



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



RAQUEL MANSANO GONÇALVES CENCIARELLI

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH PARA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

SÃO CARLOS – SP
2025

RAQUEL MANSANO GONÇALVES CENCIARELLI

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH PARA EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientadora: Profa. Dra. Vera Lúcia Carbone

SÃO CARLOS – SP
2025



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 7/2025/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

Raquel Mansano Goncalves Cenciarelli

**O teorema do ponto fixo de Banach para existência e unicidade de equações
diferenciais ordinárias de primeira ordem**





Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 11 de fevereiro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Vera Lúcia Carbone
Membro da Banca 1	Marcelo José Dias Nascimento
Membro da Banca 2	Leandro Nery de Oliveira

	<p>Documento assinado eletronicamente por Vera Lucia Carbone, Professor(a) do Ensino Superior, em 31/03/2025, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.</p>
	<p>Documento assinado eletronicamente por Leandro Nery de Oliveira, Professor(a) do Ensino Superior, em 02/04/2025, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.</p>
	<p>Documento assinado eletronicamente por Marcelo Jose Dias Nascimento, Professor(a) do Ensino Superior, em 03/04/2025, às 14:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.</p>
	<p>A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufscar.br/autenticacao, informando o código verificador 1782179 e o código CRC C6387EEE.</p>

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.007513/2025-46

SEI nº 1782179

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

*Dedico este trabalho aos meus pais, que sob muito sol,
fizeram-me chegar até aqui, na sombra.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais por sempre acreditarem em mim e no meu sonho, e principalmente pelo suporte durante toda a graduação. Da mesma maneira agradeço aos meus irmãos por todo o apoio durante a vida. Ao meu irmão Gabriel, obrigada por ser exemplo e me ensinar das coisas mais bonitas da vida. A minha irmã Gabriela, obrigada por ser minha gêmea de alma e de corpo. Sem ela para conhecer o mundo comigo, não faria sentido tentar entendê-lo por meio da Matemática.

Ainda, agradeço ao meu companheiro Gabriel por todo o apoio, carinho e motivação durante o processo de produção deste trabalho e grande parte da minha graduação. Não de maneira menos importe, agradeço todos os amigos que se tornaram família em São Carlos.

Agradeço também à professora e minha orientadora Vera Lúcia Carbone por todos os atentimentos, apoio e pelo exemplo do que é ser uma mulher na Matemática.

RESUMO

Este trabalho é uma coletânea de resultados e exemplos em espaços métricos, organizados em oito capítulos, cujo objetivo final é a prova do Teorema do Ponto Fixo de Banach para a existência e unicidade de soluções de problemas de valor inicial de equações diferenciais. No desenvolvimento do trabalho são abordados os conceitos básicos e exemplos importantes que permitem ao leitor uma reflexão sobre as principais definições e resultados intuitivos em espaços métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach. As noções de aplicações lipschitzianas, continuidade e suas relações com conjuntos abertos e fechados, limites e sequências, sequências de Cauchy e espaços métricos completos são relevantes no desenvolvimento do estudo dos temas, pois serão pontos centrais na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2. Este trabalho é um estudo da obra "Espaços Métricos" (Lima, 1977), com influência de algumas outras obras, como "Curso de Análise - Volume 1" (Lima, 1976), "Curso de Análise - Volume 2" (Lima, 1981), "Espaços Métricos e Introdução à Topologia" (Domingues, 1982) e "Lições de equações diferenciais ordinárias" (Sotomayor, 1979). Além disso, o tema escolhido tem intenção de complementar a formação da autora, graduanda de licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Espaços métricos. Ponto fixo. Problema de valor inicial.

ABSTRACT

This work is a compilation of results and examples in metric spaces, organized into eight chapters, with the ultimate goal of proving Banach's Fixed Point Theorem to establish the existence and uniqueness of solutions to initial value problems in differential equations. Throughout the development of this work, basic concepts and important examples are discussed, allowing the reader to reflect on the main definitions and results established in metric spaces and Banach's Fixed Point Theorem. The notions of Lipschitz mappings, continuity, and their relationships with open and closed sets, limits and sequences, Cauchy sequences, and complete metric spaces are relevant to the development of the study's topics, as they will be central points in the course "Capstone Project 2." This work is a study of the book "Metric Spaces" (Lima, 1977), influenced by other works such as "Analysis Course - Volume 1" (Lima, 1976), "Analysis Course - Volume 2" (Lima, 1981), "Metric Spaces and Introduction to Topology" (Domingues, 1982), and "Lessons on Ordinary Differential Equations" (Sotomayor, 1979). Additionally, the chosen topic aims to complement the academic background of the author, an undergraduate student in Mathematics Education.

Keywords: Metric spaces. Fixed point. Initial value problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distância das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$	21
Figura 2 – Distância entre as funções $f, g \in (\mathcal{C}, d)$	22
Figura 3 – Esferas munidas pelas métricas d', d'' e d'''	26
Figura 4 – Interseção de $B(a; r)$ e $X = \{z \in \mathbb{R}^2; z \leq 1\}$	27
Figura 5 – Bolas aberta e fechada de raio r e centro (a, b)	28
Figura 6 – Distância de um ponto a um conjunto.....	32
Figura 7 – Aplicação contínua de M em N	35
Figura 8 – Aplicação contínua de M em \mathbb{R}	36
Figura 9 – Gráfico da função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$	46
Figura 10 – Composição das aplicações f^2 e i_{12}	47
Figura 11 – Equivalência das métricas d', d'' e d'''	48
Figura 12 – Definições de interior e fronteira de um conjunto.	51
Figura 13 – Subconjuntos abertos da reta.....	54
Figura 14 – Aplicação contínua f	57
Figura 15 – Sequência $\{x_n\}$	68
Figura 16 – Gráficos das soluções dos exemplos de equações diferenciais.	95
Figura 17 – Teorema de existência e unicidade.	97

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	ESPAÇOS MÉTRICOS	10
2.1	DEFINIÇÃO E EXEMPLOS	10
2.2	BOLAS E ESFERAS	24
2.3	CONJUNTOS LIMITADOS	29
2.4	DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM CONJUNTO	32
2.5	ISOMETRIAS	33
3	FUNÇÕES CONTÍNUAS	35
3.1	DEFINIÇÃO E EXEMPLOS	35
3.2	PROPRIEDADES ELEMENTARES DAS APLICAÇÕES CONTÍ- NUAS	41
3.3	MÉTRICAS EQUIVALENTES	45
3.4	TRANSFORMAÇÕES LINEARES	48
4	LINGUAGEM BÁSICA DA TOPOLOGIA	51
4.1	CONJUNTOS ABERTOS	51
4.2	RELAÇÕES ENTRE CONJUNTOS ABERTOS E CONTINUIDADE	57
4.3	CONJUNTOS FECHADOS	59
5	LIMITES	66
5.1	LIMITES E SEQUÊNCIAS	66
5.2	SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS	71
5.3	CONVERGÊNCIA E TOPOLOGIA	74
5.4	SEQUÊNCIAS DE CAUCHY	76
6	ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS	80
6.1	ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS	80
6.2	ESPAÇOS DE BANACH E ESPAÇOS DE HILBERT	84
7	TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÃO ...	90
7.1	TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH	90
7.2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	92
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	100

REFERÊNCIAS	101
--------------------------	------------

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é uma monografia, apresentada como meio de avaliação da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, para o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos no semestre 2024/2.

A origem do termo "espaços métricos" é datada em 1914, e atribuída ao matemático alemão Felix Hausdorff (1868 - 1942), de acordo com [Taskovic \(2005\)](#). Esse autor ainda diz que foi o matemático francês Maurice René Fréchet (1878 - 1973) quem primeiramente definiu, em sua tese de doutorado (1906), um tipo de espaço generalizado L - *spaces* onde a noção de limite foi baseada na axiomatização de sequências convergentes, no qual o funcional distância $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ respeita as condições, para quaisquer $x, y, z \in X$, $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ e $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Desde então, o estudo desses espaços se tornou fundamental para Matemática Pura, como na área de Análise e Topologia Geral.

Entretanto, a disciplina "Espaços Métricos" não é contemplada na Matriz Curricular, vigente desde 2019, do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos, de acordo com o Projeto Político Pedagógico ([CCM-UFSCar, 2018](#)) do curso. Por isso, o tema deste trabalho foi escolhido para complementar a formação da aluna.

Ao mesmo tempo, este trabalho busca aprofundar o conhecimento adquirido pela aluna durante o período em que foi bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), no Edital de 2022/2023. Embora o tema desta pré-monografia seja intrinsecamente relacionados ao tema de estudo na Iniciação Científica desenvolvida pela aluna, o conteúdo deste trabalho foi afinado e aprimorado, tanto quanto complementado durante seu processo de produção, contando com abordagem e plano de trabalho distinto.

O principal objetivo desta monografia é apresentar conceitos, exemplos e resultados fundamentais em espaços métricos, suficientes para embasar a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach e, posteriormente, aplicá-lo a existência e unicidade da solução de problemas de valor inicial das equações diferenciais de primeira ordem. Para isso, no segundo capítulo (Espaços Métricos) são abordadas as definições de métricas, espaços métricos, bolas e esferas, conjuntos limitados, distância de um ponto a um conjunto e isometrias.

O capítulo 3 (Funções Contínuas) define e exemplifica a continuidade de funções, além de apresentar as propriedades elementares das aplicações contínuas, o conceito de métricas equivalentes e transformações lineares. Depois, no capítulo 4 (Linguagem Básica da Topologia) são apresentados e exemplificados os conjuntos abertos e fechados, assim como resultados sobre conjuntos abertos e continuidade. Em seguida, no capítulo 5 (Limites) os temas abordados são limites, sequências, convergência e sequência de Cauchy. O capítulo 6 (Espaços Métricos Completos) aborda os espaços métricos completos e espaços de Banach e Hilbert. Ainda, o capítulo 7 aborda o Teorema do Ponto Fixo e a existência e unicidade de solução de problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Por fim, as considerações finais sobre o trabalho são feitas.

2 ESPAÇOS MÉTRICOS

Este primeiro capítulo apresenta importantes definições, como a definição de uma métrica, espaços métricos, bolas e esferas, conjuntos limitados e isometrias. Além disso, serão expostos exemplos e resultados relacionados ao tema central do capítulo. Este capítulo foi desenvolvido de acordo com as referências "Espaços Métricos"(Lima, 1977) e "Espaços Métricos e Introdução À Topologia"(Domingues, 1982).

2.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Definição 2.1. Seja M um conjunto não vazio. Uma *métrica* é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa um par ordenado de elementos do conjunto M a um número real $d(x, y)$, de forma que, para todo $x, y, z \in M$, d respeita as condições

- a) $d(x, x) = 0$;
- b) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
- c) $d(x, y) = d(y, x)$;
- d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um *espaço métrico* é um par (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M .

Definição 2.2. Sejam (M, d) um espaço métrico e S um subconjunto de M , uma *métrica induzida* d pela métrica d em M é uma métrica restringida para d a $S \times S$.

Chamamos (S, d) , com d sendo uma métrica induzida d em M , um *subespaço métrico*.

Exemplo 2.1. Métrica "Zero-Um".

Seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação definida por

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y; \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Vamos provar que d é métrica, mostrando que obedece todas as propriedades, para todo $x, y, z \in M$.

- a) $d(x, x) = 0$, por definição.
- b) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = 1 > 0$.
- c)
 - (i) Se $x = y$, então $d(x, y) = 0 = d(y, x)$.
 - (ii) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = 1 = d(y, x)$

- d) (i) Se $x = z$, então $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$.
(ii) Se $x \neq z$ e $x = y$, então $d(x, z) = 1$ e $d(x, y) = 0$. O que implica que $1 \leq 0 + d(y, z)$, pois $d(y, z)$ só pode ser 1 ou 0. Portanto, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
(iii) Se $x \neq z$ e $x \neq y$, então $d(x, z) = 1 = d(x, y) = 1$. Então $1 \leq 1 + d(y, z)$. Logo, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

□

Para o próximo exemplo vamos utilizar as seguintes propriedades modulares:
Sejam a, b e c quaisquer números reais,

$$|a| \geq 0 \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad (2.1)$$

Exemplo 2.2. Reta Real

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Vamos mostrar que (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico, quando $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação definida por

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = |x - y|.$$

Para isso, mostraremos que d é uma métrica.

- a) $d(x, x) = |x - x| = 0$, por definição.
b) Se $x \neq y$, então $|x - y| > 0$.
c) $d(x, y) = |x - y| = |(-1) \cdot (y - x)| \stackrel{(2.1)}{=} |(-1)| \cdot |y - x| = 1 \cdot |y - x| = |y - x| = d(y, x)$
d) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \stackrel{(2.1)}{\leq} |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$

□

Essa métrica é chamada de *métrica usual* da reta.

Observação 1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b > 0$. Então vale a desigualdade

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Demonstração. Sendo $a > 0$ e $b > 0$, temos

$$a + b \leq a + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + b \Rightarrow a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Como $z \mapsto \sqrt{z}$ é crescente, então

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} + \sqrt{b}| = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Ainda antes do próximo exemplo, provaremos a importante desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para isso, vamos utilizar o conceito de produto interno.

Definição 2.3. Seja E um espaço vetorial real. Um *produto interno* é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ definida como, para quaisquer $x, y \in E$,

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

de modo a serem cumpridas as seguintes condições para todo $x, x', y, y' \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(P1) \quad \langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$(P2) \quad \langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$$

$$(P3) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$(P4) \quad \text{Se } x \neq 0, \text{ então } \langle x, x \rangle > 0.$$

Chamamos $\langle x, y \rangle$ de produto interno de x por y .

Observação 2. Como consequência das condições acima, obtemos as seguintes propriedades.

$$a) \quad \langle x, y + y' \rangle = \langle y + y', x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle y', x \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle.$$

$$b) \quad \langle x, \lambda \cdot y \rangle = \langle \lambda \cdot y, x \rangle = \lambda \cdot \langle y, x \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle.$$

$$c) \quad \langle 0, y \rangle = \langle 0 + 0, y \rangle = \langle 0, y \rangle + \langle 0, y \rangle \Rightarrow \langle 0, y \rangle = \langle 0, y \rangle + \langle 0, y \rangle \Rightarrow \langle 0, y \rangle - \langle 0, y \rangle = \langle 0, y \rangle \Rightarrow 0 = \langle 0, y \rangle$$

Analogamente, podemos dizer que $\langle x, 0 \rangle = 0$.

Observação 3. Sejam $x, y \in E$. Dizemos que x é ortogonal a y , e escrevemos $x \perp y$ quando seu produto interno for zero.

Definição 2.4. Seja E um espaço vetorial real. Uma *norma* em E é uma função $|| \cdot || : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto |x|$. Além disso, obedece as seguintes propriedades para quaisquer x, y em E e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ escalar,

$$N1) \quad x \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 0. \text{ Temos que } x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0;$$

$$N2) \quad |\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|;$$

$$N3) \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Teorema 2.1. (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*) Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Então, vale a desigualdade

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|.$$

Demonstração.

Note que a desigualdade é óbvia quando $x = 0$, pois $|\langle 0, y \rangle| = |0|$.

Quando $x \neq 0$, vamos tomar $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2}$ e $z = y - \lambda \cdot x$, então $z \perp x$, isto é, $\langle z, x \rangle = 0$. De fato, utilizando a definição 2.3, observamos que

$$\begin{aligned} \langle z, x \rangle &= \langle y - \lambda \cdot x, x \rangle = \langle y - \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2} \cdot x, x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle -\frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2} \cdot x, x \rangle = \langle y, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2} \cdot \langle x, x \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2} \cdot |x|^2 = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular o produto interno de y por si mesmo, tendo que $y = z + \lambda \cdot x$.

$$\begin{aligned} \langle y, y \rangle &= \langle z + \lambda \cdot x, z + \lambda \cdot x \rangle = \langle z, z + \lambda \cdot x \rangle + \langle \lambda \cdot x, z + \lambda \cdot x \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \langle z, \lambda \cdot x \rangle + \langle z, \lambda \cdot x \rangle + \langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \lambda \cdot \langle z, x \rangle + \lambda \cdot \langle z, x \rangle + \lambda^2 \cdot \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|y|^2 = |z|^2 + \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 + \lambda^2 \cdot |x|^2 \Rightarrow |y|^2 = |z|^2 + \lambda^2 \cdot |x|^2.$$

Como $|z|^2 \geq 0$, temos $|y|^2 \geq \lambda^2 \cdot |x|^2$. Ora,

$$\lambda^2 = \frac{\langle x, y \rangle^2}{(|x|^2)^2} \Rightarrow \lambda^2 \cdot |x|^2 = \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^2}.$$

Então,

$$|y|^2 \geq \frac{\langle x, y \rangle^2}{|x|^2} \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2 \Rightarrow \sqrt{\langle x, y \rangle^2} \leq \sqrt{|x|^2 \cdot |y|^2} \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|.$$

□

Lema 2.1. Sejam $\xi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $\eta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ elementos de \mathbb{R}^n . Então, vale a desigualdade

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (2.2)$$

Demonstração.

Segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 2.1), que

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \leq |\xi| \cdot |\eta| \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \quad (2.3)$$

Então,

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \\
 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\
 \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) &\leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \\
 \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} &\leq \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Isto é,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

□

Exemplo 2.3. Plano Euclidiano \mathbb{R}^n

Sejam $d', d'', d''' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $n > 1$.

Para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, definimos

$$\begin{cases}
 d'(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\
 d''(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| \\
 d'''(x, y) &= \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j - y_j|)
 \end{cases}$$

Vamos mostrar que d', d'' e d''' são métricas.

a) (i)

$$\begin{aligned}
 d'(x, x) &= \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} \\
 &= \sqrt{0^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = \sqrt{0 + 0 + \dots + 0} = 0
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 d''(x, x) &= |x_1 - x_1| + |x_2 - x_2| + \dots + |x_n - x_n| \\
 &= |0| + |0| + \dots + |0| = 0 + 0 + \dots + 0 = 0
 \end{aligned}$$

(iii)

$$d'''(x, x) = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_j) = \max_{1 \leq j \leq n} (0) = 0$$

b) Se $x \neq y$, então

(i)

$$d'(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} > 0.$$

(ii)

$$d''(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| > 0$$

Pela propriedade (2.1), pois cada parcela da equação é maior ou igual a zero e $x_j \neq y_j$.

(iii)

$$d'''(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j - y_j|) > 0$$

Também pela propriedade (2.1), $x_j \neq y_j$, temos que qualquer $(x_j - y_j) > 0$.

c) (i)

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{[-1 \cdot (y_1 - x_1)]^2 + \cdots + [-1 \cdot (y_n - x_n)]^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 \cdot (y_1 - x_1)^2 + \cdots + (-1)^2 \cdot (y_n - x_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = d'(y, x). \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} d''(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &= |(-1) \cdot (y_1 - x_1)| + |(-1) \cdot (y_2 - x_2)| + \cdots + |(-1) \cdot (y_n - x_n)| \\ &= |-1| \cdot |y_1 - x_1| + |-1| \cdot |y_2 - x_2| + \cdots + |-1| \cdot |y_n - x_n| \\ &= 1 \cdot |y_1 - x_1| + 1 \cdot |y_2 - x_2| + \cdots + 1 \cdot |y_n - x_n| \\ &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \cdots + |y_n - x_n| = d''(y, x). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} d'''(x, y) &= \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j - y_j|) = \max_{1 \leq j \leq n} (|(-1) \cdot (y_j - x_j)|) \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} (|(-1)| \cdot |(y_j - x_j)|) = \max_{1 \leq j \leq n} (1 \cdot |(y_j - x_j)|) \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} (|(y_j - x_j)|) = d'''(y, x). \end{aligned}$$

d) (i) Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. No Lema 2.1, tomando $a_i = x_i - y_i$ e $b_i = y_i - z_i$ para $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, ob-

temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \\ &\Updownarrow \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(ii)

$$\begin{aligned} d''(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + \cdots + |x_n - z_n| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + \\ &\quad + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| + \cdots + |x_n - y_n + y_n - z_n| \\ &\stackrel{(2.1)}{\leq} \underbrace{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| + \cdots +}_{(2.1)} \\ &\quad + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\ &\quad + \cdots + |y_n - z_n| \\ &= d''(x, y) + d''(y, z). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} d'''(x, z) &= \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j - z_j|) = |x_j - z_j| \\ &= |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| + \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - z_j| = d'''(x, y) + d'''(y, z). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1. *Sejam d' , d'' e d''' as métricas definidas no exemplo 2.3. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

$$d'''(x, y) \leq d'(x, y) \leq d''(x, y) \leq n \cdot d'''(x, y).$$

Demonstração.

Vamos demonstrar por partes, analisando inicialmente a primeira desigualdade.

Para algum $J \in \{1, 2, \dots, n\}$, e já que a função raiz é sempre crescente (Propriedade (2.1)), temos que

$$d'''(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j - y_j|) = |x_J - y_J| = \sqrt{(x_J - y_J)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} = d'(x, y).$$

Considerando a segunda desigualdade, e sabendo que

$$d'(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \text{ e } d''(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

note que

$$[d'(x, y)]^2 = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \right]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2. \quad (2.4)$$

Inicialmente, vamos mostrar por indução finita que

$$[d''(x, y)]^2 = \left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i \neq j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|. \quad (2.5)$$

A igualdade vale quando $n = 2$.

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^2 |x_i - y_i| \right]^2 &= (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)^2 = (|x_1 - y_1|)^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2| + (|x_2 - y_2|)^2 \\ &= (|x_1 - y_1|)^2 + (|x_2 - y_2|)^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2| \\ &= \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2|. \end{aligned}$$

Agora, vamos assumir como hipótese de indução

$$\left[\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i \neq j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|. \quad (2.6)$$

Por fim, vamos mostrar que a igualdade vale para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^{n+1} |x_i - y_i|\right]^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + |x_{n+1} - y_{n+1}|\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right)^2 + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right) \cdot |x_{n+1} - y_{n+1}| + (|x_{n+1} - y_{n+1}|)^2 \\
&\stackrel{(2.6)}{=} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right)^2}_{(2.6)} + 2 \sum_{i \neq j}^n |x_i - y_i| |x_j - y_j| + 2 \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right) |x_{n+1} - y_{n+1}| + \\
&\quad + (|x_{n+1} - y_{n+1}|)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right)^2 + (|x_{n+1} - y_{n+1}|)^2 + 2 \sum_{i \neq j}^n |x_i - y_i| |x_j - y_j| + \\
&\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\right) |x_{n+1} - y_{n+1}| \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1} |x_i - y_i|\right)^2 + 2 \sum_{i \neq j}^{n+1} |x_i - y_i| |x_j - y_j|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[d''(x, y)]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i \neq j} |x_i - y_i| |x_j - y_j|.$$

Consequentemente, como todas as parcelas são positivas, é claro que

$$[d''(x, y)]^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + 2 \sum_{i \neq j} |x_i - y_i| |x_j - y_j| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = [d'(x, y)]^2.$$

Extraindo a raiz em ambos os membros da desigualdade, e usando o fato que $z \mapsto \sqrt{z}$ é crescente, para $z \geq 0$, concluímos que $d''(x, y) \leq d'(x, y)$.

Por fim, vamos analisar a terceira desigualdade.

$$\begin{aligned}
d''(x, y) &= \underbrace{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|}_{n \text{ vezes}} \\
&\leq \underbrace{\max_{1 \leq j \leq n} (|x_j - y_j|) + \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j - y_j|) + \cdots + \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j - y_j|)}_{n \text{ vezes}} = n \cdot d'''(x, y).
\end{aligned}$$

Concluimos que as três desigualdades são verdadeiras. □

Exemplo 2.4. Espaço Vetorial Normado

Seja E um espaço vetorial real e $\|\cdot\|$ uma norma em E . Então o par $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado.

Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, então definimos a aplicação $d_{\|\cdot\|} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

com

$$(x, y) \mapsto d_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|.$$

Vamos provar que d é métrica.

a) $d_{|\cdot|}(x, x) = |x - x| = |0| \underset{(N1)}{=} 0.$

b) Se $x \neq y$, então $d(x, y) = |x - y| \underset{(2.1)}{\geq} 0$. Caso a igualdade $|x - y| = 0$ fosse verdadeira, teríamos que $x = y$, que é absurdo. Portanto, $d(x, y) > 0$.

c)

$$\begin{aligned} d_{|\cdot|}(x, y) &= |x - y| = |(-1) \cdot (y - x)| \underset{(N2)}{=} |(-1)| \cdot |y - x| \\ &= |-1| \cdot |y - x| = 1 \cdot |y - x| = |y - x| = d_{|\cdot|}(y, x). \end{aligned}$$

d)

$$d_{|\cdot|}(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \underset{(N3)}{\leq} |x - y| + |y - z| = d_{|\cdot|}(x, y) + d_{|\cdot|}(y, z).$$

□

Exemplo 2.5. Espaço Vetorial Normado com Produto Interno

Definimos então, a partir do produto interno, a norma de um vetor $x \in E$ pondo $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Assim, temos que $|x|^2 = \langle x, x \rangle$.

