

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Gabriel da Silva Rodrigues

**Modelo Matemático e Computacional
para Robôs Espaciais de Base Livre e
Múltiplos Braços com Momento
Não-Conservado**

Gabriel da Silva Rodrigues

**Modelo Matemático e Computacional
para Robôs Espaciais de Base Livre e
Múltiplos Braços com Momento
Não-Conservado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Processamento Digital de Sinais

Orientador: Prof(a). Dr(a). Tatiana de Figueiredo Pereira Alves Taveira Pazelli

São Carlos - SP

2025

Rodrigues, Gabriel da Silva

Modelo matemático e computacional para robôs espaciais de base livre e múltiplos braços com momento não-conservado / Gabriel da Silva Rodrigues -- 2025. 156f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Tatiana de Figueiredo Pereira Alves Taveira Pazelli

Banca Examinadora: Tatiana de Figueiredo Pereira Alves Taveira Pazelli, Adriano Almeida Gonçalves Siqueira,

Alexandre Tácito Malavolta

Bibliografia

1. Robótica espacial. 2. Modelagem dinâmica. 3. Detumbling. I. Rodrigues, Gabriel da Silva. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Gabriel da Silva Rodrigues, realizada em 27/03/2025.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Tatiana de Figueiredo Pereira Alves Taveira Pazelli (UFSCar)

Prof. Dr. Adriano Almeida Goncalves Siqueira (USP)

Prof. Dr. Alexandre Tácito Malavolta (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Agradecimentos

Agradecimentos à Tatiana F.P.A.T. Pazelli da Universidade Federal de São Carlos – UFSCar por seu conhecimento e experiência na área de robótica aeroespacial que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Um agradecimento especial à minha família por seu apoio e compreensão durante esses anos.

Agradecimento ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo apoio financeiro parcial ao desenvolvimento deste projeto por meio do processo nº 407721/2022-3.

Resumo

O desenvolvimento da robótica espacial orbital nas últimas décadas é direcionado ao atendimento da demanda por missões extra-veiculares, tais como abastecimento, manutenção, inspeção, resgate e transporte de materiais. Um manipulador espacial pode ser definido por um ou mais braços acoplados a uma base flutuante (satélite) desenvolvido para operação em órbita. A característica diferencial desses sistemas é o acoplamento dinâmico existente entre a base e os manipuladores. Neste trabalho, é proposto um modelo matemático para um robô espacial de múltiplos braços e base flutuante, capaz de lidar com forças externas e momentos linear e angular não-nulos, especialmente para maximizar a fidelidade entre o modelo e o robô em aplicações de *detumbling*. O objetivo principal é apresentar um modelo matemático que seja suficientemente detalhado nas construções de vetores e matrizes necessárias para sua implementação, mantendo sua generalidade funcional e consistência com a operação real do manipulador em termos de obediência às leis de mecânica clássica. O trabalho em questão aborda lacunas existentes em literatura acerca do modelo dinâmico em espaço cartesiano e o comportamento do sistema robótico em condições de interação com alvos não-cooperativos, como inconsistências nos cálculos de termos não-inerciais e de momento angular, mapeamento de forças entre domínios de junta e tarefa através da Matriz Jacobiana Generalizada Estendida e anulação de momentos em situações de pós-impacto. A partir de simulações computacionais, conclui-se que as formulações apresentadas são internamente consistentes em domínios de junta e inercial. A aplicação de tarefas de estabilização de múltiplos alvos, cuja formulação é pautada na generalização da jacobiana espacial para múltiplos braços, apresentou desempenho satisfatório, assim assumindo papel relevante em aplicações futuras envolvendo *detumbling* de múltiplos alvos.

Palavras-chave: Robótica espacial. Modelagem dinâmica. Detumbling.

Abstract

The development of orbital space robotics in recent decades is aimed at meeting the demand for extra-vehicular missions, such as supply, maintenance, inspection, rescue and transport of materials. A space manipulator can be defined by one or more arms attached to a floating base (satellite) designed for operation in orbit. The distinguishing characteristic of these systems is the dynamic coupling between the base and the manipulators. In this work, a mathematical model is proposed for a space robot with multiple arms and a floating base, capable of dealing with external forces and non-zero linear and angular momentum, especially to maximize the fidelity between the model and the robot in detumbling applications. The main objective is to present a mathematical model that is sufficiently detailed in the constructions of vectors and matrices necessary for its implementation, maintaining its functional generality and consistency with the real operation of the manipulator in terms of obedience to the laws of classical mechanics. The work in question addresses gaps in the literature regarding the dynamic model in Cartesian space and the behavior of the robotic system in conditions of interaction with non-cooperative targets, such as inconsistencies in the calculations of non-inertial terms and angular momentum, mapping of forces between joint and task domains through the Generalized Jacobian Matrix and cancellation of momentum in post-impact situations. From simulations, it is clear that the presented formulations are internally consistent in joint and inertial domains. The application of multiple target stabilization tasks, whose formulation is based on the generalization of the spatial Jacobian for multiple arms, presented satisfactory performance, thus assuming a relevant role in future applications involving multiple target detumbling.

Keywords: Space robotics. Dynamic modeling. Detumbling.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Multi-manipulador em tarefa de captura de alvo. Fonte: (RAINA et al., 2021)	22
Figura 2 – Representação cinemática do robô de braço único. Fonte: (WILDE et al., 2018).	24
Figura 3 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH). Fonte: (WILDE et al., 2018)	25
Figura 4 – Balanço dinâmico por elo. Fonte: (CRAIG, 2005)	53
Figura 5 – Propagação de forças em robô de base flutuante. Fonte: Próprio autor	54
Figura 6 – Configuração inicial do multi-manipulador. Fonte: Próprio autor	73
Figura 7 – Simulação de dinâmica interna do robô espacial. Fonte: Próprio autor .	78
Figura 8 – Trajetória de referência de juntas. Fonte: Próprio autor	81
Figura 9 – Erro de acompanhamento de trajetória de juntas, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor	81
Figura 10 – Torque de controle de juntas, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor	82
Figura 11 – Trajetória dos efetuadores, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor	83
Figura 12 – Trajetória da base, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor	83
Figura 13 – Configuração final do multi-manipulador. Fonte: Próprio autor	84
Figura 14 – Trajetória do centro de massa do robô, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor	84
Figura 15 – Erro de acompanhamento de trajetória de juntas, FM-ST-A. Fonte: Próprio autor	85
Figura 16 – Torque de controle de juntas, FM-ST-A. Fonte: Próprio autor	86
Figura 17 – Trajetória dos efetuadores, ST-ST-A. Fonte: Próprio autor	87
Figura 18 – Trajetória da base, FM-ST-A. Fonte: Próprio autor	87
Figura 19 – Trajetória do centro de massa do robô, FM-ST-A. Fonte: Próprio autor	88
Figura 20 – Trajetória das juntas, JSC. Fonte: Próprio autor	90
Figura 21 – Trajetória linear dos efetuadores - xy, JSC. Fonte: Próprio autor	91
Figura 22 – Trajetória linear dos efetuadores, JSC. Fonte: Próprio autor	91
Figura 23 – Trajetória angular dos efetuadores, JSC. Fonte: Próprio autor	92

Figura 24 – Trajetória da base, JSC. Fonte: Próprio autor	92
Figura 25 – Torque de controle das juntas, JSC. Fonte: Próprio autor	93
Figura 26 – Trajetória linear dos efetuadores - xy, TSC. Fonte: Próprio autor	94
Figura 27 – Trajetória linear dos efetuadores, TSC. Fonte: Próprio autor	94
Figura 28 – Trajetória angular dos efetuadores, TSC. Fonte: Próprio autor	95
Figura 29 – Erro de acompanhamento de posição linear dos efetuadores - xy, TSC. Fonte: Próprio autor	95
Figura 30 – Erro de acompanhamento de posição linear dos efetuadores. Fonte: Próprio autor	96
Figura 31 – Erro de acompanhamento de posição angular dos efetuadores. Fonte: Próprio autor	97
Figura 32 – Consistência cinemática linear da E-GJM, TSC. Fonte: Próprio autor	98
Figura 33 – Consistência cinemática angular da E-GJM, TSC. Fonte: Próprio autor	98
Figura 34 – Torque de controle das juntas, TSC. Fonte: Próprio autor	100
Figura 35 – Trajetória das juntas, TSC. Fonte: Próprio autor	100
Figura 36 – Trajetória da base, TSC. Fonte: Próprio autor	102
Figura 40 – Análise de singularidades com incremento de 0° , TSC. Fonte: Próprio autor	102
Figura 37 – Trajetória do centro de massa, TSC. Fonte: Próprio autor	103
Figura 38 – Análise de singularidades com incremento de 0.1° , TSC. Fonte: Próprio autor	103
Figura 39 – Análise de singularidades com incremento de 1° , TSC. Fonte: Próprio autor	103
Figura 41 – Momento angular pós-captura, Detumbling (DTB). Fonte: Próprio autor	105
Figura 42 – Posição e velocidade angulares, JS, sem DTB. Fonte: Próprio autor	106
Figura 43 – Torques de junta, sem DTB. Fonte: Próprio autor	106
Figura 44 – Posição e velocidade angulares, TS, sem DTB. Fonte: Próprio autor	108
Figura 45 – Posição e velocidade angulares, TS, DTB - braço 1, junta 4. Fonte: Próprio autor	108
Figura 46 – Posição e velocidade angulares, JS, DTB - braço 1, junta 4. Fonte: Próprio autor	109
Figura 47 – Torques de junta, DTB - braço 1, junta 4. Fonte: Próprio autor	109
Figura 48 – Posição e velocidade angulares, TS, DTB - braço 1, junta 3. Fonte: Próprio autor	110
Figura 49 – Posição e velocidade angulares, JS, DTB - braço 1, junta 3. Fonte: Próprio autor	110
Figura 50 – Torques de junta, DTB - braço 1, junta 3. Fonte: Próprio autor	111
Figura 51 – Posição e velocidade angulares, TS, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor	111

Figura 52 – Posição e velocidade angulares, JS, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor	112
Figura 53 – Torques de junta, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor	112
Figura 54 – Posição e velocidade angulares, TS, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor	113
Figura 55 – Posição e velocidade angulares, JS, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor	114
Figura 56 – Torques de junta, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor	114

Lista de tabelas

Tabela 1 – Comparação de erros de trajetória dos modelos simulados.	86
Tabela 2 – Desempenho do sistema de controle inercial.	96
Tabela 3 – Consistência cinemática da E-GJM.	99
Tabela 4 – Trajetória de juntas das simulações JSC e TSC, em [°].	101
Tabela 5 – Trajetória dos efetuadores das simulações JSC e TSC, em [m,m,°].	101

Lista de siglas

DH Parâmetros de Denavit-Hartenberg

DTB Detumbling

E-GJM Matriz Jacobiana Generalizada de múltiplos braços

FM-ST-A Modelo Padrão do Manipulador Flutuante

FM-NIC-A Modelo com Correção Não-Inercial do Manipulador Flutuante

GJM Matriz Jacobiana Generalizada

JSC Controle em Espaço das Juntas

NIDC Acoplamento Dinâmico Não-Inercial

NE Algoritmo de Newton-Euler

TSC Controle em Espaço da Tarefa

w.r.t com relação a/ao

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	OBJETIVOS	20
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
3.1	Formulação cinemática	23
3.1.1	Cinemática das juntas	23
3.1.2	Cinemática da base	26
3.1.3	Cinemática do manipulador	26
3.2	Dinâmica interna	28
3.2.1	Derivadas em relação ao espaço das juntas	31
3.2.2	Acoplamento dinâmico não-inercial	38
3.2.3	Equação de dinâmica interna	40
3.3	Dinâmica externa	42
3.3.1	Vínculo Newtoniano	42
3.3.2	Matriz Jacobiana Generalizada	43
3.4	Dinâmica acoplada em <i>stand-alone</i>	48
3.5	Modelo subatuado aplicado a manipuladores espaciais	50
3.6	Propagação de forças em manipuladores espaciais	51
3.7	Modelo numérico	55
3.7.1	Generalização para múltiplos braços	56
3.8	Framework de detumbling	59
3.8.1	Formulação de pós-captura para multimanipuladores espaciais	60
3.9	Contribuições teóricas do Trabalho	62
3.9.1	Generalização para múltiplos braços	62
3.9.2	Acoplamento dinâmico não-inercial	63
3.9.3	Correção do equacionamento do Momento	63

3.9.4	Análises da construção do equacionamento Lagrangiano da dinâmica acoplada	64
3.9.5	Análise do formato subatuado com forças externas não-nulas	66
3.9.6	E-GJM e <i>detumbling</i>	66
3.9.7	Propagação de forças externas	68
3.9.8	Compatibilidade entre modelo e condições operacionais	69
4	METODOLOGIA	71
4.1	Sistema de coordenadas inercial	72
4.2	Hiper-parâmetros da simulação	72
4.2.1	Manipulador	72
4.2.2	Tarefa	74
4.2.3	Tempo	74
4.3	Sistema de controle	74
4.4	Aplicação no espaço da tarefa	75
4.5	Métricas de análise	76
4.6	Simulação dinâmica	76
5	RESULTADOS	79
5.1	Resultados de simulação - espaço das juntas	80
5.1.1	FM-NIC-A	80
5.1.2	FM-ST-A	85
5.1.3	Comparação dos modelos - espaço das juntas	86
5.2	Resultados de simulação - espaço da tarefa	89
5.2.1	Geração de trajetória	89
5.2.2	Controle em espaço da tarefa	93
5.3	Resultados de simulação - <i>detumbling</i>	105
	REFERÊNCIAS	117
	 APÊNDICES	 119
	APÊNDICE A – MATRIZES DINÂMICAS	120
	APÊNDICE B – MOMENTO	127
	APÊNDICE C – EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	135
C.1	P1) Lagrangiana multi-estado	136
C.2	P2) Lagrangiana mono-estado	150
C.3	Análises comparativas das equações de movimento	153

APÊNDICE D	–	ANÁLISE DE FRAMEWORK	155
------------	---	--------------------------------	-----

Capítulo 1

Introdução

A disseminação da robótica espacial nas áreas de pesquisa em sistemas robóticos é relacionada à capacidade de manipuladores espaciais substituírem astronautas em tarefas potencialmente nocivas a sua saúde – devido a fatores como microgravidade, pressão atmosférica drasticamente pequena e níveis elevados de radiação – como resgate, reparo, reabastecimento e manutenção (BAOSHENG; YANAN, 2015).

Atualmente, os manipuladores de base livre (*free-floating*) são muito promissores em virtude da redução de custos com combustível. O robô dual *free-flying*, apesar da menor complexidade analítica na modelagem e projeto de controladores proporcionada pela fixação inercial da base por mecanismos físicos, pode ser financeiramente inviável em muitas aplicações. O número de lançamento de estruturas espaciais, como satélites e sondas orbitais, aumenta proporcionalmente ao desenvolvimento aeroespacial. Assim, a extensão da vida útil de tais sistemas requer mecanismos confiáveis, autônomos e de baixo custo capazes de efetuar inspeção, montagem, captura e reparo em órbita (LI, 2014). Nessas condições, conforme as missões extra-veiculares adquirem maior complexidade, o manipulador de um braço passa a apresentar desvantagens relevantes. De fato, robôs de dois braços contemplam mais flexibilidade e capacidade de desempenhar tarefas sofisticadas com mais acurácia e confiabilidade que similares robóticos de braço único. (WANG et al., 2017).

Em razão da ausência de fixação para a base robótica, forças e momentos reativos decorrentes do movimento do manipulador – em particular, para a execução de tarefas – perturba a dinâmica da base (JIAO; LIANG; WANG, 2017). Esta característica impossibilita a linearização do modelo dinâmico, tornando o projeto dos controladores para esta classe de robôs mais complexo e de análise intrincada.

Os desenvolvimentos acadêmicos na área de robótica espacial se estendem por diversas

aplicações, englobando desde operações do tipo *stand-alone* – como planejamento de trajetória, manipulabilidade e otimizações de *workspace* – a tarefas complexas de interação com alvos não-cooperativos, como *detumbling*.

Independentemente do contexto em que o robô espacial é utilizado, é vantajoso que se estabeleça um *framework* de modelagem matemática que atenda dois requisitos fundamentais: clareza construtiva e generalidade funcional. O primeiro requisito remete à coerência e autossuficiência na descrição matemática do modelo proposto para a representação dinâmica do sistema robótico. Isto é, a modelagem apresentada deve ser suficientemente clara para que possa ser reproduzida, bem como conter todos os detalhes necessários para sua implementação. Por outro lado, a generalidade funcional diz respeito à validade do modelo como instrumento representativo de fenômenos físicos, a saber, o movimento do manipulador espacial e sua eventual interação com o mundo externo. Neste cenário, todas as hipóteses que compõem as condições de operação do robô devem ser condizentes com o modelo matemático proposto e completamente pertinentes com as leis da mecânica clássica, além de não violar sua própria consistência interna. As restrições descritas são importantes para que as aplicações desenvolvidas na área sejam validadas de forma satisfatória e de modo que os métodos de modelagem e simulação possam ser implementados e explorados por toda a comunidade científica.

Considerando o panorama de aplicações do multimanipulador espacial *free-floating* estruturadas no *framework* Matriz Jacobiana Generalizada (GJM), que compreendem trabalhos desde o início da década de 1990 até os dias atuais, os autores entendem que a maioria dos modelos propostos ou referenciados pelos pesquisadores não satisfazem os dois requisitos supracitados. Em Wang et al. (2018), é apresentado um *framework* completo de *detumbling*, no qual os parâmetros inerciais do alvo – previamente desconhecidos – são estimados durante a operação de pós-captura. Apesar de considerar um robô de braço único, a aplicação compreende vários estágios da tarefa de estabilização, desde a pré-captura realizada em modo *free-flying* até a estratégia de compensação dinâmica por *reactive null space*. Por outro lado, o modelo matemático apresentado para o robô espacial em fases de *stand-alone* e *post-grabbing* é insuficiente em detalhes construtivos, mas referencia a proposta de *inverted chain model* de Abiko, Lampariello e Hirzinger (2006). Por sua vez, este tratamento particiona a dinâmica do sistema em espaço de junta e configuração – diferentemente da estruturação natural em junta e base, conforme proposto originalmente por Umetani e Yoshida (1989) – sem esclarecer detalhes matemáticos de tal modificação construtiva, como a definição das matrizes não-inerciais do modelo. Adicionalmente, o vínculo Newtoniano é equivocadamente interpretado no sentido de sua validade ser restrita a forças externas não-nulas, embora o próprio trabalho utilize tal equacionamento considerando atuação no efetuador. Portanto, a aplicação de Wang et al. (2018), mesmo sendo de um robô de braço único, é relevante para a área de pesquisa em questão, mas dificulta trabalhos futuros por demais autores devido à falta de clareza

construtiva na modelagem referenciada. Vale ressaltar, ainda, que a fase de pré-captura – viabilizada por um *chaser* – por ser conduzida em modo *free-flying*, atuadores aplicam forças externas no manipulador para anular sua velocidade relativa em relação ao *target*. Porém, este processo impreterivelmente torna o momento do robô não-nulo, de forma que a hipótese de momento nulo não pode ser empregada no vínculo Newtoniano na etapa de *path planning*. Esta contradição de modelo viola a condição de generalidade funcional da aplicação.

A tarefa de *detumbling* com estimativa de parâmetros do alvo também é explorada em Peng et al. (2019), mas para um manipulador de dois braços. Contudo, o trabalho destina grande parte do escopo para algoritmos de filtragem e previsão em detrimento do modelo dinâmico do sistema robótico. A formulação para a dinâmica externa é desenvolvida a partir das equações cinemáticas, mas impõe-se a restrição de momentos linear e angular nulos e conservados. Esta condição é incoerente com aplicações de estabilização, uma vez que a interação do manipulador com alvos em movimento naturalmente perturba sua dinâmica e transfere momento para o robô. Além disso, são disponibilizados resultados de trajetória de junta durante a fase de pós-captura, mesmo sem um modelo de dinâmica interna para controle de torque nas juntas ter sido descrito ou referenciado. De fato, inúmeras aplicações de manipuladores espaciais em captura de alvo pecam exatamente nesta consideração. Em (YAN et al., 2019), o modelo dinâmico é descrito – sem nenhum detalhe construtivo acerca das matrizes de dinâmica interna – sob a redução no equacionamento provida pela anulação de momentos, mesmo a aplicação desenvolvendo um controle de estabilização de momento do sistema estendido (a saber, robô e alvo).

Baseado nas iterativas simplificações de equacionamento por considerações de momento nulo no vínculo em diversas aplicações da área, o trabalho desenvolvido em Basmadji, Seweryn e Sasiadek (2020) propõe um modelo matemático para um manipulador de dois braços na presença de forças externas. Embora esta abordagem não seja inovadora do ponto de vista físico, uma vez que a assimilação de forças externas no modelo já foi proposta por Yoshida e Sashida (1993), apresenta características pioneiras do ponto de vista matemático. Entretanto, a execução do procedimento de modelagem não relaciona com suficiência de detalhes a sequência construtiva do *framework* com as leis de movimento Lagrangianas e Newtonianas. As matrizes são descritas em sua totalidade – inerciais, não-inerciais e cinemáticas – mas sem justificativas pautadas em mecânica analítica. Ademais, o modelo é limitado para robôs de dois braços e planares, afetando profundamente a generalidade funcional do trabalho.

No tangente ao nível de detalhamento da construção do modelo, destaca-se o trabalho de Wilde et al. (2018). Embora a aplicação seja limitada a um único braço e com forças externas nulas, todas as considerações cinemáticas e dinâmicas são corretamente explicitadas e correlacionadas com as leis de movimento, sem violar a consistência interna do modelo. Conforme originalmente proposto para o método GJM, a formulação Lagrangi-

ana é utilizada para a investigação da dinâmica interna e os vínculos de momento são utilizados para concepção da dinâmica externa. Porém, nas etapas de cálculo dos elementos não-inerciais, as derivadas parciais da dinâmica da base em relação ao espaço das juntas são equivocadamente anuladas. Uma vez que o movimento das juntas inevitavelmente perturba a posição e atitude da base robótica, estes termos devem ser propagados. Além disso, apesar de não produzir consequências para o trabalho, a formulação Lagrangiana descrita inclui a própria dinâmica da base como variável de estado, indicando que a dinâmica externa poderia ser obtida desta forma. Todavia, esta componente do modelo é necessariamente extraída dos vínculos Newtonianos, como é corretamente desenvolvido ao longo de Wilde et al. (2018).

Do ponto de vista de generalidade, o trabalho que apresenta um *framework* capaz de incorporar diversas aplicações envolvendo robôs espaciais – e que é implicitamente usado na parte majoritária dos trabalhos da área – é o de Yoshida e Nenchev (1997). Nesta abordagem, a base robótica livre é entendida como uma junta passiva do manipulador, sendo modelada separadamente das juntas ativas. Assim, as dinâmicas interna e externa são concebidas separadamente, enriquecendo interpretações físicas do movimento do robô e auxiliando no projeto de controladores. Embora relevante, a formulação discutida neste trabalho peca ao atribuir à dinâmica externa características semelhantes à parcela das juntas. Neste equacionamento, o qual é uma simples estruturação da abordagem pioneira de Umetani e Yoshida (1989), a componente dinâmica devida à base (ou efetuadores) deveria ter necessariamente termo não-inercial nulo. A justificativa para isto é que, diferentemente das equações de Euler-Lagrange, o vínculo Newtoniano não produz forças de Coriolis ou centrípetas.

Ainda na vertente de *detumbling*, pode-se observar uma oportunidade de melhoria na concepção da dinâmica de impacto dos efetuadores com o ambiente externo. Em diversos trabalhos, lança-se mão de um modelo inelástico de colisões para estimar a telemetria das juntas pós-colisão (RAINA et al., 2021). Embora este tratamento seja satisfatório nas ópticas de fundamentação física e generalidade funcional, pode-se utilizar o próprio modelo dinâmico do manipulador – adequadamente montado para lidar com forças externas – para atualizar as telemetrias. Este método possui a vantagem unificação teórica e confiabilidade, já que o cálculo do impacto será tão confiável como o próprio modelo do robô de pré e pós captura.

Portanto, neste trabalho, objetiva-se estruturar um modelo dinâmico para o robô espacial de múltiplos braços, base flutuante e no paradigma de sistemas subatuados e na vertente GJM, que seja suficientemente claro nas considerações de modelagem, as quais devem ser devidamente fundamentadas em leis da mecânica clássica e que contenha todos os detalhes necessários para sua implementação. Outra característica almejada é sua generalidade funcional, no sentido de não restringir que a construção cinemática seja planar, com número limitado de braços ou com forças e momentos externos nulos. É desejável

que a modelagem dinâmica seja fidedigna com todas as etapas de operação de *detumbling*: embora os momentos linear e angular possam ser inicialmente nulos, as forças externas aplicadas no instante do impacto forçam momentos não-nulos para a fase de pós-captura, os quais devem ser devidamente incorporados no modelo. Considerando que o foco primário do trabalho é o modelo dinâmico do robô, será utilizada uma arquitetura elementar de controle, como o Torque Calculado. Neste estudo, ruídos, incertezas paramétricas e forças dissipativas serão desprezados. A partir do modelo matemático desenvolvido, é estabelecida uma formulação de *detumbling* para múltiplos alvos fundamentada na matriz jacobiana generalizada de múltiplos braços.

A sequência desta dissertação é organizada da seguinte forma: o Capítulo 3 apresenta a modelagem cinemática e dinâmica de robôs espaciais, partindo de resultados consolidados em literatura de monomanipuladores e expondo novos resultados construídos no desenvolvimento deste trabalho para multimanipuladores espaciais, que são resumidos na Seção 3.9; o Capítulo 4 detalha as simulações computacionais que foram implementadas para analisar os modelos desenvolvidos; os resultados das simulações são relatados no Capítulo 5; por fim, as deduções e passagens de todos os resultados matemáticos apresentados neste trabalho são detalhadamente apresentadas nos Apêndices A, B e C, contemplando a construção das matrizes dinâmicas, vínculos de momento e equações de movimento, e o apêndice D sumariza todas as conclusões obtidas para o *framework* GJM aplicado a multi-manipuladores *free-floating*.

Capítulo 2

Objetivos

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo matemático para o robô espacial *free-floating* de n braços que atenda aos requisitos citados, a saber, clareza construtiva e generalidade funcional. Além disso, são objetivos específicos:

- ❑ Correção analítica dos termos não-inerciais da dinâmica interna;
- ❑ Adequação na representação da dinâmica externa no padrão de sistemas subatuados;
- ❑ Formulação matemática da tarefa de estabilização de múltiplos alvos;
- ❑ Correção nas equações de momento linear e angular;
- ❑ Generalização da matriz Jacobiana e cinemática direta com momento variável;
- ❑ Estudo comparativo entre o modelo desenvolvido, compreendendo análises de acompanhamento de trajetória em espaço das juntas e tarefas de *detumbling*.

O modelo desenvolvido neste trabalho será implementado na linguagem Python 3.10, com a IDE Spyder em sistema operacional Ubuntu 20.04.

Capítulo 3

Fundamentação teórica

As considerações de modelagem matemática apresentadas neste trabalho são baseadas em um manipulador espacial de braço único, haja vista a similaridade estrutural entre o equacionamento deste sistema e aquele de múltiplos braços. Todos os resultados obtidos para o cenário de braço único são imediatamente estendidos para o caso geral através de uma simples expansão na matriz de energia cinética. A derivação do formalismo matemático do multimanipulador como generalização da vertente GJM do manipulador espacial é detalhado nos Apêndices.

Nesta seção, é apresentada a solução do multi-manipulador de base flutuante estruturada no formato sub-atuado e pautada na proposta de Wilde et al. (2018), com partição entre dinâmica interna e dinâmica da base. Até o melhor conhecimento dos autores, este trabalho é o de maior destaque em literatura no tangente a riqueza de detalhes construtivos do modelo GJM, em particular das matrizes não inerciais.

Conforme proposta original do método GJM, a primeira é resolvida pelas equações de Euler-Lagrange, enquanto que a dinâmica externa é equacionada por vínculos Newtonianos, os quais permitem assimilar forças externas como derivadas temporais de momentos lineares e angulares. Seguindo modelos referenciados em literatura, a jacobiana generalizada é empregada para transferência dos distúrbios dos efetuadores para as juntas. Serão considerados momentos não-nulos durante toda a operação do manipulador. Por fim, a cinemática é discutida no contexto de matrizes rotacionais.

A formulação apresentada incorpora forças externas atuantes nos múltiplos efetuadores do robô. Tal concepção objetiva modelar, por exemplo, uma tarefa de captura de múltiplos alvos não-cooperativos, no qual as forças de impacto decorrentes das colisões entre alvos e efetuadores produz a forças generalizadas supracitadas. A Figura 1 ilustra o paradigma mencionado.

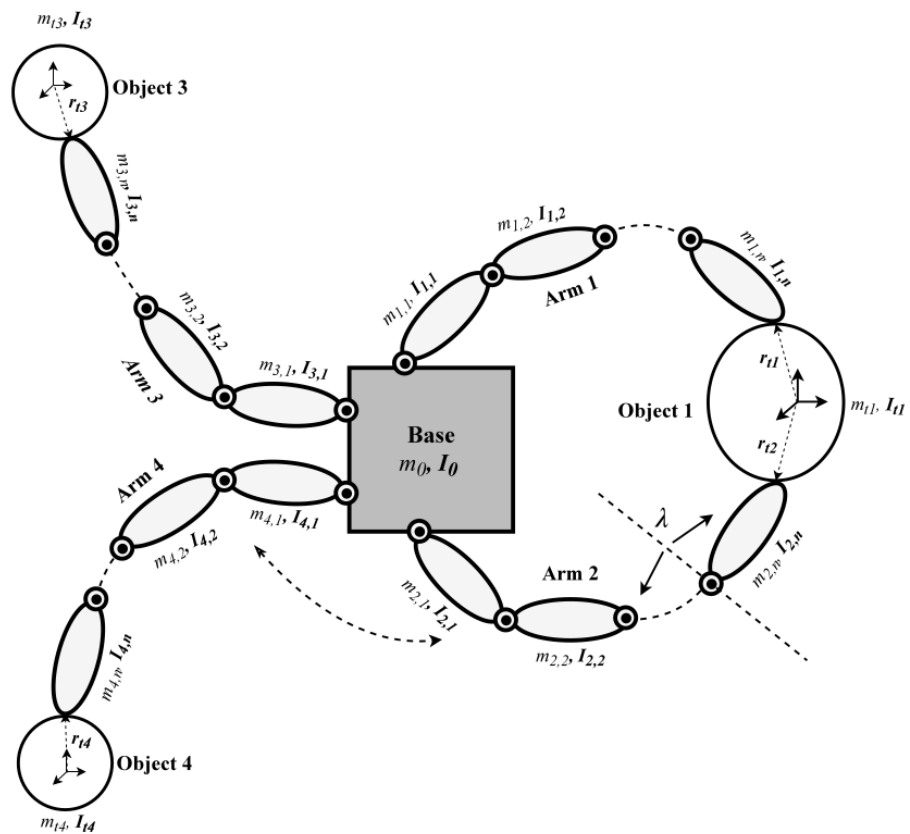


Figura 1 – Multi-manipulador em tarefa de captura de alvo. Fonte: (RAINA et al., 2021)

De fato, a modelagem dinâmica proposta neste trabalho tem por um de seus objetivos municiar o projeto dos sistemas de controle das juntas para estabilização dos alvos espaciais capturados, os quais possuem elevado momento angular. Esta tarefa, denominada *detumbling*, transfere o momento do alvo para o robô, de modo que o objeto estabilizado – e.g, detrito espacial – possa ser removido de órbita com segurança. Vale destacar que manipuladores free-floating não são capazes de dissipar o momento adquirido no processo de *detumbling*, fazendo-se necessária uma ação externa de reinicialização dinâmica, como *docking* em uma estação espacial ou satélite de inércia elevada.

3.1 Formulação cinemática

No panorama de modelagem de manipuladores, o propósito da formulação cinemática é calcular posições e orientações dos corpos rígidos constituintes do robô a partir de um formalismo predefinido. Os dados de entrada utilizados para este cálculo, além dos próprios hiper-parâmetros do manipulador (características inerciais e geométricas dos elos, juntas e base), são as saídas do modelo dinâmico. No contexto de multi-manipuladores espaciais, estas variáveis de saída, aplicadas como entradas para os algoritmos cinemáticos, são valores que caracterizam o estado das juntas e da base flutuante.

O formalismo cinemático citado refere-se à abordagem de parametrização das configurações – posição e orientação – dos elementos de interesse, como base e efetuadores. Em aplicações de *target path planning*, a qual planeja a trajetória dos efetuadores para otimizar o *grasping* de alvos e que antecede funcionalmente a tarefa de *detumbling*, as configurações dos elos do robô são geralmente modeladas por quatérnios (Wang et al., 2018). Neste trabalho, optou-se pela escolha de matrizes $SE(4)$ para parametrização cinemática. Este tratamento associa matrizes $T \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $T = (R, p)$ a cada elo do robô. As matrizes $R \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ são matrizes rotacionais que expressam a orientação de cada eixo do sistema de coordenadas dos elos com respeito a um referencial inercial. Os vetores $p \subset \mathbb{R}^3$ são as origens dos referenciais dos elos, também relacionadas ao sistema de coordenadas inercial. Em particular, a cinemática da base também é parametrizada com uma matriz $J_0 \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Porém, o paradigma de atualização dos valores cinemática da base é geralmente diferente daquele adotado para os elos.

Portanto, de acordo com o modelo cinemático escolhido, utiliza-se os ângulos de junta (ou deslocamentos, para mecanismos prismáticos) e configuração da base para calcular as matrizes $SE(4)$ de cada elo, incluindo efetuadores. Assim, pode-se rastrear a posição e orientação de cada elemento da cadeia ao longo da realização da tarefa. A seguir, são expostas as particularidades dos modelos cinemáticos para os elos, base e para manipulador. Vale reforçar que a descrição da cinemática de elos é feita considerando um manipulador de único braço, uma vez que sua generalização para multi-manipuladores é imediata devido ao desacoplamento cinemático entre os braços garantido pela base.

3.1.1 Cinemática das juntas

A cinemática de juntas propõe calcular as configurações de elos, juntas e efetuadores. Para isto, seja um manipulador espacial de braço único e N-DOF, isto é, constituído de N elos, como na Figura 2. Dado um referencial inercial arbitrário \mathcal{J} , as configurações – posição e orientação – de cada elo do robô são descritas por sistemas de coordenadas locais \mathcal{J}_j , \mathcal{L}_i solidários às juntas e aos elos, respectivamente. Denotando por $i = j = 0$ a base robótica e $j = N + 1$ o efetuador, tem-se $0 \leq j \leq N + 1$ e $0 \leq i \leq N$. Cada um destes sistemas são descritos inercialmente – em posição e orientação – por matrizes

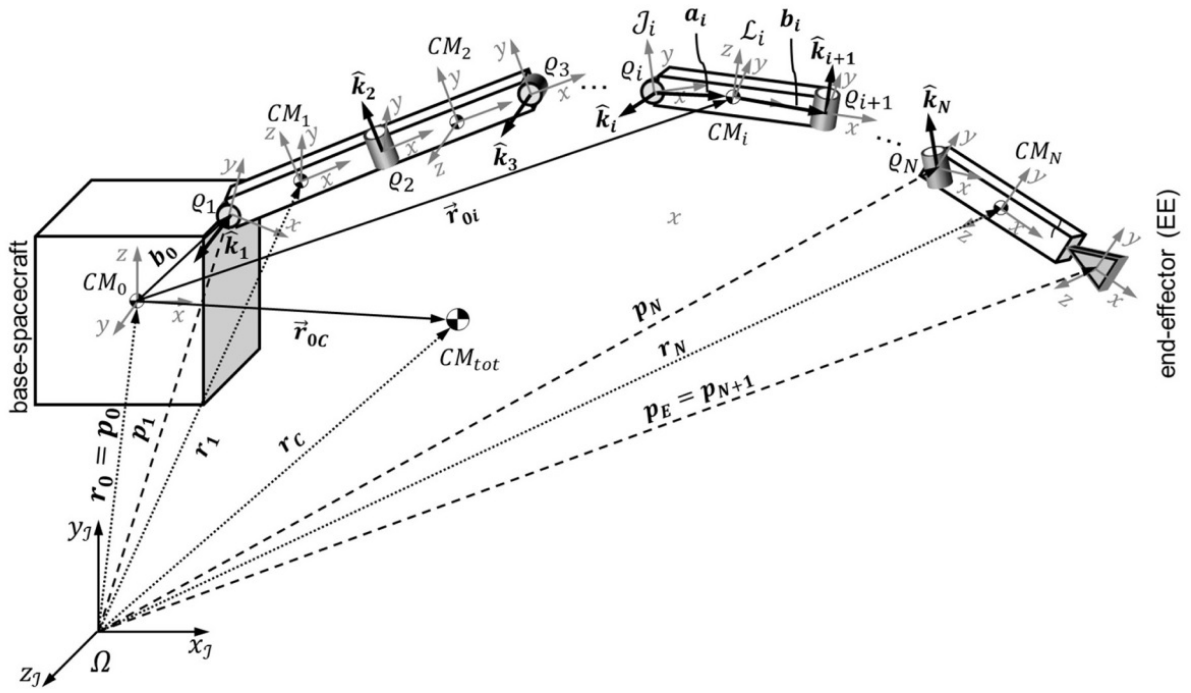


Figura 2 – Representação cinemática do robô de braço único. Fonte: (WILDE et al., 2018).

$${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i}, {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{L}_i} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}:$$

$${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{L}_i} = \begin{bmatrix} {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{L}_i} & {}^{\mathcal{J}}r_i \\ 0_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i} = \begin{bmatrix} {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_i} & {}^{\mathcal{J}}p_i \\ 0_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

As submatrizes ${}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{L}_i}, {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_i}$ são matrizes de rotação parametrizadas por cossenos diretores. Os vetores r_i, p_i designam vetores-posição do centro de massa do i -ésimo elo e a posição da i -ésima junta, respectivamente, com $r_0 = p_0$ o CM da base. Nesta representação, a junta i atua sobre o elo i , e o elo i contém a junta $i + 1$. Portanto, os referenciais de corpo rígido da junta $i + 1$ e do elo i são solidários:

$${}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{L}_i} = {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_{i+1}} \quad (3)$$

Em particular, ${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0} = {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{L}_0}$ caracteriza a base do manipulador com relação a/ao (w.r.t) referencial inercial. A junta $i = 1$, solidária ao elo $i = 0$ (base) possui orientação fixa e dependente das características construtivas do robô.

Na representação adotada, o eixo de cada junta rotativa é o eixo z do referencial de corpo rígido correspondente. Transferindo para o sistema inercial, tem-se:

$${}^{\mathcal{J}}\hat{k}_i = {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_i}Z_I \quad (4)$$

sendo $Z_i = [0 \ 0 \ 1]^T$ e $\mathcal{J}\hat{k}_i$ o versor inercial do eixo da i -ésima junta.

A convenção de parametrização cinemática adotada é a de Denavit-Hartenberg (Parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH)). Nesta convenção, ilustrada na Figura 3, os referenciais de cada elo são transformados para os referenciais do elo imediatamente posterior na cadeia através de uma matriz $A(\theta, d_i, \alpha_i, c_i) = {}^{\mathcal{J}_i}T_{\mathcal{J}_{i+1}}$:

$$A(\theta, d_i, \alpha_i, c_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & c_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & c_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

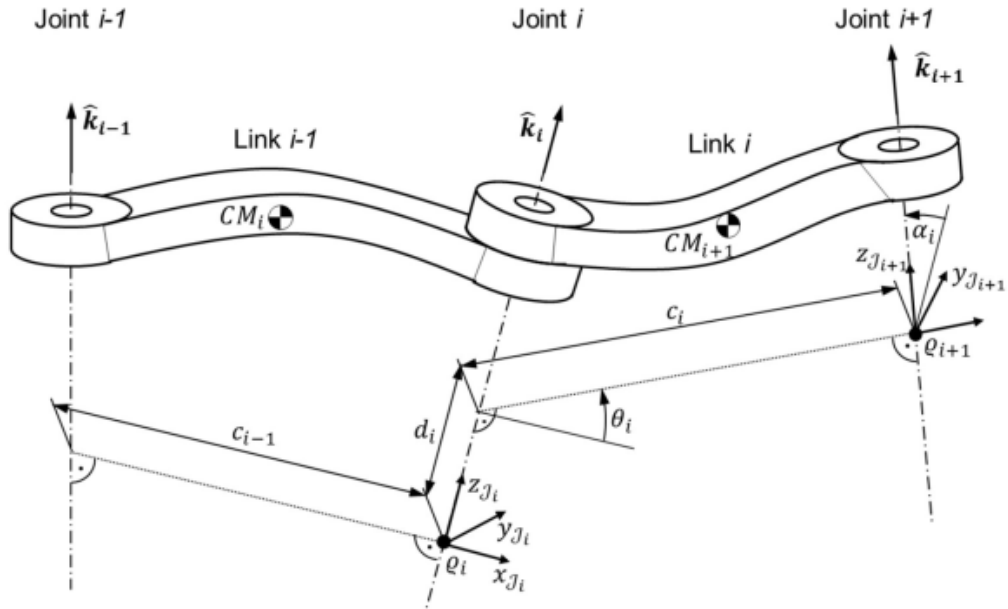


Figura 3 – Parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH). Fonte: (WILDE et al., 2018)

Para manipuladores de juntas rotativas, θ é a variável de junta. Pela lei de composição de transformações e a matriz DH, pode-se computar recursivamente a matriz de configuração de qualquer elo ou junta w.r.t referencial inercial:

$${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i} = {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_{i-1}} {}^{\mathcal{J}_{i-1}}T_{\mathcal{J}_i} = {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_{i-1}} A(q_{i-1}, d_{i-1}, \alpha_{i-1}, a_{i-i} + b_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N \quad (6)$$

$${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{L}_i} = {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i} {}^{\mathcal{J}_i}T_{\mathcal{L}_i} = {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i} A(q_i, d_i, \alpha_i, a_i), \quad 1 \leq i \leq N \quad (7)$$

Os termos a_i e b_i são as distâncias, respectivamente, da junta i para o CM do elo i , e deste para a junta $i + 1$.

3.1.2 Cinemática da base

Seja $x_0 = [r_0 \ \Gamma_0] \in \mathbb{R}^6$ o vetor de posição e orientação da base w.r.t \mathcal{J} . A configuração da base é descrita inercialmente pela matriz ${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0}$:

$${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0} = \begin{bmatrix} {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_0} & {}^{\mathcal{J}}r_0 \\ 0_{1,3} & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Neste trabalho, a matriz rotacional ${}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_0}$ será baseada na convecção XYZ dos ângulos de Euler. Neste contexto, a componente angular $\Gamma_0 = [\phi_0, \theta_0, \psi_0]$ é entendida como o conjunto dos ângulos de vôo da base (rolagem, arfagem, guinada).

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_0} &= R_{\phi_0} R_{\theta_0} R_{\psi_0} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 & 0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_0 & -\sin \psi_0 \\ 0 & \sin \psi_0 & \cos \psi_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

A convenção apresentada dos ângulos de Euler acarreta implicações no cálculo do vetor de velocidade angular inercial da base, ${}^{\mathcal{J}}\omega_0$. Enquanto a velocidade linear inercial da base ${}^{\mathcal{J}}v_0$ resulta diretamente da derivada temporal do vetor posição ${}^{\mathcal{J}}r_0$, o cômputo da velocidade angular é ponderado por uma matriz de mudança de base R_E . As definições constam nas Equações 10 e 11.

$${}^{\mathcal{J}}v_0^T = \dot{r}_0 \quad (10)$$

$${}^{\mathcal{J}}\omega_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = R_E(\phi, \theta, \psi) \dot{\Gamma}_0 \quad (11)$$

As definições apresentadas de velocidade inercial da base são necessárias para montagem das expressões de velocidade inercial dos elos e juntas do robô (vide Seção 3.1.3).

3.1.3 Cinemática do manipulador

Até o momento, as cinemáticas dos elos e da base foram analisadas separadamente. O modelo das juntas estabelece como computar as matrizes de configuração de cada elo a partir da descrição inercial da junta pivô, i.e, a junta adjacente à base. Porém, a atualização desta matriz em particular só pode ser executada ao incorporar a cinemática da base robótica. Isto é feito pela composição de transformações:

$${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_1} = {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0} {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_1} \quad (12)$$

A relação 12 acopla os dois modelos cinemáticos e será revisitada na seção 3.2.1, onde as derivadas parciais no espaço das juntas são deduzidas. Além disso, um resultado importante envolvendo acoplamento cinemático é o cálculo das velocidades lineares e angulares de cada elo com respeito a um referencial inercial, pois estas expressões viabilizam o desenvolvimento analítico do modelo de dinâmica interna de robôs espaciais a partir de equações de Lagrange (vide seção 3.2). Assim como na dinâmica, as informações cinemáticas dos elos são transferidos para o referencial inercial por intermédio da cinemática da base.

Seja $x_0 = [r_0 \ \Gamma_0] \in \mathbb{R}^6$ o vetor de posição e orientação da base w.r.t \mathbb{J} . Pode-se escrever a posição $r \in \mathbb{R}^3$ e ângulo $\theta \in \mathbb{R}^3$ (w.r.t \mathcal{J}) de cada elo como:

$$\begin{aligned} r_i &= r_0 + b_0 + \sum_{k=1}^{i-1} (a_k + b_k) + a_i \\ \theta_i &= \Gamma_0 + \sum_{k=1}^i (\mathcal{J} \hat{k}_k q_k) \end{aligned} \quad (13)$$

sendo $i = \{1, \dots, N\}$.

Nota-se que a Equação 13 sumariza o modelo cinemático completo, pois utiliza as variáveis de estado dinâmicas (q, x_0) para computar posições e ângulos de cada corpo do manipulador. Diferenciando a Equação 13 no tempo, tem-se as expressões de velocidades inerciais de cada elo:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \dot{r}_i &= \mathcal{J} \dot{r}_0 + \mathcal{J} \omega_0 \times (\mathcal{J} r_i - \mathcal{J} r_0) + \sum_{k=1}^N \hat{k}_k (\mathcal{J} r_i - \mathcal{J} p_k) \dot{q}_k \\ \mathcal{J} \omega_i &= \mathcal{J} \omega_0 + \sum_{k=1}^i (\mathcal{J} \hat{k}_k \dot{q}_k) \end{aligned} \quad (14)$$

Por fim, seja m_i a massa do i -ésimo elo da cadeia. A posição do CM do robô, em relação à base, é dada na Equação 15.

$$M r_{0C} = \sum_{i=1}^N m_i \mathcal{J} r_{0i} \quad (15)$$

sendo $\mathcal{J} r_{0i} = \mathcal{J} r_i - \mathcal{J} r_0$, $\mathcal{J} r_{0C} = \mathcal{J} r_C - \mathcal{J} r_0$ e $M = \sum_{i=0}^N m_i$.

3.2 Dinâmica interna

O objetivo da dinâmica interna é modelar o movimento das juntas a partir de torques aplicados em seus atuadores. No caso de robôs de base fixa, isto é suficiente para descrever toda a dinâmica do manipulador. Isto é, é possível calcular o movimento das juntas somente com as entradas de torque. No caso espacial, a dinâmica de cada braço é afetada pelo movimento da base e dos demais braços, de modo que a dinâmica interna não depende somente das variáveis de junta do braço considerado. Logo, este módulo da modelagem dinâmica, atuando de forma independente, não retorna o vetor de juntas. De fato, a nomenclatura "dinâmica interna" diz respeito à entrada dinâmica considerada, a saber, os torques de junta, e não ao tipo de resposta produzida. Mesmo em situações em que forças externas atuam no robô, elas devem ser previamente projetadas nas juntas para que este módulo possa ser executado.

A abordagem consolidada em literatura para obter o modelo dinâmico de manipuladores de base fixa, para fins de análise e projeto de controladores, consiste em aplicar as equações de movimento de Lagrange, considerando o vetor de juntas como coordenadas generalizadas (LEMOS, 2007). Neste cenário, as juntas são suficientes para descrever qualquer estado do manipulador. No paradigma de base livre, as juntas são capazes de caracterizar somente o "estado interno" do robô, isto é, com respeito a um sistema de coordenadas solidário à base, mas não calcula como este referencial se movimenta no espaço inercial. Esta característica motiva a separação da formulação matemática em módulos de *dinâmica interna* e *dinâmica externa*. A última é discutida em 3.3 e objetiva rastrear inercialmente um corpo de referência do robô.

Neste trabalho, o formalismo adotado para a dinâmica interna segue a proposta pioneira de Masutani, Miyazaki e Arimoto (1989), que prevê a aplicação direta das equações de Lagrange de base fixa para o caso espacial. Tomando o vetor de juntas q como coordenadas generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \tau_m \quad (16)$$

sendo T a energia cinética do manipulador, $\tau_m \in \mathbb{R}^N$ o vetor de torques de junta.

Em Wilde et al. (2018), juntamente à Equação 16, é associada outra equação de Euler-Lagrange com a telemetria da base x_0 como coordenada generalizada. Além de não ser devidamente demonstrado que x_0 atende todas as propriedades necessárias para que assuma o papel de coordenada generalizada, esta equação não é utilizada no modelo. De fato, a dinâmica interna decorre da Equação 16 e a dinâmica externa provém de vínculos de momento – como originalmente consolidado em Masutani, Miyazaki e Arimoto (1989) pautado nos trabalhos Umetani e Yoshida (1989) – e não de uma segunda aplicação das equações de Lagrange sobre a dinâmica da base livre. Este ponto será revisitado na seção de dinâmica externa, 3.3.

A formulação da energia cinética T apresentada aqui é a mesma já consolidada em literatura, a saber, o somatório das energias cinéticas individuais de cada corpo rígido do robô (base, elos e efetuadores):

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \mathcal{J} \omega_i^T \mathcal{J} I_i \mathcal{J} \omega_i + m_i \mathcal{J} \dot{r}_i^T \mathcal{J} \dot{r}_i \quad (17)$$

É de suma importância pontuar que a expressão 17 é válida como energia cinética se, e somente se, as velocidades e distribuições de massa são caracterizados com relação a um referencial inercial. Caso contrário, as leis de movimento selecionadas para equacionar a dinâmica do manipulador não são aplicáveis. Substituindo as expressões de velocidades 14 – que são inercialmente referenciadas – na relação de energia cinética 17 e efetuando um agrupamento algébrico conveniente, o termo T pode ser reescrito no formato matricial fechado da Equação 18:

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0^T & \dot{q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 & H_{0m} \\ H_{0m}^T & H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0^T \\ \dot{q}^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

As deduções algébricas e diferenciais que transformam as Equações 17 e 18, fundamentais para o método GJM, constam no A. As matrizes dinâmicas H_m , H_{0m} e H_0 são denominadas, respectivamente, por *matriz de inércia do manipulador*, *matriz de acoplamento dinâmico* e *matriz de inércia da base*. Na sequência, a construção de cada uma dessas matrizes será exposta. Por fim, 18 deve ser aplicado nas equações de Lagrange 16, culminando na equação geral da dinâmica interna de robôs espaciais.

A matriz H_m , independente da base robótica, é definida na Equação 19.

$$H_m = \sum_{i=1}^N (J_{R_i}^T \mathcal{J} I_i J_{R_i} + m_i J_{T_i}^T J_{T_i}) \quad (19)$$

Os termos J_{R_i} e J_{T_i} são conhecidos como matrizes jacobianas de velocidades angular e linear, respectivamente, e computadas conforme Equações 20, 21.

$$J_{R_i} = \begin{bmatrix} \mathcal{J} \hat{k}_1 & \cdots & \mathcal{J} \hat{k}_i & 0_{3,N-i} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathcal{J} \hat{k}_i = \mathcal{J} R_{\mathcal{J}_i} Z_I$$

$$J_{T_i} = \begin{bmatrix} J_{t_i}^1 & \cdots & J_{t_i}^i & 0_{3,N-i} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$J_{t_i}^j = \mathcal{J} \hat{k}_j^\times (\mathcal{J} r_i - \mathcal{J} p_j)$$

A matriz H_{0m} é definida na Equação 22.

$$\begin{aligned}
H_{0m} &= \begin{bmatrix} J_{TS} \\ H_{Sq} \end{bmatrix} \\
J_{TS} &= \sum_{i=1}^N m_i J_{T_i} \\
H_{Sq} &= \sum_{i=1}^N {}^{\mathcal{J}}I_i J_{R_i} + m_i {}^{\mathcal{J}}r_{0i}^{\times} J_{T_i}
\end{aligned} \tag{22}$$

Por fim, a matriz H_0 é definida pela Equação 23.

$$\begin{aligned}
H_0 &= \begin{bmatrix} MI_3 & -M {}^{\mathcal{J}}r_{0C}^{\times} \\ M {}^{\mathcal{J}}r_{0C}^{\times} & H_S \end{bmatrix} \\
H_S &= \sum_{i=1}^N ({}^{\mathcal{J}}I_i - m_i {}^{\mathcal{J}}r_{0i}^{\times} {}^{\mathcal{J}}r_{0i}) + {}^{\mathcal{J}}I_0
\end{aligned} \tag{23}$$

A forma fechada da dinâmica interna de manipuladores decorre da aplicação da Equação 18 de energia cinética T nas equações de Euler-Lagrange 16. O resultado é apresentado na Equação 24 mas será revisitado na Seção 3.2.3.

$$H_{0m}^T \ddot{x}_0 + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m}^T \dot{x}_0 + \dot{H}_m \dot{q} + c_m = \tilde{\tau}_m \tag{24}$$

Todos os termos provenientes do desenvolvimento analítico supracitado que contenham elementos não-lineares são agrupados em uma matriz c_m , definida na Equação 25.

$$\begin{aligned}
c_m &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{x}_0^T \right) H_0 \dot{x}_0 + \dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) \dot{x}_0 + \dot{x}_0^T H_0 \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{x}_0 \right) + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) \dot{q} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{x}_0^T \right) H_{0m} \dot{x}_0 + \dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) \dot{x}_0 + \dot{q}^T H_{0m}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{x}_0 \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \left[\dot{x}_0^T \left(\frac{\partial H_0}{\partial q} \right) \dot{x}_0 + \dot{q}^T \left(\frac{\partial H_m}{\partial q} \right) \dot{q} + \dot{x}_0^T \left(\frac{\partial H_{0m}}{\partial q} \right) \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial H_{0m}^T}{\partial q} \right) \dot{x}_0 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\partial \dot{x}_0^T}{\partial q} (H_0 \dot{x}_0 + H_{0m} \dot{q}) + (\dot{x}_0^T H_0 + \dot{q}^T H_{0m}^T) \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q} \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} (c_m^m + c_m^0)
\end{aligned} \tag{25}$$

O operador de derivada parcial em domínio de junta $\frac{\partial}{\partial q}$, $q \in \mathbb{R}^N$, ao ser aplicado sobre qualquer objeto, retorna N objetos de mesma dimensão. Logo, se $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a operação $\frac{\partial}{\partial q} B$ retorna N matrizes de dimensão $n \times n$, cada matriz representando a derivada parcial de B em relação a uma componente $q_k \in \mathbb{R}$ de q . Como todas as componentes de q são "funcionalmente similares", não é necessário distingui-las durante os equacionamentos.

