



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Invariantes de germes singulares e poliedros de Newton

Olavo Queiroga de Melo

São Carlos-SP
Agosto de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Invariantes de germes singulares e poliedros de Newton

Olavo Queiroga de Melo

Orientadora: Profa. Dra. Bruna Oréfice Okamoto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Agosto de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Olavo Queiroga de Melo, realizada em 22/08/2025.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Bruna Oréfica Okamoto (UFSCar)

Profa. Dra. Hellen Monção de Carvalho Santana (UFSCar)

Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado (UNESP)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.

*Dedico este trabalho
aos meus pais Estevão e Fátima.
E à minha irmã Thabata.*

Agradecimentos

Agradeço,

À minha orientadora Bruna pela parceria, ajuda e paciência durante todo o mestrado, sempre disposta a sanar quaisquer tipo de dúvidas e ajudar no que fosse preciso;

À professora Thaís pelo suporte durante a elaboração deste trabalho e por fazer parte da minha formação na graduação, o que possibilitou meu amadurecimento matemático e contribuiu para minha progressão na carreira acadêmica;

Aos meus pais Estevão e Fátima pela educação e por não medirem esforços para tornar possível minha formação e crescimento;

À minha irmã Thabata por ter me apresentado ao mundo da matemática e por toda parceria de vida;

À minha namorada Lóren por sempre estar presente e por toda parceria durante o mestrado;

Aos colegas da pós-graduação pelo companheirismo durante as disciplinas e discussões de projetos;

À todos os professores do Programa de Pós-Graduação que contribuíram de alguma forma durante o mestrado;

À FAPESP (Processo nº 2023/09727-2) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, que financiaram e tornaram possível este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a relação entre o número de Milnor de uma função analítica em um ponto singular isolado e seu poliedro de Newton.

Palavras-chave: Multiplicidade, Número de Milnor, Poliedros de Newton

Abstract

In this project, we study the relation between the Milnor number of an analytic function at an isolated singular point and its Newton polyhedron.

Keywords: Multiplicity; Milnor Number; Newton polyhedra

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Germes de aplicações	3
1.1.1 Germes em espaços topológicos	3
1.1.2 Germes em variedades diferenciáveis	6
1.1.3 O espaço \mathcal{O}_n	6
1.2 Anéis graduados e filtração de anéis	8
1.3 Teoria da Dimensão	9
1.4 Complexo de Koszul	10
1.5 Complexo de Cadeia Celular	12
1.6 Anéis Cohen-Macaulay	14
2 Número de Milnor e de Newton	19
3 Filtração de Newton	23
3.1 Condição de não-degenerescência	37
3.2 Relação entre os ideais $\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ e (F_1, \dots, F_k)	52
4 Resultado Principal	57
5 Conclusões	69

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica dos conjuntos $\Gamma_+(f), \Gamma(f)$ e $\Gamma_-(f)$	20
2.2	Poliedro S	21
2.3	Poliedro de Newton de f	22
2.4	Poliedro de Newton de g	22
3.1	Fronteira de Newton de f	25
3.2	Faces de $\Gamma(f)$	25
3.3	Γ e retas que ligam a, b e $a + b$ à origem.	26
3.4	Γ e Π	27
3.5	Segmentos que intersectam r_{a+b}	27
3.6	Segmentos auxiliares.	28
3.7	Filtração de Newton de f	30
3.8	$Cone(\Delta)$	31
3.9	$P(\Delta)$	32
3.10	Faces de $\Gamma(f)$	34
3.11	Poliedro de Newton de g	38
3.12	Filtração de Newton ampliada.	48
3.13	Representação gráfica do conjunto $P(\Delta_i) \setminus \bigcup_{q=1}^k (m_q + P(\Delta)), i \in \{1, 2\}$	49
4.1	Poliedro de Newton de f	67

Lista de Símbolos

A : Anel graduado $gr(\mathcal{A}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}$;

\mathcal{A} : Anel das séries formais de potências $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ sobre o corpo \mathcal{C} nas variáveis x_1, \dots, x_k ;

\mathcal{A}_q : Conjunto $\{g \in \mathcal{A} : \text{supp } g \subset \phi^{-1}(q + \mathbb{N})\}$;

$A_\Delta = \mathcal{C}[P(\Delta)]$: Conjunto $\{g \in A : \text{supp } g \subset P(\Delta)\}$;

$A_q = \mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1}$;

\mathcal{C} : Corpo;

$\bar{\mathcal{C}}$: Fecho algébrico do corpo \mathcal{C} ;

$Cone(\Delta)$: Cone convexo de \mathbb{R}_+^k com base Δ e vértice 0;

$f(t)|_{t=i}$: limite de f quando t tende a i ;

$P(\Delta)$: Conjunto $Cone(\Delta) \cap \mathbb{Z}^k$;

$\Gamma(f)$: Fronteira de Newton de f ;

$\Gamma_+(f)$: Poliedro de Newton de f ;

$\Gamma_-(f)$: Conjunto dos segmentos com extremidades em 0 e em $\Gamma(f)$;

$\mu(f)$: Número de Milnor de f ;

$\nu(f)$: Número de Newton de f ;

\mathcal{M} : Ideal maximal do anel $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$;

Introdução

Seja $f : (M, x) \rightarrow N$ um germe de aplicação entre variedades diferenciáveis M e N . Dizemos que f é diferenciável de classe C^∞ se algum representante do germe for diferenciável de classe C^∞ em uma vizinhança aberta de x . A diferencial da aplicação f é a aplicação $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ que é uma transformação linear entre os respectivos espaços tangentes.

O posto de um germe $f : (M, x) \rightarrow N$ é definido como o posto do seu diferencial $Df(x)$. Dizemos que um germe é regular quando tem posto máximo. Caso contrário, diremos que este germe é singular.

Dizemos que dois germes de aplicações diferenciáveis $f : (M, x) \rightarrow N$ e $g : (M', x') \rightarrow N$ são equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\phi : (M, x) \rightarrow (M', x')$ tal que $g = f \circ \phi^{-1}$.

Com esta relação de equivalência conseguimos classificar facilmente os germes regulares. Entretanto, no caso dos germes singulares o problema de classificação se torna demasiadamente difícil. Para facilitar nosso trabalho, usamos alguns invariantes que nos ajudam a entender como funcionam esses objetos abstratos.

Em nosso contexto, os objetos que iremos considerar são os germes de funções analíticas com singularidades isoladas e o invariante que estudaremos neste trabalho é o número de Milnor.

Este invariante foi introduzido em 1968 pelo matemático John Willard Milnor, cuja definição original, que pode ser encontrada no livro *Singular points of complex hypersurfaces* de John Milnor (1968), é a codimensão do ideal jacobiano da função em questão.

Neste trabalho, nosso objetivo principal é relacionar o número de Milnor de uma singularidade isolada de uma aplicação analítica ao seu poliedro de Newton, que nos dá uma maneira alternativa de calcular este invariante e pode nos auxiliar neste árduo desafio de classificação de germes de funções com singularidades isoladas.

A principal referência que utilizamos neste trabalho foi o artigo do Kouchnirenko (*Inventiones mathematicae*, 1976) [7].

Preliminares

Nesta seção, nos baseamos em [4], [8], [9] e [10]. Primeiramente, relembremos alguns conceitos da Teoria de Singularidades

1.1 Germes de aplicações

1.1.1 Germes em espaços topológicos

Seja X um espaço topológico. Dado $x \in X$, dizemos que U é uma vizinhança de x se existe um aberto $A \subset X$ tal que $x \in A$ e $A \subseteq U$.

Definição 1.1. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que os subconjuntos $S, T \subseteq X$ definem o *mesmo germe* em x se existe uma vizinhança U de x em X tal que $U \cap S = U \cap T$.

A relação definida acima é uma relação de equivalência. Chamaremos de *germe de um conjunto* X em x cada classe de equivalência desta relação. Ademais, se $S \subseteq X$ é um conjunto arbitrário, denotaremos a classe determinada por S por (S, x) .

Os germes de conjuntos possuem algumas propriedades:

1. $(S, x) = (\emptyset, x)$ se, e somente se, x não é um ponto aderente de S ;
2. $(S, x) = (\{x\}, x)$ se, e somente se, x é um ponto isolado de S ;
3. $(S, x) = (X, x)$, se e somente se, S é uma vizinhança de x .

Com isso, temos a seguinte definição.

Definição 1.2. Sejam X e Y dois espaços topológicos, e $x \in X$. Dizemos que duas aplicações $f : U \rightarrow Y$, $g : V \rightarrow Y$, em que $U, V \subseteq X$ são vizinhanças de x em X , definem o *mesmo germe em* x se existe outra vizinhança $W \subseteq U \cap V$ de x em X tal que

$$f|_W = g|_W.$$

Novamente, isto define uma relação de equivalência e as classes de equivalência são chamadas de *germe de aplicação de* (X, x) em Y . Ademais, dada uma aplicação qualquer $f : U \rightarrow Y$, denotaremos a classe determinada por ela por $f : (X, x) \rightarrow Y$. Finalmente, a notação $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ representa um germe $f : (X, x) \rightarrow Y$ satisfazendo $f(x) = y$.

Definição 1.3. Um germe de aplicação $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ é dito *contínuo* se alguma das aplicações que o definem é contínua em uma vizinhança de x .

Alguns exemplos simples de germes contínuos são o germe da aplicação identidade, o germe da aplicação inclusão e o germe da aplicação constante.

Sejam $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ e $g : (Y, y) \rightarrow (Z, z)$ germes contínuos. Consideremos representantes $f : U \rightarrow Y$ e $g : V \rightarrow Z$ dos germes acima, em que U, V são vizinhanças de x, y em X, Y , respectivamente, de forma que as aplicações f e g sejam contínuas. Da continuidade de f , existe $U' \subseteq U$ vizinhança de x tal que $f(U') \subseteq V$. Assim, a composição $g \circ f|_{U'} : U' \rightarrow Z$ também é contínua. Denotamos o germe desta aplicação em x por $g \circ f : (X, x) \rightarrow (Z, z)$ e chamamos tal germe de composição de $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ e $g : (Y, y) \rightarrow (Z, z)$.

O germe de composição de dois germes contínuos independe da escolha dos representantes.

Definição 1.4. Sejam U, V vizinhanças de x, y em X, Y , respectivamente e $\phi : U \rightarrow V$ um homeomorfismo. Dizemos que o germe induzido $\phi : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ é invertível ou é um germe de homeomorfismo. O germe da aplicação inversa ϕ^{-1} é chamado de germe inverso de ϕ e é o único germe que satisfaz

$$\phi^{-1} \circ \phi = id : (X, x) \rightarrow (X, x), \quad \phi \circ \phi^{-1} = id : (Y, y) \rightarrow (Y, y)$$

Vejam os um primeiro resultado que relaciona as definições de germes vistas até agora.

Lema 1.5. *Suponhamos que $f : U \rightarrow Y$ e $g : V \rightarrow Y$ definem o mesmo germe em x e que $S, T \subseteq Y$ definem o mesmo germe em $f(x)$. Se f é contínua em x , então $f^{-1}(S)$ e $g^{-1}(T)$ definem o mesmo germe em x .*

Demonstração. De fato, como f e g definem o mesmo germe em x , existe uma vizinhança W de x em X tal que $f|_W = g|_W$. Por outro lado, como S, T definem o mesmo germe em $f(x)$, existe uma vizinhança $Z \subseteq Y$ de $f(x)$ tal que $S \cap Z = T \cap Z$.

Agora, sendo f contínua, existe uma vizinhança $G \subseteq W$ tal que $f(G) = g(G) \subseteq Z$. Assim, como $S \cap Z = T \cap Z$, aplicando a imagem inversa sobre as restrições $f|_W$ e $g|_W$, obtemos

$$f^{-1}(S) \cap f^{-1}(Z) \cap W = g^{-1}(T) \cap g^{-1}(Z) \cap W.$$

Assim, interceptando com G , teremos

$$f^{-1}(S) \cap G = g^{-1}(T) \cap G.$$

Portanto, $f^{-1}(S)$ e $g^{-1}(T)$ definem o mesmo germe em x . □

Definição 1.6. Sejam $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ um germe contínuo e $S \subseteq Y$. Definimos a *imagem inversa* de (S, y) por f como o germe $(f^{-1}(S), x)$.

O Lema (1.5) garante a boa definição de (1.6). Quando $S = \{y\}$, denotaremos a imagem inversa por $(f^{-1}(y), x)$.

Podemos definir de forma análoga a imagem de germes. Porém, é necessária a condição de que o germe seja aberto no ponto x .

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Dizemos que f é *aberta sobre sua imagem em x* se a restrição $f : X \rightarrow f(X)$ é aberta em x , ou seja, para toda vizinhança U contendo $x \in X$, existe uma vizinhança V contendo $f(x)$ em Y tal que $f(U) = V \cap f(X)$.

Definição 1.7. Seja $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ um germe de aplicação. Dizemos que f é *aberta sobre sua imagem* se existe algum representante que é aberto sobre sua imagem em x .

Se um dos representantes do germe de aplicação $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ é aberto sobre sua imagem em x , então qualquer restrição deste representante também será aberto sobre sua imagem em x . Entretanto, pode ser que outros representantes não sejam abertos sobre sua imagem em x . Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.8. Seja $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Esta aplicação não é aberta sobre sua imagem em 0, visto que $f([0, 2\pi)) = S^1$ e tomando, por exemplo, o aberto $[0, \pi)$ de $[0, 2\pi)$, a imagem será o semicírculo superior. Entretanto, sempre que tomarmos um aberto de \mathbb{R}^2 contendo 0, irá existir $\varepsilon > 0$ tal que o aberto intercepta S^1 no ponto $(\cos(2\pi - \varepsilon), \sin(2\pi - \varepsilon))$, ou seja, não é possível obter $V \subset \mathbb{R}^2$ aberto tal que $V \cap S^1 = f([0, \pi))$.

Entretanto, a restrição a qualquer vizinhança $[0, \varepsilon)$, com $0 < \varepsilon < 2\pi$ é aberta sobre sua imagem, visto que retiramos o problema da interseção mencionado acima. Assim, o germe de f em 0 é aberto sobre sua imagem.

Lema 1.9. *Suponhamos que $f : U \rightarrow V$ e $g : V \rightarrow Y$ definem o mesmo germe em x . Se f e g são abertas sobre sua imagem em x , então $f(U)$ e $g(V)$ definem o mesmo germe em $f(x)$.*

Demonstração. De fato, como f e g definem o mesmo germe sobre x , existe uma vizinhança $W \subseteq X$ de x tal que $f|_W = g|_W$. Além disso, como f e g são abertas, existem vizinhanças G e G' de Y tais que $f(W) = f(U) \cap G$ e $g(W) = g(V) \cap G'$. Assim,

$$f(U) \cap G \cap G' = f(W) \cap G \cap G' = g(W) \cap G \cap G' = g(V) \cap G \cap G'.$$

Portanto, $f(U)$ e $g(V)$ definem o mesmo germe em $f(x)$. □

Este lema garante a boa definição da seguinte definição:

Definição 1.10. Seja $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ um germe aberto sobre sua imagem. Definimos o *germe do conjunto imagem* como sendo o germe $(f(U), y)$, em que $f : U \rightarrow Y$ é um representante que é aberto sobre sua imagem em x .

1.1.2 Germes em variedades diferenciáveis

Nesta seção, quando mencionarmos a palavra diferenciável, estaremos tratando de diferenciável de classe C^∞ .

Definição 1.11. Seja $f : (M, x) \rightarrow N$ um germe de aplicação entre variedades diferenciáveis M e N . Diremos que f é *diferenciável de classe C^∞* se algum representante do germe for diferenciável de classe C^∞ em uma vizinhança aberta de x .

Dado um germe de aplicação diferenciável $f : (M, x) \rightarrow N$, podemos considerar sua diferencial $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$, que é a diferencial de algum representante do germe. Consequentemente, é uma aplicação linear entre os respectivos espaços tangentes.

Exemplo 1.12. Sejam $M \subseteq \mathbb{R}^m$ e $N \subseteq \mathbb{R}^p$ abertos e $f : (M, x) \rightarrow N$ um germe de aplicação diferenciável. Neste caso, sua diferencial é dada por

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$u \mapsto Df(x)(u) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) u_i,$$

em que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \right), f = (f_1, \dots, f_p) \text{ e } u = (u_1, \dots, u_m).$$

O posto de um germe $f : (M, x) \rightarrow N$ é o posto de seu diferencial $Df(x)$. Dizemos que um germe é *regular* quando tem posto máximo, ou seja, o mínimo entre $\dim M$ e $\dim N$. Caso contrário, dizemos que é *singular*. Ademais, dizemos que um germe regular é uma *imersão* quando $\dim M \leq \dim N$ e *submersão* quando $\dim M \geq \dim N$.

Finalmente, dizemos que um germe de aplicação diferenciável $\varphi : (M, x) \rightarrow (N, y)$ é um germe *invertível C^∞* ou um germe de *difeomorfismo C^∞* quando um representante $\varphi : U \subset M \rightarrow V \subset N$, U e V vizinhanças abertas de x e y , respectivamente, é um difeomorfismo de classe C^∞ . Em particular, o germe inverso satisfaz $\varphi \circ \varphi^{-1} = id_{(N, y)}$ e $\varphi^{-1} \circ \varphi = id_{(M, x)}$.

1.1.3 O espaço \mathcal{O}_n

Nesta seção, iremos assumir que \mathcal{C} é um corpo algebricamente fechado. Iremos denotar o anel de germes analíticos $f : (\mathcal{C}^n, 0) \rightarrow \mathcal{C}$ por $\mathcal{O}_{\mathcal{C}^n, 0} = \mathcal{O}_n$.

O próximo resultado nos fornece uma importante informação acerca do anel \mathcal{O}_n e pode ser encontrado na página 4 de [1] (Proposição 1.6).

Teorema 1.13. Sejam A um anel e $m \neq (1)$ um ideal de A tal que todo elemento $x \in A \setminus m$ é uma unidade em A . Então, A é um anel local e m é seu ideal maximal.

Seja $\mathcal{M} = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$. De fato, \mathcal{M} é um ideal de \mathcal{O}_n e, pela natureza do anel \mathcal{O}_n , sabemos que um elemento $g \in \mathcal{O}_n$ é uma unidade se, e somente se, $g(0) \neq 0$. Assim, \mathcal{O}_n é um anel local com ideal maximal \mathcal{M} .

Ademais, temos alguns resultados relevantes sobre este anel e seu ideal maximal, que podem ser encontrados em [9].

Proposição 1.14 (Lema de Hadamard). *O anel \mathcal{O}_n é Noetheriano e, quando $\mathcal{C} = \mathbb{C}$, para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{M}^k = \left\{ f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} : f(0) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0) = 0, \text{ para } |\alpha| \leq k-1 \right\},$$

em que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice e $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Os próximos resultados, oriundos da Álgebra Comutativa, desempenharão um importante papel em nosso trabalho. Ambos podem ser encontrados em [9].

Lema 1.15 (de Nakayama). *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel local R com ideal maximal m . Se $mM = M$, então $M = 0$.*

Corolário 1.16. *Sejam M e N submódulos de um R -módulo P , com M finitamente gerado, e suponhamos que $M \subset N + mM$. Então, $M \subset N$.*

Definição 1.17. *Seja I um ideal de uma \mathcal{C} -álgebra A . Definimos a codimensão de I como a \mathcal{C} -dimensão do quociente $\frac{A}{I}$, ou seja,*

$$\text{codim} I = \dim_{\mathcal{C}} \frac{A}{I}.$$

Com isso, conseguimos algumas aplicações desses resultados.

Proposição 1.18. *Sejam I e J ideais de uma \mathcal{C} -álgebra A tais que $I \subseteq J$ e $\text{codim} I < \infty$. Então,*

1. $\text{codim} J \leq \text{codim} I$;
2. $\text{codim} J = \text{codim} I \Rightarrow I = J$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que J tem codimensão finita. Para isso, mostremos que a aplicação canônica ϕ de A/I para A/J dada por $a+I \rightarrow a+J$ é um epimorfismo.

Mostremos que ϕ está bem definida. Se $a+I = b+I$, então $a-b \in I$. Em particular, $a-b \in J$. Daí, segue que $a+J = b+J$, implicando na boa definição de ϕ .

Ademais, $\phi(a+I+b+I) = \phi(a+b+I) = a+b+J = a+J+b+J = \phi(a+I) + \phi(b+I)$, $\phi((a+I)(b+I)) = \phi(ab+I) = ab+J = (a+J)(b+J) = \phi(a+I)\phi(b+I)$ e $\phi(\lambda a+I) = \lambda a+J = \lambda(a+J) = \lambda\phi(a+I)$. Ou seja, ϕ é homomorfismo de K -álgebras.

Por fim, dado $a+J \in A/J$ basta considerar $a+I \in A/I$ que teremos $\phi(a+I) = a+J$.

Portanto, ϕ é um epimorfismo. Consequentemente, A/J tem dimensão finita e, ainda mais, sua dimensão deve ser menor ou igual a dimensão de A/I , provando (1).

Para (2), se A/I possui a mesma dimensão de A/J , então ϕ é um isomorfismo, visto que $\dim \ker \phi = 0$ e, consequentemente, $\ker \phi = \{0\}$. Mas, como $\ker \phi = J/I$, então $I = J$. \square

1.2 Anéis graduados e filtração de anéis

Nesta seção, relembremos algumas definições de Álgebra Comutativa, que serão relevantes no nosso estudo. Nos baseamos principalmente em [1, 8, 10].

Definição 1.19. Seja G um semigrupo abeliano com elemento identidade 0 . Um *anel graduado* é um anel R junto com uma decomposição em soma direta de R como um grupo aditivo $R = \bigoplus_{i \in G} R_i$, satisfazendo $R_i R_j \subset R_{i+j}$.

Definição 1.20. Dado um anel graduado R , um R -módulo graduado é um R -módulo M junto com uma decomposição em soma direta $M = \bigoplus_{i \in G} M_i$ satisfazendo $R_i M_j \subset M_{i+j}$. Um elemento $x \in M$ é *homogêneo* se $x \in M_i$ para algum $i \in G$. Neste contexto, i é chamado *grau* de x .

