993).
- [6] HUISHI, L., *An introduction to commutative algebra: from the viewpoint of normalization*. World Scientific, (2004).
- [7] HUMPHREYS, J., *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Math. 21, Springer, New York, (1975).
- [8] KLEPÁČ, A., *Toric varieties and their applications* Diplomová práce, Praha: Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, (2022).
- [9] LIMA, E. L., *Curso de análise Vol.2*, Projeto Euclides, IMPA, (2008).
- [10] LEE, J., *Introduction to topological manifolds* second edition, Springer Science e Business Media, (2010).
- [11] MUNKRES, J. R., *Topology* Second Edition, Prentice Hall, (2000).
- [12] RIEMENSCHNEIDER, O., *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)*. Math. Ann. 209 (1974).
- [13] SCHAFHAUSER, G. F., *Sobre a caracterização de grupos abelianos finitamente gerados* Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, (2022).

- [14] SERRANO, N. P. P., *Variedades algébricas e ações tóricas*. TCC (Graduação em Bacharelado em Matemática), DM UFSCar, (2021).
- [15] SPRINGER, T. A., *Linear Algebraic Groups* second edition, Progress in Math. 9, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, (1998).
- [16] TENGAN, E; BORGES FILHO, H. M., *Álgebra comutativa em quatro movimentos*. SBM, (2014).