As matrizes dinâmicas em questão dependem somente de jacobianas (linear e rotacional), elementos de inércia (tensores e massas) e vetores posição. Para calcular as derivadas

de tais objetos – em qualquer domínio – é suficiente que se compute as derivadas das matrizes de transformação ${}^{\mathcal{J}}T$. Estas contêm todas as informações necessárias para construir os elementos citados.

Assim, em cada domínio, as derivadas de ${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i}$ devem ser equacionadas e substituídas nas definições das derivadas de H_0, H_{0m} e H_m em cada domínio. Isto é feito na seção 3.2.1.

3.2.1 Derivadas em relação ao espaço das juntas

3.2.1.1 Matriz de inércia do manipulador $\left(\frac{\partial}{\partial q} H_m\right)$

Aplicando o operador $\frac{\partial}{\partial q}$ à equação 19 e utilizando a regra do produto para diferenciação, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} H_m &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^N (J_{R_i}^T {}^{\mathcal{J}}I_i J_{R_i} + m_i J_{T_i}^T J_{T_i}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_k} J_{R_i}^T \right) {}^{\mathcal{J}}I_i J_{R_i} + J_{R_i}^T \left(\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}}I_i \right) J_{R_i} + J_{R_i}^T {}^{\mathcal{J}}I_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} J_{R_i} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[m_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} J_{T_i}^T \right) J_{T_i} + m_i J_{T_i}^T \left(\frac{\partial}{\partial q_k} J_{T_i} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

As derivadas parciais das jacobianas $J_{R_i}^T$ e $J_{T_i}^T$ são computadas a partir das Equações 20, 21:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} J_{R_i} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_1} \right) Z_I \quad \cdots \quad \left(\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_i} \right) Z_I \quad 0_{3,N-i} \right] \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_k} J_{T_i} &= \left[\frac{\partial}{\partial q_k} J_{t_i}^1 \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial q_k} J_{t_i}^i \quad \cdots \quad 0_{3,N-i} \right] \\ \frac{\partial}{\partial q_k} J_{t_i}^j &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_j} \right) Z_I \right]^{\times} ({}^{\mathcal{J}}r_i - {}^{\mathcal{J}}p_j) + \hat{k}_j^{\times} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}}r_i - \frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}}p_j \right) \end{aligned} \quad (28)$$

A diferenciação dos tensores de inércia ${}^{\mathcal{J}}I_i$, w.r.t referencial inercial, é facilitada mediante transferência para os sistemas de coordenada de corpo rígido de cada elo:

$${}^{\mathcal{J}}I_i = {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{L}_i} \mathcal{L}_i I_i {}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{L}_i}^T \quad (29)$$

Em virtude da hipótese de que os corpos constituintes da cadeia são rígidos, decorre que a distribuição de massa de um determinado elo com respeito ao referencial deste mesmo elo é constante. Isto é, $\mathcal{L}_i I_i$ independe de qualquer dinâmica.

Portanto, as derivadas parciais de ${}^{\mathcal{J}}I_i$ no espaço das juntas são deduzidas fazendo $\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{L}_i I_i = 0, \forall k$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} I_i &= \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i} \right) \mathcal{L}_i I_i \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i}^T + \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{L}_i I_i \right) \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i}^T + \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i} \mathcal{L}_i I_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i}^T \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i} \right) \mathcal{L}_i I_i \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i}^T + \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i} \mathcal{L}_i I_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i}^T \right)
\end{aligned} \tag{30}$$

Logo, o cálculo das derivadas parciais da matriz H_m no espaço das juntas requer soluções para $\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_i$, $\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} T_i$ e $\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{L}_i I_i$. Observa-se que as expressões 27, 28 e 30 dependem das derivadas das matrizes rotacionais $\mathcal{J} R_{\mathcal{J}_i}$ e vetores-posição $\mathcal{J} r_i$, $\mathcal{J} p_j$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$. De fato, os objetos descritivos de rotação e posição de elos e juntas são agrupados em matrizes de configuração $\mathcal{J} T_{\mathcal{J}_i}$ e $\mathcal{J} T_{\mathcal{L}_i}$, definidas nas Equações 1, 2. Empregando estas relações, as derivadas dos elementos de posição e atitude podem ser extraídas das derivadas das matrizes de configuração.

Para vetores-posição:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} p_i \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} T_{\mathcal{J}_i} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} r_i \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} T_{\mathcal{L}_i} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{32}$$

Para as matrizes rotacionais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_{\mathcal{J}_i} \\ 0_{1,3} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} T_{\mathcal{J}_i} \right) \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{33}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_{\mathcal{L}_i} \\ 0_{1,3} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} T_{\mathcal{L}_i} \right) \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3,1} \\ 0_{1,3} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{34}$$

Assim, o problema em questão culmina exclusivamente na dedução de expressões para as derivadas parciais das matrizes de configuração de elos e juntas (w.r.t. referencial inercial).

A fim de obter uma expressão analítica para $\mathcal{J} T_{\mathcal{J}_i}$, a lei de transformação de referenciais de juntas 6 é reescrita no formato geral da Equação 35:

$$\mathcal{J} T_{\mathcal{J}_i} = \mathcal{J} T_{\mathcal{J}_0} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} \tag{35}$$

O formato apresentado é conveniente do ponto de vista de separabilidade das dinâmicas no domínio inercial ($\mathcal{J} T_{\mathcal{J}_0}$) e espaço das juntas ($\mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i}$), uma vez que segunda componente independe do acoplamento dinâmico intrínseco ao robô espacial. Por outro lado, a primeira parcela engloba os efeitos das juntas (via acoplamento dinâmico) e do

próprio movimento imposto à base via forças externas e, portanto, não pode ser desprezada na modelagem.

Nota: até o melhor conhecimento dos autores, a formulação 35 é uma inovação deste trabalho. Isto deve ser salientado pois (WILDE et al., 2018) não inclui o termo ${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0}$ em 35, o que equivale a impor $\frac{\partial x_0}{\partial q} = 0$. Este termo, doravante denominado *acoplamento dinâmico não inercial* e também desprezado em literatura, será discutido em detalhes na seção 3.2.2.

Aplicando o operador $\partial/\partial q$ à Equação 35, resulta a expressão geral 36 para as derivadas parciais das matrizes ${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0} \right) {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i} + {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i} \right) \quad (36)$$

A solução da Equação 36 requer o cômputo das derivadas, w.r.t espaço das juntas, nos dois domínios dinâmicos do manipulador: o próprio espaço das juntas (dinâmica interna) e o domínio inercial (dinâmica externa). Naturalmente, o primeiro problema é abordado de forma análoga a um robô de base fixa, no qual o movimento de cada junta afeta apenas elos subsequentes da cadeia (vínculo de *forward*). Além disso, a formulação 35 permite tratar cada braço da cadeia isoladamente. Novamente, vale destacar que, em contrapartida, as variações no vetor de junta de cada braço propagam-se simultaneamente para a base robótica, cujos efeitos são assimilados em ${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0}$.

Com isso, apoiando na facilidade de seu tratamento algébrico, propõe-se inicialmente a investigação de $\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i}$. A fim de usufruir das vantagens analíticas estabelecidas pelas propriedades de composições sequenciais, a matriz ${}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i}$ é desmembrada no formato 37, válida para todos os índices i, j, k em $\{1, \dots, N_p\}$ e deduzida pela aplicação recursiva de 6:

$${}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i} = {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_k} A(q_k, d_k, \alpha_k, a_k + b_k) \prod_{j=k+1}^{i-1} A(q_j, d_j, \alpha_j, a_j + b_j) \quad (37)$$

em que a matriz de Denavit-Hartenberg $A(q, d, \alpha, a + b)$ é caracterizada em 5.

Acerca da Equação 37, dois pontos devem ser ressaltados. Primeiramente, embora a modelagem em questão seja direcionada à robôs de múltiplos braços, esta equação é estruturada para uma única cadeia aberta, isto é, um braço robótico referenciado à sua base. Por esta razão, as matrizes ${}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i}$ devem ser associadas a uma família indexada em $\{1, \dots, N_p\}$, com p definindo o índice do braço considerado. Estas hipóteses são validas pelas características de desacoplamento apresentadas anteriormente.

Por último, o índice k inserido na formulação 37 é o mesmo do operador de diferenciação parcial $\partial/\partial q_k$. Isto implica que a matriz de configuração de cada elemento

da cadeia, w.r.t base, é dividida explicitamente em três componentes: contribuições de índices inferiores a k , de juntas com o mesmo índice k e de elementos à frente na cadeia. É precisamente esta construção que permite utilizar a propriedade de composições sequenciais para otimizar o desenvolvimento analítico, conforme discutido na sequência.

A derivada $\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i}$ é separada em três casos, dependendo da relação de ordem dos índices k – índice da diferenciação – e i – índice da junta. Por uma conveniência notacional, a análise dos índices será particionada por $i - 1$ – em vez de i – uma vez que as deduções são feitas sobre o referencial de junta \mathcal{J}_i (w.r.t base), cuja dependência de junta de maior ordem é $i - 1$ (de fato, a partir da estruturação proposta para a formulação cinemática, a variável de junta indexada por i não afeta o referencial de corpo rígido da junta i).

$k > i - 1$

Neste caso, pretende-se calcular a derivada do referencial de uma determinada junta (a saber, índice i) com relação a uma junta superior na cadeia (índice k). No domínio considerado, movimentos de juntas superiores não modificam os estados de elementos com indexação inferior. Logo, a derivada parcial é nula para esta combinação de índices:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i} = \mathbf{0}_{4,4} \quad (38)$$

$k = i - 1$

O sistema de corpo rígido atrelado a junta i é afetado pela variável de junta $i - 1$, conforme exposto anteriormente. Da mesma forma, o movimento da junta $i - 1$ não influencia nas configurações de elementos de indexação anterior e, como este caso não analisa juntas superiores, a variação descrita por esta derivada impacta somente no próprio referencial de junta $i - 1$. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_k} {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left({}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_{i-1}} A_{DH}(q_{i-1}, d_{i-1}, \alpha_{i-1}, a_{i-1} + b_{i-1}) \right) \\ &= {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_{i-1}} \frac{\partial}{\partial q_k} A_{DH}(q_{i-1}, d_{i-1}, \alpha_{i-1}, a_{i-1} + b_{i-1}) \end{aligned} \quad (39)$$

Isto também pode ser visto matematicamente na Equação 37 via regra da cadeia, de modo que a substituição $k = i - 1$ remove o produtório.

$k < i - 1$

Este é o panorama mais geral de 37. Conforme discussões anteriores, sabe-se que diferenciais em elementos da cadeia não afetam juntas inferiores. Adicionalmente, devido à ortogonalidade do próprio vetor de junta, tais elementos também não afetam diretamente juntas superiores. Isto é evidente pela formulação por composição de matrizes DH, sendo que cada matriz depende apenas de uma única junta (a qual é ortogonal às demais). Logo, o uso da regra da cadeia na Equação 37 resulta na derivação explícita apenas da própria matriz DH da junta k (as demais são anuladas):

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} = \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} A_{DH}(q_k, d_k, \alpha_k, a_k + b_k) \right) \prod_{j=k+1}^{i-1} A_{DH}(q_j, d_j, \alpha_j, a_j + b_j) \quad (40)$$

É importante destacar que, apesar das juntas indexadas no intervalo $[k + 1, i - 1]$ não constarem com derivação parcial explícita na Equação 40, todas elas são fisicamente afetadas pela variação em k (por ser uma modificação dinâmica em junta inferior). Este efeito está computado no termo do produtório, o qual inclui todos os referenciais de corpo rígido do intervalo supracitado.

A Equação 41, que compila os resultados das análises dos três casos, é um guia para o cômputo das derivadas dos referenciais de junta – w.r.t base – no domínio das juntas:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} = \begin{cases} 0_{4,4} & , k > i - 1 \\ \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_{i-1}} \frac{\partial}{\partial q_{i-1}} A_{DH}(q_{i-1}, d_{i-1}, \alpha_{i-1}, a_{i-1} + b_{i-1}) & , k = i - 1 \\ \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} A_{DH}(q_k, d_k, \alpha_k, a_k + b_k) \right) \prod_{j=k+1}^{i-1} A_{DH}(q_j, d_j, \alpha_j, a_j + b_j) & , k < i - 1 \end{cases} \quad (41)$$

Até este ponto, o equacionamento desenvolvido foi destinado à referenciais associados às juntas. A partir dos resultados obtidos, pode-se gerar expressões para as derivadas das configurações de elo nas mesmas condições: espaço das juntas, w.r.t base. A ponte entre as matrizes de transformação de juntas e elos é a Equação 7 que, apesar de estar inercialmente referenciada, sua validade é mantida quando transferida para o sistema de coordenadas da base. Portanto, a derivada parcial da Equação 7, apresentada na expressão 42, constitui o vínculo entre os equacionamentos variacionais de elo e junta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{L}_i} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} A_{DH}(q_i, d_i, \alpha_i, a_i) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} \right) A_{DH}(q_i, d_i, \alpha_i, a_i) + \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} A_{DH}(q_i, d_i, \alpha_i, a_i) \right) \end{aligned} \quad (42)$$

A única distinção nas deduções das derivadas dos referenciais de elo é o particionamento em i , pois a configuração do elo i é afetado – em última ordem de indexação – pela junta i . Contudo, as expressões dos três casos para os elos pode ser diretamente obtida por correlação com os índices da Equação 41 e substituições na Equação 42, quando necessário.

k > i

Este caso recai sobre a primeira equação de 41. Logo:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{L}_i} = 0_{4,4} \quad (43)$$

k = i

O caso $k = i$ ainda pertence a $k > i - 1$, de modo que $\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} = 0_{4,4}$. Portanto, apenas a segunda parcela da expressão 42 contribui para a variação em questão:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{L}_i} = \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} \frac{\partial}{\partial q_i} A_{DH}(q_i, d_i, \alpha_i, a_i) \quad (44)$$

k < i

Com $k \neq i$, a derivada parcial do segundo termo da Equação 42 é anulada pela ortogonalidade do vetor de junta. Logo, neste caso, apenas a primeira parcela afeta a derivada:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{L}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} \right) A_{DH}(q_i, d_i, \alpha_i, a_i) \quad (45)$$

A Equação 46 reúne a conclusão da análise variacional dos referenciais de elo:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{L}_i} = \begin{cases} 0_{4,4} & , k > i \\ \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} \frac{\partial}{\partial q_i} A_{DH}(q_i, d_i, \alpha_i, a_i) & , k = i \\ \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}_0 T_{\mathcal{J}_i} \right) A_{DH}(q_i, d_i, \alpha_i, a_i) & , k < i \end{cases} \quad (46)$$

Portanto, as Equações 41 e 46 são necessárias e suficientes para o cômputo da contribuição da dinâmica interna na Equação 36.

Por sua vez, a contribuição da dinâmica externa na Equação 36 demanda o cálculo de $\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} T_{\mathcal{J}_0}$:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} T_{\mathcal{J}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_{\mathcal{J}_0} & \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{J} r_0 \\ 0_{1,3} & 1_{3,1} \end{bmatrix} \quad (47)$$

A matriz $\mathcal{J} R_{\mathcal{J}_0}$ é parametrizada pela componente angular $\Gamma_0 = [\phi_0, \theta_0, \psi_0]$ da dinâmica da base $x_0 = [r_0, \Gamma_0]$, conforme seção 3.1.2. As derivadas mencionadas são computadas pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} R_{\mathcal{J}_0} = \frac{\partial}{\partial q_k} (R_{\phi_0} R_{\theta_0} R_{\psi_0}) = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} R_{\phi_0} \right) R_{\theta_0} R_{\psi_0} + R_{\phi_0} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} R_{\theta_0} \right) R_{\psi_0} + R_{\phi_0} R_{\theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} R_{\psi_0} \right) \quad (48)$$

Os termos diferenciais matriciais são calculados da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} R_{\phi_0} = \frac{\partial}{\partial q_k} \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 & 0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \phi_0}{\partial q_k} \sin \phi_0 & -\frac{\partial \phi_0}{\partial q} \cos \phi_0 & 0 \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial q_k} \cos \phi_0 & -\frac{\partial \phi_0}{\partial q} \sin \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} R_{\theta_0} = \frac{\partial}{\partial q_k} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \theta_0}{\partial q_k} \sin \theta_0 & 0 & -\frac{\partial \theta_0}{\partial q_k} \cos \theta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \theta_0}{\partial q_k} \cos \theta_0 & 0 & -\frac{\partial \theta_0}{\partial q_k} \sin \theta_0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} R_{\psi_0} = \frac{\partial}{\partial q_k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_0 & -\sin \psi_0 \\ 0 & \sin \psi_0 & \cos \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \psi_0}{\partial q_k} \sin \psi_0 & -\frac{\partial \psi_0}{\partial q_k} \cos \psi_0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_0}{\partial q_k} \cos \psi_0 & -\frac{\partial \psi_0}{\partial q_k} \sin \psi_0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

As componentes $\frac{\partial \phi_0}{\partial q_k}, \frac{\partial \theta_0}{\partial q_k}, \frac{\partial \psi_0}{\partial q_k}$ podem ser extraídas de:

$$\frac{\partial x_0}{\partial q_k} = \left[\frac{\partial x_0}{\partial q_k}, \frac{\partial y_0}{\partial q_k}, \frac{\partial z_0}{\partial q_k}, \frac{\partial \phi_0}{\partial q_k}, \frac{\partial \theta_0}{\partial q_k}, \frac{\partial \psi_0}{\partial q_k} \right] \quad (52)$$

sendo as três primeiras componentes constituintes de $\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial q_k}$, que parametriza a parte translacional de 47.

O termo $\frac{\partial x_0}{\partial q}$ descreve uma derivada parcial entre as duas dinâmicas do robô espacial. Portanto, a obtenção de uma forma analítica fechada para este termo é desafiadora. Neste trabalho, esta parcela do modelo é denominada Acoplamento Dinâmico Não-Inercial (NIDC) e é discutida em detalhes na Seção 3.2.2.

3.2.1.2 Matriz de acoplamento dinâmico $\left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}\right)$

Conforme definição 22, tem-se as relações 53, 54, 55:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} H_{0m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} J_{TS} \\ \frac{\partial}{\partial q_k} H_{Sq} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} J_{TS} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial}{\partial q_k} J_{T_i}, \quad 1 \leq k \leq N \quad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} H_{Sq} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} I_i \right) J_{R_i} + \mathcal{J} I_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} J_{R_i} \right) + m_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} r_{0i} \right)^\times J_{T_i} + m_i \mathcal{J} r_{0i}^\times \left(\frac{\partial}{\partial q_k} J_{T_i} \right) \quad (55)$$

Nesta etapa, vale notar que o termo $\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J} r_{0i}$ contém uma contribuição da forma $\frac{\partial x_0}{\partial q}$, uma vez que $\mathcal{J} r_{0i} = \mathcal{J} r_i - \mathcal{J} r_0$. O termo de *acoplamento dinâmico não inercial*, previamente mencionado nesta seção, é anulado no trabalho de (WILDE et al., 2018), impactando também nesta parte da dinâmica interna (vide seção 3.2.2).

3.2.1.3 Matriz de inércia da base $\left(\frac{\partial}{\partial q}H_0\right)$

Conforme definição 23, a derivada parcial da matriz de inércia da base é computada pelas Equações 56 e 57.

$$\frac{\partial}{\partial q_k}H_0 = \begin{bmatrix} 0_3 & -\frac{\partial}{\partial q_k}(M^{\mathcal{J}}r_{0C}^\times) \\ \frac{\partial}{\partial q_k}(M^{\mathcal{J}}r_{0C}^\times) & \frac{\partial}{\partial q_k}H_s \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k}H_s = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}I_i - m_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} r_{0i} \right)^\times r_{0i}^\times - m_i r_{0i}^\times \left(\frac{\partial}{\partial q_k} r_{0i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}I_0 \quad (57)$$

A discussão anterior sobre $\frac{\partial x_0}{\partial q_k}$ também se aplica ao termo $\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}I_0$, que depende das matrizes de rotação da base ${}^{\mathcal{J}}R_{\mathcal{J}_0}$, que por sua vez é parametrizada por Γ_0 ($x_0 = [{}^{\mathcal{J}}r_0 \Gamma_0]$).

$$\frac{\partial}{\partial q_k} (Mr_{0C}^\times) = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \mathcal{J}r_{0i} \right)^\times \quad (58)$$

3.2.2 Acoplamento dinâmico não-inercial

A construção das matrizes de Coriolis e forças centrípetas demanda explicitamente o cálculo da derivada parcial da dinâmica da base em relação às juntas, i.e., $\frac{\partial x_0}{\partial q}$. Isto é uma consequência das equações de movimento de Euler-Lagrange utilizadas na dinâmica interna, as quais aplicam derivadas parciais de q na energia cinética T . Como T depende diretamente de x_0 , o termo $\frac{\partial x_0}{\partial q}$ figura no equacionamento. De fato, esta componente representa uma derivada parcial entre as duas incógnitas do sistema de EDPs do qual resulta a solução dinâmica buscada. Além disso, como discutido na Seção 3.3, os vínculos empregados na obtenção da forma fechada do modelo *stand-alone* não correlacionam diretamente x_0 e q , mas suas derivadas temporais \dot{x}_0 e \dot{q} . Portanto, a derivada parcial de x_0 com respeito a q – neste trabalho referenciada como termo de **acoplamento dinâmico não inercial (Acoplamento Dinâmico Não-Inercial (NIDC))** – impõe sérios obstáculos à obtenção de uma solução analítica completa para o multi-manipulador.

O trabalho de Wilde et al. (2018) estabelece como hipótese de modelagem que a variável x_0 não depende de q , isto é:

$$\frac{\partial x_0}{\partial q} = 0 \quad (59)$$

Vale reforçar que a condição 59 não é apresentada como uma *aproximação* de modelagem, mas como um fato físico. A partir desta hipótese, as derivadas parciais da cinemática da base ${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0}$ em relação a q são nulas. Consequentemente, este termo é desconsiderado no cômputo das derivadas parciais de H_{0m} e H_0 em relação a q .

Porém, o NIDC designa uma medida de sensibilidade da posição inercial do centro de massa da base com respeito às variáveis de junta. Em decorrência do acoplamento dinâmico, qualquer variação nos ângulos de junta (de qualquer junta) provoca uma resposta

dinâmica no manipulador, que é propagada para a base. De fato, a influência é indireta, sendo causada por uma ação de torque nos atuadores. Contudo, devido à impossibilidade de se variar q_k sem que $\mathcal{J}r_0$ seja modificado, esta derivada parcial não é nula.

Com mais razão, na abordagem *stand-alone* por vínculos, a dependência de x_0 com q é expressa matematicamente por:

$$\dot{x}_0 = (-H_0^{-1}H_{0m})\dot{q} \quad (60)$$

A Equação 60 será propriamente fundamentada na discussão de dinâmica externa (Seção 3.3). Integrando ambos os lados de 60, obtém-se:

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t (-H_0^{-1}H_{0m})\dot{q}(s) ds \quad (61)$$

Como as matrizes dinâmicas do lado direito de 61 dependem de q , tem-se que $\frac{\partial}{\partial q}x_0 \neq 0$. Logo, no cenário descrito por Wilde et al. (2018), a simplificação $\frac{\partial}{\partial q}x_0 = 0$ é entendida pelo sistema como uma dinâmica não modelada, podendo prejudicar a performance de controladores e acurácia de métricas em aplicações reais.

Entretanto, a inclusão do fator $\frac{\partial}{\partial q}x_0$ é matematicamente desafiadora. Além de ser altamente não linear, as matrizes H_0 e H_{0m} contém termos que dependem de x_0 , dificultando sua separação no equacionamento. Até o melhor conhecimento dos autores, não há outros trabalhos em literatura que explicitam a inclusão do NIDC, mesmo que numericamente. Assim, considera-se que isto representa uma lacuna no modelo dinâmico de manipuladores espaciais.

Neste trabalho, propõe-se estruturar o NIDC a partir de um modelo híbrido, contendo uma parte analítica e outra numérica. Para obter $\frac{\partial x_0}{\partial q}$, os dois lados de 60 são diferenciados w.r.t espaço das juntas:

$$\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} [(-H_0^{-1}H_{0m})\dot{q}] = \left(\frac{\partial J_0}{\partial q_k} \right) \dot{q} + J_0 \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q_k} \right) \quad (62)$$

As variáveis q e \dot{q} são independentes. De fato, isto é implicitamente considerado nas próprias equações de movimento de Lagrange: as derivadas temporais das coordenadas generalizadas são mutuamente independentes (LEMOS, 2007). Portanto, o último termo da Equação 62 é nulo, de modo que:

$$\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial J_0}{\partial q_k} \right) \dot{q} = \left[- \left(\frac{\partial H_0^{-1}}{\partial q_k} \right) H_{0m} - H_0^{-1} \left(\frac{\partial H_{0m}}{\partial q_k} \right) \right] \dot{q} \quad (63)$$

Utilizando a propriedade de diferenciação de matrizes inversas:

$$\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_k} = \left[H_0^{-1} \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_k} \right) H_0^{-1} H_{0m} - H_0^{-1} \left(\frac{\partial H_{0m}}{\partial q_k} \right) \right] \dot{q} \quad (64)$$

Como a dedução das derivadas parciais da Equação 64 já foi apresentada neste trabalho, esta equação é uma solução analítica do NIDC a nível de velocidade. Porém, o modelo dinâmico quer uma resposta a nível de posição. Para isto, o variável x_0 deve ser "extraída" de \dot{x}_0 :

$$\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d}{dt} x_0 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} x_0 \right) \quad (65)$$

Nesta passagem, x_0 é aproximado como uma função de classe C^2 , o que permite permutar suas derivadas. Assim:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_0}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial x_0}{\partial q_k} \Rightarrow \frac{\partial x_0}{\partial q_k} = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_k} \right) (s) ds \quad (66)$$

sendo t_0 o instante inicial de operação do robô.

Isto significa que uma resposta a nível de posição do NIDC requer a integração de 64. Para que a solução seja analítica, as matrizes de inércia da base e acoplamento dinâmico – e suas derivadas parciais no espaço das juntas – devem ser integradas simbolicamente. Embora este procedimento seja possível, não pertence ao escopo deste trabalho. Portanto, a integração será feita numericamente:

$$\frac{\partial x_0}{\partial q_j}(k+1) = \frac{\partial x_0}{\partial q_j}(k) + T_s \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_j}(k) \quad (67)$$

sendo T_s o tempo de atualização dinâmica da simulação e valores iniciais nulos. O índice j foi utilizado como identificação da junta de diferenciação para não confundir com o índice k da discretização.

Na Equação 67, $\frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_j}(k)$ é computada pontualmente conforme Equação 64, com todas as variáveis em fase com o índice k .

Por fim, vale ressaltar que toda a formulação apresentada para o NDIC é válida somente para o caso *stand-alone*, uma vez que a relação 60 foi imposta como vínculo para a dinâmica da base.

3.2.3 Equação de dinâmica interna

Observa-se que até o presente momento da exposição as equações de movimento de lagrangianas não foram necessárias, uma vez que as matrizes do modelo GJM independem do formalismo físico escolhido para descrever o movimento. Aplicando a expressão de energia cinética 18 nas equações de Lagrange 16, tem-se o formato matricial fechado da dinâmica interna de robôs espaciais, vertente GJM:

$$H_{0m}^T \ddot{x}_0 + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m} \dot{x}_0 + \dot{H}_m \dot{q} + c_m = \tau_m \quad (68)$$

As deduções que resultam na Equação 68 são detalhadas no A. No contexto de robôs *free-floating*, a equação 68 é praticamente insignificante sem um módulo de cálculo da dinâmica da base x_0 , pois não descreve o movimento inercial de nenhum corpo do robô,

particularmente, dos efetuadores. Esta é a justificativa histórica para o formalismo lagrangiano de base fixa não ter sido extrapolado para o caso espacial ((MASUTANI; MIYAZAKI; ARIMOTO, 1989) até que a dinâmica externa do *free-floating* fosse solucionada ((UMETANI; YOSHIDA, 1989)). A junção das duas dinâmicas é discutida em 3.4.

3.3 Dinâmica externa

Conforme discutido na Seção 3.2, a dinâmica interna descreve o comportamento das juntas e elos do manipulador com respeito à sua base. Porém, esta formulação não diz respeito ao movimento destes corpos em relação a um referencial inercial, o que é de suma importância para realização de tarefas. A modelagem no espaço cartesiano, ou espaço da tarefa, é intermediada pela *dinâmica externa*.

O modelo da dinâmica externa de manipuladores espaciais deve ser capaz de rastrear, em seis graus de liberdade, o movimento de pelo menos um dos corpos do robô com relação a um referencial inercial. Assim, a composição deste cálculo com a dinâmica interna resulta na quantificação inercial de todos os movimentos do manipulador. Esta etapa, denominada *dinâmica acoplada*, é apresentada na Seção 3.4. Na descrição convencional GJM proposta por Umetani e Yoshida (1989), o ponto de referência para mapeamento inercial do robô é a própria base, uma vez que a dinâmica interna também é descrita com relação a ela. A seguir, é apresentado o vínculo Newtoniano de momento generalizado, que fundamenta a dinâmica externa na vertente GJM. Adicionalmente, a construção da jacobiana generalizada também é apresentada em caráter expositivo.

3.3.1 Vínculo Newtoniano

Para um robô espacial do tipo *free-floating* – isto é, cujas forças externas atuantes são nulas e é desprovido de mecanismos de armazenamento de momento angular (e.g, rodas de reação) – as variáveis de junta q e base x_0 podem ser relacionadas ao seu momento inicial M_0 :

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ L_0 \end{bmatrix} = M_0 = H_0 \dot{x}_0 + H_{0m} \dot{q} \quad (69)$$

sendo P e L momentos iniciais linear e angular, respectivamente.

As deduções que resultam na Equação 69 são detalhadas no Apêndice B. Nesta Seção, fica demonstrado que este resultado também é válido para multi-manipuladores, desde que as matrizes dinâmica sejam devidamente generalizadas. Trata-se de um resultado fundamental para a construção da E-GJM, discutida na Seção 3.3.2.

No caso particular em que o manipulador parte do repouso, ou seja, $M_0 = 0$, tem-se a restrição característica da dinâmica inercial de robôs espaciais, aqui denominada por *vínculo Newtoniano*:

$$H_0 \dot{x}_0 + H_{0m} \dot{q} = 0 \quad (70)$$

Este vínculo permite computar a reação dinâmica da base a movimentação das juntas:

$$\dot{x}_0 = (-H_0^{-1} H_{0m}) \dot{q} \quad (71)$$

Pode-se demonstrar que a matriz H_0 , conforme definida, é sempre inversível. Portanto, desde que as hipóteses impostas sejam cumpridas, existe uma matriz jacobiana de base

para o manipulador free-floating, dada por $J_0 = -H_0^{-1}H_{0m}$. Caso alguma suposição seja violada, a relação entre as dinâmicas da base e das juntas – a nível de velocidade – perde linearidade (nota: uma função afim $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = ax + b$ não é linear, pois não possui propriedades de aditividade e homogeneidade).

A Equação 71 mapeia a dinâmica interna das juntas para o espaço inercial. Historicamente, este simples resultado de 1989 aqueceu significativamente a área de pesquisa de manipuladores espaciais operando em *stand-alone*, pois apresentava uma alternativa à abordagem do Manipulador Virtual para transferência do formalismo de base fixa para o panorama de base flutuante.

3.3.2 Matriz Jacobiana Generalizada

Do ponto de vista operacional, a maior vantagem do modelo GJM é a generalização da matriz Jacobiana. No contexto de base fixa, este operador relaciona a dinâmicas das juntas e efetuador a nível de velocidade. Utilizando os vínculos descritos em 69, é possível obter uma generalização deste operador para o caso flutuante.

A diferença fundamental entre os dois casos está na dinâmica do efetuador: no paradigma espacial, esta componente não pode ser referenciada na base robótica, pois não constitui um sistema inercial. Contudo, utilizando a conservação de momento, a base pode ser mapeada em um referencial inercial. Assim, mantendo a dinâmica das juntas orientada à base, os efetuadores podem ter seu movimento inercial rastreado. Particularmente, demonstra-se que a relação entre a dinâmica inercial dos efetuadores e a dinâmica interna da base mantém a mesma linearidade observada no caso de base fixa, desde que a matriz de transformação seja adequadamente montada. Esta matriz é denominada Matriz Jacobiana Generalizada (*GJM, Generalized Jacobian Matrix*). Ao viabilizar o planejamento e controle de tarefas pelos efetuadores de robôs de base flutuante em espaço inercial, a GJM tornou-se uma vertente popular de pesquisa e desenvolvimento no âmbito de robótica espacial.

Inicialmente, a matriz Jacobiana será apresentada no contexto de robôs de braço único, conforme as pesquisas pioneiras da área. Na sequência, as deduções serão estendidas para multi-manipuladores, resultando na Matriz Jacobiana Generalizada Estendida (E-GJM). Até o melhor conhecimento dos autores, a E-GJM é uma contribuição deste trabalho para a literatura de robôs espaciais.

Matematicamente, um multi-manipulador de N braços e $n_j, j = 1, \dots, N$ elos por braço, totalizando $n_N = \sum_{j=1}^N n_j$ elos. De acordo com a estrutura de dados apresentada, a partir de uma ordenação dos braços, a dinâmica das juntas é representada por um vetor $q \in \mathbb{R}^{n_N}$, resultado da concatenação sequencial do vetor de junta de cada braço. Acerca da dinâmica externa, cada efetuador pode ser representado por um vetor $x_E^j \in \mathbb{R}^6$, contendo informações posicionais e rotacionais. Portanto, o vetor global representativo da dinâmica

dos efetuadores é $x_E \in \mathbb{R}^{6j}$. Nessas condições, a GJM $J^* \in \mathbb{R}^{6j \times n_N}$ é tal que:

$$\dot{x}_E = J^* \dot{q} \quad (72)$$

Conforme a definição 72, a matriz Jacobiana pode ser interpretada como uma relação cinemática, pois correlaciona velocidades das juntas à velocidades de um corpo rígido específico do robô. Neste sentido, o operador J^* simplesmente reúne as informações contidas nas equações cinemáticas de velocidades linear e angular (Equação 14). Referenciando estas relações, as velocidades do efetuador de um mono-manipulador podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} v_E &= \mathcal{J} v_0 + \mathcal{J} \omega_0 \times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} r_0) + \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{J} \hat{k}_i \times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} p_i) \right) \dot{q}_i \\ \mathcal{J} \omega_E &= \mathcal{J} \omega_0 + \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{J} \hat{k}_i \right) \dot{q}_i \end{aligned} \quad (73)$$

sendo $x_E = [\mathcal{J} v_E, \mathcal{J} \omega_E]^T \in \mathbb{R}^6$.

Para fins de construção da Jacobiana, é conveniente reescrever a Equação 73 em formato matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J} v_E \\ \mathcal{J} \omega_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 + \mathcal{J} \omega_0 \times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} r_0) \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{J} \hat{k}_i \times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} p_i) \right) \dot{q}_i \\ \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{J} \hat{k}_i \right) \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (74)$$

Nota-se que a Equação 74 é dividida em duas componentes: uma devida à base e outra relativa às juntas. Os somatórios constituintes da parcela da base podem ser expressos como uma multiplicação matricial:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{J} \hat{k}_i \times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} p_i) \right) \dot{q}_i &= \begin{bmatrix} \mathcal{J} \hat{k}_1^\times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} p_1) & \dots & \mathcal{J} \hat{k}_N^\times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} p_N) \end{bmatrix} \dot{q} \\ \sum_{i=1}^N \left(\mathcal{J} \hat{k}_i \right) \dot{q}_i &= \begin{bmatrix} \mathcal{J} \hat{k}_1 & \dots & \mathcal{J} \hat{k}_N \end{bmatrix} \dot{q} \end{aligned} \quad (75)$$

A relação anterior permite agrupar, em uma única matriz J_m , as contribuições das juntas para as velocidades linear e angular do efetuador:

$$J_m = \begin{bmatrix} \mathcal{J} \hat{k}_1^\times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} p_1) & \dots & \mathcal{J} \hat{k}_N^\times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} p_N) \\ \mathcal{J} \hat{k}_1 & \dots & \mathcal{J} \hat{k}_N \end{bmatrix} \quad (76)$$

Desta forma, a parcela devida às juntas na Equação 74 resume-se a $J_m \dot{q}$. A construção de uma formulação análoga das contribuições da base robótica requer a representação da dinâmica da base como $\dot{x}_0 = [v_0, \omega_0]$. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} v_0 + \mathcal{J} \omega_0 \times (\mathcal{J} r_E - \mathcal{J} r_0) &= \begin{bmatrix} I_{3,3} & -\mathcal{J} r_{0E}^\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{J} \omega_0 &= \begin{bmatrix} 0_{3,3} & I_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (77)$$

Utilizando estas relações, pode-se montar uma matriz J_{0E} , tal que $J_{0E}\dot{x}_0$ reúne as contribuições da base para a Jacobiana:

$$J_{0E} = \begin{bmatrix} I_{3,3} & -\mathcal{J}r_{0E}^\times \\ 0_{3,3} & I_{3,3} \end{bmatrix} \quad (78)$$

sendo $I_{3,3}$ e $0_{3,3}$ as matrizes identidade e nula de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Conclui-se que a dinâmica do efetuador do mono-manipulador espacial pode ser representada no formato da Equação 79.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}v_E \\ \mathcal{J}\omega_E \end{bmatrix} = J_{0E}\dot{x}_0 + J_m\dot{q} \quad (79)$$

A validade nominal da Equação 79 não se restringe ao caso *stand-alone*. Como esta formulação é de natureza puramente cinemática, não foram feitas considerações acerca de forças externas e momentos. Por outro lado, esta descrição não relaciona linearmente o espaço das juntas ao domínio cartesiano, uma vez que a parcela de contribuição da base impõe uma característica de função afim à transformação. Com isso, do ponto de vista de análise dinâmica e projeto de controladores, sua relevância é menor do que a de uma única matriz J^* . Particularmente, no caso *stand-alone*, lança-se mão do vínculo Newtoniano (Equação 71) para garantir a linearidade supracitada:

$$J_{0E}\dot{x}_0 + J_m\dot{q} = J_{0E}(-H_0^{-1}H_{0m}\dot{q}) + J_m\dot{q} = (J_m - J_{0E}H_0^{-1}H_{0m})\dot{q} \quad (80)$$

Substituindo 80 em 79:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}v_E \\ \mathcal{J}\omega_E \end{bmatrix} = (J_m - J_{0E}H_0^{-1}H_{0m})\dot{q} = J^*\dot{q} \quad (81)$$

Isto culmina na Matriz Jacobiana Generalizada do mono-manipulador de base flutuante (Equação 82), corroborando o resultado original de Umetani e Yoshida (1989):

$$J^* = J_m - J_{0E}H_0^{-1}H_{0m} \quad (82)$$

A respeito da Equação 82, vale reforçar que sua validade nominal é garantida apenas no contexto de forças externas nulas e momento inicial nulo. Diferentemente do que ocorre em robôs de base fixa, nos quais $J^* = J_m$ é puramente cinemática, a GJM possui dependência dinâmica, evidenciada pelas matrizes inerciais H^0 e H_{0m} . Esta característica traz empecilhos para o projeto de controladores no espaço da tarefa, uma vez a cinemática inversa do robô é significativamente dificultada. Ademais, este acoplamento dinâmico também se manifesta nas singularidades do *workspace* do robô, isto é, pontos nos quais a Jacobiana perde posto. Enquanto em robôs terrestres as singularidades são apenas cinemáticas, no paradigma espacial ocorrem *singularidades dinâmicas*, que foram exploradas pioneiramente em Papadopoulos e Dubowsky (1989).

Embora a formulação da Jacobiana ter sido ambientada para robôs de braço único, a generalização para multi-manipuladores é imediata. Para isto, sejam $x_{E_1}, \dots, x_{E_N} \in \mathbb{R}^6$ as dinâmicas dos efetuadores de um robô espacial de N braços. As dinâmicas das juntas são dadas por $q_1, \dots, q_N \in \mathbb{R}^M$, associadas a matrizes de acoplamento dinâmico $H_{0m_1}, \dots, H_{0m_N}$. De fato, na formulação dinâmica, todos estes elementos são agrupados em x_E, q, H_{0m} . Porém, a formulação da Jacobiana é beneficiada pela separação em blocos. Neste sentido, cada braço obedece equações cinemáticas do tipo da Equação 79, parametrizadas por estes blocos. Empilhando as N equações, segue que:

$$\begin{bmatrix} x_{E_1} \\ \vdots \\ x_{E_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{0E}^1 \dot{x}_0 + J_m^1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ J_{0E}^N \dot{x}_0 + J_m^N \dot{q}_N \end{bmatrix} \quad (83)$$

sendo as matrizes cinemáticas J_{0E}^i, J_m^i , $i = 1, \dots, N$ construídas conforme discussão anterior.

Utilizando o vínculo Newtoniano para multi-manipuladores com momento não-nulo:

$$\mathcal{J} \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} + H_0^{-1} M \quad (84)$$

E substituindo nas relações cinemáticas dos efetuadores:

$$\begin{bmatrix} x_{E_1} \\ \vdots \\ x_{E_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{0E}^1 [-H_0^{-1} (H_{0m_1} \dot{q}_1 + \dots + H_{0m_N} \dot{q}_N) + H_0^{-1} M] + J_m^1 \dot{q}_1 \\ \vdots \\ J_{0E}^N [-H_0^{-1} (H_{0m_1} \dot{q}_1 + \dots + H_{0m_N} \dot{q}_N) + H_0^{-1} M] + J_m^N \dot{q}_N \end{bmatrix} \quad (85)$$

Reestruturando como combinações lineares do espaço das juntas:

$$\begin{bmatrix} x_{E_1} \\ x_{E_2} \\ \vdots \\ x_{E_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_m^1 - J_{0E}^1 H_0^{-1} H_{0m_1}) \dot{q}_1 + (-J_{0E}^1 H_0^{-1} H_{0m_2}) \dot{q}_2 + \dots + (-J_{0E}^1 H_0^{-1} H_{0m_N}) \dot{q}_N + J_{0E}^1 H_0 M \\ (-J_{0E}^2 H_0^{-1} H_{0m_1}) \dot{q}_1 + (J_m^2 - J_{0E}^2 H_0^{-1} H_{0m_2}) \dot{q}_2 + \dots + (-J_{0E}^2 H_0^{-1} H_{0m_N}) \dot{q}_N + J_{0E}^2 H_0 M \\ \vdots \\ (-J_{0E}^N H_0^{-1} H_{0m_1}) \dot{q}_1 + (-J_{0E}^N H_0^{-1} H_{0m_2}) \dot{q}_2 + \dots + (J_m^N - J_{0E}^N H_0^{-1} H_{0m_N}) \dot{q}_N + J_{0E}^N H_0 M \end{bmatrix} \quad (86)$$

Cada linha do lado direito de 86 pode ser escrita como uma multiplicação matricial envolvendo $\dot{q} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N]$. Isto permite reescrever 86 como um produto matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{E_1} \\ x_{E_2} \\ \vdots \\ x_{E_N} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} J_m^1 - J_{0E}^1 H_0^{-1} H_{0m_1} & -J_{0E}^1 H_0^{-1} H_{0m_2} & \dots & -J_{0E}^1 H_0^{-1} H_{0m_N} \\ -J_{0E}^2 H_0^{-1} H_{0m_1} & J_m^2 - J_{0E}^2 H_0^{-1} H_{0m_2} & \dots & -J_{0E}^2 H_0^{-1} H_{0m_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -J_{0E}^N H_0^{-1} H_{0m_1} & -J_{0E}^N H_0^{-1} H_{0m_2} & \dots & J_m^N - J_{0E}^N H_0^{-1} H_{0m_N} \end{bmatrix} \dot{q} \\ &+ \begin{bmatrix} J_{0E}^1 \\ J_{0E}^2 \\ \vdots \\ J_{0E}^N \end{bmatrix} H_0^{-1} M \\ &= J^* \dot{q} + J_{0E} H_0^{-1} M \end{aligned} \quad (87)$$

Portanto, no caso de momento não-nulo, o movimento dos efetuadores é descrito por:

$${}^{\mathcal{J}}\dot{x}_E = J^*\dot{q} + J_{0_E}H_0^{-1}M \quad (88)$$

Neste cenário, observa-se que a relação entre ${}^{\mathcal{J}}x_E$ e \dot{q} não é linear, mas afim. O momento $M = M(t)$ engloba os efeitos de forças e torques externos no robô e é ponderado pela matriz cinemática J_{0_E} e pela inversa da matriz dinâmica de base H_0 .

Se o robô é isolado – momento nulo e conservado – tem-se $M = 0$. Neste panorama, comparando 87 com 72, conclui-se que a Matriz Jacobiana Generalizada de múltiplos braços é dada por:

$$J^* = \begin{bmatrix} J_S^1 & J_C^{1,2} & \cdots & J_C^{1,j} & \cdots & J_C^{1,N} \\ J_C^{2,1} & J_S^2 & \cdots & J_C^{2,j} & \cdots & J_C^{2,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ J_C^{i,1} & J_C^{i,2} & \cdots & J_S^i & \cdots & J_C^{i,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ J_C^{N,1} & J_C^{N,2} & \cdots & J_C^{N,j} & \cdots & J_S^N \end{bmatrix} \quad (89)$$

Os termos da diagonal principal são dados por:

$$J_S^i = J_m^i - J_{0_E}^i H_0^{-1} H_{0m_i} \quad (90)$$

sendo $i = 1, \dots, N$.

Os termos restantes são dados por:

$$J_C^{i,j} = -J_{0_E}^i H_0^{-1} H_{0m_j} \quad (91)$$

sendo $i, j = 1, \dots, N$.

Comparando as Equações 90 e 82, conclui-se que a diagonal principal da Jacobiana do multi-manipulador espacial é constituída das GJMs de cada braço do robô. Os elementos fora da diagonal principal são termos de acoplamento. Os índices escolhidos, "S" e "C", remetem a esta característica: *single* e *coupling*.

A construção de J^* do multi-manipulador é feita em blocos, de modo análogo à matriz generalizada de inércia do multi-manipulador, sendo os blocos da diagonal principal responsáveis por contribuições "intrínsecas" e os demais por acoplamento entre braços e base.

Como o operador apresentado contém múltiplas matrizes GJM, a matriz J^* dada por 89, 90 e 91, será denominada Matriz Jacobiana Generalizada de múltiplos braços (E-GJM) (*Extended Generalized Jacobian Matrix*).

Por fim, observa-se que, neste formato, a Jacobiana é válida somente para sistemas operando em *stand-alone*. Em cenários de interação com objetos de momento não nulo, como o *detumbling*, esta formulação perde validade nominal. Neste contexto, o formato que deve ser usado é aquele da Equação 88.

3.4 Dinâmica acoplada em *stand-alone*

O objetivo desta Seção é apresentar o formato analítico consolidado em literatura e esclarecer as condições operacionais nas quais ele é nominalmente válido.

Considerando o manipulador espacial operando em modo *stand-alone*, existe uma solução analítica para as dinâmicas interna e externa. Tal resposta é obtida substituindo a equação da dinâmica externa 71 na equação final da dinâmica interna, 68:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_m &= H_{0m}^T \ddot{x}_0 + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m}^T \dot{x}_0 + \dot{H}_m \dot{q} + c_m \\
&= -H_{0m}^T \left[(H_0^{-1} H_{0m}) \dot{q} + H_0^{-1} H_{0m} \ddot{q} \right] + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m}^T (-H_0^{-1} H_{0m} \dot{q}) + \dot{H}_m \dot{q} + c_m \\
&= \left[H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} \right] \ddot{q} + \left[-H_{0m}^T (H_0^{-1} H_{0m}) - \dot{H}_{0m}^T (H_0^{-1} H_{0m}) + \dot{H}_m \right] \dot{q} + c_m \\
&= \left[H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} \right] \ddot{q} + \left[\dot{H}_m - (H_{0m}^T \dot{H}_0^{-1} H_{0m}) \right] \dot{q} + c_m \\
&= \left[H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} \right] \ddot{q} + \left[H_m - (H_{0m}^T \dot{H}_0^{-1} H_{0m}) \right] \dot{q} + c_m \\
&= H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} + c_m
\end{aligned} \tag{92}$$

Conforme discutido na Seção 3.2, o termo não-inercial c_m depende das derivadas parciais da matriz generalizada de inércia. Assim, tem-se:

$$H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T H^* \dot{q}) = \tilde{\tau}_m \tag{93}$$

A Equação 93 é o resultado mais importante do modelo dinâmico do robôs espaciais pelo tratamento GJM, pois é um modelo de dinâmica interna explicitamente autossuficiente. Ou seja, este resultado independe explicitamente da variável x_0 e suas derivadas, apesar de conter matrizes H_0 e H_{0m} que possuem dependência com a dinâmica externa. Anexando o vínculo Newtoniano com **momento nulo e conservado** e incluindo índices de solução numérica:

$$\begin{cases} \ddot{q}_{k+1} = (H^*)^{-1} \left[\tilde{\tau}_{m_k} - \dot{H}^* \dot{q}_k + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}_k^T H^* \dot{q}_k) \right] \\ \dot{x}_{0_{k+1}} = (-H_0^{-1} H_{0m}) \dot{q}_k \end{cases} \tag{94}$$

A solução formada pela Equação 94 é amplamente usada em literatura como o modelo dinâmico geral para robôs espaciais, inclusive em aplicações em que o robô interage com outros objetos e, logo, possui momentos não-nulos e não-conservados. Observa-se que o modelo em questão não é válido nestas condições, pois sua dedução matemática assume o vínculo Newtoniano com momento nulo.

Em condições operacionais nas quais o robô é submetido a forças externas, deve-se utilizar o formato mais geral da restrição de momento. De fato, o procedimento de cômputo do vínculo de momento permanece válido mesmo quando forças externas são

aplicadas ao robô. Isto é assimilado diferenciando no tempo a equação de vínculo:

$$H_0\ddot{x}_0 + H_{0m}\ddot{q} + \dot{H}_0\dot{x}_0 + \dot{H}_{0m}\dot{q} = \dot{M} \quad (95)$$

Observa-se que a derivada do momento $\dot{M} = \frac{d}{dt}M(t)$ é exatamente o somatório de forças externas atuantes no sistema robótico. Portanto, para o caso geral, a equação de vínculo modela a "dinâmica externa" do robô espacial:

$$H_0\ddot{x}_0 + H_{0m}\ddot{q} + \dot{H}_0\dot{x}_0 + \dot{H}_{0m}\dot{q} = F \quad (96)$$

sendo $F = \sum F_i$. Supondo que os estímulos externos sejam imputados somente ao manipulador, pode-se substituir $F = F_e$.

Contudo, mesmo que a modelagem da dinâmica externa seja ajustada para o cenário de forças externas não-nulas, o próprio modelo 93 não é válido, pois incorpora o vínculo Newtoniano de momento nulo em sua dedução.

Existe uma solução intermediária entre o modelo *stand-alone* e o modelo com forças externas não-nulas. Se om momento M é não-nulo, mas constante, tem-se $\dot{M} = 0$. Em tarefas de *detumbling*, após a captura de alvos pelos efetuadores, o sistema "estendido" formado pelo robô e pelos alvos pode ser considerado isolado. Isto é, o modelo de momento não-nulo e conservado é adequado para a fase de estabilização e possui complexidade menor que o modelo geral. De fato, este é um cenário tratado no trabalho original da dinâmica externa Umetani e Yoshida (1989), na qual rodas de reação são inseridas no sistema para controlar o momento angular. Como esta contribuição é interna ao sistema robótico, o momento ainda é conservado, porém não nulo. O equacionamento deste modelo estendido será feito em etapas futuras deste projeto.

Por fim, após a apresentação das dinâmicas interna, externa e acoplada do caso *stand-alone*, cabe salientar a distinção do resultado apresentado com aquele de Wilde et al. (2018). Nota-se que a solução analítica obtida, embora idêntica àquela proposta no artigo citado, não aplicou as equações de Lagrange sobre a variável dinâmica da base x_0 . A abordagem dinâmica aqui descrita é pautada unicamente em dois pontos: formalismo Lagrangiano no vetor de juntas q e vínculos de momento. É exatamente este o procedimento original de Umetani e Yoshida (1989) e Masutani, Miyazaki e Arimoto (1989) que cumpre perfeitamente seu objetivo: descrever a dinâmica de mono-manipuladores *free-floating* em condições isoladas. Conforme discutido neste trabalho, quaisquer mudanças nestas hipóteses, como adição de múltiplos braços e aplicação de forças externas, devem ser cuidadosamente trabalhadas para não violar a validade do modelo original da vertente GJM.