Um elemento arbitrário $x \in M$ pode ser escrito unicamente da forma $x = \sum_{i \in G} x_i$, com $x_i \in M_i$ e apenas finitos x_i não nulos. Cada x_i é chamado de termo homogêneo de x de grau i .

Um submódulo $N \subset M$ é chamado de *submódulo homogêneo* (ou submódulo graduado) se pode ser gerado por elementos homogêneos. Esta condição é equivalente às seguintes condições:

1. Se $x \in N$, então todo termo homogêneo de x está em N ;
2. $N = \sum_{i \in G} (N \cap M_i)$.

Para um submódulo homogêneo $N \subset M$, sendo $N_i = M_i \cap N$, então $M/N = \bigoplus_{i \in G} M_i/N_i$ é um R -módulo graduado.

Exemplo 1.21. Se considerarmos o anel dos polinômios $\mathcal{C}[x_1, \dots, x_k]$ e definindo A_n o conjunto de todos os polinômios homogêneos de grau n , então $\mathcal{C}[x_1, \dots, x_k] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é um anel graduado.

Definição 1.22. Uma *filtração de um anel* A é uma cadeia decrescente $A = J_0 \supset J_1 \supset \dots$ de ideais tais que $J_n J_m \subset J_{n+m}$. O anel graduado associado $gr(A)$ é definido da seguinte maneira: Seja $gr_n(A)$ o A -módulo quociente J_n/J_{n+1} , para $n \geq 0$. O anel graduado $gr(A)$ é definido por $gr(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} gr_n(A)$ com as operações de soma e produto usuais, definidos por

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (x_n + J_{n+1}) + \sum_{n \in \mathbb{N}} (y_n + J_{n+1}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x_n + y_n + J_{n+1}),$$

em que $x_n, y_n \in J_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e

$$(x + J_{n+1})(y + J_{m+1}) = xy + J_{n+m+1},$$

para $x \in J_n$ e $y \in J_m$.

Definição 1.23. Sejam M e N A -módulos graduados. Um *homomorfismo de A -módulos graduados* é um homomorfismo de A -módulos $\psi : M \rightarrow N$ tal que $\psi(M_n) \subseteq N_n$ para todo $n \geq 0$.

1.3 Teoria da Dimensão

Nesta seção, iremos definir as séries de Poincaré. Nos baseamos principalmente em [1].

Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado Noetheriano. Então, A_0 é um anel Noetheriano e A é finitamente gerado como A_0 -álgebra. Suponhamos que A seja gerado pelos elementos x_1, \dots, x_s de graus k_1, \dots, k_s positivos. Consideremos M um A -módulo graduado finitamente gerado. Então, M é gerado por uma quantidade finita de elementos homogêneos, os quais iremos denotar por m_1, \dots, m_s e denotaremos por r_j o grau de m_j , para cada $j \in \{1, \dots, s\}$.

Todo elemento de M_n , a componente homogênea de M de grau n , é da forma $\sum_j f_j m_j$, em que $f_j(x) \in A$ é homogêneo de grau $n - r_j$. Segue que M_n é finitamente gerado como A_0 -módulo.

Definição 1.24. Seja $\mathcal{M}(A_0)$ a categoria dos A_0 -módulos finitamente gerados e consideremos λ uma função definida de $\mathcal{M}(A_0)$ com valores em \mathbb{Z} . A função λ é chamada de *aditiva* se, para qualquer sequência exata curta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

temos

$$\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'').$$

Como consequência, se considerarmos uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n \longrightarrow 0,$$

teremos

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda(M_i) = 0$$

(ver [1], página 24).

Definição 1.25. Seja λ uma função aditiva com valores em \mathbb{Z} na classe de todos os A_0 -módulos finitamente gerados. A série de Poincaré de M com respeito a λ é a série de potências

$$P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$

O próximo resultado pode ser encontrado em [1], página 117

Teorema 1.26. A série $P(M, t)$ é uma função racional em t da forma $\frac{f(t)}{\prod_{i=0}^s (1 - t^{k_i})}$, em que $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

De acordo com [1], página 119, esta função possui um polo em $t = 1$ e, se A é um anel local Noetheriano, o grau deste polo coincide com a dimensão de A .

1.4 Complexo de Koszul

Neste trabalho, uma ferramenta muito importante que iremos utilizar é o Complexo de Koszul.

Nos baseamos principalmente em [4], [5] e [10].

Seja A um anel comutativo com identidade.

Definição 1.27. Um *complexo* C é uma sequência de A -módulos e A -homomorfismos

$$C: \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots,$$

tal que $f_i \circ f_{i-1} = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Seja $x \neq 0$ um elemento de A . Denotamos por $K(x)$ o seguinte complexo:

$$K_i(x) = 0, \text{ se } i \neq 0, 1$$

$$K_0(x) = A$$

$$K_1(x) = A,$$

em que a diferencial $d: K_1(x) \rightarrow K_0(x)$ é definida por $d(ae_x) = ax$, sendo $a \in A$ e e_x uma base do A -módulo $K_1(x)$. Se $x = (x_1, \dots, x_r)$ é uma família de elementos de A , denotamos por $K(x)$ ou $K(x_1, \dots, x_r)$ o complexo

$$K(x) = K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A \cdots \otimes_A K(x_r),$$

em que

$$\begin{aligned} K_p(x) &= (K(x_1) \otimes_A K(x_2) \otimes_A \cdots \otimes_A K(x_r))_p \\ &:= \bigoplus_{p_1 + \cdots + p_r = p} K_{p_1}(x_1) \otimes_A K_{p_2}(x_2) \otimes_A \cdots \otimes_A K_{p_r}(x_r) \end{aligned}$$

Assim, $K_p(x) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r} A e_{i_1 \dots i_p}$ é um A -módulo finitamente gerado pelos $\binom{r}{p}$ elementos $e_{i_1 \dots i_p} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$, $i_1 < \cdots < i_p$, em que $e_i = e_{x_i}$ e a diferencial $d: K_p(x) \rightarrow K_{p-1}(x)$ é definida por

$$d(e_{i_1 \dots i_p}) = \sum_{\mu=1}^p (-1)^{\mu-1} x_{i_\mu} e_{i_1 \dots \hat{i}_\mu \dots i_p}.$$

Vejam os um exemplo.

Exemplo 1.28. Se $x = (x_1, x_2)$, então

$$K(x) = K(x_1) \otimes_A K(x_2).$$

Assim, para cada $p \in \mathbb{N}$, temos

$$(K(x_1) \otimes_A K(x_2))_p = \bigoplus_{p_1+p_2=p} K_{p_1}(x_1) \otimes_A K_{p_2}(x_2).$$

Vejamos,

$$\begin{aligned} (K(x_1) \otimes_A K(x_2))_0 &= K_0(x_1) \otimes_A K_0(x_2) \\ &= A \otimes_A A \\ &= A \binom{2}{0}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (K(x_1) \otimes_A K(x_2))_1 &= (K_1(x_1) \otimes_A K_0(x_2)) \oplus (K_0(x_1) \otimes_A K_1(x_2)) \\ &= (A \otimes_A A) \oplus (A \otimes_A A) \\ &= A \oplus A \\ &= A \binom{2}{1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (K(x_1) \otimes_A K(x_2))_2 &= (K_2(x_1) \otimes_A K_0(x_2)) \oplus (K_1(x_1) \otimes_A K_1(x_2)) \oplus (K_0(x_1) \otimes_A K_2(x_2)) \\ &= (0) \oplus (A \otimes_A A) \oplus (0) \\ &= A \\ &= A \binom{2}{2}; \end{aligned}$$

$$(K(x_1) \otimes_A K(x_2))_p = 0, p \geq 3.$$

As aplicações diferenciais serão da forma:

$$\begin{aligned} d_2 : K_2(x) &\rightarrow K_1(x) \\ (e_1 \otimes e_2) &\mapsto x_1 e_2 - x_2 e_1 \\ d_1 : K_1(x) &\rightarrow K_0(x) \\ e_i &\mapsto x_i. \end{aligned}$$

Agora, dado M um A -módulo, dado $x \in A$, escreveremos $K(x, M)$ para o complexo produto tensorial $K(x) \otimes_A M$. Assim,

$$\begin{aligned} K_n(x, M) &= 0, \text{ se } n \neq 0, 1 \\ K_0(x, M) &= K_0(x) \otimes_A M \simeq M \\ K_1(x, M) &= K_1(x) \otimes_A M \simeq M, \end{aligned}$$

e a diferencial $d : K_1(x, M) \rightarrow K_0(x, M)$ é definida por $d(e_x \otimes m) = xm, m \in M$.

Os módulos de homologia de $K(x, M)$ são:

$$\begin{aligned} H_0(K(x), M) &= \frac{M}{xM} \\ H_1(K(x), M) &= \text{Ann}_M(x) \\ H_i(K(x), M) &= 0, \text{ se } i \neq 0, 1, \end{aligned}$$

em que $\text{Ann}_M(x)$ é o conjunto dos elementos $m \in M$ tal que $xm = 0$.

Iremos denotá-los por $H_i(x, M)$. Ademais, se $x = (x_1, \dots, x_r)$ é uma família de elementos de A , escrevemos $K(x_1, \dots, x_r, M)$, ou $K(x, M)$ para o complexo produto tensorial

$$K(x_1, \dots, x_r) \otimes_A M = K(x) \otimes_A M.$$

Assim, o módulo $K_p(x, M)$ é uma soma direta de módulos $e_{i_1 \dots i_p} \otimes_A M$, em que $i_1 < \dots < i_p$ e a diferencial $d : K_p(x, M) \rightarrow K_{p-1}(x, M)$ é dada por

$$d(e_{i_1 \dots i_p} \otimes m) = \sum_{\mu=1}^p (-1)^{\mu+1} e_{i_1 \dots \hat{i}_\mu \dots i_p} \otimes (x_{i_\mu} m).$$

Denotaremos o p -ésimo módulo de homologia do Complexo de Koszul $K(x, M)$ por $H_p(x, M)$. Assim,

$$H_0(x, M) = \frac{M}{(x_1, \dots, x_p)M}$$

$$H_r(x, M) = \{m \in M : x_i m = 0, \forall i \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Definição 1.29. Um complexo $L = (L_n)$, $n \geq 0$ é chamado um *complexo acíclico sobre M* se $H_p(L) = 0$, para $p > 0$ e $H_0(L) = M$. Ou seja, a *sequência*

$$\dots \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

é *exata*.

Definição 1.30. Sejam A um anel e M um A -módulo. Uma *M -sequência* ou uma *sequência regular com respeito a M* é uma sequência $\{a_1, \dots, a_n\}$ de elementos de A tais que

1. a_i não é divisor de zero de $\frac{M}{(a_1, \dots, a_{i-1})M}$, $i \in \{1, \dots, n\}$;
2. $M \neq (a_1, \dots, a_n)M$.

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrado em [8], página 128 (Teorema 16.5).

Teorema 1.31. *Sejam A um anel, M um A -módulo e x_1, \dots, x_n uma sequência regular. Então, $H_p(x, M) = 0$, para $p > 0$ e $H_0(x, M) = M/xM$.*

1.5 Complexo de Cadeia Celular

Em alguns resultados deste trabalho, iremos utilizar o complexo de cadeia celular. Nesta seção, nos baseamos em [5].

Definição 1.32. Seja $k \geq 0$. Um *simplexo k -dimensional*, ou *k -simplexo*, é o fecho convexo σ de $k+1$ pontos geometricamente independentes $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Escrevemos $\sigma = v_0 v_1 \dots v_k$. Os pontos v_i são chamados *vértices* de σ . Fixado um subconjunto de índices $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, \dots, k\}$, o simplexo $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$ é chamado de *face* de σ .

Definição 1.33. Um *poliedro* $K \subset \mathbb{R}^n$ é uma coleção finita de simplexos de \mathbb{R}^n que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se σ é um simplexo de K , então todas as suas faces também são simplexos de K ;
2. Se σ_1 e σ_2 são simplexos de K , então $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é vazia ou é uma face comum aos dois simplexos, ou seja, é também um simplexo de K .

Consideremos os conjuntos $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ e $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \partial B^n$. Seja X^* um espaço de Hausdorff e X um subconjunto fechado de X^* tal que $X^* - X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda^n$, em que a união é disjunta e cada e_λ^n é um subconjunto aberto, homeomorfo a B^n . Chamaremos e_λ^n de *n-célula* ou *n-célula aberta*.

Para cada índice $\lambda \in \Lambda$, existe uma aplicação contínua $f_\lambda : \overline{B}^n \rightarrow \overline{e}_\lambda^n$ que aplica B^n homeomorficamente em e_λ^n e $f_\lambda(S^{n-1}) \subset X$. Esta aplicação é chamada de *aplicação característica*.

Definição 1.34. Uma estrutura de *CW-complexo* em um espaço X (Hausdorff) é uma sequência ascendente de subespaços fechados em X

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. X^0 tem topologia discreta;
2. para $n > 0$, X^n é obtido de X^{n-1} colando uma coleção de n -células e_λ^n via aplicações $f_\lambda : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$;
3. X é a união dos espaços X^i para $i \geq 0$;
4. o espaço X e os subespaços X^q têm a topologia fraca: um subconjunto A é fechado se, e somente se, $A \cap \overline{e}^n$ é fechado em \overline{e}^n , para qualquer n -célula e^n , $n = 0, 1, 2, \dots$

Chamaremos X^n de *n-esqueleto*.

Agora, definiremos os grupos de homologia relativa. Sejam X um espaço e A um subespaço de X . Consideremos $C_n(X)$ o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto dos n -simplexos e_λ^n de X . Seja $C_n(X, A)$ o grupo quociente $\frac{C_n(X)}{C_n(A)}$. A aplicação de bordo

$$\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

é tal que $\partial(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$. Portanto, induz uma aplicação de bordo quociente

$$\partial : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A).$$

Assim, temos uma sequência de aplicações de bordo

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots \quad (1.1)$$

Observemos que $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. Assim, (1.1) é um complexo de cadeias, que chamamos de *complexo de cadeia celular* de X .

Ademais, podemos considerar os grupos de homologia $\ker \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}$ deste complexo, que chamaremos de *grupo de homologia relativa* $H_n(X, A)$. Esses grupos, para qualquer par (X, A) , se encaixam em uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_n} H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0,$$

em que i_n é a aplicação que associa $x + \text{Im}(\partial)$ ($x \in \ker(\partial) \subset C_n(A)$) em $i(x) + \text{Im}(\partial)$ ($i(x) \in \ker(\partial) \subset C_n(X)$), e i é a aplicação inclusão de $C_n(A)$ em $C_n(X)$. Da mesma forma, definimos j_n em função da aplicação quociente j de $C_n(X)$ em $C_n(X)/C_n(A)$.

1.6 Anéis Cohen-Macaulay

Outro objeto de suma importância que utilizaremos para cumprir o objetivo deste trabalho, são os anéis Cohen-Macaulay, os quais introduziremos nesta seção. Nesta seção, nos baseamos em [1], [2], [6] e [10].

Definição 1.35 (Dimensão de Krull). Seja A um anel noetheriano. Uma *cadeia de primos* é uma sequência finita estritamente crescente $p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n$ de ideais primos de A . O *comprimento* da cadeia é n . Definimos a *dimensão* de A como sendo o supremo dos comprimentos de todas as cadeias de ideais primos de A .

Definição 1.36 (Profundidade). Sejam A um anel, $I \subset A$ um ideal e M um A -módulo. Se $M \neq IM$, então o comprimento maximal n de uma M -sequência $a_1, \dots, a_n \in I$ é chamado de I -profundidade de M e denotado por $\text{depth}(I, M)$. Se $M = IM$, por convenção a I -profundidade de M é ∞ .

Se estivermos trabalhando com um anel local (A, m) , então chamaremos a m -profundidade de M somente de *profundidade de M* e denotaremos $\text{depth}(m, M) := \text{depth}(M)$.

Definição 1.37. Seja M um A -módulo e consideremos $A_M = A/\text{Ann}(M)$. A dimensão de M , denotado por $\dim(M)$, é definido como a dimensão do anel A_M .

Definição 1.38. Seja M um A -módulo. Uma cadeia de submódulos de M é uma sequência (M_i) , $0 \leq i \leq n$ de submódulos de M tal que

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0.$$

O *comprimento* da cadeia é n . Uma *série de composição* de M é uma cadeia maximal, ou equivalentemente, todo quociente M_{i-1}/M_i é simples, ou seja, os únicos submódulos do quociente são 0 e ele mesmo.

De acordo com alguns resultados clássicos de Álgebra Comutativa (ver [1]), sabemos que o comprimento de séries de composição de um mesmo módulo coincidem. Assim, podemos definir o *comprimento* de M como sendo o comprimento de qualquer cadeia de composição de M .

Ademais, se o módulo M for Noetheriano e Artiniano, ele é chamado de *módulo de comprimento finito*.

O próximo resultado nos dá uma relação importante entre dimensão e comprimento e sua demonstração pode ser encontrada em [1], página 78.

Proposição 1.39. *Seja V um \mathcal{C} -espaço vetorial. Então, as seguintes condições são equivalentes.*

1. *O \mathcal{C} -espaço vetorial V tem dimensão finita;*
2. *O \mathcal{C} -módulo V tem comprimento finito;*
3. *Toda cadeia ascendente em V é estacionária;*
4. *Toda cadeia decrescente em V é estacionária.*

Além disso, se uma das condições ocorrer, teremos que a dimensão de V é igual ao comprimento de V .

Definição 1.40. Sejam A um anel noetheriano local com maximal m e M um A -módulo não nulo finitamente gerado de dimensão n . Uma família (x_1, \dots, x_s) de elementos de m é chamado *sistema de parâmetros* para M se $\frac{M}{(x_1, \dots, x_s)M}$ é de comprimento finito, e se $s = n$.

Teorema 1.41. *Sejam A um anel Noetheriano, $I = (y_1, \dots, y_n)$ um ideal de A e M um A -módulo finito tal que $M \neq IM$. Se $q = \sup\{i : H_i(y, M) \neq 0\}$, então qualquer M -sequência maximal em I tem comprimento $n - q$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [8], página 131.

No restante desta seção, iremos considerar A um anel noetheriano local com ideal maximal $m = m(A)$ e M um A -módulo finitamente gerado.

Definição 1.42. Um A -módulo M é chamado de *módulo Cohen-Macaulay* se $\dim(M) = \text{depth}(M)$. Um anel A é chamado *anel Cohen-Macaulay* se é um módulo Cohen-Macaulay quando visto como um módulo sobre si mesmo.

Exemplo 1.43. Um anel artiniano local é um anel Cohen-Macaulay; um domínio de integridade local de dimensão 1 é Cohen-Macaulay.

Teorema 1.44. *Em um A -módulo Cohen-Macaulay M , todo sistema de parâmetros de M é uma sequência regular de M .*

A demonstração pode ser encontrada em [10], página 65.

Definição 1.45. Seja S um semigrupo abeliano. O grupo de Grothendick de S é $S \times S / \sim$, em que \sim é a relação de equivalência: $(s, t) \sim (u, v)$ se existe $r \in S$ tal que $s + v + r = t + u + r$. Este é um grupo abeliano cuja adição é dada por $(s, t) + (u, v) = (s + u, t + v)$, com elemento neutro (s, s) e inverso $-(s, t) = (t, s)$.

Consideremos o grupo \mathbb{Z}^k e um conjunto I finito de homomorfismos $\varphi : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}$.

Definição 1.46. Definimos o *semigrupo quase cônico* como o conjunto

$$P = \{m \in \mathbb{Z}^k : \forall \varphi \in I, \varphi(m) \geq 0\},$$

que é um semigrupo de \mathbb{Z}^k . Diremos que P é de dimensão d se P gera sobre \mathbb{Z}^k um grupo de classificação d , ou seja, o grupo de Grothendick do semigrupo P é isomorfo à \mathbb{Z}^d . Um semigrupo quase cônico P é chamado de *cônico* se não contém um subgrupo isomorfo à \mathbb{Z} .

Consideremos as inclusões naturais $\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ e estendamos por linearidade cada homomorfismo que define o semigrupo P a um homomorfismo $\varphi' : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto

$$P' = \{t \in \mathbb{R}^k : \forall \varphi \in I, \varphi'(t) \geq 0\}$$

é um cone convexo de dimensão d sobre \mathbb{R}^k e temos $P = P' \cap \mathbb{Z}^k$.

Definição 1.47. Chamaremos um subsemigrupo P_1 de um semigrupo cônico de *subsemigrupo fronteira* se existe um subconjunto $I_1 \subset I$ tal que

$$P_1 = \{m \in P : \forall \varphi \in I_1, \varphi(m) = 0\}.$$

Cada subsemigrupo fronteira de um semigrupo cônico é por si só um semigrupo cônico e a relação “ A é um subsemigrupo fronteira sobre B ” é transitiva. Do ponto de vista geométrico, cada subsemigrupo fronteira de P pode ser descrito como a interseção de P sobre uma face de dimensão q do cone P' .

Sejam P um semigrupo e $f : P \rightarrow \mathcal{C}$ uma função sobre P com valores em \mathcal{C} . Chamamos f de *finita* se o conjunto $\text{supp } f = \{n \in P : f(n) \neq 0\}$ é finito. Designamos por $\mathcal{C}[P]$ o anel de semigrupo (a \mathcal{C} -álgebra) do semigrupo P , ou seja, a \mathcal{C} -álgebra de todas as funções finitas sobre P com valores em \mathcal{C} , com as operações de adição $((f + g)(n) = f(n) + g(n))$, convolução $((f \star g)(n) = \sum_{x+y=n} f(x)g(y))$ e multiplicação por elementos de \mathcal{C} ($\alpha(f(n)) = \alpha f(n)$).

Se sobre o semigrupo P a equação $m = x + y$, para cada $m \in P$ possui apenas número finito de soluções, podemos definir a convolução de duas funções quaisquer sobre P com valores em \mathcal{C} . Neste caso, todas as funções sobre P com valores em \mathcal{C} formam uma \mathcal{C} -álgebra que denotaremos por $\mathcal{C}[[P]]$. Podemos mostrar que tal \mathcal{C} -álgebra é definida para cada semigrupo cônico.