(N1) $x \neq 0 \Rightarrow |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} > 0;$

(N2)

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot x| &= \sqrt{\langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot x \rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \langle x, \lambda \cdot x \rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \lambda \cdot \langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot |x|; \end{aligned}$$

(N3) Essa propriedade decorre da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 2.1).

Exemplo 2.6. O \mathbb{R}^n é um espaço vetorial e um dos produtos internos é

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n.$$

Para mostrar, vamos conferir as propriedades da Definição 2.3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$(P1) \langle x + x', y \rangle = (x_1 + x'_1) \cdot y_1 + \cdots + (x_n + x'_n) \cdot y_n = x_1 \cdot y_1 + x'_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n + x'_n \cdot y_n$$

$$= x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n + x'_1 \cdot y_1 + \cdots + x'_n \cdot y_n = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle.$$

$$(P2) \langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \cdot x_1 \cdot y_1 + \cdots + \lambda \cdot x_n \cdot y_n = \lambda \cdot (x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n) = \lambda \cdot \langle x, y \rangle.$$

$$(P3) \langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n = y_1 \cdot x_1 + \cdots + y_n \cdot x_n = \langle y, x \rangle.$$

$$(P4) \text{ Se } x \neq 0, \text{ então } \langle x, x \rangle = x_1 \cdot x_1 + \cdots + x_n \cdot x_n \neq 0.$$

Definição 2.5. Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$.

Indicaremos como $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto de funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 2.7. Espaço de Funções

Para quaisquer f, g e h pertencentes a $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, definimos uma aplicação $d : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(f, g) \longmapsto d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Vamos mostrar que d é métrica.

a)

$$d(f, f) = \sup_{x \in X} |f(x) - f(x)| = \sup_{x \in X} |0| = 0.$$

b) Se $f(x) \neq g(x)$, então

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \underbrace{>}_{(2.1)} 0.$$

c)

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |(-1) \cdot [g(x) - f(x)]| \\ &= \sup_{x \in X} |(-1)| \cdot |g(x) - f(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f). \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} |g(x) - h(x)| = d(f, g) + d(g, h) \\ &= d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Chamamos essa métrica de *métrica da convergência uniforme* ou *métrica do sup*.

Observação 4. A soma e o produto de funções limitada também são funções limitadas. Suponha que f e g são funções limitadas. Vamos tomar $|f(x)| \leq L_1$ e $|g(x)| \leq L_2$.

Então,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq L_1 + L_2$$

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq L_1 \cdot L_2$$

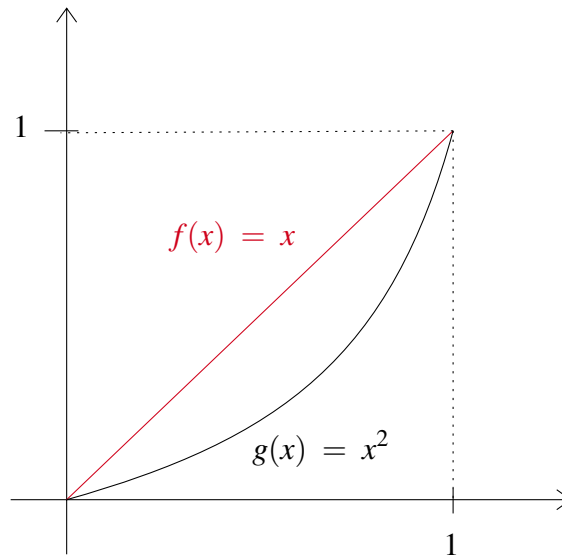
□

Observação 5. Seja $X = [a, b]$. Dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, a distância $d(f, g)$ é o comprimento da maior corda vertical que se pode traçar ligando o gráfico de f ao gráfico de g .

Por exemplo, no espaço métrico $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$, a distância da função $f(x) = x$ à função $g(x) = x^2$ é, como ilustrada pela figura 1,

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x - x^2|.$$

Figura 1 – Distância das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.



Fonte: elaborado pela autora.

Sendo o ponto V o vértice da função, vamos encontrar suas coordenadas x_V e y_V . Considerando a equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, temos que $a = -1$, $b = 1$ e $c = 0$. Portanto,

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y_V = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(1 - 0)}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}.$$

Então, temos que

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |x - x^2| = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 2.8. Para um intervalo fechado $[a, b]$ em \mathbb{R} , indiquemos $\mathcal{C}[a, b]$ o conjunto das funções reais contínuas definidas em $[a, b]$. Com relação à adição de funções e multiplicação de uma função por um número real, $\mathcal{C}[a, b]$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . E o funcional

$$f \mapsto |f| = \int_a^b |f(x)| dx$$

é uma norma sobre esse espaço, uma vez que $|f| \in \mathbb{R}$ para qualquer $f \in \mathcal{C}[a, b]$, já que

$$(N1) \quad |f| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow f = 0.$$

$$(N2) \quad |\alpha f| = \int_a^b |\alpha f(x)| dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)| dx = |\alpha| |f|$$

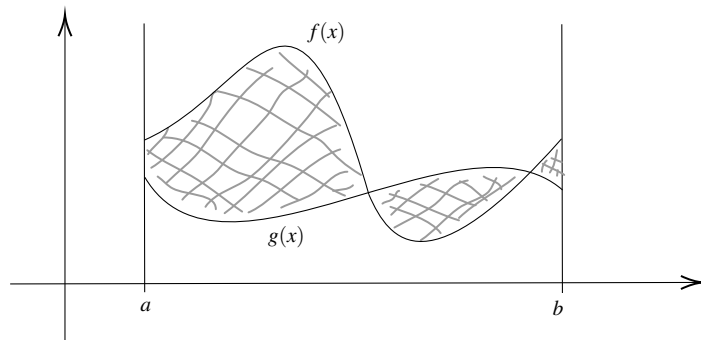
$$(N3) \quad |f + g| = \int_a^b |(f + g)(x)| dx = \int_a^b |f(x) + g(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx + \int_a^b |g(x)| dx = |f| + |g|.$$

Assim, temos que (\mathcal{C}, d) é um espaço métrico, onde para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$,

$$d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

A distância entre duas funções $f, g \in (\mathcal{C}, d)$ está ilustrada na parte hachurada da figura 2.

Figura 2 – Distância entre as funções $f, g \in (\mathcal{C}, d)$.



Fonte: elaborado pela autora.

Agora, vamos provar a *lei do paralelogramo*, que decorre da definição $|x|^2 = \langle x, x \rangle$. Essa lei é condição suficiente para dizer que uma norma provém de um produto interno. Ou seja, se vale a lei do paralelogramo, então a norma provém de um produto interno.

Teorema 2.2. (*Lei do Paralelogramo*). Seja E um espaço vetorial e a norma em E proveniente de um produto interno. Então, $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

Demonstração. Considerando a definição $|x|^2 = \langle x, x \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
 |x+y|^2 + |x-y|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\
 &= \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle + \langle x, x-y \rangle + \langle -y, x-y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle -y, -y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle x, (-1) \cdot y \rangle + \\
 &\quad + \langle (-1) \cdot y, x \rangle + \langle (-1) \cdot y, (-1) \cdot y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \cancel{\langle x, y \rangle} + \cancel{\langle y, x \rangle} + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \cancel{\langle x, y \rangle} - \cancel{\langle y, x \rangle} + \langle y, y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
 &= 2 \cdot (\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle) = 2 \cdot (|x|^2 + |y|^2)
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.9. Produto Cartesiano de Espaços Métricos

Sejam (M, d) e (N, d) espaços métricos. O produto cartesiano $M \times N$, como conjunto, é formado pelos pares ordenados $z = (x, y)$ e $z' = (x', y')$, onde $x, x' \in M$ e $y, y' \in N$. Definimos as métricas

$$(z, z') \mapsto \begin{cases} d'(z, z') = \sqrt{d(x, x')^2 + d(y, y')^2} \\ d''(z, z') = d(x, x') + d(y, y') \\ d'''(z, z') = \max\{|d(x, x'), d(y, y')|\} \end{cases}$$

Mostraremos no próximo capítulo que essas três métricas são topologicamente equivalentes e é mais conveniente, por simplicidade, trabalharmos com d'' e d''' .

A generalização do exemplo anterior para um produto cartesiano de n fatores é imediata. Tomando os espaços métricos M_1, M_2, \dots, M_n , cujas métricas indicaremos com os mesmos símbolos d', d'' e d''' , o produto cartesiano com $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ é o conjunto das listas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$. Podemos tornar M um espaço métrico o munindo com uma das seguintes métricas

$$\begin{aligned}
 d'(x, y) &= \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + \dots + d(x_n, y_n)^2}, \\
 d''(x, y) &= d(x_1, y_1) + \dots + d(x_n, y_n), \\
 d'''(x, y) &= \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}.
 \end{aligned}$$

Além disso, pela Proposição 2.1, temos que para quaisquer $x, y \in M$, valem as desigualdades

$$d'''(x, y) \leq d'(x, y) \leq d''(x, y) \leq n \cdot d'''(x, y).$$

Quando $M_1 = \dots = M_n = \mathbb{R}$, reobtemos o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , como produto cartesiano de n cópias do espaço métrico \mathbb{R} .

2.2 BOLAS E ESFERAS

Seja a um ponto qualquer no espaço métrico M . Considerando r um número real, sendo $r > 0$, vamos definir as bolas abertas e fechadas e a esfera.

Definição 2.6. (a) *Bola aberta* é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r , e representamos

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

(b) *Bola fechada* é o conjunto $B[a; r]$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor ou igual do que r , e representamos

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

(c) *Esfera* é o conjunto $S(a; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é igual a r , e representamos

$$S(a; r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Note que $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$. Além disso, quando M é um espaço vetorial normado E , podemos escrever

$$B(a; r) = \{x \in E; |x - a| < r\}, \quad B[a; r] = \{x \in E; |x - a| \leq r\}, \quad S(a; r) = \{x \in E; |x - a| = r\}.$$

Seja X um subespaço métrico de M . Vamos definir a bola aberta de centro a e raio r , em relação a métrica induzida em X como $B_X(a; r) = B(a; r) \cap X$. Analogamente, $B_X[a; r] = B[a; r] \cap X$ e $S_X(a; r) = S(a; r) \cap X$.

Exemplo 2.10. Seja M um espaço métrico munido da Métrica "Zero-Um"

A métrica "zero-um" faz referência ao item 2.1.

$$\forall a \in M, B(a; r) = B[a; r] = \begin{cases} M, & \text{se } r > 1; \\ \{a\}, & \text{se } r < 1. \end{cases}$$

Por outro lado, $B(a; 1) = \{a\}$ e $B[a; 1] = M$. Consequentemente,

$$S(a, r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{se } r \neq 1; \\ M - \{a\}, & \text{se } r = 1. \end{cases}$$

Exemplo 2.11. Seja M um espaço métrico munido da métrica usual da reta real.

Consideremos a métrica usual da reta real, citada no item 2.2. Temos que, $\forall a \in \mathbb{R}$ e

$\forall r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r pode ser escrita da seguinte forma.

$$\begin{aligned} B(a; r) = \{x \in M; |x - a| < r\} &\Rightarrow |x - a| < r \Rightarrow -r < x - a < r \Rightarrow a - r < x < a + r \\ &\Rightarrow B(a; r) =]a - r, a + r[. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que a bola fechada $B[a; r] = [a - r, a + r]$ e a esfera $S(a; r) = \{(a - r), (a + r)\}$.

Exemplo 2.12. Seja M um espaço métrico munido da métrica do Plano \mathbb{R}^2 .

Vamos considerar aqui as métricas do exemplo 2.3, observando uma métrica por vez.

a) $d'(a, r) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}$.

A bola aberta é definida como

$$B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} < r\} \Rightarrow (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2.$$

Assim, a bola fechada é definida por $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2$, e a esfera $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2$.

b) $d''(a, r) = |x - a_1| + |y - a_2|$.

Podemos definir a bola aberta por

$$B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - a_1| + |y - a_2| < r\}.$$

Isso implica que a bola fechada é definida como $|x - a_1| + |y - a_2| \leq r$, e a esfera $|x - a_1| + |y - a_2| = r$.

c) $d'''(a, r) = \max(|x - a_1|, |y - a_2|)$.

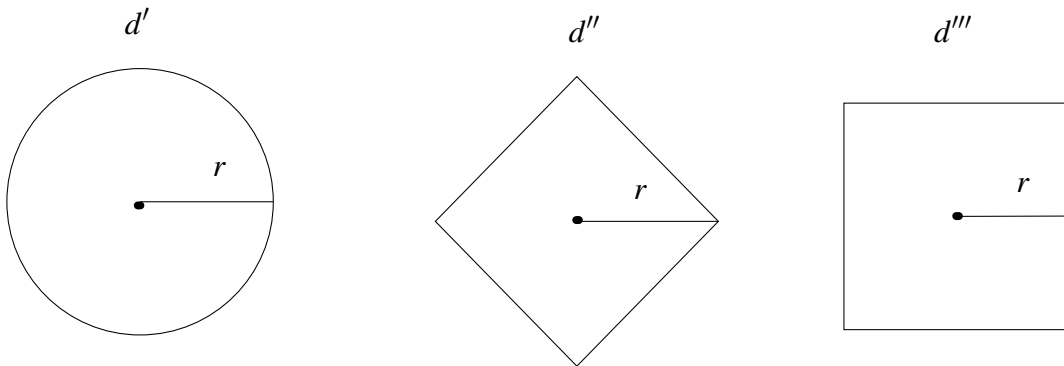
A bola aberta é definida como

$$B(a; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \max(|x - a_1|, |y - a_2|) < r\} \Rightarrow |x - a_1| < r, |y - a_2| < r.$$

Isso implica que a bola fechada é definida como $|x - a_1| \leq r$ ou $|y - a_2| \leq r$, e a esfera $|x - a_1| = r$ ou $|y - a_2| = r$.

A figura 3 ilustra as esferas munidas por cada uma dessas métricas.

Figura 3 – Esferas munidas pelas métricas d' , d'' e d''' .



Fonte: elaborado pela autora.

Exemplo 2.13. Seja M um espaço métrico munido da métrica do "sup".

Vamos considerar a métrica do espaço de funções, indicada no exemplo 2.7.

Seja $f \in \mathcal{B}([a, b]; \mathbb{R})$. Dado $r > 0$ e para todo $x \in [a, b]$, temos como condição para que $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ faça parte da

a) Bola aberta: $B(f, r) = \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; d(g, f) < r\}$, que para todo $x \in [a, b]$

$$|f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = d(g, f) < r.$$

b) Bola fechada: $B(f, r) = \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; d(g, f) \leq r\}$, que para todo $x \in [a, b]$

$$|f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = d(g, f) \leq r.$$

c) Esfera: $B(f, r) = \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; d(g, f) = r\}$, que para todo $x \in [a, b]$

$$|f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = d(g, f) = r.$$

Exemplo 2.14. Seja $X = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| \leq 1\}$ o disco de centro 0 e raio 1 e d induzida pela métrica euclidiana do plano, a métrica d' no exemplo 2.3.

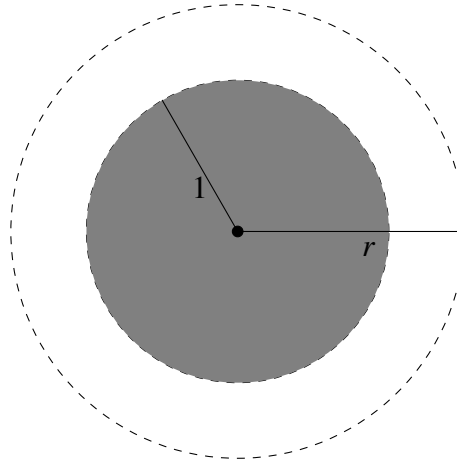
Consideremos $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, a bola aberta de centro $0 = (0, 0)$ e raio $r > 1$ pode ser definida por

$$\begin{aligned} B(0, r) &= \{z \in \mathbb{R}^2; d(z, 0) < r\} = \{z \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < r\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} < r\} = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| < r\}. \end{aligned}$$

Portanto, no espaço métrico (X, d) , temos, como ilustrado na figura 4,

$$\begin{aligned} B_X(a; r) &= B(a; r) \cap X = \{z \in \mathbb{R}^2; |z - 0| < r\} \cap X \\ &= \{z \in \mathbb{R}^2; |z| < r\} \cap X = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Figura 4 – Interseção de $B(a; r) \cap X = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| \leq 1\}$.



Fonte: elaborado pela autora.

Consequentemente, $B_X(0; r) = B_X[0, r] = X$, se $r > 1$. De maneira análoga,

$$S(0, r) = \{z \in \mathbb{R}^2; |z - 0| = r\} \cap X = \emptyset, \quad \forall r > 1.$$

Exemplo 2.15. Seja M o produto cartesiano $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$.

Vamos tomar a métrica

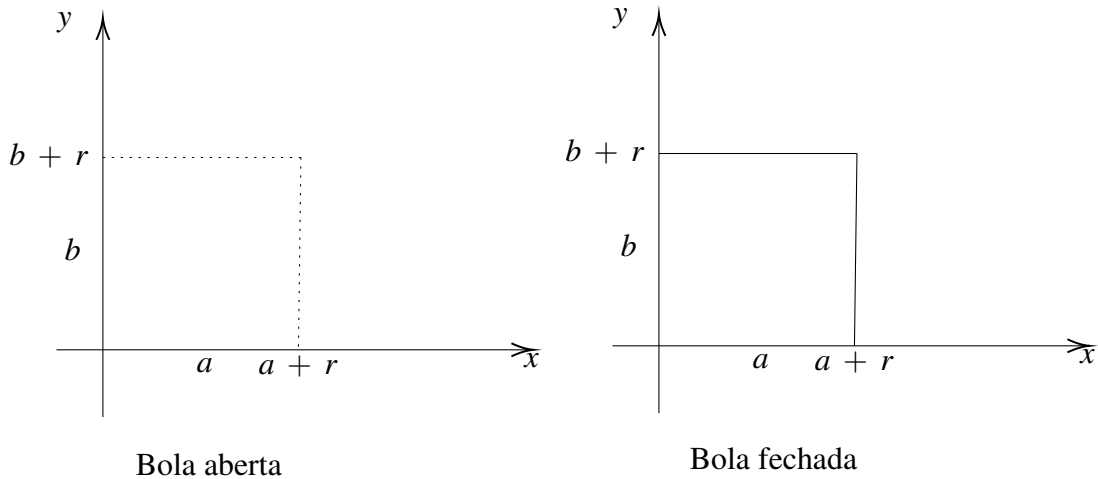
$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i).$$

Então as bolas em M são produtos cartesianos de bolas nos fatores M_i , com $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Então, definimos a bola aberta

$$B(a; r) = \{z \in \mathbb{R}^n : d(z, a) < r\} = \{z \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} d(z_i, a_i) < r\}.$$

Ou seja, $z \in B(a; r)$ equivale a dizer que para todo $i = 1, 2, \dots, n$ temos $d(z_i, a_i) < r$. Concluimos, então, $|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$ e, analogamente, $|y - b| < r \Leftrightarrow b - r < y < b + r$. Da mesma forma, definimos a bola fechada $B[a; r] = B[a_1; r] \times B[a_2; r] \times \cdots \times B[a_n; r]$ e podemos dizer que para todo $i = 1, 2, \dots, n$ temos $d(z_i, a_i) \leq r$. Concluimos, então, $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$ e, analogamente, $|y - b| \leq r \Leftrightarrow b - r \leq y \leq b + r$.

Tanto a bola aberta, quanto a bola fechada que acabamos de definir estão ilustradas na figura 5.

Figura 5 – Bolas aberta e fechada de raio r e centro (a, b) .

Fonte: elaborado pela autora.

Definição 2.7. Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ é chamado *ponto isolado* de M quando ele é uma bola aberta em M . Ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $B(a, r) = \{a\}$.

Exemplo 2.16. Seja E um espaço vetorial normado diferente de $\{0\}$. Nenhum ponto de E é isolado. Isso porque, dados $a \in E$ e $r > 0$, mostramos que a bola aberta $B(a; r)$ contém um elemento $x \neq a$ de modo que, tomando um $y \neq 0$ em E , vemos que o vetor $z = \frac{r}{2|y|} \cdot y \neq 0$ e tem norma $|z| = \frac{r}{2}$.

Portanto, $0 < |z| < r$. Então o ponto x pode ter a forma $x = a + z$. Isso implica que $x - a = z$, de modo que $0 < |x - a| < r$.

Definição 2.8. Seja M um espaço métrico. Se todos os pontos de M são pontos isolados, então dizemos que M é um *espaço discreto*.

Proposição 2.2. Dados os pontos $a \neq b$ num espaço métrico M , sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s \leq d(a, b)$. Então as bolas abertas $B(a; r)$ e $B(b; s)$ são disjuntas.

Demonstração.

Vamos supor que existe um ponto $x \in B(a; r) \cap B(b; s)$. Então, por definição de bola aberta (2.6), temos

$$d(x, a) < r \text{ e } d(x, b) < s.$$

Sabemos pela desigualdade triangular que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) = d(x, a) + d(x, b) < r + s \leq d(a, b).$$

Assim, temos que $d(a, b) < d(a, b)$, que é um absurdo. □

Corolário 2.1. Se $r + s < d(a, b)$, então as bolas fechadas $B[a; r]$ e $B[b; s]$ são disjuntas.

Demonstração.

Supomos que existe um ponto $x \in B[a; r] \cap B[b; s]$. Então, por definição de bola fechada (2.6), temos $d(x, a) \leq r$ e $d(x, b) \leq s$. Sabemos pela desigualdade triangular que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) = d(a, x) + d(x, b) \leq r + s < d(x, b)$$

Assim, temos que $d(a, b) < d(a, b)$, que é um absurdo. □

2.3 CONJUNTOS LIMITADOS

Definição 2.9. Um subconjunto X de um espaço métrico M é chamado *limitado* quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in X$.

Definição 2.10. a) Dizer que $x, y \in X \Rightarrow d(x, y) \leq c$, implica que c é uma *cota superior* para o conjunto das distâncias $d(x, y)$.

b) A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais se chama o *supremo* desse conjunto.

c) Definimos o *diâmetro* de um conjunto limitado $X \subset M$ como o número real $diam(X) = \sup\{d(x, y); x, y \in X\}$.

Observação 6. Para indicar que X não é limitado, escreve-se $diam(X) = \infty$. Isso significa que, dado arbitrariamente um número $c \in \mathbb{R}$, existem $x_c, y_c \in X$ tais que $d(x_c, y_c) > c$.

Evidentemente, se X é limitado e $Y \subset X$, onde Y é um subconjunto do espaço métrico M , então Y também é limitado, valendo $diam(Y) \leq diam(X)$.

Observação 7. Note que, para todo $x, y \in X$, temos

$$d(x, y) \leq \sup\{d(x, y); x, y \in X\} = diam(X).$$

Para os próximos exemplos, nos convém supor que $X \neq \emptyset$.

Exemplo 2.17. Toda bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$. Isso porque, dados $x, y \in B(a; r)$, temos

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) = d(x, a) + d(y, a) < r + r = 2r.$$

Então temos $diam(B(a; r)) = \sup_{x, y \in B(a; r)} d(x, y) \leq \sup_{x, y \in B(a; r)} 2r = 2r$.

Analogamente, a bola fechada $B[a; r]$ e a esfera $S(a; r)$ também são conjuntos limitados cujos diâmetros não excedem $2r$. Por exemplo,

a) Se $M = \{a\}$, $B[a; r] = B(a; r) = S(a; r) = \{a\}$. Então,

$$\text{diam}(B(a; r)) = \sup_{a \in M} d(a, a) = \sup_{a \in M} 0 = 0.$$

b) Se $M = \mathbb{Z}$, com a métrica induzida de \mathbb{R} , $r > 0$ não é um inteiro, então para cada $a \in \mathbb{Z}$,
 $\text{diam}(B[a; r]) = \text{diam}([a - r, a + r] \cap \mathbb{Z}) < 2r$.

Exemplo 2.18. Em um espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, toda bola aberta $B = B(a; r)$ tem diâmetro $2r$. Sabemos do exemplo 2.17 que $\text{diam}(B) \leq 2r$. Queremos mostrar então que não existe um número positivo s menor do que $2r$ que pode ser diâmetro de B . Para isso, vamos tomar $y \in E$, tal que $y \neq 0$ e $t \in \mathbb{R}$, tal que $s < 2t < 2r$.

Vamos tomar também o vetor $x = \frac{ty}{|y|}$. Temos que

$$a + x \in B \Rightarrow d(a + x, a) = |(a + x) - a| = |x| = t < r.$$

Então,

$$a + x, a - x \in B \Rightarrow d(a + x, a - x) = |(a + x) - (a - x)| = 2|x| = 2t > s.$$

Logo, s não é diâmetro de B .

Exemplo 2.19. Um espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$ com a métrica proveniente da sua norma nunca é limitado. Para mostrar isso, vamos tomar um $x \in E$ tal que $x \neq 0$. Então, para cada $c > 0$ podemos tomar o vetor $x_c \in E$, onde $x_c = \frac{2cx}{|x|}$. Portanto,

$$d(x_c, 0) = |x_c - 0| = |x_c| = 2c > c.$$

Exemplo 2.20. Um subconjunto X de um espaço métrico M é um *subconjunto limitado* se, e somente se, está contido em alguma bola de M .