3.5 Modelo subatuado aplicado a manipuladores espaciais

Apesar do modelo de vínculos ser capaz de incorporar forças externas, a solução da Equação 94 possui validade nominal somente no caso *stand-alone*. Por esta razão, é mais vantajoso estruturar o modelo dinâmico de robôs espaciais segundo o paradigma de modelagem de sistemas subatuados, no qual o vínculo Newtoniano é utilizado em seu formato mais geral, a saber, com momento externo não-nulo:

$$\begin{bmatrix} H_0 & H_{0m} \\ H_{0m}^T & H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{H}_0 & \dot{H}_{0m} \\ \dot{H}_{0m}^T & \dot{H}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ \tilde{\tau}_m \end{bmatrix} \quad (97)$$

Na construção de Yoshida e Nenchev (1997), a componente vetorial da primeira linha da equação matricial 100 é definida por uma variável c_0 . Este termo é responsável por descrever o comportamento não-inercial desta partição da dinâmica. Porém, da Equação 96, nota-se que não há um termo equivalente a c_m na dinâmica externa. Logo, deve-se ter necessariamente $c_0 = 0$.

Os torques efetivos de junta são as entradas dinâmicas "líquidas", resultantes da composição entre torques de controle (τ_m) e forças externas propagadas. Matematicamente,

$$\tilde{\tau}_m = \tau_m - J^T F_e \quad (98)$$

Esta relação considera que a matriz jacobiana generalizada compartilha de todas as propriedades do dual de base fixa necessárias para garantir um mapeamento linear de forças. No caso mais geral, pode-se escrever:

$$\tilde{\tau}_m = \tau_m - f_J(F_e) \quad (99)$$

em que f_J é uma função – potencialmente não-linear – que efetua a transferência de forças.

Uma possível abordagem é obter tal função numericamente pelo método iterativo de Newton-Euler, como discutido na Seção 3.6.

Conforme Apêndices A e C, fica demonstrado que o modelo dinâmico de um robô de n-braços é natural estendido a partir da formulação de braço único ao agrupar sequencialmente as matrizes intrínsecas e de acoplamento de cada braço. Este resultado foi demonstrado para $n = 2$ braços em (RODRIGUES; PAZELLI, 2021) e generalizado neste trabalho.

$$\begin{bmatrix} H_0 & H_{0m}^1 & \cdots & H_{0m}^n \\ H_{0m}^{1T} & H_m^1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ H_{0m}^{nT} & \cdots & \cdots & H_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 & \dot{H}_{0m}^1 & \cdots & \dot{H}_{0m}^n \\ \dot{H}_{0m}^{1T} & \dot{H}_m^1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dot{H}_{0m}^{nT} & \cdots & \cdots & \dot{H}_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_m^1 \\ \vdots \\ c_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ \tilde{\tau}_m^1 \\ \vdots \\ \tilde{\tau}_m^n \end{bmatrix} \quad (100)$$

3.6 Propagação de forças em manipuladores espaciais

Os torques de junta computados pelo sistema de controle para que o robô efetue determinado movimento são influenciados por forças externas aplicadas ao manipulador. Logo, embora a dinâmica externa incorpore tais forças em sua formulação, estas também devem ser inseridas no equacionamento da dinâmica interna. Para isto, é necessário que todas as forças externas impressas ao sistema robótico sejam "mapeadas" para em torques equivalentes de junta.

No caso particular de monomanipuladores de base fixa e forças externas imputadas somente ao efetuador, o problema de se determinar os torques de junta equivalentes é abordado pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (CRAIG, 2005). O vetor de torques τ_{eq} que realiza o mesmo trabalho virtual – atuando sobre as juntas – que a força F_{ext} deslocando o efetuador é tal que:

$$F_{ext}^T \cdot \delta x = \tau_{eq}^T \cdot \delta q \quad (101)$$

sendo x, q os vetores de estado cartesiano e de junta.

Como a Jacobiana relaciona linearmente as derivadas temporais dos domínios de junta e cartesiano, é demonstrável que os deslocamentos virtuais de junta e efetuador obedecem a mesma transformação. Sendo J a matriz Jacobiana de base fixa, tem-se:

$$\frac{dx}{dt} = J \cdot \frac{dq}{dt} \Leftrightarrow \frac{\delta x}{\delta t} = J \cdot \frac{\delta q}{\delta t} \Leftrightarrow \delta x = J \cdot \delta q \quad (102)$$

Substituindo a Equação 102 em 101, o torque τ_{eq} é resolvido em função da Jacobiana e da força externa F_{ext} :

$$\tau_{eq} = J^T F_{ext} \quad (103)$$

A Equação 103, que também pode ser deduzido pelas iterações *inward* do método de Newton-Euler, é pautado em uma hipótese fundamental: **caso estático**. De fato, o princípio dos trabalhos virtuais é válido para sistemas em equilíbrio (DAVIS; SELVADURAI, 2002). Enquanto isto é válido para robôs de base fixa, tal hipótese é violada para robôs de base livre, uma vez que manipuladores *free-floating* não são capazes de manter equilíbrio sob atuação de forças externas. Portanto, embora a Equação 103 seja utilizada ubiquamente em aplicações de robôs espaciais, sua validade exata não pode ser baseada em formulações de manipuladores terrestres.

Conforme supracitado, em condição de equilíbrio, a expressão 103 decorre da propagação de forças ao longo da cadeia robótica. No caso de base fixa, todas as juntas são previamente travadas, a fim de que o manipulador se torne uma estrutura rígida (CRAIG, 2005). No panorama espacial, mesmo que isto seja feito, toda a cadeia será movimentada em resposta à força externa aplicada.

Neste cenário, o problema de computar as contribuições nas juntas provenientes de forças externas não pode ser solucionado pelo modelo Jacobiano. Uma alternativa é o

algoritmo de Newton-Euler Algoritmo de Newton-Euler (NE), o qual estabelece balanços sequenciais de força e torque ao longo dos elos e juntas do robô. Como este método é fundamentado nas leis da mecânica Newtoniana, sua aplicação neste paradigma de robôs espaciais é válida.

Assim, sejam M, I_{eq} a massa total do robô e tensor de inércia observado pelo efetuador e $\{F_{ext}, \tau_{ext}\}$ o estímulo dinâmico externo aplicado. Nas condições preestabelecidas, vale que:

$$\begin{aligned} F_{ext} &= M \cdot \frac{v_{CM}}{dt} \\ \tau_{ext} &= I_{eq} \frac{\omega}{dt} + \omega \times I_{eq} \end{aligned} \quad (104)$$

sendo v_{CM} e ω as velocidades linear e angular da estrutura em resposta aos estímulos externos.

Nas iterações *inward* de Newton-Euler, as forças e torques são propagadas ao longo da cadeia utilizando as equações de equilíbrio dinâmico para movimentos linear (Newton) e angular (Euler). Estas relações consideram todas as forças e torques atuantes em cada elo, a saber, as componentes devidas aos elos adjacentes e a resultante sobre o elemento. Naturalmente, a soma das contribuições dos elos vizinhos deve ser igual à resultante sobre o mesmo elo. Matematicamente:

$$\begin{aligned} {}^i f_i &= {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \\ {}^i n_i &= {}^i N_i + {}^i_{i+1} R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i_{i+1} R^{i+1} f_{i+1} \\ \tau_i &= Z_i \cdot {}^i n_i \end{aligned} \quad (105)$$

Na formulação Newton-Euler, ilustrada na Figura 4 os termos ${}^i F_i$ e ${}^i N_i$ são forças e torques resultantes em cada elo, previamente computados nas iterações *outward* por meio das acelerações dos centros de massa de cada elo e subsequente aplicação em relações do tipo da Equação 104. Neste trabalho, em decorrência do travamento das juntas, todos os elos respondem com as mesmas velocidades linear v_{CM} e angular ω , que podem ser utilizadas para calcular as forças F_i e torques resultantes.

De outro modo: em vez de computar as forças generalizadas resultantes em todos os elos separadamente – via cálculo iterativo de acelerações de cada corpo do robô – a aceleração global da cadeia rígida é previamente calculada a partir da força externa generalizada aplicada e características inerciais globais. Os valores obtidos são imputados na Equação 104 e, por fim, nas iterações *inward* do método NE.

Em aplicações de base fixa e braço único, a iteração *inward* inicia-se no efetuador e termina na base. Entretanto, no caso de robôs de n braços, são necessárias n^2 iterações *inward*, pois cada iteração deve propagar até os demais efetuadores, passando pela base livre.

Mais precisamente, seja $F_e^i = [f_e^i, \tau_e^i]$, $i = 1, \dots, n$ a força externa generalizada impressa sobre o i-ésimo braço do robô. O algoritmo de propagação de forças retorna a contribuição $\tau_r^{j,k}$, $j = 1, \dots, m_n$, $k = 1, \dots, n$ de F_e^i sobre a j-ésima junta do k-ésimo

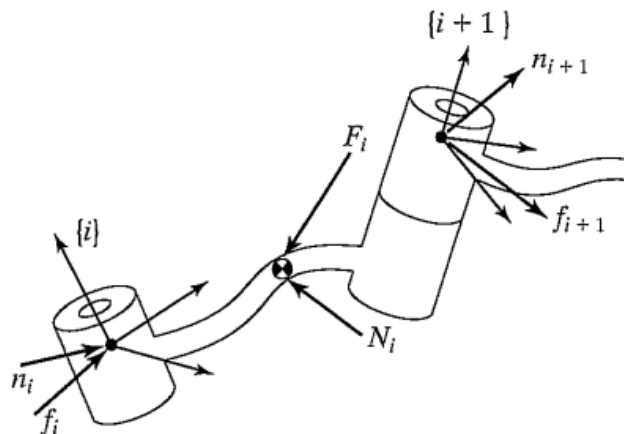


Figura 4 – Balanço dinâmico por elo. Fonte: (CRAIG, 2005)

braço. Para isto, os cálculos de NE devem ser computados do efetuador do braço i até a base de acordo com Equação 105. Particularmente, na base robótica, o balanço de forças deve considerar as contribuições de todas as juntas-pivô de todos os braços. Isto é obtido através de soma direta destes termos na Equação 105, resultando em condições iniciais de força generalizada para cada um dos demais braços. A partir disso, o algoritmo segue iterativamente ao longo de cada braço até culminar em todos os efetuadores do multi-manipulador.

A Figura 5 detalha as etapas do algoritmo proposto, em que n_I é o número de elos do i -ésimo braço, c_I é a codimensão do i -ésimo braço (número de elos entre efetuador e base, no sentido de propagação definido), n é o número de braços do manipulador, T_j^I é a parcela de torque atuante sobre o j -ésimo elo do i -ésimo braço.

Vale observar que o cálculo da propagação de forças é necessário somente se a força externa resultante que atua no robô é não-nula. Particularmente, em aplicações de *de-tumbling*, a força externa é não-nula apenas no instante da colisão entre o efetuador e o alvo. Após a colisão, o alvo capturado é assimilado no modelo, significando que a força de colisão é incorporada como uma força interna entre dois elos da cadeia. Portanto, o cômputo das forças propagadas para as juntas deve ser executado a partir do início do contato e até que o *grasping* seja finalizado, isto é, até que a velocidade relativa entre alvo e efetuador se anule.

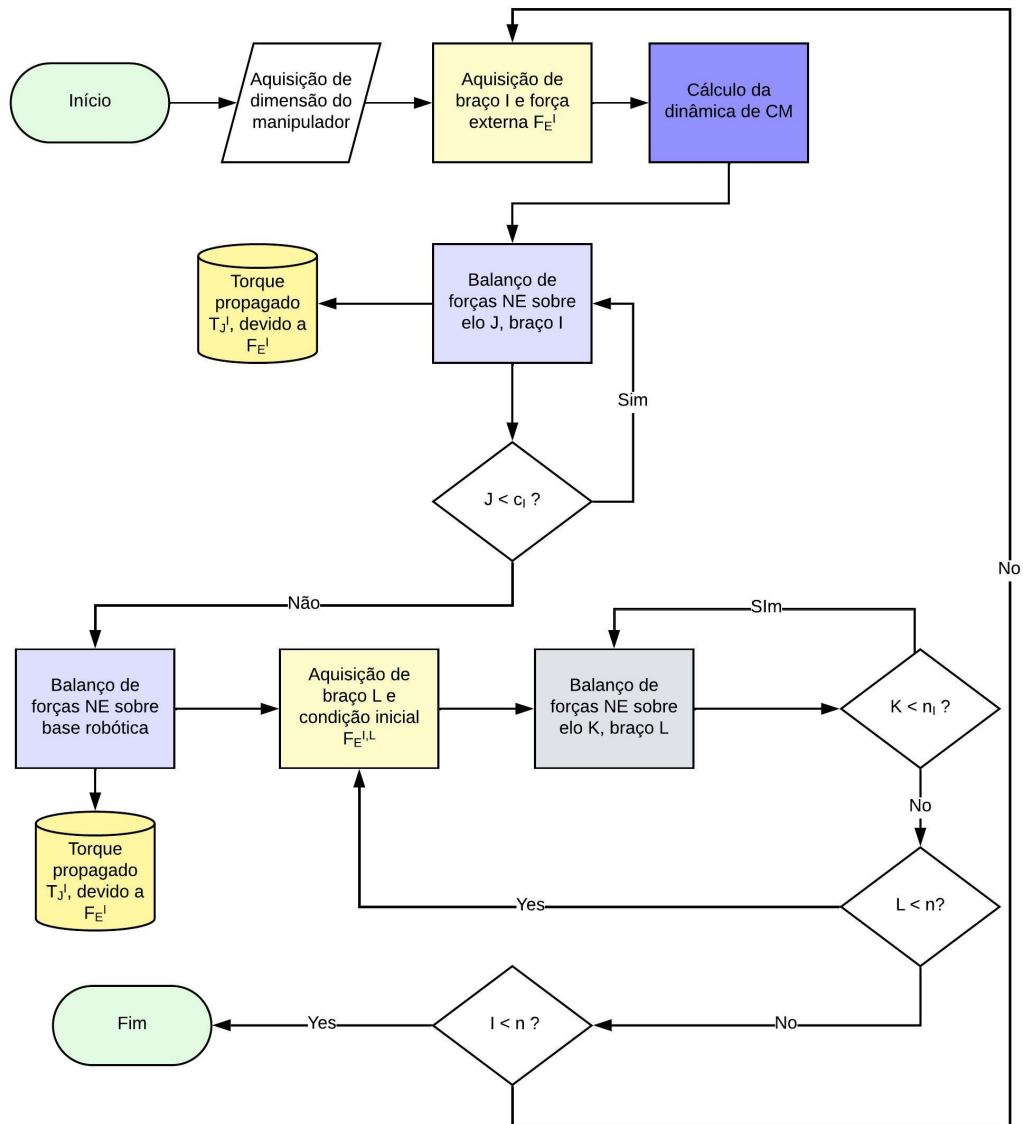


Figura 5 – Propagação de forças em robô de base flutuante. Fonte: Próprio autor

3.7 Modelo numérico

Os modelos de robôs espaciais que retornam soluções que podem ser computadas analiticamente são vantajosos do ponto de vista de projeto, mas deixam a desejar no tangente à simulações. Em muitas aplicações de *detumbling*, é considerado um modelo obtido com hipóteses de *stand-alone*, ou seja, forças externas nulas. Porém, mesmo que o momento não-nulo – mas conservado – seja incorporado no sistema formado pelo manipulador e alvos, existe uma descontinuidade no instante de colisão. Quando um efetuador captura um alvo, uma força externa atua no sistema, acelerando seu centro de massa. Além disso, neste intervalo de duração do impulso, os momentos linear e angular variam instantaneamente. Naturalmente, a violação do modelo *stand-alone* também ocorrem se forças externas não impulsivas forem aplicadas ao robô. De fato, trata-se da condição operacional mais geral para o manipulador, trazendo grandes dificuldades para obtenção de uma solução analítica nominalmente válida.

Em literatura, são utilizados modelos de contato e medições ou estimativas de forças para computar a telemetria do robô pós-impacto. Porém, o próprio modelo dinâmico 100 do manipulador subatuado apresentado neste trabalho pode ser utilizado, pois sua validade é mantida mesmo com forças externas aplicadas. A seguir, a solução numérica da Equação 100 é estruturada, com o objetivo de melhorar a qualidade da simulação dinâmica sob estímulos externos. Neste detalhamento, supõe-se que a força externa impressa pelo alvo foi previamente assimilada no torque de juntas $\tilde{\tau}_m$ a partir de um algoritmo apropriado de propagação de forças (vide Seção 3.6).

O modelo matricial 100 caracteriza um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares de segunda ordem, nas variáveis x_0 e q . Do ponto de vista numérico, dadas as condições iniciais de posição e velocidade para as duas dinâmicas $(x_0, \dot{x}_0, q, \dot{q})$, o problema é reduzido a um sistema de duas equações e duas incógnitas (\ddot{x}_0, \ddot{q}) . Isolando \ddot{x}_0 na primeira equação do sistema sub-atuado, tem-se:

$$\ddot{x}_0 = -H_0^{-1}(H_{0m}\ddot{q} + \dot{H}_0\dot{x}_0 + \dot{H}_{0m}\dot{q} - F_e) \quad (106)$$

Substituindo a expressão 106 na segunda equação de 100:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_m &= H_{0m}^T \ddot{x}_0 + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m}^T \dot{x}_0 + \dot{H}_m \dot{q} + c_m \\ \tilde{\tau}_m &= -H_{0m}^T H_0^{-1} (H_{0m} \ddot{q} + \dot{H}_0 \dot{x}_0 + \dot{H}_{0m} \dot{q} - F_e) + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m}^T \dot{x}_0 + \dot{H}_m \dot{q} + c_m \\ \tilde{\tau}_m - H_{0m}^T H_0^{-1} F_e &= (H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m}) \ddot{q} + (-H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_0 + \dot{H}_{0m}^T) \dot{x}_0 \\ &\quad + (-H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_{0m} + \dot{H}_m) \dot{q} + c_m \end{aligned}$$

Isolando \ddot{q} na última expressão, segue que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q} = -(H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m})^{-1} \left[-(\tilde{\tau}_m - H_{0m}^T H_0^{-1} F_e) + (\dot{H}_m - H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_{0m}) \dot{q} \right. \\ \left. + (\dot{H}_{0m}^T - H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_0) \dot{x}_0 + c_m(x_{0q}) \right] \\ \ddot{x}_0 = -H_0^{-1} \left(H_{0m} \ddot{q} + \dot{H}_0 \dot{x}_0 + \dot{H}_{0m} \dot{q} - F_e \right) \end{array} \right. \quad (107)$$

em que H é a matriz generalizada de inércia e $x_{0q} = \frac{\partial}{\partial q} x_0$ reforça a dependência do termo não inercial c_m com o acoplamento dinâmico.

Para referências futuras, as Equações 106 e 107 são agrupadas no sistema 108.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_k = -(H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m})^{-1} \left[-(\tilde{\tau}_m - H_{0m}^T H_0^{-1} F_e) + (\dot{H}_m - H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_{0m}) \dot{q}_{k-1} \right. \\ \left. + (\dot{H}_{0m}^T - H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_0) \dot{x}_{0_{k-1}} + c_m(x_{0_{q_{k-1}}}) \right] \\ \ddot{x}_{0_k} = -H_0^{-1} \left(H_{0m} \ddot{q}_k + \dot{H}_0 \dot{x}_{0_{k-1}} + \dot{H}_{0m} \dot{q}_{k-1} - F_e \right) \end{array} \right. \quad (108)$$

sendo $1 \leq k \leq n$.

Vale observar que trata-se de um sistema destinado à solução iterativa a partir das condições iniciais supracitadas. No formato apresentado, \ddot{q} deve ser resolvido primeiro, substituindo a solução na segunda equação para obtenção de \ddot{x}_0 . Naturalmente, o procedimento pode ser invertido com a mudança de ordem na sequência de deduções apresentada. Após o cálculo das duas acelerações, estes valores são devidamente integrados para retornar as velocidades e posições a cada iteração da simulação, cujos dados serão realimentados como condições iniciais das iterações subsequentes.

3.7.1 Generalização para múltiplos braços

Isolando \dot{x}_0 no bloco superior do sistema matricial do manipulador subatuado de múltiplos braços:

$$F_e = H_0 \ddot{x}_0 + \sum_{j=1}^n H_{0m}^j \ddot{q}_j + \dot{H}_0 \dot{x}_0 + \sum_{j=1}^n \dot{H}_{0m}^j \dot{q}_j \quad (109)$$

$$= H_0 \ddot{x}_0 + \dot{H}_0 \dot{x}_0 + [H_{0m}^1 \cdots H_{0m}^n] [\ddot{q}_1 \cdots \ddot{q}_n]^T + [\dot{H}_{0m}^1 \cdots \dot{H}_{0m}^n] [\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n]^T \quad (110)$$

$$= H_0 \ddot{x}_0 + \dot{H}_0 \dot{x}_0 + H_{0m} \ddot{q} + \dot{H}_{0m} \dot{q} \quad (111)$$

Observa-se que, na formulação de múltiplos braços, as matrizes de acoplamento inercial $H_{0m}^j, j = 1, \dots, n$ e suas respectivas derivadas temporais $\dot{H}_{0m}^j, j = 1, \dots, n$ são agrupadas

em uma estrutura de blocos. O vetor de juntas estendido q é construído de forma análoga. Assim, a equação de dinâmica externa assume o mesmo formato do caso de braço único:

$$\ddot{x}_0 = -H_0^{-1} (H_{0m}\ddot{q} + \dot{H}_{0m}\dot{q} + \dot{H}_0\dot{x}_0 - F_e) \quad (112)$$

Desenvolvendo algebricamente o bloco complementar na formulação do robô subatuado, a dinâmica interna das juntas dos múltiplos braços pode ser modelada por uma família de equações similares ao caso de braço único, indexadas pelos índices j dos manipuladores:

$$H_{0m}^{jT}\ddot{x}_0 + [0 \cdots H_m^j \cdots 0] [\ddot{q}_1 \cdots \ddot{q}_n]^T + [0 \cdots \dot{H}_m^j \cdots 0] [\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n]^T + \dot{H}_{0m}^{jT}\dot{x}_0 + c_m^j = \tilde{\tau}_j \quad (113)$$

Somando todas as equações no intervalo $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tau_j &= \left(\sum_{j=1}^n H_{0m}^{jT} \right) \ddot{x}_0 + [H_m^1 \cdots H_m^n] [\ddot{q}_1 \cdots \ddot{q}_n]^T + [\dot{H}_m^1 \cdots \dot{H}_m^n] [\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n]^T \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n \dot{H}_{0m}^{jT} \right) \dot{x}_0 + \sum_{j=1}^n (c_m^j) \\ I_n^T \tau &= I_n^T H_{0m}^T \ddot{x}_0 + H_m \ddot{q} + \dot{H}_m \dot{q} + I_n^T \dot{H}_{0m}^T \dot{x}_0 + c_m I_n \end{aligned}$$

Analogamente aos termos H_{0m}^j, \dot{H}_{0m}^j , as matrizes generalizadas de inércia e suas derivadas de cada manipulador são agrupadas nas matrizes estendidas H_m^j, \dot{H}_m^j . O operador $I_n \in \mathbb{R}^n$, $I_n = [1, \dots, 1]$ é introduzido para representar os somatórios como produtos internos envolvendo as matrizes e vetores estendidas do modelo dinâmico, visando maximizar a similaridade estrutural com o caso de braço único.

Substituindo a equação dinâmica de aceleração da base \ddot{x}_0 :

$$I_n^T \tau = -I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} (H_{0m}\ddot{q} + \dot{H}_{0m}\dot{q} + \dot{H}_0\dot{x}_0 - F_e) + H_m \ddot{q} + \dot{H}_m \dot{q} + I_n^T \dot{H}_{0m}^T \dot{x}_0 + c_m I_n \quad (114)$$

Isolando as entradas dinâmicas (torques e forças externas) das saídas do modelo (vetor de juntas e base), obtém-se uma formulação cuja única variável de alta ordem é \ddot{q} :

$$\begin{aligned} I_n^T \tau - I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} F_e &= (-I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} + H_m) \ddot{q} + (-I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_{0m} + \dot{H}_m) \dot{q} \\ &\quad + (I_n \dot{H}_{0m}^T - I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}) \dot{x}_0 + I_n^T c_m \end{aligned}$$

Assim, tem-se duas equações nas quais os termos \ddot{q} e \ddot{x}_0 são mutuamente independentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q} = -(H_m - I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m})^{-1} \left[-I_n^T (\tau - H_{0m}^T H_0^{-1} F_e) + (\dot{H}_m - I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_{0m}) \dot{q} \right. \\ \left. + (I_n \dot{H}_{0m}^T - I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}) \dot{x}_0 + I_n^T c_m(x_{0q}) \right] \\ \ddot{x}_0 = -H_0^{-1} \left(H_{0m} \ddot{q} + \dot{H}_{0m} \dot{q} + \dot{H}_0 \dot{x}_0 - F_e \right) \end{array} \right.$$

Dadas condições iniciais de posição e velocidade para a base (x_0, \dot{x}_0) e juntas (q, \dot{q}) , as acelerações podem ser calculadas recursivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_k = -(H_m - I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m})^{-1} \left[-I_n^T (\tau - H_{0m}^T H_0^{-1} F_e) + (\dot{H}_m - I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}_{0m}) \dot{q}_{k-1} \right. \\ \left. + (I_n \dot{H}_{0m}^T - I_n^T H_{0m}^T H_0^{-1} \dot{H}) \dot{x}_{0_{k-1}} + I_n^T c_m(x_{0_{q_{k-1}}}) \right] \\ \ddot{x}_{0_k} = -H_0^{-1} \left(H_{0m} \ddot{q}_k + \dot{H}_{0m} \dot{q}_{k-1} + \dot{H}_0 \dot{x}_{0_{k-1}} - F_e \right) \end{array} \right.$$

É válido notar que, a partir das notações introduzidas, o modelo numérico de múltiplos braços possui a mesma estrutura algébrica do caso de braço único com $I_n = I_1 = 1$.

3.8 Framework de detumbling

No contexto de manipuladores espaciais, a tarefa de *detumbling* consiste em capturar objetos de momento não-nulo, utilizando um subconjunto de efetuadores do robô, de modo a atenuar seu movimento rotacional inercial. Na primeira etapa deste processo, denominada *pré-captura*, é realizado um planejamento de trajetória no espaço cartesiano para minimizar as velocidades relativas – linear e angular – entre alvos e efetuadores. Uma vez que os requisitos de proximidade são atendidos, é executada a fase de *captura* ou *grasping*, cujo objetivo é incorporar fisicamente os alvos ao sistema robótico. Após a assimilação de todos os alvos, a etapa de *pós-captura* propõe minimizar suas velocidades inerciais, distribuindo o momento adquirido para os demais elementos da cadeia.

Nota-se que as condições operacionais do robô ao longo das etapas do *detumbling* se distinguem no tangente às forças externas aplicadas. De fato, a descrição apresentada esclarece que o modelo *stand-alone* – amplamente utilizado em literatura de aplicações de *detumbling* – é insuficiente para representar adequadamente a dinâmica de captura e pós-captura.

Uma vez que todas as variações do modelo do manipulador foram devidamente apresentadas neste texto, pode-se propor um *framework* de simulação para uma tarefa completa de captura de alvo. Vale ressaltar que o modelo mais geral, a saber, o modelo numérico com propagação de forças, seria suficiente para resolver este problema. Porém, modelos analíticos possuem vantagens em termos de análise e custo computacional. Diante deste compromisso, propõe-se a seguinte estruturação:

- **Pré-captura:** supondo que o robô parte do repouso, o modelo *stand-alone* pode ser utilizado nesta fase;
- **Captura:** como forças externas impulsivas são aplicadas, deve-se utilizar a solução completamente numérica para atualizar as dinâmicas nesta etapa;
- **Pós-captura:** o sistema formado por robô + alvos é isolado, mas possui um momento transferido pelo alvo em *tumbling*. Logo, pode-se usar o modelo com momento não-nulo e conservado, que não possui Jacobiana linear mas é vantajoso por ser analítico.

Na subseção 3.8.1, a tarefa de pós-captura é abordada no contexto da E-GJM (vide Seção 3.3.2). Especificamente, a formulação da cinemática inversa é utilizada para calcular a solução de espaço das juntas que anula a velocidade angular dos efetuadores de um manipulador espacial sujeito a momento angular não-nulo. Até o melhor conhecimento dos autores, esta formulação é uma contribuição deste trabalho.

Como hipóteses, presume-se que as condições finais da etapa de captura são nominalmente conhecidas, bem como o momento total do sistema.

3.8.1 Formulação de pós-captura para multimanipuladores espaciais

Conforme descrito na Seção 3.3.2, a cinemática direta de um multimanipulador espacial é uma função da velocidade do espaço das juntas \dot{q} e do momento total M do sistema, ponderados pela E-GJM e pela "subjacobiana" J_{0_E} , além da matriz de inércia da base H_0 :

$$\mathcal{J}\dot{x}_E = J^*\dot{q} + J_{0_E}H_0^{-1}M \quad (115)$$

O elemento $\mathcal{J}\dot{x}_E \in \mathbb{R}^{6N \times 1}$ concatena os 6 graus de liberdade de cada um dos N efetuadores do multimanipulador. Os termos $\dot{q} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ e $H_0^{-1}M \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ são vetores coluna. Tal estrutura algébrica significa que cada elemento escalar de $\mathcal{J}\dot{x}_E$, isto é, cada grau de liberdade de cada efetuator, depende de todas as juntas \dot{q} e de todos os valores de $H_0^{-1}M$. Porém, relaciona-se somente com uma única linha das matrizes J^* e J_{0_E} .

Seja $\mathcal{J}\dot{x}_E\{k\} \in \mathbb{R}$, $k \in 1, \dots, 6N$ um grau de liberdade arbitrário dos efetuadores. Assim, as linhas matriciais associadas a este escalar são $J^*\{k\} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ e $J_{0_E}\{k\} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$. Reescrevendo a Equação 115 de acordo com a indexação proposta, tem-se:

$$\mathcal{J}\dot{x}_E\{k\} = J^*\{k\}\dot{q} + J_{0_E}\{k\}H_0^{-1}M \quad (116)$$

A cinemática inversa decorre diretamente da Equação 116:

$$\dot{q} = J^*\{k\}^{-1} [\mathcal{J}\dot{x}_E\{k\} - J_{0_E}\{k\}H_0^{-1}M] \quad (117)$$

Embora tenha sido preestabelecido uma indexação de elemento único, a expressão 117 continua válida para uma lista $k \in \mathbb{N}$ de graus de liberdade dos efetuadores. Logo, a cinemática inversa pode ser solucionada para restrições de dimensão arbitrária em espaço da tarefa, desde que $\dim k \leq 6N$.

O modelo 117 pode ser utilizado para formular a tarefa mais simples de *detumbling* com multimanipuladores: estabilizar um alvo capturado por um único braço do robô. Ou seja, dado um robô *free-floating* de N braços e momento não-nulo M , deve-se determinar a solução de juntas \dot{q} que estabilizam a rotação de um único efetuator. Se k_ω é o índice do grau de liberdade rotacional desejado, a tarefa em questão impõe que $\mathcal{J}\dot{x}_E\{k_\omega\} = 0$. A trajetória no espaço das juntas que permite esta tarefa é:

$$\dot{q} = -J^*\{k_\omega\}^{-1} [J_{0_E}\{k_\omega\}H_0^{-1}M] \quad (118)$$

Naturalmente, a solução da Equação 118 não é única. Isto viabiliza estratégias de controle multiobjetivo, compreendendo métricas de atenuação de distúrbios propagados à base. A existência de múltiplas soluções é evidente em um formato de produto escalar. Trata-se de uma única equação com N variáveis:

$$\sum_{i=1}^N a_i \dot{q}_i = b_0 \quad (119)$$

sendo $a_i \in \mathbb{R}$ os elementos do vetor $A = -J^*\{k_\omega\}^{-1}$ e $b_0 = J_{0E}\{k_\omega\}H_0^{-1}M \in \mathbb{R}$.

Matematicamente, pode-se obter N soluções fazendo $\dot{q}_i = 0 \forall i \neq j, j = 1, \dots, N$:

$$\dot{q}_j = \frac{b_0}{a_j} \quad (120)$$

sendo $b_0, a_j \in \mathbb{R}$. Isto equivale a compensar o momento angular do alvo com apenas uma junta do multimanipulador. Mesmo que uma solução numérica exista, esta estratégia dificilmente produz movimentos fisicamente viáveis.

O mesmo *framework* é imediatamente estendido para múltiplos alvos a partir de indexação de lista.

3.9 Contribuições teóricas do Trabalho

O propósito do Capítulo 3 é apresentar, com clareza de detalhes matemáticos e com fundamentação em leis da mecânica clássica, os resultados consolidados em literatura concernentes ao modelo cinemático e dinâmico de manipuladores espaciais de um braço. Até o melhor conhecimento dos autores, a modelagem consolidada para robôs espaciais de base flutuante não é completa em todos os seus aspectos. Por um lado, determinados módulos intrínsecos de seu aparato matemático são incompatíveis com as leis da mecânica aos quais correspondem, culminando em simplificações equivocadas do equacionamento final. Além disso, grande parte das aplicações de literatura envolvendo interação física do robô com o mundo externo, como detumbling, referenciam um formato de modelo dinâmico que foi produzido a partir de hipóteses diferentes das condições operacionais impostas pela aplicação. Nessas condições, foram propostos ajustes, reinterpretações, generalizações e novas formulações ao longo da exposição da Seção 3, cujo objetivo é agregar maior confiabilidade à literatura de modelagem de robôs espaciais e suas aplicações.

Nesta seção, são resumidas as contribuições intrínsecas e extrínsecas deste trabalho para a área de literatura pertinente. Deste conjunto, alguns itens foram selecionados para validação computacional.

3.9.1 Generalização para múltiplos braços

Foi demonstrado que o modelo matemático da dinâmica acoplada de monomanipuladores espaciais é estruturalmente equivalente ao formato de multimanipuladores, desde que as matrizes dinâmicas H_0 , H_{0m} e H_m sejam apropriadamente generalizadas. As deduções envolvidas na construção deste resultado, apresentadas em detalhes nos apêndices A e B, são baseadas na definição da energia cinética e do momento do sistema, sendo ambas funções das velocidades inerciais lineares e angulares de todos os elementos do robô.

Em particular, no caso *stand-alone*, o modelo dinâmico do robô espacial segue o formato:

$$\begin{cases} H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T H^* \dot{q}) = \tilde{\tau}_m \\ \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} \end{cases} \quad (121)$$

Neste trabalho, fica demonstrado matematicamente que esta formulação é válida independentemente da quantidade de braços do robô espacial. Além disso, a equivalência estrutural do modelo de monomanipuladores e multimanipuladores permanece válida mesmo em condições operacionais mais gerais, isto é, com forças externas não-nulas, embora a Equação 121 não tenha validade nominal neste cenário.

3.9.2 Acoplamento dinâmico não-inercial

Conforme explicitado ao longo da Seção 3, a dinâmica acoplada de um robô espacial é modelada por um sistema de equações diferenciais parciais nas variáveis x_0 , dinâmica inercial da base, e q , dinâmica das juntas. O desenvolvimento analítico da energia cinética do manipulador espacial revela que as matrizes dinâmicas H_0 , H_{0m} e H_{0m} são dependentes do termo $\frac{\partial x_0}{\partial q}$. Esta componente descreve a sensibilidade da dinâmica da base com o movimento das juntas e figura em diversos módulos constituintes do cálculo das matrizes dinâmicas. Em literatura, este termo é desprezado.

Em particular, uma consequência direta desta hipótese é a simplificação equivocada das derivadas parciais das matrizes cinemáticas ${}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i}$, computadas por:

$$\frac{\partial}{\partial q} {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i} = \frac{\partial}{\partial q} ({}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0}) {}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i} + {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_0} \frac{\partial}{\partial q} ({}^{\mathcal{J}_0}T_{\mathcal{J}_i}) \quad (122)$$

Enquanto a segunda componente é referenciada na base e portanto reflete somente características de base fixa, a primeira é função de $\frac{\partial x_0}{\partial q}$. Assim, se esta parcela for anulada, todo o módulo não inercial do modelo perde validade nominal, haja vista a ubiquidade analítica de $\frac{\partial}{\partial q} {}^{\mathcal{J}}T_{\mathcal{J}_i}$.

Neste trabalho, é observado que tal componente – aqui denominada *acoplamento dinâmico não inercial*, *NIDC* – não é nominalmente nula, uma vez que as dinâmicas x_0 e q são inerentemente acopladas do ponto de vista físico e, portanto, o formalismo matemático deve incorporar este comportamento.

Do ponto de vista matemático, o cálculo do NIDC é complexo pois as variáveis envolvidas no numerador e denominador da derivada parcial são as próprias incógnitas do sistema. Neste trabalho, é proposto um modelo computacional para calcular o NIDC:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_k} = \left[H_0^{-1} \left(\frac{\partial H_0}{\partial q_k} \right) H_0^{-1} H_{0m} - H_0^{-1} \left(\frac{\partial H_{0m}}{\partial q_k} \right) \right] \dot{q} \\ \frac{\partial x_0}{\partial q_j}(k+1) = \frac{\partial x_0}{\partial q_j}(k) + T_s \frac{\partial \dot{x}_0}{\partial q_j}(k) \end{cases} \quad (123)$$

Portanto, o equacionamento 123 proposto neste trabalho garante maior confiabilidade nominal ao modelo de multimanipuladores espaciais.

3.9.3 Correção do equacionamento do Momento

A partir do desenvolvimento das equações inerciais de velocidade dos elos, inseridas nas definições de momento linear e angular do robô, foi demonstrado que o momento total M do robô espacial é composto por duas parcelas:

$$M = M^{MB} + M^B \quad (124)$$

A componente M_{MB} designa o momento dos elos com relação à base, uma vez que as deduções analíticas mostram que ela depende apenas dos vetores posição r_{0i} entre elos e

base. Assim, não retrata um movimento inercial, mas uma contribuição de corpo rígido. A parcela M_B , por sua vez, é função da posição inercial ${}^{\mathcal{J}}r_0$. A formulação analítica de M é de grande importância para a modelagem de robôs espaciais na vertente GJM, pois a condição de conservação de momento fornece a solução para a dinâmica externa. Isto significa que equívocos neste equacionamento culminam em discrepâncias no modelo de movimento inercial do manipulador.

O vínculo de conservação de momento estabelece que $M = 0$ em condições operacionais de *stand-alone*. Porém, as referências consolidadas em literatura desprezam a componente M_B da formulação 124. Na prática, isto equivale a presumir que somente o momento de corpo rígido do robô é nulo e conservado. Neste trabalho, conclui-se que esta interpretação não é garantida pelas leis de Newton e, conseqüentemente, a validade nominal da dinâmica externa é prejudicada.

Por outro lado, a assimilação da Equação 124 na modelagem dinâmica aumenta significativamente a complexidade de soluções analíticas, mesmo em *stand-alone*. Conforme deduções detalhadas no apêndice B, a componente M^{MB} depende exclusivamente de termos figurantes na dinâmica interna, a saber, as variáveis de estado x_0, q e matrizes dinâmicas H_0, H_{0m} . Assim, a inserção de um segundo conjunto de equações (dinâmica externa) que dependem dos mesmos termos simplifica a solução analítica. Por sua vez, o momento da base M^B é composto por matrizes H_0^C, H_{0m}^C alheias ao restante do modelo:

$$\begin{cases} M = (H_0^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + H_{0m}\dot{q}) + (H_0^{C\mathcal{J}}\dot{x}_0 + H_{0m}^C\dot{q}) \\ H_0^C = \begin{bmatrix} 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ m_T^{\mathcal{J}}r_0 & m_T^{\mathcal{J}}r_0 C^{\times\mathcal{J}}r_0^{\times} \end{bmatrix} H_{0m}^C = \begin{bmatrix} 0_{3,N} \\ -J_{TS}^{\times\mathcal{J}}r_0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (125)$$

De fato, a formulação de momento considerada em literatura é simplesmente:

$$H_0^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + H_{0m}\dot{q} = 0 \quad (126)$$

Conforme discutido nesta seção, a solução ${}^{\mathcal{J}}x_0$ retornada pela Equação 126, embora analiticamente elegante, não captura todas as dinâmicas do robô espacial.

3.9.4 Análises da construção do equacionamento Lagrangiano da dinâmica acoplada

Neste trabalho, é demonstrado que o sistema de equações diferenciais parciais que representa a dinâmica acoplada de robôs espaciais pode ser construído de duas formas distintas, originando duas soluções diferentes para as equações de movimento. A distinção reside na sequência dos cálculos envolvidos nas Equações Euler-Lagrange. De acordo com revisões bibliográficas, os estudos pioneiros na área sugeriam que o vínculo Newtoniano de momento deveria ser aplicado na Lagrangiana antes que as equações de Euler-Lagrange fossem resolvidas. Porém, pesquisas recentes referenciam modelos nos quais as equações

diferenciais são inicialmente solucionadas nas duas incógnitas x_0, q , resultando em uma equação autossuficiente para a dinâmica interna do robô, sendo esta posteriormente associada ao vínculo de Momento. A partir de deduções detalhadas de cada método (vide Seção C), é demonstrado que as soluções de movimento de cada método diferem na parte não inercial, seja em condições operacionais isoladas ou não. A primeira abordagem, denominada *lagrangiana mono-estado*, é funcionalmente mais semelhante ao aparato consolidado de base fixa. Ao substituir o vínculo de x_0 em função de q , a função obtida depende apenas do vetor de coordenadas generalizadas q . Além deste método ser respaldado pela literatura de mecânica analítica, a função final possui mesma estrutura daquela consolidada em manipuladores terrestres. As equações de movimento obtidas com este método são:

$$\begin{cases} \tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} - \frac{1}{2} M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ \mathcal{J} \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} + H_0^{-1} M \end{cases} \quad (127)$$

O segundo método, denominado *lagrangiana multi-estado*, produz uma função Lagrangiana que depende de q e x_0 , mas as derivadas parciais são calculadas somente com respeito a q . Isto contradiz a formulação de mecânica analítica na qual as coordenadas generalizadas devem capturar toda a dinâmica do sistema, uma vez que x_0 – ainda não expresso em função de q – possui uma dinâmica própria. Com mais razão, o vetor estendido $[q, x_0]$ não pode desempenhar o papel de coordenadas generalizadas pois não são mutuamente ortogonais, uma vez que x_0 é dependente de q . De fato, este ponto reforça a superioridade do método monoestado no quesito de acurácia nominal do modelo, pois q é um vetor de elementos mutuamente ortogonais.

Adicionalmente, esta abordagem produz termos de acoplamento dinâmico não inercial $\frac{\partial x_0}{\partial q}$, que são desprezados no restante do modelo. Por tais razões, conclui-se que este método produz um modelo dinâmico incompleto em relação à abordagem mono-estado.

As equações de movimento 128 do método multi-estado diferem das homólogas 127 de mono-estado:

$$\begin{cases} \tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} + \frac{d}{dt} (H_{0m}^T H_0^{-1} M) - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} \\ \mathcal{J} \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} + H_0^{-1} M \end{cases} \quad (128)$$

A vantagem do método multi-estado é sua representação no paradigma subatuado. Uma vez que este procedimento retorna dois conjuntos de equações que dependem das duas variáveis x_0 e q , o modelo pode ser entendido explicitamente como uma junção de uma "dinâmica inercial de juntas" e uma "dinâmica de junta passiva". O método mono-estado, embora superior no quesito de acurácia nominal de modelagem, produz somente uma equação final de movimento para cada variável.

3.9.5 Análise do formato subatuado com forças externas não-nulas

Conforme exposto na Seção 3.9.4, a abordagem de Lagrangiana multi-estado permite que o modelo da dinâmica acoplada de robôs espaciais seja representado no formato característico de sistemas subatuados com uma junta passiva:

$$\begin{bmatrix} H_0 & H_{0m} \\ H_{0m}^T & H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{H}_0 & \dot{H}_{0m} \\ \dot{H}_{0m}^T & \dot{H}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_e \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ \tilde{\tau}_m \end{bmatrix} \quad (129)$$

Neste paradigma, as equações de movimento das juntas ativas são concatenadas matricialmente às equações das juntas passivas. No contexto de robôs espaciais de base flutuante, a única junta ativa é a base. Isto implica que a linha superior da Equação 129 deve descrever a dinâmica da base livre do manipulador, enquanto que a linha inferior é a equação de dinâmica interna consolidada para robôs espaciais, a qual modela a resposta das juntas aos torques aplicados.

Contudo, neste trabalho fica demonstrado que a equação de dinâmica inercial não contém termos não inerciais do tipo Coriolis ou centrípeta. Assim, neste cenário, tem-se necessariamente $c_e = 0$. Assim, o formato mais apropriado é:

$$\begin{bmatrix} H_0 & H_{0m} \\ H_{0m}^T & H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{H}_0 & \dot{H}_{0m} \\ \dot{H}_{0m}^T & \dot{H}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ \tilde{\tau}_m \end{bmatrix} \quad (130)$$

Além disso, vale observar que a força externa resultante F_e e os torques de junta $\tilde{\tau}_m$ desempenham papéis distintos se o robô espacial de base livre é entendido como um sistema subatuado. Neste tipo de formulação, o lado direito da equação matricial engloba as entradas dinâmicas que atuam sobre as juntas. No caso das juntas ativas, esta interpretação é correta: o parâmetro $\tilde{\tau}_m$ descreve os torques líquidos que são aplicados diretamente às juntas ativas. Por outro lado, a partir das demonstrações deste trabalho, conclui-se que o termo F_e não significa uma atuação de força na junta passiva – a saber, a base – mas a força resultante atuante em todo o sistema. No contexto específico de captura de alvo, por exemplo, essa força é aplicada nos efetadores.

As observações apresentadas acerca do termo não inercial c_e e a entrada dinâmica F_e , embora sutis, são úteis na compreensão teórica da representação da dinâmica de robôs espaciais como sistemas subatuados.

3.9.6 E-GJM e *detumbling*

Neste trabalho, é demonstrado que existe uma generalização para múltiplos braços da Matriz Jacobiana Generalizada, que por vez é uma generalização da matriz Jacobiana de base fixa, desde que o robô opere em *stand-alone*. Aqui denominada E-GJM (*Extended Generalized Jacobian Matrix*), esta matriz desempenha o mesmo papel em monomani-

puladores espaciais, isto é, efetua o mapeamento de velocidades das juntas de todos os braços do robô para velocidades dos efetuadores. Conforme provado neste trabalho, cujo resultado é resumido pela Equação 131, a diagonal principal da E-GJM é constituída por GJMs de monomanipuladores, uma vez que computa as contribuições das juntas de um braço para o movimento do efetuador daquele mesmo braço. Os demais termos da matriz modelam o acoplamento dinâmico inerente entre braços e base do robô espacial.

$$J^* = \begin{bmatrix} J_S^1 & J_C^{1,2} & \cdots & J_C^{1,j} & \cdots & J_C^{1,N} \\ J_C^{2,1} & J_S^2 & \cdots & J_C^{2,j} & \cdots & J_C^{2,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ J_C^{i,1} & J_C^{i,2} & \cdots & J_S^i & \cdots & J_C^{i,N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ J_C^{N,1} & J_C^{N,2} & \cdots & J_C^{N,j} & \cdots & J_S^N \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} J_S^i = J_m^i - J_{0E}^i H_0^{-1} H_{0m_i} \\ J_C^{i,j} = -J_{0E}^i H_0^{-1} H_{0m_j} \end{cases} \quad (131)$$

É válido destacar que a E-GJM existe independentemente das condições operacionais do robô, mas fica demonstrado que apenas em situações de *stand-alone* (momento total nulo e conservado) esta matriz é suficiente para efetuar a transferência entre domínios. Em outras palavras, o modelo linear (Equação 132) $\dot{x}_e = J^* \dot{q}$ é válido apenas para operação isolada.

$$\mathcal{J} \dot{x}_e = J^* \dot{q} \quad (132)$$

A formulação mais geral é uma transformação afim (Equação 133), e portanto não linear, que depende do valor instantâneo do momento total do sistema.

$$\mathcal{J} \dot{x}_e = J^* \dot{q} + J_{0E} H_0^{-1} M \quad (133)$$

Contudo, em aplicações recentes de captura de alvo, o modelo linear 132 é amplamente utilizado. Conforme demonstrações feitas, esta formulação é nominalmente incorreta em condições operacionais com $M \neq 0$. Como M não é nulo em pós-captura, o modelo que deve ser usado é aquele da Equação 133.

Neste contexto, um dos resultados deste trabalho é uma formulação de *detumbling* fundamentada na E-GJM. Especificamente, a Equação 133 para a cinemática direta com momento não-nulo é utilizada para calcular a solução de espaço das juntas que anula a velocidade inercial de um subconjunto de efetuadores. De fato, em situação de pós-captura, o objetivo é estabilizar o momento dos alvos solidários aos efetuadores selecionados para a tarefa de *grasping*.

Para isto, foi proposta uma estratégia de indexação da E-GJM. Considerando um robô de $N \in \mathbb{N}$ braços, a jacobiana tem N linhas, de modo que cada a i -ésima linha corresponde à cinemática acoplada do i -ésimo braço. Dado um subconjunto $k = \{k_1, \dots, k_n\}, 0 < k_i < N$ de efetuadores, as linhas correspondentes são extraídas e concatenadas em submatrizes, produzindo um modelo cinemático reduzido. Assim, este modelo é invertido e as

velocidades inerciais são anuladas (Equação 134), fazendo com que \dot{q} seja a solução de estabilização procurada.

$$\begin{cases} {}^J\dot{x}_E\{k\} = J^*\{k\}\dot{q} + J_{0_E}\{k\}H_0^{-1}M \\ \dot{q} = -J^*\{k\}^{-1}J_{0_E}\{k\}H_0^{-1}M \end{cases} \quad (134)$$

Em particular, a estabilização de um único efetuador pode ser obtida com uma única junta de missão, uma vez que a Equação 134 é reduzida ao caso escalar.

3.9.7 Propagação de forças externas

Em aplicações que envolvem interação física do manipulador com objetos externos, há uma transferência de momento linear e angular para o robô. Além disso, as forças e torques participantes da interação são propagadas ao longo de seus elos e juntas. O cálculo destas contribuições são fundamentais para a modelagem dinâmica, uma vez que são parcelas do vetor de torque efetivo $\tilde{\tau}_m$ da dinâmica interna, juntamente com os torques de controle gerados pelos atuadores. Isto significa que a acurácia do projeto dos controladores do robô espacial é diretamente dependente das forças propagadas em uma situação de interação.

Para robôs de base fixa, o método de cálculo das forças propagadas a partir do efetuador é bem estabelecido em literatura. A partir de uma força externa F_e impressa ao efetuador, o vetor de torque τ_{eq} percebido pelas juntas é aquele que produz o mesmo trabalho de F_e . Nessas condições, τ_{eq} é o torque que anula os deslocamentos virtuais $\delta x_e, \delta q$ impostos pela ação externa. Conforme exposto neste trabalho, o Princípio dos Trabalhos Virtuais pode ser utilizado por se tratar de uma situação estática. Com isso:

$$\tau_{eq} = J^T F_e \quad (135)$$

Na Equação 135, J é a Matriz Jacobiana do manipulador de base fixa. Neste ponto, vale observar que a existência de um modelo linear de transformação entre deslocamentos virtuais δq de junta e δx_e nos efetuadores (ou outro ponto de interesse) é uma hipótese necessária para que este Princípio seja válido. Em robôs de base fixa, a Jacobiana garante a linearidade da transferência entre os domínios.

Portanto, neste tipo de sistema, a propagação de forças do efetuador para as juntas é computada a partir da multiplicação pela Jacobiana transposta.

Contudo, em literatura recente, o resultado 135 passou a ser usado para propagar forças em robôs espaciais, sendo J a Matriz Jacobiana Generalizada. Neste trabalho, conclui-se que esta abordagem não possui aparato teórico suficiente para comprovar sua validade nominal, principalmente em dois aspectos:

- **Robôs espaciais operam em condição não estática.** A validade do Princípio dos Trabalhos Virtuais requer que as forças e torques envolvidos produzam a mesma

quantidade de trabalho virtual, mas com sinais opostos. Porém, diferentemente do que ocorre em base fixa, isto não é possível em robôs espaciais de base flutuante pois eles são incapazes de balancear forças externas utilizando somente os atuadores de torque. Qualquer solicitação externa imposta ao robô *free-floating* produz um deslocamento inercial global no sistema, o que viola a hipótese do caso estático.

- **Não linearidade entre domínios.** O modelo de transferência entre espaço das juntas e espaço cartesiano é linear em robôs espaciais somente no caso *stand-alone*. Nesta condição, foi demonstrado neste trabalho que existe uma matriz J – aqui denominada por E-GJM – que constitui o modelo linear $\dot{x}_e = J\dot{q}$ de mudança de domínios. Porém, também foi demonstrado matematicamente que se as forças externas são não nulas o modelo assume um comportamento do tipo não linear, mas afim: $\dot{x}_e = J\dot{q} + J_{0_E}H_0^{-1}M$. Isto indica outro ponto de violação do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Naturalmente, em um cenário de cálculo de propagação de forças, as forças externas sempre são não nulas, resultando na perda de linearidade mencionada.

Neste trabalho, é proposto o método de Newton-Euler para o cálculo da propagação de forças em robôs espaciais. Esta abordagem, que consiste em um algoritmo numérico e iterativo, é respaldada pelas leis da mecânica clássica, cuja validade em robôs espaciais é garantida. De fato, se comparada ao modelo Jacobiano, esta formulação é menos conveniente do ponto de vista de *design*, pois não pode ser incorporada analiticamente ao modelo dinâmico.

3.9.8 Compatibilidade entre modelo e condições operacionais

A partir de extensivas deduções matemáticas e análises pautadas nas leis da mecânica clássica apresentados neste trabalho, conclui-se que a dinâmica de robôs espaciais permite variações estruturais em seu modelo de acordo com as condições operacionais as quais é submetido. Especificamente, as características do momento linear e angular que são impostas ao manipulador definem qual formato do modelo dinâmico garante maior acurácia nominal. Se as forças externas são não-nulas, ou se não há forças externas mas o robô possui momento, o modelo consolidado em literatura não deve ser usado pois tais condições operacionais violam suas hipóteses construtivas.