Observemos que, de acordo com [7], se P é um semigrupo quase cônico, então $\mathcal{C}[P] \simeq \{f \in \mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}] : \text{supp } f \subset P\}$, em que $\mathcal{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}]$ representa o anel dos polinômios de Laurent nas variáveis $x_1, x_1^{-1}, \dots, x_k, x_k^{-1}$.

Definição 1.48. Os anéis $\mathcal{C}[P]$, em que P é um semigrupo quase cônico, e $\mathcal{C}[[P]]$, em que P é um semigrupo cônico, serão chamados anéis cônicos do semigrupo P (sobre o corpo \mathcal{C}).

Proposição 1.49. *Os anéis cônicos são Noetherianos.*

Demonstração. De fato, um semigrupo quase cônico possui um número finito de geradores. Consequentemente, o anel cônico é um anel quociente sobre o anel de polinômios ou sobre o anel das séries formais em um número finito de variáveis. \square

A demonstração do próximo teorema pode ser encontrada em [6].

Teorema 1.50. *Os anéis cônicos são anéis Cohen-Macaulay.*

Número de Milnor e de Newton

Nesta seção, a principal referência utilizada foi [7].

Neste trabalho, fixado um corpo \mathcal{C} , quando dissermos que $\text{char } \mathcal{C} = 0$, estaremos nos referindo a \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Assim, se \mathcal{C} é algebricamente fechado e $\text{char } \mathcal{C} = 0$, estamos nos referindo a \mathbb{C} . Denotaremos por $\bar{\mathcal{C}}$ o fecho algébrico de \mathcal{C} . Denotaremos por \mathbb{Z}, \mathbb{N} e \mathbb{R}_+ os conjuntos dos números inteiros, inteiros não negativos e os reais não negativos, respectivamente.

Ademais, o ideal gerado pelos elementos f_1, \dots, f_k de um certo anel será denotado por (f_1, \dots, f_k) . Para $f : \mathcal{C}^k \rightarrow \mathcal{C}$, o ideal jacobiano $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ será denotado por J_f .

Para um semigrupo P , iremos denotar $\mathcal{C}[P]$ o anel de semigrupo de P sobre \mathcal{C} .

O principal invariante que estudaremos neste trabalho é o número de Milnor, este invariante pode ser definido de várias maneiras equivalentes. Neste trabalho, adotaremos a seguinte definição que será mais coerente com nossos estudos.

Definição 2.1. Chamamos *multiplicidade ou número de Milnor* de um ponto singular isolado $0 \in \mathbb{C}^k$ de um germe analítico $f : (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, o número

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_k}{J_f}, \quad (2.1)$$

em que \mathcal{O}_k é a álgebra dos germes de funções analíticas $h : (\mathbb{C}^k, 0) \rightarrow \mathbb{C}$.

Exemplo 2.2. Seja $f(x, y) = x^3 - y^2$. Então, $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Assim,

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{J_f} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)} = 2.$$

Agora, iremos definir outro importante objeto, que é o Poliedro de Newton. Para isso, precisaremos de algumas definições preliminares.

Definição 2.3. Seja $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$, em que $x^n = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ e $a_n \in \mathcal{C}$, para todo $n \in \mathbb{Z}^k$. Definimos o suporte de f como $\text{supp } f = \{n \in \mathbb{Z}^k : a_n \neq 0\}$.

Definição 2.4. Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$. Diremos que f é *conveniente* se para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ o monômio $x_i^{n_i}$ aparece em f com coeficiente não nulo, para algum n_i .

Exemplo 2.5. Sejam $f(x, y) = x^2 - y^3 + xy$ e $g(x, y) = x^2 + xy$. Então, de acordo com a definição anterior, f é conveniente, enquanto g não é conveniente.

Agora, definiremos o Poliedro de Newton e a parte principal newtoniana.

Definição 2.6. Seja $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$.

- $\Gamma_+(f)$ denota a cobertura convexa sobre \mathbb{R}_+^k do conjunto $\cup(n + \mathbb{R}_+^k)$, em que $n \in \text{supp } f \setminus \{0\}$;
- A *fronteira de Newton da série f na origem* é o poliedro $\Gamma(f)$ consistindo na união das faces compactas do poliedro $\Gamma_+(f)$;
- A *parte principal newtoniana da série f na origem* é o polinômio $f_0 = \sum_{n \in \Gamma(f)} a_n x^n$;
- $\Gamma_-(f)$ denota a reunião de todos os segmentos de origem 0 e de extremidades em $\Gamma(f)$.

Se uma série é conveniente, então a fronteira de Newton dessa série irá interceptar todas as faces coordenadas q -dimensionais ($1 \leq q \leq k-1$) de \mathbb{R}^k e, conseqüentemente, qualquer reta contendo a origem irá interceptar a fronteira de Newton.

Veamos um exemplo englobando as definições acima.

Exemplo 2.7. Seja $f = x^3 - y^2 + 3y^3$. De fato, $\text{supp } f = \{(3, 0), (0, 2), (0, 3)\}$ e f é conveniente em $\mathbb{C}[[x, y]]$. Os conjuntos $\Gamma_+(f), \Gamma(f), \Gamma_-(f)$ são representados na Figura (2.1). Ademais, a parte

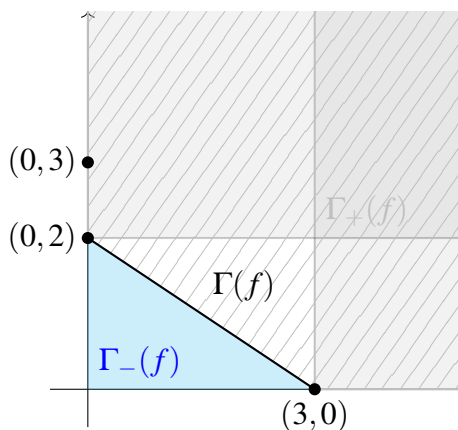


Figura 2.1: Representação gráfica dos conjuntos $\Gamma_+(f), \Gamma(f)$ e $\Gamma_-(f)$.

principal newtoniana na origem de f é dada por $f_0 = x^3 - y^2$.

A seguir, introduziremos uma característica geométrica importante da fronteira de Newton, que é conhecida como *número de Newton*.

Definição 2.8. Seja S um poliedro compacto de \mathbb{R}_+^k . Definimos o *número de Newton* do poliedro S como sendo a soma alternada

$$v(S) = k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}1!V_1 + (-1)^k,$$

em que V_k é o volume de dimensão k do poliedro S e, para $1 \leq q \leq k-1$, V_q é a soma dos volumes q -dimensionais das interseções de S com os planos coordenados de dimensão q .

Exemplo 2.9. Consideremos o poliedro representado na seguinte figura.

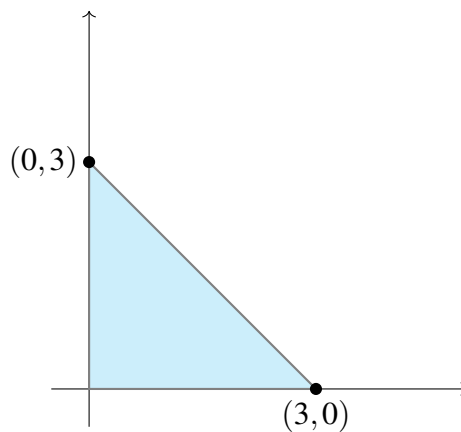


Figura 2.2: Poliedro S .

Neste caso, V_2 é a área do triângulo e V_1 é a soma do comprimento dos segmentos deste triângulo que estão nos eixos. O número de Newton deste poliedro é $v(S) = 2 \frac{3 \cdot 3}{2} - (3 + 3) + 1 = 4$.

Definição 2.10. Seja $f \in \mathcal{A}$. Se f é conveniente, definimos o número de Newton de f por $v(f) = v(\Gamma_-(f))$. Caso contrário, se f é uma série formal não conveniente de tal forma que os monômios das variáveis x_1, \dots, x_q possuem coeficiente nulo, mas para as demais variáveis x_{q+1}, \dots, x_k os coeficiente são não nulos, definimos o número de Newton de f por

$$v(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} v(f + x_1^m + \cdots + x_q^m).$$

Exemplo 2.11. Novamente, consideremos o polinômio $f(x, y) = x^3 - y^2$. Então, os conjuntos Γ_+ , Γ e Γ_- de f são representados na figura abaixo.

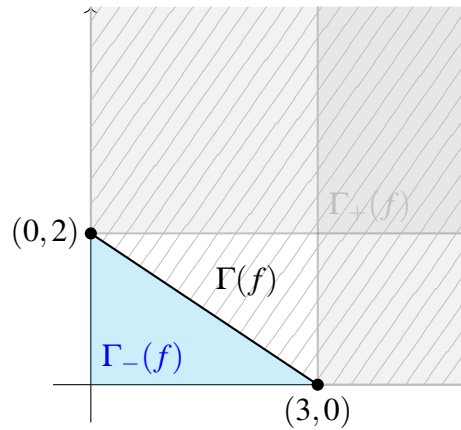


Figura 2.3: Poliedro de Newton de f .

Neste caso, o número de Newton será

$$v(f) = 2! \frac{3 \cdot 2}{2} - (3 + 2) + 1 = 2.$$

Agora, consideremos o polinômio $g(x, y) = x^2 + xy$. Então, os conjuntos Γ_+ , Γ e Γ_- de g são representados na figura abaixo.

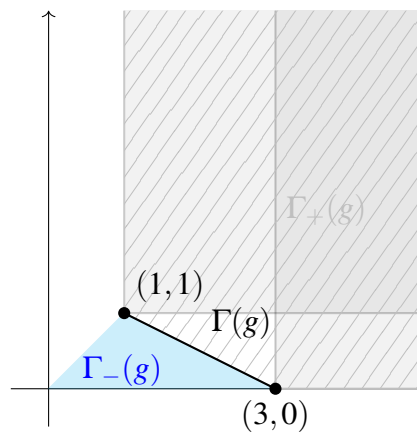


Figura 2.4: Poliedro de Newton de g .

Neste caso, $v(g) = \sup_{m \in \mathbb{N}} v(g + y^m)$. Entretanto, dado $m \in \mathbb{N}$ qualquer,

$$v(g + y^m) = 2! \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{m-1}{2} \right) - 2 - m + 1 = 1,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, $v(g) = 1$.

Filtração de Newton

Nesta seção iremos definir a filtração de Newton, que será de suma importância para este trabalho. Para isso, denotaremos por \mathcal{A} o anel $\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ e, fixada uma série conveniente $f \in \mathcal{A}$, denotaremos sua fronteira de Newton $\Gamma(f)$ simplesmente por Γ .

Construiremos a partir de Γ uma filtração decrescente $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots$ do anel \mathcal{A} . Para isso, precisaremos de uma aplicação homogênea $h : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ de grau 1 que satisfaz a condição $h(\Gamma) = 1$.

Exemplo 3.1. Mostremos que existe uma função h satisfazendo as condições acima. Como f é conveniente, Γ intercepta todos os planos coordenados q -dimensionais ($1 \leq q \leq k-1$) de \mathbb{R}^k . Assim, dado $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$ arbitrário, consideremos a reta $r_x : (y_1, \dots, y_k) = t(x_1, \dots, x_k)$, $t \in \mathbb{R}$ que liga x à origem. Definimos $h : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ por $h(x) = \frac{|x|}{|x_0|}$, em que x_0 é o ponto de interseção de r_x com Γ .

A aplicação h está bem definida, pois para cada $x \in \mathbb{R}_+^k$, r_x intercepta Γ em somente um ponto. Além disso, se $x \in \Gamma$, $h(x) = 1$ e, dado $t \in \mathbb{R}_+$ qualquer,

$$h(tx) = \frac{|tx|}{|x_0|} = t \frac{|x|}{|x_0|} = th(x).$$

Proposição 3.2. Existe $M > 0$ natural tal que $h(\mathbb{N}^k) \subset \frac{1}{M}\mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ arbitrário e $r : y = tx$, $t \in \mathbb{R}$ a reta que liga x à origem. Consideremos Δ a face de Γ que intercepta r . Para simplificar a demonstração, suporemos que Δ é um tem dimensão $k-1$. Os demais casos seguem do fato de que as faces de dimensão q com $1 \leq q \leq k-2$ de Γ são interseções de faces de dimensão maximal de Γ .

Sejam $P_i = (p_{i_1}, \dots, p_{i_k}) \in \mathbb{N}^k$, $i \in \{1, \dots, k\}$ vértices da face Δ . Então, se $X \in \Delta$, devemos ter

$$\det \begin{bmatrix} X - P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Logo, como r intercepta Δ , existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\det \begin{bmatrix} tx - P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.1)$$

Como os vetores que ligam a origem a x e a origem a P_1 não são coplanares com os outros vetores da matriz,

$$\det \begin{bmatrix} x \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix} \neq 0, \det \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Como o determinante é k -linear sobre as linhas da matriz, segue de (3.1) que

$$t = \frac{\det \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} x \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}.$$

Agora, na notação do Exemplo (3.1), temos $tx = x_0$. Logo, $x = \frac{1}{t}x_0$ e, logo, $h(x) = \frac{1}{t}h(x_0) = \frac{1}{t}$, ou seja,

$$h(x) = \frac{\det \begin{bmatrix} x \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}.$$

Como Γ é a união das faces compactas de $\Gamma_+(f)$, que são finitas, então há uma quantidade finita de faces de dimensão $k-1$, $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Assim, considerando P_i^j , $i \in \{1, \dots, k\}$ os vértices de Δ_j , para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, definimos

$$M = \prod_{j=1}^n \left(\det \begin{bmatrix} P_1^j \\ P_2^j - P_1^j \\ \vdots \\ P_k^j - P_1^j \end{bmatrix} \right).$$

Portanto, teremos

$$h(x) = \frac{1}{M} N(\Delta_j) \det \begin{bmatrix} x \\ P_2^j - P_1^j \\ \vdots \\ P_k^j - P_1^j \end{bmatrix} \in \frac{1}{M} \mathbb{N},$$

em que Δ_j é a face que r intercepta e $N(\Delta_j)$ é o produto dos determinantes de M que não aparecem no denominador de $h(x)$. \square

Exemplo 3.3. Seja $f(x, y) = x^2 - y^3 + xy$. Então, $\text{supp } f = \{(2, 0), (1, 1), (0, 3)\}$ e a fronteira de Newton de f é representada pela seguinte figura:

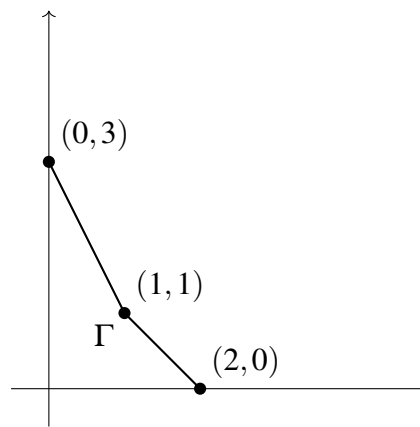


Figura 3.1: Fronteira de Newton de f .

Sejam Δ_1, Δ_2 as faces de maior dimensão de Γ , como ilustra a seguinte figura:

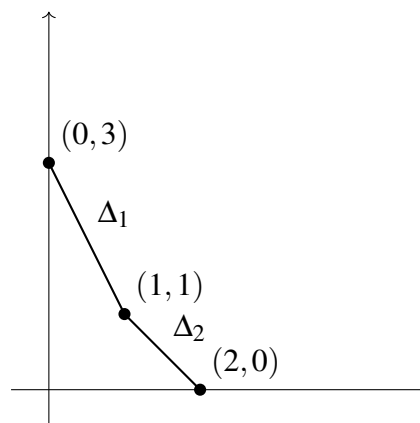


Figura 3.2: Faces de $\Gamma(f)$

Δ_1 e Δ_2 são descritas pela equações $2a + b = 3$ e $a + b = 2$, respectivamente. Ademais, dado um ponto (x, y) arbitrário em \mathbb{R}_+^2 , a equação da reta r que liga este ponto à origem é dada por $-ya + xb = 0$.

Se $r \cap \Delta_1 \neq \emptyset$, o ponto de interseção das retas tem coordenadas $\left(\frac{3x}{2x+y}, \frac{3y}{2x+y}\right)$.

Se $r \cap \Delta_2 \neq \emptyset$, o ponto de interseção das retas tem coordenadas $\left(\frac{2x}{x+y}, \frac{2y}{x+y}\right)$.

Consideremos agora uma função $h : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ homogênea de grau 1 tal que $h(\Gamma) = 1$. Como (x, y) é colinear com o ponto de interseção (x_0, y_0) da reta r com Γ , temos $(x, y) = \lambda(x_0, y_0)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, $h(x, y) = \lambda h(x_0, y_0) = \lambda$.

Logo, para determinar o valor de $h(x, y)$ basta determinar λ . Ora, como $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, teremos

$$\lambda = \frac{\|(x, y)\|}{\|(x_0, y_0)\|}.$$

Assim,

$$h(x, y) = \lambda = \begin{cases} \frac{\|(x, y)\|}{\left\|\left(\frac{3x}{2x+y}, \frac{3y}{2x+y}\right)\right\|} = \frac{2x+y}{3}, & \text{se } x \leq y, \\ \frac{\|(x, y)\|}{\left\|\left(\frac{2x}{x+y}, \frac{2y}{x+y}\right)\right\|} = \frac{x+y}{2}, & \text{se } x > y. \end{cases}$$

Definição 3.4. Considerando M o mínimo tal que $h(\mathbb{N}^k) \subset \frac{1}{M}\mathbb{N}$, definimos a aplicação $\phi : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ como sendo $\phi = M(h|_{\mathbb{N}^k})$.

Proposição 3.5. A aplicação ϕ é convexa, ou seja, $\phi(a+b) \geq \phi(a) + \phi(b)$, para todos $a, b \in \mathbb{N}^k$.

Demonstração. Seja $\psi : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $\psi = Mh$. Por definição, $\psi|_{\mathbb{N}^k} = \phi$. Assim, se demonstrarmos que ψ é convexa, conseqüentemente, ϕ também será convexa.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^k$ arbitrários tais que, sendo r_a, r_b e r_{a+b} as retas que ligam a, b e $a+b$ a origem, respectivamente, r_a e r_b intersectam faces distintas de Γ , como ilustra a Figura (3.3).

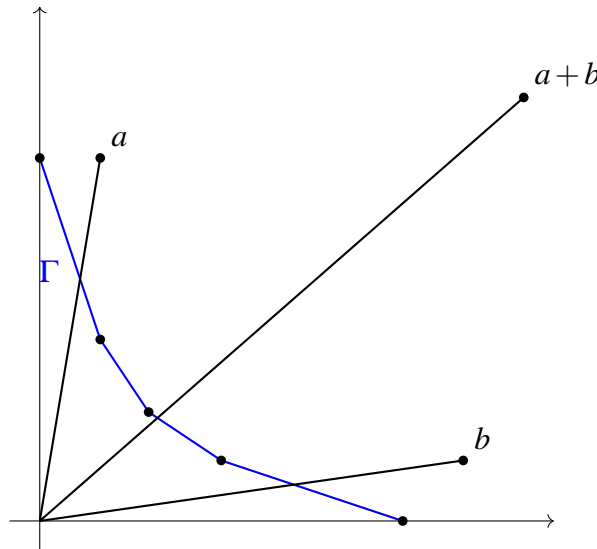


Figura 3.3: Γ e retas que ligam a, b e $a+b$ à origem.

Consideremos o hiperplano Π que liga os pontos do suporte de f e estão nos eixos coordenados de \mathbb{R}^k , e as interseções a^1, b^1 e $(a+b)^1$ de r_a, r_b e r_{a+b} com Π e a^0, b^0 e $(a+b)^0$ com Γ , como a Figura (3.4).

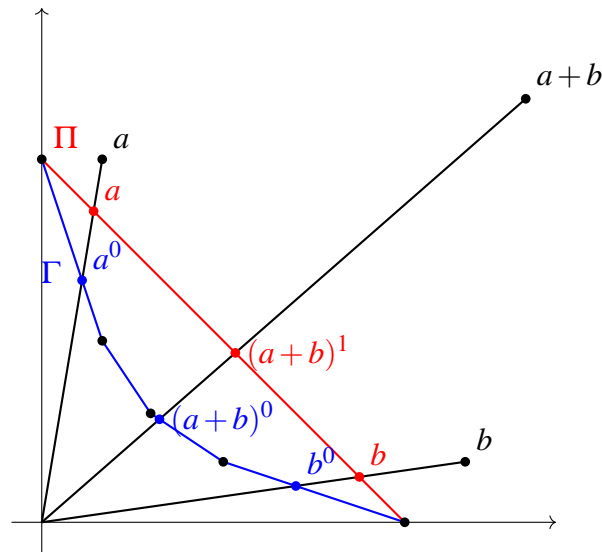


Figura 3.4: Γ e Π .

Agora, como b , b^0 e b^1 são colineares, existem t^0 e t^1 reais tais que $b = t^0 b^0$ e $b = t^1 b^1$. Analogamente, existem s^0 e s^1 reais tais que $a = s^0 a^0$ e $a = s^1 a^1$. Considerando os segmentos paralelos à Π que passam por a e b e interceptam r_{a+b} , pelo Teorema de Tales, os pontos que interceptam $r(a+b)$ serão $t^1(a+b)^1$ e $s^1(a+b)^1$, como ilustra a Figura (3.5).