Com efeito, se $X \subset B(a; r)$, então X é limitado e tem diâmetro menor ou igual a $2r$. Ainda, se $X = \emptyset$, então X está contido em toda bola e, assim, é limitado. Por fim, se X é limitado, então tomando arbitrariamente $a \in X$, existe $c > 0$ tal que $d(a, x) \leq c$, $\forall x \in X$. Logo, $X \subset B[a; c] \subset B(a; 2c)$.

Exemplo 2.21. Se X e Y são limitados, então $X \cup Y$ é limitado.

O resultado é trivial se $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$. Com efeito, vamos fixar $a \in X$ e um ponto $b \in Y$. Sabemos que existe $c > 0$ tal que $d(x, a) \leq c$ e $d(y, b) \leq c$ para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$. Então, pondo $k = 2c + d(a, b)$, temos para $x \in X$ e $y \in Y$ arbitrários,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq c + d(a, b) + c = k.$$

Quando $x, y \in X$ e $x, y \in Y$, a desigualdade é evidente. Portanto, vale $d(x, y) \leq k$ para quaisquer $x, y \in X \cup Y$, o que mostra que a reunião $X \cup Y$ é um conjunto limitado. Por fim,

aplicando o resultado no processo de indução finita, concluímos que a reunião $X_1 \cup \dots \cup X_n$ de n conjuntos limitados é um conjunto limitado. Todo conjunto finito (sendo reunião dos seus pontos) é limitado.

Exemplo 2.22. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é limitada, pois $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$, já que

$$1+x^2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1} = 1.$$

Por outro lado, a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $x \mapsto g(x) = x^2$ não é limitada, pois $g(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$. Ainda, se $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica que provém de uma norma em \mathbb{R}^n , então d não é uma função limitada (exemplo 2.19).

Observação 8. Sejam X um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. Vamos indentificar a notação $\mathcal{B}(X; M)$ como o conjunto de funções limitadas $f : X \rightarrow M$.

Definição 2.11. Dadas $f, g \in \mathcal{B}(X; M)$, as distâncias $d(f(x), g(x))$, quando x varia em X formam um conjunto limitado de números reais maiores ou iguais a zero, pois o conjunto $f(X) \cup g(X) \subset M$ é limitado (vide exemplo 2.21). Assim, definimos a *distância entre duas funções limitadas* $f, g : X \rightarrow M$ pondo

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\}.$$

Quando E é um espaço vetorial normado, podemos somar funções que tomam valores em E e multiplicá-las por números. Ou seja, para quaisquer $f, g \in \mathcal{B}(X; E)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $f + g : X \rightarrow E$ e $\lambda \cdot f : X \rightarrow E$ são limitadas. Portanto, $\mathcal{B}(X; E)$ é um espaço vetorial em relação às operações naturais. A métrica do sup em $\mathcal{B}(X; E)$ provém da norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Então, podemos escrever $d(f, g)$ como $\|f - g\|$.

Observação 9. Seja M um espaço métrico e X um subconjunto arbitrário de M . Vamos considerar o conjunto $\mathcal{F}(X; M)$ de *todas* as funções $f : X \rightarrow M$. Note que a métrica do sup não tem sentido em $\mathcal{F}(X; M)$, já que existem funções $f, g \in \mathcal{F}(X; M)$ tais que o conjunto $\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$ não é limitado. Neste caso escrevemos $d(f, g) = +\infty$. Quando o conjunto é limitado, escrevemos $d(f, g) < +\infty$.

Observação 10. A relação " $d(f, g) < +\infty$ " é uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{F}(X; M)$. Isso porque é reflexiva, já que $d(f, f) < +\infty$. Também é simétrica, pois $d(f, g) < +\infty \Rightarrow d(g, f) < +\infty$.

E, por fim, é transitiva, já que

$$d(f, g) < +\infty, d(g, h) < +\infty \Rightarrow d(f, g) \leq \underbrace{d(f, g)}_{< +\infty} + \underbrace{d(g, h)}_{< +\infty} < +\infty.$$

Ainda, dada $f : X \rightarrow M$, a classe de equivalência de f de acordo com a relação " $d(f, g) < +\infty$ " é o conjunto

$$\mathcal{B}_f(X; M) = \{g : X \rightarrow M; d(g, f) < +\infty\}.$$

Temos que, dadas $f, g : X \rightarrow M$,

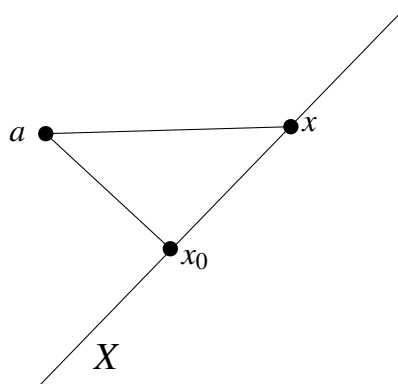
$$d(f, g) < +\infty \Leftrightarrow g \in \mathcal{B}_f(X; M) \Leftrightarrow f \in \mathcal{B}_g(X; M) \Leftrightarrow \mathcal{B}_f(X; M) = \mathcal{B}_g(X; M).$$

Portanto, o conjunto $\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$ é limitado se, e somente se, $\mathcal{B}_f(X; M) = \mathcal{B}_g(X; M)$.

2.4 DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM CONJUNTO

Seja a um ponto e X uma reta no plano. O ponto $x_0 \in X$, pé da perpendicular baixada de a sobre X , é o ponto de X que está mais próximo de a . Com efeito, qualquer outro ponto $x \in X$ determina o triângulo retângulo Δaxx_0 e, pelo Teorema de Pitágoras, como ilustra a figura 6, temos $d(a, x)^2 = d(a, x_0)^2 + d(x_0, x)^2$. Então, $d(a, x_0) \leq d(a, x)$ e podemos escrever $d(a, x_0) = \inf_{x \in X} d(a, x)$.

Figura 6 – Distância de um ponto a um conjunto



Fonte: elaborado pela autora.

Definição 2.12. Seja a um ponto e X um subconjunto não-vazio de um espaço métrico X . Definimos a distância do ponto a ao conjunto X como o número real

$$d(a, X) = \inf_{x \in X} d(a, x).$$

Pela definição de ínfimo temos, ainda,

- 1) $d(a, X) \leq d(a, x)$ para todo $x \in X$;
- 2) Se $d(a, X) < c$ então existe $x \in X$ tal que $d(a, x) < c$.

Proposição 2.3. Seja M um espaço métrico. Dados $a, b \in M$ e um subconjunto não-vazio $X \subset M$, vale

$$|d(a, X) - d(b, X)| \leq d(a, b).$$

Demonstração. Queremos mostrar que $-d(a,b) \leq d(a,X) - d(b,X) \leq d(a,b)$. Note que, para todo $x \in X$, temos pela desigualdade triangular $d(a,X) \leq d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x)$. Então, como a desigualdade vale para todo $x \in X$, $d(a,X) \leq d(a,b) + d(b,x) \Rightarrow d(a,X) - d(b,x) \leq d(a,b) \Rightarrow d(a,X) - d(b,X) \leq d(a,b)$.

Analogamente, tomando $d(b,X) \leq d(b,x) \leq d(b,a) + d(a,x)$ para todo $x \in X$, temos $d(b,X) \leq d(b,a) + d(a,x) \Rightarrow -d(a,x) + d(b,X) \leq d(a,b) \Rightarrow -d(a,X) + d(b,X) \leq d(a,b) \Rightarrow d(a,X) - d(b,X) \geq -d(a,b)$. \square

2.5 ISOMETRIAS

Definição 2.13. Sejam M, N espaços métricos. Definimos como uma *imersão isométrica* a aplicação $f : M \rightarrow N$ quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Nesse caso, também é dito que f preserva distância. Uma *isometria* é uma imersão isométrica sobrejetora.

Observação 11. Uma imersão isométrica $f : M \rightarrow N$ é sempre injetora, pois

$$f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y)) = d(f(x), f(x)) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Toda imersão isométrica $f : M \rightarrow N$ define uma isometria de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$. A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são ainda isometrias.

Exemplo 2.23. Seja \mathbb{R}^n com a métrica induzida por uma norma qualquer. Vamos tomar $a, u \in \mathbb{R}^n$, com $|u| = 1$. A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida $t \mapsto a + ut$ é uma imersão isométrica. Isso porque, para $s, t \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} d(f(t), f(s)) &= |f(t) - f(s)| = |(a + ut) - (a + us)| = |a + ut - a - us| \\ &= |ut - us| = |u \cdot (t - s)| = |u| \cdot |t - s| \\ &= 1 \cdot |t - s| = |t - s| = d(t, s). \end{aligned}$$

Além disso, fixando $a \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida $x \mapsto g(x) = x + a$ é isometria, chamada *translação* pelo vetor a . Isso porque é uma aplicação sobrejetora, já que dado $y \in \mathbb{R}^n$, existe um $x = y - a$, tal que $x \in \mathbb{R}^n$ e $g(x) = (y - a) + a = y$. Ainda, é imersão isométrica pois, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d(g(x), g(y)) = |g(x) - g(y)| = |(x + a) - (y + a)| = |x + a - y - a| = |x - y| = d(x, y).$$

As translações mostram que, dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, existe uma isometria $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida $x \mapsto f(x) = b - a + x$, tal que $f(a) = b - a + a = b$. Por esse motivo, exprimimos que o \mathbb{R}^n é *metricamente homogêneo*.

Exemplo 2.24. Tomando o \mathbb{R}^2 como o conjunto dos números complexos. Vamos fixar um número $u = a + bi$, com $|u|^2 = a^2 + b^2 = 1$. A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (multiplicação de

números complexos) definida por $z \mapsto f(z) = u \cdot z$ é uma isometria. Isso porque

$$\begin{aligned} d(f(z), f(w)) &= |f(z) - f(w)| = |uz - uw| = |u \cdot (z - w)| = |u||z - w| \\ &= 1 \cdot |z - w| = |z - w| = d(z, w). \end{aligned}$$

Além disso, f é uma bijeção, pois $f^{-1}(z) = u^{-1}z$, onde $u^{-1} = a - bi$ é o inverso multiplicativo do número complexo u e $|u^{-1}| = 1$.

Observação 12. Note que $u \cdot u^{-1} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abí + abí - b^2 \underbrace{i^2}_{-1} = a^2 + b^2 = 1$.

A referência "Variáveis complexas e suas aplicações" (Churchill, 2015) pode ser usada como uma primeira familiarização com a teoria das funções complexas.

3 FUNÇÕES CONTÍNUAS

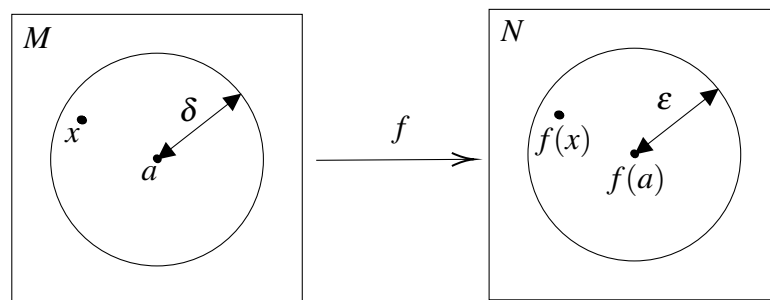
Este capítulo define funções contínuas e métricas equivalentes, assim como apresenta propriedades elementares das aplicações contínuas e transformações lineares. Adicionalmente, exemplos e propriedades dos principais resultados são abordados em cada seção. Também é um estudo das obras "Espaços Métricos" (Lima, 1977) e "Espaços Métricos e Introdução à Topologia" (Domingues, 1982), com influência das obras "Variáveis Complexas e Aplicações" (Churchill, 2015) e "Introductory Functional Analysis with Applications" (Kreyszig, 1978).

3.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Definição 3.1. Sejam M, N espaços métricos. A aplicação $f : M \rightarrow N$ é chamada *contínua no ponto* $a \in M$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. A função é contínua quando ela é contínua em todo os pontos $a \in M$.

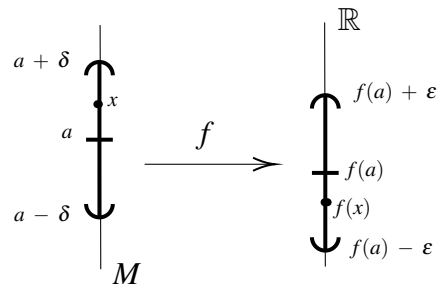
De maneira equivalente, podemos dizer que $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, dada qualquer bola $B' = B(f(a); \varepsilon)$ é possível encontrar uma bola $B = B(a; \delta)$, tal que $f(B) \subset B'$, como ilustra a figura 7.

Figura 7 – Aplicação contínua de M em N .



Fonte: elaborado pela autora.

No caso em que $M \subset \mathbb{R}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in M$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implicam $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Ou seja, f transforma pontos de M que estão no intervalo aberto $]a - \delta, a + \delta[$ em pontos do intervalo aberto $]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$, como explana a figura 8.

Figura 8 – Aplicação contínua de M em \mathbb{R} .

Fonte: elaborado pela autora.

A noção de continuidade num ponto é local. Isto é, depende apenas do comportamento de f nas proximidades do ponto. Mais precisamente, se existir em M uma bola B , de centro a , tal que $f|B$ seja contínua no ponto a , então $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a . Segue-se que, para toda parte limitada $X \subset M$, $f|X$ for contínua, então $f : M \rightarrow N$ é contínua.

Exemplo 3.1. Dada $f : M \rightarrow N$. Vamos supor que existe uma constante $c > 0$, chamada *constante de Lipschitz*, tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$. Dizemos então que f é uma *aplicação lipschitziana*. Nesse caso, f é contínua em cada ponto a de M .

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Então temos

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = \varepsilon.$$

Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são lipschitzianas, então $f + g$ e $k \cdot f$ também são lipschitzianas, onde $k \in \mathbb{R}$.

De fato, para quaisquer $x, y \in M$,

$$d(f(x), f(y)) \leq c_1 \cdot d(x, y) \quad \text{e} \quad d(g(x), g(y)) \leq c_2 \cdot d(x, y).$$

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} d((f + g)(x), (f + g)(y)) &= d(f(x) + g(x), f(y) + g(y)) \\ &= |(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))| \\ &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &= d(f(x), f(y)) + d(g(x), g(y)) \\ &\leq c_1 \cdot d(x, y) + c_2 \cdot d(x, y) = (c_1 + c_2) \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

Portanto, a soma é lipschitziana. Agora,

$$\begin{aligned} d((k \cdot f)(x), (k \cdot f)(y)) &= |k \cdot f(x) - k \cdot f(y)| = |k \cdot (f(x) - f(y))| = |k| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &= |k| \cdot d(f(x), f(y)) \leq |k| \cdot c_1 \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

□

Ademais se uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo I , é derivável e $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$. Então, pelo Teorma do Valor Médio, dados $x, y \in I$ quaisquer, existe um ponto z entre x e y , tal que

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|.$$

Assim, toda função com derivada limitada num intervalo (que pode ser ilimitado) é lipschitziana.

Note que a recíproca desta afirmação também é verdadeira. Ou seja, se f é lipschitziana, então f' é limitada. De fato, temos $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$. Agora,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot |x+h-x|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot |h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} c = c. \end{aligned}$$

Então, $|f'(x)| \leq c$. Portanto, f' é limitada.

Observação 13. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ chama-se *localmente lipschitziana* quando cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola $B = B(a; r)$ tal que a restrição $f|_B$ é lipschitziana. Uma aplicação localmente lipschitziana é contínua.

Exemplo 3.2. A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto f(x) = x^n$, n inteiro positivo, é lipschitziana em cada parte limitada de \mathbb{R} pois

$$|x| \leq a \Rightarrow |f'(x)| = |n \cdot x^{n-1}| = |n| \cdot |x^{n-1}| = n \cdot |x^{n-1}| \leq n \cdot a^{n-1}.$$

Esse fato também pode ser observado sem derivadas, da seguinte forma.

$$\begin{aligned} |x| \leq a, |y| \leq a \Rightarrow |x^n - y^n| &= |x - y| \cdot |x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}| \\ &\leq |x - y| \cdot (|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|y| + \dots + |y|^{n-1}) \leq c \cdot |y - x| \end{aligned}$$

onde $c = n \cdot a^{n-1}$. Portanto, concluímos que $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ é lipschitziana no intervalo fechado $[a, b]$. Por fim, de modo análogo, temos que a aplicação $r : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto r(x) = \frac{1}{x}$ é contínua. Vamos provar essa afirmação.

Para todo $k > 0$, r é lipschitziana no conjunto $X_k = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq k\}$. Portanto,

$$|x| \geq k, |y| \geq k \Rightarrow |r(x) - r(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{|x \cdot y|} = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{|y|} \cdot |x - y| \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot |x - y| = c \cdot |x - y|$$

onde $c = \frac{1}{k^2}$.

Para o próximo exemplo, precisamos definir uma contração.

Definição 3.2. Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é chamada uma contração em X se existe um número positivo $\alpha < 1$ tal que, para todo $x, y \in X$,

$$d(T_x, T_y) \leq \alpha \cdot d(x, y). \quad (3.1)$$

Geometricamente, isso significa que quaisquer pontos x e y tem imagens que são mais próximas que x e y . Mais precisamente, a proporção $\frac{d(T_x, T_y)}{d(x, y)}$ não ultrapassa uma constante α , que é estritamente menor do que 1.

Exemplo 3.3. Se $f : M \rightarrow N$ é tal que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para qualquer $x, y \in M$, dizemos que f é uma *contração fraca*. Ou seja, considerando a definição 3.2, uma contração fraca é uma contração cuja constante $\alpha = 1$.

Nesse caso, f é lipschitziana, com a constante lipschitziana sendo 1. Portanto, f é contínua. Vamos provar que algumas aplicações são contrações fracas.

a) As aplicações constantes $f : M \rightarrow N$ definidas por $x \mapsto f(x) = k$, para todo $x \in M$.

Prova. Temos, já que $d(x, y) \geq 0$,

$$d(f(x), f(y)) = d(k, k) = 0 \leq d(x, y).$$

□

b) As imersões isométricas (em particular as isometrias). Para cada $a \in M$ e para cada $b \in N$, temos $i_b : M \rightarrow M \times N$ e $j_a : N \rightarrow M \times N$ definidas, respectivamente,

$$i_b(x) = (x, b) \text{ e } j_a(y) = (a, y).$$

Prova. Analisando a aplicação i_b , temos

$$\begin{aligned} d(i_b(x), i_b(y)) &= d((x, b), (y, b)) = \sqrt{(x - y)^2 + (b - b)^2} \\ &= \sqrt{(x - y)^2} = |x - y| \leq |x - y| = d(x, y). \end{aligned}$$

Analogamente podemos escrever $d(j_a(x), j_a(y)) = d(x, y)$.

□

c) Para cada $X \subset M$ não vazio, a aplicação $d_X : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y \mapsto d_X(y) = d(y, X)$.

Prova. Pela proposição 2.3, temos

$$d(d_X(y), d_X(z)) = d(d(y, X), d(z, X)) = |d(y, X) - d(z, X)| \leq d(y, z).$$

□

Além disso, para cada $x \in X$, dizemos que a função $d_x : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma contração fraca quando definida por $y \mapsto d_x(y) = d(x, y)$.

Prova.

$$\begin{aligned} d(d_x(y), d_x(z)) &= d(d(x, y), d(x, z)) = |d(x, y) - d(x, z)| = ||x - y| - |x - z|| \\ &\leq |x - y - x - z| \leq |-y + z| \leq |-1| \cdot |y - z| = |y - z| = d(y, z) \end{aligned}$$

□

d) A norma $|| : E \rightarrow \mathbb{R}$, num espaço vetorial normado E .

Prova. Temos $d(|x|, |y|) = ||x| - |y|| \leq |x - y| = d(x, y)$, pois

$$\text{i) } |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } |y| &= |y - x + x| \leq |y - x| + |x|. \text{ Então, multiplicando ambos os lados por } -1, \\ -|y| &\geq -|y - x| - |x| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|y - x| = -|x - y|. \text{ Isto é, } -|x - y| \leq \\ &|x| - |y|. \end{aligned}$$

□

e) Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ a projeção $p_i : M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow M_i$ definida por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i.$$

Prova.

$$\begin{aligned} d(p_i(x_1, x_2, \dots, x_n), p_i(y_1, y_2, \dots, y_n)) &= d(x_i, y_i) = |x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \end{aligned}$$

□

f) A seguinte operação de soma $s : E \times E \rightarrow E$, num espaço vetorial normado E , definida por

$$(x, y) \mapsto s(x, y) = x + y,$$

quando se toma a norma $|x, y| = |x| + |y|$ em $E \times E$.

Prova. Em um espaço vetorial normado, temos $d(x, y) = |x - y|$. Então

$$\begin{aligned} d(s(x, y), s(a, b)) &= |s(x, y) - s(a, b)| = |x + y - (a + b)| = |x - a + y - b| \\ &\leq |x - a| + |y - b| = |(x - a, y - b)| \\ &= |(x, y) - (a, b)| = d((x, y), (a, b)). \end{aligned}$$

□

g) A "avaliação no ponto a ": para todo $a \in X$, a aplicação $v_a : \mathcal{B}(X; M) \rightarrow M$, definida por

$$f \mapsto v_a(f) = f(a).$$

Prova.

$$d[v_a(f), v_a(g)] = d(f(a), g(a)) \leq \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) = d(f, g).$$

□

Exemplo 3.4. Continuidade em espaços discretos.

Se $a \in M$ é um ponto isolado, então toda aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a .

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) = \{a\}$. Então

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow x = a \Rightarrow d(f(x), f(a)) = d(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon.$$

□

Assim, se M é discreto, $f : M \rightarrow N$ é contínua. Mas, se N é discreto, então $f : M \rightarrow N$ é contínua se, e somente se, cada ponto $a \in M$ é centro de uma bola aberta na qual f é constante.

Prova.

Sabemos que N é discreto, então existe $r > 0$ tal que $B(f(a); r) = \{f(a)\}$ para todo $a \in M$.

Isso implica que, para qualquer ponto $x \in M$, temos que $d(f(x), f(a)) < r \Rightarrow f(x) = f(a)$.

Agora, como f é contínua, sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(a, x) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

para todo $a \in M$. Note que, se escolhermos $r \geq \varepsilon$, teremos que $f(x) = f(a)$. Assim, existe uma bola aberta $B(a; \delta) \subset M$ tal que, para todo $x \in B(a; \delta)$, temos $f(x) = f(a)$. Logo, f é constante.

Por outro lado, se sabemos que existe uma bola aberta $B(a; \delta) \subset M$ tal que, para todo $x \in B(a; \delta)$, temos $f(x) = c$. Dado $\varepsilon > 0$, então

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = d(c, c) = 0 < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua.

□

Exemplo 3.5. Se $f : M \rightarrow N$ não é contínua no ponto a , então f é dita *descontínua* no ponto a . Isso significa que existe $\varepsilon > 0$ com a propriedade que, para todo $\delta > 0$ pode-se obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$. Por exemplo, podemos citar a função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$x \mapsto \phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Em todo ponto $a \in \mathbb{R}$ temos que ϕ é descontínua. Para mostrar, vamos tomar um $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dado $\delta > 0$, tomemos x_δ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, sendo x_δ racional se a for irracional. Então

$$|\phi(x_\delta) - \phi(a)| = |1 - 0| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Dada uma aplicação $f : M \rightarrow N$, seja $N_1 \subset N$ um subespaço tal que $f(x) \in N_1$ para todo $x \in M$. Então f também pode ser considerada uma aplicação de M em N_1 , na forma $f_1 : M \rightarrow N_1$. Concluimos que f é contínua se, e somente se, f_1 é contínua.

3.2 PROPRIEDADES ELEMENTARES DAS APLICAÇÕES CONTÍNUAS

Proposição 3.1. *A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Ou seja, se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a e $g : N \rightarrow P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua no ponto a .*

Demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$. Como g é contínua no ponto $f(a)$, podemos obter $\lambda > 0$ tal que, para $y \in N$

$$d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Temos também que f é contínua no ponto a . Então, dado $\varepsilon_1 > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in M$,

$$d(a, x) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon_1 = \lambda \underset{(3.2)}{\Rightarrow} d(g(f(a)), g(f(x))) < \varepsilon \Rightarrow d((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) < \varepsilon$$

Logo, $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua no ponto a □

Corolário 3.1. *Toda restrição de uma aplicação contínua é contínua. Ou seja, se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in X \subset M$, então $f|_X : X \rightarrow N$ é contínua no ponto a .*

Demonstração.