Por outro lado, as matrizes constituintes das dinâmicas interna e externa são independentes do momento imposto ao robô, uma vez que são montadas a partir das expressões de velocidade inercial dos elos, que são parâmetros cinemáticos por natureza. Assim, fixado o paradigma da Lagrangiana (mono-estado ou multi-estado), a estrutura principal do modelo assume um formato único independentemente de forças externas ou da quantidade de braços. Contudo, vale destacar que algumas contribuições dinâmicas são descartadas

em literatura, como o acoplamento dinâmico não inercial e o movimento inercial da base nos vínculos de conservação de momento.

Porém, se as forças externas não são nulas, deve-se considerar que a relação entre velocidades de junta e espaço inercial não é linear. Neste cenário, a matriz Jacobiana não contempla todas as informações necessárias para computar a velocidade inercial dos efetuadores. Adicionalmente, a Jacobiana é insuficiente para propagar forças externas para as juntas do robô, sendo necessária uma formulação mais complexa para incorporar estes efeitos no projeto das leis de controle.

Particularmente, nas aplicações de *detumbling*, estas observações devem ser levadas em consideração na formulação dos controladores, a fim de aumentar a acurácia da modelagem utilizada no *design*.

Capítulo 4

Metodologia

Os desenvolvimentos deste projeto, além de contemplar extensiva revisão bibliográfica e análises matemáticas de vários aspectos do modelo dinâmico do robô espacial consolidado em literatura, abrange implementações computacionais do manipulador *free-floating* de múltiplos braços, em espaço das juntas e da tarefa. Dentre as contribuições expostas na Seção 3.9, o *acoplamento dinâmico não inercial*, *E-GJM* e *detumbling* foram itens selecionados para estudo computacional. A avaliação computacional do método numérico de propagação de forças e a correção do vínculo de momento é destinada para trabalhos futuros.

Acerca da correção de NIDC, as análises realizadas objetivam indicar consistência na modelagem e investigar os efeitos das correções propostas:

- **Floating Manipulator Standard (A) (Modelo Padrão do Manipulador Flutuante (FM-ST-A))**. Designa o modelo GJM desprovido de termos de acoplamento dinâmico não-inercial, cujas matrizes de forças centrípetas e Coriolis são obtidas por cálculo diferencial analítico sobre o vetor de juntas;
- **Floating Manipulator with Non-Inertial Correction (A) (Modelo com Correção Não-Inercial do Manipulador Flutuante (FM-NIC-A))**. Similar ao FM-ST-A, mas assimila o acoplamento dinâmico não-inercial. Esta formulação é uma das contribuições deste trabalho.

Objetivando comparar a resposta dos modelos FM-ST-A e FM-NIC-A, foi simulado um manipulador de quatro braços e quatro elos por braço, com hiper-parametrizações idênticas nos dois casos. As respostas do modelo serão analisadas em espaço das juntas e espaço cartesiano. O modelo ST foi escolhido para avaliar a performance do sistema de

controle em espaço da tarefa e a validação da acurácia cinemática da E-GJM, além do desempenho da estabilização pós-captura.

Haja vista o caráter preliminar de tais análises, o robô foi reduzido ao caso planar. Os braços são posicionados com separação angular mútua de 90° , sendo cada junta-pivô contida nos eixos x ou y do referencial da base. Além disso, as características inerciais, geométricas e cinemáticas dos braços foram definidas de forma a maximizar a simetria do problema. Todas as juntas são do tipo rotativas.

4.1 Sistema de coordenadas inercial

Em aplicações *stand-alone*, o sistema de coordenadas inercial Ω é usualmente definido no centro de massa do robô, uma vez que nestas condições este ponto é mantido em equilíbrio dinâmico. Em aplicações de *detumbling*, as forças impressas ao sistema pela captura de alvos acelera o centro de massa e, portanto, este referencial torna-se não-inercial. Apesar disso, como a duração das colisões é geralmente pequena e o momento generalizado é conservado no sistema estendido composto por robô e alvo, o CM pode ser entendido como "inercial por partes", cujas descontinuidades ocorrem devido à interação com objetos não estáticos. Contudo, perante o caráter preliminar das simulações propostas nesta etapa do projeto, a complexidade deste formalismo não se justifica.

Portanto, será adotado um referencial inercial cuja origem é a posição inicial do centro de massa da base robótica, orientado conforme seus eixos principais de inércia. Naturalmente, a reação dinâmica provocada por uma tarefa no espaço das juntas faz com que este referencial afaste-se do CM da base ao longo do movimento do manipulador.

Por fim, o modelo FM-ST-A é montado em um sistema de controle no espaço da tarefa. Com exceção de um pequeno incremento nos ângulos iniciais de junta para escapar de singularidades, todas as parametrizações desta simulação são iguais às anteriores.

4.2 Hiper-parâmetros da simulação

Os hiper-parâmetros da simulação são categorizados em: manipulador, tarefa e tempo de simulação.

4.2.1 Manipulador

O algoritmo implementado é genérico em todos os parâmetros do robô: número de braços, quantidade de juntas por braço, orientação espacial das juntas, aspectos inerciais e geométricos dos corpos da cadeia, etc. Entretanto, conforme mencionado, o robô simulado possui dimensões, massas e momentos de inércia dos elos idênticos para todos os braços. Os valores atribuídos são, respectivamente, $[0.5, 2.5, 2.5, 0.5]$ metros e $[2, 2, 2, 2]$

kg para comprimentos e massas. Os momentos principais de inércia de cada elo são $[0.065, 0.0321, 0.0277]$ kgm^2 em x, y, z , sendo os momentos secundários de inércia nulos. Os CMs de cada elo são localizados em seu centro geométrico.

A base robótica é parametrizada com 10 kg de massa total e momentos principais de inércia $[0.5667, 0.5667, 0.0667]$ e secundários iguais a zero.

A posição das juntas pivô de cada braço são definidas no referencial da base como $[1.75, 0, 0]$, $[0, 1.75, 0]$, $[-1.75, 0, 0]$ e $[-1, 75, 0, 0]$ metros para os braços 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

Acerca de inicializações cinemáticas, os valores dos ângulos de junta são $[0, 90, 0, 90]$ graus para todas as juntas dos braços 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Tal parametrização, juntamente com as posições das juntas-pivô supracitadas, alinha os braços ao longo dos semi-eixos do referencial da base:

- Braço 1: $+x$
- Braço 2: $+y$
- Braço 3: $-x$
- Braço 4: $-y$

A Figura 6 mostra um esquema simplificado desta configuração. O sistema de coordenadas ilustrado é o referencial inercial. Devido à simetria imposta, tal construção coloca

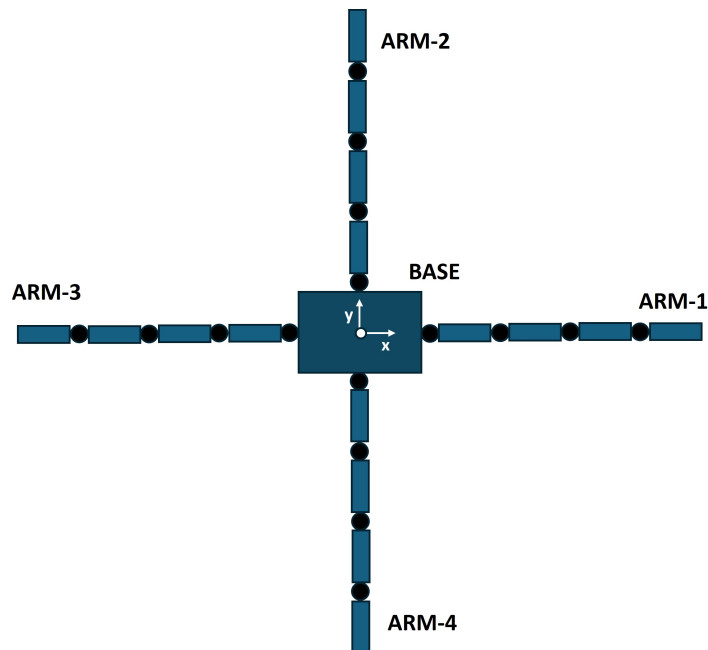


Figura 6 – Configuração inicial do multi-manipulador. Fonte: Próprio autor

o centro de massa do sistema robótico inicialmente na origem do referencial inercial.

Por fim, os ângulos de Euler iniciais da base são nulos.

4.2.2 Tarefa

A simulação proposta é ambientada no espaço das juntas. As trajetórias de cada junta são polinômios de quinta ordem, cuja velocidades e acelerações iniciais e finais são nulas. Os valores de regime para as referências de juntas de cada braço são $[5, 85, -5, 95]$ graus para os braços 1, 2, 3 e 4 respectivamente. De acordo com a convenção de rotações horárias (de $x+$ para $y+$) positivas, esta trajetória busca movimentar os braços 1 e 3 em direção a $+y$, e os braços 2 e 4 em direção a $+x$. Logo, o centro de massa deve deslocar-se ao longo da bissetriz dos semi-eixos $+x$ e $+y$. Como o sistema parte do repouso e não há forças externas atuantes, a base deve flutuar no sentido contrário (i.e, a bissetriz de $-x$ e $-y$), visando manter o centro de massa do robô na origem. Todas estas previsões serão confirmadas nas simulações, cujos gráficos são apresentados na sequência.

4.2.3 Tempo

A simulação foi configurada para uma duração de 5 segundos de tarefa, com taxa de atualização telemétrica de 0.001 segundos por ponto. A taxa de $1ms$ foi escolhida com base em frequências de leitura de algumas IMUs comerciais (1 kHz). Uma vez que as variações angulares imposta na tarefa de acompanhamento de juntas é de 5 graus por junta, isto resulta em uma velocidade média de $1^\circ/s$ para cada junta. A escolha por estes valores visa manter a amplitude dos torques de controle aplicados pelos atuadores das juntas em valores próximos daqueles entregues por motores comerciais (da ordem de 10 Nm após a redução).

4.3 Sistema de controle

Considerando que a proposta da simulação é uma comparação preliminar entre dois modelos do manipulador espacial, não serão adicionados distúrbios, ruídos ou incertezas paramétricas. Logo, foi selecionado o Torque Calculado como estratégia de controle. Este controlador particiona o torque de compensação τ das juntas em dois termos: α , baseado em modelo; e β , termo servo Craig (2005):

$$\tau = \alpha\tau' + \beta \quad (136)$$

em que $\alpha = H(q)$ (componente inercial do modelo) e $\beta = C(q)$ (componente não-inercial do modelo).

O sinal de servo τ' é dado por:

$$\tau = \ddot{q}_d + K_p e + K_d \dot{e} \quad (137)$$

em que $e = q_d - q$ é o erro de acompanhamento de trajetória no espaço das juntas.

Os ganhos K_d, K_p são matrizes quadradas da mesma dimensão do manipulador. Para multi-manipuladores, $K_d, K_p \in \mathbb{R}^{N \times N}$, sendo $N = \sum_{i=1}^n m_i$ o número total de juntas do robô. Conforme o formalismo estabelecido neste trabalho, no contexto de múltiplos braços os vetores q e τ resultam de uma concatenação de todos os vetores de junta e torque de cada um dos braços.

Para ambos modelos, os ganhos do Torque Calculado foram ajustados para $K_p = 10I_N, K_d = 100I_N$, sendo I_N a matriz identidade de dimensões apropriadas. Como as condições de simulação são totalmente nominais, não é necessário que estes ganhos sejam otimizados.

4.4 Aplicação no espaço da tarefa

Para viabilizar um estudo preliminar, o sistema de controle inercial adotado é de mesma arquitetura do espaço das juntas. Os ganhos do torque calculado também serão os mesmos para avaliar a consistência interna do modelo. Esta estratégia demanda que as trajetórias de referência dos efetuadores $\mathcal{J}x_e(t)$, as quais parametrizam a tarefa desejada, sejam previamente convertidas para o espaço das juntas. Isto é intermediado pela inversa da E-GJM:

$$\begin{aligned} \dot{q}_d &= J^{*-1} \mathcal{J} \dot{x}_e \\ \ddot{q}_d &= \frac{d}{dt} J^{*-1} \mathcal{J} \dot{x}_e + J^{*-1} \mathcal{J} \ddot{x}_e \end{aligned} \quad (138)$$

Portanto, dadas trajetórias de referência de velocidade e aceleração, as trajetórias necessárias no espaço das juntas para implementação da tarefa são calculados conforme 138. Porém, como a E-GJM relaciona velocidades, as posições de junta q_d não relacionam-se linearmente em domínio contínuo com as posições $\mathcal{J}x_e$ dos efetuadores.

A rigor, isto é calculado por algoritmos de cinemática inversa, que são extremamente desafiadores no paradigma *free-floating*. Como a base flutua, existem infinitas soluções de espaço das juntas para uma mesma trajetória inercial. De fato, o modelo dinâmico apresentado neste trabalho pode fundamentar investigações de *workspace* do multi-manipulador espacial, mas foge do escopo atual. Portanto, optou-se por uma abordagem simplificada. Dadas condições iniciais de posição $q_d(0)$:

$$q_d(k) = q_d(k-1) + \dot{q}_d T_s \quad (139)$$

sendo $k > 0$ um índice de simulação discreta e T_s a taxa de amostragem.

A validade do método 139 é dependente da qualidade da malha fechada, pois erros elevados em $\mathcal{J}x_e$ produzem descontinuidades em q_d . Cálculos mais robustos demandam algoritmos de inversão cinemática a nível de posição. Como o estudo em questão é nominal, esta abordagem é satisfatória.

Existem outras abordagens em literatura, como o uso da Jacobiana para transformar completamente o modelo do espaço das juntas para o domínio inercial (CRAIG, 2005).

Uma vantagem deste método é a possibilidade de incorporar diretamente na malha de controle o erro de trajetória inercial medido, dispensando conversões prévias da Jacobiana. Neste caso, estas conversões são assimiladas nas matrizes dinâmicas. Porém, não é assegurado que o mesmo conjunto de ganhos K_P, K_d funcione nesta situação e no controle em espaço das juntas. Ademais, os autores acreditam que a manutenção do modelo em domínio das juntas traz mais informações sobre sua resposta, as quais contribuem para validá-lo.

Por fim, a E-GJM será avaliada do ponto de vista de consistência cinemática. A implementação computacional prevê cálculos iterativos das matrizes SE(3) de cada elo do robô, incluindo efetuadores. Assim, o movimento inercial obtido numericamente serve de referência para os cálculos de cinemática direta efetuados pela jacobiana. A matriz E-GJM também será estudada no contexto de *detumbling*, no qual a formulação apresentada será aplicada para reduzir as velocidades dos efetuadores em condições de momento total não nulo.

4.5 Métricas de análise

O desempenho da tarefa de rastreamento de trajetória é avaliado pelo erro quadrático médio (RMS) entre a referência polinomial de posição angular $q_d^{i,j}$ e o movimento executado $q^{i,j}$ da i -ésima junta do j -ésimo braço. Sendo $e^{i,j} := q_d^{i,j} - q^{i,j}$, tem-se:

$$p_{JS}^{i,j} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n_T} (e_k^{i,j})^2}{n_T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (140)$$

sendo n_T a quantidade de pontos simulados. Nesse caso, $n_T = 500$.

Observa-se que 140 computa o desempenho para somente uma junta do robô. Para fins de comparação de modelos, é necessário que se tenha uma métrica global capaz de caracterizar todas as juntas de todos os braços. Neste trabalho, optou-se por utilizar iterativamente 140 em camadas sucessivas de análise. Isto é, para um dado braço j , calcula-se o "RMS" dos escalares $p_{JS}^{i,j}, j \in \{1, \dots, N\}$, resultando em j escalares. Este novo vetor é aplicado novamente em 140, culminando em somente um número real global para toda a tarefa de acompanhamento de trajetória do multi-manipulador.

A métrica quadrática apresentada também será usada para avaliar rastreamento em espaço cartesiano e a consistência cinemática da E-GJM.

4.6 Simulação dinâmica

Uma vez que todas as matrizes dinâmicas constituintes do modelo foram computadas, a dinâmica do robô espacial pode ser facilmente simulada numericamente como um sistema não-linear MIMO, cujas entradas são os torques de junta e as saídas são os ângulos de junta

e dinâmica da base flutuante. Conforme procedimentos convencionais de simulação de sistemas de controle, a simulação do multi-manipulador pode ser sequenciada da seguinte forma:

- ❑ **Aquisição de hiper-parâmetros.** Definição das dimensões do manipulador, como número de braços e quantidade de juntas por braço; valores inerciais e geométricos de cada elo; orientações dos eixos de cada junta; trajetórias desejadas para as juntas; configuração de parâmetros essenciais de simulação, como taxa de amostragem e tempo total de simulação;
- ❑ **Condições iniciais.** Definição dos valores iniciais de posição e velocidade vetor de juntas e posição/orientação da base robótica;
- ❑ **Cálculo das matrizes dinâmicas.** Cômputo das matrizes inerciais e não-inerciais conforme discutido neste trabalho;
- ❑ **Lei de controle.** Geração do sinal de controle a partir do erro de trajetória de cada junta. Nota-se que a arquitetura definida para o controlador é irrestrita.
- ❑ **Atualização do modelo.** Cálculo das acelerações de junta e base a partir do modelo sub-atuado apresentado.

Os itens 2-5 citados devem ser executados iterativamente de acordo com os parâmetros de simulação predefinidos. Na última etapa, as velocidades e posições são atualizadas e realimentadas no segundo item. A Figura 7 resume a sequência de etapas para simulação em espaço das juntas.

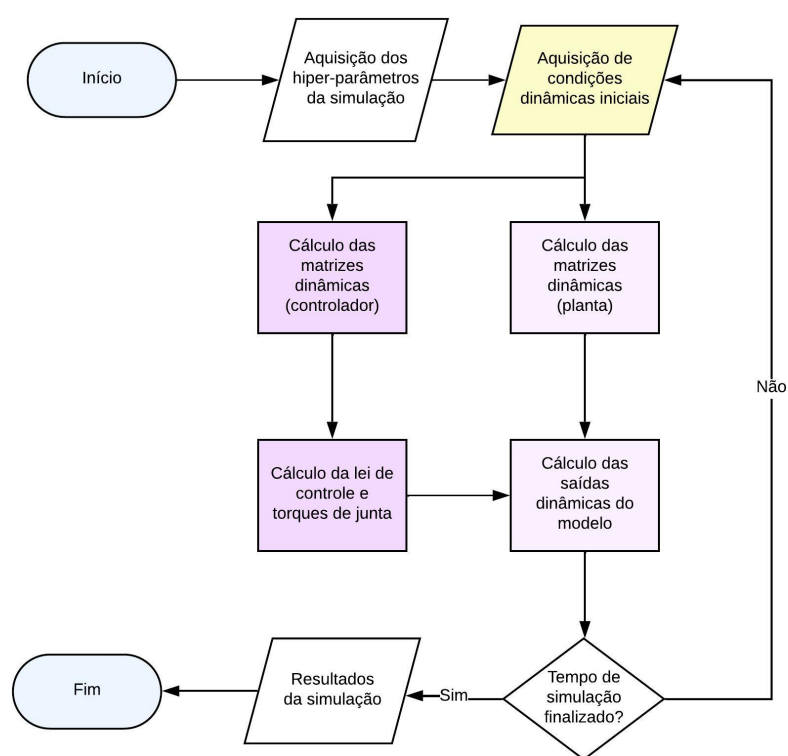


Figura 7 – Simulação de dinâmica interna do robô espacial. Fonte: Próprio autor

Capítulo 5

Resultados

Os resultados das simulações computacionais da modelagem apresentada neste trabalho são divididas em três partes: espaço das juntas, espaço da tarefa e *detumbling*.

Na Seção 5.1, são mostrados os resultados do modelo controlado em espaço das juntas, com ênfase na verificação dos impactos da correção proposta para o NIDC. O movimento do inercial da base e dos efetuadores, mantidos em malha aberta, também são apresentados.

A Seção 5.2 discrimina os resultados do sistema de controle em espaço da tarefa. Além de verificar a performance do controlador do domínio inercial, também é avaliada a consistência cinemática da E-GJM em relação aos cálculos iterativos.

Por fim, a Seção 5.3 apresenta os resultados da implementação computacional da formulação de *detumbling* desenvolvida neste trabalho. A fim de aumentar a confiabilidade do método, a tarefa de estabilização de momento dos efetuadores é realizada em diversos cenários distintos. Em cada caso, são alteradas as variáveis selecionadas para estabilização e as juntas de missão definidas.

As análises dos resultados apresentadas em cada Seção contribuem para validar a modelagem implementada e corroborar as contribuições teóricas deste trabalho.

5.1 Resultados de simulação - espaço das juntas

Para um dos dois modelos simulados, foram gerados gráficos representativos dinâmicas interna e externa, sinal de controle e verificação de consistência funcional:

- ❑ Dinâmica interna: erro de acompanhamento de trajetória de posição angular associado a cada junta de cada braço;
- ❑ Dinâmica externa: movimento da base robótica e dos efetuadores;
- ❑ Sinal de controle: curva de torque de cada junta, conforme gerado pelo Torque Calculado;
- ❑ Verificação de consistência: posição do centro de massa do multi-manipulador.

Vale reforçar que a simulação proposta é controlada somente em espaço das juntas. Portanto, o comportamento da dinâmica externa é apresentado somente para visualização, sendo este mantido em malha aberta. Acerca da verificação de consistência, optou-se pelo histórico de posição do centro de massa do manipulador, uma vez que – nas condições operacionais estabelecidas – este ponto deve-se manter constante ao longo de toda a operação do robô. Assim, desvios significativos desta variável indicam erros de modelagem ou implementacionais.

Conforme destacado anteriormente, a diferença entre as duas simulações reside no modelo selecionado para projeto e operação do controlador. Nas duas situações, a "planta" é calculada com o mesmo algoritmo: FM-NIC-A. Logo, os dados de telemetria produzidos por este modelo são tomados como aqueles que seriam lidos por sensores na operação prática do robô. Porém, na análise do modelo FM-ST-A, as matrizes dinâmicas desta formulação são empregadas para gerar o sinal de controle do Torque Calculado (o qual é sabidamente baseado em modelo). No caso do FM-NIC-A, o mesmo modelo da planta é utilizado com fidelidade máxima no sistema de controle. Todavia, nos dois paradigmas, o sinal de controle tem acesso aos mesmos dados de telemetria gerados pela "planta".

A Figura 8 mostra as curvas de referência de posição angular impostas ao controle no espaço das juntas, todas com variação absoluta de 5° .

5.1.1 FM-NIC-A

Os gráficos de dinâmica interna para o modelo FM-NIC-A são apresentados na Figura 9. Os erros de trajetória observados são 10^5 vezes menores que a trajetória imputada. Como a simulação é nominal – e não há dinâmicas não modeladas – este desvio pode ser atribuído a erros numéricos.

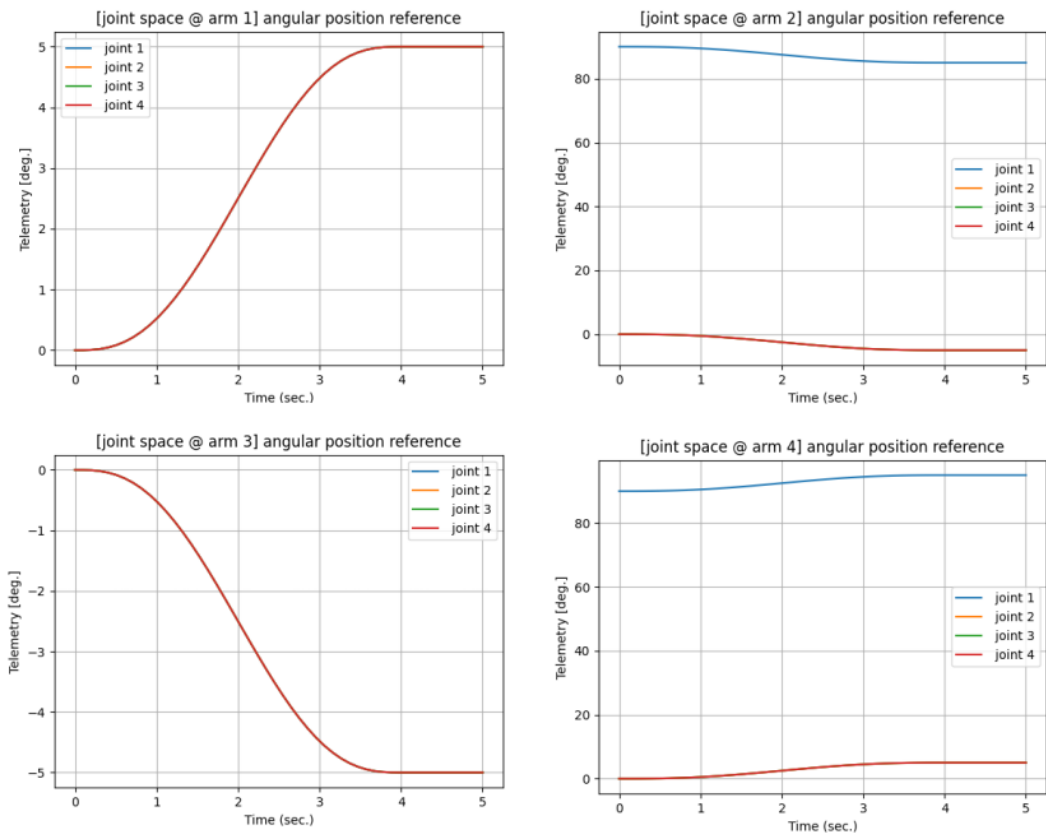


Figura 8 – Trajetória de referência de juntas. Fonte: Próprio autor

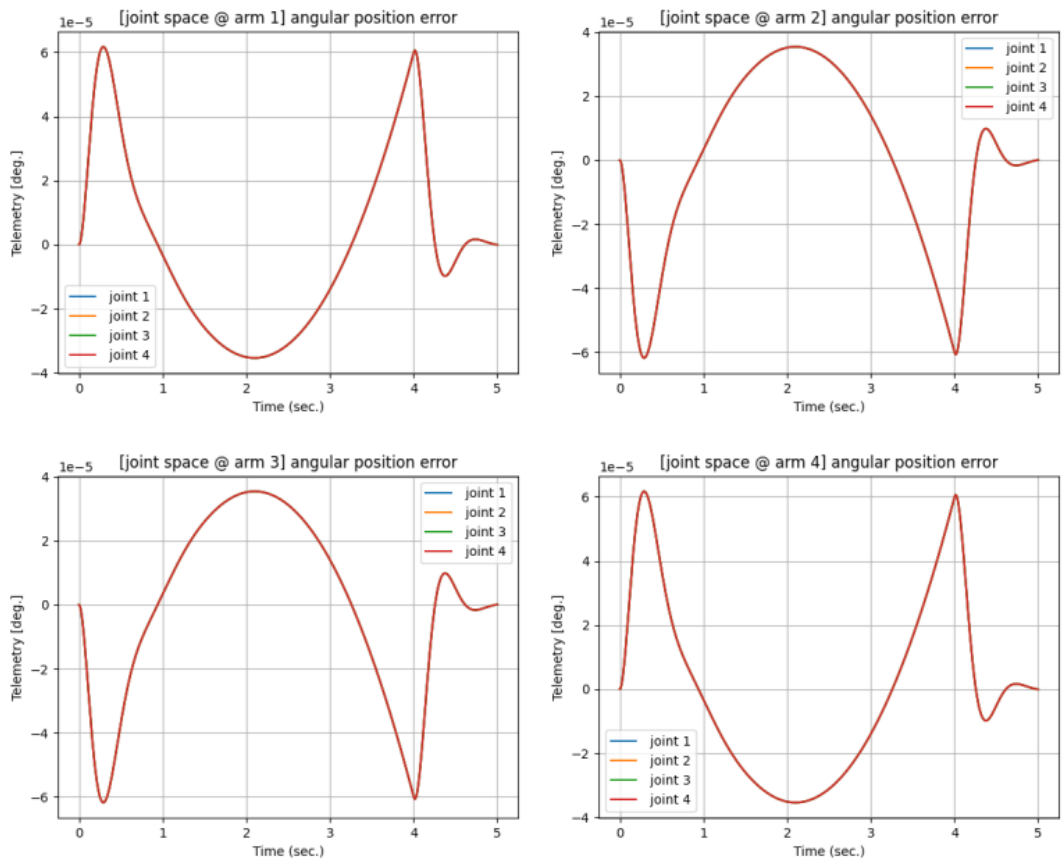


Figura 9 – Erro de acompanhamento de trajetória de juntas, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor

Os sinais de controle que resultam na Figura 9 são dados na Figura 10. Em primeira análise, é observável que as curvas relativas aos braços 1,4 são refletidas em relação a 2,3. Isto deve-se à oposição dos sinais algébricos envolvidos na definição das trajetórias de posição angular.

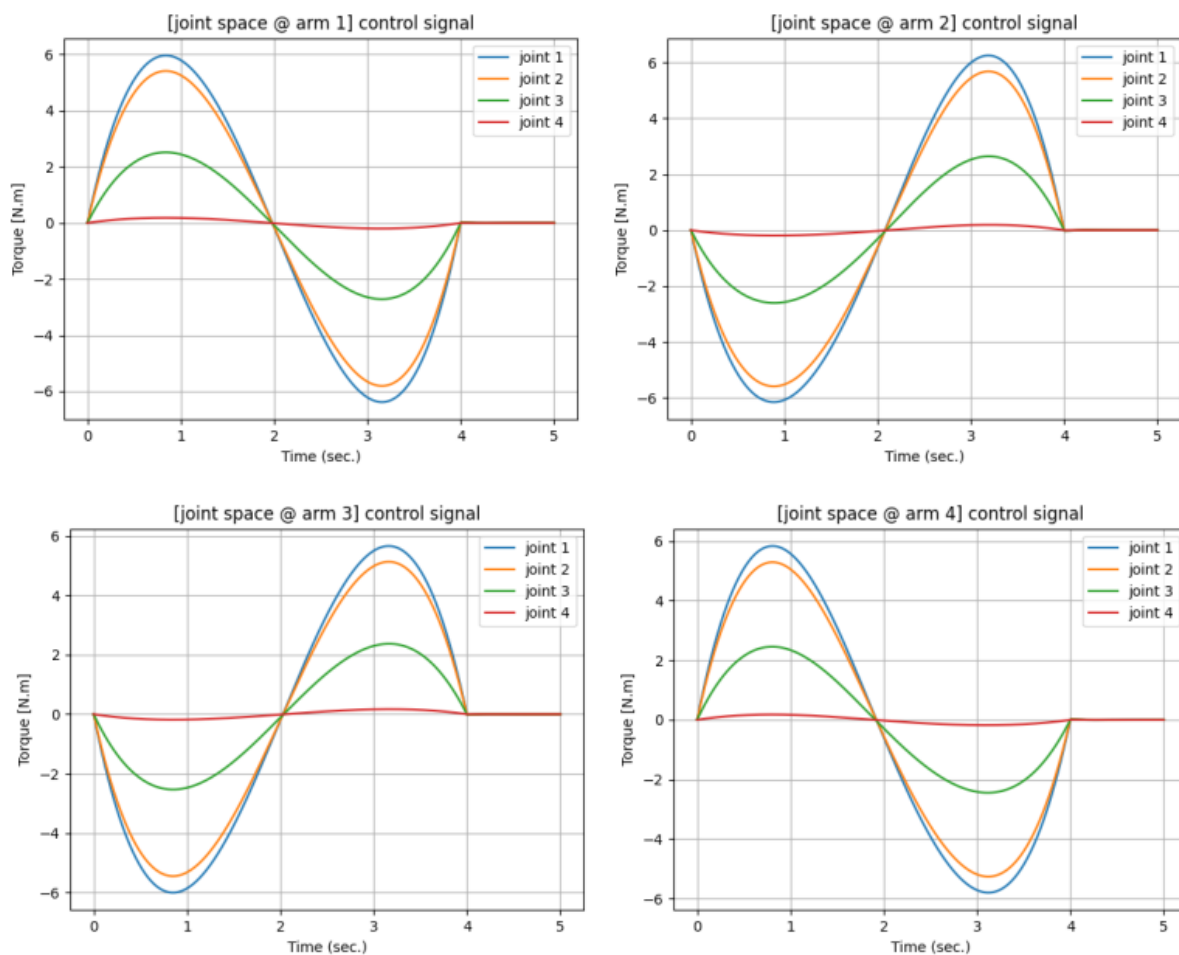


Figura 10 – Torque de controle de juntas, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor

Os resultados de dinâmica externa, a saber, trajetória inercial dos efetuadores e base, são dados nas Figuras 11 e 17. Nota-se que a posição inicial (x, y) de cada efetuador são $(7.75, 0)$, $(0, 7.75)$, $(-7.75, 0)$, $(0, -7.75)$, sendo 7.75 a soma dos comprimentos dos elos com a distância da junta pivô ao centro da base, conforme parametrizações apresentadas. Isto corrobora a discussão anterior acerca do alinhamento inicial dos braços com os semi-eixos inerciais. A respeito da movimentação da base, nota-se que a rotação é da ordem de 1^{-13} , cujo valor é da ordem de oscilações numéricas nos cálculos das matrizes. Logo, a base realiza um movimento puro de translação, nos sentidos $(-x, -y)$ de mesma amplitude (bissetriz dos eixos x, y). Esta direção e simetria está de acordo com as previsões baseadas na manutenção estática do centro de massa.

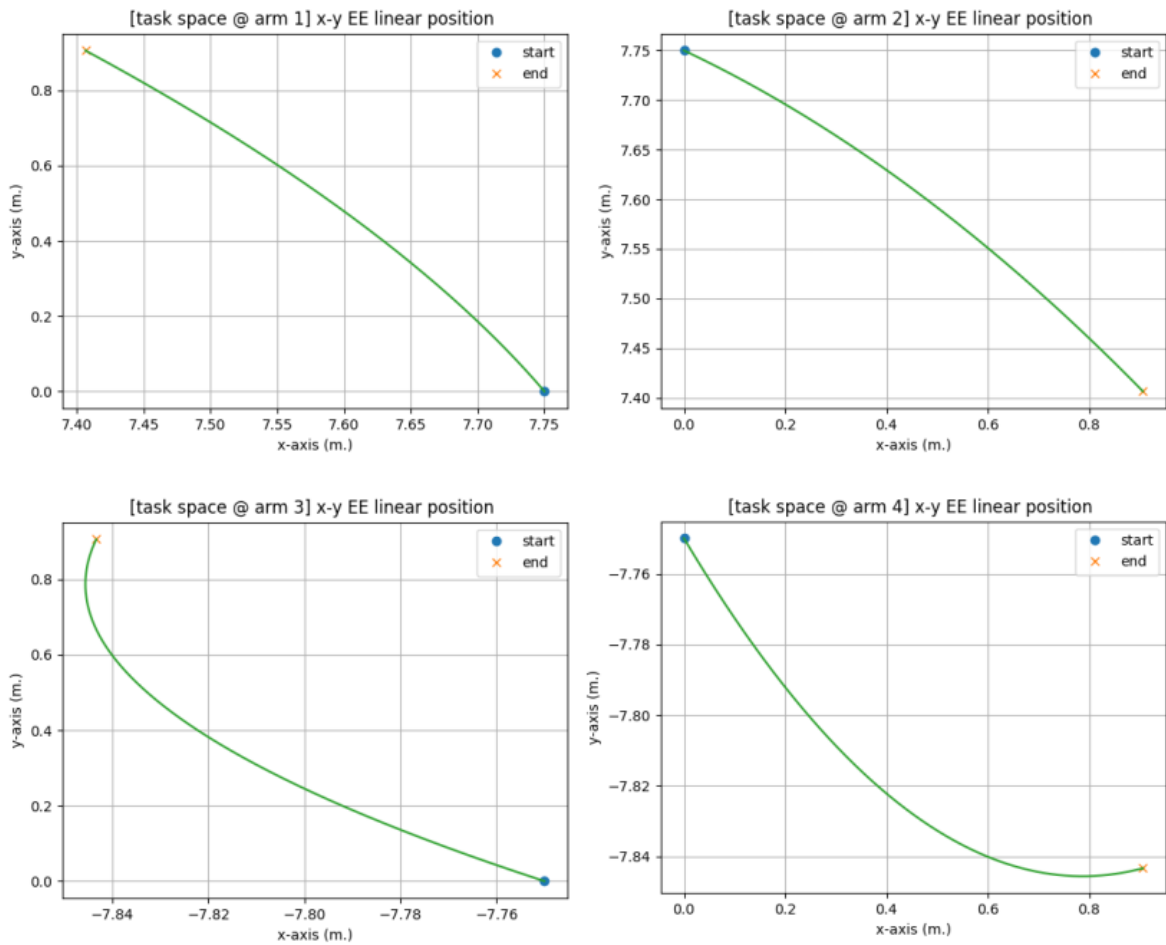


Figura 11 – Trajetória dos efetuadores, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor

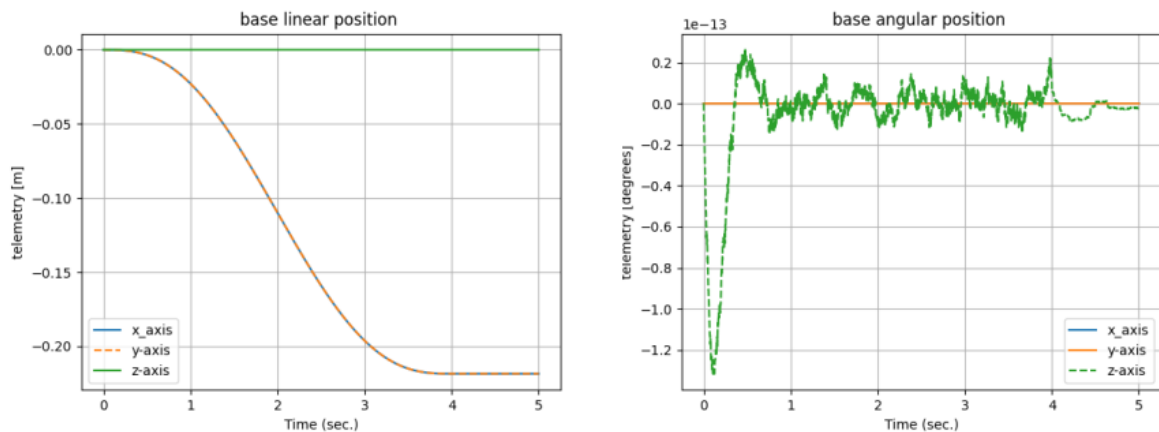


Figura 12 – Trajetória da base, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor

A Figura 13 mostra a configuração final do robô. Como ilustrado, a base translada em relação ao referencial inercial adotado.

Por fim, a Figura 14 mostra uma variação da ordem de 1^{E-7} metros para o centro de

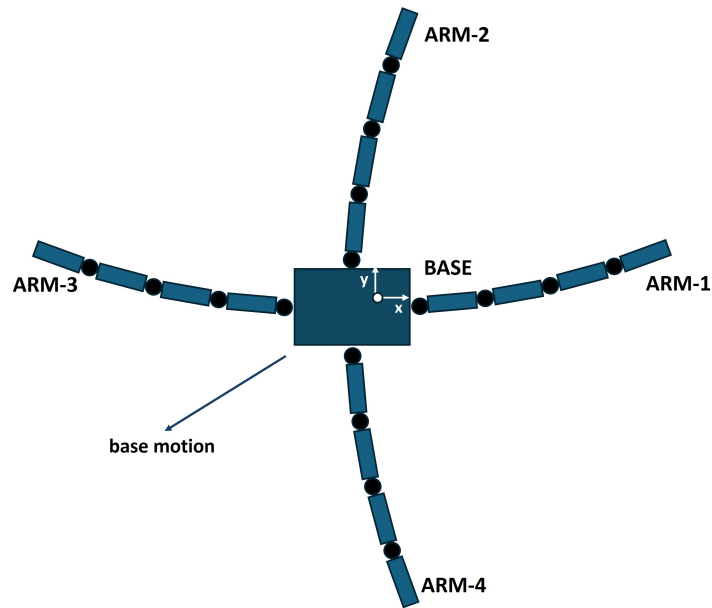


Figura 13 – Configuração final do multi-manipulador. Fonte: Próprio autor

massa do manipulador. Esta discrepância em relação ao zero pode ser atribuída a erros no procedimento numérico de inversão das matrizes necessário para calcular a dinâmica da base x_0 . De fato, as trajetórias da base e do centro de massa possuem formatos semelhantes, mas a amplitude da segunda é 0,0004 % da primeira. Em outras palavras, se em cada ponto da simulação o valor da variável x_0 fosse 0,0004 % maior, o centro de massa estaria em repouso. Outro fato que corrobora a justificativa de erros numéricos é a redução do valor de $1E-7$ com a diminuição da taxa de amostragem temporal. Simulações indicam que valores menores que $T = 0.001s$ reduzem o "erro" da posição do centro de massa em relação ao zero.

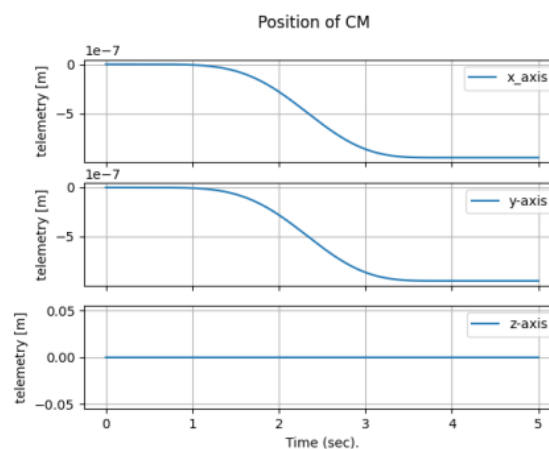


Figura 14 – Trajetória do centro de massa do robô, FM-NIC-A. Fonte: Próprio autor

5.1.2 FM-ST-A

Nesta simulação, o termo de acoplamento dinâmico $\frac{\partial x_0}{\partial q}$ é entendido pelo sistema de controle como uma dinâmica não modelada. A Figura 15 mostra que o erro de rastreamento no espaço das juntas é da ordem de 10^3 maior que aquele observado com dinâmicas fielmente modeladas. A partir dos gráficos, nota-se que a perda de desempenho ocorre apenas no transitório da tarefa, sendo nulo em regime. A comparação quantitativa da perda de desempenho da malha fechada em função da dinâmica não modelada será realizada em maiores detalhes na Seção 5.1.3.

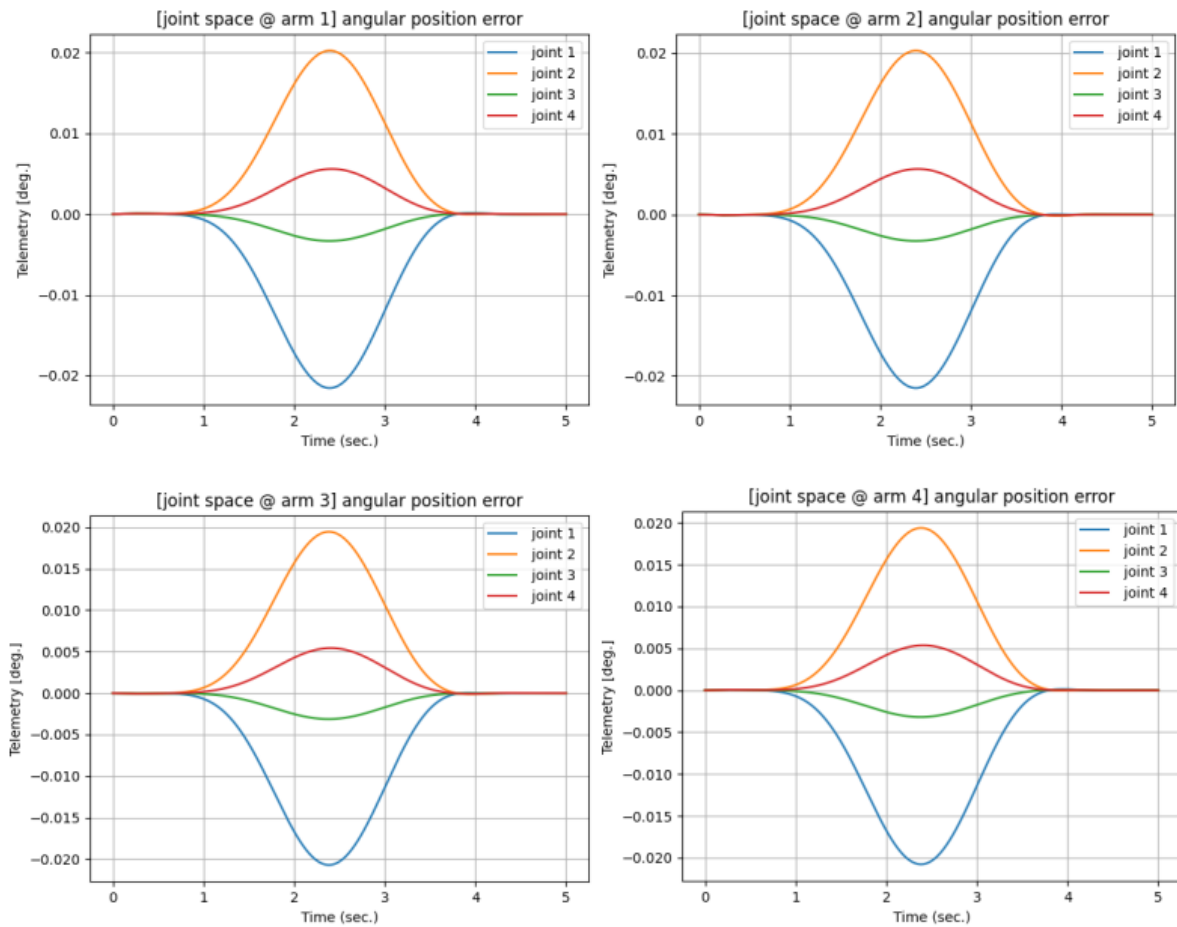


Figura 15 – Erro de acompanhamento de trajetória de juntas, FM-ST-A. Fonte: Próprio autor

Os torques de controle e trajetória dos efetuadores são apresentados nas Figuras 16 e 17. Como a diferença absoluta nas trajetórias em espaço das juntas dos dois modelos é pequena ($20^{-3}\ddot{r}$), a qual ocorre apenas em transiente, não há distinções significativas nos torques e movimento dos efetuadores.

A translação da base é similar ao caso FM-NIC-A. Porém, devido ao erro de trajetória das juntas, a simetria do movimento é brevemente perdida na fase transitória da tarefa, resultando em uma pequena rotação da base em torno do eixo z.

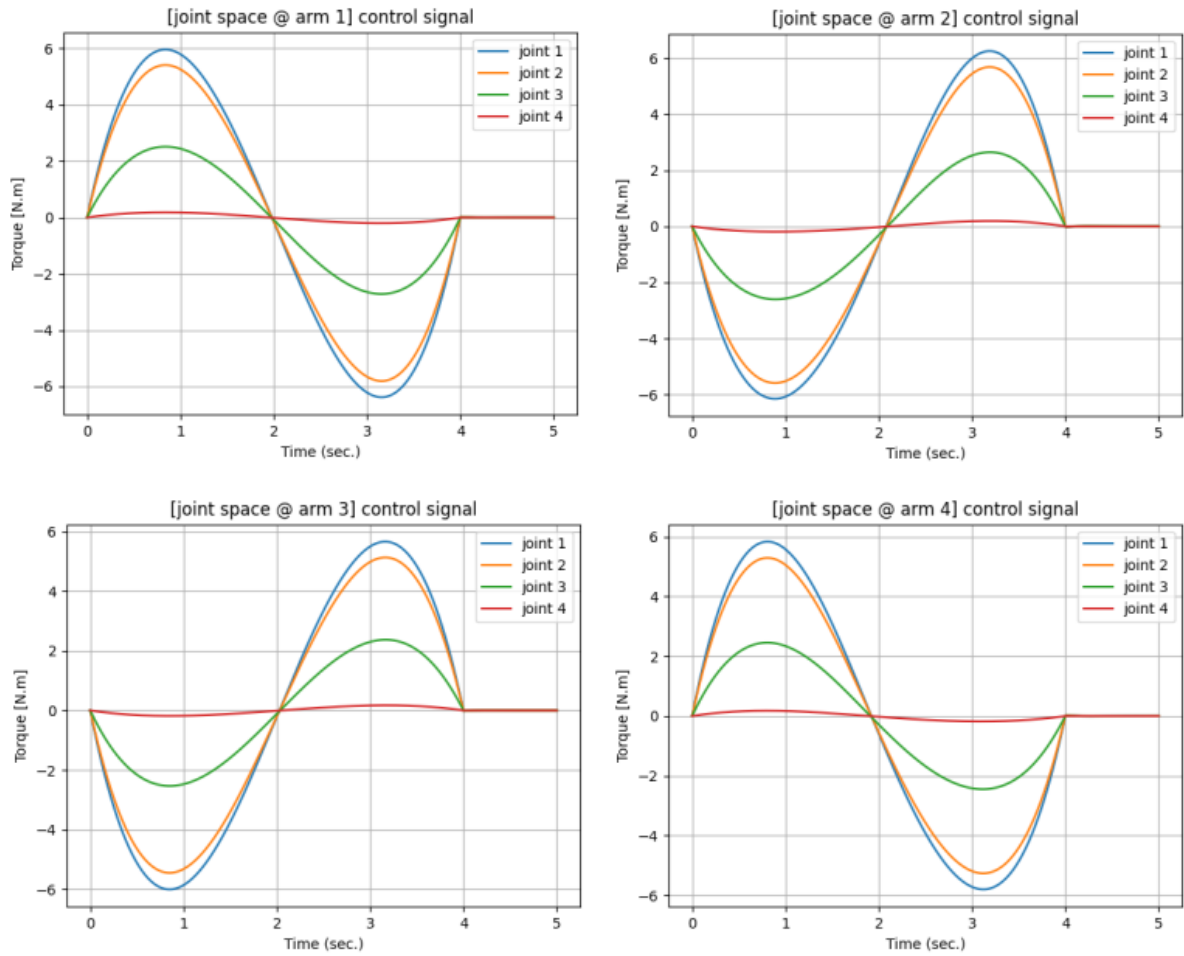


Figura 16 – Torque de controle de juntas, FM-ST-A. Fonte: Próprio autor

Analogamente ao modelo FM-NIC-A, o desvio da ordem de 10^{-7} metros do centro de massa é justificado por erros numéricos em cálculos matriciais da dinâmica externa.

5.1.3 Comparação dos modelos - espaço das juntas

A comparação das métricas de desempenho das duas simulações é discriminada na Tabela 1.

Tabela 1 – Comparação de erros de trajetória dos modelos simulados.

	FM-NIC-A	FM-ST-A
Arm 1	4.91E-7	1.18E-4
Arm 2	4.91E-7	1.18E-4
Arm 3	4.91E-7	1.13E-4
Arm 4	4.91E-7	1.13E-4
Overall	4.91E-7	1.16E-4

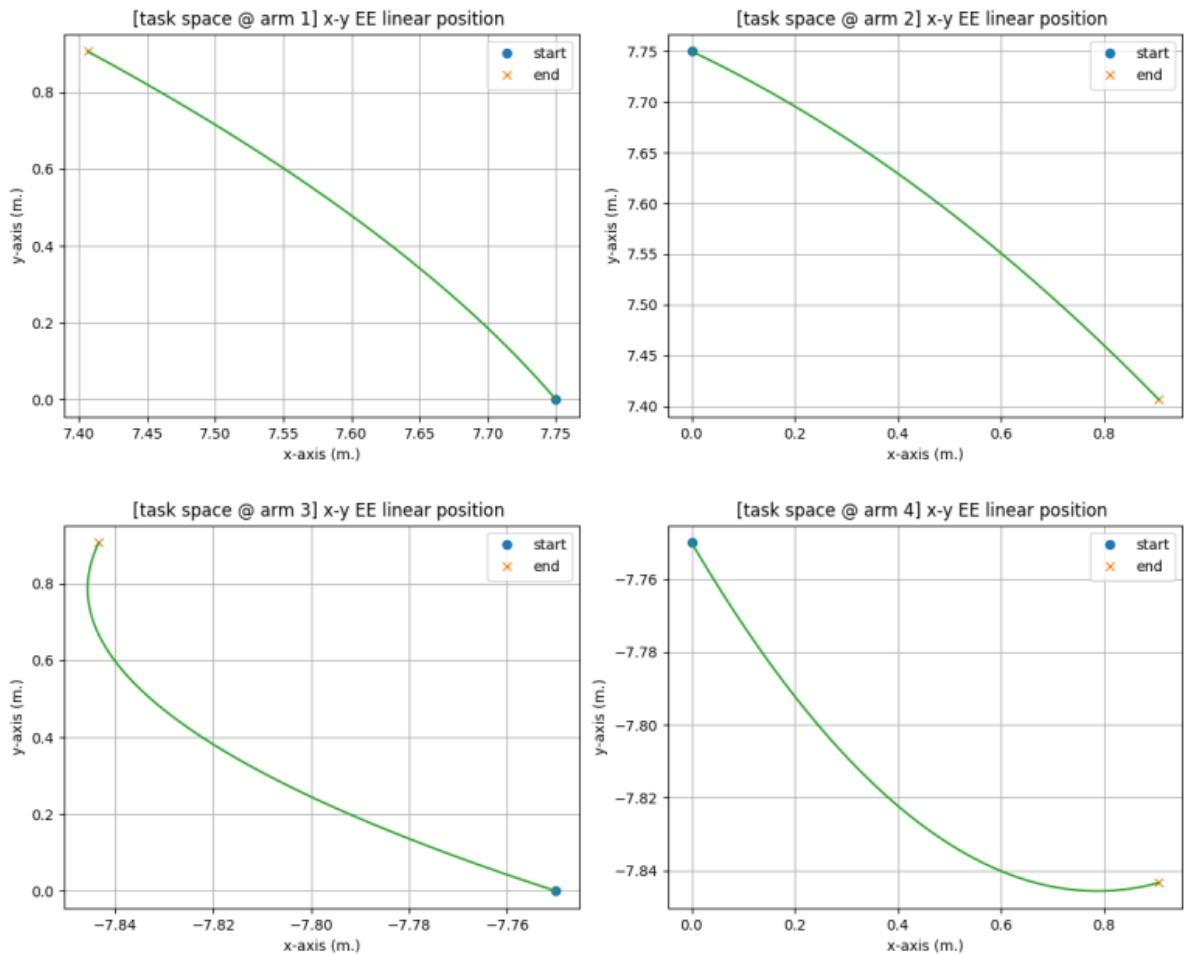


Figura 17 – Trajetória dos efetuadores, ST-ST-A. Fonte: Próprio autor

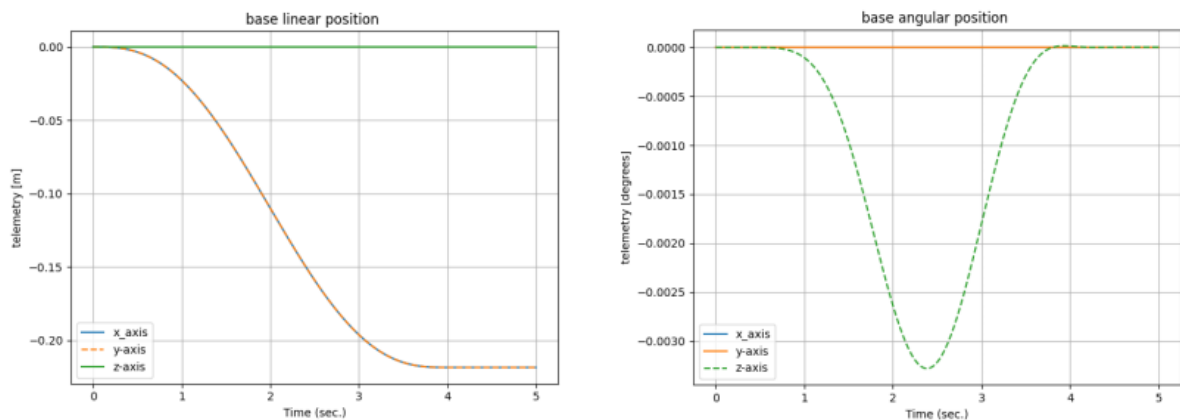


Figura 18 – Trajetória da base, FM-ST-A. Fonte: Próprio autor

Conclui-se que a performance do sistema de controle sem consideração do termo de acoplamento dinâmico não-inercial é cerca de 236 vezes pior.