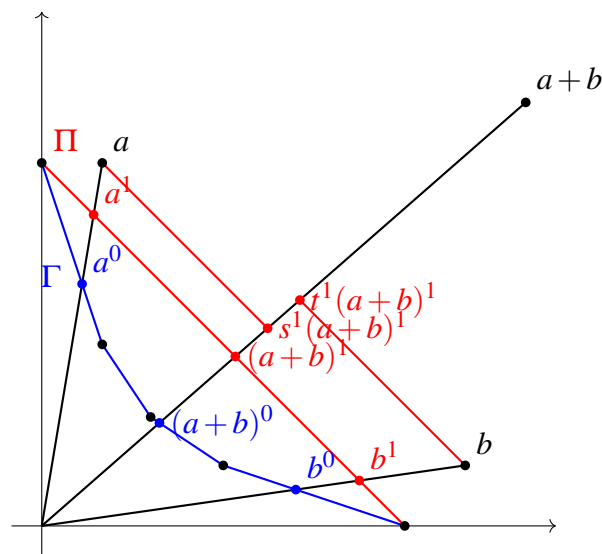


Figura 3.5: Segmentos que intersectam r_{a+b} .

Mostremos que $t^1(a+b)^1 + s^1(a+b)^1 = (a+b)$. De fato, temos $(a+b) = \lambda^1(a+b)^1$ para algum $\lambda^1 \in \mathbb{R}$. Sendo $a^1 = \frac{1}{s^1}a$ e $b^1 = \frac{1}{t^1}b$, consideremos P_1, \dots, P_k pontos quaisquer de Π de tal forma que $\{P_j - P_1, j \in \{2, \dots, k\}\}$ geram Π . Então,

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{s^1}a - P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{t^1}b - P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^1}(a+b) - P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Daí,

$$s^1 = \frac{\det \begin{bmatrix} a \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}; t^1 = \frac{\det \begin{bmatrix} b \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}; \lambda^1 = \frac{\det \begin{bmatrix} a \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}} + \frac{\det \begin{bmatrix} b \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 - P_1 \\ \vdots \\ P_k - P_1 \end{bmatrix}}.$$

Logo, $\lambda^1 = s^1 + t^1$. Consequentemente, $t^1(a+b)^1 + s^1(a+b)^1 = \lambda^1(a+b)^1 = a+b$. Agora, consideremos para cada interseção de faces de Γ a reta coplanar com às retas r_a e r_b que liga a origem e a interseção das faces no plano determinado por r_a e r_b .

Em seguida, tracemos segmentos neste plano paralelos às faces em que estão a^0 e b^0 , partem de a e b e intersectam as retas criadas. A partir desses novos pontos, traçamos segmentos paralelos às faces que os ligam às outras retas criadas e repetimos este processo até que os segmentos intersectem r_{a+b} . Novamente pelo Teorema de Tales, teremos que os pontos de interseção desses segmentos com r_{a+b} serão $s^0(a+b)^0$ e $t^0(a+b)^0$, como ilustra a Figura (3.6):

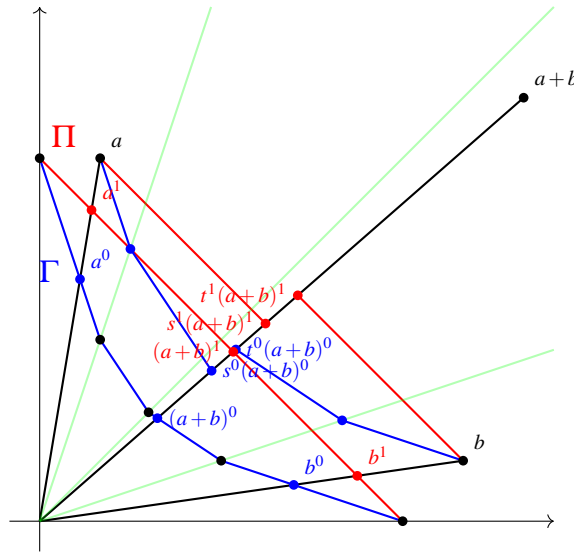


Figura 3.6: Segmentos auxiliares.

Agora, como o Poliedro de Newton é a cobertura convexa de $\cup_{n \in \text{supp } f \setminus \{0\}} n + \mathbb{R}_+^k$, segue que $t^0|(a+b)^0| < t^1|(a+b)^1|$ e $s^0|(a+b)^0| < s^1|(a+b)^1|$. Daí, sendo $a+b = \lambda^0(a+b)^0$, $\lambda^0 \in \mathbb{R}$ teremos

$$(t^0 + s^0)|(a+b)^0| < (t^1 + s^1)|(a+b)^1| = |a+b| = \lambda^0|(a+b)^0|$$

Assim, $\lambda^0 > t^0 + s^0$ e, consequentemente,

$$\psi(a+b) = \lambda^0 M > s^0 M + t^0 M = \psi(a) + \psi(b).$$

Agora, caso r_a e r_b intersectarem a mesma face, então r_{a+b} também irá intersectar esta face e, fazendo o mesmo processo que fizemos com o plano Π no caso anterior, se $a = sa^0$, $b = tb^0$ e $a+b = \lambda(a+b)^0$, teremos $s(a+b)^0 + t(a+b)^0 = a+b = \lambda(a+b)^0$ e, conseqüentemente, $s+t = \lambda$. Logo,

$$\psi(a+b) = \lambda M = sM + tM = \psi(a) + \psi(b).$$

Portanto, ψ é convexa e, conseqüentemente, ϕ é convexa. \square

Definição 3.6. Para cada $q \in \mathbb{N}$, definimos o seguinte conjunto.

$$\mathcal{A}_q = \{g \in \mathcal{A} : \text{supp } g \subset \phi^{-1}(q + \mathbb{N})\}.$$

Por definição, $\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots$. Além disso, dados $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ arbitrários, consideremos $f \in \mathcal{A}_{q_1}$ e $g \in \mathcal{A}_{q_2}$ quaisquer. Dados $m \in \text{supp } f$ e $n \in \text{supp } g$, arbitrários, temos $\phi(m) \geq q_1$ e $\phi(n) \geq q_2$. Além disso, $m+n \in \text{supp } fg$. Como ϕ é convexa, temos $\phi(m+n) \geq \phi(m) + \phi(n) \geq q_1 + q_2$. Agora, como todo elemento de $\text{supp } fg$ é da forma $m+n$, com $m \in \text{supp } f$ e $n \in \text{supp } g$, temos $\text{supp } fg \subset \phi^{-1}(q_1 + q_2 + \mathbb{N})$, o que implica $\mathcal{A}_{q_1} \cdot \mathcal{A}_{q_2} \subset \mathcal{A}_{q_1+q_2}$. Assim, $\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots$ é uma filtração de ideais de \mathcal{A} .

Definição 3.7. A filtração $\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots$ é chamada de *filtração de Newton*.

Segue da definição de \mathcal{A}_q que $\bigcap_{q \geq 0} \mathcal{A}_q = 0$. Ademais, da definição de ϕ , $f \in \mathcal{A}_M \setminus \mathcal{A}_{M+1}$.

Exemplo 3.8. Consideremos novamente $f(x, y) = x^2 - y^3 + xy$. Iremos calcular a filtração de Newton de f . Como vimos no Exemplo (3.3),

$$h(x, y) = \lambda = \begin{cases} \frac{2x+y}{3}, & \text{se } x \leq y, \\ \frac{x+y}{2}, & \text{se } x > y. \end{cases}$$

Logo, teremos $M = 6$ e $\phi : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ é definida por

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 4x + 2y, & \text{se } x \leq y, \\ 3(x + y), & \text{se } x > y. \end{cases}$$

Analisemos agora a filtração de Newton de \mathcal{A} definida à partir de f . Por definição, $\mathcal{A}_q = \{g \in \mathcal{A} : \text{supp } g \subset \phi^{-1}(q + \mathbb{N})\}$. Assim, denotando por $(p(x, y), q(x, y)) = \{rp(x, y) + sq(x, y) : r, s \in \mathbb{R}\}$,

teremos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_0 &= \mathcal{A}; \\
 \mathcal{A}_1 &= \mathcal{A} \setminus (1); \\
 \mathcal{A}_2 &= \mathcal{A} \setminus (1); \\
 \mathcal{A}_3 &= \mathcal{A} \setminus (1, y); \\
 \mathcal{A}_4 &= \mathcal{A} \setminus (1, y, x); \\
 \mathcal{A}_5 &= \mathcal{A} \setminus (1, y, x, y^2); \\
 \mathcal{A}_6 &= \mathcal{A} \setminus (1, y, x, y^2); \\
 \mathcal{A}_7 &= \mathcal{A} \setminus (1, y, x, y^2, x^2, xy, y^3). \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1 &= (1); \\
 \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2 &= 0; \\
 \mathcal{A}_2/\mathcal{A}_3 &= (y); \\
 \mathcal{A}_3/\mathcal{A}_4 &= (x); \\
 \mathcal{A}_4/\mathcal{A}_5 &= (y^2); \\
 \mathcal{A}_5/\mathcal{A}_6 &= 0; \\
 \mathcal{A}_6/\mathcal{A}_7 &= (x^2, xy, y^3). \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Podemos ilustrar a filtração da seguinte maneira:

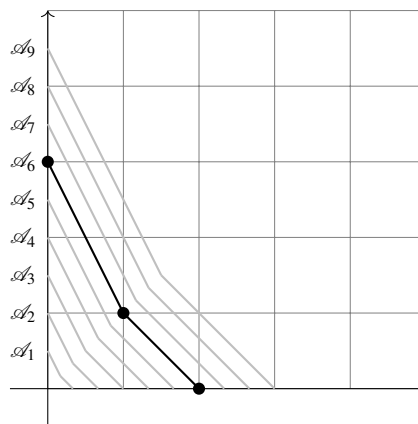


Figura 3.7: Filtração de Newton de f .

Proposição 3.9. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $q = q(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}^n \subset \mathcal{A}_q$, em que \mathcal{M} é o ideal maximal do anel \mathcal{A} .

Demonstração. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Sabemos que, \mathcal{M}^n é gerado pelos monômios de grau n . Assim, se $g \in \mathcal{M}^n$, $g \neq 0$, dado $m \in \text{supp } g$, temos $m = (m_1, \dots, m_k)$, com $\sum_{i=1}^k m_i \geq n$.

Consideremos $q = \min \left\{ \phi(a_1, \dots, a_k) : \sum_{i=1}^k a_i = n \right\}$. Então, dados a_1, \dots, a_k tais que $\sum_{i=1}^k a_i = n$, temos $\text{supp}(x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}) = \{(a_1, \dots, a_k)\}$ e, conseqüentemente, $\phi(a_1, \dots, a_k) \geq q$. Logo, $x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k} \in \mathcal{A}_q$. Agora, como todo gerador de \mathcal{M}^n é da forma $x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$ com $\sum_{i=1}^k a_i = n$ e \mathcal{A}_q é ideal, segue que $\mathcal{M}^n \subseteq \mathcal{A}_q$. \square

Seja Δ um poliedro compacto de dimensão q sobre \mathbb{R}^k , cujos vértices pertencem a \mathbb{Z}^k ($0 \leq q \leq k-1$). Suponhamos que Δ não esteja em um subespaço linear de dimensão q . Denotemos por $\text{Cone}(\Delta)$ o cone convexo com vértice 0 e base Δ , ou seja, a reunião de todas as semirretas de \mathbb{R}^k de origem 0 que passam por Δ . Consideremos

$$P(\Delta) := \mathbb{Z}^k \cap \text{Cone}(\Delta).$$

$P(\Delta)$ é um sub-semigrupo do semigrupo \mathbb{Z}^k . Consideremos o conjunto

$$\mathcal{C}[P(\Delta)] := \{f \in \mathcal{A} : \text{supp } f \subset P(\Delta)\}.$$

Exemplo 3.10. Consideremos Δ o segmento que liga os pontos $(1, 2)$ e $(2, 1)$. Então, $\text{Cone}(\Delta)$ pode ser representado pela seguinte figura:

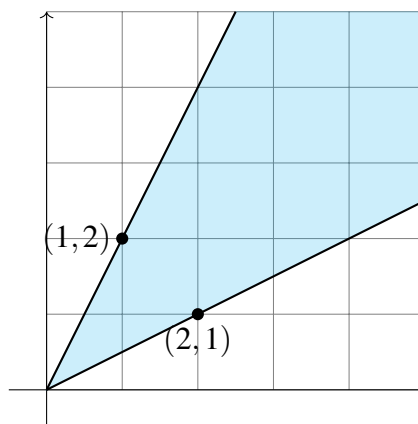
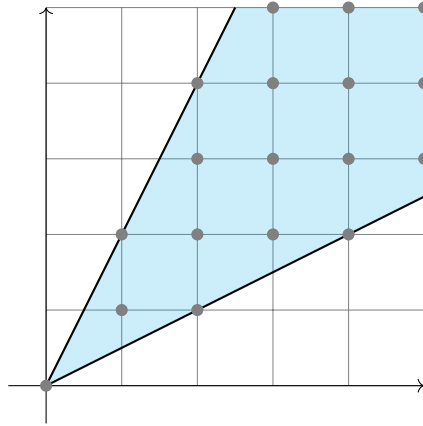


Figura 3.8: $\text{Cone}(\Delta)$.

O conjunto $P(\Delta) = \mathbb{Z}^k \cap \text{Cone}(\Delta)$ pode ser representado pelos pontos na seguinte figura:

Figura 3.9: $P(\Delta)$.

E o anel $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ é constituído pelas séries cujo suporte está contido em $P(\Delta)$, como $xy, x^2y, xy^2, x^2y^2, \dots$

Proposição 3.11. $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ é um subanel unitário de \mathcal{A} .

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\mathcal{C}[P(\Delta)] \neq \emptyset$, uma vez que toda série constante é um elemento de $\mathcal{C}[P(\Delta)]$. Agora, dadas $f, g \in \mathcal{C}[P(\Delta)]$ quaisquer, temos $\text{supp } f, \text{supp } g \subset P(\Delta)$ e, considerando $\text{supp } f - g$, temos

$$\text{supp } f - g \subset \text{supp } f \cup \text{supp } g \subset P(\Delta).$$

Daí, $f - g \in \mathcal{C}[P(\Delta)]$. Ademais, considerando fg , temos $\text{supp } fg = \{n + m : n \in \text{supp } f, m \in \text{supp } g\}$. Agora, como $P(\Delta)$ é um sub-semigrupo, segue que $m + n \in P(\Delta)$, para todos $m \in \text{supp } f$ e $n \in \text{supp } g$. Logo, $\text{supp } fg \subset P(\Delta)$ e, conseqüentemente, $fg \in \mathcal{C}[P(\Delta)]$.

Portanto, $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ é um subanel unitário de \mathcal{A} . □

Proposição 3.12. As aplicações $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ aplicam o subanel $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ em si mesmo.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{C}[P(\Delta)]$ qualquer. Então, por definição, $\text{supp } f \subset P(\Delta)$. Agora, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, temos

$$\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (f) = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Notemos que

$$\text{supp } x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \text{supp } f \setminus \{n \in \text{supp } f : n_i = 0\} \subset P(\Delta).$$

Portanto, $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}[P(\Delta)]$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. □

Definição 3.13. A forma inicial do monômio $x^n \in \mathcal{A}$ é o elemento

$$\delta_n := x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1} \in \mathcal{A}_{\phi(n)} / \mathcal{A}_{\phi(n)+1} = A_{\phi(n)},$$

que chamaremos de monômio de $A = gr(\mathcal{A})$.

Considerando A como espaço vetorial, a \mathcal{C} -álgebra A é isomorfa ao anel dos polinômios nas variáveis x_1, \dots, x_k , visto que é gerada pelos monômios. Para descrever o produto em A , basta indicar o produto dos monômios. Vimos que cada face Δ da fronteira de Newton Γ está associada a um semigrupo $P(\Delta)$. Da definição de filtração de Newton e da definição de multiplicação sobre o anel graduado associado (1.22), temos a seguinte fórmula:

$$\delta_{n_1} \cdot \delta_{n_2} = \begin{cases} \delta_{n_1+n_2}, & \text{se existe uma face } \Delta \subset \Gamma \text{ tal que } n_1, n_2 \in P(\Delta); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2)$$

De fato, se $n_1, n_2 \in P(\Delta)$, vimos que $\phi(n_1 + n_2) = \phi(n_1) + \phi(n_2)$ e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \delta_{n_1} \delta_{n_2} &= x^{n_1} x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \\ &= x^{n_1+n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1+n_2)+1} \\ &= \delta_{n_1+n_2}. \end{aligned}$$

Agora, se a face indicada não existe, temos $\phi(n_1 + n_2) > \phi(n_1) + \phi(n_2)$ e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \delta_{n_1} \delta_{n_2} &= x^{n_1} x^{n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \\ &= x^{n_1+n_2} + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1} \end{aligned}$$

Como $\mathcal{A}_{\phi(n_1+n_2)} \subseteq \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1}$, e $x^{n_1+n_2} \in \mathcal{A}_{\phi(n_1+n_2)}$, segue que $\delta_{n_1} \delta_{n_2} = 0 + \mathcal{A}_{\phi(n_1)+\phi(n_2)+1}$. Ou seja, $\delta_{n_1} \delta_{n_2} = 0$.

Para simplificar a notação, para cada face Δ da fronteira de Newton Γ , denotaremos o anel $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ por A_Δ . Este anel pode ser identificado a um subanel de \mathcal{A} e, conseqüentemente, A_Δ tem uma graduação induzida.

Proposição 3.14. *Para cada face $\Delta \subset \Gamma$, existe um epimorfismo que respeita a graduação das \mathcal{C} -álgebras, $\pi_\Delta : A \rightarrow A_\Delta$ e, para cada par $\Delta_1 \subset \Delta$, existe um homomorfismo de \mathcal{C} -álgebras $\pi_{\Delta, \Delta_1} : A_\Delta \rightarrow A_{\Delta_1}$ que respeita a graduação e satisfaz $\pi_{\Delta_1} = \pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_\Delta$.*

Demonstração. Seja $J_\Delta = \bigoplus_{n \notin P(\Delta)} \mathcal{C} \cdot \delta_n$. Mostremos que J_Δ é um ideal de A . Sejam $a = \sum_{n \notin P(\Delta)} a_n \delta_n$ e $b = \sum_{n \notin P(\Delta)} b_n \delta_n$ elementos quaisquer de J_Δ . Então,

$$a = \sum_{n \notin P(\Delta)} a_n x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1}, b = \sum_{n \notin P(\Delta)} b_n x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1}.$$

Assim,

$$a - b = \sum_{n \notin P(\Delta)} (a_n - b_n) x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1} \in J_\Delta.$$

Agora, dado $c \in A$ arbitrário, temos

$$c = \sum_{m \in \mathbb{N}^k} c_m x^m + \mathcal{A}_{\phi(m)+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ac &= \left(\sum_{n \notin P(\Delta)} a_n x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{N}^k} c_m x^m + \mathcal{A}_{\phi(m)+1} \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^k} \sum_{n \notin P(\Delta)} c_m a_n x^{m+n} + \mathcal{A}_{\phi(m)+\phi(n)+1}. \end{aligned}$$

Agora, de (3.2), como $n \notin P(\Delta)$, se $n, m \in P(\Theta)$, para algum $\Theta \in \Gamma$, temos $n + m \in \Theta$ e, logo, $n + m \notin \Delta$. Caso contrário, teremos $\delta_{n+m} = 0$. Consequentemente, $ac \in J_\Delta$. Portanto, J_Δ é um ideal de A .

Na sequência, definamos $\psi : A \rightarrow A_\Delta$ por $\psi \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n \delta_n \right) = \sum_{n \in P(\Delta)} a_n \delta_n$. De fato, ψ está bem definida, é sobrejetora e $\ker(\psi) = J_\Delta$. Assim, $A/J_\Delta \simeq A_\Delta$.

Seja $\pi_\Delta : A \rightarrow A/J_\Delta \simeq A_\Delta$ a projeção canônica. Mostremos que π_Δ respeita graduação. Para isso, consideremos $\delta_n = x^n + \mathcal{A}_{\phi(n)+1} \in \mathcal{A}_{\phi(n)}/\mathcal{A}_{\phi(n)+1}$. Então,

$$\pi_\Delta(\delta_n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \notin P(\Delta), \\ \delta_n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, em ambos os casos, $\pi_\Delta(\delta_n) \in A_\Delta \cap \mathcal{A}_{\phi(n)}/A_\Delta \cap \mathcal{A}_{\phi(n)+1}$. Ademais, de forma análoga, construímos π_{Δ, Δ_1} , que também respeita graduação e $\pi_{\Delta_1} = \pi_{\Delta, \Delta_1} \circ \pi_\Delta$. \square

Exemplo 3.15. Seja $f(x, y) = x^2 - y^3 + xy$. Como vimos no Exemplo (3.8), a fronteira de Newton de f pode ser representada pela seguinte figura:

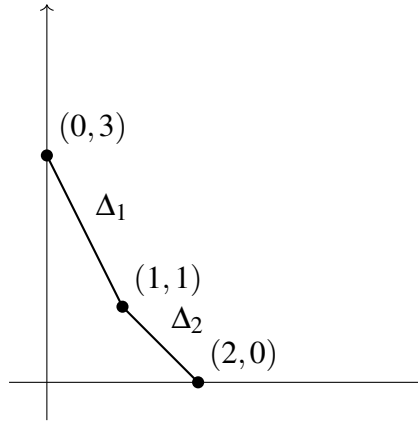


Figura 3.10: Faces de $\Gamma(f)$

Então, $\pi_{\Delta_1}(f) = xy - y^3$ e $\pi_{\Delta_2}(f) = x^2 + xy$.

Proposição 3.16. *Existe uma sequência exata de homomorfismos de A -módulos graduados (que respeita graduações)*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{\Delta \in I} A_\Delta \longrightarrow C_{k-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0, \quad (3.3)$$

em que I é o conjunto das faces de maior dimensão de Γ e, para $0 \leq q \leq k-1$, denotamos por C_q a soma direta dos A -módulos A_Δ sobre todas as faces de dimensão q de Γ não localizadas sobre a reunião dos planos coordenados.

Demonstração. Iremos construir uma sequência de aplicações de A -módulos graduados que respeitam as graduações

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} C_{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0 \quad (3.4)$$

da seguinte maneira: chamaremos de I_q o conjunto das faces de Γ de dimensão q não situadas sobre a reunião dos planos coordenados. Para determinar as aplicações d_q , $q \in \{1, \dots, k-1\}$, basta exibir para todos $\Delta \in I_q$ e $\Delta_1 \in I_{q-1}$ um homomorfismo $d_{\Delta, \Delta_1} : A_\Delta \rightarrow A_{\Delta_1}$.

