UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇãO EM MATEMÁTICA

Equações elípticas com o Laplaciano fracionário e não linearidades indefinidas

Ray Santos Gobbi

São Carlos-SP
Abril de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações elípticas com o Laplaciano fracionário e não linearidades indefinidas

Ray Santos Gobbi

Orientador: Prof. Dr. Francisco Odair de Paiva
Coorientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

São Carlos-SP
Abril de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Ray Santos Gobbi, realizada em 24/04/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFSCar)

Edir Júnior F. Leite.

Prof. Dr. Edir Júnior Ferreira Leite (UFSCar)

Adilson Presoto

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto (UFSCar)

Uberlandio Batista Severo.

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo (UFPB)

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva (UFG)

Documento assinado digitalmente
gov.br
EDCARLOS DOMINGOS DA SILVA
Data: 27/05/2024 09:09:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Dedico este trabalho aos
meus pais Pedrina e Darcy,
a minha esposa Gabriela,
e ao meu irmão Robson.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Aos meus pais, mesmo distantes, mas perseverantes na oração. Ao meu irmão pelo apoio, preocupação e carinho.

A Gabriela, minha esposa, amiga, estímulo, que acreditou em mim mais que eu mesmo e em tudo me apoiou para chegar até aqui.

Ao meu orientador Odair, ser humano extraordinário. Exemplo de dedicação, compreensão. Sempre pronto a atender minhas dúvidas e me auxiliando nas dificuldades que não foram poucas.

Ao Olímpio pela coorientação, contribuindo nos pontos críticos e sempre disposto a ajudar, excelentes conversas de descontração ao longo da pesquisa. Exemplo de pessoa.

Aos professores por aceitarem participar desta banca e pelas correções e contribuições ao trabalho.

Aos meus amigos que vivenciaram comigo cada dificuldade desse trabalho sempre me apoiando e incentivando.

À Capes pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas para o problema abaixo:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \lambda u + f(x)g(u), \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$, f é uma função contínua e limitada que muda de sinal em Ω, e g é uma função real podendo ser subcrítica ou crítica. O operador $(-\Delta)^s$ é o Laplaciano Fracionário, $N \geq 2s$, $s \in (0,1)$ e $\lambda \geq \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador $(-\Delta)^s$. Nossos resultados serão obtidos por meio de métodos variacionais, método de sub-super solução, Teorema do Passo da Montanha e Teorema do Linking.

Palavras-chave: Laplaciano fracionário, método de sub-super solução, métodos variacionais, Teorema do Passo da Montanha, Teorema do Linking, não linearidade indefinida.

Abstract

In this work, we investigate the existence, non-existence and multiplicity of positive solutions of the problem below,

$$\left\{ \begin{array}{rll} (-\Delta)^s u - \lambda u & = f(x)g(u), & \text{em } \Omega \\ u & = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array} \right.$$

where Ω is a bounded smooth domain of $\mathbb{R}^N$, f is a continuous and bounded function that changes sign in Ω, and g is a real function and can be subcritical or critical. The operator $(-\Delta)^s$ is the Fractional Laplacian, $N \geq 2s$, $s \in (0,1)$ e $\lambda \geq \lambda_1$, where λ_1 is the first eigenvalue of operator $(-\Delta)^s$. Ours results will be obtained through variational sub-super solution methods, mountain pass theorem and linking theorem.

Keywords: Fractional Laplacian, sub-super solution method, variational methods, mountain pass theorem, Linking Theorem, indefinite nonlinearity.

Sumário

Lista de Símbolos

C: Constante positiva;

C_ε: Constante positiva que depende de $\varepsilon > 0$;

$\mathbb{R}^N$: Espaço euclidiano N-dimensional;

Ω: Domínio limitado e suave de $\mathbb{R}^N$;

$\overline{\Omega}$: Fecho de Ω;

$\partial\Omega$: Fronteira do conjunto Ω;

$B(x,r)$: Bola aberta, centrada em x e de raio $r > 0$;

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$: Gradiente da função u;

$\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u) = \sum_{1\leq i\leq N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplaciano da função u;

$\rightharpoonup$: Convergência fraca;

q.t.p.: Quase todo ponto;

$W^{s,p}(\Omega)$: É espaço de Sobolev fracionário;

$H^s(\mathbb{R}^N)$: Denota o espaço de Sobolev fracionário com $p = 2$;

$L^p(\Omega)$: $\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx < +\infty\}$, $1 \leq p < +\infty$;

$C_0^\infty(\Omega)$: Espaço das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto;

$W_0^{1,p}(\Omega)$: Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$;

$p_s^* = pN/(N-ps)$: Expoente crítico fracionário de Sobolev, quando $p < \frac{N}{s}$;

$X_p^s(\Omega)$: É o subespaço de $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ das funções com suporte em Ω;

$X_0^s(\Omega)$: Denota o subespaço de $H^s(\mathbb{R}^N)$ das funções com suporte em Ω;

$\|u\|$: Denota a norma do espaço $X_p^s(\Omega)$;

$\|\cdot\|_p$: Norma no espaço $L^p(\Omega)$;

$[u]_{s,p} = \int\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$: Representa a seminorma de Gagliardo;

Introdução

Nesta tese, estudamos a existência, não-existência e a multiplicidade de soluções positivas para equações elípticas envolvendo o operador Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$. O operador Laplaciano fracionário é um operador não linear, não local definido sobre funções suaves por

$$(-\Delta)^s \phi(x) = C(N,s) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

sendo $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < \varepsilon\}$ e $s \in (0,1)$. Esta definição é consistente, a menos de uma constante normalizada dependendo de N e s, com o operador Laplaciano fracionário. Para motivar ao estudo de tais operadores veja [33] e [25].

Seja λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta)^s$ em Ω, e seja $\phi_1 > 0$ a autofunção associada ao autovalor λ_1 com $|\phi_1|_2 = 1$. Em particular ϕ_1 satisfaz

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \lambda_1 u, \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

De maneira mais geral, denotaremos por $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ como a sequência de autovalores do operador $(-\Delta)^s$.

Além disso, assumiremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que muda de sinal, ou seja,

$$\Omega^+ := \{x \in \Omega : f(x) > 0\} \neq \emptyset \ \text{ e } \ \Omega^- := \{x \in \Omega : f(x) < 0\} \neq \emptyset.$$

Primeiramente, estudaremos a seguinte equação:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda u &= f(x)g(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\lambda \geq \lambda_1$, $N \geq 2s$, $s \in (0,1)$, g é uma não linearidade subcrítica. Sob algumas hipóteses na função f para esse problema, como exemplo, $\int_\Omega f(x)\phi_1^q < 0$, vamos mostrar que existe $\lambda^* > \lambda_1$ tal que para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$, o problema admite ao menos duas soluções positivas. Para isso, vamos utilizar a teoria de bifurcação que garante a existência de uma solução positiva para $\lambda > \lambda_1$. E vamos mostrar a multiplicidade para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$.

O segundo problema abordado é o seguinte

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda u &= f(x)|u|^{2_s^*-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u &> 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$ é o expoente de Sobolev crítico fracionário e λ é um parâmetro real. Neste caso, o principal resultado diz que sob determinadas condições, existe $\lambda^* > \lambda_1$ tal que para todo $\lambda > \lambda_1$, o problema admite ao menos duas soluções positivas se, e somente se, $\int_\Omega f(x)|\phi_1|^{2_s^*} < 0$.

O terceiro problema será da equação abaixo que resolvemos com um método da Teoria do Linking

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda u & = f(x)|u|^{2_s^*-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u & = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Por fim, neste último caso, o principal resultado nos diz que sob determinadas condições, com $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ tal que $\int_\Omega f(x)|\phi_1|^{2_s^*} \geq 0$ ou a equação (4.4) é satisfeita, o problema admite ao menos uma solução não trivial.

Esses tipos de problemas tem sido objeto de estudo por diversos pesquisadores. O problema de autovalor fracionário para (1) foi estudado nos artigos do [22] e [18]. Os artigos [23] e [43] estudaram problemas do tipo (3). Os resultados de regularidade foram obtidos por [23], [35] e [45]. Problemas elípticos super lineares com não linearidade indefinida tem sido extensamente estudado. O problema (1) com $s = 1$, ou seja, no caso do Laplaciano, foi estudado em [2, 43].

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentaremos os conceitos preliminares sobre os espaços de Sobolev fracionário, definições dos operadores Laplaciano fracionário, destacando alguns teoremas tais como de imersão, regularidade, densidade e o teorema de sub-super solução.

O Capítulo 2 é destinado ao estudo do problema (1): neste capítulo provamos os resultados de existência e não existência de soluções para a equação (1). A nossa principal motivação é estender o resultado do artigo [18], onde o principal resultado dele nos diz:

Teorema A. *Assumindo $\int_\Omega f(x)\phi_1^{p+1}dx < 0$ e $\Omega^+ \neq \emptyset, \Omega^- \neq \emptyset$. Então, existe um $\lambda^* > \lambda_1$ tal que o problema*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u & = \lambda u + f(x)u^p \quad em\ \Omega, \\ u & = 0 \quad em\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

possui uma solução positiva para $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda^*$ e não possui soluções positivas para $\lambda > \lambda^*$.

Observação: A multiplicidade foi feita no artigo [36] no caso do $p-$laplaciano.

Aplicamos a desigualdade de Picone, e usamos o método de sub-super solução com o Teorema do Passo da Montanha para obter resultados de multiplicidade. A prova deste resultado segue argumentos similares aos feitos em [2], [18] e [35].

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo do problema (2). Demonstramos resultados de existência de soluções por meio do método de sub-super solução. Em seguida, apresentamos resultados de multiplicidade, obtemos soluções da equação (2) como os mínimos dos problemas variacionais. As técnicas variacionais utilizadas serviram de fonte de inspiração para o estudo do problema (2) neste capítulo.

No capítulo 4, iremos demonstrar condições necessárias para a existência de soluções, e vamos utilizar o Teorema de Linking para garantir as soluções que buscamos. E como principal referência para esse capítulo é o artigo do [23].

Por fim, no Apêndice listamos alguns resultados auxiliares utilizados ao longo deste trabalho.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar resultados básicos que utilizaremos no decorrer do trabalho. Faremos uma breve revisão de alguns tópicos relacionados com os espaços de Sobolev fracionários, método de sub-super solução, definimos o operador Laplaciano fracionário e apresentamos algumas de suas propriedades.

1.1 Espaços de Sobolev Fracionários

Para qualquer função mensurável $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$ definimos a seminorma de Gagliardo por

$$[u]_{s,p} = \left(\int\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, para $p = 2$, temos

$$[u]_s = [u]_{s,2} = \left(\int\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 1.1. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$. Definimos o espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ como

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : [u]_{s,p} < \infty\}.$$

Em particular, para $p = 2$, definimos o espaço de Sobolev fracionário como

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : [u]_s < \infty\}.$$

Teorema 1.2. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$. O espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ munido com a norma*

$$\|u\|_{s,p} = (|u|_p^p + [u]_{s,p}^p)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

onde $|\cdot|_p$ denota a norma em $L^p(\mathbb{R}^N)$, é um espaço de Banach.

Proposição 1.3. *Seja $p \in [1,\infty)$, $0 < s \leq s' < 1$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$. Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável, então*

$$\|u\|_{s,p} \leq C\|u\|_{s',p},$$

para alguma constante adequada $C = C(N,s,p) \geq 1$. Em particular,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$$

Seja $p_s^* = pN/(N-ps)$

Teorema 1.4. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$ tal que $sp < N$. Se Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, então existe uma constante positiva $C = C(N,p,q,s,\Omega)$ tal que para todo $w \in W^{s,p}(\Omega)$, temos*

$$|u|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

para todo $q \in [1,p_s^*]$, com $p_s^* = \frac{pN}{N-ps}$, ou seja, $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente imersos em $L^q(\Omega)$, com $q \in [1,p_s^*]$ e é uma imersão compacta para $q \in [1,p_s^*)$.

Assim como no caso clássico, em que se s é um número inteiro, toda função no espaço de Sobolev fracionário pode ser aproximada por uma sequência de funções infinitamente diferenciáveis.

Proposição 1.5. *Para todo $s \in (0,1)$, o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ das funções suaves com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Denotemos por $W_0^{s,p}(\Omega)$ como o fecho das funções $C_c^\infty(\Omega)$ na norma $\|\cdot\|_{s,p}$ definida em (1.1). Da proposição anterior segue que $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$. Porém em geral, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,

$$W_0^{s,p}(\Omega) \neq W^{s,p}(\Omega),$$

ou seja, o espaço $C_c^\infty(\Omega)$ não é denso em $W^{s,p}(\Omega)$.
Os problemas a serem considerados envolvem Ω, como sendo um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e condição de fronteira de Dirichlet. Agora, introduziremos o subespaço linear fechado de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$X_p^s(\Omega) = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\},$$

com a norma $\|\cdot\| = [\cdot]_{s,p}$. Em particular, para $p = 2$ definimos

$$X_0^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\},$$

munido com a norma

$$\|\cdot\| = [\cdot]_s.$$

Teorema 1.6. *O espaço $X_p^s(\Omega) = (X_p^s(\Omega), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach uniformemente convexo. Em particular, X_p^s é reflexivo*

Demonstração. Veja [36]. □

Teorema 1.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto com fronteira contínua. Então para todo $u \in X_0^s(\Omega)$ existe uma sequência $\rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|\rho_\varepsilon - u\| \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, ou seja, $C_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço denso de $X_0^s(\Omega)$.*

Demonstração. Veja [17, Teorema 6]. □

Teorema 1.8. *A imersão $X_p^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua se $q \in [1, p_s^*]$ e é uma imersão compacta se $q \in [1, p_s^*)$. Em particular, existe uma constante $C > 0$ que depende só de N e s, tal que para todo $v \in X_0^s(\Omega)$ tem-se*

$$|v|_{2_s^*}^2 \leq C\|v\|^2.$$

Demonstração. Veja [36]. □

Lema 1.9. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $X_p^s(\Omega)$. Então, existe $u \in X_p^s(\Omega)$ e uma subsequência (u_{n_k}) a qual denotamos por (u_n), tal que valem as seguintes convergências:*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } X_p^s(\Omega), \\ u_n &\to u \text{ em } L^P(\Omega), \text{ para } 1 \leq p < p_s^*, \\ u_n(x) &\to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Demonstração. Veja [36]. □

1.2 O Operador Laplaciano Fracionário

Seja $s \in (0,1)$, $N > 2s$, o operador Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$ é um operador não linear, não local definido nas funções suaves por

$$(-\Delta)^s \phi(x) := C(N,s) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\varepsilon(x)}} \frac{(\phi(x) - \phi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, onde $B_\varepsilon(x)$ denota uma bola aberta centrada em x e de raio $\varepsilon > 0$ e $C(N,s)$ é constante de normalização

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(x)}{|x|^{N+2s}} dx \right)^{-1}.$$

Esta definição é consistente, até uma constante normalizada dependendo de N e s, com o operador Laplaciano fracionário linear $(-\Delta)^s$.

Para as motivações que levam ao estudo de tais operadores ver [18, 32, 43]. Devido ao caráter não local do operador, é natural trabalhar no espaço $W^s(\mathbb{R}^N)$ e expressar a condição de Dirichlet em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ ao invés de $\partial\Omega$. Definimos variacionalmente o Laplaciano fracionário como o operador não linear $(-\Delta)^s : X_0^s(\Omega) \to (X_0^s(\Omega))^*$, onde $(X_0^s(\Omega))^*$ o espaço dual de $X_0^s(\Omega)$, dado por:

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy,$$

para $u,v\in X_0^s(\Omega)$. Além disso,

$$\langle(-\Delta)^s u,u\rangle = \|u\|^2, \quad \forall u\in X_0^s(\Omega).$$

Baseado nas definições da seção anterior com essas do operador Laplaciano fracionário, podemos ver que para todo $u,v\in X_0^s(\Omega)$ temos

$$2C(N,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^s v(x)dx = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy. \tag{1.2}$$

Em particular, segue que o operador linear $(-\Delta)^s$ é auto-adjunto sobre $X_0^s(\Omega)$, Veja [32].

1.3 Problemas semi lineares

Esse operador nos leva ao estudo do problema semi-linear

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(x,u) & em \quad \Omega \\ u = 0 & em \quad \mathbb{R}^N\setminus\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde f é uma função de Carathéodory sobre $\Omega\times\mathbb{R}$ satisfazendo a condição de crescimento

$$|f(x,t)|\leq C(|t|^{r-1}+1) \quad \forall (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}, \tag{1.4}$$

para alguma constante $C>0$ e $r\in(1,2_s^*]$. Seja $J: X_0^s(\Omega)\to\mathbb{R}$ o funcional associado ao problema (1.3), dado por

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_\Omega F(x,u)dx,$$

para $u\in X_0^s(\Omega)$, onde $F(x,u)=\int_0^u f(x,t)dt$.

Definição 1.10. Dizemos que $u\in X_0^s(\Omega)$ é uma solução fraca de (1.3), se $J'(u)\phi=0$ para todo $\phi\in X_0^s(\Omega)$, ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \quad \forall\varphi\in X_0^s(\Omega).$$

O seguinte resultado mostra que as soluções fracas do problema (1.3) são limitadas em $L^\infty(\Omega)$ e a demonstração pode ser encontrada em [25].