Por um lado, vale destacar que o estudo desenvolvido tem como base condições no-

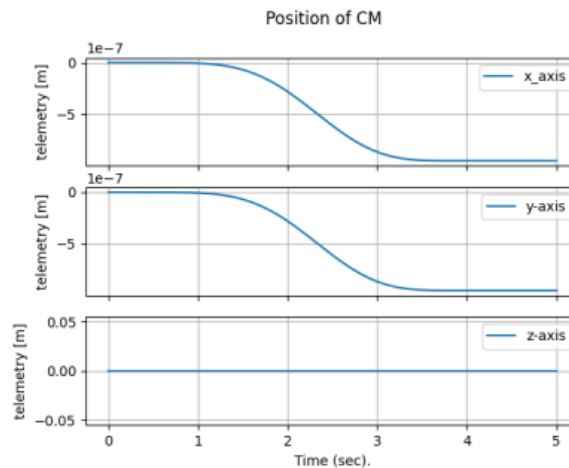


Figura 19 – Trajetória do centro de massa do robô, FM-ST-A. Fonte: Próprio autor

minais de construção – sem incertezas paramétricas – e de operação – sem distúrbios e ruídos. Além disso, trata-se de uma tarefa do tipo *standalone*, na qual o robô não interage com outros objetos. Em aplicações reais de *detumbling*, estas duas condições são violadas, potencialmente implicando em discrepâncias maiores. Além disso, a captura de alvos imprime esforços impulsivos ao manipulador, os quais produzem transitórios bruscos. De acordo com as simulações, a diferença entre os dois modelos reside justamente na região de transiente. Logo, em tarefas de captura e estabilização, devem ser observadas discrepâncias mais intensas. Por fim, se o erro nos modelos de referência for da ordem de centésimos de grau (devido aos efeitos supracitados), e a proporção de desvio entre os modelos for mantida, os erros a serem observados no FM-ST-A devem ser ainda mais expressivos.

Contudo, a inclusão dos efeitos mencionados e captura de alvo serão desenvolvidos em simulações em etapas futuras deste trabalho.

Outro ponto que merece destaque é a impossibilidade de validação definitiva, somente com simulações desta natureza, de uma melhora de desempenho com a inclusão da dinâmica de acoplamento não-inercial. Até o presente estágio de desenvolvimento, o que pode-se concluir é que o sistema FM-ST-A possui uma resposta *diferente* do FM-NIC-A, quantificada em 236 vezes. Porém, as simulações não confirmam qual dos dois modelos é o mais verossímil com a operação prática do robô. Este tipo de resultado demanda implementações em plataformas experimentais, como superfícies com amortecimento pneumático.

5.2 Resultados de simulação - espaço da tarefa

O acoplamento dinâmico entre braços e base em manipuladores espaciais dificulta o planejamento de trajetória em espaço cartesiano, pois a flutuação da base permite que um grande conjunto de soluções de junta atendam as especificações de trajetória inercial dos efetuadores. Além disso, existem pontos do *workspace* do robô espacial que são afetados por singularidades dinâmicas. Portanto, esforços adicionais devem ser direcionados para projetar adequadamente o movimento dos efetuadores no espaço inercial.

Nesta etapa de desenvolvimento do trabalho, é de maior interesse avaliar a estabilidade da E-GJM em procedimentos de inversão cinemática. Logo, não serão avaliados métodos de análise do *workspace*, otimização dos pontos de passagem das trajetórias dos efetuadores e tratamento de restrições geométricas. Em vez disso, os movimentos lineares e angulares de referência serão obtidos a partir de uma simulação em espaço das juntas. Mais precisamente, dado uma tarefa de *joint tracking* – como aquela apresentada na seção 5.1 – o movimento inercial realizado pelos efetuadores serão salvos e utilizados como *setpoint* para o sistema de controle cartesiano. Desta forma, é assegurado que existem soluções em espaço das juntas para a tarefa escolhida.

A seguir, são apresentados os gráficos das simulações do gerador de trajetória em espaço das juntas e sua implementação em controle inercial dos efetuadores. A formulação dinâmica escolhida para este estudo é a consolidada em literatura (FM-ST-A). As parametrizações inerciais e geométricas do multi-manipulador seguem aquelas descritas na seção 5.1.

5.2.1 Geração de trajetória

As inicializações cinemáticas dos estudos em espaço das juntas da Seção 5.1 foram destinadas à maximizar a simetria da tarefa, mantendo o centro de massa coincidente ao centroide da base robótica. Para isto, todos os braços foram inicialmente "esticados". Todavia, esta parametrização produz uma singularidade cinemática, isto é, um ponto no qual a matriz jacobiana perde posto. Nessas condições, os algoritmos de inversão matricial divergem, de modo que as soluções de junta necessárias para implementar a referência inercial dos efetuadores não podem ser computadas por métodos convencionais.

Assim, visando retirar o robô do ponto singular, foi somado um incremento de 0.5° na inicialização de todas as juntas do multi-manipulador de mesmo sinal algébrico dos deslocamentos angulares do *setpoint* em espaço das juntas, os quais foram mantidos em 5° . Isto é necessário para evitar que a condição de "braços esticados" seja atingida ao longo do movimento. Outra mudança feita é a diminuição do tempo de amostragem para $T_s = 0.0001$ segundos. Durante os estudos computacionais, observou-se que a aproximação do domínio contínuo produz soluções dinâmicas iguais nos dois sistemas de controle, embora não afete significativamente da malha fechada.

As simulações desta seção são identificadas com a sigla Controle em Espaço das Juntas (JSC) (*joint space control*). A Figura 35 mostra a trajetória efetuada pelas juntas. O erro de acompanhamento de trajetória de juntas é da mesma ordem de grandeza daqueles da Seção 5.1, mas não foram inseridos aqui pois a qualidade do controle de juntas não é relevante para este gerador de trajetória. Basta que a relação os movimentos de juntas e efetadores possa ser invertida através de E-GJM, para isto sendo suficiente a ausência de pontos singulares.

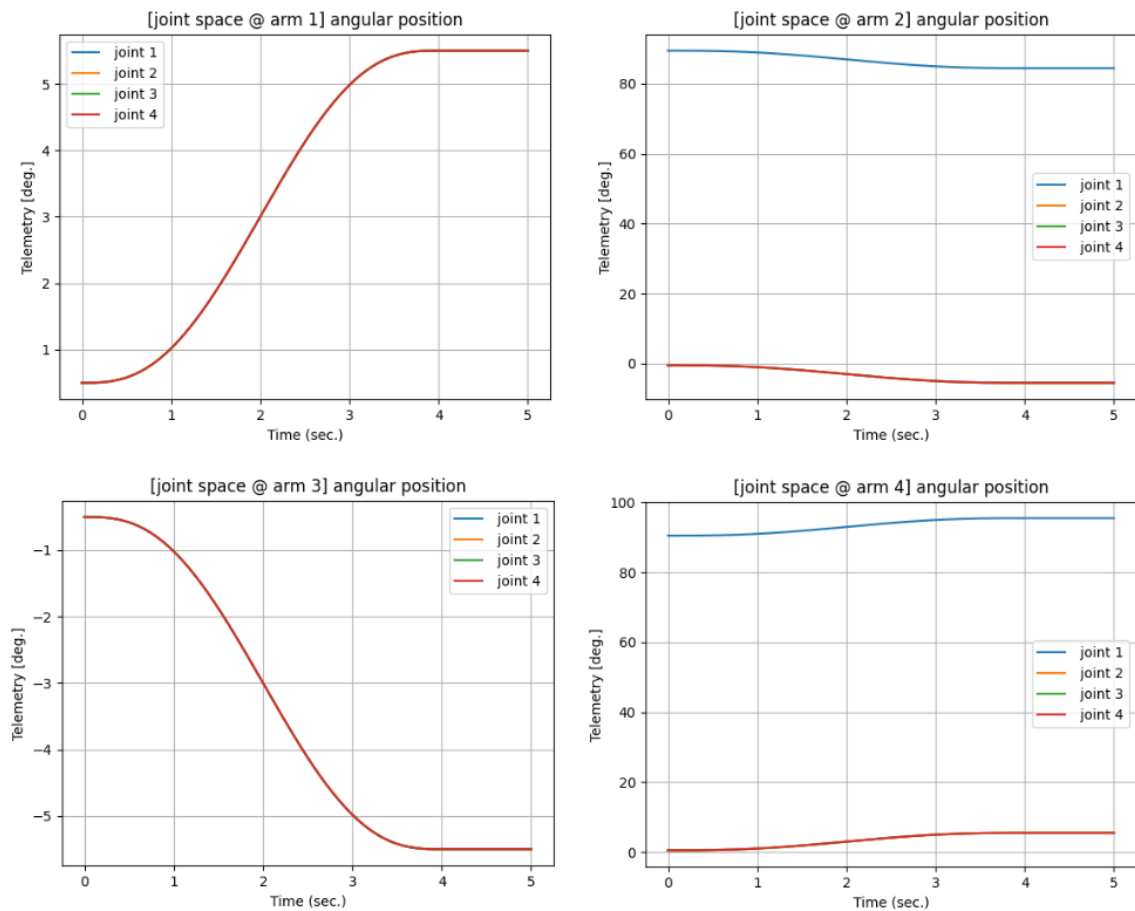


Figura 20 – Trajetória das juntas, JSC. Fonte: Próprio autor

O movimento dos efetadores, mantido em malha aberta, é mostrado nas Figuras 21, 22 e 23, correspondendo a translação no plano XY, translação xy no tempo e rotação em torno de z no tempo. Estas trajetórias, que são as únicas não-nulas devido à configuração planar do robô, serão as referências do sistema de controle no espaço cartesiano.

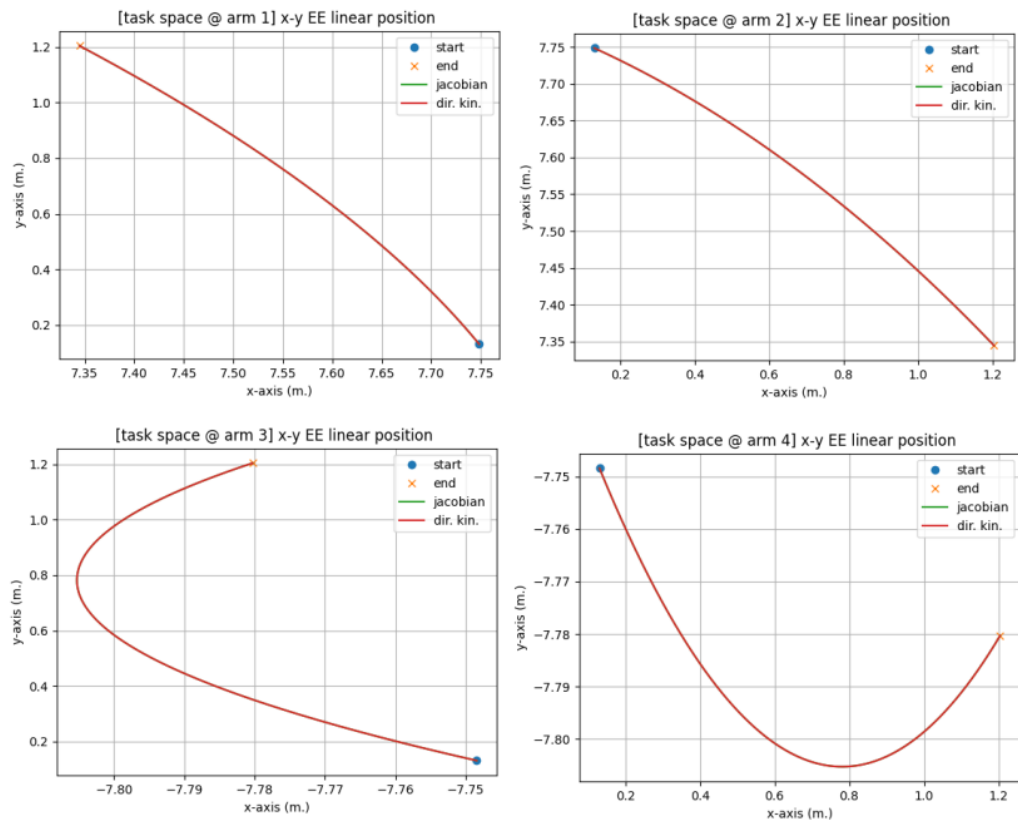


Figura 21 – Trajetória linear dos efetuadores - xy, JSC. Fonte: Próprio autor

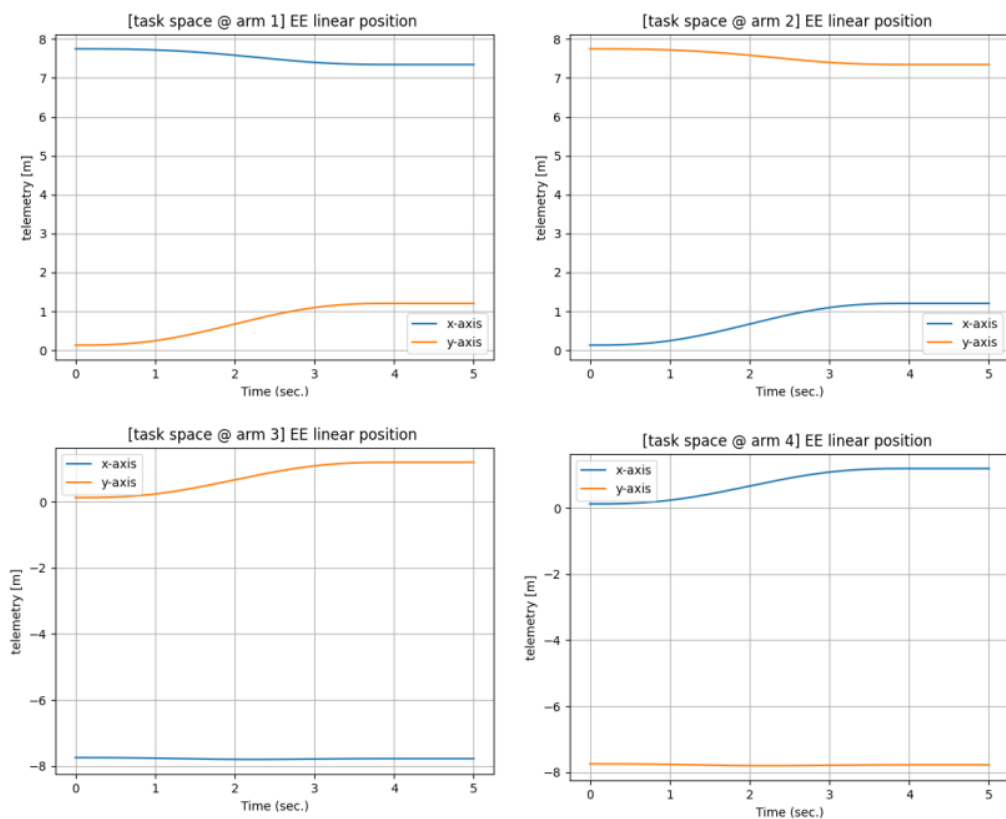


Figura 22 – Trajetória linear dos efetuadores, JSC. Fonte: Próprio autor

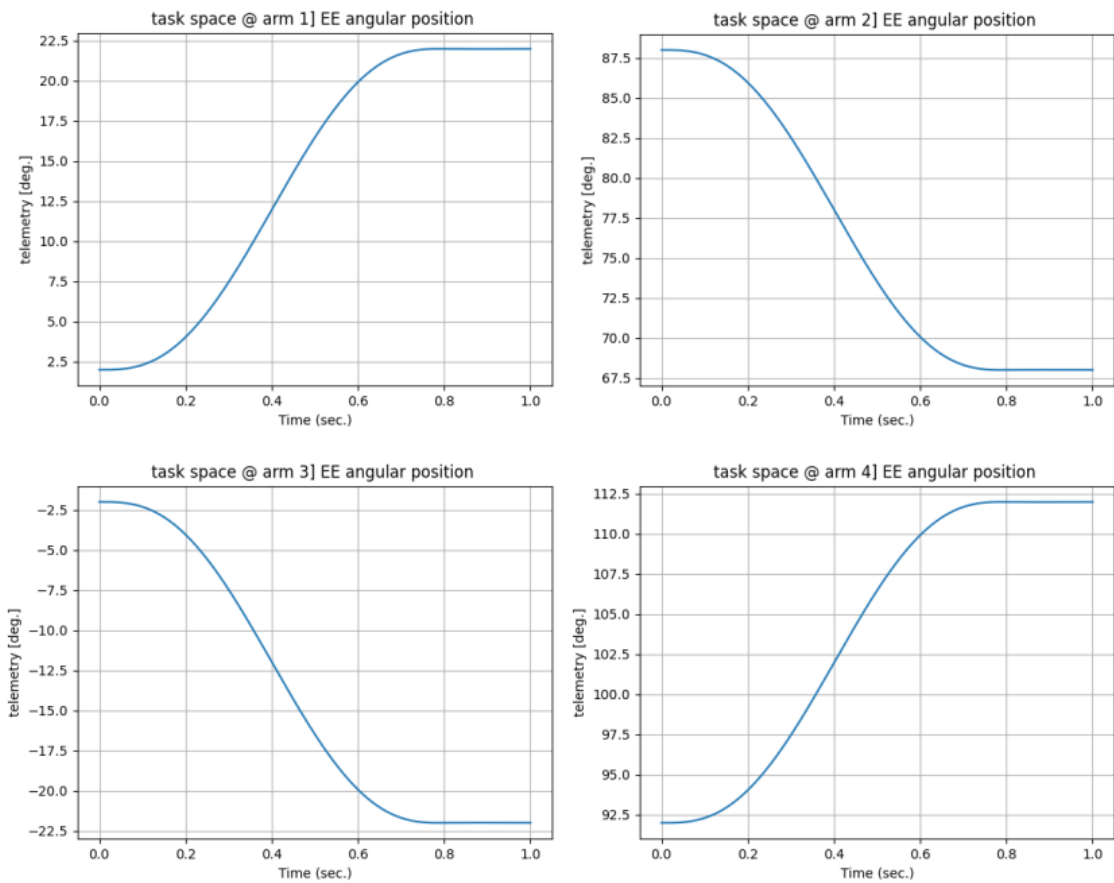


Figura 23 – Trajetória angular dos efetuadores, JSC. Fonte: Próprio autor

Para fins de comparação com a seção seguinte, também são apresentados os resultados da dinâmica da base (Figura 24) e torques de controle nas juntas (Figura 25).

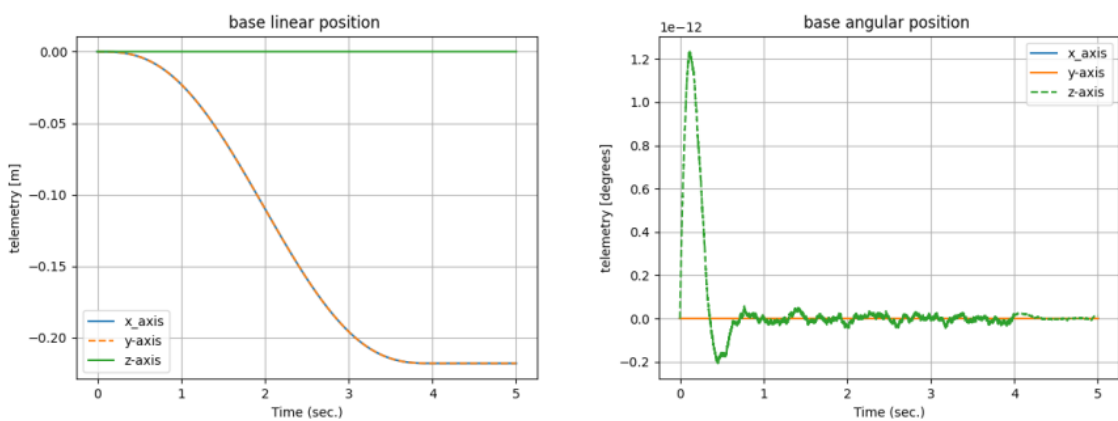


Figura 24 – Trajetória da base, JSC. Fonte: Próprio autor

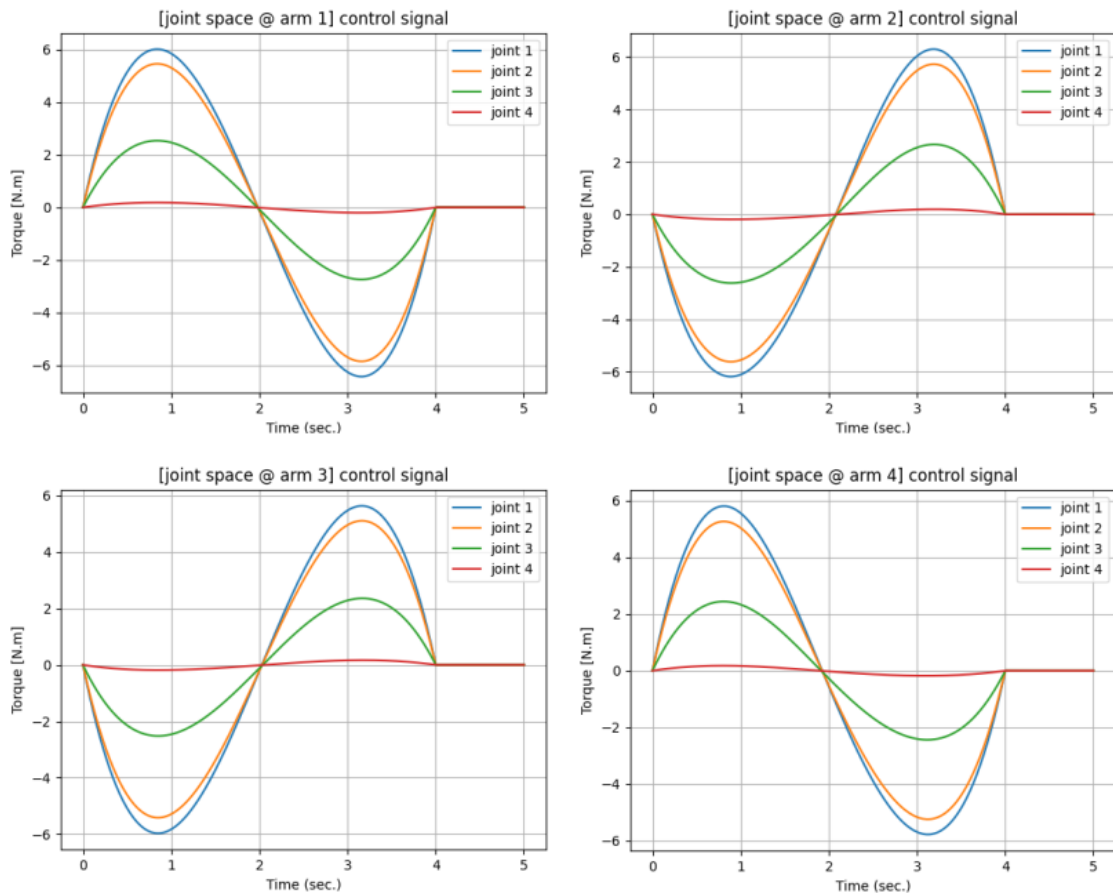


Figura 25 – Torque de controle das juntas, JSC. Fonte: Próprio autor

5.2.2 Controle em espaço da tarefa

Nesta seção, são apresentados os gráficos relativos ao sistema de controle no espaço de configurações, com referências de movimento dos efetuadores listados na Seção 5.2.1. As simulações desta seção são identificadas com a sigla Controle em Espaço da Tarefa (TSC) (*task space control*). A dinâmica controlada dos efetuadores no plano XY, translação no tempo e rotação no tempo é mostrada nas Figuras 26, 27 e 28. Os erros de acompanhamento de tarefa são apresentados nas Figuras 30 e 31, plotadas no tempo, e 29, no plano XY. Vale reforçar que o paradigma simulado é planar. Conforme sistema de coordenadas adotado, valores não nulos ocorrem somente em translações XY e rotações em torno de Z.

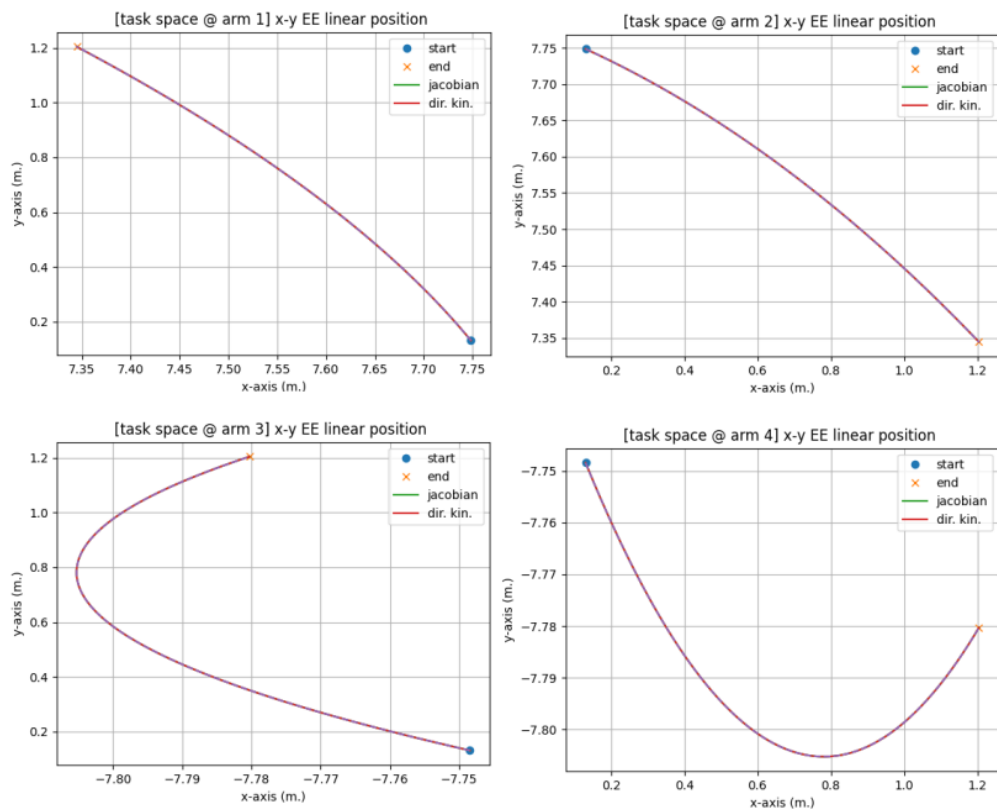


Figura 26 – Trajetória linear dos efetuadores - xy, TSC. Fonte: Próprio autor

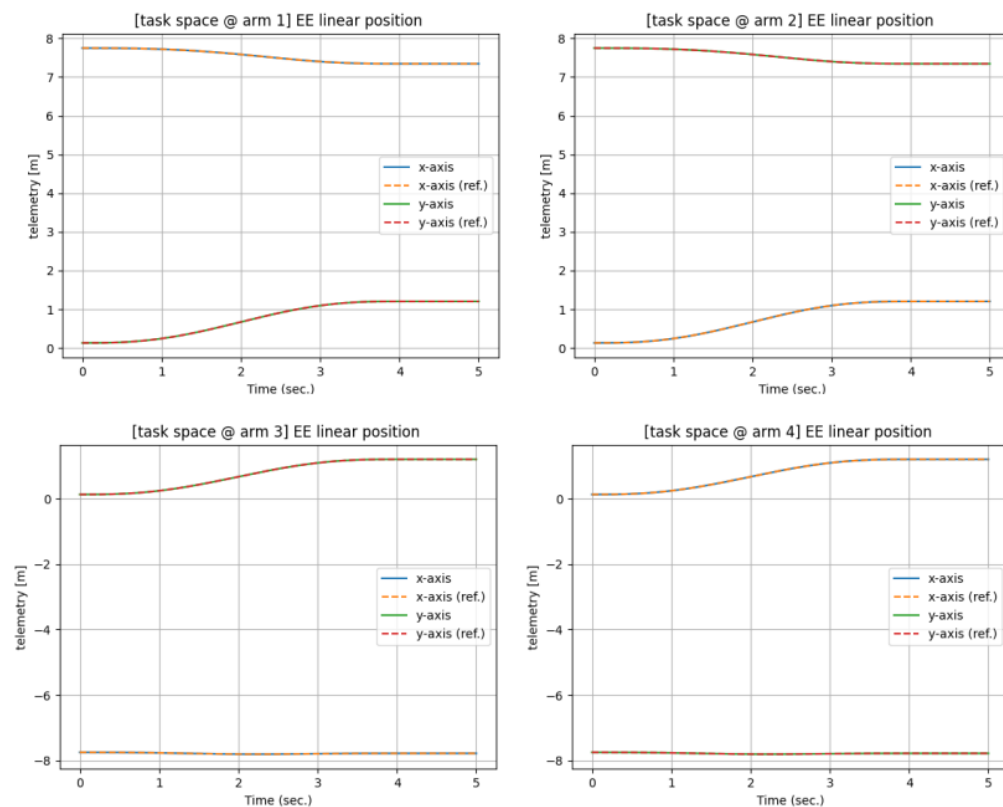


Figura 27 – Trajetória linear dos efetuadores, TSC. Fonte: Próprio autor

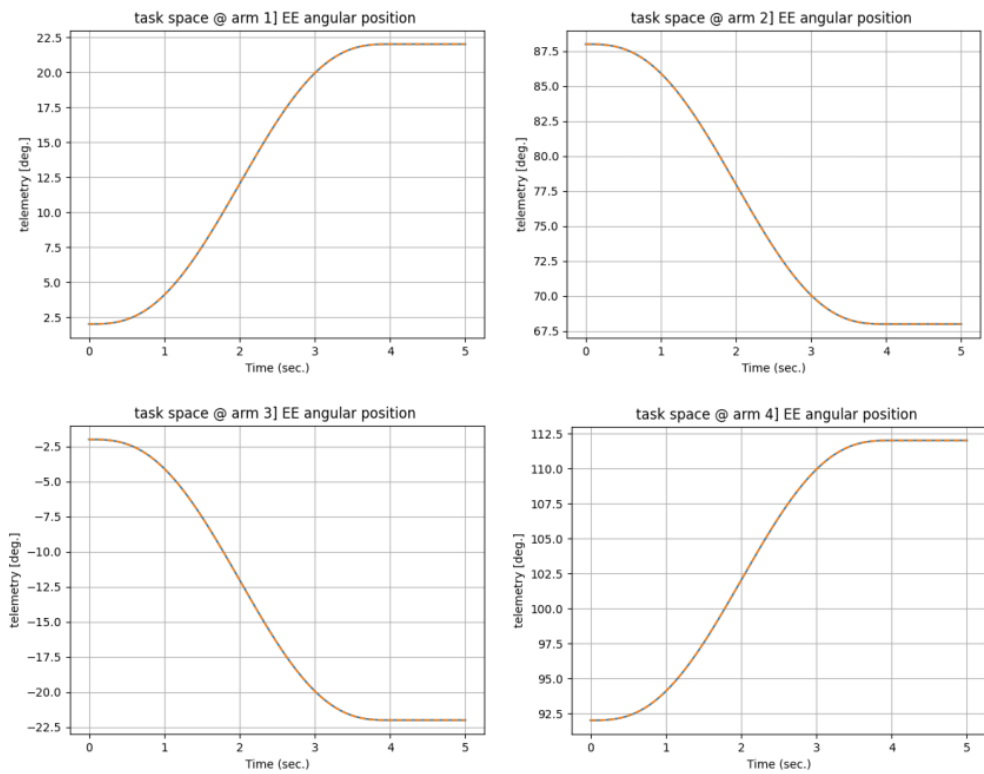


Figura 28 – Trajetória angular dos efetuadores, TSC. Fonte: Próprio autor

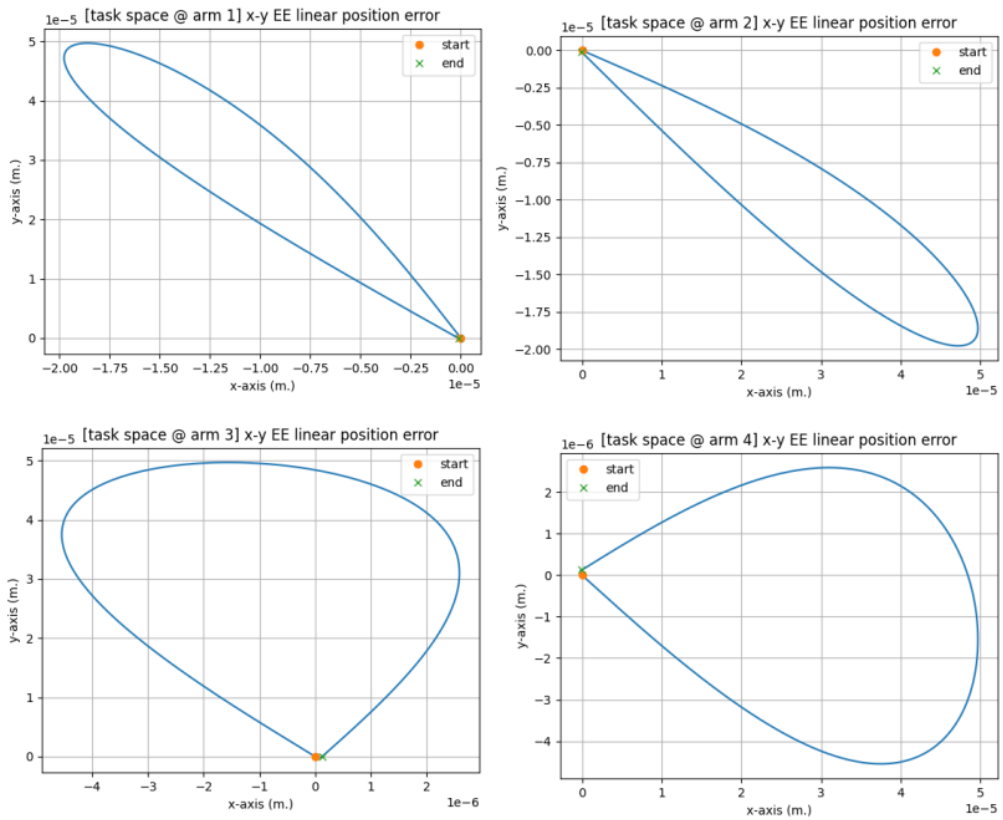


Figura 29 – Erro de acompanhamento de posição linear dos efetuadores - xy, TSC. Fonte: Próprio autor

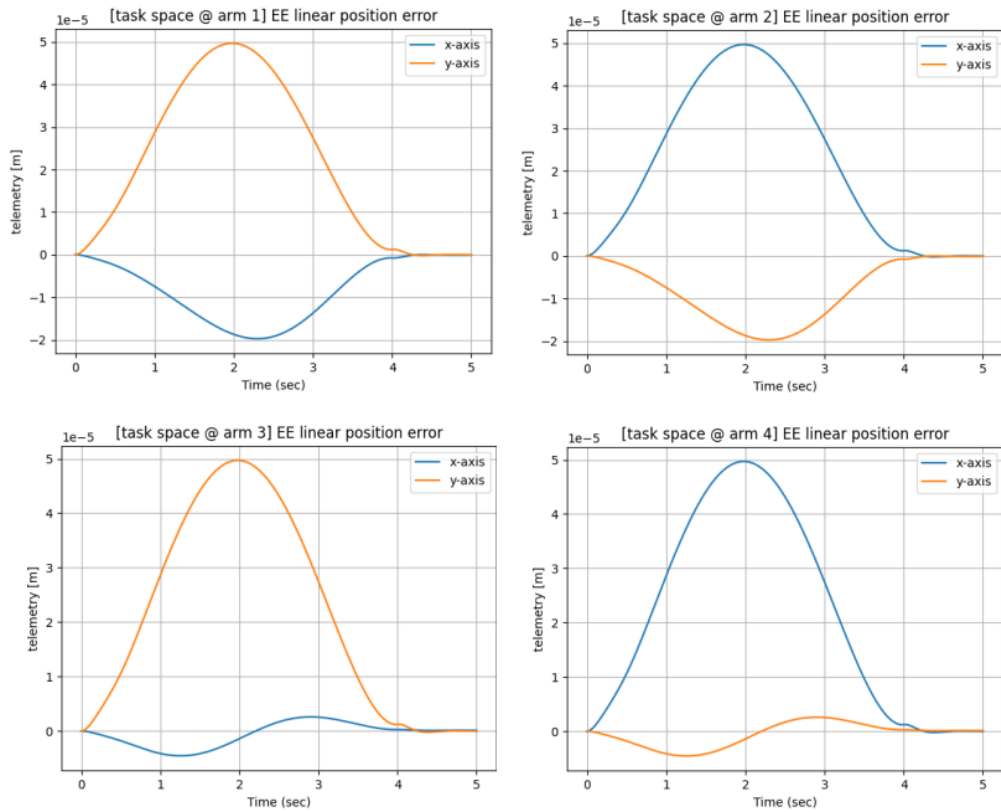


Figura 30 – Erro de acompanhamento de posição linear dos efetadores. Fonte: Próprio autor

Os erros quadráticos médios de cada trajetória são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Desempenho do sistema de controle inercial.

	Arm 1	Arm 2	Arm 3	Arm 4
x-translation	1.09E-5	2.84E-5	2.24E-6	2.84E-5
y-translation	2.84E-5	1.09E-5	2.84E-5	2.24E-6
z-rotation	0.00053	0.00053	0.00053	0.00053
Overall	0.00031	0.00031	0.00031	0.00031

Observa-se que os erros de trajetória obtidos no espaço de configurações são da ordem de $1E-5$, i.e, cinco ordens de grandeza inferiores às amplitudes das referências. As rotações apresentam erros maiores pois foram multiplicadas por um fator $180/\pi$ de conversão para graus, mas os erros em sua modelagem nativa (radianos) apresentam erros de 1^{-5} . Isto indica uma qualidade na malha fechada e coerência intrínseca do modelo, já que o sistema de controle utilizado tem mesma arquitetura e parametrização daquele empregado no espaço das juntas. Além disso, as simulações revelam estabilidade satisfatória da E-GJM na inversão cinemática para 4 braços.

Outro aspecto investigado a respeito da E-GJM é sua consistência com a cinemática direta. De acordo com sua construção matemática, esta matriz descreve as próprias

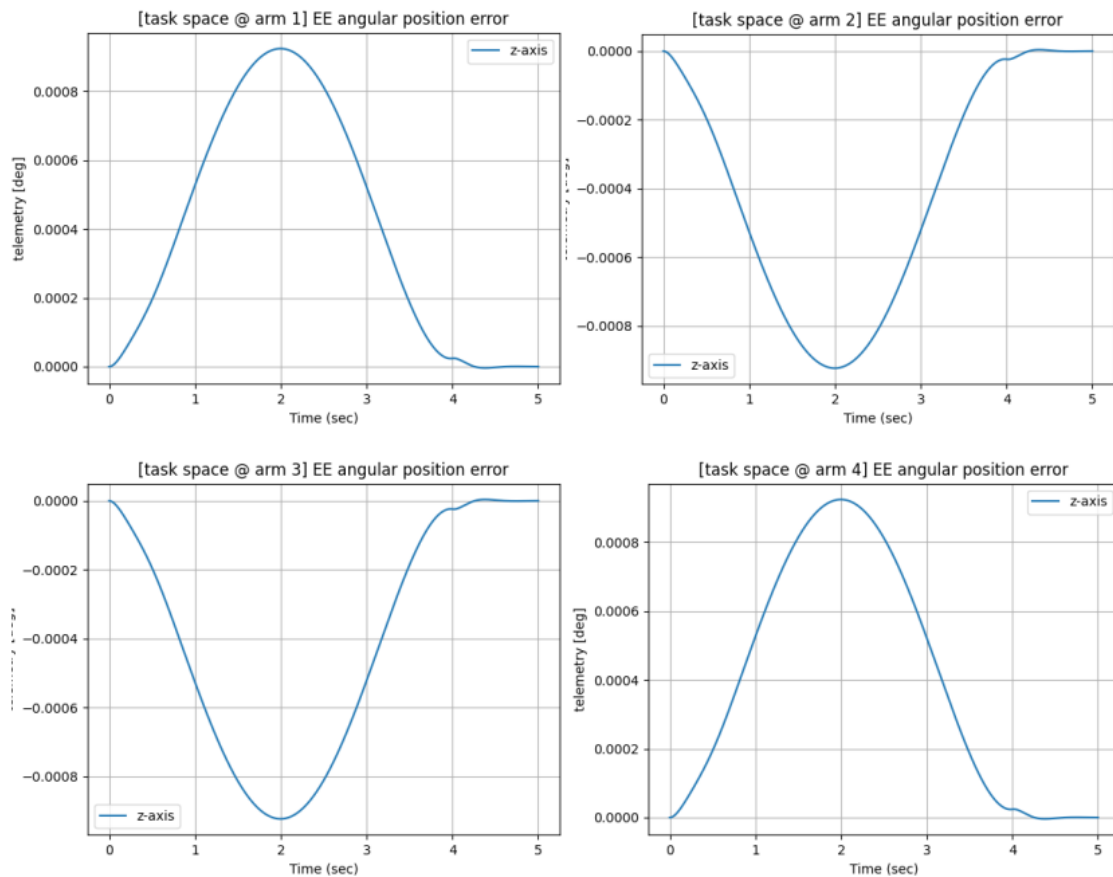


Figura 31 – Erro de acompanhamento de posição angular dos efetuadores. Fonte: Próprio autor

equações cinemáticas de velocidade avaliadas nos últimos elos de cada braço. Logo, as configurações dos efetuadores calculadas pela E-GJM devem ser iguais aos valores produzidos pelas equações cinemáticas. Neste trabalho, a métrica de desvio entre os cálculos da E-GJM e da cinemática direta é denominada KJC (*Kinematic Jacobian Consistency*). O indicador KJC é calculado para cada efetuador e para cada tipo de movimento, i.e, linear e angular. Valores pequenos de KJC são importantes para que o sistema de controle no espaço da tarefa, que é fortemente dependente da E-GJM, seja baseado em um modelo cinemático fidedigno. Naturalmente, valores elevados desta métrica indicam erros implementacionais e podem comprometer a qualidade da tarefa.

Os gráficos desta métrica constam nas Figuras 32 e 33. Os valores de RMS constam na tabela 3.

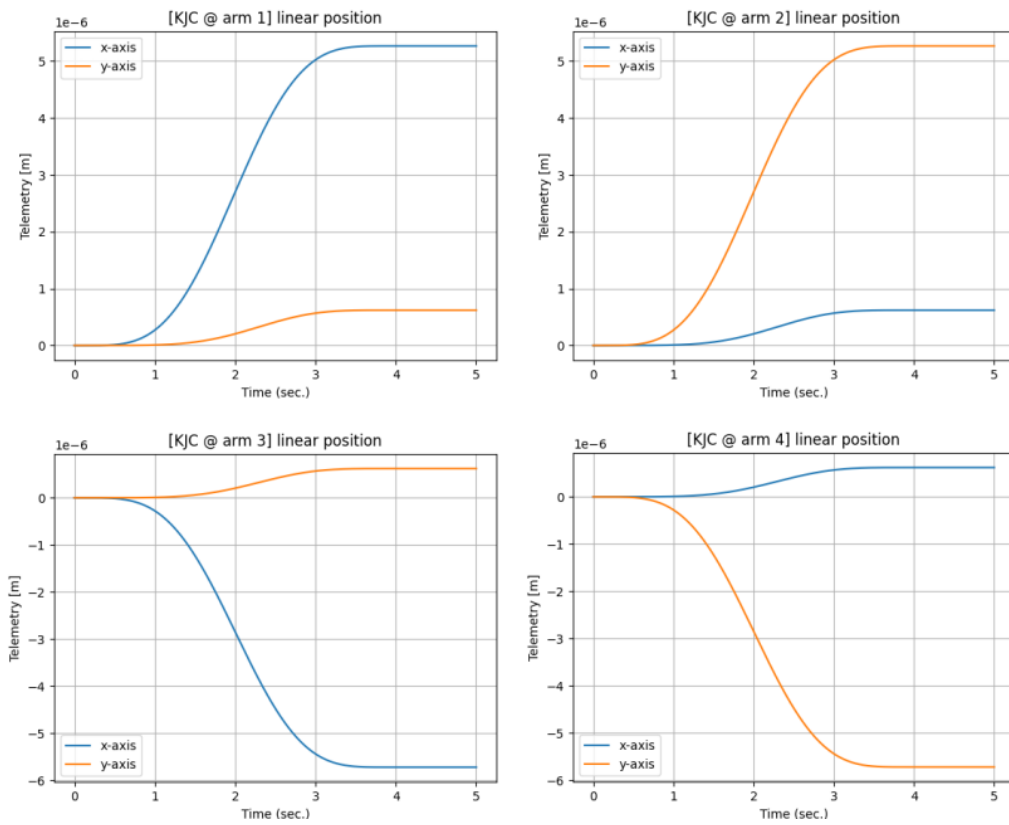


Figura 32 – Consistência cinemática linear da E-GJM, TSC. Fonte: Próprio autor

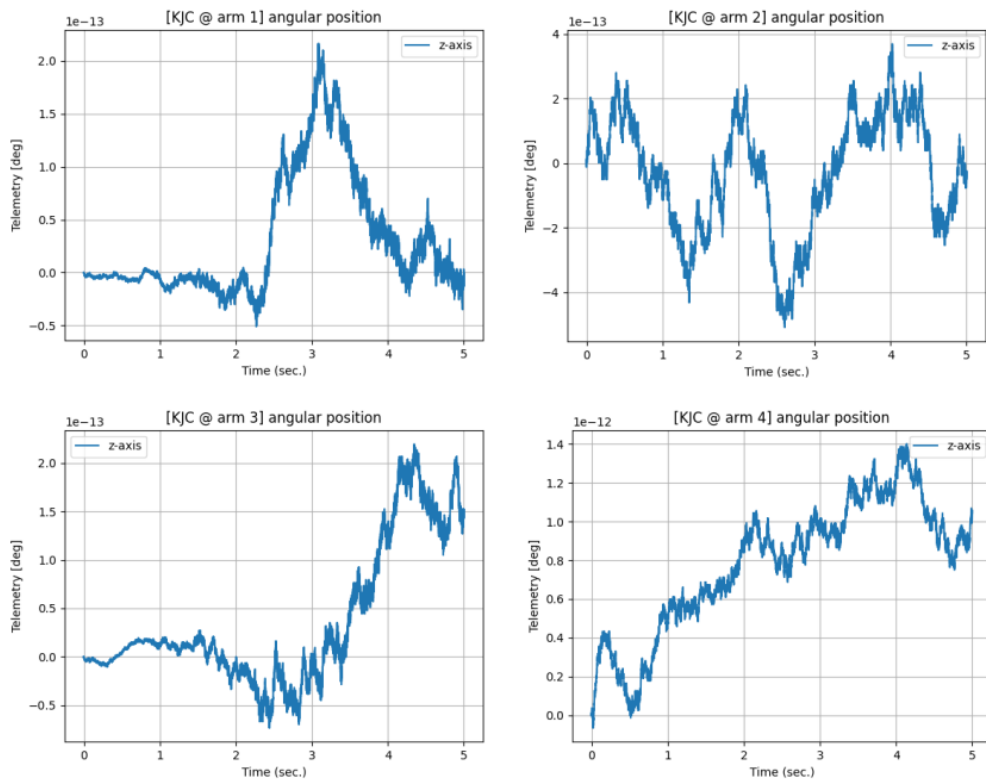


Figura 33 – Consistência cinemática angular da E-GJM, TSC. Fonte: Próprio autor

Tabela 3 – Consistência cinemática da E-GJM.

	Arm 1	Arm 2	Arm 3	Arm 4
x-translation	3.85E-6	4.34E-7	4.16E-6	4.34E-7
y-translation	4.34E-7	3.85E-6	4.33E-7	4.16E-6
z-rotation	0	0	0	0
Overall	2.23E-6	2.23E-6	2.41E-6	2.41E-6

As amplitudes vistas para a KJC em todas as situações é desprezível. Portanto, a E-GJM implementada é consistente com o modelo. É digno de nota que os erros angulares são muito menores que os translacionais, os quais assumem formato semelhante à dinâmica da base (Figura 36). A interpretação para isto reside nos erros obtidos na discretização do modelo. Na implementação computacional – mesmo com solução analítica prévia – as dinâmicas da base e das juntas são atualizadas de forma sequencial (e não simultânea). Este é o mesmo motivo que justifica o formato da curva de deslocamento do centro de massa (Figura 37), a qual deveria ser identicamente nula. Os erros são nulos apenas se a taxa de amostragem tende a zero, isto é, em domínio contínuo.

Os torques de junta computados pelo sistema de controle para rastreamento da tarefa são mostrados na Figura 34. Estas curvas são iguais às obtidas pelo controlador no espaço das juntas. Com mais razão, os valores numéricos iniciais, finais e variações obtidos em cada domínio foram idênticos. A Tabela 4 mostra os valores de junta para as duas simulações. Os valores de movimento planar dos efetuadores são listados em na Figura 5.

Os movimento das juntas em malha aberta é mostrado na Figura 35. Estes movimentos também são iguais ao caso simulado no gerador de trajetória 5.1.