Neste sentido, definamos $d_{\Delta, \Delta_1} = \sigma(\Delta, \Delta_1)\pi_{\Delta, \Delta_1}$, em que π_{Δ, Δ_1} é a aplicação obtida da Proposição (3.14) e

$$\sigma(\Delta, \Delta_1) = \begin{cases} \pm 1, & \text{se } \Delta_1 \subset \Delta, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

sendo que o sinal é escolhido da seguinte maneira: fixada uma certa orientação em Γ , consideramos as orientações induzidas sobre as faces $\Delta \subset \Gamma$. Se $\Delta \in I_q$, $\Delta_1 \in I_{q-1}$ e $\Delta_1 \subset \partial\Delta$, definimos $\sigma(\Delta, \Delta_1) = 1$ quando a orientação induzida de Δ sobre Δ_1 coincide com a orientação de Δ_1 e $\sigma(\Delta, \Delta_1) = -1$, caso contrário.

Decorre da Proposição (3.14) que $d_q := \sum_{\Delta \in I_q, \Delta_1 \in I_{q-1}} d_{\Delta, \Delta_1}$ é um homomorfismo de A -módulos graduados que respeita a graduação.

Agora, mostremos que a sequência (3.4) é exata. Para isso, denotemos para cada $m \in \mathbb{N}^k$, $A(m) = \mathcal{C}$ e, para $\Delta \subset \Gamma$, denotemos

$$A_\Delta(m) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } m \in P(\Delta), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $A = \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$ e, para cada $q \geq 0$, $\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathcal{C} , então A é um \mathcal{C} -módulo livre e é isomorfo a $\bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{C}$. Assim,

$$A = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} A(m).$$

Para A_Δ , como $A_\Delta = \bigoplus_{q \geq 0} \frac{A_\Delta \cap \mathcal{A}_q}{A_\Delta \cap \mathcal{A}_{q+1}}$, de forma análoga

$$A_\Delta = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} A_\Delta(m).$$

Assim, conseguimos introduzir uma \mathbb{N}^k -gradação sobre A e A_Δ . Ademais,

$$\begin{aligned} C_q &= \bigoplus_{\Delta \in I_q} A_\Delta \\ &= \bigoplus_{\Delta \in I_q} \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} A_\Delta(m) \right) \\ &= \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} \left(\bigoplus_{\Delta \in I_q} A_\Delta(m) \right). \end{aligned}$$

Definindo $C_q(m) = \bigoplus_{\Delta \in I_q} A_\Delta(m)$, segue que $C_q = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}^k} C_q(m)$ é uma \mathbb{N}^k -gradação sobre C_q .

Além disso, como d_q respeita graduação para todo $1 \leq q \leq k-1$, segue da construção de \mathbb{N}^k -gradação que todos os homomorfismos d_q respeitam a \mathbb{N}^k -gradação.

Agora, para demonstrar que a sequência (3.4) é exata, basta mostrarmos que, para cada $m \in \mathbb{N}^k$, a sequência

$$0 \longrightarrow A(m) \xrightarrow{d_k(m)} C_{k-1}(m) \xrightarrow{d_{k-1}(m)} \dots \xrightarrow{d_2(m)} C_1(m) \xrightarrow{d_1(m)} C_0(m) \longrightarrow 0 \quad (3.5)$$

é exata.

Seja $X(m) = \bigcup_{m \in P(\Delta)} \Delta$ e consideremos a decomposição celular da variedade topológica Γ em células correspondentes às faces e a decomposição induzida nos espaços $X(m)$. Mostremos que a sequência (3.5) é isomorfa ao complexo de cadeias celulares do par $(X(m), \partial X(m))$ com coeficientes em \mathcal{C} ,

$$C_{k-1}(X(m), \partial X(m)) \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2}(X(m), \partial X(m)) \xrightarrow{\partial_{k-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X(m), \partial X(m)) \longrightarrow 0, \quad (3.6)$$

em que $C_q(X(m), \partial X(m)) = \frac{C_q(X(m))}{C_q(\partial X(m))}$ e $C_q(S)$ representa o grupo abeliano livre cuja base é formada pelas n -células de S .

De fato, vimos que $C_q(m) = \bigoplus_{\Delta \in I_q} A_\Delta(m) = \bigoplus_j \mathcal{C}$. Assim, para cada $q \in \{1, \dots, k-1\}$ considerando a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : C_q(m) &= \bigoplus_j \mathcal{C} \rightarrow C_q(X(m), \partial X(m)) \\ &(c_1, \dots, c_k) \mapsto \overline{(c_1, \dots, c_k)}, \end{aligned}$$

teremos que π está bem definida e é um \mathcal{C} -homomorfismo bijetor. Logo, é um isomorfismo. Além disso, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} C_q(m) & \xrightarrow{d_{q-1}} & C_{q-1}(m) \\ \downarrow \pi_q & & \downarrow \pi_{q-1} \\ C_q(X(m), \partial X(m)) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & C_{q-1}(X(m), \partial X(m)) \end{array}$$

Como consequência, a sequência (3.5) é isomorfa ao complexo de cadeias celulares (3.6). Da convexidade de Γ , segue que o par $(X(m), \partial X(m))$ é homotopicamente equivalente ao par (disco, fronteira do disco), o qual apenas as homologias de dimensão máxima são não nulas e elas são isomorfas à $\mathcal{C} = A(m)$ (ver página 114 de [5]).

Assim, segue que a sequência (3.5) é exata e, conseqüentemente, a sequência (3.4) é exata. \square

3.1 Condição de não-degenerescência

Nesta seção, daremos uma condição de não-degenerescência para séries formais e estudaremos algumas propriedades dessas séries.

Definição 3.17. Seja $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} a_n x^n$ uma série formal e Δ um subespaço compacto de \mathbb{R}^k . Definimos $f_\Delta = \sum_{n \in \Delta \cap \mathbb{Z}^k} a_n x^n$. Diremos que a parte principal newtoniana de f é *não-degenerada* se, para cada face fechada Δ da fronteira de Newton as séries formais

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_\Delta, \dots, \left(x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_\Delta$$

não se anulam ao mesmo tempo sobre $(\bar{\mathcal{C}} \setminus \{0\})^k$, em que $\bar{\mathcal{C}}$ denota o fecho algébrico de \mathcal{C} .

Uma formulação equivalente dada no artigo [7] à condição de não-degenerescência que vimos na Definição (3.17) é a seguinte: uma série formal g é não-degenerada sobre Δ se, e somente se, os elementos

$$\left(x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} \right)_\Delta, \dots, \left(x_k \frac{\partial g}{\partial x_k} \right)_\Delta$$

do anel $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ geram sobre $\mathcal{C}[P(\Delta)]$ um ideal de codimensão finita. Diremos que a parte principal newtoniana é não-degenerada se ela é não-degenerada sobre cada face da fronteira de Newton.

Exemplo 3.18. Consideremos novamente $f(x, y) = x^3 - y^2 + 3y^3$ em $\mathbb{C}[[x, y]]$. Mostremos que a parte principal newtoniana de f é não-degenerada. Sabemos que $\text{supp } f = \{(3, 0), (0, 2), (0, 3)\}$ e a fronteira de Newton consiste no segmento de reta que liga os pontos $(3, 0)$ e $(0, 2)$. Ademais,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 9y^2.$$

Assim, sendo $\Delta = \Gamma(f)$ a única face da fronteira de Newton, teremos

$$\left(x \frac{\partial f}{\partial x} \right)_\Delta = 3x^3 \text{ e } \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right)_\Delta = -2y^2.$$

Como ambos os polinômios não se anulam ao mesmo tempo em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$, segue que a parte principal newtoniana de f é não-degenerada.

Outra maneira de ver isso é que, neste caso, $\mathcal{C}[P(\Delta)] = \mathbb{C}[[x, y]]$ e $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x, y]]}{(x^3, y^2)} = 6$.

Exemplo 3.19. Considerando $g(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + x^2y$ em $\mathbb{C}[[x, y]]$, temos

$$\text{supp } g = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2), (2, 1)\}$$

e Γ é o segmento que liga os pontos $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 2)$, como ilustra a figura (3.19):

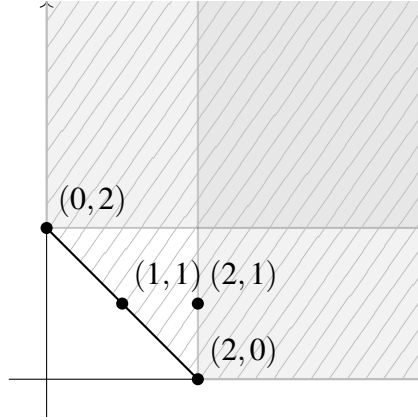


Figura 3.11: Poliedro de Newton de g .

A única face da fronteira de Newton é a própria fronteira de Newton. Assim,

$$\left(x \frac{\partial g}{\partial x}\right)_{\Gamma} = 2x^2 + 2xy = 2x(x+y) \text{ e } \left(y \frac{\partial g}{\partial y}\right)_{\Gamma} = 2y^2 + 2xy = 2y(x+y).$$

Esta função não possui parte principal newtoniana não-degenerada, uma vez que as restrições acima se anulam na reta $y = -x$.

Outra maneira de ver este fato é que $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x, y]]}{(x^2+xy, y^2+xy)} = \infty$.

Chamaremos de F_1, \dots, F_k as formas iniciais das séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$, respectivamente, ou seja,

$$F_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mathcal{A}_{M+1} \in A_M, i \in \{1, \dots, k\}.$$

A condição de não-degenerescência que vimos anteriormente é equivalente à seguinte condição: Para cada face $\Delta \subset \Gamma$, os elementos homogêneos $\pi_{\Delta} F_1, \dots, \pi_{\Delta} F_k$ do anel graduado A_{Δ} geram sobre A_{Δ} um ideal de codimensão finita.

A existência de uma estrutura de A -módulo sobre A_{Δ} nos permite trabalhar com os anéis A_{Δ} no lugar do anel A .

Para calcular o anel quociente $\frac{A}{(F_1, \dots, F_k)}$, considerando a sequência exata

$$A^k \xrightarrow{\partial_1} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{(F_1, \dots, F_k)} \longrightarrow 0,$$

em que π é a projeção canônica e $\partial_1(a_1, \dots, a_k) = a_1 F_1 + \dots + a_k F_k$, iremos estendê-la a um complexo de cadeias obtido do Complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel A junto com o epimorfismo π :

$$0 \longrightarrow A^{(k)} \xrightarrow{\partial_k} A^{(k-1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow A^{(1)} \xrightarrow{\partial_1} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{(F_1, \dots, F_k)} \longrightarrow 0. \quad (3.7)$$

Da definição do Complexo de Koszul, as aplicações de bordo são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \partial_p : (K(F_1) \otimes_A \cdots \otimes_A K(F_k))_p = A^{\binom{k}{p}} &\rightarrow (K(F_1) \otimes_A \cdots \otimes_A K(F_k))_{p-1} = A^{\binom{k}{p-1}} \\ (e_{i_1 \cdots i_p}) &\mapsto \sum_{\mu=1}^p (-1)^\mu F_{i_\mu} e_{i_1 \cdots \hat{i}_\mu \cdots i_p}. \end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, fixada f , temos $f \in \mathcal{A}_M$. Conseqüentemente, $x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{A}_M$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Ademais, sendo $K_p(F) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} N_m^p$ a gradação induzida de A , se $(e_{i_1 \cdots i_p}) \in N_m^p$, quando aplicamos o operador bordo, o resultado será produto de F_{i_μ} com elementos de $K_{p-1}(F)$ que pertencem à N_m^p . Da convexidade de ϕ , teremos $\partial_p(e_{i_1 \cdots i_p}) \in N_{m+M}^p$. Ou seja, as aplicações de bordo do Complexo de Koszul aumentam a gradação em M .

Teorema 3.20. *Se $f \in \mathcal{A}$ é uma série formal conveniente com parte principal newtoniana na origem não-degenerada, então o Complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel A é acíclico em dimensões positivas (e a seqüência (3.7) é exata).*

Demonstração. Consideremos os Complexos de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel A com coeficientes sobre os A -módulos da seqüência (3.4), os quais podem ser representados pelo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C_{k-1} & \longrightarrow & C_{k-2} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{\binom{k}{1}} & \longrightarrow & C_{k-1}^{\binom{k}{1}} & \longrightarrow & C_{k-2}^{\binom{k}{1}} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0^{\binom{k}{1}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{\binom{k}{2}} & \longrightarrow & C_{k-1}^{\binom{k}{2}} & \longrightarrow & C_{k-2}^{\binom{k}{2}} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0^{\binom{k}{2}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ \vdots & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \ddots & & \uparrow & & \vdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{\binom{k}{k}} & \longrightarrow & C_{k-1}^{\binom{k}{k}} & \longrightarrow & C_{k-2}^{\binom{k}{k}} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_0^{\binom{k}{k}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & 0 & & \end{array} \quad (3.8)$$

em que todas as linhas são exatas, visto que a primeira é a seqüência (3.4) e as demais linhas são a soma direta de $\binom{k}{l}$, $l \in \{1, \dots, k\}$ exemplares da seqüência (3.4).

Mostremos que o diagrama em (3.8) é comutativo. Para isso, consideremos a seguinte parte do diagrama, para um q arbitrário:

$$\begin{array}{ccc} C_q^{(k)} & \xrightarrow{d_q^{(p-1)}} & C_{q-1}^{(k)} \\ \partial_p \uparrow & & \partial_p \uparrow \\ C_q^{(k)} & \xrightarrow{d_q^{(p)}} & C_{q-1}^{(k)} \end{array}$$

Podemos explicitar a aplicação $d_q^{(k)}$ da seguinte maneira:

$$d_q^{(k)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} d_q \circ \pi_{e_{i_1 \dots i_r}},$$

sendo $\pi_{e_{i_1 \dots i_r}}$ a projeção no elemento gerador. Assim, sendo $e = e_{i_1 \dots i_p}$ um dos geradores de $C_q^{(k)}$, temos

$$\begin{aligned} d_q^{(p)}(e) &= d_q(e_{i_1 \dots i_p}) \\ &= \sum_{\Delta \in I_q, \tilde{\Delta} \in I_{q-1}} \sigma(\Delta, \tilde{\Delta}) \pi_{\Delta, \tilde{\Delta}}(e_{i_1 \dots i_p}) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial_p(d_q^{(p)}(e)) &= \partial_p \left(\sum_{\Delta \in I_q, \tilde{\Delta} \in I_{q-1}} \sigma(\Delta, \tilde{\Delta}) \pi_{\Delta, \tilde{\Delta}}(e_{i_1 \dots i_p}) \right) \\ &= \sum_{\Delta \in I_q, \tilde{\Delta} \in I_{q-1}} \sigma(\Delta, \tilde{\Delta}) \partial_p(\pi_{\Delta, \tilde{\Delta}}(e_{i_1 \dots i_p})) \\ &= \sum_{\Delta \in I_q, \tilde{\Delta} \in I_{q-1}, i_1 \dots i_p \in \tilde{\Delta}} \sigma(\Delta, \tilde{\Delta}) \partial_p(e_{i_1 \dots i_p}) \\ &= \sum_{\Delta \in I_q, \tilde{\Delta} \in I_{q-1}, i_1 \dots i_p \in \tilde{\Delta}} \sigma(\Delta, \tilde{\Delta}) \sum_{\mu=1}^p (-1)^{\mu-1} F_{i_\mu} e_{i_1 \dots \hat{i}_\mu \dots i_p}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\partial_p(e) = \sum_{\mu=1}^p (-1)^{\mu-1} F_{i_\mu} e_{i_1 \dots \hat{i}_\mu \dots i_p}.$$

Aplicando $d_q^{(k)}$ e usando o fato de que d_q é um homomorfismo de A -módulos, obtemos

$$\begin{aligned} d_q^{(p-1)}(\partial_p(e)) &= \sum_{\mu=1}^p (-1)^{\mu-1} F_{i_\mu} d_q(e_{i_1 \dots \hat{i}_\mu \dots i_p}) \\ &= \sum_{\mu=1}^p p (-1)^{\mu-1} F_{i_\mu} \left(\sum_{\Delta \in I_q, \tilde{\Delta} \in I_{q-1}} \sigma(\Delta, \tilde{\Delta}) \pi_{\Delta, \tilde{\Delta}}(e_{i_1 \dots \hat{i}_\mu \dots i_p}) \right) \\ &= \sum_{\Delta \in I_q, \tilde{\Delta} \in I_{q-1}, i_1 \dots i_p \in \tilde{\Delta}} \sigma(\Delta, \tilde{\Delta}) \sum_{\mu=1}^p (-1)^{\mu-1} F_{i_\mu} e_{i_1 \dots \hat{i}_\mu \dots i_p} \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama é comutativo.

Mostraremos agora que se as colunas com as setas pontilhadas são exatas, então a coluna da esquerda é exata.

Primeiramente, mostremos que $\ker \partial_k = \{0\}$. Para isso, nos referenciaremos com a seguinte parte do diagrama (3.8):

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & A^{(k-1)} & \xrightarrow{d_k^{(k-1)}} & C_{k-1}^{(k)} \\
 & & \uparrow \partial_k & & \uparrow \partial_k^1 \\
 0 & \longrightarrow & A^{(k)} & \xrightarrow{d_k^{(k)}} & C_{k-1}^{(k)} \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Seja $x \in \ker \partial_k$. Então, $\partial_k(x) = 0$ e, conseqüentemente, $d_k^{(k-1)}(\partial_k(x)) = 0$. Como o diagrama é comutativo, segue que $\partial_k^1(d_k^{(k)}(x)) = 0$.

Como por hipótese a coluna da direita é exata, segue que $\ker \partial_k^1 = \{0\}$, ou seja, $d_k^{(k)}(x) = 0$. Mas, como todas as linhas do diagrama são exatas, segue que $x = 0$, provando que $\ker \partial_k = \{0\}$.

Agora, mostremos que $\ker \partial_{k-1} = \text{Im} \partial_k$. Para isso, consideremos o seguinte pedaço do diagrama (3.8):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^{(k-2)} & \xrightarrow{d_k^{(k-2)}} & C_{k-1}^{(k)} & & \\
 & & \uparrow \partial_{k-1} & & \uparrow \partial_{k-1}^1 & & \\
 0 & \longrightarrow & A^{(k-1)} & \xrightarrow{d_k^{(k-1)}} & C_{k-1}^{(k-1)} & \xrightarrow{d_{k-1}^{(k-1)}} & C_{k-2}^{(k-1)} \\
 & & \uparrow \partial_k & & \uparrow \partial_k^1 & & \uparrow \partial_k^2 \\
 0 & \longrightarrow & A^{(k)} & \xrightarrow{d_k^{(k)}} & C_{k-1}^{(k)} & \xrightarrow{d_{k-1}^{(k)}} & C_{k-2}^{(k)} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Seja $0 \neq y \in \ker \partial_{k-1}$ arbitrário. Então, $\partial_{k-1}(y) = 0$ e conseqüentemente, $d_k^{(k-2)}(\partial_{k-1}(y)) = 0$. Como o diagrama é comutativo, temos $\partial_{k-1}^1(d_k^{(k-1)}(y)) = 0$. Como as linhas do diagrama são exatas, temos $d_k^{(k-1)}(y) \neq 0$ e, conseqüentemente, $d_k^{(k-1)}(y) \in \ker \partial_{k-1}^1$. Por hipótese, $\ker \partial_{k-1}^1 = \text{Im} \partial_k^1$. Logo, existe $x \in C_{k-1}^{(k)}$ tal que $\partial_k^1(x) = d_k^{(k-1)}(y)$.

Ademais,

$$d_{k-1}^{(k-1)}(\partial_k^1(x)) = d_{k-1}^{(k-1)}(d_k^{(k-1)}(y)) = 0.$$

Logo, como o diagrama é comutativo, teremos $\partial_k^2(d_{k-1}^{(k)}(x)) = 0$. Desde que $\ker \partial_k^2 = \{0\}$, temos $x \in \ker d_{k-1}^{(k)}$. Segue da exatidão das linhas do diagrama que existe $z \in A^{(k)}$ tal que $d_k^{(k)}(z) = x$.

Como o diagrama é comutativo e $d_k^{(k-1)}$ é injetiva, temos $\partial_k(z) = y$.

Portanto, $y \in \text{Im} \partial_k$.

Agora, mostremos que $\ker \partial_{k-2} = \text{Im} \partial_{k-1}$. Para isso, consideremos a seguinte parte do diagrama (3.8).

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A^{(k-3)} & \xrightarrow{d_k^{(k-3)}} & C_{k-1}^{(k-3)} & & \\
 & & \uparrow \partial_{k-2} & & \uparrow \partial_{k-2}^1 & & \\
 0 & \longrightarrow & A^{(k-2)} & \xrightarrow{d_k^{(k-2)}} & C_{k-1}^{(k-2)} & \xrightarrow{d_{k-1}^{(k-2)}} & C_{k-2}^{(k-2)} \\
 & & \uparrow \partial_{k-1} & & \uparrow \partial_{k-1}^1 & & \uparrow \partial_{k-2}^2 \\
 0 & \longrightarrow & A^{(k-1)} & \xrightarrow{d_k^{(k-1)}} & C_{k-1}^{(k-1)} & \xrightarrow{d_{k-1}^{(k-1)}} & C_{k-2}^{(k-1)} & \xrightarrow{d_{k-2}^{(k-1)}} & C_{k-3}^{(k-1)} \\
 & & \uparrow \partial_k & & \uparrow \partial_k^1 & & \uparrow \partial_k^2 & & \uparrow \partial_k^3 \\
 0 & \longrightarrow & A^{(k)} & \xrightarrow{d_k^{(k)}} & C_{k-1}^{(k)} & \xrightarrow{d_{k-1}^{(k)}} & C_{k-2}^{(k)} & \xrightarrow{d_{k-2}^{(k)}} & C_{k-3}^{(k)} \\
 & & \uparrow 0 & & \uparrow 0 & & \uparrow 0 & & \uparrow 0
 \end{array}$$

Seja $0 \neq y \in \ker \partial_{k-2}$ arbitrário. Então, $\partial_{k-2}(y) = 0$ e, conseqüentemente, $d_{k-3}^{(k-3)}(\partial_{k-2}(y)) = 0$. Como o diagrama é comutativo, teremos $\partial_{k-2}^1(d_k^{(k-2)}(y)) = 0$. Como $d_k^{(k-2)}$ é injetora, $d_k^{(k-2)}(y) \in \ker \partial_{k-2}^1$ e, como tal coluna é exata, existe $x \in C_{k-1}^{(k-1)}$ tal que $\partial_{k-1}^1(x) = d_k^{(k-2)}(y)$.