Teorema 1.11. *Se f satisfaz a condição* (1.4) *e $u\in X_0^s(\Omega)$ é uma solução fraca da equação* (1.3)*, então $u\in L^\infty(\Omega)$.*

E também leva ao estudo do seguinte problema de valor de Dirichlet, com o Operador Laplaciano Fracionário:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u + f(x)u^p & em \quad \Omega \\ u = 0 & em \quad \mathbb{R}^N\setminus\Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde $p<p_s^*$.

O próximo lema fornece a compactação de $H_0^s(\Omega)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.12. *Se Ω é um domínio limitado com fronteira Lipschitz em $\mathbb{R}^N$ e $\{v_j\}$ é uma sequência limitada em $H_0^s(\Omega)$, então existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que,*

$$v_j \to v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } j \to +\infty.$$

O seguinte lema segue de [26, Teorema 3.2]

Lema 1.13. *Suponha que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory que satisfaz a condição de crescimento* (1.4)*, onde $c > 0$, $1 \leq q < 2_s^*$, e $u \in X_0^s(\Omega)$ é uma solução fraca da equação* (1.3)*. Então, $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Lema 1.14. *Seja Ω um domínio limitado $C^{1,1}$, u uma solução fraca de* (1.3)*, $f \in L^\infty(\Omega)$ e $d(x) = dist(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Então*

$$|u| \leq Cd^s \text{ em } \Omega,$$

onde C é uma constante dependendo de Ω, s e f.

Demonstração. Veja [18]. □

Observação 1.15. Seja u uma solução fraca de (1.3) e $f \in C^\gamma(\overline{\Omega})$. Se $\gamma + 2s$ não é inteiro, então obtemos que $u \in C_{loc}^{\gamma+2s}(\Omega)$. Consequentemente, por [41, Lema 4.3], temos que para qualquer $x_0 \in \Omega$, $(-\Delta)^s u \in C^\gamma(\overline{B_R}(x_0))$, onde $R = \frac{1}{2}d(x_0)$. Assim, isso significa que u é uma solução clássica e a Equação (1.3) é satisfeita pontualmente em Ω.

1.4 O Problema de Autovalor

Agora, discutimos alguns resultados conhecidos para o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde Ω é um conjunto aberto limitado mensurável em $\mathbb{R}^N$. Especificamente, se considerar o espaço de Hilbert

$$H_D^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^N) : u = 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de $(-\Delta)^s$ em Ω se existe uma função não trivial $u \in H_D^s(\Omega)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \lambda \int_\Omega u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_D^s(\Omega),$$

e, nesse caso, u é chamado de autofunção de $(-\Delta)^s$ em Ω correspondente à λ.

É padrão que a existência de um primeiro autovalor de $(-\Delta)^s$ em Ω, denotado por $\lambda_1(\Omega)$, está relacionado à atingibilidade do seguinte ínfimo

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in H_D^s(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.$$

Contudo, convenciona-se que este ínfimo $\lambda_1(\Omega) = \infty$, sempre que $H^s_D(\Omega) = \{0\}$. Por outro lado, ou seja, $H^s_D(\Omega) \neq \{0\}$, esse ínfimo é alcançado e assim, é o primeiro autovalor de $(-\Delta)^s$ em Ω.

Na verdade, o seguinte lema reúne as principais propriedades dos autovalores e autofunções de (1.6) no caso que $H^s_D(\Omega) \neq \{0\}$.

Lema 1.16. *Seja $s \in (0,1)$, $N > 2s$ e suponha que $H^s_D(\Omega) \neq \{0\}$. Então,*

1. *O problema* (1.6) *admite um autovalor $\lambda_1(\Omega)$ que é positivo e que pode ser caracterizado da seguintes forma*

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{u \in H^s_D(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \min_{u \in H^s_D(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx};$$

2. *Existe uma função não-negativa $\phi_1 \in H^s_D(\Omega)$, que é uma autofunção correspondente a $\lambda_1(\Omega)$, atingindo o mínimo no item 1., que é,*

$$\lambda_1(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\phi_1(x)-\phi_1(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy, \text{ com } \|\phi_1\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

3. *$\lambda_1(\Omega)$ é simples, isto é, se $u \in H^s_0(\Omega)$ é uma autofunção correspondente à $\lambda_1(\Omega)$, então $u = \alpha\phi_1$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.*

4. *O conjunto de autovalores do problema* (1.6) *consiste de uma sequência $\{\lambda_k(\Omega)\}_{k\in\mathbb{N}}$ com*

$$0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leq \cdots \leq \lambda_k(\Omega) \leq \lambda_{k+1}(\Omega) \leq \cdots$$

onde cada autovalor é repetido de acordo com sua multiplicidade finita e

$$\lambda_k(\Omega) \to +\infty \text{ quando } k \to +\infty.$$

Mais ainda, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ o autovalor pode ser caracterizado por

$$\lambda_{k+1}(\Omega) = \min_{u \in \mathbb{P}_{k+1}, \|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \min_{u \in \mathbb{P}_{k+1} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx},$$

onde

$$\mathbb{P}_{k+1} = \{u \in H^s_D(\Omega) : \langle u, \phi_j \rangle_{H^s_D(\Omega)} = 0, \forall j = 1, \cdots, k\}.$$

E para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $\phi_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$ é uma autofunção correspondendo à $\lambda_{k+1}(\Omega)$ com $\|\phi_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e

$$\lambda_{k+1}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\phi_{k+1}(x)-\phi_{k+1}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy;$$

5. *A sequência $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ das autofunções correspondentes à $\lambda_k(\Omega)$ são bases ortonormais de $L^2(\Omega)$ e base ortogonal de $H^s_D(\Omega)$.*

Demonstração. Veja, [47]. □

Observação 1.17. Note que se Ω é um domínio suave, então

$$H_D^s(\Omega) \equiv X_0^1(\Omega).$$

Observação 1.18. Do item 5. do lema acima, podemos deduzir que

$$\|u\|_{H_D^s(\Omega)} \leq \lambda_k(\Omega)\|u\|_2^2, \forall u \in span\{\phi_1, \cdots, \phi_k\}.$$

Lema 1.19. *Seja $u \in X_0^s(\Omega)$ uma autofunção de $(-\Delta)^s$ em Ω. Se $u = 0$ sobre o conjunto $E \subset \Omega$ de medida positiva, então $u = 0$ em Ω.*

1.5 Método de sub-super solução

Definição 1.20. Dizemos que $u \in X_0^s(\Omega)$ é uma supersolução (subsolução) fraca de (1.3) se $u \geq 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e satisfaz a seguinte desigualdade para todo $0 \leq v \in X_0^s(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \geq (\leq) \int_\Omega fvdx.$$

$u \in X_0^s(\Omega)$ é uma solução fraca da equação (1.3) se ao mesmo tempo é uma subsolução e uma supersolução fraca.

A partir de agora vamos denotar por $\overline{w} := \delta\overline{u}$.

Lema 1.21. *Suponha $0 \in X_0^s(\Omega)$ é uma subsolução enquanto $\overline{w} \in X_0^s(\Omega)$ é uma supersolução do problema* (1.3) *e assume que existem constantes $\overline{c} \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \overline{w} \leq \overline{c} < \infty$, quase sempre em Ω. Então existe uma solução fraca $u \in X_0^s(\Omega)$ de* (1.3)*, satisfazendo a condição $0 \leq u \leq \overline{w}$ quase sempre em Ω.*

Demonstração. Seja $M = \{u \in X_0^s(\Omega); 0 \leq u \leq \overline{w}\}$. Considere o conjunto

$$M_n = \left\{ u \in X_0^s(\Omega) : dist(u, M) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Podemos verificar que M_n é fechado e convexo, logo fracamente fechado, e J é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente sobre M_n com respeito a norma de X_0^s. Então, por [42, Theorem I.1.2] J admite minimo relativo $u_n \in M_n$ tal que

$$J(u_n) = \min_{M_n} J.$$

Seja $v_\varepsilon = \min\{\overline{w}, \max\{0, u_n + \varepsilon\varphi\}\} = u_n + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon \in M_n$, para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, onde

$$\varphi^\varepsilon = \max\{0, u_n + \varepsilon\varphi - \overline{w}\} \geq 0,$$

$$\varphi_\varepsilon = \max\{0, -u_n - \varepsilon\varphi\} \geq 0.$$

Note que $\varphi^\varepsilon, \varphi_\varepsilon \in X_0^s \cap L^\infty(\Omega)$, e J é diferenciável na direção $v_\varepsilon - u_n$. Como u_n é mínimo de J em M_n, temos

$$0 \leq J'(u_n)(v_\varepsilon - u_n) = J'(u_n)(\varepsilon\varphi) - J'(u_n)(\varphi^\varepsilon) + J'(u_n)(\varphi_\varepsilon)$$

Logo,

$$J'(u_n)\varphi \geq \frac{1}{\varepsilon}\left[J'(u_n)\varphi^\varepsilon - J'(u_n)\varphi_\varepsilon\right]$$

Agora, como $\overline{w}$ é uma supersolução, temos

$$\begin{aligned}
J'(u_n)\varphi^\varepsilon &= J'(\overline{w})\varphi^\varepsilon + J'(u_n)\varphi^\varepsilon - J'(\overline{w})\varphi^\varepsilon \\
&\geq J'(u_n)\varphi^\varepsilon - J'(\overline{w})\varphi^\varepsilon \\
&= \langle(-\Delta)^s(u_n - \overline{w}), u_n + \varepsilon\varphi - \overline{w}\rangle - \int_{\Omega^\varepsilon}[\lambda(u_n - \overline{w})(u_n + \varepsilon\varphi - \overline{w}) \\
&\quad - \int_{\Omega^\varepsilon} f(x)(g(u_n) - g(\overline{w}))(u_n + \varepsilon\varphi - \overline{w}) \\
&\geq \varepsilon\langle(-\Delta)^s(u_n - \overline{w}), \varphi\rangle - \lambda\varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon}|u_n - \overline{w}||\varphi|dx - \varepsilon\int_{\Omega^\varepsilon}|f(x)(g(u_n) - g(\overline{w}))||\varphi|dx
\end{aligned}$$

onde $\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega; u_n(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq \overline{w}(x) > u_n(x)\}$. Note que $\mathscr{L}^n(\Omega^\varepsilon) \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue, obtemos que

$$J'(u_n)\varphi^\varepsilon \geq o(\varepsilon)$$

onde $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Similarmente, concluímos que

$$J'(u_n)\varphi_\varepsilon \leq o(\varepsilon),$$

Assim,

$$J'(u_n)\varphi \geq 0$$

$\forall\varphi(\geq 0) \in C_0^\infty(\Omega)$. Invertendo o sinal de φ e como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $X_0^s(\Omega)$, podemos ver que

$$J'(u_n) = 0,$$

como queríamos. □

A seguir, apresentamos um resultado do Principio do Máximo Forte para $(-\Delta)^s$:

Teorema 1.22. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$. Seja $s \in (0,1)$ e $u \in X_0^s(\Omega)$ uma super solução fraca de* (1.3) *tal que $u \geq 0$ em Ω e suponha que $u \not\equiv 0$. Então $u > 0$ q.t.p. em Ω.*

Ver demonstração em [38, Teorema 1.2].
Seja $u \in X_0^s(\Omega)$ uma solução fraca do problema $(-\Delta)^s u = f(x, u^+)$, ou seja,

$$\langle(-\Delta)^s u, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x, u^+)\varphi dx, \text{ para toda } \varphi \in X_0^s(\Omega).$$

Como estamos em busca de soluções positivas, então consideremos uma solução fraca de $(-\Delta)^s u = f(x,u^+)$ e fazendo $\varphi = u^-$, provaremos que $u^- = 0$. De fato, desde que u é uma solução fraca, temos que

$$J'(u)u^- = \langle(-\Delta)^s u, u^-\rangle - \int_\Omega f(x,u^+)u^- dx = 0.$$

Assim, $\langle(-\Delta)^s u, u^-\rangle = 0$. Como

$$\langle(-\Delta)^s u, u^-\rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(u^-(x)-u^-(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(u(x)-u(y))(u^-(x)-u^-(y)) &= (u^+(x)-u^-(x)-u^+(y)+u^-(y))(u^-(x)-u^-(y)) \\
&= [(u^+(x)-u^+(y))-(u^-(x)+u^-(y))](u^-(x)-u^-(y)) \\
&= (u^+(x)-u^+(y))(u^-(x)-u^-(y))-(u^-(x)-u^-(y))^2,
\end{aligned}$$

integrando, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u^+(x)-u^+(y))(u^-(x)-u^-(y))}{|x-y|^{N+2s}} - \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u^-(x)-u^-(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = 0. \tag{1.7}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u^+(x)-u^+(y))(u^-(x)-u^-(y))}{|x-y|^{N+2s}} = -\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{u^+(x)u^-(y)+u^+(y)u^-(x)}{|x-y|^{N+2s}} := -C < 0,$$

segue que, $C \geq 0$. Por outro lado, de (1.7), temos que $-C - \|u^-\|^2 = 0$, logo

$$-C = \|u^-\|^2 \geq 0 \Rightarrow C \leq 0.$$

Portanto, $C = 0$. daí, $\|u^-\|^2 = 0$, e concluímos que $u^- = 0$.

CAPÍTULO 2

Soluções Positivas - Caso Subcrítico

2.1 Introdução

Nesse capítulo, vamos trabalhar com um problema subcrítico. Mais precisamente, vamos investigar soluções do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda u &= f(x)g(u), \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\;\; \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, λ é um parâmetro real, e $(-\Delta)^s$ é o operador Laplaciano fracionário.

Com relação a função g, assumiremos que g é uma função contínua e satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz

$$ug(u) \geq \theta G(u) > 0, \;\; \forall\, |u| \geq R, \tag{2.2}$$

para algum $\theta > 2$ e $R > 0$ onde $G(u) = \int_0^u g(\tau)d\tau$. Também suporemos que g tem crescimento subcrítico

$$|g(u)| \leq C|u|^{p-1} + C, \;\; \forall\, u \in \mathbb{R}, \;\; 2 < p < 2_s^*, \tag{2.3}$$

onde $2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$.

Na vizinhança da origem, suporemos que existe $2 < q \leq 2_s^*$ tal que

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(u)}{|u|^{q-2}u} = a > 0, a \text{ constante} \tag{2.4}$$

e

$$\int_\Omega f(x)\phi_1^q < 0, \tag{2.5}$$

Além disso, em todos os casos assumiremos que $f(x)$ é uma função contínua que muda de sinal, ou seja,

$$\Omega^+ := \{x \in \Omega : f(x) > 0\} \neq \emptyset \;\text{ e }\; \Omega^- := \{x \in \Omega : f(x) < 0\} \neq \emptyset. \tag{2.6}$$

O principal resultado é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Suponha* (2.2)-(2.3)-(2.4)-(2.5)-(2.6) *com* $2 < p, q < 2_s^*$. *Além disso, suponha que*

$$\overline{\Omega^+} \cap \overline{\Omega^-} = \emptyset, \tag{2.7}$$

ou

$$|g(u)u - pG(u)| \leq C|u|^2 + C. \tag{2.8}$$

Então existe $\lambda^* > \lambda_1$ *tal que*

(a) Para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$, (2.1) *admite ao menos duas soluções positivas.*

(b) Para $\lambda = \lambda_1$ *ou* $\lambda = \lambda^*$, *o problema* (2.1) *admite ao menos uma solução positiva.*

(c) Para $\lambda > \lambda^*$ *o problema* (2.1) *não admite nenhuma solução positiva.*

Nossos resultados são motivados pelos artigos [2, 18, 22, 23, 43] e outras referências citadas. Primeiro, provamos o resultado de existência de soluções como em [2]. Para isso, usamos o método de sub-super solução com o Teorema do Passo da Montanha para obter o resultado de multiplicidade. Considere o funcional $J_\lambda : X_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega f(x)G(u)dx, \quad u \in X_0^s(\Omega),$$

onde $G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Então

$$J'_\lambda(u)\phi = \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - \lambda\int_\Omega u^+\phi dx - \int_\Omega f(x)g(u)\phi(x)dx. \tag{2.9}$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. E assim, u é uma solução fraca de (2.1) se, e somente se, u é um ponto crítico do funcional J_λ.

2.2 Condição (PS)

Em geral, obter a condição (PS) para funcionais subcríticos se resume a provar que a sequência (PS) é limitada. Quando o problema é indefinido precisa-se ir além da limitação da sequência. Abaixo combinamos argumentos encontrados em [2, 16, 30], com alguns detalhes diferentes.

Definamos $\Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\Omega^+ \cap \Omega^-}$ e

$$X_D^s(\Omega_0) := \{u \in X^s(\Omega);\ u = 0 \ \text{ a.e. in } \Omega \setminus \Omega_0\},$$

e considere

$$\lambda_1(\Omega_0) = \inf_{u \in X_D^1(\Omega_0)} \left\{||u||^2 :\ |u|_2 = 1\right\}.$$

Denote por $\sigma(\Omega_0)$ a coleção de autovalores de $(-\Delta)^s$ em $H_D^s(\Omega)$. No caso de $\Omega_0 = \emptyset$, então tome $\sigma(\Omega_0) = \emptyset$.