Sabemos que $f|_X = f \circ i$, onde $i : X \rightarrow M$, definida por $x \mapsto i(x) = x$, é a aplicação inclusão. Se $i : X \rightarrow M$ e $f : M \rightarrow N$, então $f|_X : X \rightarrow N$. Como ambas i e f são contínuas no ponto a , segue da Proposição 3.1 que $f|_X$ é contínua no ponto a . □

Exemplo 3.6. Continuidade conjunta e separada.

a) Conjunta

A aplicação $f : M \times N \rightarrow P$ é conhecida como a aplicação de duas variáveis $f(x, y)$, onde $x \in M$ e $y \in N$. Sua continuidade no ponto (a, b) pode ser escrita da seguinte maneira: para todo $\varepsilon > 0$ dado, se existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $d(x, a) < \delta_1$ e $d(y, b) < \delta_2$, então $d(f(x, y), f(a, b)) < \varepsilon$.

Essa definição decorre, quando se toma $M \times N$, da métrica $d[(x, y), (a, b)] = \max\{d(x, a), d(y, b)\}$. Diz-se, então, que f é contínua conjuntamente nas variáveis x e y .

b) Separada

Dizemos que $f : M \times N \rightarrow P$ é

- (i) contínua em relação à primeira variável (no ponto (a, b)) quando a aplicação $f_b : M \rightarrow P$ definida por $x \mapsto f_b(x) = f(x, b)$ é contínua no ponto $x = a$.
- (ii) contínua em relação à segunda variável (no ponto (a, b)) quando a aplicação $f_a : N \rightarrow P$ definida por $y \mapsto f_a(y) = f(a, y)$ é contínua no ponto $y = b$.

Se ambas acontecem, então dizemos que f é contínua separadamente em relação a cada uma de suas variáveis.

Observação 14. Como $f_a = f \circ i_a$ e $f_b = f \circ i_b$, temos que se f é contínua num ponto, então f é contínua separadamente nesse ponto. Embora, a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Note que f é contínua separadamente em $(0, 0)$, pois $f(0, y) = 0$ e $f(x, 0) = 0$. Mas, f é conjuntamente descontínua em $(0, 0)$, pois sua restrição à reta $y = ax, a \neq 0$, nos dá uma função descontínua

$$f(x, ax) = \frac{x \cdot ax}{x^2 + a^2x^2} = \frac{ax^2}{x^2 \cdot (1 + a^2)} = \frac{a^2}{1 + a^2},$$

se $x \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$. Portanto, f é descontínua em $(0, 0)$.

Exemplo 3.7. Continuidade da multiplicação.

Seja E um espaço vetorial normado. Vamos considerar a aplicação $m : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, definida por

$$(\lambda, x) \mapsto m(\lambda, x) = \lambda \cdot x.$$

Vamos mostrar que m é lipschitziana, e portanto contínua, em cada parte limitada de $\mathbb{R} \times E$. Se $|\lambda|, |\mu|, |x|, |y|$ são menores ou iguais a $a \in \mathbb{R}_+^*$, então

$$\begin{aligned} d[m(\lambda, x), m(\mu, y)] &= d(\lambda x, \mu y) = |\lambda x - \mu y| = |\lambda x - \mu x + \mu x - \mu y| \\ &\leq |\lambda x - \mu x| + |\mu x - \mu y| = |x| \cdot |\lambda - \mu| + |\mu| \cdot |x - y| \\ &\leq a \cdot (|\lambda - \mu| + |x - y|) = a \cdot d[(\lambda, x), (\mu, y)] \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2. A aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ é contínua (no ponto $a \in M$) se, e somente se, suas coordenadas $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$ são contínuas (no ponto $a \in M$).

Demonstração. Se f é contínua, então $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$ são contínuas. Isso porque as projeções p_1 e p_2 são contínuas. Agora, vamos provar a recíproca. Vamos usar em $N_1 \times N_2$ a métrica

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$$

Então, dados $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$, como f_1 e f_2 são contínuas no ponto a , existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que

$$d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon_1 \quad e \quad d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon_2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon$$

Logo, f é contínua no ponto a . □

Corolário 3.2. Se $f_1 : M_1 \rightarrow N_1$ e $f_2 : M_2 \rightarrow N_2$ são contínuas, então também é contínua a aplicação $\phi = f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$ definida por

$$(x_1, x_2) \mapsto \phi(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Demonstração.

Considerando as projeções

$$p_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \quad e \quad p_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2,$$

vemos que as coordenadas de ϕ são

$$f_1 \circ p_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow N_1$$

$$(x_1, x_2) \mapsto f_1 \circ p_1 = f_1(p_1(x_1, x_2)) = f_1(x_1)$$

$$e \quad f_2 \circ p_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow N_2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto f_2 \circ p_2 = f_2(p_2(x_1, x_2)) = f_2(x_2).$$

Segue da proposição anterior, então, que ϕ é contínua. \square

Proposição 3.3. *Sejam M um espaço métrico, E um espaço vetorial normado, as aplicações $f, g : M \rightarrow E$ e as aplicações $\alpha, \beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, com $\beta(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Então são contínuas as aplicações $f + g : M \rightarrow E$, $\alpha \cdot f : M \rightarrow E$ e $\frac{\alpha}{\beta} : M \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x), \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Demonstração.

Temos, pelos exemplos 3.2, 3.3 (letra f) e 3.7, que as aplicações $r : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $s : E \times E \rightarrow E$ e $m : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ definidas respectivamente por

$$x \mapsto r(x) = \frac{1}{x}, \quad (x, y) \mapsto s(x, y) = x + y \quad e \quad (\lambda, x) \mapsto m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$$

são contínuas. Das proposições 3.1 e 3.2, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} M \xrightarrow{\phi} E \times E \xrightarrow{s} E \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x) \end{array} \right\} f + g = s \circ \phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \times E \xrightarrow{m} E \\ x \mapsto (\alpha(x), f(x)) \mapsto \alpha(x) \cdot f(x) \end{array} \right\} \alpha \cdot f = m \circ \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}) \xrightarrow{(id \times r)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{m} \mathbb{R} \\ x \mapsto (\alpha(x), \beta(x)) \mapsto (\alpha(x), \frac{1}{\beta(x)}) \mapsto \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{array} \right\} \frac{\alpha}{\beta} = m \circ (id \times r) \circ \sigma$$

onde $\phi = (f, g)$, $\varphi = (\alpha, f)$ e $\sigma = (\alpha, \beta)$. Portanto, $f + g$, $\alpha \cdot f$ e $\frac{\alpha}{\beta}$ são contínuas. \square

Corolário 3.3. *Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas com valores reais, então $f + g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (caso $g(x) \neq 0$ para todo $x \in M$) são funções contínuas.*

Demonstração.

Essa demonstração é análoga à demonstração da proposição anterior (3.3), se substituímos E por \mathbb{R} .

3.3 MÉTRICAS EQUIVALENTES

Com a finalidade de simplificação das notações, aqui usaremos $M_1 = (M, d_1)$, $M_2 = (M, d_2)$, $B_1 = B(a; r)$ segundo a métrica d_1 e assim por diante. Em geral, os índices 1 e 2 serão usados para diferenciar objetos definidos com as métricas d_1 e d_2 .

Definição 3.3. Dizemos que d_1 é *mais fina* do que d_2 , e escrevemos $d_1 \succ d_2$ quando a aplicação identidade $i_{12} : M_1 \rightarrow M_2$ for contínua. Como $i_{12}(x) = x$ para todo $x \in M$, temos da definição de continuidade que $d_1 \succ d_2$ se, e somente se, para todo $a \in M$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B_1(a; \delta) \subset B_2(a; \varepsilon)$. Ou seja, $d_1 \succ d_2$ se, e somente se, toda bola aberta segundo d_2 contém uma bola aberta de mesmo centro segundo d_1 .

Exemplo 3.8. Se o espaço métrico (M, d_1) é discreto, então d_1 é mais fina do que qualquer outra métrica d_2 em M , e dizemos que d_1 é uma *métrica discreta*. Isso porque, se $d_2 \succ d_1$, então para todo $a \in M$, existe uma bola aberta $B_2(a; \delta) \subset \{a\}$. Ou seja, $B_2(a; \delta) = \{a\}$ e d_2 também é uma métrica discreta. Então, d_1 é mais fina do que qualquer d_2 em M .

Definição 3.4. Uma *pseudo-métrica* num conjunto M é uma função real $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpre as condições de uma métrica, com uma exceção: $d(x, y)$ pode ser igual a 0 quando $x \neq y$.

Para o próximo exemplo, observemos que $\mathcal{C}_0([a, b]; \mathbb{R})$ é um subespaço do espaço métrico $\mathcal{B}(M; N)$, de todas as aplicações limitadas $f : M \rightarrow N$, no qual a distância é dada por

$$d(f, g) = \sup_{x \in M} d(f(x), g(x)).$$

Exemplo 3.9. Se existir uma constante $c > 0$ tal que

$$d_2(x, y) \leq c \cdot d_1(x, y)$$

para todo $x, y \in M$, então d_1 é mais fina do que d_2 . Isso porque essa desigualdade implica que a aplicação identidade $i_{12} : M_1 \rightarrow M_2$ é lipschitziana e, portanto, contínua. Vejamos um caso particular da situação seguinte.

Seja $E = \mathcal{C}_0([a, b]; \mathbb{R})$ o espaço das funções limitadas contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $d(f, g) = |f - g|$. Sabemos que

$$|f| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

define uma norma e, assim, uma métrica em E . Como toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, temos que

$$|f|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

introduz uma pseudo-métrica em E . Mas, sabemos do Cálculo que uma função contínua não-negativa como $x \mapsto |f(x)|$ só pode ter integral nula se for nula. Então, $|\cdot|_1$ é uma norma e define

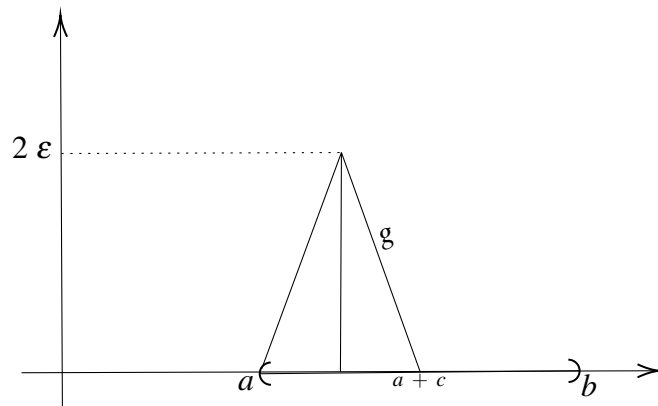
uma métrica em E . Logo, para quaisquer $f, g \in E$, temos

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \int_a^b \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| dx \\ &= \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \cdot \int_a^b 1 dx = \underbrace{|f - g|}_d \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Portanto, considerando $(b - a)$ como a constante de lipschitz, a métrica d é mais fina do que a métrica d_1 .

Observação 15. Note que d_1 não pode ser mais fina do que d . Para mostrar isso, basta mostrarmos que não existe uma bola aberta $B(f; \varepsilon)$ que pode conter outra bola aberta $B_1(f; \delta)$. Para isso, vamos considerar a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que é zero, exceto no intervalo $[a, a + c]$, contido em $[a, b]$, com $c < \frac{\delta}{2\varepsilon}$.

Figura 9 – Gráfico da função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.



Fonte: elaborado pela autora.

O gráfico de g é o triângulo isósceles da figura 9. A área desse triângulo é calculada por

$$\int_a^b |g(x)| dx.$$

Logo

$$|g|_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{c \cdot 2\varepsilon}{2} = c \cdot \varepsilon \leq \frac{\delta}{2\varepsilon} \cdot \varepsilon = \frac{\delta}{2}.$$

Assim $f + g \in B_1(f; \delta)$, mas $g(a + \frac{c}{2}) = 2\varepsilon$, então $|g| = \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)| > \varepsilon$ e, $f + g \notin B(f; \varepsilon)$.

Logo, podemos concluir que nenhuma bola segundo a métrica d pode conter uma bola de mesmo centro segundo d_1 .

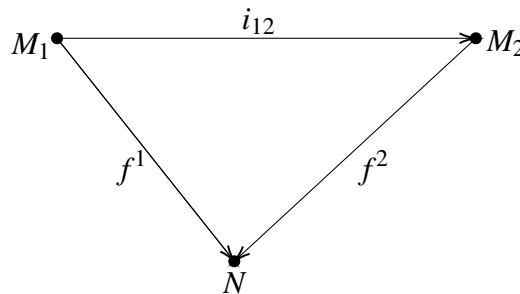
Proposição 3.4. Sejam $M_1 = (M, d_1)$ e $M_2 = (M, d_2)$ espaços métricos sobre o mesmo conjunto M . As seguintes afirmações são equivalentes.

- (1) $d_1 \succ d_2$; (Isto é, a aplicação identidade $i_{12} : M_1 \rightarrow M_2$ é contínua.)
- (2) Para todo espaço métrico N , se $f : M_2 \rightarrow N$ é contínua, então $f \circ i_{12} : M_1 \rightarrow N$; (Ou seja, toda aplicação contínua segundo d_2 é contínua segundo d_1 .)
- (3) Se $f : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f \circ i_{12} : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua;
- (4) Para todo $a \in M$, a função $d_{2a} : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto d_{2a}(x) = d_2(a, x)$ é contínua no ponto $a \in M$;
- (5) Toda bola aberta segundo d_2 contém uma bola aberta de mesmo centro segundo d_1 ;
- (6) A função $d_2 : M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração.

Chamaremos f de f^1 quando definida em M_1 e de f^2 quando definida em M_2 . Então $f^1 = f^2 \circ i_{12}$, como ilustra a figura 10.

Figura 10 – Composição das aplicações f^2 e i_{12} .



Fonte: elaborado pela autora.

Isso mostra que a continuidade de i_{12} e f^2 implicam na de f^1 . Ou seja, $(1) \Rightarrow (2)$. Também podemos afirmar que $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$, pois cada uma dessas afirmações é um caso particular da anterior. Além disso, $(1) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$, pois todas podem ser reformuladas dessa maneira: $\forall a \in M$ e todo $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $B_1(a; \delta) \subset B_2(a; \varepsilon)$. Também, $(6) \Rightarrow (4)$, pois é caso particular. Por fim, $(1) \Rightarrow (6)$, pois $(1) \Rightarrow M_1 \times M_1 \rightarrow M_2 \times M_2$ é contínua e, então, $f : M_2 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e acarreta que $f \circ i_{12} : M_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. \square

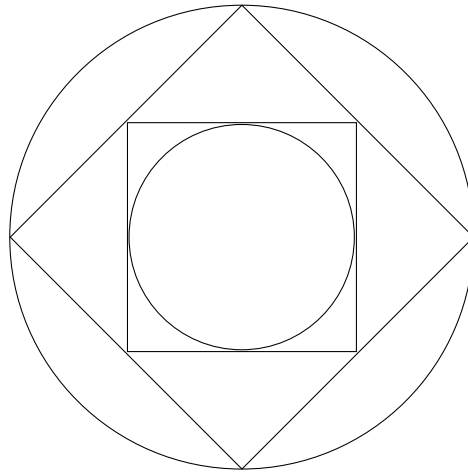
Definição 3.5. Duas métricas d_1 e d_2 num espaço M são ditas *métricas equivalentes* quando cada uma delas é mais fina do que a outra. Então escrevemos $d_1 \sim d_2$. Essa relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

Observação 16. Duas métricas discretas no mesmo espaço são sempre equivalentes. Se $d_1 \sim d_2$ e d_1 é discreta, então d_2 também é discreta.

Além disso, $d_1 \sim d_2$ se, e somente se, existe uma bola aberta em relação a uma dessas métricas que contém uma bola aberta de mesmo centro em relação a outra.

Exemplo 3.10. As métricas d' , d'' e d''' no plano \mathbb{R}^2 (exemplo 2.3) são equivalentes, pois todo disco contém um quadrado com diagonais paralelas aos eixos, o qual contém um quadrado de lados paralelos aos eixos e esse, por sua vez, contém um disco, e assim por diante. Todas essas figuras possuem o mesmo centro, como ilustra a figura 11.

Figura 11 – Equivalência das métricas d' , d'' e d''' .



Fonte: elaborado pela autora.

Exemplo 3.11. Se existirem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$, então as métricas d_1 e d_2 são equivalentes. Isso porque a aplicação identidade $i_{12} : (M, d_1) \rightarrow (M, d_2)$ e sua inversa $i_{21} : (M, d_2) \rightarrow (M, d_1)$ são, neste caso, lipschitzianas, já que $d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$ e $d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot d_2(x, y)$.

Para exemplificar, vamos tomar o Exemplo 2.3, do Capítulo 1: no produto cartesiano $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, as métricas d' , d'' e d''' definidas nesse exemplo são equivalentes, pois, de acordo com a Proposição 2.1, cumprem

$$d'''(x, y) \leq d'(x, y) \leq d''(x, y) \leq n \cdot d'''(x, y)$$

para todo $n \in \mathbb{R}$.

3.4 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição 3.6. Sejam E, F espaços vetoriais. Uma aplicação $f : E \rightarrow F$ chama-se *transformação linear* quando, para quaisquer $x, y \in E$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, têm-se

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot x \quad (3.3)$$

Observação 17. Dessa definição, temos o resultado

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot f(x_n) \quad (3.4)$$

Vamos mostrar isso por indução finita. Note que a igualdade é válida para $n = 1$, pela própria definição, pois $f(\lambda_1 \cdot x_1) = \lambda_1 \cdot f(x_1)$. Tomaremos como hipótese de indução que vale

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1}) = \lambda_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot f(x_{n-1}) \quad (3.5)$$

Agora, basta mostrarmos que a igualdade vale, também, para n . Temos, então

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1} + \lambda_n \cdot x_n) &\stackrel{(3.3)}{=} f(\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1}) + f(\lambda_n \cdot x_n) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} \lambda_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot f(x_{n-1}) + f(\lambda_n \cdot x_n) \\ &\stackrel{(3.3)}{=} \lambda_1 \cdot f(x_1) + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot f(x_{n-1}) + \lambda_n \cdot f(x_n). \end{aligned}$$

No caso em que $F = \mathbb{R}$, diremos que a aplicação linear $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um *funcional linear*.

Lema 3.1. *Toda transformação linear $f : \mathbb{R}^m \rightarrow F$, definida em \mathbb{R}^m e tomando valores num espaço vetorial normado F qualquer, é contínua.*

Demonstração.

Temos que em termos da base canônica $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, \dots, 0, 1)$ todo vetor $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ se escreve como $x = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_m \cdot e_m$. Então, pelo resultado (3.4), podemos escrever

$$f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_m \cdot f(e_m).$$

Então,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |x_1 \cdot f(e_1) + \cdots + x_m \cdot f(e_m)| \leq |x_1| |f(e_1)| + \cdots + |x_m| |f(e_m)| \\ &\leq (\max\{|f(e_1)|, \dots, |f(e_m)|\}) \cdot |x_1| + \cdots + (\max\{|f(e_1)|, \dots, |f(e_m)|\}) \cdot |x_m| \\ &= c \cdot (|x_1| + \cdots + |x_m|), \end{aligned}$$

onde $c = \max\{|f(e_1)|, \dots, |f(e_m)|\}$. Usando em \mathbb{R}^m a norma $|x| = |x_1| + \cdots + |x_m|$, obtemos $|f(x)| \leq c|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Segue-se então que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^m$, vale $|f(x) - f(y)| = |f(x) + (-1) \cdot f(y)| = |f(x - y)| \leq c \cdot |x - y|$. Portanto, f é lipschitziana e, consequentemente, contínua. \square

Mas não é verdade que toda transformação linear $f : E \rightarrow F$, onde E é um espaço vetorial normado qualquer, é contínua. O próximo exemplo mostra isso.

Exemplo 3.12. Um funcional linear descontínuo.

Seja E o conjunto dos polinômios reais com uma variável. E é um espaço vetorial no qual definimos a norma

$$\|p\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|.$$

Seja agora uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p \mapsto f(p) = p(2)$. Evidentemente, f é um funcional linear. Vamos mostrar que f é descontínua no ponto $0 \in E$ (polinômio identicamente nulo).

Com efeito, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar um polinômio p_n , no qual $p_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n$, tal que

$$\|p_n - 0\| = \|p_n\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |p_n(x)| = |p_n(1)| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Entretanto, $|f(p_n) - f(0)| = |f(p_n - 0)| = |f(p_n)| = p_n(2) = \left(\frac{2}{2}\right)^n = 1^n = 1 \geq \varepsilon$.

Proposição 3.5. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $f : E \rightarrow F$ são equivalentes.*

- (1) f é contínua;
- (2) f é contínua no ponto $0 \in E$;
- (3) Existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c \cdot |x|$ para todo $x \in E$;
- (4) Existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Demonstração.

A implicação (1) \Rightarrow (2) é evidente, pois ser contínua significa ser contínua em todos os pontos de E . Vamos mostrar que (2) \Rightarrow (3). Sendo f contínua no ponto 0 , com $f(0) = 0$, tomamos $\varepsilon = 1$ e obtemos $\delta > 0$ tal que $|x - 0| = |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| < \varepsilon = 1$. Seja agora c qualquer número tal que $0 < \frac{1}{c} < \delta$. Se $x = 0$, então vale a relação $|f(x)| \leq c \cdot |x|$, pois $|f(0)| \leq c \cdot |0| \Rightarrow 0 \leq 0$. Se $x \neq 0$, então $\left|\frac{x}{c|x|}\right| = \frac{|x|}{c|x|} = \frac{1}{c} < \delta$. Logo, $\left|f\left(\frac{x}{c|x|}\right)\right| < 1$. Pela linearidade de f , temos que

$$\frac{1}{c|x|} \cdot |f(x)| < 1 \Rightarrow |f(x)| < c \cdot |x|.$$

Agora, vamos mostrar (3) \Rightarrow (4). Basta notarmos que f é linear, portanto (3) $\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq c \cdot |x - y|$.

Por fim, mostraremos que (4) \Rightarrow (1). É evidente que sim, pois (4) implica que f é lipschitziana e, portanto, contínua. Portanto, temos (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1), como queríamos mostrar. \square

4 LINGUAGEM BÁSICA DA TOPOLOGIA

Este capítulo apresenta definições e exemplos relacionados a conjuntos abertos, fechados e suas relações com a continuidade. Ao mesmo tempo, essa seção expõe resultados, suas demonstrações e observações importantes para o entendimento de cada um dos assuntos a que são referentes. Além disso, este capítulo é um estudo da obra "Espaços Métricos" (Lima, 1977).

4.1 CONJUNTOS ABERTOS

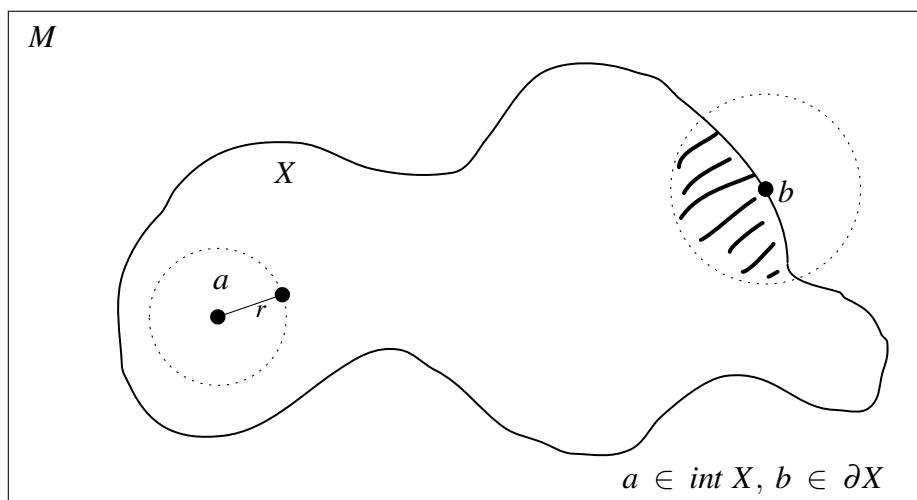
Definição 4.1. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Um ponto $a \in X$ é um *ponto interior* de X quando existe uma bola aberta de centro a contida em X . Ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r \Rightarrow x \in X$.

O *interior* de X em M é o conjunto $\text{int}X$ formado pelos pontos interiores a X .

Definição 4.2. A *fronteira* de X em M é o conjunto ∂X formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do seu complementar $M - X$. Uma outra notação para a fronteira de X é $\text{Fr}(X)$.

Vamos ilustrar essas definições através da figura 12.

Figura 12 – Definições de interior e fronteira de um conjunto.



Fonte: elaborado pela autora.

Observação 18. Dizer que o ponto b não é interior a X significa afirmar que toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X .

Exemplo 4.1. O interior do intervalo $[0, 1[$ na reta é o intervalo aberto $]0, 1[$ e sua fronteira contém os pontos 0 e 1.

Com efeito, se $0 < a < 1$, então pondo $r = \min\{a, 1 - a\}$, temos $]a - r, a + r[\subset]0, 1[$, pois

- (i) Se $r = a$ (logo $a < 1 - a \Rightarrow 2a < 1 \Rightarrow a < \frac{1}{2}$), então $]a - r, a + r[=]0, 2a[\subset]0, 1[$.
- (ii) Se $r = 1 - a$ (logo $1 - a < a \Rightarrow -2a < -1 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$), então $]a - r, a + r[=]2a - 1, 1[\subset]0, 1[$, já que $a > \frac{1}{2} \Rightarrow 2a > 1 \Rightarrow 2a - 1 > 0$.