Mais que isso, aplicando $d_{k-1}^{(k-2)}$ em $\partial_{k-1}^1(x)$, teremos

$$d_{k-1}^{(k-2)}(\partial_{k-1}^1(x)) = d_{k-1}^{(k-2)}(d_k^{(k-2)}(y)) = 0.$$

Daí, como o diagrama é comutativo, teremos $\partial_{k-2}^2(d_{k-1}^{(k-1)}(x)) = 0$ e, conseqüentemente, $d_{k-1}^{(k-1)}(x) \in \ker \partial_{k-2}^2$. Como a coluna é exata, existe $z \in C_{k-2}^{(k)}$ tal que $\partial_k^2(z) = d_{k-1}^{(k-1)}(x)$.

De maneira similar ao feito acima, teremos $d_{k-2}^{(k-1)}(\partial_k^2(z)) = 0$ e, como o diagrama é comutativo, $d_{k-2}^{(k)}(z) \in \ker \partial_k^3$. Como essa coluna é exata, teremos $\ker \partial_k^3 = \{0\}$. Conseqüentemente, $z \in \ker d_{k-2}^{(k)}$.

Do fato que todas as linhas do diagrama são exatas, existe $w \in C_{k-1}^{(k)}$ tal que $d_{k-1}^{(k)}(w) = z$.

Agora, consideremos $x - \partial_k^1(w) \in C_{k-1}^{(k-1)}$. De fato,

$$\begin{aligned}
 d_{k-1}^{(k-1)}(\partial_{k-1}^1(w)) &= \partial_k^3(d_{k-1}^{(k)}(w)) \\
 &= \partial_k^3(z) = d_{k-1}^{(k-1)}(x).
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} d_{k-1}^{(k)}(x - \partial_{k-1}^1(w)) &= d_{k-1}^{(k)}(x) - d_{k-1}^{(k)}(\partial_{k-1}^1(w)) \\ &= d_{k-1}^{(k)}(x) - d_{k-1}^{(k)}(x) = 0. \end{aligned}$$

Como todas as linhas são exatas, segue que existe $v \in A^{(k-1)}$ tal que $d_k^{(k)}(v) = x - \partial_k^1(w)$. Ademais,

$$\partial_{k-1}^1(d_k^{(k)}(v)) = \partial_{k-1}^1(x - \partial_k^1(w)) = \partial_{k-1}^1(x) = d_k^{(k-2)}(y).$$

Do fato que todas as linhas do diagrama são exatas, segue que $d_k^{(k-2)}$ é injetora e, consequentemente, $\partial_{k-1}^1(v) = y$, comprovando que $\ker \partial_{k-2} = \text{Im} \partial_{k-1}$.

Os demais casos seguem de maneira semelhante, ou seja, a primeira coluna do diagrama (3.8) é exata.

Agora, provemos que as colunas com as setas pontilhadas são de fato exatas. Para isso, mostraremos que o Complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel A com coeficientes sobre o A -módulo C_q é isomorfo a soma direta dos complexos de Koszul com coeficientes sobre A_Δ , $\Delta \in I_q$.

Por definição, $K(F, C_q) = K(F) \otimes_A C_q$, em que $F = (F_1, \dots, F_k)$, ou seja, temos o seguinte complexo.

$$0 \longrightarrow K_k(F) \otimes_A C_q \longrightarrow K_{k-1}(F) \otimes_A C_q \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_0(F) \otimes_A C_q.$$

Por definição, $C_q = \bigoplus_{\Delta \in I_q} A_\Delta$. Daí, substituindo na sequência acima,

$$0 \longrightarrow K_k(F) \otimes_A \left(\bigoplus_{\Delta \in I_q} A_\Delta \right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_0(F) \otimes_A \left(\bigoplus_{\Delta \in I_q} A_\Delta \right).$$

Como a soma direta comuta com o produto tensorial, obtemos

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (K_k(F) \otimes_A A_\Delta) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (K_0(F) \otimes_A A_\Delta).$$

Assim,

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (A^{(k)} \otimes_A A_\Delta) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\Delta \in I_q} (A \otimes_A A_\Delta),$$

como queríamos demonstrar. Ainda mais, para cada $\Delta \in I_q$ fixado, consideremos o seguinte complexo.

$$0 \longrightarrow (A^{(k)} \otimes_A A_\Delta) \longrightarrow (A^{(k-1)} \otimes_A A_\Delta) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (A \otimes_A A_\Delta). \quad (3.9)$$

Abrindo a soma direta, teremos

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{(k)} (A \otimes_A A_\Delta) \longrightarrow \bigoplus_{(k-1)} (A \otimes_A A_\Delta) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (A \otimes_A A_\Delta).$$

Logo,

$$0 \longrightarrow A_\Delta^{(k)} \longrightarrow A_\Delta^{(k-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_\Delta.$$

Assim, o complexo (3.9) é isomorfo ao complexo de Koszul dos elementos $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ do anel A_Δ , visto que A_Δ é uma A -álgebra. Logo, para concluir a prova deste Teorema, basta fazer um estudo da sequência acima.

Começando pelo caso de uma face $\Delta \in I = I_{k-1}$ de dimensão maximal, o anel A_Δ possui dimensão $\dim(\Delta) + 1 = k$ (ver [2], p.210) e os elementos $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ geram sobre A_Δ um ideal de codimensão finita (de acordo com a definição de não-degenerescência). Logo, pelo Teorema (1.39), $\frac{A_\Delta}{(\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k)}$ tem comprimento finito. Além disso, segundo o Teorema de [6] (1.50), o anel A_Δ é um anel Cohen-Macaulay, visto que é um anel cônico. Assim, por definição, $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ é um sistema de parâmetros e pelo Teorema (1.44), $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ é uma sequência regular.

Pelo Teorema (1.31) de [8], o Complexo de Koszul dos elementos que formam uma sequência regular é acíclica sobre dimensões positivas. Logo, acabamos de provar que a segunda coluna da esquerda para a direita é acíclica.

Agora, consideremos o caso $\Delta \in I_q$, com $1 \leq q \leq k-2$. Como f possui parte principal newtoniana na origem não-degenerada, segue que o ideal gerado pelos elementos $\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k$ geram sobre A_Δ um ideal de codimensão finita. Ou seja,

$$\dim \frac{A_\Delta}{(\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k)} < \infty.$$

Assim, do Teorema de (1.39), segue que $\frac{A_\Delta}{(\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k)}$ possui comprimento finito.

Como vimos anteriormente, $\dim A_\Delta = \dim \Delta + 1 = q + 1$. Daí, como A_Δ é Cohen-Macaulay, denotando $(\pi_\Delta F) = (\pi_\Delta F_1, \dots, \pi_\Delta F_k)$, temos $\text{depth}((\pi_\Delta F), A_\Delta) = \dim A_\Delta = q + 1$. Assim, a profundidade de A_Δ é $q + 1$. Assim, do Teorema (1.41), sendo $l = \sup\{i : H_i(\pi_\Delta(F), A_\Delta) \neq 0\}$, temos $q + 1 = k - l$, o que implica $l = k - q - 1$. Consequentemente,

$$H_k((\pi_\Delta F), A_\Delta) = \dots = H_{k-q}((\pi_\Delta F), A_\Delta) = 0.$$

Portanto, o complexo

$$0 \longrightarrow C_q^{(k)} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_q^{(1)} \longrightarrow C_q$$

é acíclico em dimensões maiores ou iguais a $k - q$, completando a demonstração. \square

Seja $p_A(t)$ a série de Poincaré do \mathcal{C} -módulo graduado A tal que $\lambda = \dim_{\mathcal{C}} A$, ou seja,

$$p_A(t) = \sum_{q=0}^{\infty} (\dim_{\mathcal{C}} A_q) \cdot t^q.$$

De maneira semelhante, consideremos a série de Poincaré do \mathcal{C} -módulo graduado A_Δ , ou seja,

$$p_{A_\Delta}(t) = \sum_{q=0}^{\infty} \left(\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}_q \cap A_\Delta}{\mathcal{A}_{q+1} \cap A_\Delta} \right) \cdot t^q.$$

Lema 3.21. 1. A série de Poincaré $p_{A_\Delta}(t)$ é uma função racional em t e o ponto $t = 1$ é um polo de ordem $\dim \Delta + 1$;

2. Se $\dim \Delta = k - 1$, então $p_{A_\Delta}(t)(1 - t^M)^k \Big|_{t=1} = \lim_{t \rightarrow 1} p_{A_\Delta}(t)(1 - t^M)^k = k!V_{k\Delta}$, em que $V_{k\Delta}$ é o k -volume da pirâmide de vértice 0 e base Δ .

Demonstração. Para o primeiro item, sabemos da Proposição (1.49) que A_Δ é Noetheriano. Assim, pelo Teorema (1.26), como cada elemento homogêneo gerador de A_Δ corresponde a um vértice da face $\Delta \subset \Gamma$ e $\phi(\Gamma) = M$, segue que todos os geradores possuem grau M . Daí, teremos

$$p_{A_\Delta}(t) = \frac{f(t)}{(1 - t^M)^{\dim \Delta + 1}}.$$

Para o segundo item, pelo Teorema (1.26) e visto que $\dim A_\Delta = \dim \Delta + 1$, a série de Poincaré é da forma

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=0}^{\dim \Delta + 1} (1 - t^{k_i})},$$

em que $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ e k_i é o grau do respectivo elemento homogêneo x_i dentre os geradores de A_Δ .

Como cada elemento homogêneo gerador de A_Δ corresponde a um vértice da face $\Delta \subset \Gamma$ e $\phi(\Gamma) = M$, segue que todos os geradores possuem grau M . Daí, teremos

$$p_{A_\Delta}(t) = \frac{f(t)}{(1 - t^M)^{\dim \Delta + 1}}. \quad (3.10)$$

Agora, se o cone $Cone(\Delta)$ for representado pela união de dois cones convexos $Cone(\Delta) = K_1 \cup K_2$ que se intersectam em um cone de menor dimensão K_{12} , então

$$p_{A_\Delta}(t) = p_{\mathcal{C}[P_1]}(t) + p_{\mathcal{C}[P_2]}(t) - p_{\mathcal{C}[P_{12}]}(t),$$

em que

$$P_1 = \mathbb{N}^k \cap K_1, P_2 = \mathbb{N}^k \cap K_2, P_{12} = \mathbb{N}^k \cap K_{12}.$$

Assim, como $\dim K_{12} < \dim K_1 = \dim K_2 = k$ segue de (3.10) que

$$p_{A_\Delta}(t)(1 - t^M)^k \Big|_{t=1} = (p_{\mathcal{C}[P_1]}(t) + p_{\mathcal{C}[P_2]}(t))(1 - t^M)^k \Big|_{t=1}.$$

De fato, podemos decompor cada face Δ em simplexes cujos vértices são os vértices de Δ . Assim, se decompormos o $Cone(\Delta)$ nos cones correspondentes, de acordo com o que acabamos de apresentar, é suficiente provar a validade da afirmação (2) deste Teorema para cada um dos cones simpliciais.

Sendo assim, suponhamos que a face Δ é um simplexo. Sejam m_1, \dots, m_k os vértices deste simplexo. Queremos explicitar $p_{A_\Delta}(t)$. Para isso, determinemos primeiramente para qual $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$ temos $\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_q \cap A_\Delta > 0$.

Seja $P \in P(\Delta)$ um ponto arbitrário. Consideremos a reta $r_t : X = tP$, $t \in \mathbb{R}$ a reta que passa por P e pela origem. Sabemos que ela intercepta Δ em um ponto. Logo, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $t_0P \in \Delta$. Assim,

$$\det \begin{bmatrix} t_0P - m_1 \\ m_2 - m_1 \\ \vdots \\ m_k - m_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Como a aplicação determinante é linear sobre cada linha da matriz, segue que

$$t_0 \det \begin{bmatrix} P \\ m_2 - m_1 \\ \vdots \\ m_k - m_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 - m_1 \\ \vdots \\ m_k - m_1 \end{bmatrix}.$$

Desde que esses determinantes são não nulos,

$$t_0 = \frac{\det \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 - m_1 \\ \vdots \\ m_k - m_1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} P \\ m_2 - m_1 \\ \vdots \\ m_k - m_1 \end{bmatrix}}.$$

Denotemos $\det \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 - m_1 \\ \vdots \\ m_k - m_1 \end{bmatrix}$ e $\det \begin{bmatrix} P \\ m_2 - m_1 \\ \vdots \\ m_k - m_1 \end{bmatrix}$ por M_Δ e M_P , respectivamente. De fato, como todas as linhas das respectivas matrizes só tem números inteiros, segue que $M_P \in \mathbb{Z}$ e $M_\Delta \in \mathbb{Z}$, com $M_P > 0$ e $M_\Delta > 0$.

Vimos anteriormente que a aplicação h é homogênea de grau 1 e $h(\Gamma) = 1$. Assim,

$$h(P) = h\left(\frac{1}{t_0}t_0P\right) = \frac{1}{t_0}h(t_0P) = \frac{1}{t_0}.$$

Consequentemente, $h(P) = \frac{M_P}{M_\Delta}$. Como tomamos $P \in P(\Delta)$ arbitrário, tal igualdade é válida para todo $P \in P(\Delta)$, com M_P dependente de P e M_Δ dependendo apenas de m_1, \dots, m_k .

Neste sentido, recordemos que $\phi = M(h|_{\mathbb{N}^k})$. Assim, $\phi(P) = \frac{M}{M_\Delta}M_P$. A fim de determinar para quais $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$, temos $\phi^{-1}(q) \neq \emptyset$, notemos que

$$\begin{aligned} \phi(P) = q &\Leftrightarrow \frac{M}{M_\Delta}M_P = q \\ &\Leftrightarrow M_P = q \frac{M_\Delta}{M}. \end{aligned}$$

Mas, isto implica que $q\frac{M_\Delta}{M} \in \mathbb{Z}$. Ou seja, os possíveis candidatos q para que $\phi^{-1}(q) \neq \emptyset$ são $q = z\frac{M}{M_\Delta}$, com $z \in \mathbb{Z}$, $z \geq 0$.

Assim, temos

$$p_{A_\Delta}(t) = \sum_{q \geq 0} \dim_{\mathcal{E}} \left(\frac{\mathcal{A}_{q\frac{M}{M_\Delta}} \cap A_\Delta}{\mathcal{A}_{q\frac{M}{M_\Delta}+1} \cap A_\Delta} \right) t^{q\frac{M}{M_\Delta}}.$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{E}} \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_1} &= 1, \\ \dim_{\mathcal{E}} \frac{\mathcal{A}_M \cap A_\Delta}{\mathcal{A}_{M+1} \cap A_\Delta} &= \binom{k}{1}, \\ \dim_{\mathcal{E}} \frac{\mathcal{A}_{2M} \cap A_\Delta}{\mathcal{A}_{2M+1} \cap A_\Delta} &= \binom{k+1}{2}, \\ \dim_{\mathcal{E}} \frac{\mathcal{A}_{3M} \cap A_\Delta}{\mathcal{A}_{3M+1} \cap A_\Delta} &= \binom{k+2}{3}, \\ &\vdots \\ \dim_{\mathcal{E}} \frac{\mathcal{A}_{lM} \cap A_\Delta}{\mathcal{A}_{lM+1} \cap A_\Delta} &= \binom{k+l-1}{l} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Supondo que para todo $lM \leq q < (l+1)M$, temos $\dim_{\mathcal{E}} \frac{\mathcal{A}_{q\frac{M}{M_\Delta}} \cap A_\Delta}{\mathcal{A}_{(q+1)\frac{M}{M_\Delta}} \cap A_\Delta} = \binom{k+l-1}{l}$, a série de Poincaré será da forma

$$\begin{aligned} p_{A_\Delta}(t) &= 1 + t^{\frac{M}{M_\Delta}} + \dots + t^{(M_\Delta-1)\frac{M}{M_\Delta}} + \binom{k}{1}t^M + \dots + \binom{k+1}{2}t^{2M} + \dots + \binom{k+q-1}{q}t^{qM} + \dots \\ &= \frac{1}{1-t^{\frac{M}{M_\Delta}}} \left(1 + (k-1)t^M + \dots + \binom{(k-1)+1}{2}t^{2M} + \dots + \binom{(k-1)+q-1}{q}t^{qM} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{(1-t^{\frac{M}{M_\Delta}})(1-t^M)^{k-1}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$p_{A_\Delta}(t)(1-t^M)^k = \frac{1-t^M}{1-t^{\frac{M}{M_\Delta}}} = \frac{1+t+\dots+t^{M-1}}{1+t+\dots+t^{\frac{M}{M_\Delta}-1}}.$$

Consequentemente,

$$p_{A_\Delta}(t)(1-t^M)^k \Big|_{t=1} = \frac{M}{\frac{M}{M_\Delta}} = M_\Delta,$$

que é o número de pontos no conjunto $P(\Delta) \setminus \bigcup_{q=1}^k (m_q + P(\Delta))$ neste caso.

Nos outros casos, o raciocínio segue de maneira análoga, visto que podemos encontrar um

padrão semelhante ao que ocorreu no caso anterior baseado no primeiro inteiro $q \geq 0$ tal que

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}_{qM_{\Delta}} \cap A_{\Delta}}{\mathcal{A}_{(q+1)M_{\Delta}} \cap A_{\Delta}} \neq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_{A_{\Delta}}(t)(1-t^M)^k|_{t=1} &= \left(\sum_{q=0}^{\infty} \left(\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}_q \cap A_{\Delta}}{\mathcal{A}_{q+1} \cap A_{\Delta}} \right) \cdot t^q \right) (1-t^M)^k|_{t=1} \\ &= \left(\text{número de pontos no conjunto } P(\Delta) \setminus \bigcup_{q=1}^k (m_q + P(\Delta)) \right) \\ &= \left(\text{número de pontos no grupo quociente } \frac{\mathbb{Z}^k}{(m_1, \dots, m_k)} \right) \\ &= |\det(m_1, \dots, m_k)| = k!V_{k_{\Delta}}, \end{aligned}$$

provando o que queríamos. □

Vejamos um exemplo acerca deste lema.

Exemplo 3.22. Consideremos novamente $f(x,y) = x^2 - y^3 + xy$. Vimos no exemplo (3.8) como eram as faces Δ_1 e Δ_2 de dimensão maximal de Γ e como era a filtração de Newton. Entretanto, se calcularmos mais termos da filtração, obteremos a seguinte figura:

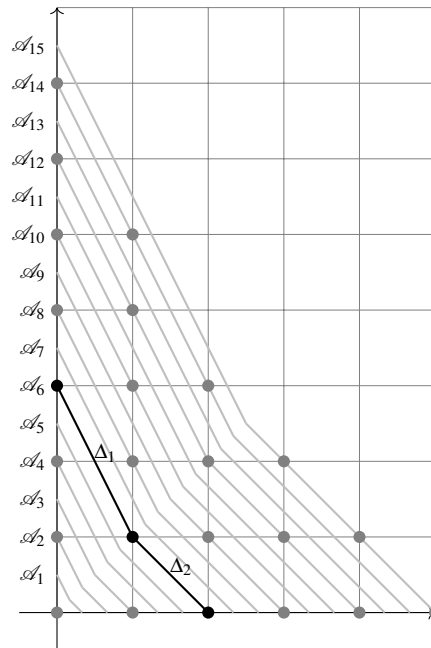


Figura 3.12: Filtração de Newton ampliada.

Calculando as respectivas dimensões da definição da série de Poincaré que estamos trabalhando, deduzimos que as séries de Poincaré das faces Δ_1 e Δ_2 são dadas por

$$\begin{aligned} p_{A_{\Delta_1}}(t) &= 1 + t^2 + t^4 + 2t^6 + 2t^8 + 2t^{10} + 3t^{12} + 3t^{14} + 3t^{16} + \dots \text{ e} \\ p_{A_{\Delta_2}}(t) &= 1 + t^3 + 2t^6 + 2t^9 + 3t^{12} + 3t^{15} + \dots, \end{aligned}$$

respectivamente. Estas séries se decompõem em somas de séries geométricas e sua soma para $t < 1$ é dada por

$$p_{A_{\Delta_1}}(t) = \frac{1}{(1-t^6)(1-t^2)}$$

$$p_{A_{\Delta_2}}(t) = \frac{1}{(1-t^6)(1-t^3)}.$$

Daí,

$$p_{A_{\Delta_1}}(t)(1-t^6)^2 = \frac{1-t^6}{1-t^2} = \frac{1+t+t^2+t^3+t^4+t^5}{1+t}$$

$$p_{A_{\Delta_2}}(t)(1-t^6)^2 = \frac{1-t^6}{1-t^3} = \frac{1+t+t^2+t^3+t^4+t^5}{1+t+t^2}$$

Assim,

$$p_{A_{\Delta_1}}(t)(1-t^6)^2|_{t=1} = 3$$

$$p_{A_{\Delta_2}}(t)(1-t^6)^2|_{t=1} = 2.$$

Os números obtidos acima correspondem aos números de pontos no conjunto $P(\Delta_i) \setminus \bigcup_{q=1}^k (m_q + P(\Delta))$, $i \in \{1, 2\}$, respectivamente, como podemos ver na figura abaixo.