Lema 2.2. *Suponha que* $\lambda \notin \sigma(\Omega_0)$ *e* g *satisfaz* (2.3) *com* $2 < p < 2_s^*$ *e* (2.4) *se verifica. Então* J_λ *satisfaz a condição (PS) se for válido* (2.8).

Demonstração. Considere uma sequência $\{u_n\} \in H_D^s(\Omega)$ para qual

$$J_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}(\|u_n\|^2 - \lambda\|u_n\|_2^2) - \int_\Omega f(x)G(u_n) \leq c \tag{2.10}$$

e

$$J'_\lambda(u_n)\varphi = \langle(-\Delta)^s u_n, \varphi\rangle - \int_\Omega \lambda u_n\varphi - \int_\Omega f(x)g(u_n)\varphi = o(1). \tag{2.11}$$

Note que pela condição de crescimento subcrítico, é suficiente mostrar que a sequência u_n é limitada em $H_D^s(\Omega)$. Suponhamos por contradição que $\|u_n\| \to \infty$. Seja $v_n = u_n/\|u_n\|$, podemos assumir que

$$\begin{aligned}
&v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H_D^s(\Omega),\\
&v_n \to v_0 \text{ em } L^\sigma(\Omega), \quad 2 \leq \sigma < 2_s^*,\\
&v_n(x) \to v_0(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.
\end{aligned}$$

O passo crucial da prova é o seguinte:

Afirmação 2.2.1. $v_0 \not\equiv 0$ em Ω.

Assumindo a afirmação por um momento, considere $\phi \in C_0^1(\Omega)$, então

$$J'_\lambda(u_n)(u_n\phi) = \langle(-\Delta)^s u_n, u_n\phi\rangle - \int_\Omega \lambda u_n^2\phi - \int_\Omega f(x)g(u_n)u_n\phi = o(1)||u_n||.$$

Seja β tal que $2 < \beta < \theta$, (θ como em (2.2), in particular $\theta \leq p$), e dividindo a expressão acima por $||u_n||^\beta$, obtemos que

$$\frac{1}{\|u_n\|^\beta}\int_\Omega f(x)g(u_n)u_n\phi = o(1). \tag{2.12}$$

Agora, como uma consequência da condição (2.2), temos que

$$g(u) \geq C|u|^{\theta-1} - C, \ \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

Usando a desigualdade acima em (2.12), obtemos

$$\frac{1}{\|u_n\|^\beta}\int_\Omega f(x)|u_n|^\theta\phi \leq o(1), \ \forall\, \phi \in C_0^1(\Omega_+), \ \phi \geq 0, \tag{2.13}$$

ou seja

$$\|u_n\|^{\theta-\beta}\int_\Omega f(x)|v_n|^\theta\phi \leq o(1), \ \forall\, \phi \in C_0^1(\Omega_+), \ \phi \geq 0. \tag{2.14}$$

Segue que

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)|v_n|^\theta\phi = \int_\Omega f(x)|v_0|^\theta\phi, \ \ \forall\, \phi \in C_0^1(\Omega_+), \ \phi \geq 0.$$

Logo $v_0 = 0$ em Ω_+. De maneira similar podemos concluir que

$$\int_\Omega f(x)|v_0|^\theta\phi = 0, \ \ \forall\, \phi \in C_0^1(\Omega_-), \ \phi \leq 0,$$

daí $v_0 = 0$ em Ω_-. Portanto $v_0 \in H^s_D(\Omega^0)$.

Agora, para $\phi \in H^s_D(\Omega_0)$ como função teste em (2.11), segue que

$$\langle (-\Delta)^s u_n, \varphi \rangle - \int_\Omega \lambda u_n \varphi = o(1). \tag{2.15}$$

Dividindo a expressão acima por $||u_n||$ e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\langle (-\Delta)^s v_0, \varphi \rangle - \int_\Omega \lambda v_0 \varphi = 0, \ \ \forall\, \phi \in H^1_D(\Omega_0).$$

Temos uma contradição, pois por hipótese $\lambda \notin \sigma(\Omega^0)$. Segue que $\|u_n\|$ é limitado e o lema segue. Resta apenas provar a afirmação. Para este fim, argumentamos novamente por contradição e suponhamos que $v_0 = 0$.

Considere primeiro o caso em que (2.7) seja verdadeiro, segue que existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $0 \leq \psi(x) = 1$ para todo $x \in \Omega^-$ e $\psi(x) = 0$ para todo $x \in \Omega^+$. Seja $\varphi = \psi v_n \in H^s_D(\Omega)$ e aplique (2.11) novamente obtemos

$$\langle (-\Delta)^s v_n, \varphi \rangle - \int_{\Omega^-} f(x) \frac{g(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = o(1). \tag{2.16}$$

Note que, por (2.2), $f(x)g(u_n)u_n \leq 0$ em Ω_- para $|u_n| \geq R$. Portanto (2.16) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega^-} f(x) \frac{g(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 0. \tag{2.17}$$

Por outro lado, combinando (2.10) e (2.11), temos

$$J_\lambda(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_\lambda(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)(||u_n||^2 - \lambda |u_n|_2^2) + \int_\Omega f(x)\left(\frac{1}{\theta} g(u_n)u_n - G(u_n)\right) \tag{2.18}$$

Agora, por (2.2), temos que

$$\int_{\Omega^+} f(x)\left(\frac{1}{\theta} g(u_n)u_n - G(u_n)\right) - \int_{\Omega^-} f(x)G(u_n) \geq -C, \tag{2.19}$$

para alguma constante $C > 0$. Dividindo (2.18) por $||u_n||^2$, usando (2.17) e (2.19), obtemos

$$o(1) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\lambda |v_n|_2^2 + o(1),$$

o que é uma contradição, desde que $v_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$.

Finalmente, assuma que vale a condição (2.8). Usando $\phi = u_n$ em (2.11) e combinando com (2.10), obtemos

$$\int_\Omega f(x)\left[\frac{1}{2} g(u_n)u_n - G(u_n)\right] \leq c + o(1)||u_n||. \tag{2.20}$$

Usando (2.8) e (2.20), obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_\Omega f(x)g(u_n)u_n \leq c + C|u_n|_2^2 + o(1)||u_n||. \tag{2.21}$$

Vamos assumir por contradição que $v_n \rightharpoonup 0$. Dividindo (2.21) por $\|u_n\|^2$ e passando o limite, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)\frac{g(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 0. \tag{2.22}$$

Agora, se usarmos (2.11) com $\varphi = u_n/||u_n||^2$, obtemos

$$1-\lambda\int v_n^2 - \int_\Omega f(x)\frac{g(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = o(1), \tag{2.23}$$

uma contradição, logo a afirmação está provada. □

2.3 Existência de Solução

2.3.1 Existência de soluções $\lambda = \lambda_1$

Vamos considerar o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda_1 u &= f(x)g(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N\setminus\Omega, \end{cases} \tag{2.24}$$

Assumiremos que g é estendida como uma função ímpar para $u<0$ e seja

$$G(u) = \int_0^u g(\zeta)d\zeta.$$

Note que $G(u) = G(|u|)$. Buscamos pontos críticos para o funcional

$$J_{\lambda_1}(u) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 - \lambda_1\|u\|_2^2) - \int_\Omega f(x)G(u), \qquad u\in H_D^s(\Omega). \tag{2.25}$$

Vamos agora impor algumas condições para que as técnicas variacionais sejam utilizadas.

Lema 2.3. *Suponha que* (2.3), (2.4) *e* (2.5) *são satisfeitas com* $2 < p,q \le 2_s^*$, *então* $u_0 = 0$ *é minimo estrito local para o funcional* J_{λ_1}.

Demonstração. Seja

$$A = -\int_\Omega f(x)\phi_1^q > 0$$

por (2.5). Decomponha $u\in H_D^s(\Omega)$ como $u = t\phi_1 + v$ para $t\in\mathbb{R}$ e $\int v\phi_1 = 0$. Suponha que $\|u\| < \frac{1}{10}\|\phi_1\|_\infty$. Então, $|t| \le \frac{1}{10\|\phi_1\|_\infty}$. Agora

$$\begin{aligned} J_{\lambda_1}(u) &= \frac{1}{2}(\|v\|^2 - \lambda_1\|v\|_2^2) - \int_\Omega f(x)G(t\phi_1+v) \\ &\ge \frac{1}{2}(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2})\|v\|^2 - |t|^q\int_\Omega f(x)\phi_1^q + R(t,v) \\ &= \frac{1}{2}(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2})\|v\|^2 + A|t|^q + R(t,v), \end{aligned}$$

onde o termo R é

$$\begin{aligned} R(t,v) &= \int_\Omega f(x)[|at\phi_1|^q - G(t\phi_1)] + \int_\Omega f(x)[G(t\phi_1) - G(t\phi_1+v)] \\ &= \int_\Omega f(x)[G(t\phi_1) - G(t\phi_1+v)] + o(|t|^q) \end{aligned} \tag{2.26}$$

usando (2.3). E para estimar os termos restantes de (2.26), temos pelo Teorema do Valor Médio para cada $v(x), t, x$ um número $\theta = \theta(v,t,x)$ com $0 \le \theta \le 1$ tal que

$$G(t\phi_1(x)) - G(t\phi_1(x) + v(x)) = g(t\phi_1(x) + \theta v(x))v(x). \tag{2.27}$$

Juntando (2.3), (2.4), segue que g satisfaz

$$|g(u)| \le \begin{cases} C|u|^{q-1}, & \text{se } |u| \le 1 \\ C|u|^{p-1}, & \text{se } |u| \ge 1 \end{cases} \tag{2.28}$$

para alguma constante $C > 0$. Fixando $v(x), t$ por enquanto, temos dois casos. Primeiro se x é tal que $|u(x)| = |t\phi_1(x) + \theta v(x)| \ge 1$, temos (reescalando $|t| \le \frac{1}{10\|\phi_1\|_\infty}$) que $|\theta v(x)| \ge 9|t|\phi_1$, assim aplicando (2.28) temos

$$\begin{aligned} |g(t\phi_1(x) + \theta v(x))v(x)| &\le C||t|\phi_1(x) + \theta|v(x)||^{p-1} \cdot |v(x)| \\ &\le \frac{10}{9} C|v(x)|^p. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Por outro lado, se x é tal que $|u(x)| = |t\phi_1(x) + \theta v(x)| \le 1$, então seja $0 < \varepsilon < \frac{A}{2}$ e aplique (2.28) novamente para obter

$$\begin{aligned} |f(x)|(g(t\phi_1(x)) + \theta v(x))v(x)| &\le C|t\phi_1(x) + \theta|v(x)||^{q-1} \cdot |v(x)| \\ &\le C[|t\phi_1|^{q-1} + |v(x)|^{q-1}]|v(x)| \\ &\le \varepsilon|t\phi_1|^q + C_\varepsilon|v(x)|^q. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Conectando (2.27), (2.29) e (2.30) em (2.26) (e usando $2 < p, q \le 2_s^*$), temos

$$J_{\lambda_1}(u) \ge \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2})\|v\|^2 + 2A|t|^q + o(t^q) + O(\|v\|^p) + O(\|v\|^q).$$

Como $p, q > 2$, terminamos. □

Note que para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega^+)$ podemos ver que

$$J_{\lambda_1}(s\varphi) \to \infty \qquad \text{quando} \qquad s \to \infty$$

Portanto, como J_{λ_1} satisfaz a condição (PS), podemos resolver (2.24) como uma aplicação teorema do passo da montanha.

Teorema 2.4. *Assuma que* (2.3)*,* (2.4) *e* (2.5) *se verifiquem com* $2 < p, q < 2_s^*$*. Então existe uma solução positiva para* (2.24).

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} c &= \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\le t\le 1} J_{\lambda_1}(\gamma(t)) > 0 \\ \Gamma &= \{\gamma\in C([0,1];H_D^s(\Omega)) : \gamma(0)=0, J_{\lambda_1}(\gamma(1))<0\} \end{aligned}$$

define um valor crítico para J_{λ_1}. A positividade para pelo menos um dos pontos críticos correspondentes (não triviais) segue que se $\gamma\in\Gamma$ então $|\gamma|\in\Gamma$ e

$$J_{\lambda_1}(\gamma(t)) = J_{\lambda_1}(|\gamma(t)|) \quad \text{para todo } t\in[0,1].$$

Portanto, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $\gamma_n\in\Gamma$ com $\gamma_n(t)\ge 0$ (q.t.p. em Ω) para todo $t\in[0,1]$, tal que

$$c \le \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda_1}(\gamma(t)) < c+\frac{1}{n}.$$

Consequentemente, pelo Princípio de Ekeland, encontramos $\gamma_n^*\in\Gamma$ com as seguintes propriedades:

i) $c\le \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda_1}(\gamma_n^*(t)) \le \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda_1}(\gamma_n(t)) < c+\frac{1}{n}$;

ii) $\max_{t\in[0,1]} \|\gamma_n(t)-\gamma_n^*(t)\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$;

iii) existe $t_n\in[0,1]$ tal que $v_n=\gamma_n^*(t_n)$ satisfaz

  a) $J_{\lambda_1}(v_n) = \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda_1}(\gamma_n^*(t))$ e $\|J'_{\lambda_1}(v_n)\|\le \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Tomando uma subsequência encontramos $v\in H_D^s(\Omega)$ com $v_n\to v$ quando $n\to\infty$ em $H_D^s(\Omega)$. Por outro lado, pelas propriedades acima também temos que $\gamma_n(t)\to v$ quando $n\to\infty$ em $H_D^s(\Omega)$, e como $\gamma_n(t)\ge 0$(q.t.p. em Ω) concluímos que $v\ge 0$ (q.t.p. em Ω). Como $v\ne 0$ é uma solução de (2.24) o Princípio do Máximo Forte por sua vez implica que $v>0$ em Ω. □

2.3.2 Existência de soluções $\lambda > \lambda_1$

Nessa seção estudaremos a solução positiva do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda u &= f(x)g(u) \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N\setminus\Omega, \end{cases} \tag{2.31}$$

Utilizaremos agora uma técnica de sub e supersolução.

Lema 2.5. *Suponha que existam constantes $\eta, C>0$ e $q>2$ tal que*

$$0\le g(u)\le Cu^{q-1}$$

para todo $0\le u\le\eta$. Então para todo t que satisfaz

$$0<t<\left(\frac{\lambda-\lambda_1}{\|f^-\|_\infty\|\phi_1\|_\infty^{q-2}}\right)^{\frac{1}{q-2}} \tag{2.32}$$

a função $\underline{u}=t\phi_1$ é uma subsolução para (2.31), $\lambda>\lambda_1$.

Demonstração. Seja $t > 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\varphi(x) \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned} t\langle(-\Delta)^s\phi_1, \varphi\rangle - \lambda t \int_\Omega \phi_1\varphi - \int_\Omega f(x)g(t\phi_1)\varphi &= -(\lambda-\lambda_1)t\int_\Omega \phi\varphi - \int_\Omega f(x)g(t\phi_1)\varphi \\ &\leq \int_\Omega f^-(x)g(t\phi_1)\varphi - (\lambda-\lambda_1)t\int_\Omega \phi_1\varphi \\ &\leq [\|f^-\|_\infty \|\phi_1\|_\infty^{q-2}t^{q-2} - (\lambda-\lambda_1)]t\int_\Omega \phi_1\varphi < 0 \end{aligned}$$

e assim temos que $t\phi_1$ é uma subsolução quando (2.32) se verifica. □

O próximo resultado nós dá que as soluções positivas de (2.31) com $\lambda > \lambda_1$ não existe para λ muito grande.

Lema 2.6. *Existe* $\overline{\lambda} > \lambda_1$ *tal que* (2.31) *não admite solução positiva para qualquer* $\lambda \geq \overline{\lambda}$.