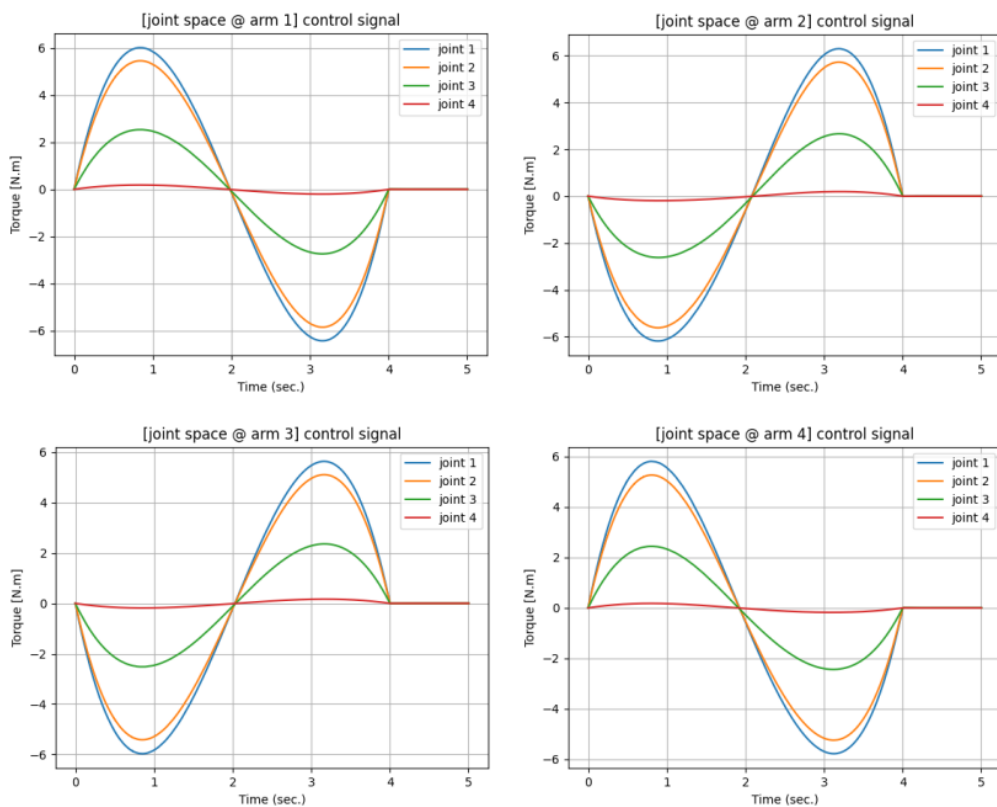


Figura 34 – Torque de controle das juntas, TSC. Fonte: Próprio autor

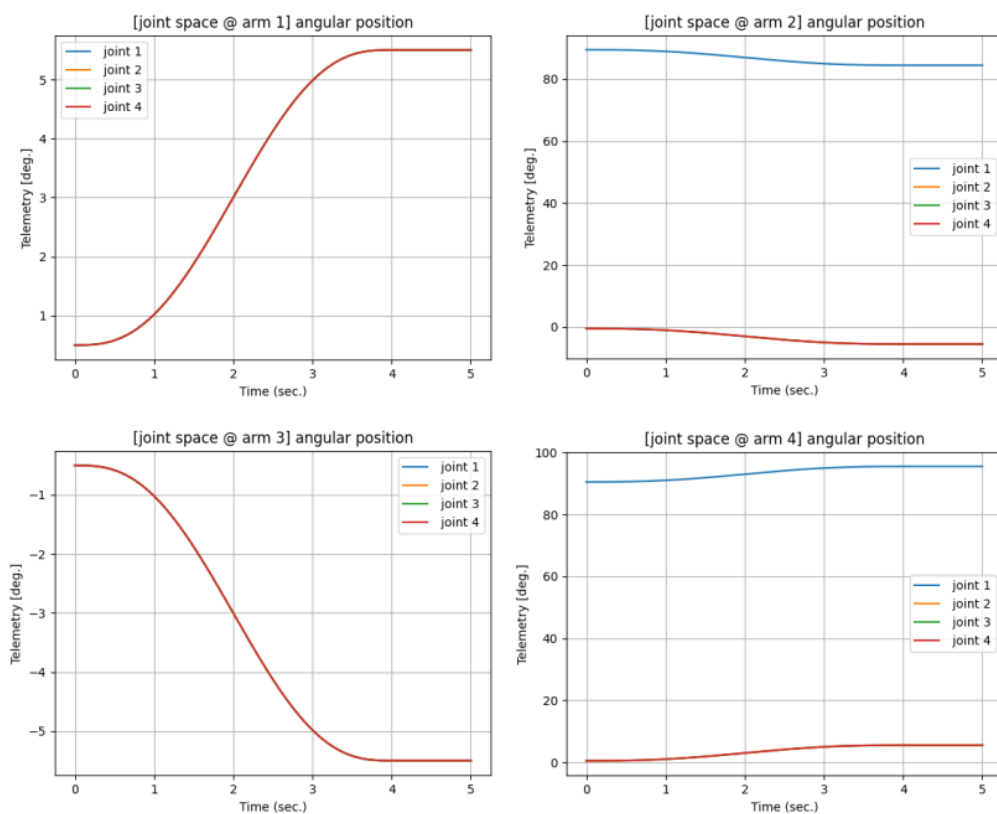


Figura 35 – Trajetória das juntas, TSC. Fonte: Próprio autor

Tabela 4 – Trajetória de juntas das simulações JSC e TSC, em [°].

	Joint 1	Joint 2	Joint 3	Joint 4
Arm-1, start	0.5	0.5	0.5	0.5
Arm-1, end	5.5	5.5	5.5	5.5
Arm-1, change	5.0	5.0	5.0	5.0
Arm-2, start	89.5	-0.5	-0.5	-0.5
Arm-2, end	84.5	-5.5	-5.5	-5.5
Arm-2, change	-5.0	-5.0	-5.0	-5.0
Arm-3, start	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
Arm-3, end	-5.5	-5.5	-5.5	-5.5
Arm-3, change	-5.0	-5.0	-5.0	-5.0
Arm-4, start	90.5	0.5	0.5	0.5
Arm-4, end	95.5	5.5	5.5	5.5
Arm-4, change	5.0	5.0	5.0	5.0

Tabela 5 – Trajetória dos efetuadores das simulações JSC e TSC, em [m,m,°].

	x-translation	y-translation	z-rotation
Arm-1, start	7.75	0.13	2.0
Arm-1, end	7.34	1.2	22.0
Arm-1, change	-0.4	1.07	20.0
Arm-2, start	0.13	7.75	88.0
Arm-2, end	1.2	7.34	68.0
Arm-2, change	1.07	-0.4	-20.0
Arm-3, start	-7.75	0.13	-2.0
Arm-3, end	-7.78	1.2	-22.0
Arm-3, change	-0.03	1.07	-20.0
Arm-4, start	0.13	-7.75	92.0
Arm-4, end	1.2	-7.78	112.0
Arm-4, change	1.07	-0.03	20.0

A Figura 36 mostra o movimento da base, o qual também é igual à simulação controlada no espaço das juntas. A rigor, existe uma diferença no pico inicial de rotação da base. Esta discrepância é justificada pela proximidade com o ponto singular. A partir das simulações, observou-se que este pico inicial aumenta quando o incremento inicial de 0.5° é diminuído. Isto é justificado pela perda de precisão nos cálculos de inversão cinemática pela E-GJM quando o sistema se aproxima de singularidades.

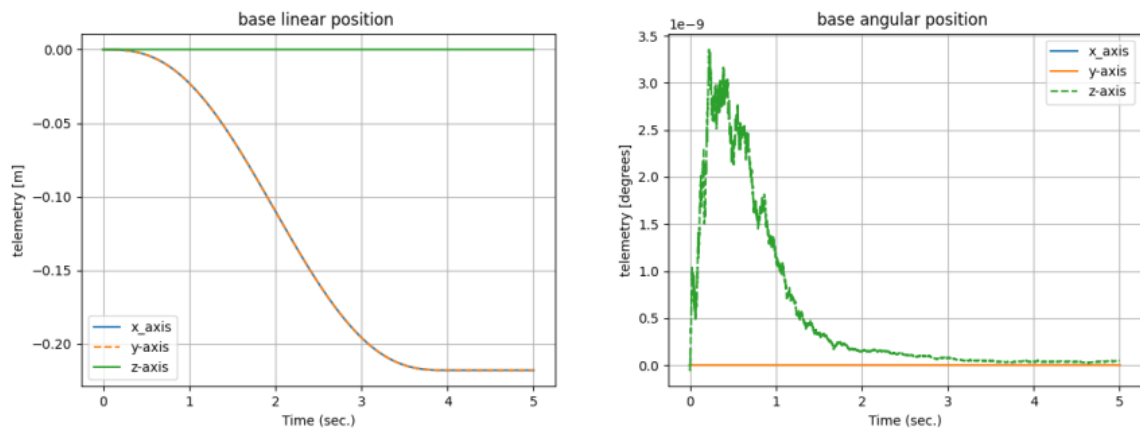


Figura 36 – Trajetória da base, TSC. Fonte: Próprio autor

Portanto, as simulações mostram que a solução de cinemática inversa obtida pela E-GJM é a mesma inserida como referência no gerador de trajetória. Este resultado não é trivial, pois a flutuação da base e acoplamento dinâmico inerente do sistema permite múltiplas soluções de junta para a mesma trajetória de efetuadores. Estudos computacionais revelaram que a proximidade entre as soluções dos dois sistemas de controle – juntas e tarefa – aumenta quando a simulação tende para o caso contínuo, ou seja, com a diminuição do tempo de amostragem.

O gráfico da Figura 37 da variação de posição do centro de massa, sendo a principal métrica de consistência interna do modelo, também ficou em valores baixos.

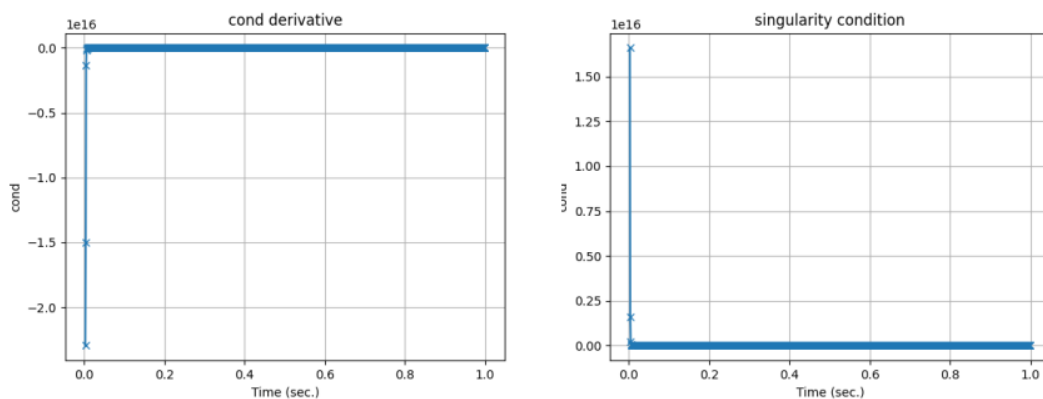


Figura 40 – Análise de singularidades com incremento de 0° , TSC. Fonte: Próprio autor

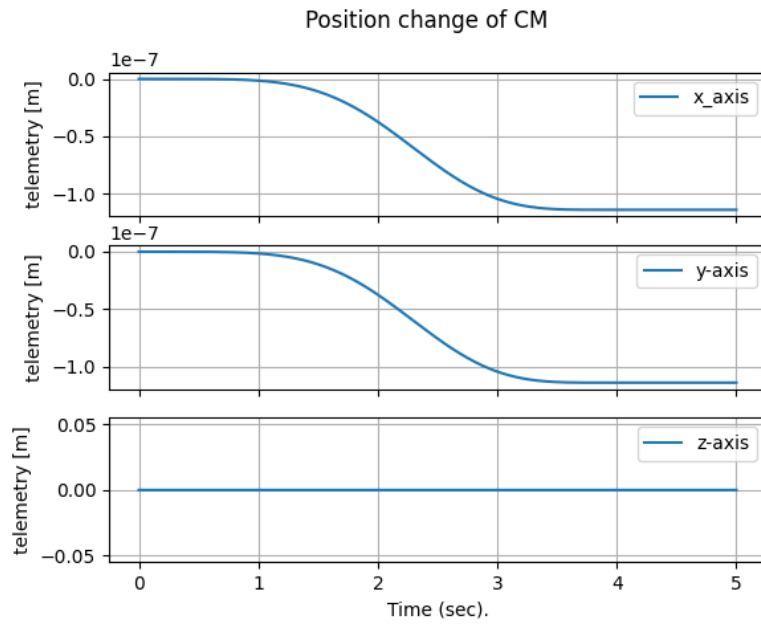


Figura 37 – Trajetória do centro de massa, TSC. Fonte: Próprio autor

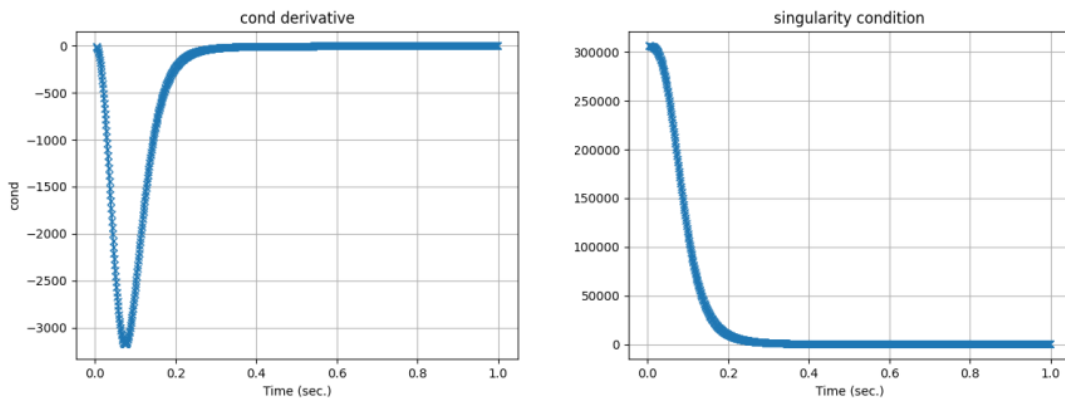


Figura 38 – Análise de singularidades com incremento de 0.1° , TSC. Fonte: Próprio autor

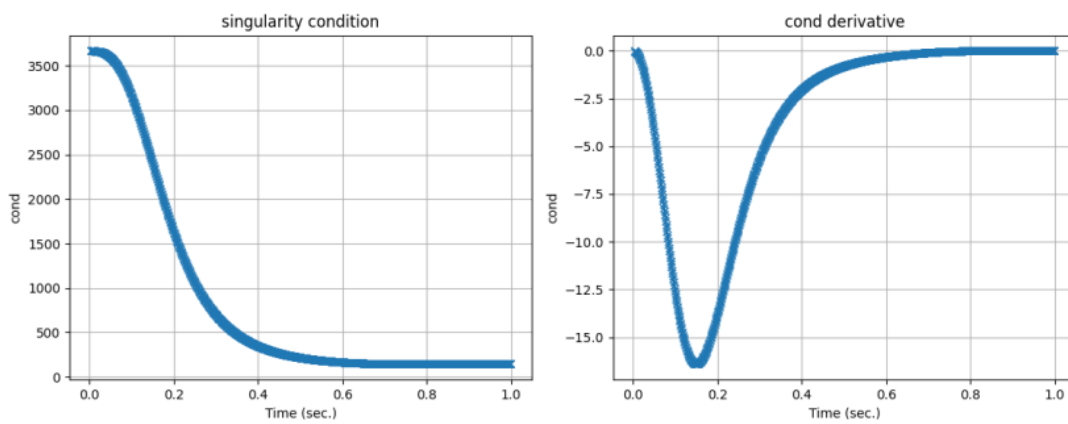


Figura 39 – Análise de singularidades com incremento de 1° , TSC. Fonte: Próprio autor

Por fim, investigou-se a dependência relativa da acurácia da E-GJM com o incremento angular de juntas a partir do ponto singular. Para isto, a métrica escolhida foi o número de condição de inversão (*cond*) da E-GJM, que mede a norma da inversa. Quanto maior o *cond*, pior é a acurácia da inversa. O tempo de simulação foi reduzido para 1 segundo e taxa de amostragem 0.001 segundos, visando reduzir o custo computacional. Os incrementos analisados foram de 0.1° (Figura 38), 1° (Figura 39) e 0° (Figura 40).

No ponto singular da Figura 40, a inversão diverge. Nota-se que a redução do incremento piora a inversão da E-GJM. Trata-se de uma análise relativa, não absoluta. Isto é, a perda de acurácia nos cálculos da inversa não foram avaliados numericamente contra outros indicadores do modelo, como a cinemática. Observa-se que os valores da métrica diminuem conforme o robô se afasta do ponto singular.

5.3 Resultados de simulação - detumbling

A formulação matemática da tarefa de detumbling em multimanipuladores espaciais, conforme estabelecida neste trabalho, utiliza o modelo dinâmico do robô – com momento total não-nulo – para computar os valores do espaço das juntas que anulam a velocidade angular de um ou mais efetuadores. Se a tarefa consiste em estabilizar apenas um alvo, existe uma solução em que se destina somente uma junta do braço de missão para completar o detumbling, permitindo que as demais juntas sejam aplicadas em outros objetivos, como atenuação de distúrbios na base.

Nesta seção, serão apresentados os resultados de simulações nas quais o momento angular total do manipulador é não-nulo e conservado. Na prática, esta condição ocorre após o robô capturar um alvo rotativo. Uma vez que a tarefa de detumbling é focada majoritariamente em momento angular, a componente linear foi desprezada nas simulações para fins de validação da formulação.

O tempo total de simulação foi ajustado para 1 segundo, sendo a taxa de amostragem mantida no mesmo valor das análises anteriores (0.001 ms). O evento de captura foi parametrizado como um torque impulsivo de 500 N.m no eixo z de 10 ms de duração aplicado no instante $t = 5$ ms. Foi considerado que o tempo de subida do impulso é de 5 ms. A aplicação deste torque resulta em um momento angular não-nulo e conservado para o robô, conforme Figura 41, resultante da integração numérica do torque imposto ao sistema.

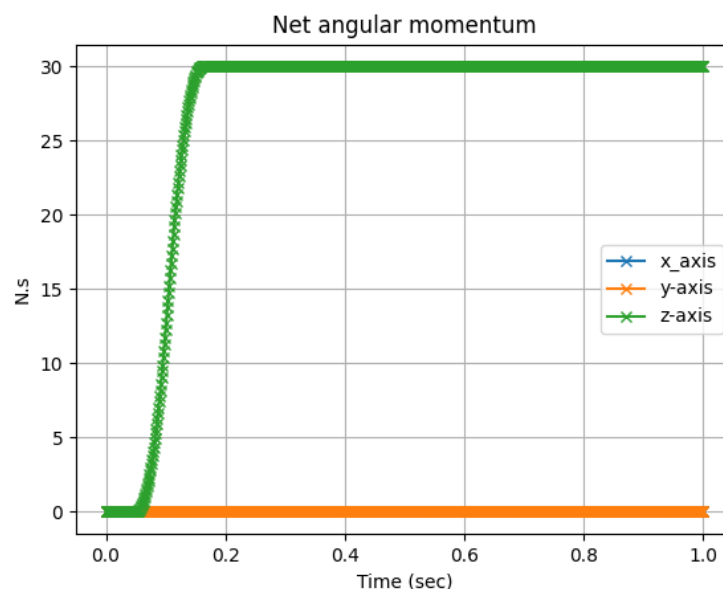


Figura 41 – Momento angular pós-captura, DTB. Fonte: Próprio autor

Vale observar que a formulação apresentada não considera o ponto de aplicação do torque, mas somente a componente resultante sobre o seu centro de massa. Portanto,

ainda são necessários modelos adicionais para converter os torques impressos pelos alvos em torques resultantes, os quais são integrados para gerar os perfis de momento.

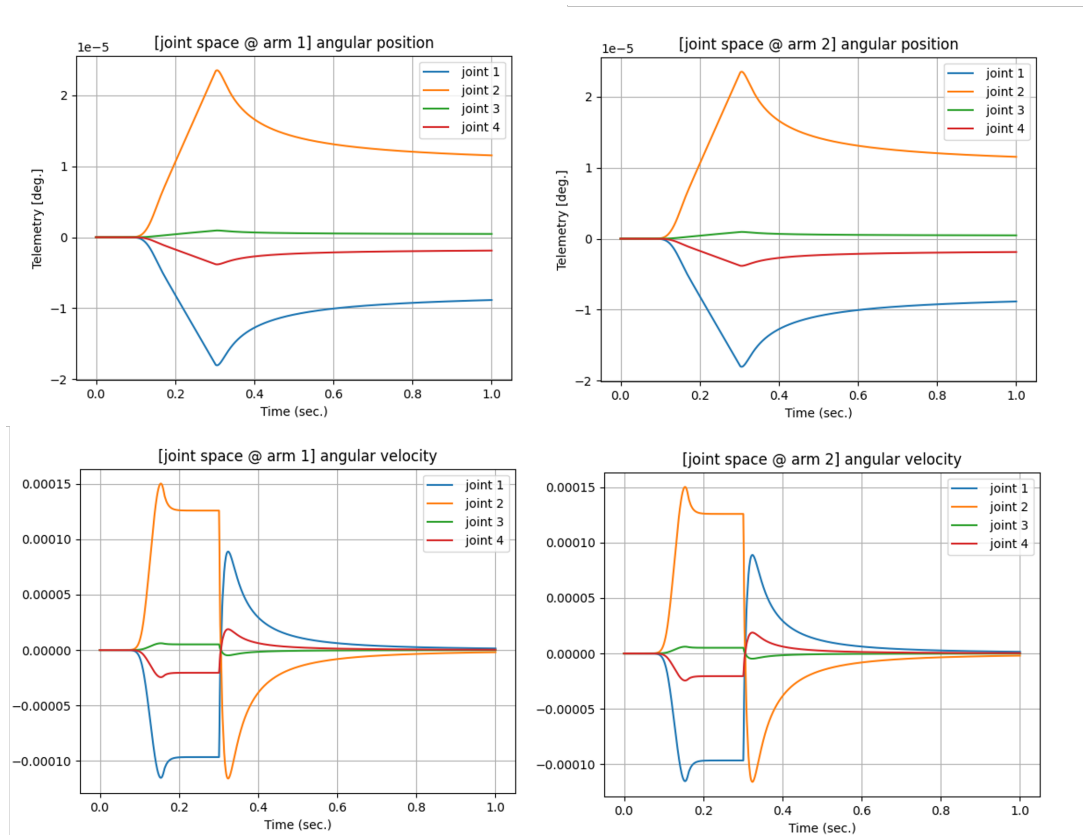


Figura 42 – Posição e velocidade angulares, JS, sem DTB. Fonte: Próprio autor

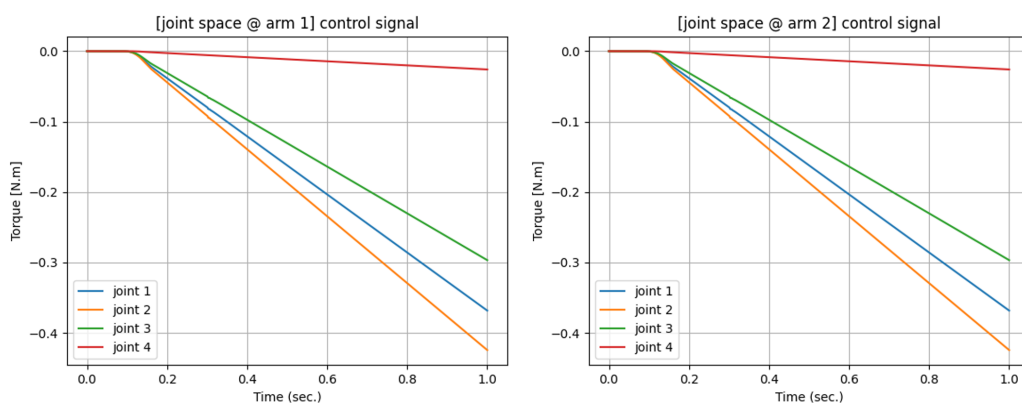


Figura 43 – Torques de junta, sem DTB. Fonte: Próprio autor

A análise das simulações de detumbling será pautada em três telemetrias: posição e velocidade angulares das juntas, posição e velocidade angulares dos efetadores e torque das juntas. Visando tornar a avaliação dos resultados mais intuitiva, o robô de 4 braços estudado nas simulações anteriores foi reduzido para um sistema de 2 braços, mantendo

a parametrização inercial e geométrica dos elementos constituintes do manipulador. O sistema de controle utilizado é o torque calculado com mesma parametrização de ganhos das simulações anteriores.

Inicialmente, foi realizada uma tarefa de controle em espaço das juntas de ângulos nulos. Mais precisamente, durante toda a fase de captura e pós-captura, o sistema de controle busca manter a posição e velocidade angulares de todas as juntas iguais a zero. Isto significa que os braços do robô são controlados ativamente de modo a mantê-los "esticados" (conforme condição cinemática inicial). O objetivo desta simulação é verificar a resposta dos efetuadores no espaço cartesiano após colisão com o alvo.

A Figura 42 mostra que o sistema de controle em espaço das juntas é capaz de manter as juntas próximas de zero mesmo com aplicação de momento. Os torques necessários para implementar esta condição são dados na Figura 43. Vale observar que as amplitudes desses sinais de torque são iguais às contribuições da propagação de forças externas, associadas ao momento inserido, ao longo das juntas do robô.

Acerca da dinâmica inercial, na Figura 44 nota-se que o modelo dinâmico implementado é capaz de descrever o movimento dos efetuadores com momento externo não-nulo. Observa-se que os dois braços rotacionam no mesmo sentido e velocidade angular constante após aplicação do distúrbio. Este resultado é coerente com o perfil constante de momento angular. Além disso, vale ressaltar que se o detumbling não for executado, os valores dos ângulos crescem indefinidamente. Isto está de acordo com o esperado, uma vez que sem um controle em espaço cartesiano o robô tende a girar indefinidamente no espaço.

Objetivando validar a formulação de detumbling proposta neste trabalho, foram simuladas 4 tarefas de estabilização que variam na quantidade de alvos e juntas de missão:

- Alvo único: braço 1, junta 4 destinada para missão;
- Alvo único: braço 1, junta 3 destinada para missão;
- Alvo único: braço 2, junta 4 destinada para missão;
- Dois alvos: dois braços de missão, todas as juntas planejadas.

A Figura 45 mostra o movimento dos efetuadores para o detumbling de braço único, com planejamento da junta 4 do braço 1. Observa-se que, após um intervalo de transiente próximo à colisão com o alvo, o sistema de controle é capaz de anular a velocidade angular do efetuator do braço 1. A variação angular na captura é de apenas 0.02 miligraus, caindo para níveis virtualmente nulos na pós-captura. Portanto, o efetuator do braço 1 é mantido em sua posição inicial pelo controlador.

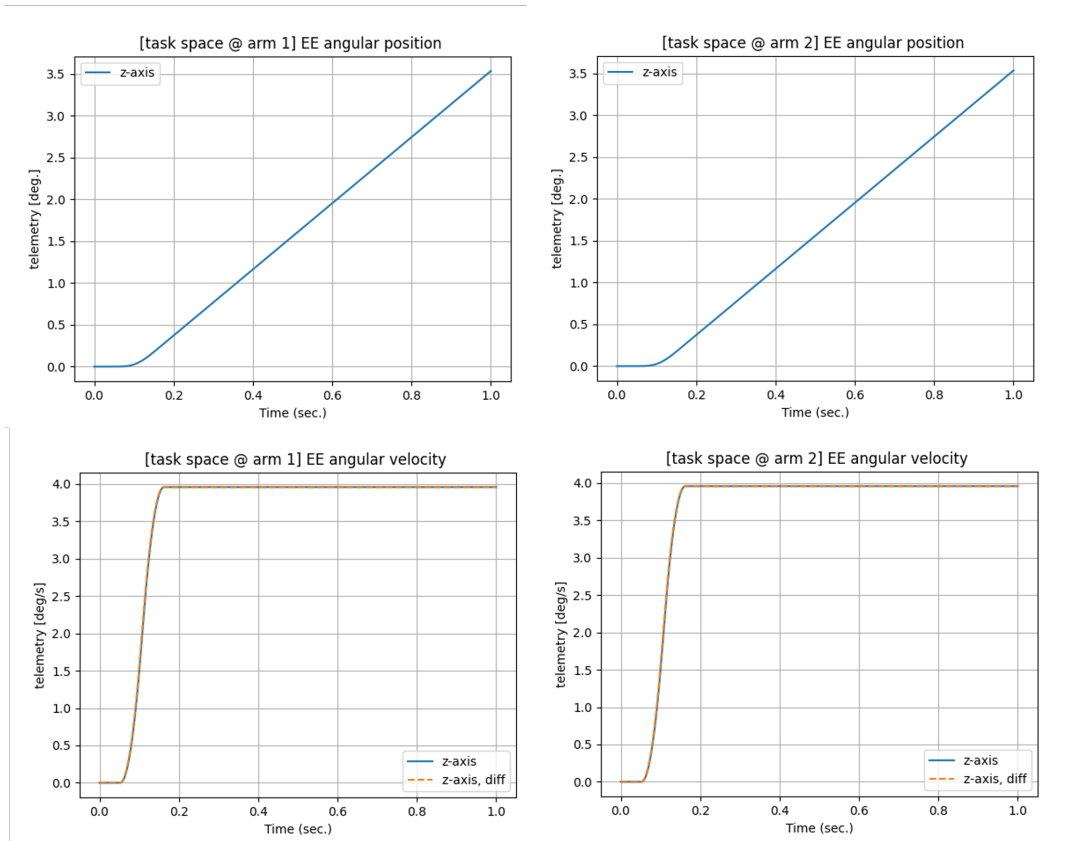


Figura 44 – Posição e velocidade angulares, TS, sem DTB. Fonte: Próprio autor

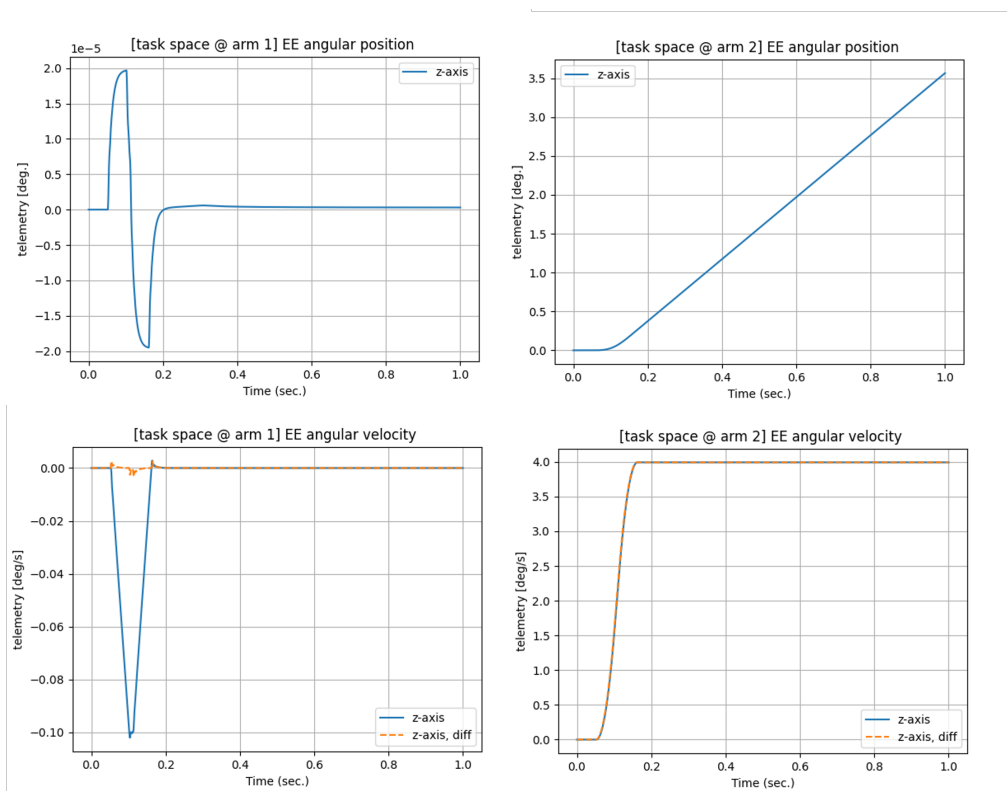


Figura 45 – Posição e velocidade angulares, TS, DTB - braço 1, junta 4. Fonte: Próprio autor

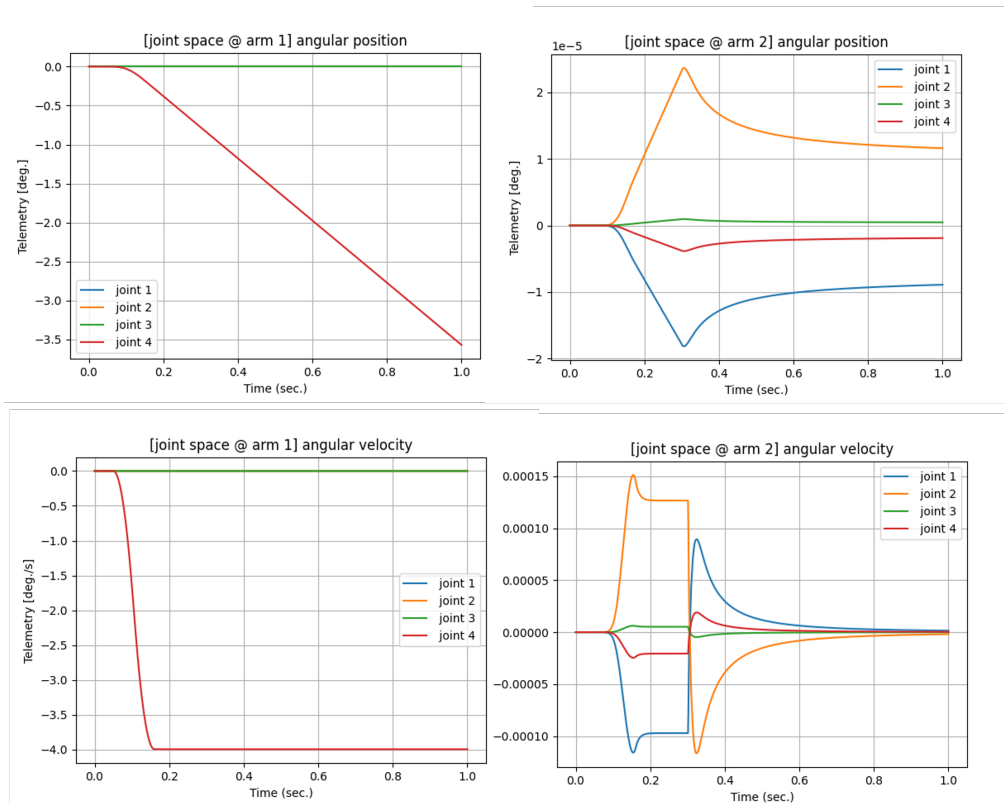


Figura 46 – Posição e velocidade angulares, JS, DTB - braço 1, junta 4. Fonte: Próprio autor

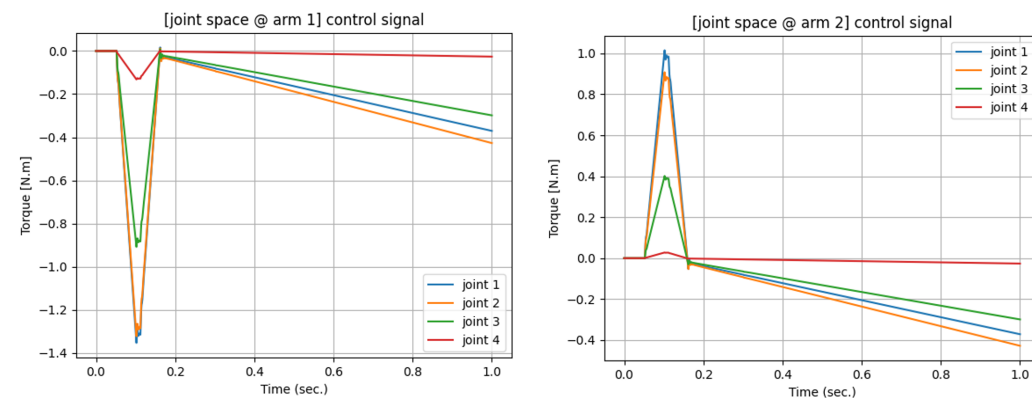


Figura 47 – Torques de junta, DTB - braço 1, junta 4. Fonte: Próprio autor

Isto significa que a formulação de detumbling calculou corretamente a solução em espaço das juntas necessária para balancear a velocidade angular do alvo capturado. De fato, o movimento efetuado pela junta de missão (Figura 46) é simétrico à rotação do efetador, resultando em movimento rotativo inercial nulo para o alvo capturado. Os torques de junta necessários para implementar a estabilização são dados na Figura 47.

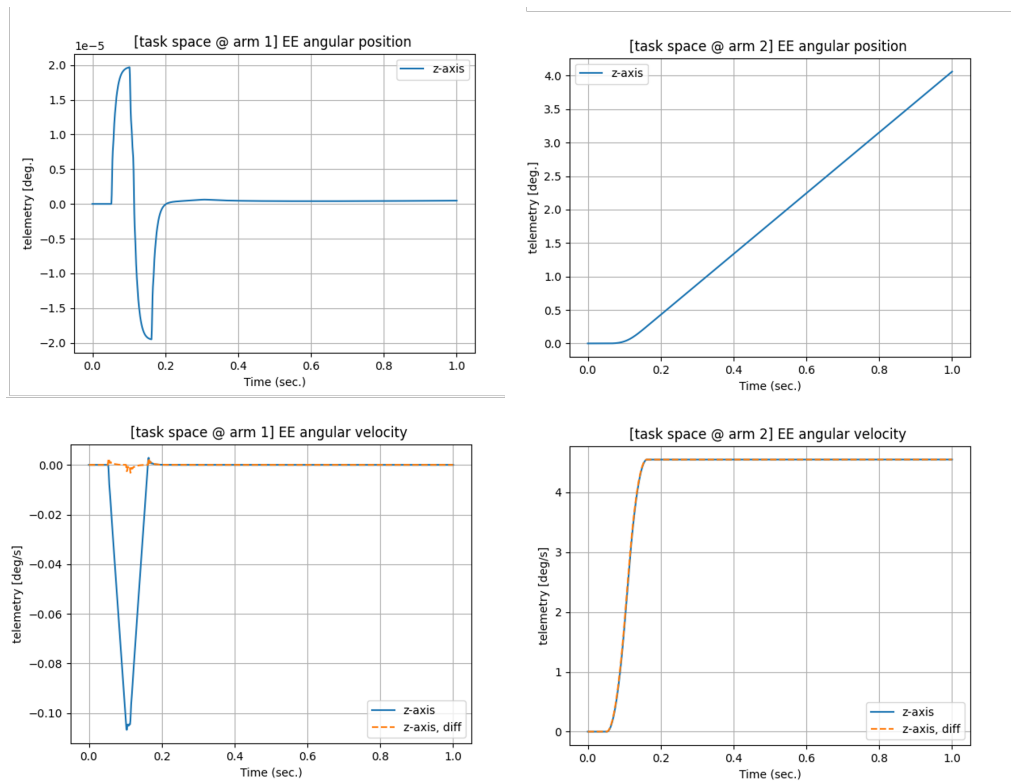


Figura 48 – Posição e velocidade angulares, TS, DTB - braço 1, junta 3. Fonte: Próprio autor

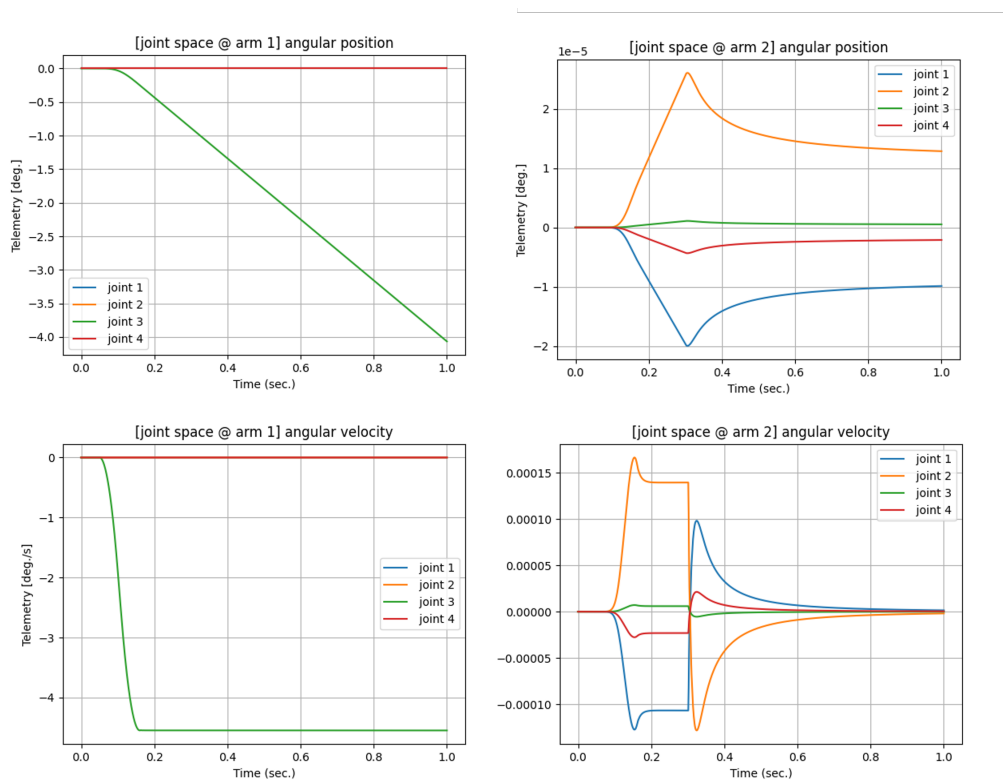


Figura 49 – Posição e velocidade angulares, JS, DTB - braço 1, junta 3. Fonte: Próprio autor

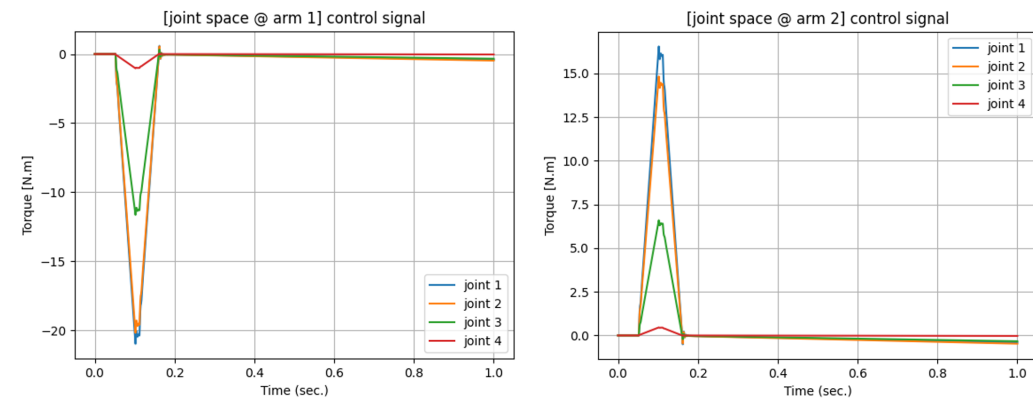


Figura 50 – Torques de junta, DTB - braço 1, junta 3. Fonte: Próprio autor

As telemetrias da estabilização do mesmo alvo, mas planejando a penúltima junta do braço para a missão, são apresentadas nas Figuras 48, 49 e 50. Observa-se que o desempenho de detumbling é igualmente satisfatório, mas o torque de juntas necessário para a tarefa é maior. Como a penúltima junta deve movimentar uma inércia maior do que a última junta, este resultado é esperado.

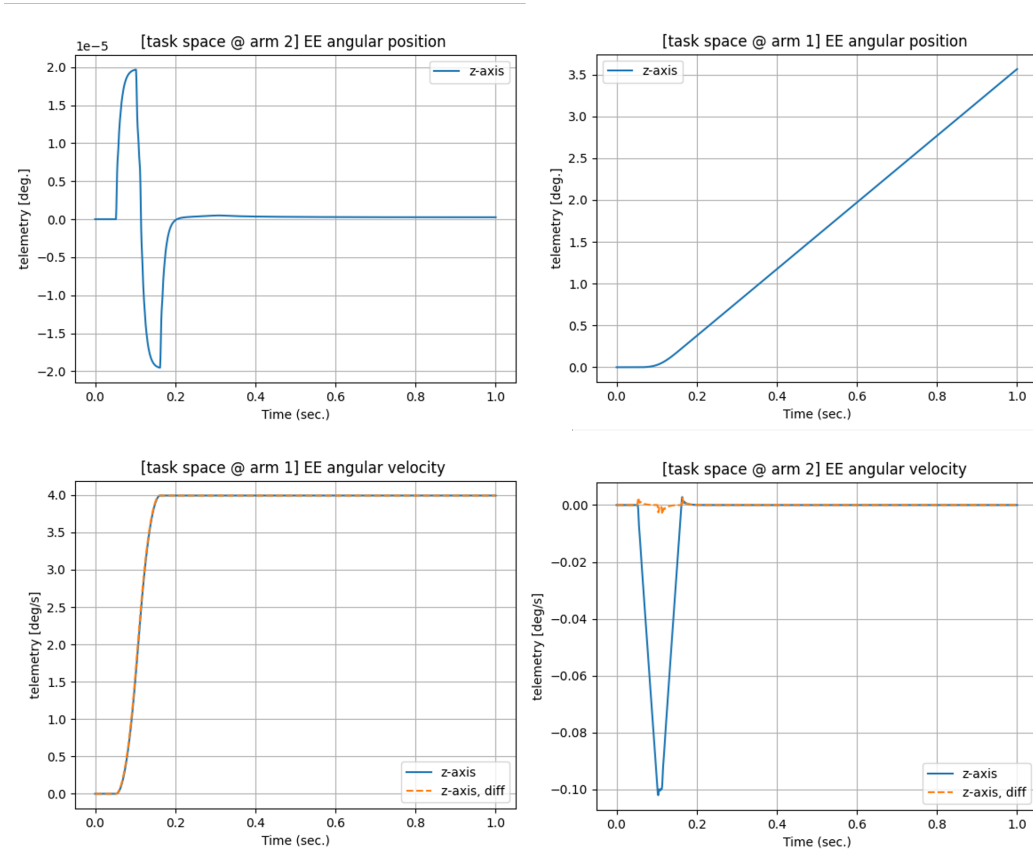


Figura 51 – Posição e velocidade angulares, TS, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor

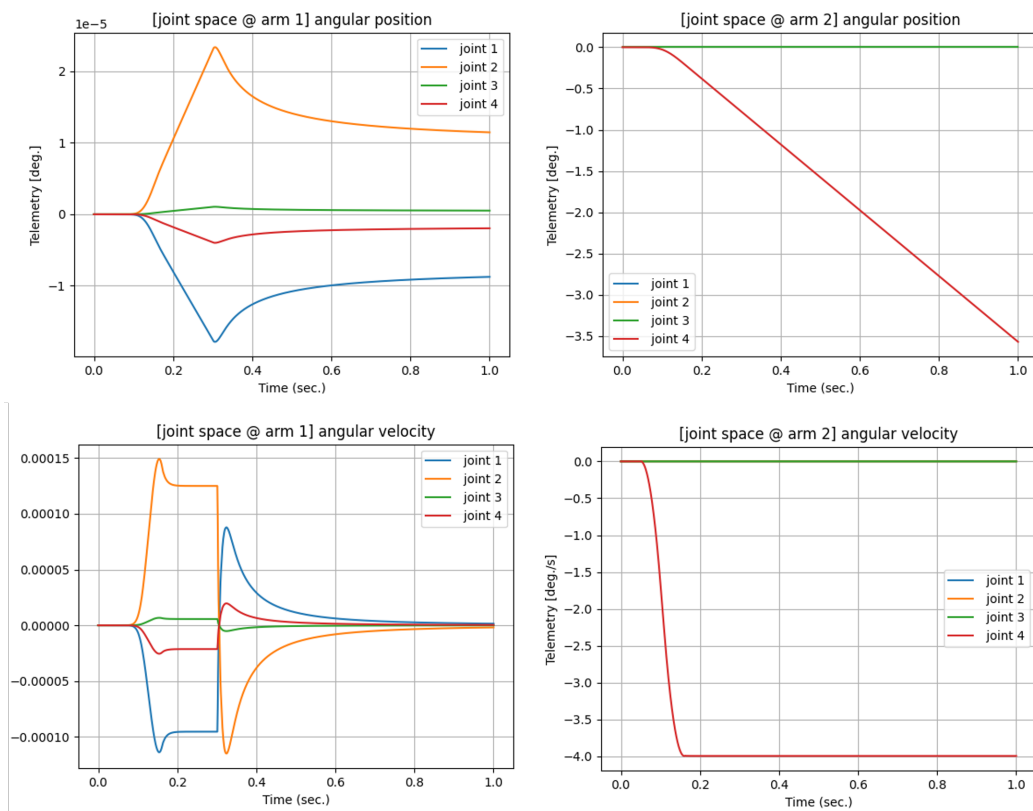


Figura 52 – Posição e velocidade angulares, JS, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor

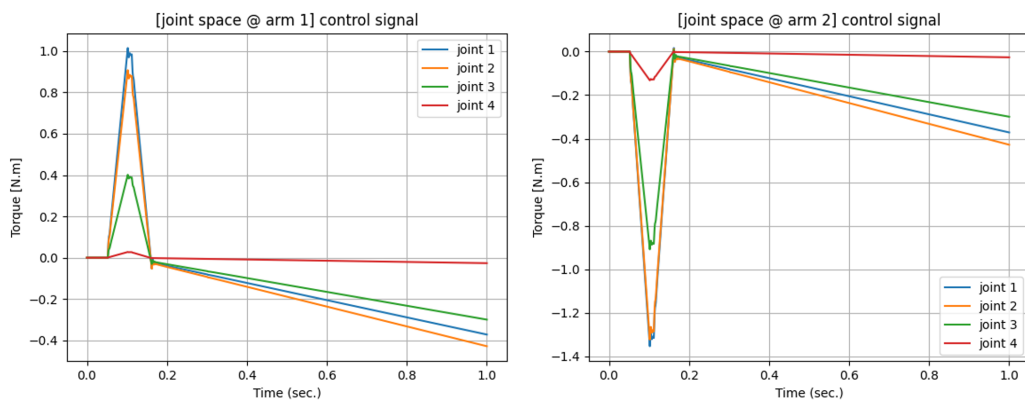


Figura 53 – Torques de junta, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor

Visando avaliar a simetria da implementação, a mesma tarefa foi imposta ao braço 2 considerando a última junta (4) para a missão. Os resultados apresentados nas Figuras 51, 52 e 53 são análogos à simulação do braço 1, mas com estabilização do braço 2.

Por fim, foi avaliada a performance da estabilização de dois alvos simultâneos. Os resultados, apresentados nas Figuras 54, 55 e 56, demonstram a capacidade da formulação de detumbling em calcular soluções de estabilização de múltiplos braços simultaneamente com desempenho igualmente satisfatório ao caso de alvo único.

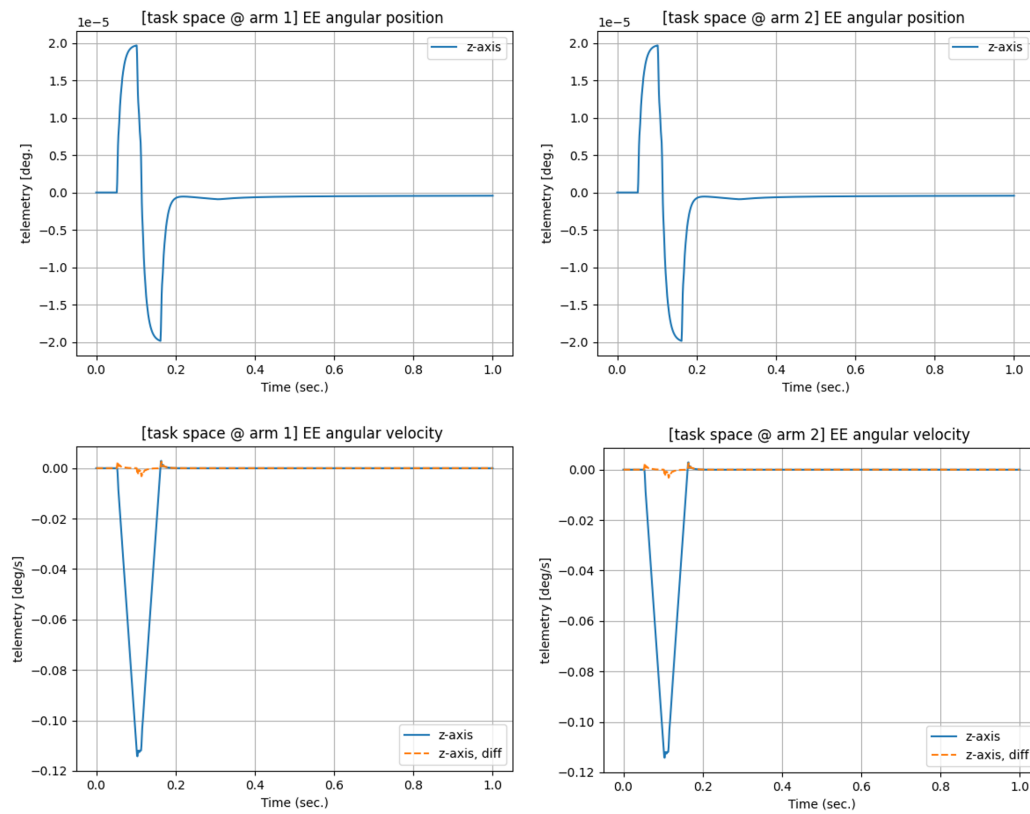


Figura 54 – Posição e velocidade angulares, TS, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor

Portanto, conclui-se que o modelo dinâmico apresentado neste trabalho é capaz de descrever adequadamente o movimento inercial dos efetadores de um multimanipulador espacial após colisão com alvos em movimento. Observou-se que o sistema de controle em espaço das juntas pode manter as variáveis de junta em valores desejados mesmo com momento externo não-nulo. Além disso, a formulação de detumbling implementada é capaz de estabilizar os efetadores do robô após colisão com um ou múltiplos alvos, mantendo a velocidade angular dos efetadores muito próxima de zero. Isto indica que o modelo matemático apresentado é nominalmente correto em espaço das juntas e espaço cartesiano mesmo com momento externo não-nulo. Assim, os algoritmos implementados podem assumir papel relevante na pavimentação de aplicações futuras de estabilização de múltiplos alvos por robôs espaciais flutuantes, seja no quesito de análise dinâmica ou em projeto de controladores.