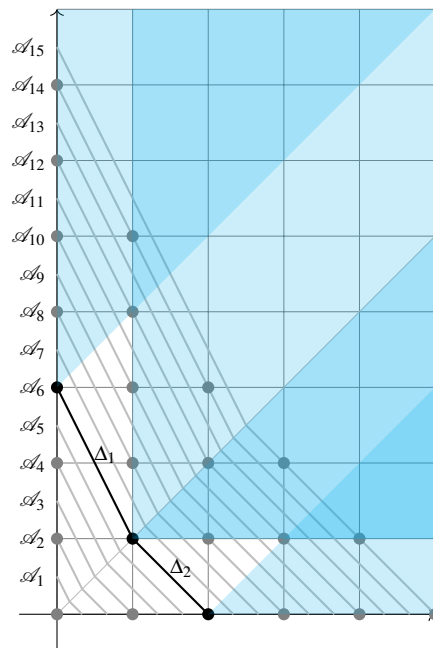


Figura 3.13: Representação gráfica do conjunto $P(\Delta_i) \setminus \bigcup_{q=1}^k (m_q + P(\Delta))$, $i \in \{1, 2\}$.

Ademais, os números obtidos coincidem também com as demais igualdades da demonstração do Lema (3.21).

Com isso, iremos enunciar e demonstrar agora um resultado que nos fornece uma maneira de calcular a codimensão do ideal gerado pelas formas iniciais F_1, \dots, F_k utilizando uma fórmula que envolve o volume associado ao poliedro de Newton de f .

Teorema 3.23. *Se $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ é uma série formal conveniente com parte principal newtoniana na origem não-degenerada, então a codimensão do ideal gerado no anel graduado associado $A = \text{gr}\mathcal{A} = \bigoplus_{q \geq 0} (\mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1})$ pelas formas iniciais das séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ é igual a $k!V_k$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema (3.20) a sequência

$$0 \longrightarrow A^{(k)} \xrightarrow{\partial_k} A^{(k-1)} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} A^{(1)} \xrightarrow{\partial_1} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{(F_1, \dots, F_k)} \longrightarrow 0$$

é exata. Além disso, como cada operador bordo do Complexo de Koszul aumenta a graduação em M , para cada $l \geq 0$, a sequência

$$0 \longrightarrow A_{l-kM}^{(k)} \xrightarrow{\partial_k} A_{l-(k-1)M}^{(k-1)} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} A_{l-M}^{(1)} \xrightarrow{\partial_1} A_l \xrightarrow{\pi} \frac{A_l}{(F_1, \dots, F_k) \cap A_l} \longrightarrow 0$$

é exata, em que $A_m = A_0$, se $m < 0$. Ademais, como o funtor $\dim_{\mathcal{C}}$ é aditivo, temos

$$\sum_{n=0}^k (-1)^n \dim_{\mathcal{C}}(A_{l-nM}^{(k)}) = \dim_{\mathcal{C}} \left(\frac{A_l}{(F_1, \dots, F_k) \cap A_l} \right).$$

Multiplicando por t^l , teremos

$$\sum_{n=0}^k (-1)^n \dim_{\mathcal{C}}(A_{l-nM}^{(k)}) t^l = \dim_{\mathcal{C}} \left(\frac{A_l}{(F_1, \dots, F_k) \cap A_l} \right) t^l.$$

Fazendo a substituição $q = l - nM$, temos $l = q + nM$ e, conseqüentemente,

$$\sum_{n=0}^k (-1)^n \dim_{\mathcal{C}}(A_q^{(k)}) t^{q+nM} = \dim_{\mathcal{C}} \left(\frac{A_l}{(F_1, \dots, F_k) \cap A_l} \right) t^l.$$

Somando em l , obtemos

$$\sum_{q \geq 0} \sum_{n=0}^k (-1)^n \dim_{\mathcal{C}}(A_q^{(k)}) t^{q+nM} = \sum_{l \geq 0} \dim_{\mathcal{C}} \left(\frac{A_l}{(F_1, \dots, F_k) \cap A_l} \right) t^l.$$

Assim,

$$\sum_{q \geq 0} \sum_{n=0}^k (-1)^n \dim_{\mathcal{C}}(A_q^{(k)}) t^{q+nM} = p_{\frac{A}{(F_1, \dots, F_k)}}(t).$$

Entretanto, utilizando o binômio de Newton,

$$\begin{aligned} p_A(t)(1-t^M)^k &= \sum_{q \geq 0} \dim_{\mathcal{C}}(A_q) t^q (1-t^M)^k \\ &= \sum_{q \geq 0} \dim_{\mathcal{C}}(A_q) t^q \sum_{n=0}^k (-1)^n \binom{k}{n} t^{nM} \\ &= \sum_{q \geq 0} \sum_{n=0}^k (-1)^n \binom{k}{n} \dim_{\mathcal{C}}(A_q) t^{q+nM} \\ &= \sum_{q \geq 0} \sum_{n=0}^k (-1)^n \dim_{\mathcal{C}}(A_q^{(k)}) t^{q+nM}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$p_{A/(F_1, \dots, F_k)}(t) = p_A(t)(1-t^M)^k.$$

Consequentemente,

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{A}{(F_1, \dots, F_k)} = p_A(t)(1-t^M)^k \Big|_{t=1}.$$

Ademais, da Proposição (3.16), a sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_k} \bigoplus_{\Delta \in I} A_{\Delta} \longrightarrow C_{k-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0,$$

é exata. Novamente, como o funtor $\dim_{\mathcal{C}}$ é aditivo,

$$\dim_{\mathcal{C}}(A_q) - \dim_{\mathcal{C}}(C_{k-1})_q + \dots + (-1)^k \dim_{\mathcal{C}}(C_0)_q = 0.$$

Daí, multiplicando por t^q e somando em q , obtemos

$$p_A(t) - p_{C_{k-1}}(t) + \dots + (-1)^k p_{C_0}(t) = 0.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} p_{C_{k-1}}(t) &= \sum_{q \geq 0} \dim_{\mathcal{C}} \left(A_q \cap \left(\bigoplus_{\Delta \in I} A_{\Delta} \right) \right) t^q \\ &= \sum_{q \geq 0} \dim_{\mathcal{C}} \bigoplus_{\Delta \in I} (A_q \cap A_{\Delta}) t^q \\ &= \sum_{q \geq 0} \sum_{\Delta \in I} \dim_{\mathcal{C}} (A_q \cap A_{\Delta}) t^q \\ &= \sum_{\Delta \in I} \sum_{q \geq 0} \dim_{\mathcal{C}} (A_q \cap A_{\Delta}) t^q \\ &= \sum_{\Delta \in I} p_{A_{\Delta}}(t). \end{aligned}$$

Com um processo análogo, obtemos

$$p_A(t) = \sum_{\Delta \in I} p_{A_{\Delta}}(t) + R(t),$$

em que $R(t)$ é a soma alternada das séries de Poincaré dos módulos A_{Δ} , em que $\dim \Delta \leq k-2$. De acordo com o primeiro item do Lema (3.21), $R(t)$ é uma função racional em t com polo de ordem menor ou igual a $k-1$ no ponto $t=1$. Logo, $R(t)(1-t^M)^k \Big|_{t=1} = 0$.

Consequentemente,

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{A}{(F_1, \dots, F_k)} = p_A(t)(1-t^M)^k \Big|_{t=1} = \sum_{\Delta \in I} p_{A_{\Delta}}(t)(1-t^M)^k \Big|_{t=1}.$$

De acordo com o segundo item do Lema (3.21), para cada $\Delta \in I$, $p_{A_{\Delta}}(t)(1-t^M)^k = k!V_{k_{\Delta}}$. Assim, a última soma é igual a $k! \sum_{\Delta \in I} V_{k_{\Delta}} = k!V_K$, concluindo a demonstração. \square

3.2 Relação entre os ideais $\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ e (F_1, \dots, F_k) .

Na seção anterior, encontramos uma forma de calcular a codimensão do ideal (F_1, \dots, F_k) por meio de uma fórmula envolvendo volume. Nesta seção, veremos de que forma conseguimos relacionar esta fórmula com o ideal gerado pelos respectivos elementos $\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$.

Primeiramente, definamos uma \mathbb{Z} -filtração.

Definição 3.24. Uma \mathbb{Z} -filtração decrescente em um anel A é uma família de ideais A_i , $i \in \mathbb{Z}$ tal que $A = A_0$, $A_{i+1} \subset A_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$ e $A_i A_j \subset A_{i+j}$.

Os anéis graduados e demais definições são semelhantes às feitas na seção Preliminar (1.2)

Nesta seção, quando mencionarmos o termo filtração, estaremos nos referindo a \mathbb{Z} -filtração decrescente.

Uma aplicação $\partial : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ de \mathcal{C} -módulos filtrados se chama estrita se para todo $q \in \mathbb{Z}$, temos $\partial \mathcal{X}_q = \partial \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}_q$. Seja \mathcal{A} uma \mathcal{C} -álgebra filtrada que satisfaz a condição $\mathcal{A} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_q$. Denotaremos

$$gr(\mathcal{A}) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_q / \mathcal{A}_{q+1} \text{ por } A = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} A_q.$$

Seja $f_i \in \mathcal{A}_{d_i}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Denotaremos $F_i = f_i + \mathcal{A}_{d_i+1} \in A_{d_i}$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Ademais, dada uma aplicação $\partial : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre \mathcal{C} -módulos filtrados, definimos $gr\partial : gr\mathcal{X} \rightarrow gr\mathcal{Y}$ por $gr\partial(f + \mathcal{X}_{i+1}) = \partial(f) + \mathcal{Y}_{i+1}$.

Lema 3.25. *Seja*

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{B} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A}$$

um complexo de \mathcal{C} -módulos filtrados, ∂_1 e ∂_2 aplicações que respeitam a filtração. Denotemos $gr\mathcal{K}, gr\mathcal{B}, gr\mathcal{A}, gr\partial_1, gr\partial_2$ por K, B, A, d_2, d_1 , respectivamente. Suponhamos que $\mathcal{B} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$ e que a seqüência

$$K \xrightarrow{d_2} B \xrightarrow{d_1} A \tag{3.11}$$

é exata. Então, para todo $q \in \mathbb{Z}$, temos $\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q = \partial_1(\mathcal{B}_q)$, ou seja, o morfismo ∂_1 é estrito.

Demonstração. Primeiramente, se $a \in \partial_1(\mathcal{B}_q)$, como por hipótese ∂_1 preserva filtração, devemos ter $a \in \mathcal{A}_q$. Ademais, como $\mathcal{B} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$, temos $\partial_1(\mathcal{B}_q) \subset \partial_1(\mathcal{B})$. Assim, $a \in \partial_1(\mathcal{B})$ e, conseqüentemente, $\partial_1(\mathcal{B}_q) \subseteq \partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q$.

Agora, suponhamos $\partial_1(b) = a \in \mathcal{A}_q$. Consideremos

$$q_1 = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq q \text{ e } a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}.$$

Como $\mathcal{B} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_q$, o conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : n \leq q \text{ e } a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}$ é não vazio, uma vez que, se $a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)$, com $n \leq q$, então $n \in \{n \in \mathbb{Z} : n \leq q \text{ e } a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\}$ e, caso $n > q$, então $\mathcal{B}(n) \subseteq \mathcal{B}(q)$,

implicando em $a \in \mathcal{B}_q$ e $\{n \in \mathbb{Z} : n \leq q \text{ e } a \in \partial_1(\mathcal{B}_n)\} \neq \emptyset$. Consequentemente, q_1 está bem definido. Mostremos que $q_1 = q$. Para isso, suponhamos que $q_1 < q$. Pela definição de q_1 , existe $b_1 \in \mathcal{B}_{q_1}$ tal que $\partial_1(b_1) = a$. Consequentemente, $\partial_1(b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}) \subseteq a + \mathcal{A}_{q_1+1}$. Daí,

$$\begin{aligned} d_1(b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}) &= gr \partial_1(b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}) \\ &= \partial_1(b_1) + \mathcal{A}_{q_1+1} \\ &= a + \mathcal{A}_{q_1+1}. \end{aligned}$$

Como $q_1 < q$, segue que $q_1 + 1 \leq q$ e, logo $\mathcal{A}_q \subseteq \mathcal{A}_{q_1+1}$. Logo, $a \in \mathcal{A}_{q_1+1}$ e $d_1(b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}) = 0 + \mathcal{A}_{q_1+1}$.

Assim, $a \in \mathcal{A}_{q_1+1} \in \ker d_1$. Por hipótese, a sequência (3.11) é exata. Então, existe $x \in \mathcal{K}_{q_1}$ tal que $d_1(x + \mathcal{K}_{q_1+1}) = b_1 + \mathcal{B}_{q_1+1}$. Isto implica que

$$b_1 - \partial_2(x) \in \mathcal{B}_{q_1+1},$$

entretanto,

$$\partial_1(b_1 - \partial_2(x)) = \partial_1 b_1 = a,$$

o que contraria a maximalidade de q_1 .

Portanto, $a \in \partial_1(\mathcal{B}_q)$ e, consequentemente, $\partial_1(\mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_q = \partial_1(\mathcal{B}_q)$. □

Lema 3.26. *Seja $\partial : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ um morfismo estrito de \mathcal{C} -módulos filtrados. Então, existe um isomorfismo de \mathcal{C} -módulos*

$$gr(\mathcal{A} / \partial(\mathcal{B})) \simeq gr(\mathcal{A}) / gr(\partial) gr(\mathcal{B}).$$

Demonstração. De fato,

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\partial(\mathcal{B})} \right)_q = \frac{\mathcal{A}_q + \partial(\mathcal{B})}{\partial(\mathcal{B})}.$$

Assim,

$$gr \left(\frac{\mathcal{A}}{\partial(\mathcal{B})} \right) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\frac{\mathcal{A}_q + \partial(\mathcal{B})}{\partial(\mathcal{B})}}{\frac{\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})}{\partial(\mathcal{B})}} \right) \simeq \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \frac{\mathcal{A}_q + \partial(\mathcal{B})}{\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})}.$$

Por outro lado, para cada $q \in \mathbb{Z}$ fixado, consideremos as aplicações $\pi_{\mathcal{A}_q} : \mathcal{A}_q \rightarrow \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}$ e $\pi_{\mathcal{B}_q} : \mathcal{B}_q \rightarrow \frac{\mathcal{B}_q}{\mathcal{B}_{q+1}}$ definidas por $\pi_{\mathcal{A}_q}(a) = a + \mathcal{A}_{q+1}$ e $\pi_{\mathcal{B}_q}(b) = b + \mathcal{B}_{q+1}$, respectivamente. Ambas as aplicações estão bem definidas e são sobrejetoras.

Por hipótese, ∂ é um morfismo estrito, ou seja, $\partial(\mathcal{B}_q) \subseteq \mathcal{A}_q$. Consequentemente, $gr \partial \left(\frac{\mathcal{B}_q}{\mathcal{B}_{q+1}} \right) \subseteq$

$$\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}.$$

Ademais, dado $b \in \mathcal{B}_q$ arbitrário,

$$\begin{aligned} \text{gr}\partial(\pi_{\mathcal{B}_q}(b)) &= \text{gr}\partial(b + \mathcal{B}_{q+1}) = \partial(b) + \mathcal{A}_{q+1}; \\ \pi_{\mathcal{A}_q}(\partial(b)) &= \partial(b) + \mathcal{A}_{q+1}. \end{aligned}$$

Logo, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_q & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}_q \\ \downarrow \pi_{\mathcal{B}_q} & & \downarrow \pi_{\mathcal{A}_q} \\ \frac{\mathcal{B}_q}{\mathcal{B}_{q+1}} & \xrightarrow{\text{gr}\partial} & \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \end{array}$$

Além disso, como $\pi_{\mathcal{B}_q}$ é sobrejetora, temos $\text{gr}\partial(\pi_{\mathcal{B}_q}(\mathcal{B}_q)) = \text{gr}\partial\left(\frac{\mathcal{B}_q}{\mathcal{B}_{q+1}}\right)$. Assim, $\text{gr}\partial\left(\frac{\mathcal{B}_q}{\mathcal{B}_{q+1}}\right) = \pi_{\mathcal{A}_q}(\partial(\mathcal{B}_q))$.

Agora, consideremos a seguinte sequência:

$$0 \longrightarrow \pi_{\mathcal{A}_q}(\partial(\mathcal{B}_q)) \xrightarrow{i} \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \xrightarrow{j} \frac{\mathcal{A}_q + \partial(\mathcal{B})}{\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})} \longrightarrow 0, \quad (3.12)$$

em que i é a inclusão e $j: \frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}} \rightarrow \frac{\mathcal{A}_q + \partial(\mathcal{B})}{\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})}$ é definida por $j(a + \mathcal{A}_{q+1}) = a + (\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B}))$.

Mostremos que j está bem definida: se $a + \mathcal{A}_{q+1} = a' + \mathcal{A}_{q+1}$, então $a - a' \in \mathcal{A}_{q+1} \subset \mathcal{A}_{q+1} + \mathcal{B}_q$, ou seja, $j(a - a' + \mathcal{A}_{q+1}) = 0 + (\mathcal{A}_{q+1} + \mathcal{B}_q)$ e $j(a + \mathcal{A}_{q+1}) = j(a' + \mathcal{A}_{q+1})$.

Ademais, j é sobrejetora.

Agora, dado $\partial(b) + \mathcal{A}_{q+1} \in \pi_{\mathcal{A}_q}(\partial(\mathcal{B}_q))$ arbitrário,

$$\begin{aligned} j(i(\pi_{\mathcal{A}_q}(\partial(b)))) &= j(\partial(b) + \mathcal{A}_{q+1}) \\ &= \partial(b) + (\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})) \\ &= 0 + \partial(b) + (\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})) \\ &= 0 + (\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $a + \mathcal{A}_{q+1} \in \ker j$, então $a \in \mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})$. Ou seja, $a = a' + \partial(b)$ para alguns $a' \in \mathcal{A}_{q+1}$ e $b \in \mathcal{B}$. Entretanto, isto implica que $a + \mathcal{A}_{q+1} = \partial(b) + \mathcal{A}_{q+1}$. Ou seja, $a + \mathcal{A}_{q+1} = i(\pi_{\mathcal{A}_q}(\partial(b)))$ e $a \in \text{Im}(i)$.

Portanto, $\ker j = \text{Im}(i)$ e a sequência (3.12) é exata. Consequentemente,

$$\frac{\mathcal{A}_q + \partial(\mathcal{B})}{\mathcal{A}_{q+1} + \partial(\mathcal{B})} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}}{\pi_{\mathcal{A}_q}(\partial(\mathcal{B}_q))} = \frac{\frac{\mathcal{A}_q}{\mathcal{A}_{q+1}}}{\text{gr}\partial\left(\frac{\mathcal{B}_q}{\mathcal{B}_{q+1}}\right)},$$

para todo $q \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\text{gr}\left(\frac{\mathcal{A}}{\partial(\mathcal{B})}\right) \simeq \frac{\text{gr}(\mathcal{A})}{\text{gr}\partial(\text{gr}(\mathcal{B}))}.$$

□

Teorema 3.27. *Suponhamos que o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k da \mathcal{C} -álgebra A é acíclico em dimensão 1. Então,*

1. *existe um isomorfismo de \mathcal{C} -módulos*

$$\text{gr} \left(\frac{\mathcal{A}}{(f_1, \dots, f_k)} \right) \simeq \frac{A}{(F_1, \dots, F_k)};$$

2. *o morfismo $\partial_1 : \mathcal{A}^k \rightarrow \mathcal{A}$ definido por $\partial_1(g_1, \dots, g_l) = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$ é estrito para a escolha da filtração sobre \mathcal{A}^k : o grau de $(0, \dots, g_i, \dots, 0)$ sobre \mathcal{A}^k é igual ao grau de g_i sobre \mathcal{A} menos d_i .*

Demonstração. Consideremos a seguinte parte do complexo de Koszul dos elementos $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{\binom{k}{2}} \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{A}^{\binom{k}{1}} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{A},$$

em que a filtração sobre $\mathcal{A}^{\binom{k}{2}}$ é introduzida da mesma maneira que a filtração sobre $\mathcal{A}^{\binom{k}{1}}$, considerando para cada cópia de \mathcal{A} na soma direta a filtração já definida, e definindo $\mathcal{A}_q^{\binom{k}{1}} = \mathcal{A}_q^{\binom{k}{1}}$. Ademais, consideremos também a seguinte sequência:

$$\text{gr}(\mathcal{A}^{\binom{k}{2}}) \xrightarrow{\text{gr}(\partial_2)} \text{gr}(\mathcal{A}^{\binom{k}{1}}) \xrightarrow{\text{gr}(\partial_1)} \text{gr}(\mathcal{A}). \quad (3.13)$$

De fato, tal sequência é isomorfa a um pedaço do complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k do anel $A = \text{gr}(\mathcal{A})$. Assim, por hipótese, a sequência (3.13) é exata e, pelo Lema (3.25), o morfismo ∂_1 é estrito, o que prova o item 2 do teorema.

Agora, como $\text{Im}(\partial_1) = (f_1, \dots, f_k)$ e $\text{Im}(\text{gr}(\partial_1)) = (F_1, \dots, F_k)$, do Lema (3.26), temos

$$\text{gr} \left(\frac{\mathcal{A}}{(f_1, \dots, f_k)} \right) \simeq \frac{\text{gr}(\mathcal{A})}{(F_1, \dots, F_k)} = \frac{A}{(F_1, \dots, F_k)},$$

o que prova o item 1. □

Com isso, conseguimos a relação pretendida no início desta seção, com o seguinte teorema.