Logo, $a \in \text{int }]0, 1[$. Mas $0 \in \partial]0, 1[$, pois todo intervalo aberto de centro 0 contém números negativos (que não estão no intervalo). Também $1 \in \partial]0, 1[$, pois mesmo que $1 \notin]0, 1[$, todo intervalo aberto de centro 1 possui pontos menores e maiores do que 1 (dentro e fora do intervalo, respectivamente). Nenhum número negativo ou maior do que 1 pode pertencer à fronteira de $]0, 1[$.

Exemplo 4.2. Seja \mathbb{Q} o conjunto dos números racionais. O interior de \mathbb{Q} em \mathbb{R} é vazio, pois nenhum intervalo aberto pode ser formado apenas por números racionais. A fronteira de \mathbb{Q} é toda a reta \mathbb{R} , já que qualquer intervalo aberto contém números racionais e irracionais.

Note que as noções de interior e fronteira são relativas, pois dependem do espaço métrico M , no qual se considera X imerso. Por exemplo, no Exemplo 4.1, temos $\text{int }]0, 1[=]0, 1[$ e $\partial]0, 1[= \{0, 1\}$ em \mathbb{R} . Mas, se consideramos \mathbb{R} como o eixo das abcissas ($y = 0$) no plano \mathbb{R}^2 , teremos $]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$, o interior de $]0, 1[$ seria vazio e sua fronteira seria o intervalo $[0, 1]$. Por isso, o espaço métrico em questão deve sempre ser especificado.

Observação 19. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Dado um ponto arbitrário $c \in M$, existem 3 possibilidades:

- (1) Existe uma bola aberta de centro c contida em X ; ($c \in \text{int}X$)
- (2) Existe uma bola aberta de centro c contida em $M - X$; ($c \in \text{int}(M - X)$)
- (3) Existe uma bola aberta de centro c que possui pontos em X e em $M - X$. ($c \in \partial X$)

Ou seja, temos que

$$M = \text{int}X \cup \partial X \cup \text{int}(M - X)$$

Um ou dois desses conjuntos podem ser vazios. Note que $\partial X = \partial(M - X)$.

Definição 4.3. Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se *aberto em M* quando todos os seus pontos são interiores. Ou seja, $\text{int}A = A$. Assim, $A \subset M$ é aberto se, e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$.

Para provar que $A \subset M$ é aberto em M devemos, para todo $x \in A$, obter um $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset A$.

Proposição 4.1. Em qualquer espaço métrico M , uma bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto.

Demonstração.

Seja $x \in B(a; r)$. Então $d(a, x) < r$. Portanto, $s = r - d(a, x) > 0$. Afirmamos que $B(x; s) \subset B(a; r)$. De fato, $y \in B(x; s) \Rightarrow d(x, y) < s < r$. Isso porque, da desigualdade triangular podemos escrever

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r$$

Logo, $d(a, y) < r$ e $y \in B(a; r)$. □

Corolário 4.1. Para todo $X \subset M$, $\text{int}X$ é aberto em M .

Demonstração.

Seja $a \in \text{int}X$. Então $\exists r > 0$ tal que $B(a; r) \subset X$. Para todo $x \in B(a; r)$, como vimos na proposição 4.1, existe um $s > 0$ tal que $B(x; s) \subset B(a; r)$, onde $B(x; s) \subset X$. Portanto, todo ponto $x \in B(x; s)$ é interior a X . Ou seja, $B(a; r) \subset \text{int}X$. Logo, $\text{int}X$ é aberto. □

Observação 20. O interior de X é o maior aberto contido em X . Isso quer dizer que se A é aberto e $A \subset X$, então $A \subset \text{int}X$. Isso porque se $a \in A$ é interior a A , $A \subset X$, então a é interior a X .

Exemplo 4.3. Um ponto $a \in M$ é um conjunto aberto em M se, e somente se, é um ponto isolado.

Isso porque $\{a\}$ deve ser uma bola para conter uma bola. Além disso, um espaço métrico é *discreto* se, e somente se, todos os seus subconjuntos são abertos.

Exemplo 4.4. O espaço métrico M é, evidentemente, aberto em M . Isso mostra como a propriedade "X é aberto" é relativa, isto é, depende do espaço M em que se considera X imerso: X é sempre aberto no próprio espaço X . Podemos citar dois exemplos:

- a) $X = [0, 1[$ é subconjunto aberto de $M = [0, 1]$. Basta notar que cada intervalo do tipo $[0, \varepsilon[$, com $0 < \varepsilon \leq 1$ é uma bola aberta de centro 0 no espaço M . No entanto, $[0, 1[$ não é aberto na reta \mathbb{R} . Também o intervalo aberto $]0, 1[$ no eixo das abcissas em \mathbb{R}^2 é aberto nesse eixo, mas não é aberto em \mathbb{R}^2 .
- b) O conjunto vazio \emptyset é aberto em qualquer espaço métrico que o contenha, pois para provar que um conjunto X não é aberto, devemos mostrar um elemento de X que não é interior a X . Mas, o conjunto vazio não possui elementos.

Exemplo 4.5. Em todo espaço métrico M , o complementar de uma bola fechada $B[a; r]$ é um conjunto aberto $A = M - B[a; r]$.

Prova: Seja $c \in A$. Então $d(a, c) > r$. Tomemos um $s > 0$ tal que $r + s < d(a, c)$. Pelo Corolário 2.1 da Proposição 2 do Capítulo 1, temos que $B(a; r)$ e $B(c; s)$ são disjuntas.

$$B(a; r) \cap B(c; s) = \emptyset \Rightarrow B(c; s) \subset M - B[a; r].$$

Portanto, todo ponto $c \in A$ é interior a A .

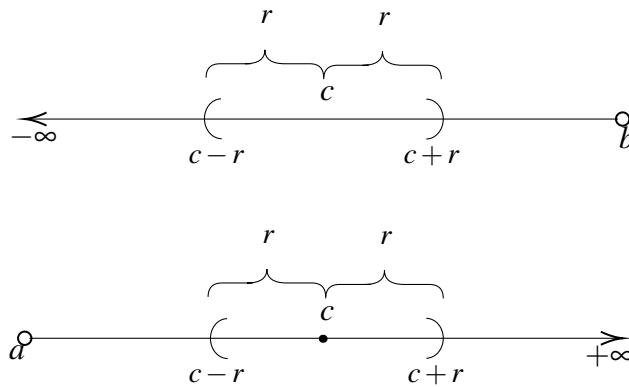
O complementar de um ponto $a \in M$ é um conjunto aberto $M - \{a\}$: se $a \neq b$, então $B(b; r)$, com $r = d(a, b)$, só contém pontos em $M - \{a\}$.

De modo geral, se $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é qualquer subconjunto finito de M , seu complementar $M - F$ é aberto em M , pois se $b \in (M - F)$, então $r = \min\{d(b, a_1), d(b, a_2), \dots, d(b, a_n)\}$ é positivo e a bola $B(b; r)$ não contém nenhum dos pontos a_1, a_2, \dots, a_n . Isto é, $B(b; r) \subset (M - F)$.

Exemplo 4.6. Todo intervalo limitado $]a, b[$ é um subconjunto aberto da reta pela Proposição 4.1, pois é a bola aberta de centro no seu ponto médio $\frac{a+b}{2}$ com raio $r = \frac{b-a}{2}$.

As semi-retas abertas $] - \infty, b[$ e $]a, +\infty[$ também são subconjuntos abertos em \mathbb{R} . Isso porque, se tomarmos um $c \in] - \infty, b[$, temos $c < b$. Então, pondo $r = b - c$ vemos que o intervalo $]c - r, c + r[$ é uma bola aberta de centro c , contida em $] - \infty, b[$. Analogamente, vemos na figura 13 que $]a, +\infty[$ é aberto.

Figura 13 – Subconjuntos abertos da reta.



Fonte: elaborado pela autora.

Proposição 4.2. *Seja \mathfrak{A} a coleção dos subconjuntos abertos de um espaço métrico M . Então*

(1) $M \in \mathfrak{A}$ e $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Ou seja, o espaço inteiro e o conjunto vazio são abertos.

(2) Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$, então

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{j=1, \dots, n} A_j \in \mathfrak{A}.$$

Ou seja, a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

(3) Se $A_\lambda \in \mathfrak{A}$, para todo $\lambda \in L$, onde L é um conjunto de índices, então

$$A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathfrak{A}.$$

Isto é, a reunião de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Demonstração.

(1) O item 1 é demonstrado pelo exemplo 4.4.

(2) Suponhamos que $a \in A_1, a \in A_2, \dots, a \in A_n$. Como A_1, A_2, \dots, A_n são abertos, existem $r_1 > 0, r_2 > 0, \dots, r_n > 0$, tais que

$$B(a; r_1) \subset A_1, \quad B(a; r_2) \subset A_2, \quad \dots \quad B(a; r_n) \subset A_n.$$

Seja r o menor número dos r_1, r_2, \dots, r_n , isto é, $r = \min_{1 \leq j \leq n} \{r_j\}$. Então

$$B(a; r) \subset B(a; r_1), \quad B(a; r) \subset B(a; r_2), \quad \dots \quad B(a; r) \subset B(a; r_n).$$

Assim,

$$B(a; r) \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{j=1, \dots, n} A_j.$$

Portanto, $\bigcap_{j=1, \dots, n} A_j$ é aberto.

(3) Seja então $a \in A$. Existe um índice $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como esse conjunto é aberto, há uma bola aberta de centro a e raio r tal que

$$B(a; r) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A.$$

□

Corolário 4.2. Um subconjunto $A \subset M$ é aberto se, e somente se, é uma reunião de bolas abertas.

Demonstração.

Segue da Proposição 4.1 e 4.2, item (3), que se $A = \bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda$ é uma reunião de bolas abertas, então A é aberto em M .

Reciprocamente, se A é aberto, então podemos obter, para todo $x \in A$, $B_x(x; r)$ tal que

$$x \in B_x \subset A \Rightarrow \{x\} \subset B_x \subset A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_x$$

Assim, todo subconjunto aberto é aberto se é uma reunião de bolas abertas. □

Observação 21. Desse Corolário, dizemos que bolas abertas formam uma "base de abertos" para o espaço métrico M .

Exemplo 4.7. A interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um conjunto aberto. Por exemplo, um ponto $a \in M$ só é aberto em M se for isolado, pelo exemplo 4.3. Mas todo

ponto a é a interseção de uma família enumerável de abertos. Ou seja,

$$\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B\left(a; \frac{1}{n}\right).$$

De fato, se $x \neq a$, temos $d(x, a) > 0$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, a) > \frac{1}{n}$. Assim sendo, $x \notin B\left(a; \frac{1}{n}\right)$. Portanto, apenas o ponto a pertence a todas as bolas abertas $B\left(a; \frac{1}{n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.8. *Abertos num subespaço.* Seja $X \subset M$. Considerando em X a métrica induzida por M , os conjuntos abertos no subespaço métrico X são as interseções $A \cap X$, onde A é aberto em M . Isso porque as bolas abertas em X têm a forma $B^X(a; r) = B(a; r) \cap X$, onde $B(a; r)$ é a bola aberta em M . Ora, os subconjuntos abertos do espaço X são, pelo Corolário 4.2, as reuniões de bolas abertas em X . Logo,

$$A' \subset X \text{ é aberto} \Leftrightarrow A' = \bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (B_\lambda \cap X) = \left(\bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda \right) \cap X = A \cap X,$$

onde $A = \bigcup B_\lambda$ é aberto em M .

Particularmente, se X é aberto em M , então os abertos do subespaço X são os subconjuntos abertos de M que estão contidos em X . Quando X não é aberto em M , então todo conjunto aberto em M e contido em X é também aberto em X .

Entretanto, existem subconjuntos $A' \subset X$ que são abertos em X , mas não são abertos em M (um deles sendo o próprio X). Por exemplo, se $0 < \varepsilon < b - a$, o intervalo $[a, a + \varepsilon[$ é aberto no subespaço $[a, b]$ da reta, já que $[a, a + \varepsilon[= \left(\bigcup_{\lambda \in L} B_r \right) \cap [a, b]$, onde $B_r =]a - r, a + r[$, mas não é aberto em \mathbb{R} .

Exemplo 4.9. O conjunto das aplicações limitadas descontínuas é aberto em $\mathcal{B}(M; N)$. Mais precisamente, dado $a \in M$, seja D_a o conjunto das aplicações limitadas $f : M \rightarrow N$ que são descontínuas no ponto a . Mostraremos que D_a é aberto. Para isto, tomemos $f \in D_a$. Existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ pode-se obter $x_\delta \in M$ com $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), g(a)) \geq 3\varepsilon$. Afirmamos que $g \in \mathcal{B}(M; N)$ e $d(g, f) < \varepsilon$, então $g \in D_a$.

Com efeito, nestas condições, para todo $\delta > 0$ temos

$$\begin{aligned} 3\varepsilon &\leq d(f(x_\delta), f(a)) \leq d(f(x_\delta), g(x_\delta)) + d(g(x_\delta), g(a)) + d(g(a), f(a)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Ora, na soma acima, a primeira e a terceira parcela são menores do que ε , e a soma das três é maior ou igual a 3ε . Assim, a segunda parcela é maior ou igual a 3ε . Logo, $g \in D_a$. Seja

agora D o conjunto de todas as aplicações limitadas descontínuas $f : M \rightarrow N$. Temos

$$D = \bigcup_{a \in M} D_a.$$

Logo, D é aberto em $\mathcal{B}(M;N)$.

De modo análogo se mostra que, dada $f : M \rightarrow N$, o conjunto das aplicações $g : M \rightarrow N$ que estão a uma distância finita de f e são descontínuas é aberto no espaço métrico $\mathcal{B}_f(M;N)$.

Definição 4.4. Em um espaço métrico, diz-se que o conjunto V é uma vizinhança do ponto a quando $a \in \text{int}V$. Assim, V é uma vizinhança de a se, e somente se, V contém um aberto que contém a .

Além disso, a interseção de um número finito de vizinhanças de a é ainda uma vizinhança de a . Se V é uma vizinhança de a e $W \supset V$, então W é uma vizinhança de a . Note que um conjunto é aberto se, e somente se, é uma vizinhança de cada um dos seus pontos.

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação e a um ponto em M . Segue da definição de continuidade que, a aplicação f é contínua no ponto a se, e somente se, existirem as vizinhanças V de $f(a) \in N$ e U de $a \in M$, tal que $f(U) \subset V$.

4.2 RELAÇÕES ENTRE CONJUNTOS ABERTOS E CONTINUIDADE

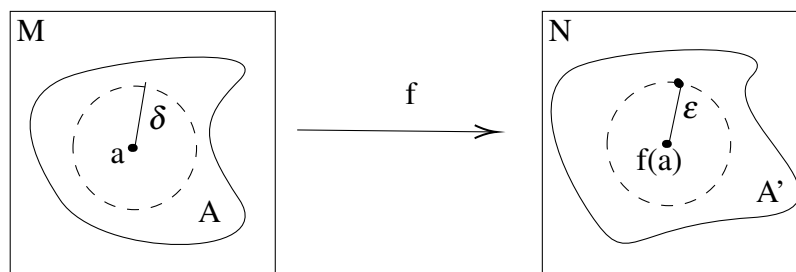
Proposição 4.3. *Sejam M e N espaços métricos. A aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa f^{-1} de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ é um subconjunto aberto em M .*

Demonstração.

Vamos supor que f seja contínua e $A' \subset N$. Queremos mostrar que $f^{-1}(A')$ é aberto em M . De fato, para cada $a \in f^{-1}(A')$, temos $f(a) \in A'$. Pela definição de conjunto aberto, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset A'$.

Como f é contínua no ponto a , existe um $\delta > 0$ correspondente ao ε tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset A'$. Ou seja, $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A')$. Logo, $f^{-1}(A')$ é aberto.

Figura 14 – Aplicação contínua f .



Fonte: elaborado pela autora.

Por outro lado, vamos supor que a imagem inversa por f de cada aberto em N seja um aberto em M . Seja $a \in M$, queremos mostrar que f é contínua no ponto a . Dado $\varepsilon > 0$, então a bola $A' = B(f(a); \varepsilon)$ é um aberto em N , contendo $f(a)$. Logo, sua imagem inversa $A = f^{-1}(A')$ é aberta em M , contendo a . Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \subset A$ e

$$f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon).$$

□

Este próximo resultado é um corolário da demonstração da proposição anterior.

Corolário 4.3. Para que $f : M \rightarrow N$ seja contínua no ponto $a \in M$, é necessário e suficiente que, para cada aberto $A' \subset N$ com $f(a) \in A'$, exista um aberto $A \subset M$, com $a \in A$ tal que $f(A) \subset A'$.

Corolário 4.4. O produto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ de conjuntos abertos $A_i \subset M_i$ é um subconjunto aberto de $M = M_1 \times \cdots \times M_n$

Demonstração.

Para cada $i = 1, \dots, n$, temos que $p_i : M \rightarrow M_i$ é contínua. Logo, $p_i^{-1}(A_i)$ é aberto em M .

Ora,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(A_n).$$

Ainda, sabemos que a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto, pelo item 2 da proposição (4.2). □

Corolário 4.5. Sejam $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais contínuas. O conjunto A , formado pelos $x \in M$ tais que $f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0$, ou seja, $A = \{x \in M; f_i(x) > 0, i = 1, \dots, n\}$, é aberto em M .

Demonstração.

Temos que se as funções f_1, \dots, f_n são todas positivas num ponto $a \in M$, então existe uma bola aberta $B(a; r)$ tal que $f_1(x) > 0, \dots, f_n(x) > 0$, para todo $x \in B(a; r)$.

Seja a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Então f é contínua, já que cada uma das funções componentes é contínua, e $A = f^{-1}(A')$, onde $A' \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto dos pontos cujas coordenadas são todas positivas. Ora,

$$A' =]0, +\infty[\times \cdots \times]0, +\infty[$$

é aberto em \mathbb{R}^n , pois é produto cartesiano de abertos. Logo, sua imagem inversa A é aberto em M . □

Corolário 4.6. Sejam $f, g : M \rightarrow N$ contínuas. O conjunto $A = \{x \in M; f(x) \neq g(x)\}$ é aberto em M .

Demonstração.

A função $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $x \mapsto \phi(x) = d(f(x), g(x)) = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|$, é contínua, já que f e g são contínuas. Como $A = \{x \in M; \phi(x) > 0\}$, sabemos que A é aberto em M pelo corolário anterior. \square

Exemplo 4.10. Uma bola aberta $B(a; r)$ é um conjunto aberto.

Isso porque a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$x \mapsto f(x) = r - d(a, x),$$

é contínua, já que, sabendo que $d(a, x) < r$ implica $f(x) > 0$. Segue da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |r - d(a, x) - r + d(a, y)| = |d(a, y) - d(a, x)| \\ &= |d(a, x) - d(a, y)| \leq d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

Isso prova que f é lipschitziana e, portanto, contínua. Analogamente, $A = M - B[a; r]$ é aberto.

Exemplo 4.11. A imagem direta $f(A)$ de um conjunto aberto $A \subset M$ por uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ pode não ser conjunto aberto em N . Por exemplo, seja a aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$x \mapsto f(x) = x^2.$$

Então, para $A =] - a, a[$, temos $f(A) = [0, a^2[$ e $f(A)$ não é subconjunto aberto de \mathbb{R} .

Definição 4.5. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ chama-se uma aplicação aberta quando para cada $A \subset M$ aberto, sua imagem $f(A)$ é um subconjunto aberto de N , ou seja, quando f transforma abertos em abertos.

4.3 CONJUNTOS FECHADOS

Definição 4.6. Um ponto a é dito aderente a um subconjunto X de um espaço métrico M quando $d(a, X) = 0$.

Ou seja, existem pontos de X arbitrariamente próximos de a . Isto é, para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Outras maneiras equivalentes de definirmos ponto aderente são

- (i) Para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$, pois pelo menos $B(a; \varepsilon) \cap X = \{a\}$.
- (ii) Para todo A aberto, $a \in A$, tem-se $A \cap X \neq \emptyset$.
- (iii) Toda vizinhança de a tem pontos em comum com X .

Exemplo 4.12. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X . Ainda, os pontos da fronteira de X , ∂X , também são aderentes a X . Por exemplo, se $X = [0, 1[$ na reta \mathbb{R} , então 1 é aderente a X .

Definição 4.7. O fecho (ou aderência) de um conjunto X num espaço métrico M é o conjunto \bar{X} de pontos de M que são aderentes a X .

Portanto, escrever $a \in \bar{X}$ é o mesmo que afirmar que o ponto a é aderente a X em M . Temos que $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{M} = M$ e $X \subset \bar{X}$ para todo $X \subset M$.

Também, $X \subset Y \Rightarrow \bar{X} \subset \bar{Y}$. Isso porque, seja $a \in \bar{X}$, então para todo $\varepsilon > 0$ dado, $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como $X \subset Y$, então $B(a; \varepsilon) \cap X \subset B(a; \varepsilon) \cap Y$. Então, $B(a; \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$. Logo, $a \in \bar{Y}$.

Exemplo 4.13. Como $a \in \bar{X} \Leftrightarrow d(a, X) = 0$ e em um espaço vetorial normado E , o fecho da bola aberta $B(a; r)$ é a bola fechada $B[a; r]$.

Para que a não seja aderente a X , é necessário e suficiente que exista uma bola aberta de centro a , na qual não há pontos de X . Ou seja,

$$a \notin \bar{X} \Leftrightarrow a \in \text{int}(M - X).$$

Podemos escrever então $M - \bar{X} = \text{int}(M - X)$. Lembrando a decomposição $M = \text{int}X \cup \partial X \cup \text{ext}X$, reunião disjunta, concluímos então que $\bar{X} = (\text{int}X) \cup \partial X$.

Definição 4.8. Um subconjunto $X \subset M$ diz-se denso em M quando $\bar{X} = M$. Ou seja, quando toda bola aberta em M contém algum ponto de X . Ou ainda, para cada aberto não vazio A em M , tem-se $A \cap X \neq \emptyset$.

Exemplo 4.14. O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é denso em \mathbb{R} . Além disso, o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, dos números irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais. Seja $x \in \mathbb{R}$, então $x \in \bar{\mathbb{Q}}$, pois para todo $\varepsilon > 0$,

$$B(x; \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Proposição 4.4. Para todo ponto a e todo subconjunto não-vazio X num espaço métrico M , tem-se $d(a, X) = d(a, \bar{X})$.

Demonstração.

Como $X \subset \bar{X}$, tem-se

$$d(a, \bar{X}) = \inf_{x \in \bar{X}} d(a, x) \leq \inf_{x \in X} d(a, x) = d(a, X).$$

Vamos mostrar que o sinal menor não ocorre. Neste sentido, mostraremos que $d(a, \bar{X}) < m \Rightarrow d(a, X) < m$.

Com efeito, se $d(a, \bar{X}) < m$, então existe $\bar{x} \in \bar{X}$ tal que $d(a, \bar{x}) < m$. Sendo \bar{x} aderente a X , existe $x \in X$ tal que $d(x, \bar{x}) < m - d(a, \bar{x})$. Então, a desigualdade triangular nos dá

$$d(a, X) \leq d(a, x) \leq d(a, \bar{x}) + d(\bar{x}, x) < d(a, \bar{x}) + m - d(a, \bar{x}) = m.$$

Portanto, como $d(a, X)$ não pode ser menor que $d(a, \bar{X})$, temos $d(a, X) = d(a, \bar{X})$. \square

Corolário 4.7. Para todo subconjunto $X \subset M$, tem-se $\overline{\bar{X}} = \bar{X}$.

Demonstração.

Já temos $\bar{X} \subset \overline{\bar{X}}$, então queremos provar $\overline{\bar{X}} \subset \bar{X}$. Sabemos que

$$a \in \overline{\bar{X}} \Rightarrow d(a, \bar{X}) = 0 \Rightarrow d(a, X) = 0 \Rightarrow a \in \bar{X}.$$

\square

Definição 4.9. Diz-se que um conjunto $F \subset M$ é fechado no espaço métrico M quando seu complementar $M - F$ é aberto em M .

Proposição 4.5. Dado $F \subset M$, tem-se $\bar{F} = F$ se, e somente se, $M - F$ é aberto. Ou seja, o conjunto é fechado se, e somente se, contém todos os seus pontos são aderentes.

Demonstração.

$\bar{F} = F \Leftrightarrow$ Os pontos que não pertencem a F não são aderentes a F

\Leftrightarrow Para todo ponto $a \in M - F$, existe $B(a; r)$ que não contém pontos de F

\Leftrightarrow Para todo $a \in M - F$, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset M - F$

$\Leftrightarrow M - F$ é aberto

\square

Corolário 4.8. Para todo $X \subset M$, seu fecho \bar{X} é conjunto fechado.

Demonstração.