Demonstração. De fato, é suficiente tomar $\overline{\lambda} = \lambda_1(\Omega^*)$ onde $\Omega^* \subset \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$ é um conjunto aberto com fronteira suave $\partial\Omega^*$. Assim, se $\varphi > 0$ é a primeiro autofunção do Laplaciano de Dirichlet sobre Ω^*, Seja u uma solução positiva do problema (2.1) para $\lambda > \lambda_1$. Sejam $x_0 \in \Omega^+$ e $r > 0$ tais que $B = B(x_0, r) \subset \Omega^+$. Pela desigualdade de Picone 5.6, temos que

$$\langle(-\Delta)^s u, \frac{\varphi^2}{u}\rangle \leq \|\varphi\|^2,$$

usando (2.1), segue que

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}\int_B \varphi^2 &\geq \lambda\int_B u\frac{\varphi^2}{u} + \int_B f(x)g(u)\frac{\varphi^2}{u} \\ &= \lambda\int_B \varphi^2 + \int_B f(x)g(u)\frac{\varphi^2}{u} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_B f(x)g(u)\frac{\varphi^2}{u} &\leq (\overline{\lambda}-\lambda)\int_B \varphi^2 \\ &\leq (\overline{\lambda}-\lambda)\left(\int_B 1^r\right)^{1/r}\left(\int_B |\varphi^2|^{r'}\right)^{1/r'} \\ &\leq (\overline{\lambda}-\lambda)|\Omega^*|\left(\int_B |\varphi^2|^{r'}\right)^{1/r'} \\ &\leq (\overline{\lambda}-\lambda)C\left(\int_B |\varphi^2|^{r'}\right)^{1/r'} \end{aligned}$$

Como $f(x) \geq 0$ em B, $\varphi > 0$ e $u > 0$ então $\overline{\lambda} \geq \lambda$ o que contradiz a escolha de λ. Portanto, não existe soluções positivas do problema (2.1) para λ suficientemente grande. □

Defina

$$\Lambda = \{\lambda \geq \lambda_1 : (2.31) \text{ admite solução positiva}\} \qquad \text{e} \qquad \lambda^* = \sup\Lambda. \tag{2.33}$$

Lema 2.7. *Suponha que* $g \in C^1(\mathbb{R})$ *e existam* p, q *tais que* (2.4) *e* (2.5) *sejam válidos com* $2 < p, q \leq 2_s^*$. *Então* $\lambda^* > \lambda_1$.

Demonstração. Usaremos a teoria da bifurcação para mostrar que (2.31) admite soluções positivas para $\lambda > \lambda_1$ próximo de λ_1. Para isso, defina $L : C_0^{2,\beta}(\Omega) \times \mathbb{R} \to C^{0,\beta}(\Omega)$ por

$$L(u,\lambda) = (-\Delta)^s u - \lambda u - f(x)g(u).$$

De (2.4), $g(0) = 0$, e assim $L(0,\lambda) = 0$ para todo λ. Mais ainda, (2.4) implica que $g'(0) = 0$, e assim, $L_u(0,\lambda_1)v = (-\Delta)^s v - \lambda_1 v$. Portanto,

$$\begin{aligned} N(L_u(0,\lambda_1)) &= \operatorname{span}\{\phi_1\}, \\ \operatorname{codim} R(L_u(0,\lambda_1)) &= 1, \\ L_{\lambda,u}(0,\lambda_1)\phi_1 &= -\phi_1 \notin R(L_u(0,\lambda_1)). \end{aligned}$$

Consequentemente, $(0,\lambda_1)$ é um ponto de bifurcação para L. Então, se decompormos

$$C_0^{2,\beta}(\Omega) = span\{\phi_1\} \oplus Z$$

onde $Z = span\{\phi_1\}^{\perp}$, então pelo teoria da bifurcação obtemos uma vizinhança U de $(0,\lambda_1)$ em $C_0^{2,\beta}(\Omega) \times \mathbb{R}$, funções contínuas $\varphi : (-a,a) \to \mathbb{R}$, $\psi : (-a,a) \to Z$ com $\varphi(0) = \lambda_1$, $\psi(0) = 0$ e

$$L^{-1}(\{0\}) \cap U = \{(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha), \varphi(\alpha)) : \alpha \in (-a,a)\} \cup \{(0,\lambda) : (0,\lambda) \in U\}.$$

Seja $u_\alpha = \alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha)$. Note que em particular, $\psi(\alpha) \to 0$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ quando $\alpha \to 0$, o que garante que $u_\alpha > 0$ em Ω para todo α suficientemente pequeno.

Mostremos agora que $\varphi(\alpha) > \lambda_1$ para todo α positivo suficientemente pequeno. Para tanto, observe que

$$\frac{1}{\alpha^{q-1}} \int_\Omega f(x)g(u_\alpha)\phi_1 \overset{\alpha \to 0}{\to} a \int_\Omega f(x)\phi_1^q.$$

Na verdade, quando $\psi(\alpha) \to 0$ uniformemente quando $\alpha \to 0$, (2.4) garante

$$\frac{g(\alpha\phi_1(x) + \alpha\psi(\alpha)(x))}{\alpha^{q-1}[\alpha\phi_1(x) + \alpha\psi(\alpha)(x)]^{q-1}} \overset{\alpha \to 0}{\to} a$$

uniformemente em Ω, e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^{q-1}} \int_\Omega f(x)g(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))\phi_1 &= \int_\Omega f(x)\frac{g(\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha))}{\alpha^{q-1}[\alpha\phi_1 + \alpha\psi(\alpha)]^{q-1}}(\phi_1 + \psi(\alpha))^{q-1}\phi_1 \\ &\overset{\alpha \to 0}{\to} a \int_\Omega f(x)\phi_1^q. \end{aligned}$$

O resultado que buscamos $\varphi(\alpha) > \lambda_1$ agora segue por argumento de contradição. Na verdade suponha que exista uma sequência de $\alpha_n \to 0^+$ com $\varphi(\alpha_n) \leq \lambda_1$. Denote $u_n = u_{\alpha_n}$, que são soluções positivas para (2.31). Temos,

$$0 \leq \frac{(\lambda_1 - \varphi(\alpha_n))}{\alpha_n^{q-1}} \int_\Omega u_n\phi_1 = \int_\Omega f(x)\frac{g(u_n)\phi_1}{\alpha_n^{q-1}} \overset{\alpha \to 0}{\to} \int_\Omega f(x)\phi_1^q < 0$$

vemos que é impossível. □

2.3.3 Multiplicidade de soluções $\lambda > \lambda_1$

A partir de agora vamos fazer a demonstração dos próximos resultados de forma diferente.

Proposição 2.8. *Se $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$ e $\int_\Omega f(x)\phi_1^q < 0$, então o problema* (2.1) *têm ao menos uma solução não trivial.*

Demonstração. Tome $\lambda < \lambda^*$ e $\overline{\lambda} > \lambda$ com $\overline{\lambda} \in \Lambda$. Seja $\overline{u}$ uma solução positiva de (2.1) com respeito à $\overline{\lambda}$. Então,

$$(-\Delta)^s \overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u} + f(x)g(\overline{u}) \geq \lambda \overline{u} + f(x)g(\overline{u})$$

de modo que $\overline{u}$ é uma supersolução de (2.1) com respeito a λ. Agora considere,

$$M = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}.$$

Seja $u_\lambda \in M$ tal que $J_\lambda(u_\lambda) = \inf_M J_\lambda$, então do Lema 1.21 segue que u_λ é uma solução de (2.1).

Além disso, podemos escolher $\underline{u}$, tal que $J_\lambda(\underline{u}) < 0$, de fato

$$J_\lambda(t\phi_1) = -\int_\Omega f(x)G(t\phi)dx < 0$$

se $t > 0$ suficientemente pequeno (como no final da prova do Lema 2.7) . Em particular, $J_\lambda(u_\lambda) < 0$. $\square$

Proposição 2.9. *J_λ têm um mínimo local para todo $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$.*

Demonstração. Agora vamos provar que a solução da proposição 2.8 é um minimo local de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Defina $\overline{u}$ e $\overline{\lambda}$ como anteriormente. Temos que, $u_\lambda \leq \overline{u}$ quase sempre em Ω. Seja, $\lambda' = (\lambda + \overline{\lambda})/2$ e $\delta > 1$ tal que

$$(\delta^{q-2} - 1)f(x)g(\overline{u}) < \overline{\lambda} - \lambda'.$$

Portanto, multiplicando a desigualdade acima por $\delta\overline{u}$, obtemos

$$(-\Delta)^s(\delta\overline{u}) = \delta\overline{\lambda}\overline{u} + \delta f(x)g(\overline{u}) \geq \delta\lambda'\overline{u} + \delta^{q-1}f(x)g(\overline{u})$$

Assim, $\delta\overline{u}$ é uma supersolução para (2.1) e mais, $u_\lambda < \delta\overline{u}$ q.t.p em Ω. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$J_\lambda(u_\lambda) = \min\{J_\lambda(u) : \underline{u} \leq u(x) \leq \delta\overline{u}(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}$$

Segue pelo Lema 5.7 (do Apêndice) que u_λ é um mínimo local de J_λ em $W_0^{1,2}$. $\square$

Prova do Teorema 2.1. **(a)** Pela proposição 2.9 garantimos que o funcional J_λ possui um mínimo local. Procuramos uma solução para (2.1) da forma $w = u_\lambda + v$ com $v > 0$. Isso equivale a encontrar um ponto crítico para o funcional,

$$\overline{J}_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (v_+)^2 dx - \int_\Omega H_\lambda(x, v_+) dx$$

onde $v_+(x) = \max[v(x), 0]$ e

$$\begin{aligned} H_\lambda(x,\eta) &= \int_0^\eta f(x)[g(u_\lambda(x)+v) - g(u_\lambda(x))]dv \\ &= f(x)[G(u_\lambda(x)+\eta) - G(u_\lambda(x)) - g(u_\lambda(x))\eta]. \end{aligned}$$

Note que $v = 0$ é um minimo local de $\overline{J}_\lambda$ em $H_D^s(\Omega)$, pois, $\overline{J}_\lambda(v) \geq c_0 > 0 (= \overline{J}_\lambda(0))$ para $\|v\|_{H_D^s(\Omega)} = r$, com $r > 0$ suficientemente pequeno.

Por outro lado, seja $v_0 \in C_0^\infty(\Omega^+)$, $v_0 \geq 0$, e

$$\overline{J}_\lambda(tv_0) = \frac{t^2}{2}(\|v_0\|^2 - \lambda\|v_0\|_2^2) - \int_\Omega H_\lambda(x, tv_0). \tag{2.34}$$

Para t positivo suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2}\int_\Omega H_\lambda(x,tv_0) &= \int_\Omega f(x)\frac{G(u_\lambda + tv_0)}{t^2} + o(1) \\ &= t^{p-2}\int_\Omega f^+(x)\frac{G(t[v_0 + (u_\lambda/t)])}{t^p} + \int_\Omega f^-(x)\frac{G(u_\lambda(x))}{t^2} + o(1) \qquad (2.35) \\ &= \frac{t^{p-2}}{p}\int_\Omega f^+(x)v_0^p + o(t^{p-2}) \end{aligned}$$

via (2.3), (2.4) e o teorema da convergência dominada. Juntando (2.34) e (2.35), temos

$$\overline{J}_\lambda(tv_0) = -\frac{t^p}{p}\int_\Omega f^+(x)v_0^p + o(t^p) \to -\infty$$

quando $t \to \infty$.

Finalmente, se v_n é uma sequência $(P.S.)_c$ para $\overline{J}_\lambda$, então segue que $u_\lambda + v_n$ é uma sequência $(P.S.)_{c+J_\lambda(u_\lambda)}$ para J_λ. Assim, $\overline{J}_\lambda$ satisfaz a condição (P.S.) desde que J_λ satisfaça a condição (P.S.) se $\lambda < \lambda^*$. Dessa forma, podemos aplicar o teorema do passo da montanha para garantir que $\overline{J}_\lambda$ tenha um ponto crítico não trivial e, consequentemente, (2.1) tenha uma segunda solução positiva.

(b) A existência de uma solução positiva para $\lambda = \lambda_1$ já foi provada no Teorema 2.4. Para o caso $\lambda = \lambda^*$, escolha uma sequência $\lambda_n \nearrow \lambda^*$ e construa uma sequência de soluções u_n para (2.31) via proposição 2.9, com subsolução $u_- = t_n\phi_1$ e supersolução u_μ com $\lambda_n < \mu_n < \lambda^*$. Usando como função teste a subsolução $u_- = t_n\phi_1$ para $t_n > 0$, escolhido suficientemente pequeno, temos

$$J_{\lambda_n}(u_n) \leq J_{\lambda_n}(t_n\phi_1) < 0$$

e assim,

$$J_{\lambda^*}(u_n) \leq 0. \tag{2.36}$$

Além disso, temos

$$(J'_{\lambda^*}(u_n), \varphi) = (J'_{\lambda_n}(u_n), \varphi) - (\lambda^* - \lambda_n)\int_\Omega u_n\varphi = -(\lambda^* - \lambda_n)\int_\Omega u_n\varphi. \tag{2.37}$$

Novamente, u_n é quase uma sequência de Palais-Smale para J_{λ^*}, no sentido de que as condições (2.36) e (2.37) são suficientes para seguir o argumento do Lema 2.2 e obter uma subsequência convergente cujo limite u_{λ^*} é solução de (2.31) com $u_{\lambda^*} > u_\lambda$ para cada $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda^*$.
(c) Este é apenas o Lema 2.6 e a definição (2.33). $\square$

CAPÍTULO 3

Soluções Positivas - Caso Crítico

3.1 Introdução

Nesse capítulo vamos trabalhar com o problema crítico, que inclui a não linearidade com crescimento crítico. Mais precisamente, vamos investigar as soluções do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda u &= f(x)|u(x)|^{2_s^*-2}u(x), \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, f é uma função contínua que muda de sinal em Ω, e $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, $\delta > 0$, $N > 2s$, $s \in (0,1)$, onde $2_s^* = \frac{2N}{N-2s}$.

Considere o funcional $J_\lambda : X^s(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx, \quad u \in X^s(\Omega).$$

Então

$$J'_\lambda(u)\phi \;=\; \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \,-\, \lambda\int_\Omega u\phi dx \,-\, \int_\Omega f(x)|u(x)|^{2_s^*-2}u(x)\phi(x)dx. \tag{3.2}$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. E assim, u é uma solução fraca de (3.1) se, e somente se, u é um ponto crítico do funcional J_λ.

O principal resultado é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.1. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N > 2s$, $s \in (0,1)$. Existe uma constante $\lambda^* > \lambda_1$ tal que* (3.1) *admite ao menos duas soluções se, e somente se,*

$$\int_\Omega f(x)|\phi_1|^{2_s^*} < 0. \tag{3.3}$$

$\lambda \in (\lambda_1, \lambda^*)$ e $f(\varepsilon x) - f(0) = o(\varepsilon^2)$, onde $\|f\|_\infty = f(0) = 1$.

Nossos resultados são motivados pelos artigos [2, 18, 43] e outras referências citadas. Primeiro, provamos o resultado de existência de soluções como em [2]. Logo, usamos o método de sub-super solução com o Teorema do Passo da Montanha para obter resultados de multiplicidade.

3.2 Resultado principal

Seja o funcional energia

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx, \quad u \in X^s(\Omega).$$

Defina $\Lambda = \{\lambda : (3.1)$ tem uma solução não trivial $\}$, e $\lambda^* = \sup\Lambda$. Segue que, $\lambda^* > \lambda_1$ e $\Lambda \neq \emptyset$. Além disso, sabemos que $\lambda^* \leq \lambda_1(\Omega \setminus \overline{\Omega^-})$, veja o início da prova do Lema 3.5.

A prova será dividida em várias etapas.

3.2.1 Existência de soluções

Proposição 3.2. *Se* $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$ *e* $\int_\Omega f(x)|\phi_1|^{2_s^*} < 0$*, então o problema* (3.1) *têm ao menos uma solução não trivial.*

Demonstração. Tome $\lambda < \lambda^*$ e $\overline{\lambda} > \lambda$ com $\overline{\lambda} \in \Lambda$. Seja $\overline{u}$ uma solução não trivial de (3.1) com respeito à $\overline{\lambda}$. Então,

$$(-\Delta)^s\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u} + f(x)\overline{u}^{2_s^*-1} \geq \lambda\overline{u} + f(x)\overline{u}^{2_s^*-1}$$

de modo que $\overline{u}$ é uma supersolução de (3.1) com respeito à λ. Agora considere,

$$M = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\}.$$

Seja $u_\lambda \in M$ tal que $J_\lambda(u_\lambda) = \inf_M J_\lambda$, então do Lema 1.21 segue que u_λ é uma solução de (3.1). Alem disso podemos escolher $\underline{u}$ com $J_\lambda(\overline{u}) < 0$, ou seja, podemos assumir que $J_\lambda(u_\lambda) < 0$. □

3.2.2 Existência de um mínimo local

Proposição 3.3. J_λ *têm um mínimo local para todo* $\lambda_1 < \lambda < \lambda^*$.

Demonstração. Agora vamos provar que a solução da proposição 3.2 é um minimo local de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Defina $\overline{u}$ e $\overline{\lambda}$ como anteriormente. Temos que, $u_\lambda \leq \overline{u}$ quase sempre em Ω. Seja, $\lambda' = (\lambda + \overline{\lambda})/2$ e $\delta > 1$ tal que

$$(\delta^{2_s^*-2} - 1)f(x)\overline{u}^{2_s^*-2} < \overline{\lambda} - \lambda'.$$

Portanto, multiplicando a desigualdade acima por $\delta\overline{u}$, obtemos

$$(-\Delta)^s(\delta\overline{u}) = \delta\overline{\lambda}\overline{u} + \delta f(x)\overline{u}^{2_s^*-1} \geq \delta\lambda'\overline{u} + \delta^{2_s^*-1}f(x)\overline{u}^{2_s^*-1}$$

Assim, $\delta\overline{u}$ é uma supersolução para (3.1) e mais, $u_\lambda < \delta\overline{u}$ q.t.p em Ω. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$J_\lambda(u_\lambda) = \min\{J_\lambda(u) : 0 \leq u(x) \leq \delta\overline{u}(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega\}$$

Segue pelo Lema 5.7 (do Apêndice) que u_λ é um mínimo local de J_λ em $W_0^{1,2}$. □

3.2.3 Existência da segunda solução

Esta seção é dedicada a provar que o problema (3.1) tem uma segunda solução.