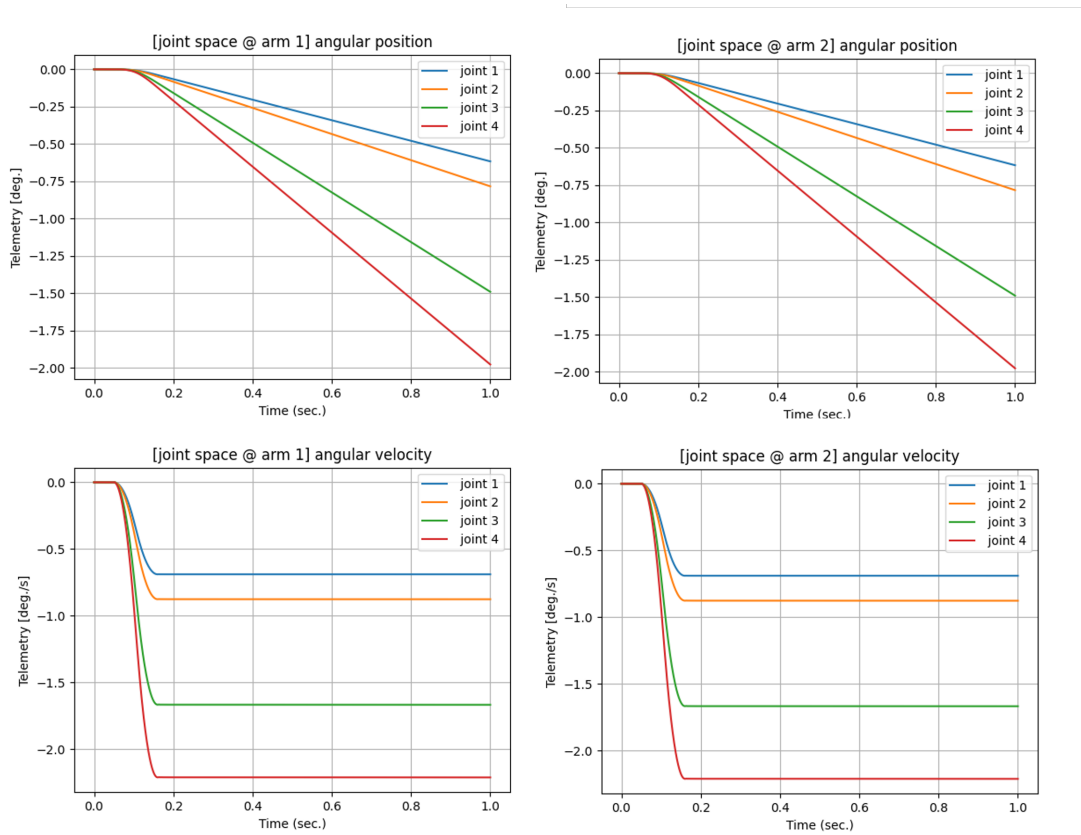


Figura 55 – Posição e velocidade angulares, JS, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor

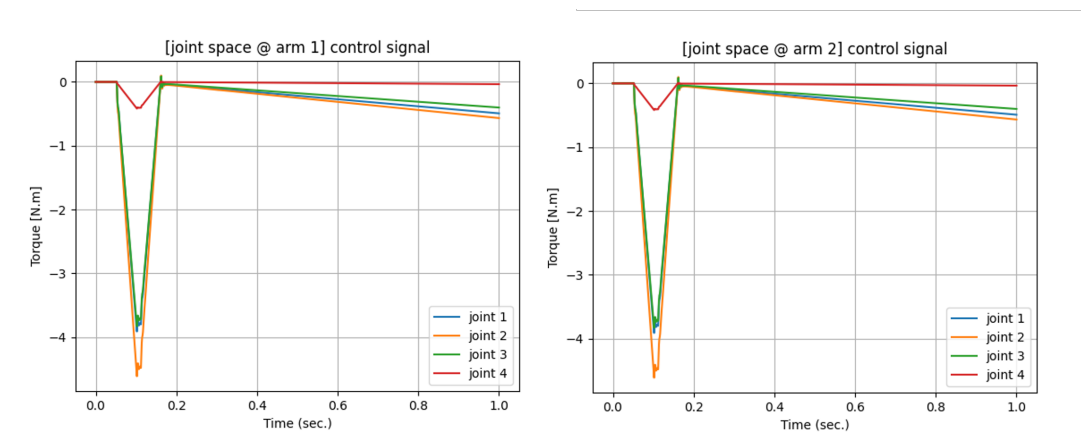


Figura 56 – Torques de junta, DTB - braço 2, junta 4. Fonte: Próprio autor

Conclusão

O trabalho desenvolvido compreende uma revisão do formalismo matemático que fundamenta a modelagem cinemática e dinâmica de manipuladores espaciais de base flutuante. O conjunto de ferramentas constituintes do modelo GJM – matrizes dinâmicas, vínculos de momento e equações de movimento – foram implementados computacionalmente. Neste ponto, o desempenho satisfatório obtido com as simulações de controle inercial dos efetuadores, coerência cinemática da E-GJM e detumbling de múltiplos alvos simultâneos indicam a estabilidade desta implementação. Em um cenário de momento externo não-nulo, a modelagem em questão descreve adequadamente o movimento do robô em espaço das juntas e cartesiano. Além de objetivar respaldar as próximas etapas de desenvolvimento do projeto, que compreendem simulações de tarefas dinamicamente complexas de *detumbling*. Além das contribuições deste texto para a literatura de robótica espacial, os algoritmos desenvolvidos neste trabalho tem grande potencial para respaldar futuras aplicações em captura de alvos não-cooperativos por multimanipuladores de base flutuante.

Em uma visão global, este relatório abrange o procedimento original de modelagem de robôs espaciais de Umetani e Yoshida (1989), para dinâmica externa, e (MASUTANI; MIYAZAKI; ARIMOTO, 1989), de dinâmica interna, mas de forma unificada e didática. Utilizando esta concepção pioneira como base, cuja validade é restrita para operações *stand-alone* e manipuladores *free-floating* de braço único, este trabalho generaliza o sistema para uma quantidade arbitrária de braços. Todas as etapas da construção matemática do modelo dinâmico geral são cuidadosamente apresentadas em apêndices. Adicionalmente, a inclusão de forças externas e momento não conservado é discutida detalhadamente, justificando as passagens matemáticas e mantendo a coerência com a modelagem original GJM. O desempenho satisfatório obtido com a formulação de detumbling de múltiplos alvos reforça a consistência da E-GJM proposta.

Como contribuições específicas, pode-se elencar formulações teóricas que aumentam a confiabilidade nominal da modelagem, como a Lagrangiana monoestado, a inserção do

momento inercial da base na equação da dinâmica externa e a formulação de propagação de forças externas ao longo das juntas. Por fim, os estudos computacionais revelam que o Acoplamento Dinâmico Não Inercial, também formulado neste trabalho, é uma parcela de grande contribuição no conjunto das dinâmicas do modelo, afetando significativamente o projeto de controladores em espaço das juntas.

Referências

ABIKO, S.; LAMPARIELLO, R.; HIRZINGER, G. Impedance control for a free-floating robot in the grasping of a tumbling target with parameter uncertainty. In: . [S.l.: s.n.], 2006. p. 1020–1025. ISBN 142440259X.

BAOSHENG, Z.; YANAN, L. Dynamics Analysis of a Dual- arm Space Robot Using Euler-Poincare. **Seventh International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation**, p. 2–5, 2015.

BASMADJI, F. L.; SEWERYN, K.; SASIADEK, J. Z. Space robot motion planning in the presence of nonconserved linear and angular momenta. **Multibody System Dynamics**, Springer, v. 50, p. 71–96, 9 2020. ISSN 1573272X.

CRAIG, J. J. **Introduction to Robotics**. New Jersey: Prentice Hall, 2005.

DAVIS, R. O.; SELVADURAI, A. P. S. **Plasticity and Geomechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.

JIAO, C.; LIANG, B.; WANG, X. Adaptive Reaction Null-space Control of Dual-arm Space Robot for Post-capture of Non-cooperative Target. **2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)**, IEEE, p. 531–537, 2017.

LEMOS, N. U. **Mecânica analítica**. São Paulo, BR: Livraria da física, 2007.

LI, J. The chattering-eliminating sliding mode controller of multi-arm space manipulator for coordinated operation. **2014 International Conference on Multisensor Fusion and Information Integration for Intelligent Systems (MFI)**, IEEE, p. 1–6, 2014.

MASUTANI, Y.; MIYAZAKI, F.; ARIMOTO, S. Sensory feedback control for space manipulators. In: **Proceedings, 1989 International Conference on Robotics and Automation**. [S.l.: s.n.], 1989. p. 1346–1351 vol.3.

PAPADOPOULOS, E.; DUBOWSKY, S. Dynamic singularities in free-floating space manipulators. 02 1989.

PENG, J. et al. Dual-arm coordinated capturing of an unknown tumbling target based on efficient parameters estimation. **Acta Astronautica**, Elsevier Ltd, v. 162, p. 589–607, 9 2019. ISSN 00945765.

- RAINA, D. et al. Impact modeling and reactionless control for post-capturing and maneuvering of orbiting objects using a multi-arm space robot. **Acta Astronautica**, Elsevier Ltd, v. 182, p. 21–36, 5 2021. ISSN 00945765.
- RODRIGUES, G. S.; PAZELLI, T. F. P. A. T. Dynamic modeling and control optimization of free-floating dual-arm space robots in task space. In: **2021 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2021 Brazilian Symposium on Robotics (SBR), and 2021 Workshop on Robotics in Education (WRE)**. [S.l.: s.n.], 2021. p. 168–173.
- UMETANI, Y.; YOSHIDA, K. Resolved motion rate control of space manipulators with generalized jacobian matrix. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 5, p. 303–314, 1989. ISSN 1042296X.
- Wang, M. et al. Optimal trajectory planning of free-floating space manipulator using differential evolution algorithm. **Advances in Space Research**, v. 61, n. 6, p. 1525–1536, mar. 2018.
- WANG, M. et al. An integrated control scheme for space robot after capturing non-cooperative target. **Acta Astronautica**, Elsevier Ltd, v. 147, p. 350–363, 6 2018. ISSN 00945765.
- WANG, X. et al. Modelling and Control of Dual-Arm Free-Floating Space Robot Using Virtual Decomposition Control for Capturing Target. p. 2021–2026, 2017.
- WILDE, M. et al. Equations of motion of free-floating spacecraft-manipulator systems: An engineer’s tutorial. **Frontiers Robotics AI**, Frontiers Media S.A., v. 5, 2018. ISSN 22969144.
- YAN, L. et al. Virtual-base modeling and coordinated control of a dual-arm space robot for target capturing and manipulation. **Multibody System Dynamics**, Springer Netherlands, v. 45, p. 431–455, 4 2019. ISSN 1573272X.
- YOSHIDA, K.; NENCHEV, D. N. **A General Formulation of Under-Actuated Manipulator Systems**. 1997.
- YOSHIDA, K.; SASHIDA, N. Modeling of impact dynamics and impulse minimization for space robots. In: . [S.l.]: Publ by IEEE, 1993. p. 2064–2069. ISBN 0780308239.

Apêndices

APÊNDICE A

Matrizes dinâmicas

O objetivo desta seção é obter um formato analítico fechado para a energia cinética do manipulador espacial de múltiplos braços como função das variáveis representativas da dinâmica do robô, a saber, ${}^{\mathcal{J}}x_0$ e q . Especificamente, como a energia cinética é uma métrica dependente somente de velocidade, a descrição deve ser feita em termos de ${}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0$ e \dot{q} . Tal expressão é necessária para desenvolvimento das equações de movimento segundo abordagem Lagrangiana.

Por definição, a energia cinética total do robô é o somatório das energias cinéticas individuais da base e de todos os elos (de todos os braços). Cada corpo rígido constituinte do sistema compreende duas parcelas de energia cinética: translacional e rotacional. Estas, por sua vez, dependem das velocidades – lineares e angulares – dos elos e da base, além de parâmetros inerciais. Com isso, o equacionamento da energia cinética do robô se resume a desenvolver as expressões cinemáticas 14 em relações quadráticas ponderadas por massas e tensores de inércia, evidenciando as variáveis \dot{x}_0 e \dot{q} .

Para isto, seja um multi-manipulador espacial de N_A braços, sendo N_j o número de elos do braço j , $j \in \{1, \dots, N_A\}$. Sejam $L_T^{i,j}$ e $L_R^{i,j}$ as energias cinéticas translacional e rotacional do i -ésimo elo do j -ésimo braço, respectivamente, e L_0 a energia cinética total da base. Assim, a energia cinética total do robô é dada em 141:

$$L = \sum_{j=1}^{N_A} \left[\sum_{i=1}^{N_j} \left(L_T^{i,j} + L_R^{i,j} \right) \right] + L_0 \quad (141)$$

Sejam ${}^{\mathcal{J}}v_{i,j}$ e ${}^{\mathcal{J}}\omega_{i,j}$ as velocidades linear e angular do i -ésimo elo do j -ésimo braço, ambas descritas no referencial inercial. Vale reforçar que o referenciamento inercial é necessário para que a expressão seguinte seja válida como energia cinética. A massa e

tensor de inércia deste elo são $m_{i,j}$ e ${}^{\mathcal{J}}I_{i,j}$. Assim, as parcelas $L_T^{i,j}$ e $L_R^{i,j}$ ficam definidas conforme 142.

$$\begin{aligned} L_T^{i,j} &= m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}v_{i,j}^T {}^{\mathcal{J}}v_{i,j} \\ L_R^{i,j} &= {}^{\mathcal{J}}\omega_{i,j} {}^{\mathcal{J}}I_{i,j} {}^{\mathcal{J}}\omega_{i,j} \end{aligned} \quad (142)$$

A velocidade linear ${}^{\mathcal{J}}v_{i,j}$ é resgatada de 14 e apresentada em 143, rescrevendo o somatório de contribuição das juntas como um produto matricial:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{J}}v_{i,j} &= {}^{\mathcal{J}}v_0 + {}^{\mathcal{J}}\omega_0 \times ({}^{\mathcal{J}}r_{i,j} - {}^{\mathcal{J}}r_0) + \sum_{k=1}^{i,j} \left({}^{\mathcal{J}}\hat{k}_k ({}^{\mathcal{J}}r_{i,j} - {}^{\mathcal{J}}p_k) \right) \dot{q}_k \\ &= {}^{\mathcal{J}}v_0 + \omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}r_{0,i,j} + J_{T_{i,j}} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (143)$$

sendo possível notar que a matriz $J_{T_{i,j}}$ corresponde a parcela translacional do termo da matriz Jacobiana devida à dinâmica interna.

Analogamente, a velocidade angular ${}^{\mathcal{J}}\omega_{i,j}$ é representada em 144, no qual o somatório do lado direito é reescrito como produto matricial:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{J}}\omega_{i,j} &= {}^{\mathcal{J}}\omega_0 + \sum_{k=1}^{i,j} \left(\hat{k}_k \right) \dot{q}_k \\ &= {}^{\mathcal{J}}\omega_0 + J_{R_{i,j}} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (144)$$

sendo $J_{R_{i,j}}$ a componente rotacional do termo da Jacobiana devida à dinâmica interna.

Inicialmente, é desenvolvida a parcela translacional da energia cinética. Substituindo 143 no termo $L_T^{i,j}$ de 142:

$$\begin{aligned} L_T^i &= m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}v_i^T {}^{\mathcal{J}}v_i \\ &= m_{i,j} \left[\left({}^{\mathcal{J}}v_0^T + (-{}^{\mathcal{J}}r_{0,i}^T {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times) + \dot{q}_j^T J_{T_i}^T \right) \left({}^{\mathcal{J}}v_0 + {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}r_{0,i,j} + J_{T_{i,j}} \dot{q}_j \right) \right] \\ &= m_{i,j} \left[\right. \\ &\quad \left({}^{\mathcal{J}}v_0^T {}^{\mathcal{J}}v_0 + {}^{\mathcal{J}}v_0^T {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}r_{0,i,j} + {}^{\mathcal{J}}v_0^T J_{T_{i,j}} \dot{q}_j \right) + \\ &\quad \left(-{}^{\mathcal{J}}r_{0,i,j}^T {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}r_{0,i,j} - {}^{\mathcal{J}}r_{0,i,j}^T {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}v_0 - {}^{\mathcal{J}}r_{0,i,j}^T {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times J_{T_{i,j}} \dot{q}_j \right) + \\ &\quad \left. \left(\dot{q}_j^T J_{T_{i,j}}^T {}^{\mathcal{J}}v_0 + \dot{q}_j^T J_{T_{i,j}}^T {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}r_{0,i,j} + \dot{q}_j^T J_{T_{i,j}}^T J_{T_{i,j}} \dot{q}_j \right) \right] \end{aligned} \quad (145)$$

As manipulações seguintes visam deslocar as variáveis \dot{q} , ${}^{\mathcal{J}}\omega_0$ e ${}^{\mathcal{J}}v_0$ para as extremidades das parcelas, de modo a gerar expressões no formato $s_m K_{mn} s_n$, cujas variáveis s_n, s_m são velocidades do tipo \dot{q} , ${}^{\mathcal{J}}\omega_0$ ou ${}^{\mathcal{J}}v_0$, sendo as matrizes de peso K_{mn} dependentes apenas de parâmetros inerciais e geométricos do robô. De fato, este formato quadrático é usual para energia cinética, isto é, uma norma de variáveis de velocidade ponderadas por uma matriz "inercial".

A propriedade do produto triplo garante que, dados vetores a, b, c , vale $a \cdot (b \times c) = -b \cdot (a \times c)$. Além disso, $a \cdot b = a^T b$. Isto permite simplificar alguns termos da expressão

anterior:

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{J}r_{0i,j}^T \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}r_{0i,j} &= -\mathcal{J}r_{0i,j} \cdot (\mathcal{J}\omega_0 \times (\mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}r_{0i,j})) = \mathcal{J}\omega_0 \cdot (\mathcal{J}r_{0i,j} \times (\mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}r_{0i,j})) \\
 &= \mathcal{J}\omega_0^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}r_{0i,j} \\
 -\mathcal{J}r_{0i,j}^T \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}v_0 &= \mathcal{J}\omega_0^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}v_0 \\
 -\mathcal{J}r_{0i,j}^T \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}J_{T_{i,j}} \dot{q}_j &= \mathcal{J}\omega_0^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}J_{T_{i,j}} \dot{q}_j
 \end{aligned} \tag{146}$$

Neste ponto, utiliza-se a anti-comutatividade do produto vetorial, isto é, $a \times b = -b \times a$:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_j^T J_{T_{i,j}} \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}r_{0i,j} &= -\dot{q}_j^T J_{T_{i,j}} \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}\omega_0 \\
 \mathcal{J}v_0^T \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}r_{0i,j} &= -\mathcal{J}v_0^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}\omega_0
 \end{aligned} \tag{147}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}\omega_0^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times (\mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}r_{0i,j}) &= \mathcal{J}\omega_0^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times (\mathcal{J}\omega_0 \times \mathcal{J}r_{0i,j}) = \mathcal{J}\omega_0^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times (-\mathcal{J}r_{0i,j} \times \mathcal{J}\omega_0) = -\mathcal{J}\omega_0^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}\omega_0 \\
 &= -\mathcal{J}r_{0i,j}^T \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}\omega_0^\times \mathcal{J}r_{0i,j}
 \end{aligned}$$

Substituindo em 146, 147 em 145:

$$\begin{aligned}
 L_T^{i,j} &= m_{i,j} \left[\right. \\
 &\quad \left(\mathcal{J}v_0^T \mathcal{J}v_0 + \mathcal{J}v_0^T (-\mathcal{J}r_{0i,j}^\times) \mathcal{J}\omega_0 + \mathcal{J}v_0^T (J_{T_{i,j}}) \dot{q}_j \right) + \\
 &\quad \left(\mathcal{J}\omega_0^T (-\mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}r_{0i,j}^\times) \mathcal{J}\omega_0 + \mathcal{J}\omega_0^T (\mathcal{J}r_{0i,j}^\times) \mathcal{J}v_0 + \mathcal{J}\omega_0^T (\mathcal{J}r_{0i,j}^\times J_{T_{i,j}}) \dot{q}_j \right) + \\
 &\quad \left(\dot{q}_j^T (J_{T_{i,j}}^T) \mathcal{J}v_0 + \dot{q}_j^T (-J_{T_{i,j}}^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times) \mathcal{J}\omega_0 + \dot{q}_j^T (J_{T_{i,j}}^T J_{T_{i,j}}) \dot{q}_j \right) \\
 &\quad \left. \right] \tag{148}
 \end{aligned}$$

Nota-se que 148 é uma soma ponderada por termos $[\mathcal{J}v_0^T \mathcal{J}\omega_0^T]$ e \dot{q} . Portanto, pode ser estruturada no formato matricial 149:

$$\begin{aligned}
 L_T^{i,j} &= m_{i,j} \left[\right. \\
 &\quad \left[\mathcal{J}v_0^T \quad \mathcal{J}\omega_0^T \right] \begin{bmatrix} I_{3,3} & -\mathcal{J}r_{0i,j}^\times \\ \mathcal{J}r_{0i,j}^\times & -\mathcal{J}r_{0i,j}^\times \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J}v_0 \\ \mathcal{J}\omega_0 \end{bmatrix} + \left[\mathcal{J}v_0^T \quad \mathcal{J}\omega_0^T \right] \begin{bmatrix} J_{T_{i,j}} \\ \mathcal{J}r_{0i,j}^\times J_{T_{i,j}} \end{bmatrix} \dot{q}_j + \\
 &\quad \dot{q}_j^T \begin{bmatrix} J_{T_{i,j}}^T & -J_{T_{i,j}}^T \mathcal{J}r_{0i,j}^\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J}v_0 \\ \mathcal{J}\omega_0 \end{bmatrix} + \dot{q}_j^T \begin{bmatrix} J_{T_{i,j}}^T & J_{T_{i,j}} \end{bmatrix} \dot{q}_j \\
 &\quad \left. \right] \tag{149}
 \end{aligned}$$

A expressão 149 possui a estrutura desejada de parcelas quadráticas da forma $s_m K_m n s_n$. A seguir, o mesmo procedimento é aplicado para a parcela rotacional da energia cinética.

Substituindo a velocidade angular 144 no termo $L_R^{i,j}$ de 142:

$$\begin{aligned}
 L_R^{i,j} &= \mathcal{J} \omega_{i,j}^T \mathcal{J} I_{i,j} \mathcal{J} \omega_{i,j} \\
 &= \left(\mathcal{J} \omega_0^T + \dot{q}^T J_{R_{i,j}}^T \right) \mathcal{J} I_{i,j} \left(\mathcal{J} \omega_0 + J_{R_{i,j}} \dot{q} \right) \\
 &= \left(\mathcal{J} \omega_0^T + \dot{q}^T J_{R_{i,j}}^T \right) \left(\mathcal{J} I_{i,j} \mathcal{J} \omega_0 + \mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} \dot{q} \right) \\
 &= \left(\mathcal{J} \omega_0^T (\mathcal{J} I_{i,j}) \mathcal{J} \omega_0 + \mathcal{J} \omega_0^T (\mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}}) \dot{q} \right) + \left(\dot{q}^T (J_{R_{i,j}}^T \mathcal{J} I_{i,j}) \mathcal{J} \omega_0 + \dot{q}^T (J_{R_{i,j}}^T \mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}}) \dot{q} \right)
 \end{aligned} \tag{150}$$

Analogamente, reescrevendo em formato matricial:

$$\begin{aligned}
 L_R^{i,j} &= \\
 & \left[\mathcal{J} v_0^T \quad \mathcal{J} \omega_0^T \right] \begin{bmatrix} 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & \mathcal{J} I_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \left[\mathcal{J} v_0^T \quad \mathcal{J} \omega_0^T \right] \begin{bmatrix} 0_{3,N_j} \\ \mathcal{J} I_i J_{R_i} \end{bmatrix} \dot{q}_j + \\
 & \dot{q}_j^T \begin{bmatrix} 0_{N_j,3} & J_{R_i}^T \mathcal{J} I_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \dot{q}_j^T \begin{bmatrix} J_{R_{i,j}}^T & J_{R_{i,j}} \end{bmatrix} \dot{q}_j
 \end{aligned} \tag{151}$$

As equações 149 e 151 caracterizam as componentes da energia cinética de um elo arbitrário do robô. As deduções foram ajustadas de modo a formatá-las como uma norma ponderada de velocidades das dinâmicas interna \dot{q} e externa $\dot{x}_0 = [\mathcal{J} v_0, \mathcal{J} \omega_0]$. Somando as duas parcelas:

$$\begin{aligned}
 L_T^{i,j} + L_R^{i,j} &= \\
 & \left[\mathcal{J} v_0^T \quad \mathcal{J} \omega_0^T \right] \begin{bmatrix} m_{i,j} I_{3,3} & -m_{i,j} \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \\ m_{i,j} \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times & \mathcal{J} I_i - m_i \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \\
 & \left[\mathcal{J} v_0^T \quad \mathcal{J} \omega_0^T \right] \begin{bmatrix} m_{i,j} J_{T_{i,j}} \\ \mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times J_{T_{i,j}} \end{bmatrix} \dot{q}_j + \\
 & \dot{q}_j^T \begin{bmatrix} m_{i,j} J_{T_{i,j}}^T & J_{R_{i,j}}^T \mathcal{J} I_{i,j} - m_{i,j} J_{T_{i,j}}^T \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \dot{q}_j^T \begin{bmatrix} J_{R_{i,j}}^T \mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j} J_{T_{i,j}}^T J_{T_{i,j}} \end{bmatrix} \dot{q}_j
 \end{aligned} \tag{152}$$

A expressão 152 é a energia cinética total de um elo arbitrário da cadeia. As matrizes que ponderam as velocidades \dot{q} e \dot{x}_0 dependem de parâmetros inerciais e posicionais dos elos do robô. Suas terminologias são: matriz de inércia da base (153), matriz de acoplamento dinâmico (154) e matriz de inércia do manipulador (155).

$$H_0^j = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^j m_{i,j} I_{3,3} & -\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \\ \sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times & \sum_{i=1}^j \left(\mathcal{J} I_i - m_i \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \right) \end{bmatrix} \tag{153}$$

$$H_{0m}^j = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^j m_{i,j} J_{T_{i,j}} \\ \sum_{i=1}^j \left(\mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times J_{T_{i,j}} \right) \end{bmatrix} \tag{154}$$

$$H_m^j = \sum_{i=1}^j \left(J_{R_{i,j}}^T \mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j} J_{T_{i,j}}^T J_{T_{i,j}} \right) \tag{155}$$

No paradigma de robôs espaciais de braço único, as matrizes apresentadas são suficientes para caracterizar o modelo dinâmico. A rigor, para que esta formulação se identifique aos resultados de literatura para monomanipuladores (Wilde et al. (2018)), uma pequena correção aditiva deve ser introduzida na matriz de inércia da base para constar a contribuição de energia cinética da base. Neste trabalho, para facilitar os desenvolvimentos algébricos, optou-se por incorporar esta parcela após todos os braços serem considerados. Por outro lado, as matrizes H_{0m} e H_m obtidas até este ponto são idênticas ao cenário de braço único.

Substituindo 153, 154 e 155 em 152, e acrescentando o fator $\frac{1}{2}$ para manter consistência com as definições de energia cinética, tem-se:

$$\begin{aligned} L^j &= \frac{1}{2}(L_T^j + L_R^j) \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_0^j) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_{0m}^j) \dot{q}_j + \dot{q}_j^T (H_{0m}^{jT}) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}_j^T (H_m^j) \dot{q}_j \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0^T & \dot{q}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0^j & H_{0m}^j \\ H_{0m}^{jT} & H_m^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0^T \\ \dot{q}_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (156)$$

Fazendo $N_A = 1$, a estrutura do resultado 156 se identifica à energia cinética de formulações de robôs espaciais de braço único. Como mencionado, a única distinção reside em termos ainda não incorporados na matriz H_0^j , o que não afeta a formato da equação.

A formulação $L = s^T M s$ para energia cinética, sendo s variáveis de velocidade e M uma matriz inercial e geométrica, é de extrema importância em aplicações de modelagem de manipuladores. Particularmente, em robôs de base fixa, tem-se $s = \dot{q}$ e $M = H_m$. Para robôs espaciais de múltiplos braços, os termos s e M são apropriadamente estendidos para contemplar o movimento de todos os braços, bem como os acoplamentos destes entre si e com a base. Apesar disso, a estrutura da energia cinética é mantida, possibilitando o entendimento dinâmico de multi-manipuladores como se fossem mono-manipuladores. Este resultado é demonstrado a seguir.

A construção matemática da ponte entre multi e mono-manipuladores espaciais é iniciada com o cálculo da contribuição do movimento da base robótica para a energia cinética total:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{J} \omega_0^T \mathcal{J} I_0 \mathcal{J} \omega_0 + m_0 \mathcal{J} v_0^T \mathcal{J} v_0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 & \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & \mathcal{J} I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{J} \dot{x}_0^T \begin{bmatrix} m_0 & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & \mathcal{J} I_0 \end{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) \end{aligned} \quad (157)$$

Nota-se que L_0 foi montado seguindo o padrão de norma ponderada por velocidade. A matriz de ponderação obtida é precisamente a contribuição aditiva de H_0^j supracitada.

Portanto, 156 descreve a energia cinética de um braço arbitrário do robô e 157 calcula a contribuição da base. Segundo 141, para obter a energia total, basta somar 156 em todos os braços e acrescentar 157:

$$\begin{aligned}
 L &= L_0 + \sum_{j=1}^{N_A} L^j = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{J} \dot{x}_0^T \begin{bmatrix} m_0 & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & \mathcal{J} I_0 \end{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{J} \dot{x}_0^T \left(\sum_{j=1}^{N_A} H_0^j \right) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \mathcal{J} \dot{x}_0^T \left[\sum_{j=1}^{N_A} (H_{0m}^j \dot{q}_j) \right] + \left[\sum_{j=1}^{N_A} (\dot{q}_j^T H_{0m}^j) \right] \mathcal{J} \dot{x}_0 + \left[\sum_{j=1}^{N_A} (\dot{q}_j^T H_m^j \dot{q}_j) \right] \right\} \quad (158)
 \end{aligned}$$

Objetivando representar as parcelas de 158 como multiplicações matriciais, define-se um vetor de estado estendido $q \in \mathbb{R}^{N_J \times N_A}$ para o espaço das juntas a partir da concatenação dos vetores de junta de cada braço:

$$q = [q_1 \quad \cdots \quad q_i \quad \cdots \quad q_{N_A}] \quad (159)$$

Adicionalmente, as matrizes inerciais devem ser adequadamente estendidas. Isto dá origem à forma geral das matrizes de inércia da base (160), manipulador (162) e acoplamento dinâmico (161), válidas para um número arbitrário de braços:

$$H_0 = \begin{bmatrix} m_0 + \sum_{j=1}^{N_A} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} I_{3,3} \right) & - \sum_{j=1}^{N_A} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \right) \\ \sum_{j=1}^{N_A} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \right) & \mathcal{J} I_0 + \sum_{j=1}^{N_A} \left(\sum_{i=1}^j \left(\mathcal{J} I_i - m_i \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \mathcal{J} r_{0,i,j}^\times \right) \right) \end{bmatrix} \quad (160)$$

$$H_{0m} = [H_{0m}^1 \quad \cdots \quad H_{0m}^{N_A}] \quad (161)$$

$$H_m = \begin{bmatrix} H_m^1 & \cdots & 0_{N_{N_A}, N_{N_A}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{N_1, N_1} & \cdots & H_m^{N_A} \end{bmatrix} \quad (162)$$

Observa-se que a matriz do manipulador H_m concentra contribuições "intrínsecas", evidenciado pelo seu formato de matriz identidade em blocos. Por outro lado, a matriz de acoplamento H_{0m} reúne, em cada bloco constituinte, o acoplamento entre base e um braço específico, de modo que blocos distintos descrevem o acoplamento dinâmico entre diferentes braços do robô.

Com tais construções, os somatórios de 158 podem ser substituídos por produtos matriciais envolvendo o vetor estendido q e as matrizes H_0 , H_{0m} e H_m :

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_0) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_{0m}) \dot{q} + \dot{q}^T (H_{0m}^T) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T (H_m) \dot{q} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{J} \dot{x}_0^T \quad \dot{q} \right] \begin{bmatrix} H_0 & H_{0m} \\ H_{0m}^T & H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (163)
 \end{aligned}$$

A formulação 163 da energia cinética do robô espacial de múltiplos braços possui o mesmo formato do análogo de braço único 156. Isto significa que o desenvolvimento das equações de movimento pela abordagem Lagrangiana independe do número de braços considerados.

Naturalmente, o caso $N_A = 1$ é consistente com os resultados de literatura para mono-manipuladores espaciais. Para $N_A = 2$, tem-se o modelo *dual-arm*, que é de grande relevância no cenário atual de robótica espacial, principalmente em aplicações de *detumbling*.

APÊNDICE B

Momento

A energia cinética do robô espacial, definida pela Equação 163, é dependente de duas variáveis de estado: q e $\mathcal{J}\dot{x}_0$. Entretanto, de acordo com a abordagem Lagrangiana, somente as variáveis da dinâmica interna q podem ser qualificadas como coordenadas generalizadas (vide C). Isto significa que as equações de movimento de Euler-Lagrange são capazes de produzir somente soluções de q , não de $\mathcal{J}x_0$. Logo, resolver o modelo dinâmico requer outro conjunto de equações envolvendo as variáveis de estado. Este equacionamento buscado, juntamente com as EDPs de Euler-Lagrange, constitui um sistema de equações cuja solução é q e $\mathcal{J}x_0$.

Na vertente GJM, o segundo conjunto de equações de movimento que correlaciona q e $\mathcal{J}x_0$ decorre de vínculos Newtonianos de momento. Enquanto a Lagrangiana corresponde as duas dinâmicas através da energia cinética, os vínculos em questão fazem uso do momento linear e angular do sistema robótico para equacionar q e $\mathcal{J}x_0$. Matematicamente, o procedimento para obtenção destas relações é análogo à construção da Lagrangiana: equações cinemáticas são substituídas nas definições de momentos linear e angular e desenvolvimentos algébricos são efetuados de modo a evidenciar as incógnitas dinâmicas segundo uma estrutura de produto matricial. Os vínculos assumem formatos particularmente vantajosos em situações em que o robô parte do repouso e não interage com outros objetos (operação *stand-alone*), haja vista que nestas condições os momentos são nulos e conservados.

Por definição, os momentos linear e angular do multi-manipulador seguem as relações 164 e 165. Os termos $\mathcal{J}v_{i,j}$ e $\mathcal{J}\omega_{i,j}$ são, respectivamente, as velocidades linear e angular do i -ésimo elo do j -ésimo braço com respeito ao referencial inercial. Os termos $m_{i,j}$, $\mathcal{J}I_{i,j}$

e ${}^{\mathcal{J}}r_{i,j}$ são a massa, tensor de inércia e posição inercial do i -ésimo elo do j -ésimo braço.

$$P^M = \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j \left(m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}v_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j P_{i,j}^M \quad (164)$$

$$L^M = \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j \left({}^{\mathcal{J}}I_{i,j} {}^{\mathcal{J}}\omega_{i,j} + m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}r_{i,j} \times {}^{\mathcal{J}}v_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j L_{i,j}^M \quad (165)$$

Neste ponto, é importante destacar que neste trabalho o momento angular 165 é calculado em relação ao referencial inercial. Isto é evidenciado pelo uso do vetor posição ${}^{\mathcal{J}}r_{i,j}$. Em literatura, este vínculo é desenvolvido utilizando o vetor posição ${}^{\mathcal{J}}r_{0i,j}$. O referenciamento do momento angular na base robótica em vez do sistema inercial traz simplificações consideráveis ao formato final dos vínculos, facilitando a obtenção do modelo analítico do robô. De fato, o referenciamento inercial apresentado aqui é mais geral que o constante em literatura, de modo que o primeiro pode ser diretamente reduzido ao segundo, mas a recíproca não é válida. As implicações destas simplificações serão discutidas ao longo do texto.

Conforme proposto no artigo original de Umetani e Yoshida (1989), os momentos P e L são empilhados em formato matricial. Esta representação permite escrever os vínculos em termos das matrizes dinâmicas H_0 e H_{0m} , como será demonstrado adiante.

$$M = \begin{bmatrix} P_M \\ L_M \end{bmatrix} + M_0 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j P_{i,j}^M \\ \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j L_{i,j}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_0^M \\ L_0^M \end{bmatrix} \quad (166)$$

sendo M_0 o momento inercial da base, discutido adiante.

Inicialmente, desenvolve-se o vínculo de momento linear. O objetivo é correlacioná-lo com as variáveis de velocidade q e ${}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0$. Para isto, a velocidade linear 143 é substituída em 164. Nota-se que, por motivos de conveniência algébrica, a expressão de velocidade utilizada aqui é aquela de formato matricial, apresentada no Apêndice A.

$$\begin{aligned} P_{i,j}^M &= m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}v_{i,j} = \\ &= m_{i,j} \left({}^{\mathcal{J}}v_0 + {}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}r_{0i,j} + J_{T_{i,j}} \dot{q} \right) \\ &= m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}v_0 + m_{i,j} ({}^{\mathcal{J}}\omega_0^\times {}^{\mathcal{J}}r_{0i,j}) + m_{i,j} J_{T_{i,j}} \dot{q} \\ &= m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}v_0 + m_{i,j} (-{}^{\mathcal{J}}r_{0i,j}^\times {}^{\mathcal{J}}\omega_0) + m_{i,j} J_{T_{i,j}} \dot{q} \\ &= (m_{i,j}) {}^{\mathcal{J}}v_0 + (-m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}r_{0i,j}^\times) {}^{\mathcal{J}}\omega_0 + (m_{i,j} J_{T_{i,j}}) \dot{q} \end{aligned} \quad (167)$$

Na penúltima passagem, foi utilizada a anti-comutatividade do produto vetorial para evidenciar ${}^{\mathcal{J}}\omega_0$. Para fins de referência futura, a expressão final do momento linear do i -ésimo elo do j -ésimo braço é dada em 168.

$$P_{i,j}^M = (m_{i,j}) {}^{\mathcal{J}}v_0 + (-m_{i,j} {}^{\mathcal{J}}r_{0i,j}^\times) {}^{\mathcal{J}}\omega_0 + (m_{i,j} J_{T_{i,j}}) \dot{q} \quad (168)$$

Para desenvolver o momento angular, as velocidades linear e angular são substituídas em 165. Novamente, são empregados os formatos matriciais 143 e 144 para as velocidades.

$$\begin{aligned}
 L_{i,j}^M &= \mathcal{J} I_{i,j} \mathcal{J} \omega_{i,j} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times \mathcal{J} v_{i,j} = \\
 &= \mathcal{J} I_{i,j} (\mathcal{J} \omega_0 + J_{R_{i,j}} \dot{q}) + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times (\mathcal{J} v_0 + \mathcal{J} \omega_0 \times \mathcal{J} r_{0i,j} + J_{T_{i,j}} \dot{q}) \\
 &= \mathcal{J} I_{i,j} \mathcal{J} \omega_0 + \mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} \dot{q} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times \mathcal{J} v_0 + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times \mathcal{J} \omega_0 \times \mathcal{J} r_{0i,j} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times J_{T_{i,j}} \dot{q} \\
 &= \mathcal{J} I_{i,j} \mathcal{J} \omega_0 + \mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} \dot{q} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times \mathcal{J} v_0 + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times (-\mathcal{J} r_{0i,j} \times \mathcal{J} \omega_0) + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times J_{T_{i,j}} \dot{q} \\
 &= \mathcal{J} I_{i,j} \mathcal{J} \omega_0 + \mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} \dot{q} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j}^\times \mathcal{J} v_0 - m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j}^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \mathcal{J} \omega_0 + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j} \times J_{T_{i,j}} \dot{q} \\
 &= (m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j}^\times) \mathcal{J} v_0 + (\mathcal{J} I_{i,j} - m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j}^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times) \mathcal{J} \omega_0 + (\mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j}^\times J_{T_{i,j}}) \dot{q}
 \end{aligned} \tag{169}$$

Nesta etapa, também foi utilizado a anti-comutatividade do produto vetorial para evidenciar $\mathcal{J} \omega_0$. A partir deste ponto, deve-se retomar a discussão sobre referenciamento do momento angular. Como preestabelecido, neste trabalho o referencial adotado é o inercial, embora a literatura utilize a própria base robótica. A fim de que a formulação final possa ser simplificada para o segundo caso, os vetores posição $r_{i,j}$ são reescritos como $r_{i,j} = r_0 + r_{0i,j}$, conforme 170. Em última análise, esta decomposição é refletida para o momento angular, separando-os em duas parcelas: a quantidade de movimento em relação à base, e o momento angular inercial da própria base. Naturalmente, se a segunda componente for ignorada, o resultado é reduzido àquele de literatura.

$$\begin{aligned}
 L_{i,j}^M &= (m_{i,j} (\mathcal{J} r_{0i,j} + \mathcal{J} r_0)^\times) \mathcal{J} v_0 + (\mathcal{J} I_{i,j} - m_{i,j} (\mathcal{J} r_{0i,j} + \mathcal{J} r_0)^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times) \mathcal{J} \omega_0 \\
 &\quad + (\mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j} (\mathcal{J} r_{0i,j} + \mathcal{J} r_0)^\times J_{T_{i,j}}) \dot{q}
 \end{aligned} \tag{170}$$

A relação 170 é trabalhada para isolar os termos dependentes de $\mathcal{J} r_{0i,j}$ daqueles dependentes de $\mathcal{J} r_0$:

$$\begin{aligned}
 L_{i,j}^M &= (m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times) \mathcal{J} v_0 + (\mathcal{J} I_{i,j} - m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times) \mathcal{J} \omega_0 + (\mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times J_{T_{i,j}}) \dot{q} \\
 &\quad + (m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times) \mathcal{J} v_0 + (-m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times) \mathcal{J} \omega_0 + (m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times J_{T_{i,j}}) \dot{q}
 \end{aligned} \tag{171}$$

Portanto, 168 e 171 quantificam os momentos linear e angular de cada elo do robô em uma estrutura de produto matricial As , sendo A uma matriz dependente de parâmetros inerciais e posicionais e s uma das variáveis dinâmicas \dot{q} , $\mathcal{J} v_0$ e $\mathcal{J} \omega_0$. Observa-se que esta formatação é distinta daquela obtida na energia cinética, sendo esta quadrática nas variáveis dinâmicas. Os momentos, por outro lado, são lineares nas velocidades.

A próxima etapa requer substituição de 168 e 171 em 166, culminando na forma

matricial do vínculo Newtoniano:

$$\begin{aligned}
 M_{i,j} &= \begin{bmatrix} P_{i,j}^M \\ L_{i,j}^M \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (m_{i,j})^{\mathcal{J}} v_0 + (-m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_{0i,j}^{\times})^{\mathcal{J}} \omega_0 + (m_{i,j}^{\mathcal{J}} J_{T_{i,j}}) \dot{q} \\ (m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_{0i,j}^{\times})^{\mathcal{J}} v_0 + (\mathcal{J} I_{i,j} - m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_{0i,j}^{\times} \mathcal{J} r_{0i,j}^{\times})^{\mathcal{J}} \omega_0 + (\mathcal{J} I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_{0i,j}^{\times} \mathcal{J} J_{T_{i,j}}) \dot{q} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0_{3,1} \\ (m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_0^{\times})^{\mathcal{J}} v_0 + (-m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_0^{\times} \mathcal{J} r_{0i,j}^{\times})^{\mathcal{J}} \omega_0 + (m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_0^{\times} \mathcal{J} J_{T_{i,j}}) \dot{q} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{172}$$

Neste ponto, o momento $M_{i,j}$ é separado em suas componentes: o momento do elo em relação à base, de vetor posição $\mathcal{J} r_{0i,j}$; e o momento da base com respeito ao referencial inercial, com vetor posição $\mathcal{J} r_0$. Além disso, as parcelas de cada linha são reescritas como produtos matriciais com as variáveis dinâmicas \dot{q} e $\mathcal{J} v_0, \mathcal{J} \omega_0$:

$$\begin{aligned}
 M_{i,j} &= \begin{bmatrix} m_{i,j} I_{3,3} & -m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_{0i,j}^{\times} \\ m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_{0i,j}^{\times} & \mathcal{J} I_{i,j} - m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_{0i,j}^{\times} \mathcal{J} r_{0i,j}^{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{i,j}^{\mathcal{J}} J_{T_{i,j}} \\ I_{i,j} J_{R_{i,j}} + m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_{0i,j}^{\times} \mathcal{J} J_{T_{i,j}} \end{bmatrix} \dot{q} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_0^{\times} & -m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_0^{\times} \mathcal{J} r_{0i,j}^{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3,N} \\ m_{i,j}^{\mathcal{J}} r_0^{\times} \mathcal{J} J_{T_{i,j}} \end{bmatrix} \dot{q}
 \end{aligned} \tag{173}$$

A expressão 173 é a forma matricial do momento de um elo arbitrário da cadeia. Conforme ressaltado ao longo do desenvolvimento, há uma divisão explícita entre a componente referenciada à base robótica e o momento inercial da própria base. Para que o momento global do multi-manipulador possa ser formulado, é necessário que o momento da base M_0 seja computado. Isto é feito avaliando 164 e 165 para $i = j = 0$ e colocando os resultados em formato matricial, em procedimento idêntico ao equacionamento dos elos:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= \begin{bmatrix} P_0^M \\ L_0^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0^{\mathcal{J}} v_0 \\ \mathcal{J} I_0 \mathcal{J} \omega_0 + m_0^{\mathcal{J}} r_0^{\times} \mathcal{J} v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 I_{3,3} & 0_{3,3} \\ m_0^{\mathcal{J}} r_0^{\times} & \mathcal{J} I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} m_0 I_{3,3} & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & \mathcal{J} I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ m_0^{\mathcal{J}} r_0^{\times} & 0_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{174}$$

O momento global do multi-manipulador é o somatório do momento da base 174 e dos

momentos de todos os elos 173 do robô, conforme descrito em 166:

$$\begin{aligned}
 M &= \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} I_{3,3} \right) & - \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) \\ \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) & \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j \left(\mathcal{J} I_{i,j} - m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} T_{i,j} \right) \\ \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j \left(I_{i,j} \mathcal{J} R_{i,j} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \mathcal{J} T_{i,j} \right) \right) \end{bmatrix} \dot{q} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times \right) & - \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0_{3,N} \\ \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times \mathcal{J} T_{i,j} \right) \end{bmatrix} \dot{q} \\
 &+ \begin{bmatrix} m_0 I_{3,3} & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & \mathcal{J} I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ m_0 \mathcal{J} r_0^\times & 0_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{175}$$

De 174, observa-se que o momento da base possui duas componentes. A primeira delas puramente inercial, isto é, dependente apenas da massa m_0 e do tensor de inércia $\mathcal{J} I_0$. A segunda é função do vetor posição $\mathcal{J} r_0$ da base. A partir da estrutura de 175, nota-se que a componente inercial de M_0 pode ser incorporada no termo de momento calculado com respeito ao referencial da base. Por sua vez, a segunda componente deve ser inserida na parcela de momento inercial da própria base. Assim:

$$\begin{aligned}
 M &= \\
 &= \begin{bmatrix} \left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \right) + m_0 \right] I_{3,3} & - \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) \\ \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) & \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j \left(\mathcal{J} I_{i,j} - m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) \right) + I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} T_{i,j} \right) \\ \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j \left(I_{i,j} \mathcal{J} R_{i,j} + m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \mathcal{J} T_{i,j} \right) \right) \end{bmatrix} \dot{q} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ \left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j \left(m_{i,j} \right) \right) + m_0 \right] \mathcal{J} r_0^\times & - \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j \left(m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} v_0 \\ \mathcal{J} \omega_0 \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0_{3,N} \\ \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times \mathcal{J} T_{i,j} \right) \end{bmatrix} \dot{q}
 \end{aligned} \tag{176}$$

As duas partes iniciais de 176 computam o momento do multi-manipulador em torno da base. As duas partes finais, relacionadas ao momento da base, contemplam termos passíveis de simplificação:

$$\left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j \left(m_{i,j} \right) \right) + m_0 \right] \mathcal{J} r_0^\times = m_T \mathcal{J} r_0^\times \tag{177}$$

A expressão $\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j \left(m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times \right) \right)$ pode ser simplificada se escrita em função do vetor posição do centro de massa $\mathcal{J} r_C$ do robô:

$$\begin{aligned}
 r_C &= \frac{1}{m_T} \left(\sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_{i,j}) + m_0 \mathcal{J} r_0 \right) = \frac{1}{m_T} \left(\sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j (m_{i,j} (\mathcal{J} r_{0i,j} + \mathcal{J} r_0)) + m_0 \mathcal{J} r_0 \right) \\
 &= \frac{1}{m_T} \left(\sum_{j=1}^{N_a} \sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j} + m_{i,j} \mathcal{J} r_0) + m_0 \mathcal{J} r_0 \right) \\
 &= \frac{1}{m_T} \left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i}) \right) + \left(\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_0 \right) \right) + m_0 \mathcal{J} r_0 \right] \\
 &= \frac{1}{m_T} \left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}) \right) + \left(\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} + m_0 \right) \right) \mathcal{J} r_0 \right] \\
 &= \frac{1}{m_T} \left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}) \right) + m_T \mathcal{J} r_0 \right] \\
 &= \frac{1}{m_T} \left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}) \right) \right] + \mathcal{J} r_0
 \end{aligned} \tag{178}$$

Isolando o termo de somatório:

$$\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i}) \right) = m_T (\mathcal{J} r_C - \mathcal{J} r_0) = m_T \mathcal{J} r_{0C} \tag{179}$$

Por fim, inserindo o produto vetorial:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times \mathcal{J} r_{0i,j}^\times) \right) &= \left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j (m_{i,j} \mathcal{J} r_{0i,j}^\times) \right) \right] \mathcal{J} r_0^\times \\
 &= m_T \mathcal{J} r_{0C}^\times \mathcal{J} r_0^\times
 \end{aligned} \tag{180}$$

O último termo a ser simplificado é:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} \mathcal{J} r_0^\times J_{T_{i,j}} \right) &= - \left[\sum_{j=1}^{N_a} \left(\sum_{i=1}^j m_{i,j} J_{T_{i,j}}^\times \right) \right] \mathcal{J} r_0 \\
 &= -J_{TS}^\times \mathcal{J} r_0
 \end{aligned} \tag{181}$$

sendo o termo J_{TS} é um dos blocos do matriz de acoplamento dinâmico H_{0m} de mono-manipuladores espaciais.

As simplificações apresentadas permitem denotar as matrizes associadas à parcela de momento inercial da base como:

$$H_0^C = \begin{bmatrix} 0_{3,3} & 0_{3,3} \\ m_T \mathcal{J} r_0 & m_T \mathcal{J} r_0 C^\times \mathcal{J} r_0^\times \end{bmatrix} \tag{182}$$

$$H_{0m}^C = \begin{bmatrix} 0_{3,N} \\ -J_{TS}^\times \mathcal{J} r_0 \end{bmatrix} \tag{183}$$

Ademais, as duas primeiras matrizes de 176 – constituintes da parcela de momento do robô relativa à base – são reconhecidamente as matrizes de inércia da base H_0 e acoplamento dinâmico H_{0m} do multi-manipulador (vide Apêndice A). Portanto, 176 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} M &= M^{MB} + M^B \\ &= \left(H_0^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 + H_{0m} \dot{q} \right) + \left(H_0^C \mathcal{J} \dot{x}_0 + H_{0m}^C \dot{q} \right) \\ &= \left(H_0 + H_0^C \right)^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 + \left(H_{0m} + H_{0m}^C \right) \dot{q} \end{aligned} \quad (184)$$

O resultado 184 demonstra que o momento de um robô espacial é composto por duas componentes aditivas: M^{MB} , que designa a parcela de momento do robô calculada com respeito a um referencial solidário à base; M^B , sendo o momento da própria base com respeito a um referencial inercial. A parcela M^{MB} é completamente caracterizada por matrizes dinâmicas do próprio modelo do multi-manipulador, enquanto que a outra componente depende de matrizes não pertencentes ao *framework* característico da formulação de robôs espaciais.

O vínculo de momento utilizado em literatura para construção da solução dinâmica do manipulador espacial considera somente o termo M^{MB} . De fato, o trabalho pioneiro de Masutani, Miyazaki e Arimoto (1989) explicita que a Lagrangiana da dinâmica espacial é simplificada pelo momento do robô em torno da base – e não o momento global do robô – hipótese também explicitada em Wilde et al. (2018). De fato, este vínculo é incorporado na literatura consolidada do GJM juntamente com a hipótese de momento nulo e conservado, isto é:

$$\begin{aligned} M &= 0_{1,3} \\ \dot{M} &= 0_{1,3} \end{aligned} \quad (185)$$

Ignorando o termo M^B , esta hipótese reduz-se a:

$$\begin{aligned} M^{MB} &= 0_{1,3} \\ \dot{M}^{MB} &= 0_{1,3} \end{aligned} \quad (186)$$

De 184, tem-se:

$$H_0^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 + H_{0m} \dot{q} = 0_{1,3} \quad (187)$$

Evidenciando $\mathcal{J} \dot{x}_0$ em 187:

$$\mathcal{J} \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} \quad (188)$$

O resultado é o mesmo obtido em Wilde et al. (2018) para mono-manipuladores espaciais. Aqui, fica demonstrado sua validade para múltiplos braços, desde que H_0 , H_{0m} e \dot{q} sejam devidamente estendidos.

A hipótese sobre a derivada temporal $\dot{M} = 0_{1,3}$ é uma condição mais fraca que a condição $M = 0$. Se o momento é identicamente nulo, então ele é necessariamente conservado em toda a operação do robô. Porém, pode-se ter uma conservação de momento $\dot{M} = 1, 3$ mesmo que o sistema não parta do repouso ($M \neq 0_{1,3}$).

Portanto, a equação B é a formulação consolidada em literatura de manipuladores espaciais para o cálculo da dinâmica da base, segundo a vertente GJM. Para sua dedução, duas hipóteses foram necessárias:

- H1) O momento do robô é calculado apenas com respeito a um referencial solidário à base;
- H2) O momento do robô é identicamente nulo em toda a sua operação.

É válido indagar a validade das hipóteses estabelecidas. Por um lado, H2) significa que o modelo possui validade nominal enquanto o robô operar em *stand-alone* partindo do repouso. Sob certas condições operacionais, isto pode ser cumprido com boa aproximação. Porém, H1) ignora a quantidade de movimento inercial da base, que naturalmente responde a qualquer estímulo de juntas no paradigma *free-floating*. Se a inércia da base não for suficientemente maior que a inércia dos braços – implicando em um movimento inercial não desprezível – a hipótese H1) pode prejudicar seriamente a fidelidade do modelo dinâmico do multi-manipulador.

Embora o modelo de vínculos apresentado seja geral, o escopo deste trabalho foi definido para considerar a dinâmica externa conforme literatura consolidada. O caso geral pode ser analisado em trabalhos futuros.

APÊNDICE C

Equações de movimento

Conforme discutido no Apêndice A, as dinâmicas interna e externa do robô são resolvidas a partir de um sistema de equações composto pelas equações de Euler-Lagrange e por vínculos de momento (conforme Equação 189). Neste trabalho, será considerado apenas o momento em torno da base robótica (vide seção B), conforme abordagens consolidadas de literatura ((WILDE et al., 2018)). Porém, nenhuma hipótese será feita sobre a natureza do momento, ou seja, não é imposto que o robô opere em *stand-alone*. As equações de Euler-Lagrange são aplicadas sobre a energia cinética, conforme deduzido no Apêndice A.