Segue do Corolário 4.7 que $\overline{\bar{X}} = \bar{X}$. Logo, pela proposição 4.5, \bar{X} é fechado. \square

Nota-se que \bar{X} é o menor subconjunto fechado de M que contém X , no seguinte sentido: Se F é fechado e $X \subset F$, então $\bar{X} \subset F$. De fato, $X \subset F$ implica que $\bar{X} \subset \bar{F}$. Ou seja, $\bar{X} \subset F$. Ainda, negar que um subconjunto $X \subset M$ é fechado significa admitir a existência de algum ponto $a \notin X$ que é aderente a X . Ou seja, a não está em X , mas, para cada $\varepsilon > 0$, tem-se $B(a; \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Um tal ponto pertence a fronteira de X . Logo, X é fechado se, e somente se, $\partial X \subset X$.

Exemplo 4.15. Ser fechado não é o contrário de ser aberto. Quando um conjunto não é fechado, não significa que é aberto. Vamos citar alguns exemplos:

- i. \mathbb{Q} não é fechado e nem aberto;

- ii. \emptyset e o espaço inteiro são fechados e abertos ao mesmo tempo;
- iii. No espaço $M = \mathbb{R} - \{0\}$ com a métrica induzida da reta, os conjuntos $] -\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são abertos. Como cada um deles é o complementar do outro em M , segue-se que também são fechados.

Exemplo 4.16. Num espaço métrico M , toda bola fechada $B[a; r]$ é um subconjunto fechado de M , pois seu complementar é aberto, pelo exemplo 4.5.

Para os próximos exemplos, consideraremos a notação F^C para indicar o complementar de F .

Exemplo 4.17. A fronteira ∂X de qualquer conjunto $X \subset M$ é um subconjunto fechado de M . Isso porque, do Corolário 4.1, o seu complementar é o aberto

$$\partial X^C = \text{int}X \cup \text{int}(M - X).$$

Exemplo 4.18. Todo subconjunto finito $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset M$ é fechado em M . Com efeito, se $a \notin F$ então $d(a, F)$ é o menor dos números $d(a, a_1), \dots, d(a, a_n)$ e, portanto, $d(a, F) > 0$. Ou seja,

$$d(a, F) = \inf_{x \in F} d(a, x) = \min\{d(a, a_1), \dots, d(a, a_n)\}$$

Isto é, $a \notin \bar{F}$. Portanto, $F^C \subset \bar{F}^C \Rightarrow \bar{F} \subset F$. Temos $\bar{F} = F$. Em particular, todo ponto $a \in M$ é subconjunto fechado de M .

Proposição 4.6. Os subconjuntos fechados de um espaço métrico M gozam das seguintes propriedades.

- (1) O conjunto vazio \emptyset e o espaço métrico M são fechados;
- (2) A reunião $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, F_2, \dots, F_n \subset M$ é um subconjunto fechado de M .
- (3) A interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset M$ é subconjunto fechado de M .

Demonstração.

Usaremos a Proposição 4.2 e as propriedades de complementares.

- (1) É evidente, já que o espaço vazio e o espaço todo são abertos e fechados (são complementares um dos outros).
- (2) Os conjuntos

$$A_1 = \complement F_1 = F_1^C, \quad \dots \quad A_n = \complement F_n = F_n^C$$

são abertos em M . Desse modo,

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n = \mathbb{C}F_1 \cap \cdots \cap \mathbb{C}F_n = \mathbb{C}(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$$

é aberto e portanto $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado em M , da Proposição 4.2.

(3) Seja $A_\lambda = \mathbb{C}F_\lambda$ para cada $\lambda \in L$. Então cada A_λ é aberto e portanto sua reunião

$$\bigcup A_\lambda = \bigcup \mathbb{C}F_\lambda = \mathbb{C}(\bigcap F_\lambda)$$

é um aberto em M . Segue-se que $\bigcap F_\lambda$ é fechado.

□

Proposição 4.7. *Sejam M, N espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem $f^{-1}(F')$ de todo subconjunto fechado $F' \subset N$ seja um subconjunto fechado de M .*

Demonstração.

Isso resulta da Proposição 4.3, por passagem ao complementar. Em primeiro lugar, seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Dado $F' \subset N$ fechado, temos $\mathbb{C}F'$ é aberto, de onde

$$f^{-1}(\mathbb{C}F') = \mathbb{C}f^{-1}(F')$$

é aberto, já que $f^{-1}(F')$ é fechado.

Reciprocamente, se a imagem inversa de todo fechado em N é fechada em M , então dado $A' \subset N$ aberto,

$$f^{-1}(\mathbb{C}A') = \mathbb{C}f^{-1}(A')$$

é fechado em M , de onde $f^{-1}(A')$ é aberto e, pela Proposição 4.3, f é contínua. □

Corolário 4.9. *Se $F_1 \subset M_1, \dots, F_n \subset M_n$ são subconjuntos fechados, então $F_1 \times \cdots \times F_n$ é fechado em $M_1 \times \cdots \times M_n = M$.*

Demonstração.

As projeções

$$p_1 : M \rightarrow M_1, \dots, p_n : M \rightarrow M_n$$

são contínuas. Logo, em virtude da Proposição 4.7 e item (3) da Proposição 4.6, $F_1 \times \cdots \times F_n = p_1^{-1}(F_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(F_n)$ é fechado. □

Corolário 4.10. *Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família, finita ou infinita, de funções contínuas $f_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$, definidas no espaço métrico M . O conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $f_\lambda(x) \geq 0$, para todo $\lambda \in L$, é fechado em M .*

Demonstração.

Com efeito, esse conjunto é a interseção das imagens inversas $f_\lambda^{-1}([0, +\infty))$, as quais são conjuntos fechados. Isso porque a semirreta $[0, +\infty[$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R} . \square

O próximo Corolário é um resultado muito importante na Topologia.

Corolário 4.11. *O gráfico de uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é um subconjunto fechado de $M \times N$. Em particular, a diagonal $\Delta = \{(x, y) \in M \times N; x = y\}$ é um subconjunto fechado de $M \times M$.*

Demonstração.

A função $\phi : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$(x, y) \mapsto \phi(x, y) = d(f(x), y),$$

é evidentemente contínua, já que f é contínua e d é métrica. Além disso,

$$G(f) = \{(x, y) \in M \times N; y = f(x)\} = \{(x, y) \in M \times N; \phi(x, y) = 0\}.$$

Logo, $G(f)$ é fechado em $M \times N$. A diagonal $\Delta \subset M \times M$ é o gráfico da aplicação identidade $f : M \rightarrow M$, definida como $x \mapsto f(x) = x$. Portanto, é subconjunto fechado de $M \times M$. \square

Exemplo 4.19. A projeção de um conjunto fechado $F \subset M_1 \times \cdots \times M_n$ num dos fatores pode não ser um conjunto fechado. Por exemplo, se

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y = 1\},$$

então $F = m^{-1}(\{1\})$, onde $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por $m(x, y) = x \cdot y$. Como m é contínua e $\{1\} \subset \mathbb{R}$ é fechado, segue-se que F é subconjunto fechado do plano (uma hipérbole). Entretanto, sua projeção

$$p_1(F) = \{p_1(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \cdot y = 1\} = \{x; x = \frac{1}{y}\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

não é subconjunto fechado da reta.

Exemplo 4.20. A reunião de uma família infinita de fechados pode não ser um conjunto fechado. Com efeito, todo conjunto é reunião de seus pontos, os quais são conjuntos fechados.

Se A é um conjunto aberto, então $A = \bigcup_{a \in A} a$ é aberta. Entretanto, $\{a\}$, onde $a \in A$, é fechado, pelo exemplo 4.18.

Exemplo 4.21. O conjunto $\mathcal{C}_0(M; N)$ das aplicações contínuas limitadas $f : M \rightarrow N$ é um subconjunto fechado do espaço $\mathcal{B}(M; N)$, formado por todas as aplicações limitadas de M em N . Mais geralmente, dada qualquer $f : M \rightarrow N$, o conjunto $\mathcal{C}_f(M; N)$ das funções contínuas de M em N que estão a uma distância finita de f é um subconjunto fechado de $\mathcal{B}_f(M; N)$, vide

Exemplo 4.9. Se fixamos um ponto $a \in M$, também é fechado em $\mathcal{B}_f(M;N)$ o conjunto F_a formado pela saplicações $g : M \rightarrow N$ que estão a uma distância limitada de f e são contínuas no ponto a .

Proposição 4.8. *Seja $M = F_1 \cup F_2$ onde F_1 e F_2 são fechados em M . Se $f : M \rightarrow N$ é tal que suas restrições $f_1 = f|_{F_1}$ e $f_2 = f|_{F_2}$ são contínuas, então f é contínua.*

Demonstração.

Dado $H \subset N$ fechado, temos $f^{-1}(H) \subset M = F_1 \cup F_2$. Logo, $f^{-1}(H) = f_1^{-1}(H) \cup f_2^{-1}(H)$. Pela Proposição 4.7, $f_1^{-1}(H)$ é fechado em F_1 , e assim, fechado em M . Analogamente, $f_2^{-1}(H)$ é fechado em F_2 , e assim, fechado em M . Logo, $f^{-1}(H)$ é fechado em M e, portanto, f é contínua. \square

Corolário 4.12. *Sejam $f : [a,b] \rightarrow N$ e $g : [b,c] \rightarrow N$ contínuas, com $f(b) = g(b)$. Então, a aplicação $h : [a,c] \rightarrow N$, definida por*

$$t \mapsto h(t) = \begin{cases} f(t), & \text{se } a \leq t \leq b \\ g(t), & \text{se } b \leq t \leq c \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração.

Se $M = [a,c]$, $F = [a,b]$ e $G = [b,c]$, temos $M = F \cup G$, onde F e G são fechados em M . Temos que $f = h|_F$ e $g = h|_G$ são contínuas. Portanto, h é contínua. \square

5 LIMITES

Este capítulo tem influências das obras "Análise Real- Funções de uma Variável" (Lima, 2020) e "Espaços Métricos" (Lima, 1977). Ele define e exemplifica limites, sequências, séries, convergência e divergência, entre outros conceitos que permeiam esses tópicos. Além disso, especifica os conceitos de sequências de funções, sequências de Cauchy e traz resultados relevantes da topologia.

5.1 LIMITES E SEQUÊNCIAS

Definição 5.1. Uma sequência em um conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ definida por $n \mapsto x_n$ (n -ésimo termo da sequência), onde $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Neste capítulo, vamos usar como notações para sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (x_n) , ou $\{x_n\}$. Para o conjunto dos termos da sequência, usaremos $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $\{(x_n); n \in \mathbb{N}\}$, $x(\mathbb{N})$. Por exemplo, se definirmos $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por $n \mapsto x_n = (-1)^n$, teremos a sequência $(-1, 1, -1, \dots)$ e o conjunto de seus valores é $\{-1, 1\}$.

Portanto, podemos ter $x_n = x_m$ com $n \neq m$. Quando $n \neq m$ implica que $x_n \neq x_m$, temos que x é uma aplicação injetiva e forma uma *sequência de termos distintos*. Ou seja, não tem repetições.

Exemplo 5.1. Vamos fixar $a \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n = e^{ina} = (\cos(na), \text{sen}(na))$. Obtemos assim uma sequência (x_n) no plano \mathbb{R}^2 , ou o círculo S^1 , já que

$$|x_n| = \sqrt{\cos^2(na) + \text{sen}^2(na)} = 1.$$

Essa sequência tem repetições se, e somente se, a é um múltiplo racional de 2π . Isto é, $a = \frac{2\pi p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$\begin{aligned} x_n = x_m, n \neq m &\Leftrightarrow e^{ina} = e^{ima} \Leftrightarrow e^{ima-ina} = 1 \Leftrightarrow e^{i(m-n)a} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos((m-n)a) + i \cdot \text{sen}((m-n)a) = 1 \Leftrightarrow a(m-n) = 2k\pi \Leftrightarrow a = \frac{2k\pi}{m-n}. \end{aligned}$$

Definição 5.2. Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de \mathbb{N} . Para nos referirmos a uma subsequência, usaremos as notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, (x_{n_k}) ou simplesmente (x_{n_k}) .

Definição 5.3. Uma sequência (x_n) no espaço métrico M é chamada sequência limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado. Isto é, quando existe $c > 0$ tal que, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$d(x_m, x_n) \leq c.$$

Neste próximo exemplo, vamos utilizar a desigualdade de Bernoulli:

$$\text{Se } b > -1, \text{ então } (1 + b)^n > 1 + nb. \quad (5.1)$$

Exemplo 5.2. Uma sequência constante ($x_n = a$ para todo n) é sempre limitada, já que, para qualquer $c > 0$, temos

$$d(x_n, x_m) = d(a, a) = 0 < c.$$

Ainda, uma sequência que assume um número finito de valores também é evidentemente limitada, já que, para todo $m, n \in \mathbb{N}$

$$\max_{i, j \in \mathbb{N}} d(x_i, x_j) = c \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq c.$$

Se a é um número real, com $|a| > 1$, a sequência de números reais $x_n = a^n$ não é limitada. De fato, tomando $b = |a| - 1$, temos, por (5.1),

$$(1 + |a| - 1)^n = |a|^n > 1 + n(|a| - 1).$$

Assim,

$$|a|^n > 1 + n(|a| - 1) > 1 + \frac{c-1}{|a|-1} \cdot (|a| - 1) = 1 + c - 1 = c.$$

Portanto, $|a|^n > c$ desde que $n > \frac{c-1}{|a|-1}$.

Entretanto, quando $|a| \leq 1$, a sequência dos números $x_n = a^n$ é limitada, pois $|x_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.4. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico M . Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

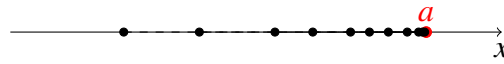
Vamos usar como notações para o limite de uma sequência:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n \text{ ou } \lim_n x_n.$$

Para dizer que a (x_n) tende ao ponto a , escreveremos $x_n \rightarrow a$.

Definição 5.5. Quando existe $a = \lim x_n \in M$, diz-se que a sequência de pontos $x_n \in M$ é convergente em M , e converge para a . Se não existe $\lim x_n \in M$, diz-se que a sequência é divergente em M .

A afirmação $\lim x_n = a$ em um espaço métrico M é equivalente a dizer que toda bola B de centro a (e portanto todo aberto A contendo a ou toda vizinhança V de a) contém x_n para todo valor de n , com exceção de um número finito deles (que são no máximo os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n_0}).

Figura 15 – Sequência $\{x_n\}$ 

Fonte: elaborado pela autora.

Exemplo 5.3. Toda sequência constante $x_n = a$ é convergente e $\lim x_n = a$.

Se a é um ponto isolado e $\lim x_n = a$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice maior do que n_0 são iguais a a . Com efeito, vamos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$. Como $\lim x_n = a$, a este ε corresponde

$$n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Ou ainda, $x_n \in B(a; \varepsilon)$. Portanto, $x_n = a$.

Em um espaço métrico discreto, uma sequência (x_n) é convergente se, e somente se, é "eventualmente constante", ou seja, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \dots$.

Exemplo 5.4. Se o espaço métrico M possui pelo menos dois pontos distintos a, b , então existem em M sequências divergentes.

Vamos tomar $x_n = a$ para n ímpar e $x_n = b$ para n par. Nenhum ponto $x \in M$ pode ser limite da sequência (a, b, a, b, \dots) . Com efeito, se tomarmos $\varepsilon = \frac{d(a, b)}{2}$, nenhuma bola aberta de raio ε poderá conter ambos os pontos a, b .

Portanto, não existe n_0 tal que $x_n \in B(c; \varepsilon)$ para todo $n > n_0$. Então, não existe $\lim x_n$.

Definição 5.6. Seja X um conjunto de números naturais. Diz-se que X contém números arbitrariamente grandes quando, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ dado, podemos encontrar $n \in X$ tal que $n > n_0$.

Isso significa que X é um subconjunto ilimitado de \mathbb{N} (X é um conjunto infinito de números naturais). Por exemplo, existem múltiplos de 3 arbitrariamente grandes, já que o conjunto $3\mathbb{N} = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$ é infinito. Também existem números arbitrariamente grandes que não são múltiplos de 3, do conjunto $\mathbb{N} - 3\mathbb{N} = \{1, 2, 4, 5, \dots\}$, que é complementar de $3\mathbb{N}$.

Observação 22. $X \subset \mathbb{N}$ contém todos os números naturais suficientemente grandes quando existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $n \in X$. Isso é o equivalente de dizer que o complementar $\mathbb{N} - X$ é finito. Em particular, X é infinito.

Seja (x_n) uma sequência em M . Dizer que $\lim x_n = a \in M$ significa que, dada qualquer bola aberta B , de centro a , tem-se $x_n \in B$ para todo n suficientemente grande.

Exemplo 5.5. Dada a sequência de números reais $x_n = \frac{1}{n}$, temos $\lim x_n = 0$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomamos $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ e vemos que

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow d(x_n, 0) < \varepsilon.$$

Portanto, para todo n suficientemente grande, $\frac{1}{n}$ pertence ao intervalo $] - \varepsilon, \varepsilon[$.

Proposição 5.1. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração.

Seja $\lim x_n = a$ em um espaço métrico M . Tomando $\varepsilon = 1$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < 1 \Rightarrow x_n \in B(a; 1).$$

Portanto, o conjunto dos valores da sequência está contido na reunião $\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a; 1)$. Como ambos os conjuntos são limitados, a reunião também é limitada. \square

Exemplo 5.6. A sequência de números reais $x_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente.

Obviamente, a sequência não é convergente. Vamos mostrar que é limitada. Tomando dois elementos x_p e x_q da sequência (x_n) . Temos

$$d(x_p, x_q) = |x_p - x_q| = |(-1)^p - (-1)^q| = \begin{cases} 0, & \text{se } p \text{ e } q \text{ são pares;} \\ 2, & \text{se } p \text{ é par e } q \text{ é ímpar;} \\ 2, & \text{se } p \text{ é ímpar e } q \text{ é par;} \\ 0, & \text{se } p \text{ e } q \text{ são ímpares.} \end{cases}$$

Temos, então, que $d(x_p, x_q) \leq 2$ para quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência é limitada. Logo, é falsa a recíproca da Proposição 5.1.

Dado um número real a , com $|a| < 1$, a sequência definida por $x_n = a^n$ não converge porque não é limitada (exemplo 5.2).

Proposição 5.2. *(Unicidade do limite) Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.*

Demonstração.

Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M e sejam $a, b \in M$ tais que $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$ e existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \varepsilon$.

Pela desigualdade triangular, temos

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) = d(x_n, a) + d(x_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Logo, $0 \leq d(a, b) < 2\varepsilon$. Seja $n^* = \max\{n_0, n_1\}$. Então para $n > n^*$ temos $d(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(a, b) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = 0$. Além disso, $d(a, b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(a, b) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon = 0$. Ou seja, $0 \leq d(a, b) \leq 0 \Rightarrow d(a, b) = 0$ e, então, $a = b$. \square

Segue-se da Proposição 5.2 que, se em um espaço métrico M tem-se $\lim x_n = a \in M$ e $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência (x_n) é divergente no espaço métrico $M - \{a\}$. Com efeito, se existisse $b \in M - \{a\}$ tal que $b = \lim x_n$, então teríamos $a \neq b$ e a sequência teria dois limites distintos.

Proposição 5.3. Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a .

Demonstração.

Seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ um subconjunto infinito de \mathbb{N} . Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Existe também $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo,

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$. \square

Corolário 5.1. Se $\lim x_n = a$, então, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se $\lim x_{n+p} = a$.

Demonstração.

A sequência

$$(x_{n+p})_{n \in \mathbb{N}} = (x_{1+p}, x_{2+p}, \dots, x_{n+p}, \dots)$$

é uma subsequência da sequência (x_n) . Portanto, pela Proposição 5.3, temos

$$\lim x_n = \lim x_{n+p} = a.$$

\square

Corolário 5.2. Se $\lim x_n = a \neq b$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \neq b$.

Demonstração.

De fato, caso contrário os índices $n \in \mathbb{N}$ tais que $x_n = b$ formariam um conjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ e então a subsequência constante (x_{n_k}) teria um limite $b \neq a = \lim x_n$. \square

Exemplo 5.7. Se uma sequência (x_n) possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então (x_n) é divergente.

De fato, suponhamos que $\lim x_n = a$. Então, tomando duas subsequências quaisquer (x_{n_k}) e (x_{n_p}) de (x_n) , segue da Proposição 5.3 que $\lim x_{n_k} = \lim x_{n_p} = a$, o que é uma contradição.

Proposição 5.4. *Um ponto a , em um espaço métrico M , é limite de uma subsequência de (x_n) se, e somente se, toda bola aberta de centro a contém termos x_n com índices n arbitrariamente grandes.*

Demonstração.

Se uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ converge para a , então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon \Rightarrow x_{n_k} \in B(a; \varepsilon).$$

Logo, toda bola $B(a; \varepsilon)$ contém termos x_n com índices arbitrariamente grandes, a saber todos os índices n_k com $k > k_0$.

Reciprocamente, notemos que $B(a; 1)$ contém um termo x_{n_1} . A bola aberta $B(a; \frac{1}{2})$ contém um termo x_{n_2} com índice $n_2 > n_1$, e assim por diante: para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_{n_k} \in B(a; \frac{1}{k})$ com $n_k > n_{k-1} > \dots > n_2 > n_1$. Isso define um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k\}$ e uma subsequência x_{n_k} tal que

$$d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} \Rightarrow x_{n_k} \in B(a; \frac{1}{k}).$$

Segue-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. □

Observação 23. No enunciado da Proposição 5.4, podemos substituir bola aberta de centro a por conjunto aberto contendo a ou até vizinhança de a .

5.2 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Definição 5.7.

a) Uma sequência (x_n) de números reais é dita crescente quando se tem

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots,$$

ou seja, quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Quando vale $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, chamamos (x_n) de sequência não-decrescente.

c) Uma sequência (x_n) de números reais é dita decrescente quando se tem

$$x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots,$$

ou seja, quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) Quando vale $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, chamamos (x_n) de sequência não-crescente.

e) Uma sequência (x_n) é dita monótona quando é crescente, não-decrescente, decrescente ou não-crescente.

Proposição 5.5. *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Demonstração.

Seja $(x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots)$ a sequência não decrescente em questão. Tomemos $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Dessa forma, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, $a - \varepsilon$ não pode ser cota superior do conjunto dos valores x_n .

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Então,

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{aligned}$$

Portanto, a sequência converge para a . □

Essa Proposição pode ser provada de forma análoga para outras formas de sequência. Caso a sequência seja crescente, ainda tomamos $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Mas, caso a sequência seja não crescente ou decrescente, tomamos $a = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Corolário 5.3. *Uma sequência monótona de números reais é convergente se, e somente se, possui uma subsequência limitada.*

Demonstração.

Basta mostrar que uma subsequência monótona (x_n) é limitada quando possui uma subsequência limitada $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$. Vamos supor que (x_n) seja não-decrescente. Ou seja,

$$x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$$

Então, seja $x_{n_k} \leq c$ para todo k . Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos obter k tal que $n < n_k$, e então

$$x_n \leq x_{n_k} \leq c.$$

Logo, $x_1 \leq x_n \leq c$. Portanto, (x_n) é limitada. Como também é monótona, pela Proposição 5.5, é convergente. A demonstração é análoga para os outros casos de sequência monótona.

Reciprocamente, se a sequência é convergente, pela Proposição 5.1, é limitada. Seja essa sequência (x_n) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Pela Proposição 5.2, então toda subsequência também converge para a . Assim, toda subsequência também é limitada. □

Exemplo 5.8. Se $|a| < 1$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

Pela definição de limite, vemos que não existe diferença nas afirmações

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0.$$

Podemos admitir então que $0 \leq a < 1$. Nesse caso,

$$a \geq a^2 \geq a^3 \geq \dots \geq a^n \geq a^{n+1} \geq \dots \geq 0.$$

Temos que $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não-crescente e, portanto, monótona limitada.

Pela Proposição 5.5, existe

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n.$$

Sabemos que

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1}}_{\text{Corolário 5.1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \cdot a = l$$

$$\Rightarrow a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = l \Rightarrow a \cdot l = l \Rightarrow l \cdot (a - 1) = 0.$$

Como $a - 1 < 0$, então $l = 0$.

Proposição 5.6. *Seja (x_n) uma sequência de números reais, com $\lim x_n = a > b$. Então $x_n > b$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração.

Pela definição de limite, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Se tomarmos $\varepsilon = a - b > 0$, temos

$$n > n_0 \Rightarrow a - (a - b) < x_n \Rightarrow a - a + b < x_n \Rightarrow x_n > b.$$

□

Corolário 5.4. *Se $x_n \leq b$ para valores arbitrariamente grandes de n , e existe $\lim x_n = a$, então $a \leq b$.*

Demonstração.

Vamos supor que $a > b$. Então, pela Proposição 5.6, $x_n > b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande, que é uma contradição.

□

Exemplo 5.9. Se $a > 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Caso $a > 1$, temos

$$a > a^{\frac{1}{2}} > \dots > a^{\frac{1}{n}} > \dots > 1.$$

Pela Proposição 5.5, existe $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}$ e $l \geq 1$, pelo Corolário 5.4. Considerando a

subseqüência cujo termo geral é $a^{\frac{1}{n(n+1)}}$, vemos que

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{-\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{l}{l} = 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, caso $0 < a < 1$, temos $l = 1$.