A segunda solução é da forma

$$w = u_\lambda + u,$$

com $u \geq 0$. Isso equivale a encontrar um ponto crítico para o funcional,

$$\begin{aligned} \overline{J}_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega f(x)((u_\lambda+u)^+)^{2_s^*} dx \\ &\quad + \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega f(x) u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_\Omega f(x) u_\lambda^{2_s^*-1} u^+ dx. \end{aligned}$$

Lema 3.4. *$u = 0$ é um minimo local de $\overline{J}_\lambda$ em $H_D^s(\Omega)$.*

Demonstração. Note,

$$\overline{J}_\lambda(u) \geq c_0 > 0 (= \overline{J}_\lambda(0))$$

para $\|u\|_{H_D^s(\Omega)} = r$, para algum $r > 0$ suficientemente pequeno. □

Condição (PS)

Para obtermos o candidato à valor crítico, usamos o procedimento do passo da montanha, e definimos

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} \overline{J}_\lambda(\gamma(t)) \geq c_0 \tag{3.4}$$

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; H_D^s(\Omega)) : \gamma(0) = 0, \overline{J}_\lambda(\gamma(1)) < 0\}. \tag{3.5}$$

Afirmação 3.2.1.

$$c < \frac{s}{N} S_s^{\frac{N}{2s}} \tag{3.6}$$

3.2.4 Prova do Teorema 3.1

Para um estudo completo dos autovalores e das autofunções de $(-\Delta)^s$. Vamos precisar introduzir a melhor constante crítica fracionária de Sobolev S_s para a imersão de $H^s(\mathbb{R}^N)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ definida como

$$
\begin{aligned}
S_s &:= \inf_{u \in H^s(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} S_s(u) \\
H^s(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\} \ni u &\mapsto S_s(u) := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{2_s^*}dx\right)^{2/2_s^*}}
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Pela Proposição 1.2 de [21] e o Teorema 1.42 de [49], sabemos que $U(x) = \frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2s}{4}}}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2s}{2}}}$ é um minimizante para S. Sem perda de generalidade, fixado um $\delta > 0$ podemos assumir que $0 \in \Omega$ e $B_\delta \subset \Omega^+$. Seja $\psi \in C_0^\infty(B_\delta)$ tal que

$$
\begin{cases}
\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in B_\delta, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \\
0 \leq \psi(x) \leq 1 \qquad\qquad \forall x \in \Omega
\end{cases}
$$

Definimos, para $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
U_\varepsilon(x) &:= \varepsilon^{-\frac{N-2s}{2}} U\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \\
u_\varepsilon(x) &:= \psi(x) U_\varepsilon(x).
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Pelo Proposição 2.2 [43], sabemos, seja $s \in (0,1)$ e $n > 2s$. Então a seguintes estimativas são verdadeiras:

$$
\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \leq S_s^{N/(2s)} + O(\varepsilon^{N-2s}), \tag{3.9}
$$

$$
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2_s^*-1}dx = O(\varepsilon^{(N-2s)/2}) = \int_\Omega |u_\varepsilon| dx, \tag{3.10}
$$

$$
\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}dx = S_s^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^N) \tag{3.11}
$$

e

$$
\|u_\varepsilon\|_2^2 \geq \begin{cases} C_s\varepsilon^{2s} + O(\varepsilon^{N-2s}) & \text{se } N > 4s, \\ C_s\varepsilon^{2s}|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^{2s}) & \text{se } N = 4s, \\ C_s\varepsilon^{N-2s} + O(\varepsilon^{2s}) & \text{se } N < 4s, \end{cases} \tag{3.12}
$$

quando $\varepsilon \to 0^+$, para alguma constante positiva C_s dependendo apenas de s. Podemos ver que para $\varepsilon_0 > 0$ escolhido suficientemente pequeno existe um $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$
\overline{J}_\lambda(Ru_\varepsilon) < 0 \tag{3.13}
$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Em outras palavras, o caminho $\alpha_{\lambda,q}(t) = tRu_\varepsilon$, $t \in [0,1]$ pertence à Γ, e assim,

$$
c \leq \max_{0 \leq t \leq R} \overline{J}_\lambda(tu_\varepsilon). \tag{3.14}
$$

Para aproveitar os “melhores” termos de erro envolvidos na estimativa (3.14), distinguimos alguns casos de acordo com a dimensão N. Seja $0 \leq t \leq R$. Então

$$
\begin{aligned}
\overline{J}_\lambda(tu_\varepsilon) &= \frac{t^2}{2}\left(\|u_\varepsilon\|^2-\lambda\|u_\varepsilon\|_2^2\right)-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_\Omega f(x)u_\varepsilon(x)^{2_s^*}\\
&\quad +t\int_\Omega f(x)u_\lambda(x)^{2_s^*-2}u_\lambda u_\varepsilon-\frac{1}{2_s^*}\int_\Omega f(x)\left[(u_\lambda+tu_\varepsilon)^{2_s^*}-u_\lambda^{2_s^*}-(tu_\varepsilon)^{2_s^*}\right]\\
&\leq \frac{t^2}{2}\left(\|u_\varepsilon\|^2-\lambda\|u_\varepsilon\|_2^2\right)-\frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_\Omega f(x)u_\varepsilon^{2_s^*}+CR\|u_\varepsilon\|_1+CR^{2_s^*-1}\|u_\varepsilon\|_{2_s^*-1}^{2_s^*-1} \qquad (3.15)\\
&\leq \frac{s}{N}\left[\frac{\|u_\varepsilon\|^2-\lambda\|u_\varepsilon\|_2^2}{\left(\int_\Omega f(x)u_\varepsilon^{2_s^*}\right)^{\frac{2}{2_s^*}}}\right]^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^{(N-2s)/2})
\end{aligned}
$$

onde usamos a estimativa

$$
\|u_\varepsilon\|_1 = O(\varepsilon^{(N-2s)/2}) = \|u_\varepsilon\|_{2_s^*-1}^{2_s^*-1}. \qquad (3.16)
$$

Por outro lado, usando a hipótese sobre f e (3.11), temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)u_\varepsilon^{2_s^*} &= \|f\|_\infty\int_\Omega u_\varepsilon^{2_s^*}+\int_\Omega (f(x)-f(0))u_\varepsilon^{2_s^*}\\
&= S_s^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^N)+\int_\delta (f(x)-f(0))U_\varepsilon^{2_s^*}\\
&= S_s^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^N)+\int_{\frac{\delta}{\varepsilon}} (f(\varepsilon x)-f(0))\frac{C_N^{2_s^*}}{(1+|x|^2)^N} \qquad (3.17)\\
&= S_s^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^N)+\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{C_N^{2_s^*}}{(1+|x|^2)^N}\\
&= S_s^{\frac{N}{2s}}+o(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

onde, $C_N = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}$. Portanto,

$$
\left(\int_\Omega f(x)u_\varepsilon^{2_s^*}\right)^{\frac{2}{2_s^*}} \geq \left(S_s^{\frac{N}{2s}}+o(\varepsilon^2)\right)^{\frac{N-2s}{N}} \qquad (3.18)
$$

Se $N > 4s$, usando (3.9), (3.12) e (3.18) obtemos

$$
\begin{aligned}
\max_{0\leq t\leq R}\overline{J}_\lambda(tu_\varepsilon) &\leq \frac{s}{N}\left[\frac{S_s^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^{N-2s})-C_s\varepsilon^{2s}\lambda+O(\varepsilon^{N-2s})}{(S_s^{\frac{N}{2s}}+o(\varepsilon^2))^{\frac{N-2s}{N}}}\right]^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^{(N-2s)/2})\\
&\leq \frac{s}{N}\left[S_s-\frac{C_s\varepsilon^{2s}\lambda}{(1+o(\varepsilon^2))^{\frac{N-2s}{N}}}\right]^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^{(N-2s)/2})\\
&\leq \frac{s}{N}\left[S_s-C_s\varepsilon^{2s}\lambda\right]^{\frac{N}{2s}}+O(\varepsilon^{(N-2s)/2}) \qquad (3.19)\\
&< \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}
\end{aligned}
$$

Se $N = 4s$, usando (3.9), (3.12) e (3.18) obtemos

$$\begin{aligned}
\max_{0\le t\le R} \overline{J}_\lambda(tu_\varepsilon) &\le \frac{1}{4}\left[\frac{S_s^2 + O(\varepsilon^{2s}) - \lambda C_s \varepsilon^{2s}|\log\varepsilon| + O(\varepsilon^{2s})}{(S_s^2 + o(\varepsilon^2))^{\frac{1}{2}}}\right]^2 + O(\varepsilon^s) \\
&\le \frac{1}{4}\left[S_s - \frac{\lambda C_s \varepsilon^{2s}|\log\varepsilon|}{(1 + o(\varepsilon^2))^{\frac{1}{2}}}\right]^2 + O(\varepsilon^s) \\
&\le \frac{1}{4}\left[S_s - \lambda C_s \varepsilon^{2s}|\log\varepsilon|\right]^2 + O(\varepsilon^s) \qquad (3.20)\\
&< \frac{1}{4}S_s^2
\end{aligned}$$

Se $N < 4s$ usando (3.9), (3.12) e (3.18) temos

$$\begin{aligned}
\max_{0\le t\le R} \overline{J}_\lambda(tu_\varepsilon) &\le \frac{s}{N}\left[\frac{S_s^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^{N-2s}) - \lambda C_s \varepsilon^{N-2s} + O(\varepsilon^{2s})}{\left(S_s^{\frac{N}{2s}} + o(\varepsilon^2)\right)^{\frac{N-2s}{N}}}\right]^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}) \\
&\le \frac{s}{N}\left[S_s - \frac{\lambda C_s \varepsilon^{N-2s}}{(1 + o(\varepsilon^2))^{\frac{N-2s}{N}}}\right]^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}) \\
&\le \frac{s}{N}\left[S_s - \lambda C_s \varepsilon^{N-2s}\right]^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}) \qquad (3.21)\\
&< \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}
\end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. O principio do Passo da Montanha, produz uma sequência $w_n = u_\lambda + u_n \in H_D^s(\Omega)$, com $u \ge 0$ e satisfaz:

$$J_\lambda(w_n) \to J_\lambda(u_\lambda) + c < J_\lambda(u_\lambda) + \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}} \qquad (3.22)$$

$$\|J_\lambda'(w_n)\| \to 0. \qquad (3.23)$$

Lema 3.5. *Se $\lambda < \lambda^*$, então toda sequência (PS) é limitada.*

Demonstração. Note que, $\lambda^* \le \lambda_1(\Omega^*)$, onde $\Omega^* = \Omega \setminus \overline{\Omega^-}$. Seja u uma solução de (3.1) e ϕ a primeira autofunção associada à $\lambda_1(\Omega^*)$. Pela identidade de Picone,

$$\langle(-\Delta)^s u, \phi^2/u\rangle \le \|\phi\|^2,$$

Segue que, usando a equação (3.1),

$$\lambda\int_\Omega \phi^2 + \int_\Omega f^+(x)u^{2-2_s^*}\phi^2 \le \lambda_1(\Omega^*)\int_\Omega \phi^2,$$

logo, $\lambda \le \lambda_1(\Omega^*)$. Assim $\lambda_1(\Omega^*)$ é um limite superior para Λ, e assim $\lambda^* \le \lambda_1(\Omega^*)$.
Agora, considere uma sequência $w_n \in H_0^s(\Omega)$ que satisfaz (3.22) e (3.23). Precisamos mostrar que w_n

possui uma subsequência convergente. É suficiente mostrar que w_n é limitada em $H_0^s(\Omega)$. Observe que,

$$J_\lambda(w_n) - \frac{1}{2_s^*} J'_\lambda(w_n) w_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)(\|w_n\|^2 - \lambda \|w_n^+\|_2^2) \leq c + c\|w_n\|, \tag{3.24}$$

E dessa forma, o lema segue da seguinte afirmação:

Afirmação: A sequência (w_n) é limitada em $L^2(\Omega)$.

De fato, suponha por contradição que $\|w_n\|_2 \to \infty$ quando $n \to \infty$. Seja, $v_n = w_n / \|w_n\|_2$. De (3.24), temos que v_n é limitada em $H_0^s(\Omega)$. Assim podemos assumir que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^s(\Omega)$ com $\|v_0\|_2 = 1$. Para qualquer $\phi \in H_0^s(\Omega)$ sabemos que $J'_\lambda(w_n)\phi \to 0$ quando $n \to \infty$. Em particular,

$$\|w_n\|_2^{2_s^*-2} \int_\Omega f(x)(v_n^+)^{2_s^*-1}\phi = \langle (-\Delta)^s v_n, \phi \rangle - \int_\Omega \lambda v_n^+ \phi dx + o(1). \tag{3.25}$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega f(x)(v_n^+)^{2_s^*-1}\phi = 0 \text{ para todo } \phi \in H_0^s(\Omega). \tag{3.26}$$

Se $\Omega_0 := \Omega \setminus \overline{(\Omega^+ \cup \Omega^-)}$ é vazio, então (3.26) implica que $v_0 = 0$, mas isso é uma contradição com o fato da $\|v_0\| = 1$.

Por outro lado, se $\Omega_0 \neq \emptyset$, então (3.26) implica que $v_0 \in H_0^s(\Omega_0)$. Agora, passando a uma subsequência, podemos assumir que

$$\langle (-\Delta)^s v_n, \phi \rangle \to \langle (-\Delta)^s v_0, \phi \rangle,$$

De (3.25), temos

$$\langle (-\Delta)^s v_0, \phi \rangle - \int_\Omega \lambda v_0^+ \phi = 0 \text{ para todo } \phi \in H_0^s(\Omega_0).$$

Segue que $(-\Delta)^s v_0 = \lambda v_0^+$, e assim, $v_0 \geq 0$ e $\lambda = \lambda_1(\Omega_0)$, pois $\|v_0\|_2 = 1$. Isso é uma contradição com a hipótese $\lambda < \lambda^*$, desde que $\lambda^* \leq \lambda_1(\Omega^*) < \lambda_1(\Omega_0)$. □

Passando para uma subsequência, $w_n \rightharpoonup w_0$ com $w_0 \in H_D^s(\Omega)$ uma solução para (3.1).

Lema 3.6. *w_0 é a segunda solução para o problema* (3.1) *e $w_0 > u_\lambda$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $w_0 \neq u_\lambda$. Vamos argumentar por contradição e assumir que $w_0 = u_\lambda$. Como $w_n = u_\lambda + u_n$, isso implica que $u_n \rightharpoonup 0$ em $H_D^s(\Omega)$ e pelo Lema de Brézis-Lieb, sabemos que

$$\begin{aligned} \|w_n\|^2 &= \|u_n\|^2 + \|u_\lambda\|^2 + o(1), \\ \int_\Omega |w_n|^2 dx &= \int_\Omega |u_n|^2 dx + \int_\Omega |u_\lambda|^2 dx + o_n(1) \end{aligned}$$

Assim, juntamente com (3.22) e (3.23), temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega f(x) u_n^{2_s^*} dx \to c \in \left(0, \frac{s}{N} S_s^{\frac{N}{2s}}\right) \\ &\|u_n\|^2 - \int_\Omega f(x) u_n^{2_s^*} dx = o(1). \end{aligned}$$

isso é,

$$\frac{s}{N}\|u_n\|^2 \to c \in \left(0, \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}\right) \tag{3.27}$$

e

$$\|u_n\|^2 \leq \int_\Omega f(x)u_n^{2_s^*}dx + o(1) \leq \left(\frac{1}{S_s}\|u_n\|^2\right)^{\frac{N+s}{N-2}} + o(1). \tag{3.28}$$

De (3.27) segue que $\|u_n\|$ é limitada e, portanto, (3.28) produz

$$\|u_n\|^2 \geq S_s^{\frac{N}{2s}} + o(1).$$

o que é uma contradição com (3.27). □

3.2.5 Caso $\lambda = \lambda_1$

Teorema 3.7. *Suponha,*

$$\int_\Omega f(x)\phi_1^{2_s^*} < 0 \tag{3.29}$$

E se $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz

$$\max_{\overline{\Omega}} f(x) = f(x_0) > 0 \text{ para algum } x_0 \in \Omega \tag{3.30}$$

então para $\lambda = \lambda_1$, o problema (3.1) *admite ao menos uma solução.*

Demonstração. Como $\lambda = \lambda_1$, e $u_{\lambda_1} = 0$, assim, $\overline{J}_{\lambda_1}(v) = J_{\lambda_1}(v)$. Pelo Lema 2.3, temos que $u = 0$ é um mínimo estrito local para $\overline{J}_{\lambda_1}$, e podemos proceder como em (3.4), (3.5) para obtermos um candidato a valor crítico c via o Teorema do passo da montanha. Obtendo a estimativa (3.6). Se $N > 4s$ ou $N = 4s$ ou $N < 4s$, temos

$$\begin{aligned}
\overline{J}_{\lambda_1}(tv_\varepsilon) &= \frac{t^2}{2}\left(\|v_\varepsilon\|^2 - \lambda_1\|v_\varepsilon\|_2^2\right) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_\Omega f(x)v_\varepsilon(x)^{2_s^*} \\
&\quad + t\int_\Omega f(x)u_{\lambda_1}(x)^{2_s^*-2}u_{\lambda_1}v_\varepsilon - \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega f(x)\left[(u_{\lambda_1}+tv_\varepsilon)^{2_s^*} - u_{\lambda_1}^{2_s^*} - (tv_\varepsilon)^{2_s^*}\right] \\
&\leq \frac{t^2}{2}\left(\|v_\varepsilon\|^2 - \lambda_1\|v_\varepsilon\|_2^2\right) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int_\Omega f(x)v_\varepsilon^{2_s^*} + CR\|v_\varepsilon\|_1 + CR^{2_s^*-1}\|v_\varepsilon\|_{2_s^*-1}^{2_s^*-1} \\
&\leq \frac{s}{N}\left[\frac{\|v_\varepsilon\|^2 - \lambda_1\|v_\varepsilon\|_2^2}{\left(\int_\Omega f(x)v_\varepsilon^{2_s^*}\right)^{\frac{2}{2_s^*}}}\right]^{\frac{N}{2s}} + O(\varepsilon^{(N-2s)/2}) \\
&< \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}.
\end{aligned}$$

onde, a última desigualdade se dá por (3.9), (3.12), (3.18). Assim, é válido para $\lambda = \lambda_1$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Logo, mostra-se que existe $\lambda^* \in (0, \lambda_1)$ tal que

$$\max_{t\geq 0} J_\lambda(tv_\varepsilon) < \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}$$

para $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$ e consequentemente (3.6) segue em nosso caso onde $\lambda = \lambda_1 \in (\lambda^*, +\infty)$.
Agora, a parte de convergência segue exatamente como no caso $\lambda > \lambda_1$ para fornecer a solução para $\lambda = \lambda_1$. $\square$

CAPÍTULO 4

Existência de Solução

4.1 Introdução

Nesse capitulo, vamos trabalhar com o problema crítico, que inclui a não linearidade com crescimento crítico. Mais precisamente, vamos investigar as soluções do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u - \lambda u &= f(x)|u(x)|^{2_s^*-2}u(x), \quad \text{em } \Omega, \\ \qquad\qquad u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde Ω é um domínio limitado suave de $\mathbb{R}^N$, f é uma função contínua que muda de sinal em Ω, e $\lambda \geq \lambda_1$.