O sistema de equações que modela a dinâmica acoplada do multi-manipulador é apresentado em 189. É digno de nota que este *framework* foi introduzido em Masutani, Miyazaki e Arimoto (1989) para robôs espaciais de braço único em modo *stand-alone*, mas aqui fica demonstrado que também é válido no caso geral.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L \right) - \frac{\partial}{\partial q} L = \tau \\ H_0^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 + H_{0m} \dot{q} = M \end{cases} \quad (189)$$

sendo H_0 e H_{0m} as matrizes de inércia e acoplamento dinâmico do multi-manipulador (conforme definições do Apêndice A), L a energia cinética total, M o momento e q o vetor de junta estendido para múltiplos braços. O vetor de torques de junta τ é estendido para o paradigma de múltiplos braços utilizando a mesma convenção do vetor de juntas.

A expressão da energia cinética L é resgatada do Apêndice A para facilitar os desenvolvimentos seguintes:

$$L = \frac{1}{2} \left[\mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_0) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_{0m}) \dot{q} + \dot{q}^T (H_{0m}^T) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T (H_m) \dot{q} \right] \quad (190)$$

As equações 189 e 190 reúnem todas as informações necessárias para resolver a dinâmica do multi-manipulador. Porém, existem dois procedimentos predominantes e distintos

constantes em literatura para solucionar o sistema 190, geralmente vistos em aplicações de mono-manipuladores em *stand-alone*. Ambos iniciam-se com a escolha do vetor de juntas q como coordenadas generalizadas.

- P1) A Lagrangiana L é inicialmente aplicada nas equações de Euler-Lagrange e as derivadas parciais são desenvolvidas considerando $\mathcal{J}x_0, \mathcal{J}\dot{x}_0$ independentes de q, \dot{q} . Após cálculos algébricos, o vínculo de momento B é aplicado, culminando em um equacionamento dependente apenas de q e derivadas temporais, que é então solucionado numericamente;
- P2) O vínculo de momento B é inicialmente aplicado na Lagrangiana L , resultando em uma função somente de q e derivadas temporais. A expressão resultante é substituída nas equações de Euler-Lagrange que, após cálculos algébricos, retorna um equacionamento dependente apenas de q e derivadas temporais e resolvido numericamente.

Objetivando identificar a influência dos procedimentos P1) e P2) no modelo dinâmico do multi-manipulador, ambos foram equacionados. A seguir, são apresentados os desenvolvimentos matemáticos de cada cenário, bem como as comparações entre o formato final do modelo produzido em cada caso. Por fim, a validade física dos dois procedimentos são analisadas do ponto de vista da mecânica Lagrangiana.

C.1 P1) Lagrangiana multi-estado

Nesta abordagem, a primeira etapa é a substituição da função de energia cinética L 190 nas equações de Euler-Lagrange de 189. Como L depende das variáveis das duas dinâmicas, a saber, \dot{q} e $\mathcal{J}\dot{x}_0$, este método é denominado *Lagrangiana multi-estado*. Neste tratamento, as variáveis da dinâmica externa são consideradas independentes da dinâmica interna, implicando em derivadas nulas entre estados. Este é o procedimento adotado em Wilde et al. (2018).

O desenvolvimento das equações de Euler-Lagrange requer o cálculo da derivada da Lagrangiana em relação às variáveis: velocidade \dot{q} ; posição q . Na sequência, o resultado da derivada em relação a \dot{q} deve ser diferenciado no tempo.

Inicialmente, L é derivado com respeito a \dot{q} . A rigor, esta operação indica uma derivação em relação a cada variável de junta \dot{q}_k , $k = \{1, \dots, N_J\}$, sendo N_J a quantidade total de juntas do multi-manipulador. Então, as saídas de cada diferenciação $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ são concatenadas, resultando em $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Portanto, o objetivo é avaliar, para um k arbitrário, a

expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_0) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_{0m}) \dot{q} + \dot{q}^T (H_{0m}^T) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T (H_m) \dot{q} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_0) \mathcal{J} \dot{x}_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_{0m}) \dot{q}) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\dot{q}^T (H_{0m}^T) \mathcal{J} \dot{x}_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\dot{q}^T (H_m) \dot{q}) \right] \end{aligned} \quad (191)$$

Logo, devem ser analisadas quatro derivadas parciais do tipo $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$. Em todos os casos, os produtos matriciais dos argumentos são reescritos como somatórios, a fim de reduzi-los operações escalares. Vale reforçar que, do ponto de vista Lagrangiano, as posições q e velocidades \dot{q} generalizadas são mutuamente independentes. Logo, como consequência da adoção de q como coordenada generalizada, deve-se ter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} q &= 0_{N,N} \\ \frac{\partial}{\partial q} \dot{q} &= 0_{N,N} \end{aligned} \quad (192)$$

Além disso, nota-se que, por hipótese desta formulação, os q_k, \dot{q}_k são mutuamente ortogonais, de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j &= \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \\ \frac{\partial}{\partial q_k} q_j &= \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases} \end{aligned} \quad (193)$$

As condições 193 e 192 são fisicamente coerentes. A primeira estabelece que posições e velocidades angulares das juntas (para juntas rotacionais) são mutuamente independentes, o que é interpretado da seguinte forma: fora restrições cinemáticas, qualquer posição de uma dada junta pode ser obtida para qualquer velocidade e vice-versa. A segunda relação diz respeito à independência entre juntas: as posições e velocidades de uma dada junta pode ser modificada independentemente das demais.

Dadas as hipóteses, a primeira derivada a ser computada é do termo $\mathcal{J} \dot{x}_0^T (H_0) \mathcal{J} \dot{x}_0$. Vale reforçar que nesta abordagem $\mathcal{J} \dot{x}_0$ é tratado como se fosse independente de \dot{q}_k , de modo que derivadas de componentes de $\mathcal{J} \dot{x}_0$ em relação a \dot{q}_k são nulas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\mathcal{J} \dot{x}_0^T H_0 \mathcal{J} \dot{x}_0) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (\mathcal{J} \dot{x}_{0_i} H_{0_{i,j}} \mathcal{J} \dot{x}_{0_j}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \mathcal{J} \dot{x}_{0_j} \right) H_{0_{i,j}} \mathcal{J} \dot{x}_{0_j} + \mathcal{J} \dot{x}_{0_i} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} H_{0_{i,j}} \right) \mathcal{J} \dot{x}_{0_j} + \mathcal{J} \dot{x}_{0_i} H_{0_{i,j}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \mathcal{J} \dot{x}_{0_j} \right) \right] \quad (194) \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 [0 + 0 + 0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nesta passagem, todas as derivadas de H_0 foram feitas nulas. De fato, os termos de H_0 são dependentes de parâmetros inerciais e posições dos elos do robô, os quais independem de \dot{q} . Como as variáveis da dinâmica da base também são tomadas como independentes de \dot{q} , as derivadas de qualquer elemento de H_0 em relação à velocidade \dot{q} são iguais a zero. Portanto, o empilhamento matricial de $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} H_0$ resulta em um vetor nulo:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left({}^{\mathcal{J}} \dot{x}_0^T H_0 {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 \right) = 0_{1,N} \quad (195)$$

Para a diferenciação de ${}^{\mathcal{J}} \dot{x}_0^T (H_{0m}) \dot{q}$, em virtude dos mesmos argumentos listados sobre H_0 , tem-se que neste tratamento a matriz H_{0m} independe de \dot{q} . Assim, escrevendo as multiplicações matriciais como somatórios e aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left({}^{\mathcal{J}} \dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^N \left({}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} H_{0m_{i,j}} \dot{q}_j \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_j} \right) H_{0m_{i,j}} \dot{q}_j + {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} H_{0m_{i,j}} \right) \dot{q}_j + {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} H_{0m_{i,j}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^N \left[0 + 0 + {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} H_{0m_{i,j}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) \right] \end{aligned} \quad (196)$$

Para desenvolver o termo não identicamente nulo da expressão anterior, o índice i do somatório é fixado e a soma em j é aberta. A parcela ${}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i}$ pode ser destacada do somatório, pois independe de j . Assim, devido à ortogonalidade das coordenadas generalizadas, somente um termo da soma é não-nulo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left[{}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} H_{0m_{i,j}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) \right] &= {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} \sum_{j=1}^N \left[H_{0m_{i,j}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) \right] \\ &= {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} \left[H_{0m_{i,1}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_1 \right) + \cdots + H_{0m_{i,k}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) + \cdots + H_{0m_{i,N}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_N \right) \right] \\ &= {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} H_{0m_{i,j}} \left[H_{0m_{i,1}}(0) + \cdots + H_{0m_{i,k}}(1) + \cdots + H_{0m_{i,N}}(0) \right] \\ &= {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} \left[H_{0m_{i,k}}(1) \right] \\ &= {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} H_{0m_{i,k}} \end{aligned} \quad (197)$$

Retornando o somatório no índice i , a expressão obtida é reconhecidamente um produto matricial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left({}^{\mathcal{J}} \dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^6 \left({}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} H_{0m_{i,k}} \right) = \sum_{i=1}^6 \left(H_{0m_{k,i}}^T {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_{0_i} \right) = H_{0m_k}^T {}^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (198)$$

O termo resultante $H_{0m_k}^T$ denota a k -ésima linha de H_{0m}^T . Nesta passagem, os escalares do argumento do somatório foram comutados na multiplicação, justificando a transposição dos termos de H_{0m} . As componentes de ${}^{\mathcal{J}} \dot{x}_0^T$ são iguais as ${}^{\mathcal{J}} \dot{x}_0$ por se tratar de um vetor.

Esta permutação é feita para fins de padronização da dedução, que busca manter todas as variáveis dinâmicas do lado direito das operações matriciais.

Esta relação define a derivada de ${}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T (H_{0m}) \dot{q}$ com respeito a \dot{q}_k , para um dado índice k . Observa-se que o resultado obtido para esta diferenciação também é dependente de k . Empilhando os operadores $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$, para todo k :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left({}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 H_{0m} \dot{q} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left({}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 H_{0m} \dot{q} \right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_N} \left({}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 H_{0m} \dot{q} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0m_1}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \\ \vdots \\ H_{0m_N}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0m_1}^T \\ \vdots \\ H_{0m_N}^T \end{bmatrix} {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 = H_{0m}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \quad (199)$$

Os termos empilhados $H_{0m_k}^T$ empilhados correspondem, por definição, às linhas da matriz H_{0m}^T . Portanto, a derivada buscada é:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left({}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} \right) = H_{0m}^T \dot{x}_0 \quad (200)$$

As deduções da diferenciação de $\dot{q}^T H_{0m}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0$ são completamente análogas às de ${}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q}$. As multiplicações matriciais são identificadas a um somatório duplo e as componentes de H_{0m}^T e ${}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0$ são consideradas independentes de \dot{q} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\dot{q}^T H_{0m}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^N \left(\dot{q}_j^T H_{0m_{j,i}}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) H_{0m_{j,i}}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} + \dot{q}_j \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} H_{0m_{j,i}}^T \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} + \dot{q}_j^T H_{0m_{j,i}}^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) H_{0m_{j,i}}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} + 0 + 0 \right] \end{aligned} \quad (201)$$

Na segunda passagem, os índices i, j de H_{0m}^T foram permutados, fazendo $H_{0m_{i,j}}^T = H_{0m_{j,i}}^T$. Investigando apenas o somatório do índice j e utilizando o argumento de ortogonalidade de \dot{q} (193), tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) H_{0m_{j,i}}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \right] &= \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) H_{0m_{j,i}}^T \right] {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_1 \right) H_{0m_{1,i}}^T + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) H_{0m_{k,i}}^T + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_N \right) H_{0m_{N,i}}^T \right] {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \\ &= \left[(0)H_{0m_{1,i}}^T + \cdots + (1)H_{0m_{k,i}}^T + \cdots + (0)H_{0m_{N,i}}^T \right] {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \\ &= \left[(1)H_{0m_{k,i}}^T \right] {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \\ &= H_{0m_{k,i}}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \end{aligned} \quad (202)$$

Substituindo este resultado na expressão original, identifica-se uma multiplicação matricial no índice i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\dot{q}^T H_{0m}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^6 \left(H_{0m_{k,i}}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_{0_i} \right) = H_{0m_k}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \end{aligned} \quad (203)$$

Analogamente ao caso anterior, $H_{0m_k}^T$ é a k -ésima linha de H_{0m}^T . Empilhando os operadores para todos os índices k :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_N} \left(\dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0m_1}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \\ \vdots \\ H_{0m_N}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{0m_1}^T \\ \vdots \\ H_{0m_N}^T \end{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0 = H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \quad (204)$$

O resultado final para esta derivada é:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) = H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \quad (205)$$

Por fim, deve-se diferenciar a parcela $\dot{q}^T H_m \dot{q}$. Analogamente aos outros casos, observa-se que a matriz H_m não depende explicitamente de \dot{q} . Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\dot{q}^T H_m \dot{q} \right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\dot{q}_i H_{m_{i,j}} \dot{q}_j \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_i \right) H_{m_{i,j}} \dot{q}_j + \dot{q}_i \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} H_{m_{i,j}} \right) \dot{q}_j + \dot{q}_i H_{m_{i,j}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_i \right) H_{m_{i,j}} \dot{q}_j + 0 + \dot{q}_i H_{m_{i,j}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j \right) \right] \end{aligned} \quad (206)$$

As derivadas parciais constantes da última passagem dependem dos índices i e j , de modo que o artifício de tratar os somatórios individualmente não é aplicável aqui. Logo, as duas somas devem ser expandidas na mesma expressão. Utilizando a ortogonalidade de \dot{q} 193, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\dot{q}^T H_m \dot{q} \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_1 \right) H_{m_{1,j}} \dot{q}_j + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) H_{m_{k,j}} \dot{q}_j + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_N \right) H_{m_{N,j}} \dot{q}_j \right] \right. \\ &+ \left. \left[\dot{q}_i H_{m_{i,1}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_1 \right) + \cdots + \dot{q}_i H_{m_{i,k}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) + \cdots + \dot{q}_i H_{m_{i,N}} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_N \right) \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ \left[0 + \cdots + (1) H_{m_{k,j}} \dot{q}_j + \cdots + 0 \right] + \left[0 + \cdots + \dot{q}_i H_{m_{i,k}} (1) + \cdots + 0 \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(H_{m_{k,j}} \dot{q}_j + \dot{q}_i H_{m_{i,k}} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(H_{m_{k,j}} \dot{q}_j + H_{m_{k,i}}^T \dot{q}_i \right) \end{aligned} \quad (207)$$

Na última passagem, a variável \dot{q}_i permutada com $H_{m_{i,j}}$ para mantê-la no lado direito da multiplicação matricial. Isto resulta na transposição de $H_{m_{i,j}}$. Como a matriz H_m é reconhecidamente simétrica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\dot{q}^T H_m \dot{q} \right) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(H_{m_{k,j}} \dot{q}_j + H_{m_{k,i}}^T \dot{q}_i \right) = H_{m_k} \dot{q} + H_{m_k}^T \dot{q} = H_{m_k} \dot{q} + H_{m_k} \dot{q} = 2H_{m_k} \dot{q} \end{aligned} \quad (208)$$

Montando o empilhamento matricial:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\dot{q}^T H_m \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} (\dot{q}^T H_m \dot{q}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_N} (\dot{q}^T H_m \dot{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2H_{m_1} \dot{q} \\ \vdots \\ 2H_{m_N} \dot{q} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} H_{m_1} \\ \vdots \\ H_{m_N} \end{bmatrix} \dot{q} = 2H_m \dot{q} \quad (209)$$

Portanto, a derivada do termo em questão é:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\dot{q}^T H_m \dot{q}) = 2H_m \dot{q} \quad (210)$$

Com todas as derivadas calculadas, pode-se montar a expressão da derivada da energia cinética. Isto significa substituir 195, 200, 205 e 210 em 191. A rigor, a derivada da energia cinética L foi formulada em termos das componentes q_k , pois este formato é mais coerente do ponto de vista da definição matemática de derivadas. Entretanto, ao longo do texto, os resultados das componentes já foram empilhados matricialmente para produzir a derivada global $\frac{\partial}{\partial \dot{q}}$. Assim, as substituições mencionadas já produzem o resultado buscado para esta etapa do procedimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\mathcal{J} \dot{x}_0^T H_0 \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T H_m \dot{q} + \mathcal{J} \dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} + \dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\mathcal{J} \dot{x}_0^T H_0 \mathcal{J} \dot{x}_0) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\dot{q}^T H_m \dot{q}) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\mathcal{J} \dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q}) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0) \right] \\ &= \frac{1}{2} (0 + 2H_m \dot{q} + H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 + H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0) \\ &= \frac{1}{2} (2H_m \dot{q} + 2H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0) \\ &= H_m \dot{q} + H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (211)$$

Conforme 189, o próximo passo no desenvolvimento das equações de Euler-Lagrange é o cômputo da derivada temporal $\frac{d}{dt}$ de 211. Trata-se de uma simples aplicação da regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L \right) &= \frac{d}{dt} (H_m \dot{q} + H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0) \\ &= \left(\frac{d}{dt} (H_m) \dot{q} + H_m \frac{d}{dt} (\dot{q}) \right) + \left(\frac{d}{dt} (H_{0m}^T) \mathcal{J} \dot{x}_0 + H_{0m}^T \frac{d}{dt} (\mathcal{J} \dot{x}_0) \right) \\ &= \dot{H}_m \dot{q} + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 + H_{0m}^T \mathcal{J} \ddot{x}_0 \end{aligned} \quad (212)$$

A última etapa requer o cálculo das derivadas parciais de L em relação a q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} L &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\mathcal{J} \dot{x}_0^T H_0 \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T H_m \dot{q} + \mathcal{J} \dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} + \dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0) \\ &= -c_m \end{aligned} \quad (213)$$

O termo c_m de 213 é usualmente empregado em literatura para denotar termos dependentes de derivadas parciais da posição de junta q . De forma semelhante ao cálculo das

derivadas com respeito a \dot{q} , as deduções seguintes também são baseadas nas condições de independência mútua 193 e 192. Estas condições facilitam o desenvolvimento algébrico no sentido de dispensar as diferenciações por componente q_k .

Como efetuado para \dot{q} , devem ser calculadas as derivadas em relação a q das quatro parcelas da energia cinética. Pela regra da cadeia, tem-se a derivada em relação a q de ${}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_0 {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left({}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_0 {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial q} {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T \right) H_0 {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_0 \left(\frac{\partial}{\partial q} {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \right) \\ &= \left(0_{N,6} \right) H_0 {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_0 \left(0_{6N,1} \right) \\ &= {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \end{aligned} \quad (214)$$

Como a matriz de inércia da base H_0 depende de posições inerciais dos elos – os quais dependem do vetor de juntas – sua derivada não é identicamente nula. O mesmo é válido para a diferenciação de ${}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left({}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial q} {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T \right) H_{0m} \dot{q} + {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} + {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_{0m} \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{q} \right) \\ &= \left(0_{N,6} \right) H_{0m} \dot{q} + {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} + {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T H_{0m} \left(0_{2N,1} \right) \\ &= {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} \end{aligned} \quad (215)$$

Analogamente, para $\dot{q}^T H_{0m}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left(\dot{q}^T H_{0m}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{q}^T \right) H_{0m}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + \dot{q}^T H_{0m}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \right) \\ &= \left(0_{N,N} \right) H_{0m}^T {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 + \dot{q}^T H_{0m}^T \left(0_{6+N,1} \right) \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) {}^{\mathcal{J}}\dot{x}_0 \end{aligned} \quad (216)$$

Por fim, o termo $\dot{q}^T H_m^T \dot{q}$ devido aos braços:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left(\dot{q}^T H_m^T \dot{q} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{q}^T \right) H_m^T \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m^T \right) \dot{q} + \dot{q}^T H_m^T \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{q} \right) \\ &= \left(0_{N,N} \right) H_m^T \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m^T \right) \dot{q} + \dot{q}^T H_m^T \left(0_{2N,1} \right) \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m^T \right) \dot{q} \end{aligned} \quad (217)$$

Substituindo 214, 215, 216 e 217 em 213, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial q} L &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left(\mathcal{J} \dot{x}_0^T H_0 \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T H_m \dot{q} + \mathcal{J} \dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} + \dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial q} \left(\mathcal{J} \dot{x}_0^T H_0 \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\dot{q}^T H_m \dot{q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{J} \left(\dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\dot{q}^T H_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{J} \dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \mathcal{J} \dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m^T \right) \dot{q} \right]
 \end{aligned} \tag{218}$$

A determinação analítica das derivadas parciais em relação a q das matrizes dinâmicas H_0 , H_{0m} e H_m do multi-manipulador foi apresentada na seção 3.2.1.

As expressões 212 e 218 agrupam informações suficientes para construção da forma final das equações de movimento do manipulador, 189. Substituindo as duas primeiras nas equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
 \tau_m &= \dot{H}_m \dot{q} + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 + H_{0m}^T \mathcal{J} \ddot{x}_0 + c_m \\
 &= \dot{H}_m \dot{q} + H_m \ddot{q} + \dot{H}_{0m}^T \mathcal{J} \dot{x}_0 + H_{0m}^T \mathcal{J} \ddot{x}_0 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\mathcal{J} \dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \mathcal{J} \dot{x}_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m^T \right) \dot{q} \right]
 \end{aligned} \tag{219}$$

A formulação 219 é a equação dinâmica multi-estado do manipulador espacial, amplamente encontrada em literatura. A partir de entradas dinâmicas τ_m de torque nas juntas, este modelo responde com duas dinâmicas: interna q e externa $\mathcal{J} x_0$.

Neste ponto, é válido ressaltar duas características acerca de 219. Primeiramente, esta formulação foi obtida a partir do desenvolvimento da energia cinética 190 do multi-manipulador nas equações de Euler-Lagrange. Porém, no apêndice A foi demonstrado que a construção da energia cinética no paradigma apresentado independe do número de braços. Mais precisamente, a expressão de L é estruturalmente a mesma para mono-manipuladores e multi-manipuladores, desde que devidas extensões sejam propostas para matrizes dinâmicas e vetores de entrada e saída. Portanto, a forma de 219 independe da quantidade de braços do robô espacial.

O segundo aspecto diz respeito à validade física da equação de movimento apresentada. Sua obtenção é baseada no procedimento P1, no qual o vetor de estado $\mathcal{J} x_0$ é considerado independente das coordenadas generalizadas q . Em nível matemático, isto é refletido no anulamento das derivadas parciais, em relação a q e \dot{q} , de termos dependentes de $\mathcal{J} x_0$. Isso significa que a validade desta hipótese é uma condição necessária – mas não suficiente – para que 219 seja fisicamente válida.

Conforme mencionado, a formulação em questão apresenta duas saídas dinâmicas, ambas desconhecidas, para uma mesma entrada de torque. A solução do problema reside no segundo conjunto de equações: o vínculo Newtoniano de momento. Portanto, a relação de momento em 189 deve ser substituída em 219, a fim de gerar uma equação de movimento

dependente de uma única dinâmica, a qual pode ser resolvida numericamente. Isolando \dot{x}_0 no vínculo, tem-se:

$$\mathcal{J}\dot{x}_0 = J_0\dot{q} + H_0^{-1}M \quad (220)$$

A matriz $J_0 = -H_0^{-1}H_{0m}$, denominada *Matriz Jacobiana da Base*, é introduzida aqui para facilitar a consecução algébrica. A rigor, esta matriz só constitui uma Jacobiana com $M = 0$, já que apenas nessa condição ela desempenha o papel de relacionar linearmente a velocidade da base $\mathcal{J}\dot{x}_0$ com a de juntas \dot{q} . Porém, mesmo com momento não nulo, esta nomenclatura para J_0 será mantida, apesar de não reunir funções de jacobiana.

A aceleração inercial da base $\mathcal{J}\ddot{x}_0$ também deve ser computada:

$$\mathcal{J}\ddot{x}_0 = J_0\ddot{q} + \dot{J}_0\dot{q} + \dot{H}_0^{-1}M + H_0^{-1}\dot{M} \quad (221)$$

A substituição de 220 e 221 em 219 será particionada em duas etapas. Primeiro, a parte 212 será tratada, mantendo 213 colapsado em c_m :

$$\begin{aligned} \tau_m &= c_m + H_{0m}^T \left(J_0\ddot{q} + \dot{J}_0\dot{q} + \dot{H}_0^{-1}M + H_0^{-1}\dot{M} \right) + H_m\ddot{q} \\ &\quad + \dot{H}_{0m}^T \left(J_0\dot{q} + H_0^{-1}M \right) + \dot{H}_m\dot{q} \\ &= c_m + H_{0m}^T J_0\ddot{q} + H_{0m}^T \dot{J}_0\dot{q} + H_{0m}^T \dot{H}_0^{-1}M + H_{0m}^T H_0^{-1}\dot{M} + H_m\ddot{q} \\ &\quad + \dot{H}_{0m}^T J_0\dot{q} + \dot{H}_{0m}^T H_0^{-1}M + \dot{H}_m\dot{q} \\ &= c_m + \left(H_{0m}^T J_0 + H_m \right) \ddot{q} + \left(H_{0m}^T \dot{J}_0 + \dot{H}_{0m}^T J_0 + \dot{H}_m \right) \dot{q} \\ &\quad + H_{0m}^T \dot{H}_0^{-1}M + H_{0m}^T H_0^{-1}\dot{M} + \dot{H}_{0m}^T H_0^{-1}M \end{aligned} \quad (222)$$

Reescrevendo como produtos matriciais com \dot{q} , \ddot{q} no lado direito:

$$\begin{aligned} \tau_m &= c_m + \left(H_m + H_{0m}^T J_0 \right) \ddot{q} + \left(\dot{H}_m + \left(H_{0m}^T \dot{J}_0 \right) \right) \dot{q} + \left(H_{0m}^T \dot{H}_0^{-1}M \right) \\ &= c_m + \left(H_m + H_{0m}^T J_0 \right) \ddot{q} + \left(\dot{H}_m + \dot{H}_{0m}^T J_0 \right) \dot{q} + \left(H_{0m}^T \dot{H}_0^{-1}M \right) \end{aligned} \quad (223)$$

A substituição da jacobiana de base $J_0 = -H_0^{-1}H_{0m}$ revela que:

$$H_m + H_{0m}^T J_0 = H_m - H_{0m}^T H_0^{-1}H_{0m} = H^* \quad (224)$$

A matriz $H^* = H_m - H_{0m}^T H_0^{-1}H_{0m}$ foi obtida pioneiramente em Masutani, Miyazaki e Arimoto (1989) para monomanipuladores espaciais e é denominada *Matriz Generalizada de Inércia* do manipulador. Em literatura, ela é reconhecida por desempenhar o mesmo papel que a componente H_m desempenha em robôs de base fixa. Pelo mesmo argumento apresentado para o modelo dinâmico, conclui-se que, utilizando os formatos estendidos de H_m , H_0 e H_{0m} de multi-manipuladores, a matriz H^* retorna uma *Matriz Generalizada de Inércia Estendida*, aplicável para múltiplos braços. Naturalmente, o caso de braço único a reduz ao formato padrão de literatura de mono-manipuladores.

Substituindo 224 em 223, tem-se:

$$\tau_m = H^*\ddot{q} + \dot{H}^*\dot{q} + \frac{d}{dt} \left(H_{0m}^T H_0^{-1}M \right) + c_m \quad (225)$$

Nota-se que no caso *stand-alone* ($M = 0$) o modelo 225 é reduzido a:

$$\tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} + c_m \quad (226)$$

A formulação 226 é consolidada em ubíqua em robótica espacial de mono-manipuladores. Aqui, fica demonstrado que ela também é válida para multi-manipuladores espaciais. A seguir, o termo c_m é desenvolvido. Para isto, 220 é aplicada em 218.

Nos desenvolvimentos seguintes, objetivando facilitar o entendimento, o fator $\frac{1}{2}$ de 218 não é carregado ao longo de todos os desenvolvimentos algébricos. Assim, lançando mão de um abuso de notação, ele é mantido como um "envelope" para as etapas dos cálculos, sendo incluído apenas após a finalização das deduções.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M)^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M) + (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M)^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M)^T + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m^T \right) \dot{q} \\ &= (M^T H_0^{-T} + \dot{q}^T J_0^T) \left[\left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) J_0 \dot{q} + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) H_0^{-1} M \right] + (M^T H_0^{-T} + \dot{q}^T J_0^T) \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M) + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) \dot{q} \\ &= M^T H_0^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) J_0 \dot{q} + M^T H_0^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) H_0^{-1} M + \dot{q}^T J_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) J_0 \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T J_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) H_0^{-1} M + M^T H_0^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} + \dot{q}^T J_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) J_0 \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) H_0^{-1} M + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) \dot{q} \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (227)$$

A matriz H_0 e sua inversa H_0^{-1} são simétricas ((WILDE et al., 2018)). Logo, $(H_0^{-1})^T = H_0^{-T} = H_0^{-1}$. Outro resultado importante diz respeito à derivada de matrizes inversas:

$$\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} = -H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) H_0^{-1} \quad (228)$$

Isto permite fazer a seguinte simplificação:

$$M^T H_0^{-T} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) H_0^{-1} M = -M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \quad (229)$$

Utilizando este resultado e agrupando os termos em formatos quadráticos $\dot{q}^T (\cdot) \dot{q}$ e

lineares $\dot{q}^T(\cdot)$, $(\cdot)\dot{q}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \dot{q}^T \left[J_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) J_0 + J_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) J_0 + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) \right] \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T \left[J_0^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) M + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) M \right] \\ &+ \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) J_0 + M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \right] \dot{q} - M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (230)$$

Substituindo a jacobiana de base $J_0 = -H_0^{-1}H_{0m}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \dot{q}^T \left[H_{0m}^T H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) H_0^{-1} H_{0m}^T - H_{0m} H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) H_0^{-1} H_{0m} + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) \right] \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T \left[-H_{0m}^T H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) H_0^{-1} M + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) H_0^{-1} M \right] \\ &+ \left[-M^T H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0 \right) H_0^{-1} H_{0m} + M^T H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \right] \dot{q} \\ &\quad - M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (231)$$

Novamente, a propriedade 228 pode ser utilizada para simplificações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \dot{q}^T \left[-H_{0m}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) H_{0m}^T - H_{0m} H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) H_0^{-1} H_{0m} + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) \right] \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T \left[\left(H_{0m}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) H_0^{-1} \right) M \right] \\ &+ \left[M^T \left(\left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) H_{0m} + H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \right) \right] \dot{q} \\ &\quad - M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (232)$$

Neste ponto, utiliza-se a regra da cadeia para novas simplificações:

$$\left(H_{0m}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) H_0^{-1} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_{0m}^T H_0^{-1}) \right) \quad (233)$$

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) H_{0m} + H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m}) \right) \quad (234)$$

$$\begin{aligned} - H_{0m}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) H_{0m}^T - H_{0m} H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q} H_{0m}^T \right) H_0^{-1} H_{0m} + \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) \\ = \left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m}) \right) \end{aligned} \quad (235)$$

Substituindo 233, 234 e em 232:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \dot{q}^T \left[\left(\frac{\partial}{\partial q} H_m \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m}) \right) \right] \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T \left[\left(\frac{\partial}{\partial q} (H_{0m}^T H_0^{-1}) \right) M \right] + \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m}) \right) \right] \dot{q} \\ &+ M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m}) \right) \dot{q} \\ &+ \dot{q}^T \left[\left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m})^T \right) M \right] + \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m}) \right) \right] \dot{q} \\ &- M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (236)$$

A matriz generalizada de inércia $H^* = H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m}$ pode ser substituída na última passagem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + \dot{q}^T \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m}) \right) \right]^T + \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m}) \right) \right] \dot{q} \\ &- M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (237)$$

Aqui, utilizou-se a propriedade da transposição do produto matricial:

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m})^T \right) M = \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m}) \right) \right]^T \quad (238)$$

Para a próxima etapa, a regra da cadeia é empregada novamente:

$$\dot{q}^T \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m}) \right) \right]^T + \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} (H_0^{-1} H_{0m}) \right) \right] \dot{q} = \left(\frac{\partial}{\partial q} (M^T H_0^{-1} H_{0m} \dot{q}) \right)^T \quad (239)$$

Observa-se que isto dissolve a padronização $\dot{q}^T(\cdot), (\cdot)\dot{q}$, mas permitirá reduções algébricas significativas. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q}T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + \left(\frac{\partial}{\partial q} (M^T H_0^{-1} H_{0m} \dot{q}) \right)^T - M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (240)$$

Neste ponto, o vínculo Newtoniano é reescrito para evidenciar a variável da dinâmica externa:

$$H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} = H_0^{-1} M - \mathcal{J} \dot{x}_0 \quad (241)$$

Substituindo 241 em 240:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q}T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + \left(\frac{\partial}{\partial q} (M^T (H_0^{-1} M - \mathcal{J} \dot{x}_0)) \right)^T - M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + \left(\frac{\partial}{\partial q} (M^T H_0^{-1} M) \right)^T - \left(\frac{\partial}{\partial q} (M^T \mathcal{J} \dot{x}_0) \right)^T - M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (242)$$

A partir deste ponto, considera-se que o momento M independe das coordenadas generalizadas. Isto permite tratá-lo como constante nas derivadas de q . Utilizando a propriedade simetria da inversa, a saber, $H_0^{-1} = (H_0^{-1})^T$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q}T &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + \left[M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \right]^T - M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M - \left(\frac{\partial}{\partial q} (M^T \mathcal{J} \dot{x}_0) \right)^T \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M - M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M - \left(\frac{\partial}{\partial q} (M^T \mathcal{J} \dot{x}_0) \right)^T \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} - \left(\frac{\partial}{\partial q} \mathcal{J} \dot{x}_0^T \right) M \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (243)$$

Logo, o formato analítico final de c_m , no procedimento P1, é:

$$\frac{\partial}{\partial q}T = -c_m = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} \quad (244)$$

A aplicação de 244 em 225 culmina na equação de movimento mono-estado para o multi-manipulador:

$$\tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} + \frac{d}{dt} (H_{0m}^T H_0^{-1} M) - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} \quad (245)$$

Na situação *stand-alone*, com M identicamente nulo:

$$\tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} \quad (246)$$

Os resultados 245 e 246 descrevem o movimento da dinâmica interna q do multi-manipulador em resposta a um vetor de torque de juntas τ_m , sendo o segundo caso restrito à situação *stand-alone*. Este é o modelo dinâmico *mono-estado* do robô, pois depende explicitamente da dinâmica interna. Em particular, o formato 246 é semelhante ao modelo de base fixa, com a matriz generalizada de inércia H^* desempenhando o papel da matriz de inércia H_m ((CRAIG, 2005)). Assim como no contexto de base fixa, a matriz \dot{H}^* é denominada *componente Coriolis* do modelo, enquanto que o termo quadrático dependente da derivada parcial de q é chamada de *componente centrípeta*. Juntos, estes dois termos designam a parcela não inercial do modelo *stand-alone*.

Para fins de sumarização, as equações 245 e 246 podem ser agrupadas aos seus respectivos vínculos. Os sistemas resultantes descrevem, em cada equação, as dinâmicas interna e externa do multi-manipulador. O modelo 247 representa o modelo dinâmico completo do robô espacial, de acordo com o procedimento de dedução P1:

$$\begin{cases} \tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} + \frac{d}{dt} (H_{0m}^T H_0^{-1} M) - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} \\ \mathcal{J} \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} + H_0^{-1} M \end{cases} \quad (247)$$

A redução para *stand-alone* é dada em 248.

$$\begin{cases} \tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} \\ \mathcal{J} \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} \end{cases} \quad (248)$$

Uma das grandes vantagens da formulação P1 reside na equação multi-estado 225. Este resultado, juntamente com o vínculo, culmina na formulação do multi-manipulador espacial como um sistema subatuado ((YOSHIDA; NENCHEV, 1997)). Para isto, o vínculo é diferenciado no tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M &= \frac{d}{dt} (H_0^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 + H_{0m} \dot{q}) \\ \dot{M} &= \dot{H}_0^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 + H_0^{\mathcal{J}} \ddot{x}_0 + \dot{H}_{0m} \dot{q} + H_{0m} \ddot{q} \end{aligned} \quad (249)$$

Pela segunda lei de Newton, a derivada do momento do sistema é igual à força generalizada $F_e \in \mathbb{R}^6$ resultante atuante sobre seu centro de massa. Tal força generalizada é composta por uma força e um torque. Assim:

$$F_e = H_0^{\mathcal{J}} \ddot{x}_0 + H_{0m} \ddot{q} + \dot{H}_0^{\mathcal{J}} \dot{x}_0 + \dot{H}_{0m} \dot{q} \quad (250)$$

Montando as equações 225 e 250 em formato matricial, tem-se a formulação do manipulador espacial como um sistema subatuado:

$$\begin{bmatrix} H_0 & H_{0m} \\ H_{0m}^T & H_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} \ddot{x}_0 \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{H}_0 & \dot{H}_{0m}^T \\ \dot{H}_{0m}^T & \dot{H}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J} \dot{x}_0 \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{6,1} \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e \\ \tau_m \end{bmatrix} \quad (251)$$

sendo c_m dado por 244.

Uma importante distinção aqui demonstrada em relação à formulação de (YOSHIDA; NENCHEV, 1997) é que a componente não inercial do vínculo – desempenhada por c_m na segunda equação – é identicamente nula.

C.2 P2) Lagrangiana mono-estado

No procedimento P1, o vínculo foi utilizado após desenvolvimento da energia cinética nas equações de Euler-Lagrange. Como consequência, as variáveis da dinâmica externa foram consideradas independentes de q , trazendo simplificações consideráveis à modelagem. Uma das vantagens de P1 é a obtenção da equação de movimento multi-estado, que associa-se ao vínculo na formulação do sistema subatuado 251. Na abordagem P2, o vínculo é inicialmente substituído na Lagrangiana de energia cinética antes do uso das equações de Euler-Lagrange, produzindo uma Lagrangiana dependente apenas das variáveis de dinâmica interna. Por consequência, as equações de movimento geradas também são mono-estado.

Portanto, as deduções são iniciadas com a substituição do vínculo 220 na energia cinética 190. Da mesma forma que na seção C.1, utiliza-se um abuso de notação para considerar o fator $\frac{1}{2}$ apenas no término dos cálculos.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\ &= \mathcal{J} \dot{x}_0^T H_0 \mathcal{J} \dot{x}_0 + \dot{q}^T H_m \dot{q} + \mathcal{J} \dot{x}_0^T H_{0m} \dot{q} + \mathcal{J} \dot{q}^T H_{0m}^T \dot{x}_0 \\ &= (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M)^T H_0 (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M) + (\dot{q}^T H_m \dot{q}) \\ &+ (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M)^T H_{0m} \dot{q} + \dot{q}^T H_{0m}^T (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M) \\ &= (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M)^T (H_0 J_0 \dot{q} + H_0 H_0^{-1} M) + (\dot{q}^T H_m \dot{q}) \\ &+ (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M)^T H_{0m} \dot{q} + \dot{q}^T H_{0m}^T (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M) \\ &= (M^T H_0^{-T} + \dot{q}^T J_0^T) (H_0 J_0 \dot{q} + M) + (\dot{q}^T H_m \dot{q}) \\ &+ (M^T H_0^{-T} + \dot{q}^T J_0^T) H_{0m} \dot{q} + \dot{q}^T H_{0m}^T (J_0 \dot{q} + H_0^{-1} M) \\ &\left. \right\} \end{aligned} \quad (252)$$

Nesta última passagem, foi utilizada a propriedade de transposição matricial $(AB)^T = B^T A^T$. Agrupando os termos em formatos quadráticos $\dot{q}^T \left(\cdot \right) \dot{q}$ e lineares $\dot{q}^T \left(\cdot \right)$, $\left(\cdot \right) \dot{q}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\
 &= M^T H_0^{-1} H_0 J_0 \dot{q} + M^T H_0^{-1} M + \dot{q}^T J_0^T H_0 J_0 \dot{q} + \dot{q}^T J_0^T M + \dot{q}^T H_m \dot{q} \\
 &+ M^T H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} + \dot{q}^T J_0^T H_{0m} \dot{q} + \dot{q}^T H_{0m}^T J_0 \dot{q} + \dot{q}^T H_{0m}^T H_0^{-1} M \\
 &= \dot{q}^T \left(J_0^T H_0 J_0 + H_m + J_0^T H_{0m} + H_{0m}^T J_0 \right) \dot{q} \\
 &+ \dot{q}^T \left(J_0^T M + H_{0m}^T H_0^{-1} M \right) + \left(M^T J_0 + M^T H_0^{-1} H_{0m} \right) \dot{q} \\
 &\left. \right\}
 \end{aligned} \tag{253}$$

Substituindo a jacobiana de base $J_0 = -H^0 H_{0m}$:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2} \left\{ \right. \\
 &= \dot{q}^T \left(H_{0m}^T H_0^{-1} H_0 H_0^{-1} H_{0m} + H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} \right) \dot{q} \\
 &+ \dot{q}^T \left(-H_{0m}^T H_0^{-1} M + H_{0m}^T H_0^{-1} M \right) + \left(-M^T H_0^{-1} H_{0m} + M^T H_0^{-1} H_{0m} \right) \dot{q} + M^T H_0^{-1} M \\
 &= \dot{q}^T \left(H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} + H_m - 2H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} \right) \dot{q} \\
 &+ \dot{q}^T (0_{N,1}) + (0_{N,1}) \dot{q} + M^T H_0^{-1} M \\
 &= \dot{q}^T \left(H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m} \right) \dot{q} + M^T H_0^{-1} M \\
 &= \dot{q}^T (H^*) \dot{q} + M^T H_0^{-1} M \\
 &\left. \right\}
 \end{aligned} \tag{254}$$

Nesta última etapa, foi feita a substituição da matriz generalizada de inércia $H^* = H_m - H_{0m}^T H_0^{-1} H_{0m}$. Assim:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T (H^*) \dot{q} + \frac{1}{2} M^T H_0^{-1} M \tag{255}$$

A formulação 255 descreve a Lagrangiana de energia cinética do manipulador em função somente das variáveis de dinâmica interna, ou seja, das próprias coordenadas generalizadas. Esta característica atribui maior consistência física para este procedimento, principalmente na aplicação das equações de Euler-Lagrange. Para isto, as duas parcelas da Lagrangiana são inicialmente derivadas com respeito a \dot{q} :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\dot{q}^T H^* \dot{q} \right) = 2H^* \dot{q} \tag{256}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(M^T H_0^{-1} M \right) = 0_{N,1} \tag{257}$$

O resultado 256 não foi demonstrado aqui, uma vez que sua dedução é idêntica à derivada parcial da matriz de inércia H_m , $\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\dot{q}^T H^* \dot{q} \right)$, apresentada em 210. Neste caso, a matriz H^* é substituída por H_m . Como estas matrizes possuem as mesmas dependências em relação ao operador \dot{q} , o resultado da diferenciação é o mesmo. Analogamente, o resultado 257 é imediato, já que M e H_0^{-1} independem de \dot{q} .

Portanto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\dot{q}^T (H^*) \dot{q} + M^T H_0^{-1} M \right] \\ &= H^* \dot{q}\end{aligned}\quad (258)$$

Seguindo as etapas de 189, a equação 258 deve ser diferenciada no tempo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) L &= \frac{d}{dt} (H^* \dot{q}) \\ &= H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q}\end{aligned}\quad (259)$$

A última etapa da solução das equações de Euler-Lagrange é a diferenciação de L com respeito a q . Analogamente ao caso de \dot{q} , a derivada do termo $\dot{q}^T (H^*) \dot{q}$ segue o procedimento efetuado para o cálculo de $\dot{q}^T (H_m) \dot{q}$ em 217:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T (H^*) \dot{q}) &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{q}^T \right) H^* \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + \dot{q}^T H^* \left(\frac{\partial}{\partial q} \dot{q} \right) \\ &= (0_{N,N}) H^* \dot{q} + \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + \dot{q}^T H^* (0_{2N,1}) \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q}\end{aligned}\quad (260)$$

As deduções envolvendo $M^T H_0^{-1} M$ são semelhantes, pois M é constante para q .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q} (M^T H_0^{-1} M) &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q} M^T \right) H_0^{-1} M + M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M + M^T H_0^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial q} M \right) \\ &= (0_{N,6}) H_0^{-1} M + M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M + M^T H_0^{-1} (0_{N+6,1}) \\ &= M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M\end{aligned}\quad (261)$$

De 260 e 261, decorre:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q} L &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left[\dot{q}^T (H^*) \dot{q} + M^T H_0^{-1} M \right] \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H^* \right) \dot{q} + \frac{1}{2} M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ &= -c_m\end{aligned}\quad (262)$$

Utilizando os resultados 259 e 262 nas equações de Euler-Lagrange em 189, resulta a equação dinâmica mono-estado para o multi-manipulador:

$$\begin{aligned}\tau_m &= H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} + c_m \\ &= H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} - \frac{1}{2} M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M\end{aligned}\quad (263)$$

O sistema dinâmico completo, segundo abordagem P2, é sumarizado ao incorporar o vínculo de momento à 263:

$$\begin{cases} \tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} - \frac{1}{2} M^T \left(\frac{\partial}{\partial q} H_0^{-1} \right) M \\ \mathcal{J} \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} + H_0^{-1} M \end{cases} \quad (264)$$

A redução para *stand-alone* no paradigma P2 é dada em 265.

$$\begin{cases} \tau_m = H^* \ddot{q} + \dot{H}^* \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}} H^* \right) \dot{q} \\ \mathcal{J} \dot{x}_0 = -H_0^{-1} H_{0m} \dot{q} \end{cases} \quad (265)$$

C.3 Análises comparativas das equações de movimento

A partir dos desenvolvimentos algébricos apresentados, conclui-se que uma das vantagens do procedimento P2 é a formulação de equações de movimento unicamente em mono-estado q . Isto é, esta abordagem não estabelece, simultaneamente nos dois conjuntos de equações 264, um formalismo dinâmico envolvendo as variáveis das dinâmicas interna e externa simultaneamente. Logo, neste contexto, o movimento do manipulador não pode ser formatado no paradigma subatuado.

Por outro lado, a obtenção de uma Lagrangiana mono-estado é vantajosa do ponto de vista de fidelidade do modelo. De fato, a demonstração matemática das equações de Euler-Lagrange requer que a função L utilizada seja parametrizada por uma *base* do espaço de configurações do sistema dinâmico. Isso significa que os parâmetros em questão – denominados coordenadas generalizadas – devem ser mutuamente ortogonais e capazes de representar qualquer estado do sistema ((LEMOS, 2007)). Tais características correspondem às duas imposições para uma base de um espaço vetorial: o conjunto deve ser L.I e gerador de todo o espaço.

Para robôs de base fixa, o vetor de juntas q é indiscutivelmente qualificado para o papel de coordenadas generalizadas. A partir do isolamento dos atuadores, qualquer ângulo de junta (juntas rotacionais) é independente dos demais (L.I). Além disso, a cinemática direta permite mapear a posição e orientação de qualquer elo do manipulador a partir de q (conjunto gerador). Por fim, neste cenário de base fixa, a Lagrangiana é escrita unicamente como função de q , de modo que as equações de movimento resultantes atendem todas as hipóteses impostas para sua aplicação.

No cenário geral *free-floating*, sem a aplicação de vínculos, o vetor de juntas q é insuficiente para descrever qualquer ponto no espaço de configurações do sistema robótico. Devido aos acoplamentos dinâmicos, a flutuação da base produz múltiplas soluções de posição e orientação inerciais dos efetuadores para uma mesma parametrização q . Assim, a extensão da Lagrangiana para multi-estado resolve a condição de conjunto gerador.

Contudo, a condição de independência linear é questionável. Mesmo para o cenário simplificado de operação *stand-alone* e momento inicial nulo, a posição e orientação da base livre – concentradas na variável $\mathcal{J}x_0$ – dependem dos valores das juntas. O elevado acoplamento dinâmico entre os braços e a base traz dúvidas acerca da independência matemática das variáveis da dinâmica externa em relação às de q . Logo, a validade do anulamento de derivadas parciais imposto na abordagem de Lagrangiana multi-estado não é fisicamente evidente.

Outro ponto de questionamento é a própria diferenciação com relação a q, \dot{q} nas equações de Euler-Lagrange no cenário de Lagrangiana multi-estado. Isto impõe q como vetor de coordenadas generalizadas, mas sem o vínculo atrelado. Conseqüentemente, a hipótese de conjunto gerador não é atendida, desqualificando q como coordenada generalizada. Conforme discutido anteriormente, esta característica é recuperada às custas de estender o estado, além da Lagrangiana, das próprias coordenadas generalizadas. Porém, a independência linear ainda não seria garantida. E, com mais razão, as equações de Euler-Lagrange teriam de ser ajustadas para que as derivadas denotadas fossem com respeito ao estado estendido e composto por duas dinâmicas, não somente q .

Vale ressaltar que a violação da independência linear do conjunto selecionado como coordenadas generalizadas impacta significativamente a demonstração matemática das equações de Euler-Lagrange. Este equacionamento é baseado no princípio de D'Alembert para o equilíbrio de trabalhos virtuais, o qual é uma decorrência das leis de Newton. Se os elementos de e não forem mutuamente ortogonais, alguns cancelamentos de derivadas parciais ao longo das deduções de EL não ocorrem, impedindo a substituição do resultado de D'Alembert. Nessas condições, o formato das equações de movimento não segue 189.

Nota-se que o uso de uma Lagrangiana mono-estado contorna todos esses empecilhos. De fato, no trabalho original de Masutani, Miyazaki e Arimoto (1989), o vínculo proposto em Umetani e Yoshida (1989) é substituído inicialmente, produzindo uma função de energia cinética dependente apenas de q , seguido da aplicação das equações da mecânica de Lagrange. Isto está de acordo com a abordagem P2, na qual a assimilação do vínculo permite indiretamente que q parametrize completamente a energia cinética do sistema e, logo, sua dinâmica. Este resultado só é válido pois os vínculos de momento são independentes da formulação de energia cinética. Ao longo das seções A e B, nenhuma hipótese cruzada foi necessária. Portanto, a Lagrangiana obtida no primeiro apêndice pode incorporar os resultados do segundo.

APÊNDICE D

Análise de framework

Esta seção sumariza as interpretações dos resultados matemáticos obtidos nos apêndices A, B e C. Estes desenvolvimentos contemplam todo o *framework* generalizado para o multi-manipulador espacial de base flutuante segundo a vertente GJM: cômputo das matrizes dinâmicas, vínculos de momento e equações de movimento. O formalismo apresentado é capaz de lidar com forças externas não nulas, pois todos os resultados possuem versões desprovidas de imposições sobre o momento M .

No Apêndice A, foi demonstrado matematicamente que a energia cinética de multi-manipulador espacial é estruturalmente idêntica ao cenário de braço único, desde que devidas extensões fossem feitas sobre as matrizes dinâmicas e outros vetores. Em um contexto de mecânica de Lagrange, a generalização da energia cinética impacta positivamente todas as etapas de modelagem, uma vez que esta Lagrangiana é a chave para as equações de movimento nesta abordagem. Isto permite que várias ferramentas de análise e projeto de controladores possam ser transferidos de mono-manipuladores *free-floating* para multi-manipuladores. Em particular, uma consequência direta dessa formulação é a extensão da própria Matriz Generalizada de Inércia (GJM) para múltiplos braços, aqui denominada como E-GJM (Seção 3.3). Devido à montagem das matrizes dinâmicas e vetores de estado no panorama estendido, foi visto que a E-GJM é constituída por várias matrizes GJM – descrevendo a contribuição intrínseca de cada braço para seu efetuador – e de termos de acoplamento entre braços. Esta formulação, cuja consistência cinemática foi verificada computacionalmente neste trabalho, traz segurança e padronização para trabalhos de múltiplos braços em espaço cartesiano.

Os vínculos de momento foram detalhadamente analisados no Apêndice B. Como consequência da generalização da energia cinética, fica demonstrado também a validade dos vínculos Newtonianos para múltiplos braços. As deduções algébricas revelaram que o

formato dos vínculos utilizado em literatura estabelece condições para o momento angular do manipulador com respeito à base livre, desprezando o momento da própria base. A formulação apresentada corrige o vínculo no sentido de assimilar esta componente através de matrizes H_0^C e H_{0m}^C . Porém, como estas não fazem parte das matrizes de energia cinética, o benefício de sua aplicação no sistema de equações de movimento é diminuído.

Por fim, os resultados obtidos nos Apêndices A e B foram utilizados no desenvolvimento das equações de movimento do robô espacial no Apêndice C. Neste aspecto, as duas propostas constantes em literatura foram equacionadas e analisadas. Aplicações recentes em robótica espacial utilizam a Lagrangiana multi-estado no desenvolvimento das equações de Euler-Lagrange, com uso do vínculo de momento após obtenção de uma equação dinâmica multi-estado com entrada dinâmica de torques nas juntas. Mesmo trabalhos pioneiros, como a padronização de Yoshida e Nenchev (1997) do robô espacial no formato subatuado, revelam que esta abordagem foi empregada. Por outro lado, os artigos originais de modelagem de mono-manipuladores *free-floating*, propõem a construção de uma Lagrangiana mono-estado a partir dos vínculos e subsequente aplicação nas equações de movimento. Após desenvolvimentos matemáticos detalhados, os dois paradigmas foram comparados. As conclusões dizem respeito às vantagens do primeiro método em permitir explicitar as duas dinâmicas em ambos conjuntos de equações do sistema dinâmico, mas em detrimento de fidelidade física com a mecânica Lagrangiana. A definição de coordenadas generalizadas requer independência linear e capacidade de geração de todo o espaço de configurações, o que é atendido integralmente por q no contexto de Lagrangiana mono-estado. Logo, as equações de movimento obtidas por este paradigma propiciam maiores certezas sobre o modelo da dinâmica acoplada ser fidedigno à operação real do robô. Com mais razão, modelos com maior fidelidade física produzem melhores resultados para sistemas de controle associados, tanto na fase de projetos quanto em execução experimental.