5.3 CONVERGÊNCIA E TOPOLOGIA

Todos os conceitos topológicos podem ser expressos mediante limites e seqüências. Nesta seção, vamos retomar alguns conceitos com essa perspectiva.

Proposição 5.7. *Sejam M, N espaços métricos. A aplicação $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ se, e somente se, $x_n \rightarrow a$ implicar que $f(x_n) \rightarrow f(a)$ em N .*

Demonstração.

Seja f contínua no ponto a . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Como $x_n \rightarrow a$, a partir de δ , obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Logo, $\lim f(x_n) = f(a)$.

Reciprocamente, vamos supor que f não é contínua no ponto a . Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter $x_n \in M$, com $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ e

$$d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Isso nos dá uma seqüência $(x_n) \in M$, com $x_n \rightarrow a$ e $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$ em N . □

Corolário 5.5. *Para que $f : M \rightarrow N$ seja contínua no ponto a , é necessário e suficiente que $x_n \rightarrow a$ implique $(f(x_n))$ seja convergente em N .*

Demonstração.

Nessas condições, $x_n \rightarrow a$ implica $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Mas, se $x_n \rightarrow a$, a seqüência $(z_n) = (x_1, a, x_2, a, \dots)$ converge para a . Logo, $(f(z_n)) = (f(x_1), f(a), f(x_2), f(a), \dots)$ é convergente, o que implica que $\lim f(x_n) = f(a)$. □

Corolário 5.6. *Se $x_n \rightarrow a$ implica que $(f(x_n))$ possui uma subseqüência convergindo para $f(a)$, então $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a .*

Demonstração.

Vamos supor que f não seja contínua no ponto a . Então, obtemos uma sequência (x_n) , onde $x_n \rightarrow a$, mas nenhuma subsequência de (x_n) pode convergir para $f(a)$. \square

Proposição 5.8. *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . A fim de que se tenha $a \in \overline{X}$ em M , é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$.*

Demonstração.

Temos que $a \in \overline{X}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos obter um ponto $x_n \in B(a; \frac{1}{n}) \cap X$. Isso nos dá uma sequência de pontos $x_n \in X$, com

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim (x_n) = a.$$

Reciprocamente, temos que $\lim x_n = a$, para $x_n \in X$. Então, toda bola aberta de centro a contém pontos $x_n \in X$. Logo, $a \in \overline{X}$. \square

Corolário 5.7. *O ponto a pertence a fronteira do conjunto X se, e somente se, a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$ e de uma sequência de pontos $y_n \in M - X$.*

Demonstração.

Sabemos que $a \in \partial X = \overline{X} \cap \overline{M - X}$. Portanto, $a \in \overline{X}$ e $a \in \overline{M - X}$. Pela Proposição 5.8, $\lim x_n = a$, $x_n \in X$ e $\lim y_n = a$, $y_n \in M - X$.

Reciprocamente, temos $a = \lim x_n$, para $x_n \in X$ e $\lim y_n = a$, para $y_n \in M - X$. Pela Proposição 5.8, sabemos que $a \in \overline{X}$ e $a \in \overline{M - X}$. Portanto,

$$a \in \overline{X} \cap \overline{M - X}.$$

 \square

Corolário 5.8. *Um subconjunto $X \subset M$ é denso no espaço métrico M se, e somente se, todo ponto de M é limite de uma sequência de pontos de X .*

Demonstração.

A demonstração segue essencialmente da Proposição 5.8, $a \in M$, tal que $\lim x_n = a$, $x_n \in X$ se, e somente se, $a \in \overline{X}$. Logo, $M \subset \overline{X}$. Ou seja, $\overline{X} = M$. \square

Corolário 5.9. *Um conjunto F é fechado em M se, e somente se, F contém o limite de cada sequência de pontos $x_n \in F$ que convirja em M .*

Demonstração.

Seja F fechado e (x_n) uma sequência em F e $\lim x_n = a$. Pela Proposição 5.8, temos $a \in \overline{F} = F$. \square

Reciprocamente, seja $a \in \overline{F}$, segue da Proposição 5.8 que $a = \lim x_n$, onde $x_n \in F$. Por hipótese, $a \in F$. Então $\overline{F} \subset F$ e F é fechado. \square

Exemplo 5.10. Dado $X \subset M$ limitado e não-vazio. Então, queremos mostrar que $\text{diam } X = \text{diam } \overline{X}$.

Seja $c = \text{diam } X$. Segue da Proposição 5.8 que para quaisquer $x, y \in \bar{X}$, temos $x = \lim x_n$ e $y = \lim y_n$ com $x_n, y_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então $d(x_n, y_n) \leq c$ para todo n , já que $c = \text{diam } X$, e por conseguinte,

$$d(x, y) = d(\lim x_n, \lim y_n) \stackrel{\text{continuidade da função } d}{=} \lim d(x_n, y_n) \leq c.$$

A última desigualdade segue do Corolário 5.4. Portanto, $\text{diam } \bar{X} \leq \text{diam } X$. Como evidentemente $\text{diam } X \leq \text{diam } \bar{X}$, pois $X \subset \bar{X}$, temos $\text{diam } X = \text{diam } \bar{X}$.

Exemplo 5.11. Sejam $f, g : M \rightarrow N$ contínuas. O conjunto $F = \{x \in M; f(x) = g(x)\}$ é fechado em M .

De fato, dada uma sequência de pontos $x_n \in F$, com $\lim x_n = a \in M$, temos

$$\begin{aligned} f(x_n) = g(x_n) \forall n \in \mathbb{N} &\Rightarrow f(a) = f(\lim x_n) \\ &= \lim f(x_n) \text{ (pois } f \text{ é contínua)} \\ &= \lim g(x_n) \\ &= g(\lim x_n) \text{ (pois } g \text{ é contínua)} \\ &= g(a). \end{aligned}$$

Logo, $a \in F$ e F é fechado.

Exemplo 5.12. Sejam $f, g : M \rightarrow N$ aplicações contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo ponto x pertencente a um subconjunto $X \subset M$, então $f(y) = g(y)$ para todo $y \in \bar{X}$.

Com efeito, o conjunto dos pontos $x \in M$ nos quais $f(x) = g(x)$ é fechado e contém X , logo, contém \bar{X} . Em particular, se as funções contínuas $f, g : M \rightarrow N$ coincidem em um subconjunto denso $X \subset M$, então $f = g$. Mais em particular: sejam $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em um intervalo I . Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$ racional, então $f = g$, já que os racionais formam um conjunto denso.

5.4 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

Definição 5.8. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M chama-se sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Toda subsequência de uma sequência de Cauchy também é de Cauchy.

Para que uma sequência seja de Cauchy, é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$$

para qualquer $p \in \mathbb{N}$. Basta chamar de n o menor dos números m, n da definição anterior e por $m = n + p$.

Intuitivamente, os termos de uma sequência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos. Ser Cauchy depende apenas dos termos da sequência, mas não da existência de outros pontos no espaço. Assim, se $M \subset N$, uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em M se, e somente se, é de Cauchy em N .

Proposição 5.9. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração.

Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M , então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $m, n > n_0$, temos, pela desigualdade triangular,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

Exemplo 5.13. Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para ver isso, tomemos uma sequência de números racionais x_n convergindo para um número irracional a . Por exemplo, $x_1 = 1, x_2 = 1,4, x_3 = 1,41, x_4 = 1,414$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

Sendo convergente em \mathbb{R} , segue-se que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico \mathbb{Q} dos números racionais, pela Proposição 5.9. Mas (x_n) não converge em \mathbb{Q} , já que $\lim x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Proposição 5.10. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M . Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1.$$

Logo, o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1. Segue-se que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}.$$

O conjunto é limitado, pois é reunião de dois conjuntos limitados. De fato, seja

$$c = \max\{d(x_i, x_j), i, j = 1, \dots, n_0\}.$$

Então $d(x, y) \leq c$ para todo $x, y \in \{x_1, \dots, x_{n_0}\}$. Logo, $\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$ é limitado. □

Exemplo 5.14. Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Por exemplo, a sequência

$$(1, 0, 1, 0, \dots)$$

na reta. A sequência é limitada, mas não é de Cauchy pois $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo n .

Dada a sequência (x_n) no espaço métrico M , escrevemos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

Temos $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$. Como $X_1 = \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \cup X_n$, um desses conjuntos é limitado se, e somente se, todos os demais forem. Se tal é o caso, temos

$$\text{diam}(X_1) \geq \text{diam}(X_2) \geq \dots$$

e existe sempre $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(X_n)$, já que a sequência $(\text{diam } X_n)$ é monótona crescente e limitada.

A fim de que (x_n) seja uma sequência de Cauchy, é necessário e suficiente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(X_n) = 0.$$

Proposição 5.11. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente e tem o mesmo limite que a subsequência.*

Demonstração.

Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma sequência que converge para o ponto $a \in M$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Também existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{p, q\}$. Para todo $n > n_0$, existe $n_k > n_0$ e, então,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $\lim x_n = a$. □

Exemplo 5.15. Se uma sequência possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então ela não é de Cauchy.

Em particular, uma sequência que possui um número finito de termos distintos só pode ser de Cauchy quando, a partir de uma certa ordem, ela se torna constante.

Para os próximos resultados, precisamos apresentar o conceito de continuidade uniforme.

Definição 5.9. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Dizemos que f é *uniformemente contínua* se, dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que, $y \in X$,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ou seja, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Além disso, é interessante notarmos a relação da continuidade uniforme e funções lipschitzianas.

Proposição 5.12. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.*

Demonstração.

Seja $f : M \rightarrow N$ uniformemente contínua e seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em M . Tomando $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in M$,

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Por sua vez, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon.$$

Portanto, $f(x_n)$ é de Cauchy. □

Definição 5.10. A seqüência de aplicação $f_n : X \rightarrow M$ converge uniformemente em X para a aplicação $f : X \rightarrow M$ quando, para todo número real $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $x \in X$,

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

6 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Neste capítulo foram explorados os conceitos dos espaços métricos completos e, em especial, os Espaços de Banach e Espaços de Hilbert. As definições e os exemplos apresentados, juntamente com os resultados demonstrados, são conceitos centrais da teoria de espaços métricos. O capítulo foi baseado na obra "Espaços Métricos" (Lima, 1977).

6.1 ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Definição 6.1. Um espaço métrico M diz-se completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente para um ponto de M .

Exemplo 6.1. O espaço \mathbb{Q} dos números racionais não é completo, vide Exemplo 5.13.

Além disso, todo espaço M com a métrica zero-um é completo, pois qualquer sequência de Cauchy em M é constante a partir de um certo índice e, portanto, convergente.

Porém, nem todo espaço discreto é completo. Por exemplo, tomando $P = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ onde $x_n = \frac{1}{n}$ fornece uma sequência de Cauchy que não converge em P .

Definição 6.2. Uma métrica d , em um espaço M , é uniformemente discreta quando existir $\varepsilon > 0$ tal que, para $x, y \in M$,

$$d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow x = y.$$

Nesse caso, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M , existe n_0 tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \Rightarrow x_m = x_n.$$

Assim, toda sequência de Cauchy em um espaço uniformemente discreto é constante a partir de n_0 e, assim, convergente. Portanto, os referidos espaços são completos.

Proposição 6.1. A reta é um espaço métrico completo.

Demonstração.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} . Pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, temos

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$$

e os conjuntos X_n são limitados, porque toda sequência de Cauchy é limitada (vide Proposição 5.10). Portanto, $d(x_m, x_n) \leq c$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\text{diam}(X_n) = \sup_{x, y \in X_n} d(x, y) \leq \sup_{x, y \in X_n} c = c.$$

Seja $a_n = \inf X_n$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Então,

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b = \sup X_1.$$

Pela Proposição 5.5, existe $a = \lim a_n$. Afirmamos $a = \lim x_n$. Para isso, basta mostrarmos que a é limite de uma subsequência de (x_n) . Ou seja, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, pelas Proposições 5.11 e 5.4.

Sendo $a = \lim a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \frac{\varepsilon}{2} < a_m < a + \frac{\varepsilon}{2}$. Como $a_m = \inf X_m$, existe $n \geq m > n_1$ tal que

$$a - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2} < \underbrace{a_m \leq x_n < a_m + \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{Definição de ínfimo}} < a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = a + \varepsilon.$$

Ou seja, $x_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Portanto, x_n converge para a em \mathbb{R} . □

Proposição 6.2. *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração.

Seja $F \subset M$ fechado, com M completo. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F . Sabemos que (x_n) é de Cauchy em M , já que $F \subset M$. Logo, existe $a = \lim x_n \in M$. Como F é fechado em M , temos $a \in F$, pelo Corolário 5.9. Portanto, F é completo.

Reciprocamente, se $M \subset N$ é um subespaço completo, dada a sequência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a \in N$, a sequência (x_n) é de Cauchy em M , pela Proposição 5.9. Logo, como M é completo, existe $\lim x_n = b \in M$. Pela unicidade do limite, temos $a = b \in M$ e, portanto, M é fechado em N , pelo Corolário 5.9. □

Para os próximos resultados, precisamos mostrar que as projeções são uniformemente contínuas. Para isso, vamos apresentar um resultado importante da relação entre continuidade uniforme e funções lipschitzianas.

Proposição 6.3. *Toda função lipschitziana $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Com efeito, como f é lipschitziana, sabemos que existe $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$ para todo $x, y \in X$. Então, dado $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, temos que para todo $x, y \in X$, vale

$$|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Portanto, f é uniformemente contínua. □

Note que a recíproca dessa afirmação não é verdadeira: nem toda aplicação uniformemente contínua é lipschitziana. Um contraexemplo a ser citado é a função $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Essa função é uniformemente contínua, pois dado um $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta = 2\varepsilon$, temos para todo $x, y \in X$,

$$|x - y| < \delta = 2\varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \varepsilon.$$

Entretanto, f não é lipschitziana. De fato,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Tomando $x \neq y$ suficientemente pequenos, podemos tomar $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ tão pequeno quanto se deseje. Por isso, o quociente $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ é ilimitado.

Observação 24. Observe então que as projeções são uniformemente contínuas, já que, pelo Exemplo 3.3, as projeções são contrações fracas. Ou seja, são funções lipschitzianas cuja constante de Lipschitz é igual a 1.

Proposição 6.4. *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração.

Temos $M \times N$ completo. Então, fixando $b \in N$, vemos que a aplicação $x \mapsto (x, b)$ é uma isometria de M sobre o subespaço fechado $M \times b \subset M \times N$. Segue-se da Proposição 6.2 que M é completo. Analogamente, tomando uma aplicação $y \mapsto (a, y)$, com a fixado em M , temos que N é completo.

Reciprocamente, vamos tomar M e N completos e uma sequência de Cauchy (z_n) em $M \times N$, onde $z_n = (x_n, y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in M$ e $y_n \in N$. Como as projeções

$$p_1 : M \times N \rightarrow M \quad p_2 : M \times N \rightarrow N,$$

definidas por $p_1(z_n) = x_n$ e $p_2(z_n) = y_n$, são uniformemente contínuas, (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N , pela Proposição 5.12. Logo, existem $\lim x_n = a \in M$ e $\lim y_n = b \in N$. Então,

$$\lim z_n = (\lim x_n, \lim y_n) = (a, b) = c \in M \times N.$$

Portanto, $M \times N$ é completo. □

Corolário 6.1. *$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ é completo se, e somente se, M_1, M_2, \dots, M_n são completos.*

Demonstração.

Se $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ é completo, cada parte $M_i (i = 1, \dots, n)$ é completo, por ser isométrico ao subespaço fechado

$$a_1 \times \cdots \times a_{i-1} \times M_i \times a_{i+1} \times \cdots \times a_n \subset M_1 \times \cdots \times M_n.$$

Reciprocamente, aplicando $n - 1$ vezes a Proposição 6.4, concluímos que $M_1 \times M_2, M_1 \times M_2 \times M_3, \dots, M_1 \times M_n$ são completos se cada M_i for completo. □

Corolário 6.2. *O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é completo.*

Demonstração.

Sabemos, da Proposição 6.1, que a reta \mathbb{R} é um espaço completo. Logo, pela Proposição 6.4, como

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ vezes}}$$

é produto cartesiano de espaços completos, é completo. \square

Sejam X um conjunto, M um espaço métrico e $\alpha : X \rightarrow M$ uma aplicação. A notação $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$ representa o conjunto das aplicações $f : X \rightarrow M$ tais que $d(f, \alpha) = \sup_{x \in X} d(f(x), \alpha(x)) < \infty$, com a métrica da convergência uniforme.

Proposição 6.5. *Se o espaço métrico M é completo então $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$ é completo, sejam quais foram X e $\alpha : X \rightarrow M$.*

Demonstração.

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$. Esta sequência é limitada, então existe uma constante $c > 0$ tal que $d(f_n(x), \alpha(x)) \leq d(f_n, \alpha) \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Fixando-se arbitrariamente $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em M . Como M é completo, existe, para cada $x \in X$, o limite desta sequência. Escreveremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in M.$$

Isso define uma aplicação $f : X \rightarrow M$, que é o limite simples da sequência (f_n) . De $d(f_n(x), \alpha(x)) \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, concluímos, fazendo $n \rightarrow \infty$, que $d(f_n, \alpha) \leq c$ para todo $x \in X$.

Logo $f \in \mathcal{B}_\alpha(X; M)$. Basta provar que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em X . Ora, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_n \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ para qualquer $x \in X$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ nesta desigualdade, concluímos que $n > n_0 \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Ou seja, $f_n \rightarrow f$ uniformemente, como queríamos mostrar. \square

Corolário 6.3. (Critério de Cauchy para convergência uniforme) *Seja M um espaço métrico completo. A fim de que uma sequência de aplicações $f_n : X \rightarrow M$ convirja uniformemente em X , é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implique $d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

Demonstração.

Se $f_n \rightarrow f$ convirja uniformemente em X então $f_n \in \mathcal{B}_f(X; M)$ para todo n suficientemente grande e $\lim f_n = f$ nesse espaço. Logo, (f_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}_f(X; M)$ e a condição acima é necessária.

Reciprocamente, supondo a contradição satisfeita, tomamos $\varepsilon = 1$, a partir do qual obtemos n_0 como no enunciado e concluímos que, para $\alpha = f_{n_0+1}$, vale $d(f_n, \alpha) \leq 1$, ou seja $f_n \in \mathcal{B}_\alpha(X; M)$ se $n > n_0$. Além disso, a condição admitida diz que $(f_n)_{n > n_0}$ é uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo $\mathcal{B}_\alpha(X; M)$. Segue-se que (f_n) converge uniformemente em X . \square

Corolário 6.4. *Sejam M, N espaços métricos. Se N é completo então, para toda aplicação $\alpha : M \rightarrow N$, o espaço métrico $\mathcal{C}_\alpha(M; N)$, onde $\mathcal{C}_\alpha(M; N)$ é o subespaço de $\mathcal{B}_\alpha(M; N)$ formado pelas aplicações contínuas $f : M \rightarrow N$ tais que $d(f, \alpha) < +\infty$, é completo.*

Demonstração.

Sabemos que $\mathcal{C}_\alpha(M; N)$ é fechado no espaço completo $\mathcal{B}_\alpha(M; N)$ (Vide Exemplo 4.21). Logo, $\mathcal{C}_\alpha(M; N)$ é completo.

Em particular, o espaço $\mathcal{C}_0(M; \mathbb{R})$ das funções contínuas e limitadas $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é completo na métrica da convergência uniforme. \square

Exemplo 6.2. Uma bola fechada $B[a; r]$ e sua fronteira, a esfera $S(a; r)$, no espaço euclidiano \mathbb{R}^n , são espaços métricos completos, pois são subconjuntos fechados do espaço completo \mathbb{R}^n .

De maneira geral, se M é completo, as bolas fechadas e esferas de M são espaços completos. Por outro lado, uma bola aberta dotada da métrica induzida não pode ser um espaço completo, pois não é um subconjunto fechado.

6.2 ESPAÇOS DE BANACH E ESPAÇOS DE HILBERT

Dados os espaços vetoriais normados E e F , indicamos com a notação $\mathcal{L}(E; F)$ o conjunto das aplicações lineares e contínuas de E em F :

$$\mathcal{L}(E; F) = \{f : E \rightarrow F; f \text{ é linear e contínua}\}$$

O conjunto $\mathcal{L}(E; F)$ é um espaço vetorial, no qual consideramos a norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in E, |x| = 1\}. \quad (6.1)$$

Para toda $f \in \mathcal{L}(E; F)$ e todo $x \in E$, seja $\frac{x}{|x|}$, vale, pela linearidade de f ,

$$f\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq \|f\| \Rightarrow \frac{1}{|x|} \cdot f(x) \leq \|f\|.$$

Portanto,

$$f(x) \leq \|f\| \cdot |x|. \quad (6.2)$$

Observação 25. Seja $S = \{u \in E; |u| = 1\}$ a esfera unitária de E . Uma aplicação linear $f : E \rightarrow F$ é contínua se, e somente se, a restrição de f em S ($f|_S$) é limitada.

De fato, segue da Proposição 3.5 que

$$\begin{aligned}
 f \text{ é linear e contínua} &\Leftrightarrow \exists c > 0; |f(x)| \leq c \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E \\
 &\Leftrightarrow \exists c > 0; |f(x)| \leq c \cdot \|x\|, \quad \forall x \in S \subset E \\
 &\Leftrightarrow \exists c > 0; |f(x)| \leq c, \quad \forall x \in S \\
 &\Leftrightarrow f|_S \text{ é limitada.}
 \end{aligned}$$

Portanto, $\|f\|$ está bem definida em (6.1).

Por definição, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ em $\mathcal{L}(E; F)$ significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. Mas

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \in E, |x|=1} |(f_n - f)(x)| = \sup_{x \in E, |x|=1} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $\sup |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Ainda, $d(f_n(x), f(x)) = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in E$ e $|x| = 1$. O que equivale a dizer que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em S .

Proposição 6.6. *Se F é completo, então o espaço vetorial normado $\mathcal{L}(E; F)$ é completo.*

Demonstração.

Se (f_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E; F)$, então as restrições $f_n|_S$ constituem uma sequência de Cauchy em $\mathcal{B}(S; F) = \{f : S \rightarrow F; f \text{ é limitada}\}$.

Como F é completo, existe $f_0 : S \rightarrow F$ limitada tal que $f_n \rightarrow f_0$ uniformemente em S , pela Proposição

Vamos indicar com $f : E \rightarrow F$ a extensão da aplicação $f_0 : S \rightarrow F$, definida

$$\lambda \cdot u \longmapsto f(\lambda u) = \lambda \cdot f_0(u),$$

se $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mostraremos que $f_n \rightarrow f$ simplesmente em E . É claro que $f_n(0) = 0 \rightarrow 0 = f(0)$. Se $x \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(|x| \cdot \frac{x}{|x|}\right) = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{x}{|x|}\right) \\
 &= |x| \cdot f_0\left(\frac{x}{|x|}\right) \stackrel{f|_S=f_0}{=} |x| \cdot f\left(\frac{x}{|x|}\right) = f\left(|x| \cdot \frac{x}{|x|}\right) = f(x).
 \end{aligned}$$

Podemos concluir que f é linear, já que

$$\begin{aligned}
 f(\lambda a + b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda a + b) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(\lambda a) + f_n(b)] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda a) + \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b) \\
 &= \lambda \cdot f(a) + f(b).
 \end{aligned}$$

Como $f|_S = f_0$ é limitada, então é contínua, pela Proposição 3.5, vamos que $f \in \mathcal{L}(E;F)$. E como $f_n|_S \rightarrow f|_S$ uniformemente, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, no espaço $\mathcal{L}(E;F)$ que é, portanto, completo. \square

Definição 6.3. Um espaço vetorial normado completo chama-se um espaço de Banach.

Exemplo 6.3. São espaços de Banach: \mathbb{R}^n , $\mathcal{B}(X;F)$, $\mathcal{C}_0(M;F)$ e $\mathcal{L}(E;F)$, onde X é um conjunto qualquer, M um espaço métrico e F um espaço de Banach.

O conjunto $\mathcal{P}[0,1]$ das funções polinomiais $p: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é um espaço vetorial. Podemos considerar em $\mathcal{P}[0,1]$ a norma $\|p\| = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|$, por exemplo. Em relação a esta norma, o espaço $\mathcal{P}[0,1]$ não é completo. Com efeito, é possível mostrar do Cálculo que a sequência de polinômios

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

converge uniformemente em $[0,1]$ para a função contínua e^x , que não é um polinômio. Logo, (p_n) é uma sequência de Cauchy que não converge em $\mathcal{P}[0,1]$.

Definição 6.4. Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial H , munido de um produto interno, e completo em relação à norma definida por esse produto interno.

Por exemplo, segue da Proposição 6.1 e Corolário 6.2, o espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com o produto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ é um espaço de Hilbert.

Exemplo 6.4. O espaço das sequências de quadrado somável (ou espaço l^2) é um espaço de Hilbert.