Considere o funcional $J_\lambda : X^s(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_\Omega f(x) u^{2_s^*} dx, \quad u \in X^s(\Omega).$$

Então

$$J'_\lambda(u)\phi \;=\; \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \;-\; \lambda\int_\Omega u\phi dx \;-\; \int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*-2}u\phi dx. \tag{4.2}$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. E assim, u é uma solução fraca de (4.1) se, e somente se, u é um ponto crítico do funcional J_λ.

Teorema 4.1. *Suponha que $\lambda \notin \sigma(\Omega^0)$ e que $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Satisfaça as hipóteses do Lema 2.2, e*

$$\int_\Omega f(x)\phi_1^{2_s^*} dx \geq 0. \tag{4.3}$$

Então, (4.1) *admite ao menos uma solução não trivial.*

Nossos resultados foram motivados pelos artigos [22, 23, 43] e outras referências citadas. Primeiro, provamos o resultado de existência de soluções como em [23]. Logo, usamos o método de sub-super solução com o Teorema do Linking para obter resultados de multiplicidade.

Agora seja $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$ e suponha que

$$\inf_{w\neq 0, w\in V_k} \frac{\int_\Omega f(x)|w|^{2_s^*}}{\int_\Omega |w|^{2_s^*}} \equiv \alpha > 0 \tag{4.4}$$

Teorema 4.2. *Seja $\lambda \notin \sigma(\Omega^0)$ e assuma que $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Além disso, suponha que f satisfaz* (4.4) *e a condição (PS), então* (4.1) *admite ao menos uma solução não trivial.*

4.2 Alguns lemas

Lema 4.3. *Existem $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ tal que*

$$I_\lambda(u) \geq \alpha, \ \ \forall\, u \in S_\rho, \tag{4.5}$$

onde $S_\rho := \{u \in \langle \phi_1, \cdots, \phi_k\rangle^\perp; \|u\| = \rho\}$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\lambda}{2}\int |u|^2 - \frac{1}{2_s^*}\int f(x)|u|^{2_s^*} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2 - \frac{||f||_\infty}{2_s^*}|u|_{2_s^*}^{2_s^*} \\ &\geq \|u\|^2(A - B\|u\|^{2_s^*-2}), \end{aligned}$$

com $A, B > 0$. Então é suficiente tomar $\rho < (A/B)^{\frac{1}{2_s^*-2}}$. □

Assuma que $0 \in \Omega^+$. Considere as seguintes funções introduzidas em [22],

$$\zeta_m = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in B_{1/m}, \\ m|x| - 1 & \text{if } x \in A_m = B_{2/m} \setminus B_{1/m}, \\ 1 & \text{if } x \in \Omega \setminus B_{2/m}, \end{cases}$$

Então, defina as seguintes autofunções de aproximação $\phi_i^m := \zeta_m \phi_i$. Sejam,

$$\begin{aligned} H_m &= span\{\phi_i^m; i = 1, \cdots, k\}. \\ V_m &= H_m \oplus H_m^\perp. \end{aligned}$$

Lema 4.4. *Quando $m \to \infty$ temos*

$$\phi_i^m \to \phi_i \text{ em } X_0^1(\Omega) \quad e \quad \max_{\{u\in H_m: \int u^2 = 1\}} \|u\|^2 \leq \lambda_k + c_k m^{2s-n}. \tag{4.6}$$

Demonstração. Veja o artigo, [19, Lema 3.4]. Apresentaremos a demostração por conveniência do leitor. Temos,

$$\begin{aligned}
\|\phi_i^m-\phi_i\|^2 &= \int \frac{[(\phi_i^m-\phi_i)(x)-(\phi_i^m-\phi_i)(y)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&= \int_{A_m} \frac{|\phi_i(x)[\zeta_m(x)-\zeta_m(y)]+[\zeta_m(y)-1]^2(\phi_i(x)-\phi_i(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \qquad (4.7)\\
&\leq 2\int_{A_m} \frac{|\phi_i(x)^2[\zeta_m(x)-\zeta_m(y)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+2\int_{A_m} \frac{[\zeta_m(y)-1]^2(\phi_i(x)-\phi_i(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&\leq 2(\|\phi_i\|_\infty^2 I_1+I_2),
\end{aligned}$$

onde $c>0$ é alguma constante positiva independente de ϕ_i e

$$I_1=\int_{R^{2N}} \frac{[\zeta_m(x)-\zeta_m(y)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy, \qquad I_2=\int_{R^{2N}} \frac{[\zeta_m(y)-1]^2(\phi_i(x)-\phi_i(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.$$

A ideia é mostrar que I_1 e I_2 convergem para 0 quando $m\to\infty$. Como $\zeta=1$ em $B_{2/m}^c$, segue

$$I_1=\int_{B_{2/m}\times B_{2/m}} \frac{[\zeta_m(x)-\zeta_m(y)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+2\int_{B_{2/m}\times B_{2/m}^c} \frac{[1-\zeta_m(x)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy := I_3+2I_4.$$

Agora, seja

$$I_4=\int_{B_{2/m}\times B_{2/m}^c} \frac{[1-\zeta_m(x)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{B_{2/m}\times B_{3/m}\setminus B_{2/m}} \frac{[1-\zeta_m(x)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy =: I_5+I_6.$$

Note que, I_3 e I_6 são menores ou iguais à

$$\int_{B_{2/m}\times B_{3/m}} \frac{|\zeta_m(x)-\zeta_m(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy =: I_7,$$

Assim, $I_1\leq 2I_5+3I_7$. Para estimar I_5 e I_7, mudamos as variáveis de (x,y) para (x,ξ), onde $\xi=x-y$. Para $(x,y)\in B_{2/m}\times B_{3/m}^c$, $|\xi|\geq|y|-|x|>1/m$ e consequentemente

$$I_5\leq\int_{B_{2/m}\times B_{3/m}^c} \frac{dxdy}{|x-y|^{N+2s}}\leq\int_{B_{2/m}\times B_{1/m}^c} \frac{dxd\xi}{|\xi|^{N+2s}}\leq\frac{C}{m^{N-2s}}. \qquad (4.8)$$

Para $(x,y)\in B_{2/m}\times B_{3/m}$, $|\xi|\leq|x|+|y|<5/m$ e consequentemente

$$I_7\leq m^2\int_{B_{2/m}\times B_{3/m}} \frac{dxdy}{|x-y|^{N-2(1-s)}}\leq m^2\int_{B_{2/m}\times B_{5/m}} \frac{dxd\xi}{|\xi|^{N-2(1-s)}}\leq\frac{C}{m^{N-2s}}.$$

Logo, $I_1\leq C/m^{N-2s}$. Agora, estimamos I_2. Temos

$$I_2=\int_{R^N\times B_{2/m}} \frac{[1-\zeta_m(y)]^2[\phi_i(x)-\phi_i(y)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\leq I_8+4|\phi_i|_\infty^2 I_9,$$

onde

$$I_8=\int_{B_{3/m}\times B_{2/m}} \frac{[\phi_i(x)-\phi_i(y)]^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy, \qquad I_9=\int_{B_{3/m}^c\times B_{2/m}} \frac{dxdy}{|x-y|^{N+2s}}.$$

Como $\phi_i \in H_0^s(\Omega)$ e $|B_{3/m} \times B_{2/m}| \to 0$, $I_8 \to 0$. Como em (4.8), $I_9 \leq C/m^{N-2s}$. Assim, $I_2 \leq C/m^{N-2s} + o(1)$.
Portanto, para provar (4.6), seja $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi_i \in H^-$. Por [19, lema 3.1], temos

$$\|\zeta_m v\|^2 \leq \|v\|^2 + \frac{c|f|_\infty^2}{m^{N-2s}} \tag{4.9}$$

onde, $f = (-\Delta)^s v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i \phi_i \in H^-$.
Como, $dimH^- < \infty$,

$$|f|_\infty^2 \leq c_1 |f|_2^2 = c_1 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \alpha_i^2 \leq c_1 \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = c_2 |v|_2^2$$

para algumas constantes $c_1, c_2 > 0$. Como $\|v\|^2 \leq \lambda_k |v|_2^2$, juntando com (4.9), temos

$$\|\zeta_m v\|^2 \leq \left(\lambda_k + \frac{C}{m^{N-2s}}\right) |v|_2^2 \tag{4.10}$$

Por outro lado,

$$|\zeta_m v|_2^2 = \int_{\Omega \setminus B_{2/m}} v^2 dx + \int_{B_{2/m}} (\zeta_m v)^2 dx \geq \int_\Omega v^2 dx - \int_{B_{2/m}} v^2 dx$$

e

$$\int_{B_{2/m}} v^2 dx \leq c_3 \frac{|v|_\infty^2}{m^N} \leq c_4 \frac{|v|_2^2}{m^N}$$

para alguma constante $c_3, c_4 > 0$, dessa forma,

$$|\zeta_m v|_2^2 \geq \left(1 - \frac{c_4}{m^N}\right) |v|_2^2. \tag{4.11}$$

Combinando (4.10) e (4.11), temos

$$\|\zeta_m v\|^2 \leq \left(\lambda_k + \frac{C}{m^{N-2s}}\right) |\zeta_m v|_2^2.$$

Como, $H_m^- = \{\zeta_m v : v \in H^-\}$, (4.6) segue como gostaríamos. □

4.3 Prova do Teorema 4.2

Mostraremos que J_λ satisfaz as hipóteses do Teorema de Linking, veja o Teorema 5.5. Faremos isso em uma sequência de lemas. Pelo Lema 4.4, temos

$$\phi_i^m := \zeta_m \phi_i \to \phi_i \quad \text{in } X_0^1(\Omega), \text{ e } \|w\|^2 \leq (\lambda_k + c_k m^{2s-n}) |w|_2^2, \tag{4.12}$$

com $m \to \infty$, onde c_k é uma constante e $w \in H_m$. Mais ainda, podemos ver que

$$\int f(x)(\phi_i^m)^{2_s^*} \to \int f(x) \phi_i^{2_s^*}, \text{ como } m \to \infty. \tag{4.13}$$

Agora, considere a família de funções retiradas de [11]

$$U_\varepsilon(x) = \frac{[N(N-2)\varepsilon^2]^{\frac{N-2s}{4}}}{[\varepsilon^2+|x|^2]^{\frac{N-2s}{2}}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Seja $\tilde{u}_\varepsilon = \eta U_\varepsilon$, onde $\eta \in \mathscr{C}_c^\infty(B_{1/m})$ com $\eta \equiv 1$ em $B_{1/(2m)}$. Seja H_m o espaço vetorial $k-$dimensional considerado anteriormente e P_k a projeção sobre $H_m^\perp$ e defina

$$u_\varepsilon = P_k \tilde{u}_\varepsilon. \tag{4.14}$$

Do capítulo anterior, temos as seguintes estimativas

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2_s^*-1}dx + O(\varepsilon^{\frac{N-2s}{2}}) = \int_\Omega |u_\varepsilon| dx \tag{4.15}$$

Sabemos que,

$$V_m := H_m \oplus H_m^\perp$$

Defina $Q_m^\varepsilon = \{u = w + t\tilde{u}_\varepsilon; |t| \leq T \text{ e } \|u\| \leq r, w \in H_m\}$.

Lema 4.5. *Temos*

$$J_\lambda|_{\partial Q_m^\varepsilon} \leq o(m). \tag{4.16}$$

Demonstração. Pela definição supp$(w)\cap$supp$(\tilde{u}_\varepsilon) = \emptyset$, segue que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(w+t\tilde{u}_\varepsilon) =& \frac{1}{2}\langle w+t\tilde{u}_\varepsilon, w+t\tilde{u}_\varepsilon\rangle - \frac{\lambda}{2}\int w^2 - \lambda\frac{t^2}{2}\int \tilde{u}_\varepsilon^2 \\
& - \frac{1}{2_s^*}\int f(x)w^{2_s^*} - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)\tilde{u}_\varepsilon^{2_s^*} \\
=& \frac{1}{2}||w||^2 + t\langle w, \tilde{u}_\varepsilon\rangle + \frac{t^2}{2}||\tilde{u}_\varepsilon||^2 \\
& - \frac{\lambda}{2}\int w^2 - \lambda\frac{t^2}{2}\int \tilde{u}_\varepsilon^2 - \frac{1}{2_s^*}\int f(x)w^{2_s^*} - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)\tilde{u}_\varepsilon^{2_s^*}.
\end{aligned}$$

Note que, para algum $\delta > 0$, temos

$$\langle w, \tilde{u}_\varepsilon\rangle \leq \frac{\delta}{2}||w||^2 + \frac{C_\delta}{2}||\tilde{u}_\varepsilon||^2.$$

Usando (4.12), (4.4) e a desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
J_\lambda(w+t\tilde{u}_\varepsilon) \;\leq\;& \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k + c_k m^{2s-n}}\right)||w||^2 + \frac{\delta}{2}\|w\|^2 + C_\delta\frac{t^2}{2}||\tilde{u}_\varepsilon||^2 \\
& + \frac{t^2}{2}(\|\tilde{u}_\varepsilon\|^2 - \lambda|\tilde{u}_\varepsilon|_2^2) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\alpha|\tilde{u}_\varepsilon|_{2_s^*}^{2_s^*} - \frac{1}{2_s^*}\int f(x)|w|^{2_s^*} \\
\leq\;& \frac{1}{2}\left(1 + \delta - \frac{\lambda}{\lambda_k + c_k m^{2s-n}}\right)\|w\|^2 - \frac{\alpha}{2_s^*}\int |w|^{2_s^*} \\
& + \frac{t^2}{2}\left((C_\delta+1)\|\tilde{u}_\varepsilon\|^2 - \lambda|\tilde{u}_\varepsilon|_2^2\right) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\alpha|\tilde{u}_\varepsilon|_{2_s^*}^{2_s^*}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Como $\lambda > \lambda_k$, podemos fixar $\delta > 0$ tal que $\lambda/\lambda_k - \delta - 1 > 0$, e escolher m_0 tal que

$$A_m := \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_k + c_k m^{2s-n}} - 1 - \delta\right) > 0, \quad \text{para todo } \ m \geq m_0.$$

Também denote

$$B_m = \frac{\alpha}{2_s^*}.$$

Para um $\varepsilon > 0$ fixado, denote $A = (C_\delta + 1)\|\tilde{u}_\varepsilon\|^2 - \lambda|\tilde{u}_\varepsilon|_2^2$ e $B = \alpha|\tilde{u}_\varepsilon|_{2_s^*}^{2_s^*}$, então temos

$$J_\lambda(w + t\tilde{u}_\varepsilon) \leq -A_m\|w\|^2 - B_m\|w\|_{2_s^*}^2 + \frac{t^2}{2}A - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}B$$

Note que

$$\frac{A}{2}t^2 - \frac{B}{2_s^*}t^{2_s^*} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\left(\frac{A^{2_s^*}}{B^2}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}}.$$

Como $\lambda > \lambda_k$, podemos fixar $\delta > 0$ tal que $\lambda/\lambda_k - \delta - 1 > 0$, e escolher m_0 tal que

$$A_m := \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_k + c_k m^{2s-n}} - 1 - \delta\right) > 0, \quad \text{for all } \ m \geq m_0.$$

Também, temos

$$B_m = \frac{\alpha}{2_s^*}.$$

Para um fixado $\varepsilon > 0$, denote $A = (C_\delta + 1)\|\tilde{u}_\varepsilon\|^2 - \lambda|\tilde{u}_\varepsilon|_2^2$ e $B = \alpha|\tilde{u}_\varepsilon|_{2_s^*}^{2_s^*}$, então temos

$$J_\lambda(w + t\tilde{u}_\varepsilon) \leq -A_m\|w\|^2 - B_m\|w\|_{2_s^*}^2 + \frac{t^2}{2}A - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}B$$

Note que

$$\frac{A}{2}t^2 - \frac{B}{2_s^*}t^{2_s^*} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\left(\frac{A^{2_s^*}}{B^2}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}}.$$

Por (4.13), podemos escolher $m \geq m_0$ tal que $B_m > 0$. Portanto, se $w \in V_m$ e $\|w\| = K$ então

$$J_\lambda(w + t\tilde{u}_\varepsilon) \leq -(A_m + \|w\|^{2_s^*-2}B_m)\|w\|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\left(\frac{A^{2_s^*}}{B^2}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}} < 0,$$

para K suficientemente grande. Mais ainda, como $2_s^* > 2$ temos que

$$J_\lambda(w + T\tilde{u}_\varepsilon) \leq -A_m\|w\|^2 - B_m\|w\|_{2_s^*}^2 + \frac{T^2}{2}A - \frac{T^{2_s^*}}{2_s^*}B \leq 0,$$

para T suficientemente grande.