O conjunto l^2 é constituído por todas as sequências numéricas cujo o quadrado é somável. Ou seja,

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \text{ de números reais; } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}.$$

Observação 26. a) As séries da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$, onde $a, r \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ são chamadas de séries geométricas.

(i) Se $|r| < 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a \cdot \frac{1}{1-r}$;

(ii) Se $|r| \geq 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ é divergente.

b) Seja $p > 0$. As séries da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ são chamadas de série-p. Segue do teste da integral que

- (i) se $0 < p \leq 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é divergente;
- (ii) se $p > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente.

Por exemplo,

- a) Seja $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$, então

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^2)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Note que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ é uma série geométrica com $|r| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$. Portanto, a série converge e podemos dizer que $x \in l^2$.

- b) Seja $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

que é uma série-p com $p = 2 > 1$. Logo, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente e, portanto, $y \in l^2$.

- c) Seja $z = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots)$, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

que é a série harmônica divergente. Logo $z \notin l^2$.

Dado $x \in l^2$, escrevemos

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}.$$

A fim de mostrar que l^2 é um espaço vetorial relativamente às operações de soma e produto definidas

$$\begin{cases} x + y = (x_i + y_i) \\ \lambda \cdot x = (\lambda \cdot x_i). \end{cases}$$

Vamos observar primeiro que se $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ pertencem a l^2 , então a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i$$

é convergente.

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de que a aplicação $z \mapsto \sqrt{z}$ é crescente,

$$S_n = \sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} = \|x\| \cdot \|y\|.$$

A sequência das somas parciais da série $\sum |x_i \cdot y_i|$ são, portanto, majoradas pelo número real $\|x\| \cdot \|y\|$, logo, é limitada. Como todos os termos da S_n são positivos, a sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona (não-decrescente), logo S_n é convergente e a série $\sum |x_i \cdot y_i|$ é convergente.

Agora, vamos mostrar que l^2 é um espaço vetorial.

Se $x, y \in l^2$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i < +\infty.$$

Logo, $x + y \in l^2$. Se $x \in l^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda \cdot x_i = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} x_i < +\infty.$$

Portanto, $\lambda x \in l^2$. Então l^2 é um espaço vetorial.

Seja $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \cdot y_i$ um produto interno em l^2 , cuja norma subjacente é

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}.$$

Resta mostrarmos que l^2 é completo em relação à métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

Seja então (x_n) uma sequência de Cauchy em l^2 . Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos

$$x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots),$$

onde cada elemento é uma sequência em l^2 .

Fixando qualquer $i \in \mathbb{N}$, temos

$$d(x_{m_i}, x_{n_i}) \leq \|x_m - x_n\|.$$

Logo, $(x_{n_i})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Segue-se que, sabendo que \mathbb{R} é completo, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe o número real

$$a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_i}.$$

Seja $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $m, n > n_0$, temos

$$\sum_{i=1}^k (x_{m_i} - x_{n_i})^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} (x_{m_i} - x_{n_i})^2 = \|x_m - x_n\|^2.$$

Portanto, $\sum_{i=1}^k (x_{m_i} - x_{n_i})^2 < \varepsilon^2$.

Mantendo fixo k e n e fazendo $m \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, concluímos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale

$$\sum_{i=1}^k (a_i - x_{n_i})^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall n > n_0.$$

Fazendo agora $k \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - x_{n_i})^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall n > n_0 &\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - x_{n_i})^2} \leq \sqrt{\varepsilon^2} \\ &\Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Em particular, $n > n_0 \Rightarrow a - x_n \in l^2$. Segue-se que $a = (a - x_n) + x_n \in l^2$, pois $x_n \in l^2$. Segue de (6.3) que

$$n > n_0 \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

Ou seja, $a = \lim x_n$, onde $a \in l^2$. Assim, toda sequência de Cauchy em l^2 é convergente em l^2 e, portanto, l^2 é um espaço de Hilbert.

7 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÃO

Este capítulo é um estudo da obra "Introductory Functional Analysis with Applications" (Kreyszig, 1978) e "Lições de Equações Diferenciais Ordinárias" (Sotomayor, 1979). Aqui provaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, apresentaremos conceitos e exemplos básicos sobre equações diferenciais ordinárias e aplicaremos o Teorema do Ponto Fixo na demonstração da existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

7.1 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Definição 7.1. Seja X um conjunto. Um *ponto fixo* de uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $T(x) = x$.

Geometricamente, isso significa que quaisquer pontos x e y tem imagens que são mais próximas que os próprios pontos x, y . Mais precisamente, a proporção $\frac{d(T(x), T(y))}{d(x, y)}$ não excede uma constante $\alpha < 1$.

Teorema 7.1. (TEOREMA DO PONTO FIXO DA BANACH). *Seja (X, d) um espaço métrico onde $X \neq \emptyset$, X completo e seja $T : X \rightarrow X$ uma contração em X , ou seja, existe uma constante $0 < \alpha < 1$ tal que, para todo $x, y \in X$, vale*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y). \quad (7.1)$$

Então T tem exatamente um ponto fixo p . Mais ainda, p é um atrator de T , isto é, $T^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in X$. Ainda, $T^n(x)$ é definido $T(T^{n-1}(x))$.

Demonstração.

Basta construirmos uma sequência (x_n) e mostrar que é de Cauchy, para que convirja no espaço completo X , e então provamos que o limite da sequência (x_n) é um ponto fixo em T e T não tem outros pontos fixos.

Escolhemos qualquer $x_0 \in X$ e definimos a "sequência iterativa" (x_n) por

$$x_0, \quad x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \quad \dots, \quad x_n = T^n(x_0), \quad \dots \quad (7.2)$$

É claro que esta sequência é uma sequência das imagens de x_0 pela aplicação repetida de T . Vamos mostrar que (x_n) é de Cauchy. Note que

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= T^{m+1}(x_0) = T(T^m(x_0)) = T(x_m) \text{ e} \\ x_m &= T^m(x_0) = T(T^{m-1}(x_0)) = T(x_{m-1}). \end{aligned}$$

Pela desigualdade (7.1) e (7.2), temos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(T(x_m), T(x_{m-1})) \leq \alpha \cdot d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha \cdot d(T(x_{m-1}), T(x_{m-2})) \leq \alpha^2 \cdot d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade triangular e a fórmula da soma de progressão geométrica¹, podemos obter para $n > m$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= d(x_{m+1}, x_m) + d(x_{m+2}, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) + \alpha^{m+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n-2} d(x_0, x_1) + \alpha^{n-1} d(x_0, x_1) \\ &= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-m-2} + \alpha^{n-m-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \cdot \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$, no numerador temos $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Consequentemente, para $n > m$,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \cdot d(x_0, x_1).$$

No lado direito da desigualdade, $0 < \alpha < 1$ e $d(x_0, x_1)$ estão fixados. Para que consigamos o lado direito tão pequeno quanto quisermos, tomamos m suficientemente grande (e $n > m$). Isso prova que (x_m) é uma sequência de Cauchy.

Como X é completo, (x_m) converge, logo existe $p \in X$ tal que $x_m \rightarrow p$. Ou seja, $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = p$ e, portanto, para todo $x \in X$ (tomando $x_0 = x$) obtemos

$$T^m(x) = T(T^{m-1}(x)) = x_m \rightarrow p \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Assim, p é atrator de T . Vamos mostrar que o limite p é um ponto fixo da aplicação T . Segue da desigualdade triangular e (7.1) que

$$\begin{aligned} d(p, T(p)) &\leq d(p, x_m) + d(x_m, T(p)) \\ &= d(p, x_m) + d(T(x_{m-1}), T(p)) \\ &\leq d(p, x_m) + \alpha \cdot d(x_{m-1}, p). \end{aligned}$$

¹ A soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) é dada pela expressão $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, onde a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é o número de termos da PG.

Assim, como $x_m \rightarrow p$, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > m > n_0$, temos

$$d(p, T(p)) \leq d(p, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} = \varepsilon.$$

Concluimos que $d(p, T(p)) = 0$, então $p = T(p)$. Isso mostra que p é um ponto fixo de T .

Vamos supor que exista um ponto fixo $\tilde{p} = T(\tilde{p})$. Obtemos pela desigualdade (7.1),

$$d(p, \tilde{p}) = d(T(p), T(\tilde{p})) \leq \alpha \cdot d(p, \tilde{p}).$$

Portanto,

$$d(p, \tilde{p}) \leq \alpha \cdot d(p, \tilde{p}) \Leftrightarrow d(p, \tilde{p}) - \alpha \cdot d(p, \tilde{p}) \leq 0 \Leftrightarrow d(p, \tilde{p}) \cdot (1 - \alpha) \leq 0.$$

Como $\alpha < 1$, temos $1 - \alpha > 0$. Então

$$d(p, \tilde{p}) \leq 0 \Leftrightarrow d(p, \tilde{p}) = 0 \Leftrightarrow p = \tilde{p}.$$

□

Corolário 7.1. *Seja X um espaço métrico completo. Se $T : X \rightarrow X$ é contínua e, para algum m , T^m é uma contração, então existe um único ponto p fixo por T . Mais ainda, p é um atrator de T .*

Demonstração.

Seja p o ponto fixo atrator de T^m dado pelo Teorema 7.1. Seja $n = mk + l$ com $0 \leq l < m$. Dado $x \in X$, $T^l(x)$ é um ponto de X . Como p é atrator de T^m , temos (já que $\{T^l(j); 0 \leq l < m \text{ é finito}\}$), $[T^m]^k(T^l(x)) \rightarrow p$, quando $k \rightarrow \infty$.

Da relação: $T^n(x) = [T^m]^k(T^l(x))$ e do fato que quando $n \rightarrow \infty$ tem-se $k \rightarrow \infty$, segue-se que $T^n(x) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é p é um atrator de T . Provaremos agora que $T(p) = p$. Com efeito,

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(T(p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(p)) \underset{T \text{ é contínua.}}{=} T(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(p)) = T(p).$$

□

7.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nesta seção introduziremos os conceitos iniciais da teoria das equações diferenciais ordinárias e o problema de Cauchy. Para isso, precisamos definir derivadas e funções diferenciáveis.

Sejam Ω um subconjunto do espaço $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ onde \mathbb{R} é a reta real e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ um espaço euclidiano n -dimensional. Considere $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não

degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo de \mathbb{R} não reduzido a um ponto. O intervalo I pode ser aberto, fechado e semi-fechado, finito ou infinito.

Definição 7.2. Uma função diferenciável² $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$ chama-se solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (7.3)$$

no intervalo I se:

- (i) o gráfico de φ em I , isto é, $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ está contido em Ω e
- (ii) $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$. Se t é um ponto extremo do intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

A equação (7.3) chama-se *equação diferencial ordinária* de primeira ordem e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x).$$

Sejam $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ as componentes de f ; $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ com $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (7.3) se, e somente se, cada φ_i é diferenciável em I , $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \Omega$ para todo $t \in I$ e

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt}(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ \frac{d\varphi_2}{dt}(t) = f_2(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt}(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \end{cases}$$

para todo $t \in I$.

Por esta razão diz-se que a equação diferencial vetorial (7.3) é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Consideremos inicialmente dois exemplos.

- a) $\Omega = I \times \mathbb{R}, f(t, x) = g(t)$ onde g é uma função contínua no intervalo I ; φ é uma solução de

$$x' = g(t), \quad \forall t \in I$$

² Dizemos que $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável se, e somente se, existe e é finito $\varphi'_j(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_j(x+h) - \varphi_j(x)}{h}$, $j = 1, \dots, n$ e $\varphi'(x) = (\varphi'_1(x), \dots, \varphi'_n(x))$.

se, e somente se, $\varphi(t) = c + \int_{t_0}^t g(s)ds$ onde $t_0 \in I$ e c é uma constante, já que

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = g(t) &\Leftrightarrow \int_{t_0}^t \varphi'(s)ds = \int_{t_0}^t g(s)ds \\ &\Leftrightarrow \varphi(s) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t g(s)ds \\ &\Leftrightarrow \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t g(s)ds \\ &\Leftrightarrow \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t g(s)ds = c + \int_{t_0}^t g(s)ds,\end{aligned}$$

quando $c = \varphi(t_0)$.

b) $\Omega = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = 3x^{\frac{2}{3}}$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ a função $\varphi_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \geq c; \\ 0, & t \leq c. \end{cases}$$

é a solução da equação

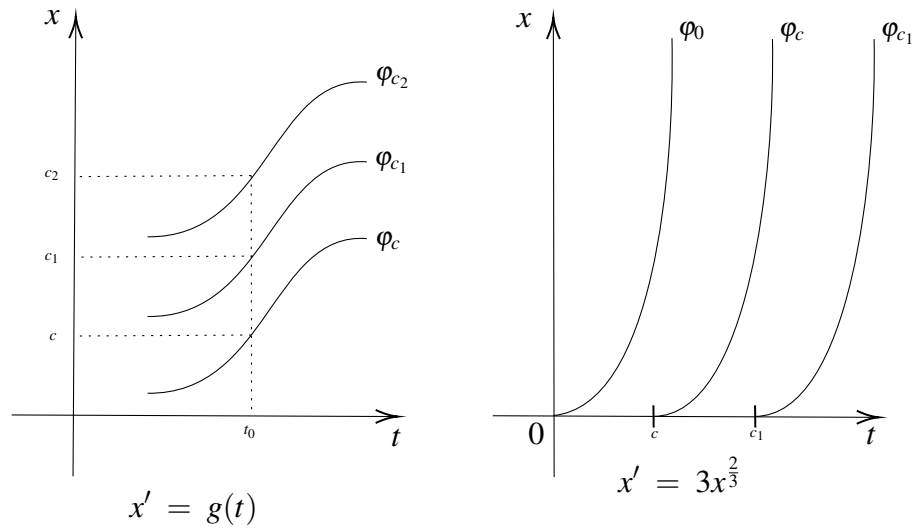
$$x' = 3x^{\frac{2}{3}} \quad \forall t \in I = \mathbb{R}$$

como se vê por verificação direta das condições (i) e (ii) da Definição 7.2. De fato, a solução satisfaz a condição (i) já que o gráfico de φ_c , isto é, $\{(t, \varphi_c(t)); t \in I = \mathbb{R}\}$ está contido em $\mathbb{R}^2 = \Omega$. Além disso, satisfaz (ii) pois, considerando $\varphi_c = (t-c)^3$, temos

- $\frac{d\varphi}{dt}(t) = 3(t-c)^2$;
- $f(t, \varphi_c(t)) = 3(\varphi_c(t))^{\frac{2}{3}} = 3((t-c)^3)^{\frac{2}{3}} = 3((t-c)^{3 \cdot \frac{2}{3}}) = 3(t-c)^2$.

Ainda, a função constante $\varphi = 0$ também é solução desta equação, já que $\frac{d\varphi}{dt}(t) = 0 = 3(0)^{\frac{2}{3}} = f(t, \varphi(t))$.

Figura 16 – Gráficos das soluções dos exemplos de equações diferenciais.



Fonte: elaborado pela autora.

Esses exemplos ilustram o fato de que as equações diferenciais possuem em geral uma infinidade de soluções. Porém, no exemplo a), em cada ponto de Ω passa uma única solução; isto é, dado $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução φ tal que $\varphi(t_0) = x_0$.

O mesmo não acontece no exemplo b). Neste caso, em cada ponto da forma $(t_0, 0)$ passa uma infinidade de soluções. Sob hipóteses bem gerais sobre f (por exemplo, se f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em Ω)³ existe uma e só uma solução φ de (7.3) num intervalo que contém t_0 e tal que $\varphi(t_0) = x_0$. Uma tal φ será chamada de *solução do problema com dados iniciais* (t_0, x_0) para a equação (7.3). Este problema é conhecido também como *problema de Cauchy* e será denotado abreviadamente por

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Observação 27. A equação (7.4) é equivalente à equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (7.5)$$

Isto é, se $t_0 \in I$, uma função contínua $\varphi : I \rightarrow \mathbb{E}$ cujo gráfico está contido em Ω é a solução de (7.5) se, e somente se, é solução de (7.4). Isto decorre do Teorema Fundamental do Cálculo, já

³ **Teorema.** Se f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em um retângulo $R: |t| \leq a, |x| \leq b$, então existe algum intervalo $|t| \leq h \leq a$ no qual existe uma única solução $x = \varphi(t)$ do problema de valor inicial. (Boyce e DiPrima (2015))

que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x'(s) ds &= \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \Leftrightarrow x(s) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ &\Leftrightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ &\Leftrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

A seguir trataremos um exemplo elementar de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy que admite um tratamento direto.

Exemplo 7.1. Seja $\Omega = \mathbb{R} \times]a_1, a_2[$ e $f(t, x) = f(x)$. Supomos que f é contínua e não se anula em $]a_1, a_2[$. Dados $x_0 \in]a_1, a_2[$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, determinemos a solução para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Se φ é uma solução de (7.6), então

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \quad \text{e} \quad \varphi(t_0) = x_0$$

de onde segue-se

$$\frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 1. \quad (7.7)$$

Se $F :]a_1, a_2[\rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{f(\xi)} d\xi$$

vê-se que $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$ em $]a_1, a_2[$. Então, segue do Teorema da Função Inversa⁴ que F é inversível e aplica $]a_1, a_2[$ num intervalo $]b_1, b_2[$ onde F^{-1} está definida. De (7.7), temos

$$1 = \frac{1}{f(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Ou seja, pela regra da cadeia temos $(F \circ \varphi)'(t) = 1$.

⁴ Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em um intervalo aberto I . Suponha que existe $x_0 \in I$, com $y_0 = f(x_0)$, tal que $f'(x_0) \neq 0$. Então, existem intervalos abertos I_{x_0} e I_{y_0} em torno de x_0 e y_0 , respectivamente, tais que a restrição $f|_{I_{x_0}} : I_{x_0} \rightarrow I_{y_0}$ definida $x \mapsto y = f(x)$ é inversível, a inversa é diferenciável, e $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Integrando ambos os lados entre t_0 e t obtemos

$$F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0)) = t - t_0$$

e como $F(\varphi(t_0)) = F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \frac{1}{f(s)} ds = 0$,

$$F(\varphi(t)) = t - t_0.$$

Logo, a única solução de (7.6) é dada por

$$\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0), \quad t \in]t_0 + b_1, t_0 + b_2[.$$

Definição 7.3. Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se Lipschitziana em Ω relativamente à segunda variável ou, simplesmente, Lipschitziana, se existe uma constante K tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K \cdot |x - y|$$

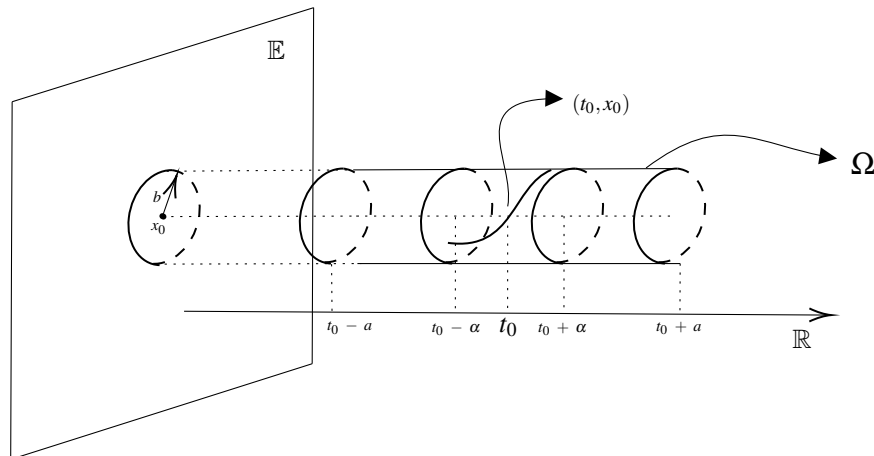
para todos $(t, x), (t, y) \in \Omega$. K chama-se constante de Lipschitz de f .

Teorema 7.2. (TEOREMA DE PICARD). Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = I_a \times B_b \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E}$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ e $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$. Se $|f| \leq M$ em Ω , existe uma e única solução de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

em I_α , onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

Figura 17 – Teorema de existência e unicidade.



Fonte: elaborado pela autora.

Demonstração.

Seja $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo (vide Corolário 6.4) das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{E}$ definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

$t \in I_\alpha$. Note que $F(\varphi)$ está bem definida, já que f é contínua, por hipótese, e $\varphi \in X$.

Destacamos as seguintes propriedades de F :

a) $F(X) \subseteq X$.

De fato, para todo $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t) - x_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \underbrace{\leq}_{|f| \leq M} \int_{t_0}^t M ds \\ &= M \cdot (t - t_0) \leq M \cdot |t - t_0| \leq M \cdot a \leq M \cdot \alpha \leq b. \end{aligned}$$

b) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Vamos verificar por indução em n que, para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$, tem-se

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), t \in I_\alpha,$$

onde K é a constante de Lipschitz de f . Para $n = 0$, a desigualdade é óbvia. De fato, já que $F^0(\varphi) = \varphi$, temos

$$\begin{aligned} |F^0(\varphi_1)(t) - F^0(\varphi_2)(t)| &= |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \\ &\leq \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \\ &= d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Note que $\frac{K^0 \cdot (|t - t_0|)^0}{0!} = 1$.

Suponhamos que a desigualdade é válida para n .

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2). \quad (7.8)$$

Vamos mostrar que vale para $n + 1$. Para isso, note que

$$F(F^n(\varphi_1))(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, F^n(\varphi_1)(s)) ds,$$

$$F(F^n(\varphi_2))(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, F^n(\varphi_2)(s)) ds.$$

Então,

$$\begin{aligned} |F^{n+1}(\varphi_1)(t) - F^{n+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^n(\varphi_1))(t) - F(F^n(\varphi_2))(t)| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, F^n(\varphi_1)(s)) - f(s, F^n(\varphi_2)(s))| ds \right| \\ (K \text{ é constante de Lipschitz de } f) &\leq \left| \int_{t_0}^t K \cdot |F^n(\varphi_1)(s) - F^n(\varphi_2)(s)| ds \right| \\ &\stackrel{(7.8)}{\leq} K \cdot \left| \int_{t_0}^t \frac{K^n |s - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| \\ &= \frac{K \cdot K^n}{n!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \left| \int_{t_0}^t (s - t_0)^n ds \right| \\ &= \frac{K \cdot K^n}{n!} \cdot d(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \frac{|t - t_0|^{n+1}}{n + 1} \\ &= \frac{K^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n + 1)!} d(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{(K\alpha)^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Sabemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, ou seja, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente e assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(K\alpha)^n}{n!} = 0,$$

logo, para n suficientemente grande, temos $\frac{(K\alpha)^n}{n!} < 1$ e, conseqüentemente, F^n é uma contração em X .

Pelo Teorema 7.1 e a observação 27, existe uma única φ tal que $F(\varphi) = \varphi$, e isto prova o Teorema de Picard. \square

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do trabalho ocorreu como o planejado durante o decorrer das disciplinas de Trabalho de Conclusão de Curso 1 e Trabalho de Conclusão de Curso 2, embora a Universidade Federal de São Carlos tenha passado por um período de greve geral durante a primeira disciplina. Durante esse período, as reuniões semanais foram interrompidas, mas a aluna continuou se dedicando ao desenvolvimento do trabalho.

As únicas mudanças que foram feitas em relação ao projeto inicial foi adiantamento da entrega e apresentação do trabalho diante da aprovação em um programa de Pós-Graduação que iniciará antes do encerramento previsto da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2.

Neste trabalho, uma coletânea de resultados fundamentais sobre espaços métricos foi apresentada, com o objetivo de fornecer uma base sólida para a compreensão desses conceitos. Além disso, foram introduzidos tópicos mais complexos, como espaços completos, incluindo os espaços de Banach e Hilbert, o Teorema do Ponto Fixo de Banach e a análise da existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. [S.l.]: LTC Editora, 2015. Citado na p. 95.

CCM-UFSCAR. **Curso Licenciatura em Matemática - Projeto Político Pedagógico**. [S.l.: s.n.], 2018. Citado na p. 9.

CHURCHILL, Ruel Vance. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 9. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora Universidade de São Paulo, 2015. Citado nas pp. 34, 35.

DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. 1. ed. São Paulo: Atual, 1982. Citado nas pp. 4, 5, 10, 35.

KREYSZIG, Erwin. **Introductory Functional Analysis with Applications**. [S.l.]: John Wiley e Sons, 1978. Citado nas pp. 35, 90.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real - Funções de uma Variável**. 13. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2020. (Coleção Matemática Universitária). Citado na p. 66.

_____. **Curso de Análise - Volume 1**. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976. (Projeto Euclides). Citado nas pp. 4, 5.

_____. **Curso de Análise - Volume 2**. 15. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1981. (Projeto Euclides). Citado nas pp. 4, 5.

_____. **Espaços Métricos**. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. (Projeto Euclides). Citado nas pp. 4, 5, 10, 35, 51, 66, 80.

SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1979. Citado nas pp. 4, 5, 90.

TASKOVIC, Milan R. Fréchet's metric spaces—100th next. **Mathematica Moravica**, 2005. Citado na p. 9.