Agora, no caso $t = 0$, temos

$$J_\lambda(w) \leq -\frac{1}{2}A_m\|w\|^2 - \frac{1}{2_s^*}B_m\|w\|_{2_s^*}^2 \leq 0,$$

e o lema está provado.

□

Lema 4.6. *Seja $u \in V_m$. Então, para ε pequeno e para qualquer $t \in \mathbb{R}$*

$$\int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx \geq \int_\Omega f(x)|tu_\varepsilon|^{2_s^*}dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega f(x)|w|^{2_s^*}dx - c_1 t^\beta \varepsilon^{\frac{N(N-2s)}{2N+4s}}. \tag{4.18}$$

em que $\beta \in (2, 2_s^*)$ e α é como em (4.4).

Demonstração. Segue de [23, Lema 6.5]. □

Lema 4.7. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos*

$$\max_{u \in Q_m^\varepsilon} J_\lambda(u) < \frac{s}{N} S_s^{N/(2s)}, \tag{4.19}$$

Demonstração. Observe que se $\frac{\alpha}{2}\int_\Omega f(x)|w|^{2_s^*}dx > c_1 t^{2_s^*}\varepsilon^{\frac{N(N-2s)}{2N+4s}}$, pelo Lema 4.6, temos

$$\int_\Omega f(x)|w+tu_\varepsilon|^{2_s^*}dx > \int_\Omega f(x)|tu_\varepsilon|^{2_s^*}dx$$

Agora, se $\frac{\alpha}{2}\int_\Omega f(x)|w|^{2_s^*}dx \leq c_1 t^{2_s^*}\varepsilon^{\frac{N(N-2s)}{2N+4s}}$, temos

Afirmação 4.3.1.

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)|tu_\varepsilon|^{2_s^*}dx \quad &\leq \quad \int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx - \int_\Omega f(x)|w|^{2_s^*}dx + \alpha\left(\int_\Omega w^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} t^{2_s^*-1}\varepsilon^{\frac{N-2s}{4s}} \\ &\quad + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega w^{2_s^*}dx + \tilde{\alpha} t^{2_s^*}\varepsilon^{\frac{N}{2s}}\end{aligned} \tag{4.20}$$

Demonstração. Basta seguir a demonstração do [23, Lema 6.5]. □

Assim, da afirmação a equação (4.20), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)|tu_\varepsilon|^{2_s^*}dx \quad &\leq \quad \int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx - \int_\Omega f(x)|w|^{2_s^*}dx + \alpha\left(\int_\Omega w^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} t^{2_s^*-1}\varepsilon^{\frac{N-2s}{4s}} \\ &\quad + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega w^{2_s^*}dx + \tilde{\alpha} t^{2_s^*}\varepsilon^{\frac{N}{2s}} \\ &\leq \quad \int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx - \frac{3}{4}\int_\Omega f(x)|w|^{2_s^*}dx + \alpha\left(\int_\Omega w^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} t^{2_s^*-1}\varepsilon^{\frac{N-2s}{4s}} + \tilde{\alpha} t^{2_s^*}\varepsilon^{\frac{N}{2s}} \\ &\leq \quad \int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx + \alpha\left(\int_\Omega w^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{N-2s}{4s}} + c\varepsilon^{\frac{N}{2s}} \\ &\leq \quad \left(\int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx + c\varepsilon^{\frac{2N(N-2s)}{4(N+2s)}} + \varepsilon^{\frac{N}{2s}}\right) \\ &= \quad \int_\Omega f(x)|u|^{2_s^*}dx + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Dessa forma, em ambos os casos nos temos

$$\int_\Omega f(x)|w+tu_\varepsilon|^{2_s^*}dx > \int_\Omega f(x)|tu_\varepsilon|^{2_s^*}dx \tag{4.21}$$

Logo, pela equação (4.21) e (4.12), temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(w+tu_\varepsilon) &= \frac{1}{2}\langle w+tu_\varepsilon, w+tu_\varepsilon\rangle - \frac{\lambda}{2}\int w^2 - \lambda\frac{t^2}{2}\int u_\varepsilon^2 - \frac{1}{2_s^*}\int f(x)|w+tu_\varepsilon|^{2_s^*} \\ &= \frac{1}{2}||w||^2 + \frac{t^2}{2}||u_\varepsilon||^2 - \frac{\lambda}{2}|w|_2^2 - \lambda\frac{t^2}{2}\int u_\varepsilon^2 - \frac{1}{2_s^*}\int f(x)|w+tu_\varepsilon|^{2_s^*} \qquad (4.22) \\ &< \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k + c_k m^{2s-n}}\right)\|w\|^2 + \frac{t^2}{2}\left(\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda|u_\varepsilon|_2^2\right) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)|u_\varepsilon|^{2_s^*}. \end{aligned}$$

Note como $\lambda > \lambda_k$, então $\lambda/\lambda_k - 1 > 0$, e assim podemos escolher um m_0 tal que

$$A_m := \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_k + c_k m^{2s-n}} - 1\right) > 0, \text{ for all } m \geq m_0.$$

Assim,

$$J_\lambda(w+tu_\varepsilon) \leq \frac{t^2}{2}\left(\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda|u_\varepsilon|_2^2\right) - \frac{t^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)|u_\varepsilon|^{2_s^*} = J_\lambda(tu_\varepsilon)$$

Do capítulo anterior, temos

$$J_\lambda(tu_\varepsilon) < \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}} \qquad (4.23)$$

Logo, de (4.23), temos

$$J_\lambda(w+tu_\varepsilon) < \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}}.$$

Portanto,

$$\max_{u\in Q_m^\varepsilon} J_\lambda(u) < \frac{s}{N}S_s^{\frac{N}{2s}},$$

□

4.3.1 Conclusão da prova do Teorema 4.2

O resultado segue do Teorema de Linking 5.5 juntamente com os lemas anteriores.

Temos duas possibilidades:

A primeira é que $\overline{c}$ dado por (5.5) é um valor crítico do funcional J_λ, ou seja, existe $\overline{u}$ tal que $J_\lambda(\overline{u}) = \overline{c}$ e $\overline{u}$ é uma solução não trivial de (4.1), assim o Teorema 4.2 está provado.

Caso contrário, se $\overline{c}$ não for um valor crítico, teríamos a seguinte afirmação

$$\exists u_0 \not\equiv 0, \text{ com } J_\lambda(u_0) \neq \overline{c} \text{ s.t. } u_0 \text{ é solução de (4.1)}, \qquad (4.24)$$

assim ainda o Teorema 4.2 seria provado.

Na verdade, se (4.24) fosse falsa, obteríamos $\overline{c}$ dado por (5.5) como um nível onde qualquer sequência PS admite subsequências fortemente convergentes, uma vez que, por definição,

$$\overline{c} \leq \sup\{J_\lambda(v) : v \in H_m \oplus H_m^\perp\}$$

e (4.19) se verifica. Portanto, como consequência, $\overline{u}$ seria uma solução de (4.1) que contradiz a hipótese com a qual começamos.

4.4 Prova do Teorema 4.1

Esse Teorema tem uma leve alteração em comparação com a prova do Teorema 4.2 que se dá exatamente no seguinte Lema,

Considere o conjunto $Q_m^\varepsilon = \{t\phi_1^m + ru_\varepsilon;\ \ |t| \leq T \ \text{ e } \ 0 \leq r \leq R\}$.

Lema 4.8. *Temos*

$$I|_{\partial Q_m^\varepsilon} \leq o(m). \tag{4.25}$$

Demonstração. Por definição $\text{supp}(\phi_1^m) \cap \text{supp}(\tilde{u}_\varepsilon) = \emptyset$, segue que

$$\begin{aligned} J(t\phi_1 + r\tilde{u}_\varepsilon) =& \frac{1}{2}\langle t\phi_1 + r\tilde{u}_\varepsilon, t\phi_1 + r\tilde{u}_\varepsilon\rangle - \lambda\frac{t^2}{2}\int(\phi_1^m)^2 - \lambda\frac{r^2}{2}\int\tilde{u}_\varepsilon^2 \\ & - \frac{|t|^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)(\phi_1^m)^{2_s^*} - \frac{r^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)\tilde{u}_\varepsilon^{2_s^*} \\ =& \frac{t^2}{2}||\phi_1^m||^2 + tr\langle\phi_1^m, \tilde{u}_\varepsilon\rangle + \frac{r^2}{2}||\tilde{u}_\varepsilon||^2 \\ & - \lambda\frac{t^2}{2}\int(\phi_1^m)^2 - \lambda\frac{r^2}{2}\int\tilde{u}_\varepsilon^2 - \frac{|t|^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)(\phi_1^m)^{2_s^*} - \frac{r^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)\tilde{u}_\varepsilon^{2_s^*}. \end{aligned}$$

Note que, para algum $\delta > 0$, temos

$$\langle\phi_1^m, \tilde{u}_\varepsilon\rangle \leq \frac{\delta}{2}||\phi_1^m||^2 + \frac{C_\delta}{2}||\tilde{u}_\varepsilon||^2.$$

Usando (4.12) e a desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned} J(t\phi_1 + r\tilde{u}_\varepsilon) \leq& \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1 + c_1 m^{2s-n}}\right)||\phi_1^m||^2 + \delta\frac{t^2}{2}||\phi_1^m||^2 + C_\delta\frac{r^2}{2}||\tilde{u}_\varepsilon||^2 \\ & + \frac{r^2}{2}(\|\tilde{u}_\varepsilon\|^2 - \lambda|\tilde{u}_\varepsilon|_2^2) - \frac{r^{2_s^*}}{2_s^*}C|\tilde{u}_\varepsilon|_{2_s^*}^{2_s^*} - \frac{|t|^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)(\phi_1^m)^{2_s^*} \\ \leq& \frac{t^2}{2}\left(1 + \delta - \frac{\lambda}{\lambda_1 + c_1 m^{2s-n}}\right)|\phi_1^m|_2^2 - \frac{|t|^{2_s^*}}{2_s^*}\int f(x)(\phi_1^m)^{2_s^*} \\ & + \frac{r^2}{2}\left((C_\delta + 1)\|\tilde{u}_\varepsilon\|^2 - \lambda|\tilde{u}_\varepsilon|_2^2\right) - \frac{r^{2_s^*}}{2_s^*}|f|_\infty|\tilde{u}_\varepsilon|_{2_s^*}^{2_s^*} \end{aligned}$$

Como $\lambda > \lambda_1$, podemos fixar $\delta > 0$ tal que $\lambda/\lambda_1 - \delta - 1 > 0$, e escolha m_0 tal que

$$A_m := \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1 + c_1 m^{2s-n}} - 1 - \delta\right)||\phi_1^m||^2 > 0, \ \text{ for all } \ m \geq m_0.$$

Também denote

$$B_m = \frac{1}{2_s^*}\int f(x)(\phi_1^m)^{2_s^*}.$$

Para um fixado $\varepsilon > 0$, denote $A = (C_\delta + 1)\|\tilde{u}_\varepsilon\|^2 - \lambda|\tilde{u}_\varepsilon|_2^2$ e $B = |f|_\infty|\tilde{u}_\varepsilon|_{2_s^*}^{2_s^*}$, então temos

$$J(t\phi_1^m + r\tilde{u}_\varepsilon) \leq -t^2 A_m - |t|^{2_s^*} B_m + \frac{r^2}{2}A - \frac{r^{2_s^*}}{2_s^*}B$$

Note que

$$\frac{A}{2}r^2 - \frac{B}{2_s^*}r^{2_s^*} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\left(\frac{A^{2_s^*}}{B^2}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}}.$$

Considere o caso $\int f(x)\phi_1^{2_s^*} > 0$. Por (4.12), podemos escolher $m \geq m_0$ tal que $B_m > 0$. Segue que

$$J(\phi_1^m + r\tilde{u}_\varepsilon) \leq -(A_m + |T|^{2_s^*-2}B_m)|T|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\left(\frac{A^{2_s^*}}{B^2}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}} < 0,$$

para T suficientemente grande. Mais ainda, como $2_s^* > 2$ temos que

$$J(t\phi_1^m + R\tilde{u}_\varepsilon) \leq -t^2A_m - |t|^{2_s^*}B_m + \frac{R^2}{2}A - \frac{R^{2_s^*}}{2_s^*}B \leq 0,$$

para R suficientemente grande. Agora, no caso de $r = 0$, temos

$$J_\lambda(t\phi_1^m) \leq -t^2A_m - |t|^{2_s^*}B_m \leq 0.$$

Agora, considere o caso $\int f(x)\phi_1^{2_s^*} = 0$. Por (4.13), temos que $B_m = o(m)$, e por (4.12), temos

$$A_m = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 - \delta\right)||\phi_1||^2 + o(m) := A_0 + o(m)$$

Escolhendo $T > \rho$ suficientemente grande tal que

$$-\frac{A_0}{2}|T|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\left(\frac{A^{2_s^*}}{B^2}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}} < 0,$$

e m_0 tal que

$$(A_0 + o(m) + |T|^{2_s^*-2}o(m)) \geq \frac{A_0}{2} \text{ for all } m \geq m_0.$$

Assim, temos

$$J(\phi_1^m + r\tilde{u}_\varepsilon) \leq -(A_0 + o(m) + |T|^{2_s^*-2}o(m))|T|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\left(\frac{A^{2_s^*}}{B^2}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}} < 0.$$

Quando $r = 0$, temos que

$$J_\lambda(t\phi_1^m) \leq -t^2A_m - |t|^{2_s^*}B_m = -t^2A_0 - t^2o(m) - |t|^{2_s^*}o(m) \leq o(m),$$

como $|t| \leq T$. Mais ainda, como $2_s^* > 2$ temos

$$J(t\phi_1^m + R\tilde{u}_\varepsilon) \leq -t^2A_m - |t|^{2_s^*}B_m + \frac{R^2}{2}A - \frac{R^{2_s^*}}{2_s^*}B \leq 0(m).$$

para R suficientemente grande. Agora, no caso de $r = 0$, temos

$$J_\lambda(t\phi_1^m) \leq -\frac{t^2}{2}A_m - \frac{|t|^{2_s^*}}{2_s^*}B_m \leq 0.$$

E o lema está provado. □

CAPÍTULO 5

Apêndice

5.1 Alguns teoremas variacionais

Seja J um funcional diferenciável a Fréchet sobre um espaço de Banach B com dual normado B^* e seja $dJ : B \to B^*$ a derivada de Fréchet de J. Chamamos um ponto $u \in B$ de crítico se $dJ(u) = 0$, caso contrário, u é chamado de regular. Um número $\beta \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de J se existe um ponto crítico u de J com $J(u) = \beta$. Caso contrário, β é chamado de regular.
Também podemos denotar por $J'(u) = dJ(u)$ e $J''(u) = d^2J(u)$.

Definição 5.1 (Sequência de Palais-Smale)**.** Uma sequência $\{u_n\}$ em B é uma sequência de Palais-Smale para J se $|J(u_n)| \leq C$ e $\|J'(u_n)\| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Definição 5.2 (Condição de Palais-Smale)**.** Um funcional diferenciável a Fréchet $J : B \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale $(P.S.)$ se qualquer sequência $(P.S.)$ tem uma subsequência convergente em B.

O primeiro resultado é sobre pontos críticos que minimizam o funcional J quando este é limitado inferiormente.

Teorema 5.3. *Suponha $J \in C^1(B)$ que satisfaz a condição $(P.S.)$. Então, se*

$$\beta = \inf_{u \in B} J(u)$$

é finito, $\beta = \min_{u \in B} J(u)$ é alcançado em um ponto crítico de J.

Demonstração. Veja, [27, Proposição 5.3.1] $\square$

O segundo resultado é o Teorema do Passo da Montanha

Teorema 5.4 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Suponha $J \in C^1(B)$ que satisfaz $(P.S.)$. Assuma que*

1) $J(0) = 0$*;*

2) $\exists \rho > 0$, $\alpha > 0$ *tal que se* $\|u\|_B = \rho$, *então* $J(u) \geq \alpha$*;*

3) $\exists u_1 \in B$ *tal que* $\|u\|_B \geq \rho$ *e* $J(u_1) < \alpha$*.*

Defina

$$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1];B) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}.$$

Então

$$\beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma} J(u) \geq \alpha$$

é um valor crítico.

Teorema 5.5 (Teorema do Linking, Rabinowitz)**.** *Seja* $V_m = H_m \oplus H_m^{\perp}$ *um espaço de Banach com dim* $H_m < \infty$*. Seja* $\rho > r > 0$ *e* $z \in H_m^{\perp}$ *tal que* $\|z\| = r$*. Defina*

$$\begin{aligned} Q_m^{\varepsilon} &:= \{u = w + t\tilde{u}_{\varepsilon} : \|u\| \leq \rho, t \geq 0, w \in H_m\}, \\ \partial Q_m^{\varepsilon} &:= \{u = w + t\tilde{u}_{\varepsilon} : w \in H_m, \|u\| = \rho \ e\ t \geq 0 \ ou\ \|u\| \leq \rho \ e\ t = 0\}, \\ S_{\rho} &:= \{u \in H_m^{\perp} : \|u\| = r\} \end{aligned}$$

Seja $\phi \in C^1(V_m, \mathbb{R})$ *tal que*

$$b := \inf_{S_\rho} \phi > a := \max_{\partial Q_m^{\varepsilon}} \phi$$

Se ϕ *satisfaz a condição* (PS) *com*

$$\begin{aligned} c &:= \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q_m^{\varepsilon}} \phi(\gamma(u)), \\ \Gamma &:= \{\gamma \in C(Q_m^{\varepsilon}, V_m) : \gamma\big|_{\partial Q_m^{\varepsilon}} = id\}, \end{aligned}$$

então c *é um valor crítico de* ϕ*.*

Proposição 5.6 (Desigualdade de Picone)**.** *Sejam* u *e* v *duas funções mensuráveis com* $v \geq 0$ *e* $u \geq 0$*, então*

$$(u(x) - u(y)) \left(\frac{v(x)^2}{u(x)} - \frac{v(y)^2}{u(y)} \right) \leq |v(x) - v(y)|^2. \tag{5.1}$$

Dividindo a equação (5.1) *por* $|x-y|^{N+2s}$*, temos*

$$\frac{(u(x) - u(y)) \left(\frac{v(x)^2}{u(x)} - \frac{v(y)^2}{u(y)} \right)}{|x-y|^{N+2s}} \leq \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}.$$

Agora integrando sobre $\mathbb{R}^{2N}$*, obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x) - u(y)) \left(\frac{v(x)^2}{u(x)} - \frac{v(y)^2}{u(y)} \right)}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}.$$

Portanto, segue que

$$\langle (-\Delta)^s u, \frac{v^2}{u} \rangle \leq \|v\|^2. \tag{5.2}$$

5.2 Outros resultados importantes

Lema 5.7. *Suponha que u_λ é o único minimo de J_λ restrito à $M = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \underline{u} \leq u(x) \leq \overline{w}(x)$ q.t.p. $x \in \Omega\}$. Então u_λ é um mínimo local de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $M = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \underline{u} \leq u \leq \overline{w}\}$. Considere o conjunto

$$M_n = \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) : dist(u,M) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Podemos verificar que M_n é fechado e convexo, logo fracamente fechado, e J_λ é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente sobre M_n com respeito a norma de $W_0^{1,2}$. Então, por [42, Theorem I.1.2] J_λ admite minimo relativo $u_n \in M_n$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \min_{M_n} J_\lambda.$$

Assim, segue que,

$$J'_\lambda(u_n)\dot{(}u_n - \overline{w})^+ \leq 0,$$

isto é,

$$\langle (-\Delta)^s u_n, (u_n - \overline{w})^+ \rangle \leq \lambda \int_\Omega u_n (u_n - \overline{w})^+ dx + \int_\Omega f(x) g(u_n)(u_n - \overline{w})^+ dx.$$

Além disso, temos que

$$\langle (-\Delta)^s \overline{w}, (u_n - \overline{w})^+ \rangle \geq \lambda' \int_\Omega \overline{w} (u_n - \overline{w})^+ dx + \int_\Omega f(x) g(\overline{w})(u_n - \overline{w})^+ dx.$$

Agora, fixado $\varepsilon > 0$ tal que

$$\lambda' \geq (1+\varepsilon)\lambda + \varepsilon f(x) g(\overline{w}).$$

Multiplicando essa desigualdade por $\overline{w}$, temos

$$\lambda' \overline{w} \geq (1+\varepsilon)\lambda \overline{w} + \varepsilon f(x) g(\overline{w}).$$

Segue que,

$$\langle (-\Delta)^s \overline{w}, (u_n - \overline{w})^+ \rangle \geq \lambda \int_\Omega (1+\varepsilon) \overline{w} (u_n - \overline{w})^+ dx + \int_\Omega f(x)(1+\varepsilon) g(\overline{w})(u_n - \overline{w})^+ dx.$$

Pela propriedade fortemente monótona, podemos concluir que

$$\langle (-\Delta)^s (u_n - \overline{w})^+, (u_n - \overline{w})^+ \rangle \leq \langle (-\Delta)^s (u_n - \overline{w}), (u_n - \overline{w})^+ \rangle.$$

Usando as desigualdades acima, temos

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^s (u_n - \overline{w})^+, (u_n - \overline{w})^+ \rangle \leq \; & \lambda \int_\Omega (u_n - (1+\varepsilon)\overline{w})(u_n - \overline{w})^+ dx \\ & + \int_\Omega f(x)(g(u_n) - (1+\varepsilon) g(\overline{w}))(u_n - \overline{w})^+ dx. \end{aligned}$$

Existe uma constante $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que, para $a > b \geq 0$,

$$a - b \leq \varepsilon b + C(a-b)$$

e

$$g(a) - g(b) \leq \varepsilon g(b) + Cg(a-b)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|(u_n - \overline{w})^+\|^2 &\leq \lambda C \int_\Omega [(u_n - \overline{w})^+]^2 dx + C \int_\Omega f(x)G((u_n - \overline{w})^+)dx \\
&\leq C|\{x : u_n(x) > \overline{w}(x)\}|^{\frac{2}{N}} \|(u_n - \overline{w})^+\|^2 + C\|(u_n - \overline{w})^+\|^{2_s^*-2} \|(u_n - \overline{w})^+\|^2.
\end{aligned}$$

Observe que u_n converge para um minimizador de J_λ em M, então da unicidade de u_λ segue que $\|u_n - u_\lambda\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Além disso, como $u_\lambda < \overline{w}$, segue que $|\{x; u_n(x) > \overline{w}(x)\}| \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim,

$$\|(u_n - \overline{w})^+\|^2 \leq o(1)\|(u_n - \overline{w})^+\|^2,$$

assim existe n_0 tal que $(u_n - \overline{w})^+ = 0$ para $n \geq n_0$, e assim, $u_n \leq \overline{w}$. Como consequência, temos que $u_n^+ \in M$ e assim $J_\lambda(u_n^+) \geq J_\lambda(u_\lambda)$. Agora, se $n \geq n_0$, então,

$$J_\lambda(u_\lambda) \geq J_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n^-\|^2 + J_\lambda(u_n^+) \geq \frac{1}{2}\|u_n^-\|^2 + J_\lambda(u_\lambda).$$

Concluímos que $u_n^- = 0$, e assim $u_n \in M$ para $n \geq n_0$. Portanto, u_1 é um minimo local de J_λ em $W_0^{1,2}$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] S. Alama e M. Del Pino, *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13, 95-115 (1996).

[2] S. Alama e G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities.* Calc. Var. Partial Differential Equations 1 (1993), 439-475.

[3] S. Alama e G. Tarantello, *Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign.* Journal of Functional Analysis, 141(1), 159-215. doi: 10.1006/jfan.1996.0125.

[4] C. O. Alves, J. V. Gonçalves e O. H. Miyagaki, *Remarks on multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth.* Conference Publications, 1998, 1998(Special): 51-57. doi: 10.3934/proc.1998.1998.51.

[5] A. Ambrosetti e D. Arcoya, *An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser 2011.

[6] D. Arcoya, M. Rezende e E. A. B. Silva, *Quasilinear problems under local Landesman-Lazer condition.* Calc. Var. Partial Differential Equations (2019), DOI: 10.1007/s00526-019-1650-9.

[7] B. Barrios, L. Del Pezzo, J. García-Melián e A. Quaas, *A Liouville theorem for indefinite fractional diffusion equations and its application to existence of solutions.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 37(11): 5731-5746. doi: 10.3934/dcds.2017248.

[8] I. Birindelli e F. Demengel, *Existence of solutions for semilinear equations involving the p-Laplacian: the non coercive case*, Calc. Var. Partial Differential Equations 20 (2004), 343-366.

[9] L. Brasco e M. Squassina, *Optimal solvability for a nonlocal problem at critical growth*, Journal of Differential Equations, Volume 264, Issue 3, 2018, Pages 2242-2269, ISSN 0022-0396, https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.10.019.

[10] H. Brezis e E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Am. Math. Soc. 88 (1983) 486-490.

[11] H. Brezis e L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent.* Commun. Pure Appl. Math. 36, 437-477 (1983)

[12] J. Chabrowski e J. Yang, *Existence theorems for the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent.* Z. Angew. Math. Phys. 49 (1998) 276-293.

[13] K. Chang e M. Jiang, *Morse theory for indefinite nonlinear elliptic problems.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 1, pp. 139-158 DOI 10.1016/J.ANIHPC.2007.08.004.

[14] G.S.A. Costa, G.M. Figueiredo e J.C.O. Junior, *Solutions for a quasilinear elliptic problem with indefinite nonlinearity with critical growth.* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2023, No. 24, 1-19; https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023.1.24.

[15] Y. Deng e W. Huang, *Least energy solutions for fractional Kirchhoff type equations involving critical growth.* Discrete and Continuous Dynamical Systems - S, 2019, 12(7): 1929-1954. doi: 10.3934/dcdss.2019126.

[16] L.R. De Freitas, J. A.Santos, e U.B. Severo, Quasilinear equations involving indefinite nonlinearities and exponential critical growth in $\mathbb{R}^N$. Annali Di Matematica Pura Ed Applicata. doi:10.1007/s10231-020-00997-0 (2020).

[17] A. Fiscella, R. Servadei, e E. Valdinoci, *Density properties for fractional Sobolev spaces.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae Math., 40(1):235-253, (2015).

[18] Y. Fu e B. Li, *On fractional Laplacian problems with indefinite nonlinearity.* Applicable Analysis, 96(16), 2852-2868.

[19] K. F. A. Oweidi, *Lower Order Perturbations of Critical Fractional Laplacian Equations.* Journal of Modern Mathematics and Statistics, 47-54 Volume: 14, Issue 3, 2020.

[20] F. Gao e M. Yang, *On the Brezis-Nirenberg type critical problem for nonlinear Choquard equation*. arXiv preprint arXiv:1604.00826 (2016).

[21] F. Gao e M. Yang, *On nonlocal Choquard equations with Hardy-Littlewood-Sobolev critical exponents* J. Math.Anal.Appl.448 (2017), 1006-1041.

[22] F. Gazzola e B. Ruf, *Lower-order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Adv. Diff. Eq. 2 (1997), 555-572.

[23] M. Grossi, P. Magrone e M. Matzeu *Linking type solutions for elliptic equations with indefinite nonlinearities up to the critical growth*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 7, 703-718 (2001).

[24] B. Hu e Y. Yang, *A note on the combination between local and nonlocal p-Laplacian operators.*, Complex Variables and Elliptic Equations. 65. 10.1080/17476933.2019.1701450 (2019).

[25] A. Iannizzotto, K. P. S. Liu, e M. Squassina, *Existence results for fractional p-Laplacian problems via Morse theory.* Adv. Calc. Var., (2014).

[26] A. Iannizzotto, S. Mosconi e M. Squassina, *H^s versus C^0-weighted minimizers.*, Nonlinear Differ Equ Appl. 2015;22:477-497.

[27] S. Kesavan, *Nonlinear functional analysis.*, Hindustan Book Agency, New Dehli, 1993.

[28] S. Mosconi, K. Perera, M. Squassina e Y. Yang, *The Brezis-Nirenberg problem for the fractional p-Laplacian.*, Calculus of Variations. 10.1007/s00526-016-1035-2 (2016).

[29] J. Mawhin e B. Giovanni, *A Brezis-Nirenberg type result for a nonlocal fractional operator: A BREZIS-NIRENBERG TYPE RESULT.* Journal of the London Mathematical Society. 95. 10.1112/jlms.12009 (2016).

[30] E.S. Medeiros, U. B. Severo, e E.A.B. Silva, *On a class of elliptic problems with indefinite nonlinearities*, Calc. Var. 50, 751-777 (2014). https://doi.org/10.1007/s00526-013-0654-0.

[31] J. M. Mendoza, *Existence of solutions for a nonhomogeneous semilinear fractional Laplacian problems*, HOUSTON JOURNAL OF MATHEMATICS , v. 45, p. 589-599, 2019.

[32] O.H. Miyagaki, D. Motreanu e F.R. Pereira, *Multiple solutions for a fractional elliptic problem with critical growth.*, Journal of Differential Equations, Volume 269, Issue 6, 2020, Pages 5542-5572.

[33] E. D. Nezza, G. Palatucci, e E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces.* Bull. Sci. Math., 136:512-573, (2012).

[34] T. Ouyang: *On the positive solutions of semilinear elliptic equations* $\Delta u + \lambda u + hu^p = 0$ *on compact manifolds, Part II* Indiana Univ. Math. J. 40, 1083-1140 (1991).

[35] F. O. de Paiva e H. R. Quoirin, *A superlinear type problem for a p-laplacian perturbation* Matemática Contemporânea, Vol 40, 131-148, 2011, Sociedade Brasileira de Matemática.

[36] F. O. de Paiva e D. R. Villena, *Multiplicity of solutions for fracitonal* $p-$*Laplacian equation with indefinite nonlinearity.* Complex Variables and Elliptic Equations, 68:12, 2059-2072, DOI: 10.1080/17476933.2022.2098278.

[37] K. Perera, M. Squassina e Y. Yang, *Bifurcation and multiplicity results for critical fractional p-Laplacian problems.* Mathematische Nachrichten. 289. 10.1002/mana.201400259 (2014).

[38] L. D. Pezzo e A. Quaas, *A Hopf's lemma and a strong minimum principle for the fractional p-Laplacian.* Journal of Differential Equations, 263:765-778, (2017).

[39] A. Razani, G.S.A. Costa e G.M. Figueiredo, *A study on a class of weighted elliptic problems with indefinite nonlinearities.* Applicable Analysis, DOI: 10.1080/00036811.2023.2297865 (2023).

[40] S. Rawat e K. Sreenadh, *Three solutions for a fractional elliptic problem with asymmetric critical Choquard nonlinearity.* https://arxiv.org/abs/2107.04249v1 (2021).

[41] X. Ros-Oton, J. Serra, *The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary.*, J Math Pure Appl. 2014;101:275-302.

[42] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear PDE and Hamiltonial Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[43] R. Servadei, *A critical fractional Laplace equation in the resonant case.*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 43(1): 251-267 (2014).

[44] R. Servadei e E. Valdinoci, *A Brezis-Nirenberg result for non-local critical equations in low dimension.*, Communications on Pure and Applied Analysis. 12. 2445-2464. 10.3934/cpaa.2013.12.2445 (2013).

[45] R. Servadei e E. Valdinoci, *The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian.*, Trans. Am. Math. Soc. 367 (2015) 67-102.

[46] R. Servadei e E. Valdinoci, *Fractional Laplacian equations with critical Sobolev exponent.* Revista Matemática Complutense. 28. 10.1007/s13163-015-0170-1. (2015).

[47] R. Servadei e E. Valdinoci, *Variational methods for non-local operators of elliptic type.*, 2010 AMS.

[48] R. Servadei, *The Yamabe equation in a non-local setting.*, Adv. Nonlinear Anal. 2 (2013) 235-270.

[49] M. Willem, *Minimax Theorems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[50] Y. Yang, *The Brezis-Nirenberg problem for the fractional p-Laplacian involving critical Hardy-Sobolev exponents.* arXiv:1710.04654 [math.AP], (2017).