Teorema 3.28. *Se $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ é uma série formal conveniente com parte principal newtoniana na origem não-degenerada, então a codimensão do ideal gerado pelas séries $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ sobre \mathcal{A} é igual a codimensão do ideal gerado pelas formas iniciais dessas séries sobre o anel graduado $A = \text{gr}\mathcal{A}$.*

Demonstração. Denotemos por $f_i = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{A}_M$, para todo $1 \leq i \leq k$. Segue do Teorema (3.20) que o complexo de Koszul dos elementos F_1, \dots, F_k é acíclico em dimensões positivas. Assim, segue do Teorema (3.27) que

$$\text{gr} \left(\frac{\mathcal{A}}{(f_1, \dots, f_k)} \right) \simeq \frac{A}{(F_1, \dots, F_k)}.$$

Assim, resta mostrarmos que $\dim_{\mathcal{C}} \operatorname{gr} \left(\frac{\mathcal{A}}{(f_1, \dots, f_k)} \right) = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{(f_1, \dots, f_k)}$. Para facilitar notação, consideremos $(f_1, \dots, f_k) = \mathcal{I}$, $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} = \mathcal{X}$ e $\operatorname{gr}(\mathcal{X}) = X$. De acordo com o Teorema (3.23), $\dim_{\mathcal{C}} X = k!V_K < \infty$. Logo, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{X}_r = \mathcal{X}_{r+1} = \dots$, ou seja, desde que

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} \right)_r = \frac{\mathcal{A}_r}{\mathcal{I} \cap \mathcal{A}_r} = \frac{\mathcal{A}_r + \mathcal{I}}{\mathcal{I}},$$

temos $\mathcal{I} + \mathcal{A}_r = \mathcal{I} + \mathcal{A}_{r+1} = \dots$.

Decorre da definição da filtração de Newton que existem $n, l \in \mathbb{N}$, com $n > r$ tais que

$$\mathcal{A}_r \supset \mathcal{M}^l \supset \mathcal{M}^{l+1} \supset \mathcal{A}_n.$$

Assim, como $\mathcal{I} + \mathcal{A}_r = \mathcal{I} + \mathcal{A}_n$, segue que $\mathcal{I} + \mathcal{M}^l = \mathcal{I} + \mathcal{M}^{l+1}$. Assim,

$$\mathcal{M}^l \subset \mathcal{I} + \mathcal{M}^l \subset \mathcal{I} + \mathcal{M}^{l+1}.$$

Do Corolário do Lema de Nakayama (1.16), segue que $\mathcal{M}^l \subseteq \mathcal{I}$. Entretanto, como $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}^l \subseteq \mathcal{I}$, então $\mathcal{X}_n = \frac{\mathcal{A}_n + \mathcal{I}}{\mathcal{I}} = 0$. Consequentemente,

$$\frac{\mathcal{A}_q + \mathcal{I}}{\mathcal{I}} = 0,$$

para todo $q \geq n$, visto que $\mathcal{A}_q \subseteq \mathcal{A}_n$. Ademais,

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} = \mathcal{X}_0 = \frac{\mathcal{X}_0}{\mathcal{X}_n}.$$

Portanto,

$$\dim_{\mathcal{C}} \mathcal{X} = \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{X}_0 = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{X}_0}{\mathcal{X}_n} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\mathcal{X}_q}{\mathcal{X}_{q+1}} = \sum_{q=0}^{n-1} \dim_{\mathcal{C}} \mathcal{X}_q = \dim_{\mathcal{C}} X,$$

o que prova o teorema. □

Assim, temos o seguinte corolário que segue diretamente dos Teoremas (3.23) e (3.28).

Corolário 3.29. *Se $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ é uma série formal conveniente com parte principal newtoniana na origem não-degenerada, então*

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)} = k!V_k,$$

em que V_k é o volume de dimensão k do poliedro $\Gamma_-(f)$.

Resultado Principal

Nos capítulos anteriores, obtivemos uma fórmula para calcular a codimensão do ideal $(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k})$ por meio do volume do poliedro de Newton de f . Neste capítulo, pretendemos usar esses resultados para enunciar e demonstrar o resultado principal deste trabalho, que relaciona o número de Milnor com o número de Newton.

Primeiramente, veremos alguns resultados preliminares.

Lema 4.1. *Se $g', g'', g_2, \dots, g_k \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ e $g_1 = g' \cdot g''$, então*

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g_1, \dots, g_k)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g', \dots, g_k)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g'', \dots, g_k)}.$$

Demonstração. Caso $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g_1, \dots, g_k)} = \infty$, a igualdade é válida.

Suponhamos que $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g_1, \dots, g_k)} < \infty$ e denotemos $\mathcal{A} = \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$. De fato,

$$\frac{\mathcal{A}}{(g_1, \dots, g_k)} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g_1, \dots, g_k)}}, \quad \frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)}} \text{ e } \frac{\mathcal{A}}{(g'', \dots, g_k)} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g'', \dots, g_k)}}. \quad (4.1)$$

Ademais,

$$\frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)}} \simeq \frac{\frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g_1, \dots, g_k)}}}{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_1, \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}. \quad (4.2)$$

Mostremos que

$$\frac{\frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_1, \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}.$$

Seja $\phi : \frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)} \rightarrow \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)}}{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}$ definida por $\phi(a + (g_2, \dots, g_k)) = g' \cdot (a + (g_2, \dots, g_k)) + \frac{\mathcal{A}}{(g_1, \dots, g_k)}$. De fato, tal aplicação está bem definida e é sobrejetora.

Além disso, se $a \in (g'', \dots, g_k)$, temos $a = a_1 g'' + \dots + a_k g_k$. Logo, $\phi(a + (g_2, \dots, g_k)) = \phi(a_1 g'' + (g_2, \dots, g_k)) = (a g_1 + (g_2, \dots, g_k)) + \frac{(g_1, \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)} = 0 + \frac{(g_1, \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}$. Consequentemente, $\frac{(g'', \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)} \subseteq \ker(\phi)$.

Por outro lado, se $b + (g_2, \dots, g_k) \in \ker(\phi)$, então $b g' + (g_2, \dots, g_k) \in \frac{(g_1, \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}$. Ou seja,

$$b g' = a_1 g_1 + \dots, a_k g_k.$$

Assim,

$$b g' + (g_2, \dots, g_k) = a_1 g_1 + (g_2, \dots, g_k) = a_1 g' g'' + (g_2, \dots, g_k).$$

Assim, $(b - a_1 g'') g' + (g_2, \dots, g_k) = 0 + (g_2, \dots, g_k)$. Entretanto, como por hipótese $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)} < \infty$, pela Proposição (1.39), $\frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)}$ tem comprimento finito. Consequentemente, por definição, g', \dots, g_k é um sistema de parâmetros. Desde que \mathcal{A} é Cohen-Macaulay, pelo Teorema (1.44), segue que g', \dots, g_k é uma sequência regular e, por definição, g' não é divisor de zero em $\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}$.

Com isso, $b - a_1 g'' \in (g_2, \dots, g_k)$ e, consequentemente, $b + (g_2, \dots, g_k) = a_1 g'' + (g_2, \dots, g_k)$, ou seja, $b + (g_2, \dots, g_k) \in \frac{(g'', \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}$.

Logo, $\frac{(g'', \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)} = \ker(\phi)$ e isso prova que

$$\frac{\frac{(g', \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{(g_1, \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}} \simeq \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{(g'', \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}} \simeq \frac{\mathcal{A}}{(g'', \dots, g_k)}. \quad (4.3)$$

Assim, do isomorfismo (4.2), e de propriedades de codimensão, obtemos

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{(g', \dots, g_k)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\frac{\mathcal{A}}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{(g_1, \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}} - \dim_{\mathcal{C}} \frac{\frac{(g', \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}}{\frac{(g_1, \dots, g_k)}{(g_2, \dots, g_k)}}.$$

Mas, dos isomorfismos (4.1) e (4.3), obtemos

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g_1, \dots, g_k)} - \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g'', \dots, g_k)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g', \dots, g_k)},$$

ou seja,

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g_1, \dots, g_k)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g', \dots, g_k)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(g'', \dots, g_k)}.$$

□

Observação 4.2. Consideremos a seguinte notação: seja I um subconjunto próprio de $\{1, \dots, k\}$. Denotaremos por $|I|$ o número de elementos em I , por \mathbb{R}_{+I} o conjunto $\{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k : \forall \alpha \in I, t_\alpha = 0\}$ e $\mathbb{N}_I = \mathbb{N}^k \cap \mathbb{R}_{+I}$.

Dada $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$, denotaremos $f_I = \sum_{n \in \mathbb{N}_I} a_n x^n$ e consideraremos f_I como uma série formal de $k - |I|$ variáveis. Denotaremos o número de Milnor de f_I por μ_I . Iremos denotar também $\mu_\emptyset = \mu(f)$

e $\mu_{\{1,\dots,k\}} = 1$.

De acordo com esta notação, teremos

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} = \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1, \dots, k\})} \mu_I, \quad (4.4)$$

em que $\mathcal{P}(\{1, \dots, k\})$ denota o conjunto das partes de $\{1, \dots, k\}$.

De fato, para $k = 1$, segue do Lema (4.1) que

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\left(x \frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{(x)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x]]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)},$$

sendo que $\mu_{\emptyset} = \mu(f) = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}$ e $\mu_{\{1\}} = 1 = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{(x)}$.

Para o caso $k = 2$, pelo Lema (4.1), teremos

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{(x_1, x_2)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{\left(x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2\right)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{(x_1, x_2)} &= 1 = \mu_{\{1,2\}} \\ \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{\left(x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)} &= \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]/(x_1)}{\left(x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)/(x_1)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_2]]}{\left(\frac{\partial f_{\{2\}}}{\partial x_2}\right)} = \mu_{\{2\}} \\ \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2\right)} &= \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]/(x_2)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2\right)/(x_2)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1]]}{\left(\frac{\partial f_{\{1\}}}{\partial x_1}\right)} = \mu_{\{1\}} \\ \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, x_2]]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)} &= \mu(f) = \mu_{\emptyset}. \end{aligned}$$

Para $k = l + 1$. Pelo Lema (4.1),

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{l+1} \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}\right)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{l+1}\right)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}\right)}.$$

Assim,

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{l+1}\right)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]/(x_{l+1})}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{l+1}\right)/(x_{l+1})} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_l]]}{\left(x_1 \frac{\partial f_{\{1,\dots,l\}}}{\partial x_1}, \dots, x_l \frac{\partial f_{\{1,\dots,l\}}}{\partial x_l}\right)},$$

e

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}\right)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_l, \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}\right)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_l}, \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}\right)}.$$

Da mesma forma,

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_l, \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}\right)} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f_{\{1, \dots, l-1, l+1\}}}{\partial x_1}, \dots, x_{l-1} \frac{\partial f_{\{1, \dots, l-1, l+1\}}}{\partial x_{l-1}}, x_{l+1} \frac{\partial f_{\{1, \dots, l-1, l+1\}}}{\partial x_{l+1}}\right)}.$$

Prosseguindo dessa maneira e aplicando o Lema (4.1) sucessivamente, obteremos a igualdade desejada:

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_{l+1}]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{l+1} \frac{\partial f}{\partial x_{l+1}}\right)} = \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1, \dots, l+1\})} \mu_I.$$

Agora, tendo em vista esta notação, podemos enunciar o seguinte lema:

Lema 4.3. *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal conveniente com parte principal newtoniana não-degenerada na origem. Consideremos I um subconjunto próprio do conjunto $\{1, \dots, k\}$. Então,*

1. *A série f_I é uma série formal conveniente com parte principal newtoniana não-degenerada na origem, quando consideramos f_I no anel das séries formais com $k - |I|$ variáveis;*

2. $\Gamma_-(f_I) = \Gamma_-(f) \cap \mathbb{R}_{+I}$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ como no enunciado e consideremos a série f_I . Por hipótese, f é conveniente, ou seja, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ o monômio $x_i^{n_i}$ aparece em f com coeficiente não nulo. Assim, quando analisamos f_I como uma série formal de $k - |I|$ variáveis, da definição de f_I , todos os monômios $x_i^{n_i}$, com $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I$ irão aparecer com coeficientes não nulo, ou seja, ela será conveniente.

Ademais, como f possui parte principal newtoniana não-degenerada na origem, para cada face $\Delta \subset \Gamma$, teremos

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{A_{\Delta}}{\left(\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\Delta}, \dots, \left(x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_{\Delta}\right)} < \infty.$$

Daí, do Lema (4.1), sendo $I = \{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, k\}$, teremos

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} &= \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{i_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} + \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} \\ &\vdots \\ &= \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)} + n \\ &= \dim_{\mathcal{C}} \frac{\frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}}{\left(x_1 \frac{\partial f_I}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k}\right)} + n. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{A_{\Delta}}{\left(\left(x_1 \frac{\partial f_I}{\partial x_1}\right)_{\Delta}, \dots, \left(x_k \frac{\partial f_I}{\partial x_k}\right)_{\Delta}\right)} < \infty,$$

provando o primeiro item.

O segundo item segue da definição de $\Gamma_-(f)$. □

Na sequência, estudemos alguns resultados técnicos que usaremos adiante.

Lema 4.4. *Seja J um ideal de $\mathcal{A} = \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ que satisfaz*

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{(J + \mathcal{M}^{l+1})} \leq l,$$

para algum inteiro $l > 0$. Então, $\mathcal{M}^l \subset J$.

Demonstração. Consideremos a seguinte cadeia:

$$(J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^0 \supseteq (J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^1 \supseteq (J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^2 \supseteq \dots \supseteq (J + \mathcal{M}^{l+1}). \quad (4.5)$$

Então,

$$\text{codim}(J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^0 \leq \text{codim}(J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^1 \leq \dots \leq \text{codim}(J + \mathcal{M}^{l+1}) \leq l.$$

Mas, como $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{(J + \mathcal{M}^{l+1})} \leq l$, devemos ter

$$(J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^{k_0} = (J + \mathcal{M}^{l+1}) + \mathcal{M}^{k_0+1},$$

para algum $k_0 \leq l$. Daí, $\mathcal{M}^{l+1} \subset \mathcal{M}^{k_0}$ e, conseqüentemente, $J + \mathcal{M}^k = J + \mathcal{M} \mathcal{M}^{k_0}$. Do Corolário (1.16) do Lema de Nakayama, segue que $\mathcal{M}^k \subset J$. Conseqüentemente, $\mathcal{M}^l \subset \mathcal{M}^k \subset J$. □

Proposição 4.5. *Sejam $f, f_1 \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ quaisquer com $\mu(f) = l < \infty$ e $f_1 - f \in \mathcal{M}^{l+2}$. Então, $\mu(f_1) = \mu(f)$.*

Demonstração. Sejam $J = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$ e $J_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \right)$. Por hipótese, $\mu(f) = l < \infty$, ou seja, $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J} = l$, o que implica $\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J + \mathcal{M}^{l+1}} \leq l$. Do Lema (4.4), temos $\mathcal{M}^{l+1} \subset J$.

Assim, $l = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J} = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J + \mathcal{M}^{l+1}}$. Desde que $f_1 - f \in \mathcal{M}^{l+2}$, temos $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_1 - f) \in \mathcal{M}^{l+1}$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Ou seja, $J + \mathcal{M}^{l+1} = J_1 + \mathcal{M}^{l+1}$. Conseqüentemente,

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]}{J_1 + \mathcal{M}^{l+1}} = l.$$

Daí, novamente pelo Lema (4.4), $\mathcal{M}^{l+1} \subset J_1$ e $J_1 = J_1 + \mathcal{M}^{l+1}$.

Portanto,

$$\mu(f_1) = l = \mu(f).$$

□

Lema 4.6. *Suponhamos que $\text{char } \mathcal{C} = 0$. Para cada poliedro $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ compacto e convexo de dimensão $q \leq k - 1$ não contido em nenhum subespaço vetorial de dimensão q e cujos vértices estão em \mathbb{Z}^k , existe um subconjunto de $\mathcal{C}[\Delta]$ aberto e denso pela topologia de Zariski que é formado por todas as séries formais $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ tal que os polinômios de Laurent $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ não se anulam ao mesmo tempo em $(\mathcal{C} \setminus \{0\})^k$.*

Demonstração. Para cada $f \in \mathcal{C}[\mathbb{Z}^k]$, o ideal $(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_k \frac{\partial f}{\partial x_k})$ não depende da escolha da base de \mathbb{Z}^k . Assim, podemos escolher uma nova base em \mathbb{Z}^k tal que, para certo $i > 0$, $\Delta \subset \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k : t_k = i\}$. Para isso, basta tomar um dos vetores da base como sendo o vetor que liga a origem a Δ perpendicularmente e outros vetores ortogonais. Por hipótese, Δ é convexo e $\dim \Delta < k$. Logo, Δ está contido em um hiperplano. Consequentemente, haverá apenas um vetor normal a menos de norma.

Ademais, substituindo x_i^n por x_i^{n+d} para um $d \in \mathbb{N}$ conveniente, podemos supor para $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ que $(0, \dots, 0, i) \in \text{supp } f$. Nessas condições,

$$f(x_1, \dots, x_k) = x_k^i g(x_1, \dots, x_{k-1}),$$

em que g é um polinômio de Laurent nas variáveis x_1, \dots, x_{k-1} . Agora, se $x_k^i g \in \mathcal{C}[\Delta]$, então para cada $\alpha \in \mathcal{C}$, teremos $x_k^i (g - \alpha) \in \mathcal{C}[\Delta]$. Além disso, se

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_k^i (g - \alpha)), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (x_k^i (g - \alpha))$$

se anulam ao mesmo tempo em $\beta \in (\mathcal{C} \setminus \{0\})^k$, então

$$\begin{cases} (x_j x_k^i \frac{\partial}{\partial x_j} g)(\beta) = 0, \text{ para } j \in \{1, \dots, k-1\}, \\ (i x_k^i (g - \alpha))(\beta) = 0. \end{cases}$$

Como $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in (\mathcal{C} \setminus \{0\})^k$, devemos ter $\beta_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$. Daí,

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_j}(\beta) = 0, \text{ para } j \in \{1, \dots, k-1\}, \\ g(\beta) = \alpha. \end{cases}$$

Ou seja, $\alpha \in \mathcal{C}$ é valor crítico de g . Entretanto, de acordo com o Teorema de Sard, o conjunto dos valores regulares de g é denso em \mathcal{C} . Ou seja, para cada $f \in \mathcal{C}[\Delta]$ e para quase todo $\alpha \in \mathcal{C}$, os polinômios de Laurent

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - x_k^i \alpha), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - x_k^i \alpha)$$

não se anulam ao mesmo tempo sobre $(\mathcal{C} \setminus \{0\})^k$. Assim, consideremos o conjunto \mathcal{D} formado pelos elementos $f - x_k^i \alpha \in \mathcal{C}[\Delta]$, em que $f \in \mathcal{C}[\Delta]$, $\alpha \in \mathcal{C}$ e $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - x_k^i \alpha), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - x_k^i \alpha)$ não se anulam ao mesmo tempo sobre $(\mathcal{C} \setminus \{0\})^k$. Mostremos que este conjunto é denso em $\mathcal{C}[\Delta]$ pela topologia de Zariski.

Como $\Delta \subset \mathbb{R}^k$ é compacto, Δ é limitado. Consequentemente, $\Delta \cap \mathbb{Z}^k$ possui apenas uma quantidade

finita de pontos. Suponhamos que $\mathbb{Z}^k \cap \Delta = \{n_1, \dots, n_l\}$, sendo que $n_l = (0, \dots, 0, i)$. Assim, se $f \in \mathcal{C}[\Delta]$, então f se escreve da forma $f = \sum_{i=1}^l a_i x^{n_i}$.

Seja $\phi : \mathcal{C}[\Delta] \rightarrow \mathcal{C}^l$ definido por $\phi(\sum_{i=1}^l a_i x^{n_i}) = (a_1, \dots, a_l)$. De fato, ϕ está bem definida e é um isomorfismo. Consideremos em \mathcal{C}^l a topologia de Zariski. Dado $a = (a_1, \dots, a_l) \in \mathcal{C}^l$ arbitrário, consideremos uma vizinhança aberta qualquer de a , $B = \mathcal{C}^l \setminus V(S)$, em que $S \subset \mathcal{C}[y_1, \dots, y_l]$. Como $a \notin V(S)$, existe um polinômio $p(y) \in S$ tal que $p(a) \neq 0$. Como todo polinômio é contínuo, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $b \in B_\varepsilon(a)$ temos $p_i(b) \neq 0$, sendo $B_\varepsilon(a)$ a bola aberta de centro a e raio ε .

Assim, como para quase todo $\alpha \in \mathcal{C}$, os polinômios de Laurent

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (f - x_k^i \alpha), \dots, x_k \frac{\partial}{\partial x_k} (f - x_k^i \alpha)$$

não se anulam ao mesmo tempo em $(\mathcal{C} \setminus \{0\})^k$, podemos tomar α pequeno o suficiente satisfazendo a condição acima para $f = \sum_{i=1}^k a_i x^{n_i}$ e teremos

$$\phi(f - \alpha x^{n_i}) = (a_1, \dots, a_n - \alpha) \in B_\varepsilon(a).$$

Daí, $p(a_1, \dots, a_n - \alpha) \neq 0$ e $\phi(f - \alpha x^{n_i}) \in B$.

Portanto, o conjunto $\phi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}^l$ é denso em \mathcal{C}^l e, conseqüentemente, $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}[\Delta]$ é denso em $\mathcal{C}[\Delta]$.

Agora, mostremos que \mathcal{D} é um conjunto aberto de $\mathcal{C}[\Delta]$ pela topologia de Zariski. Para isso, faremos uma indução sobre o número de variáveis k .

Para $k = 1$, devemos ter $f(x) = cx^i$, para algum $i > 0$. Daí, $x \frac{df}{dx}(x) = icx^i$. Assim, $x \frac{df}{dx}(x_0) = 0$ com $x_0 \neq 0$ se, e somente se, $c = 0$. Daí, $f \equiv 0$ e, conseqüentemente, $\phi(f) \in V(c)$. Ou seja, \mathcal{D} é um aberto pela topologia de Zariski.

Suponhamos que a afirmação seja válida para $k = m$. Então, considerando $f(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathcal{C}[\Delta]$ arbitrária, por hipótese,

$$f(x_1, \dots, x_{m+1}) = x_{m+1}^i g(x_1, \dots, x_m),$$

para algum $i > 0$ e $g \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_m]]$, com $g \in \mathcal{C}[\tilde{\Delta}]$, em que $\tilde{\Delta}$ é a projeção de Δ no hiperplano $x_{m+1} = 0$. Consideremos $\tilde{\mathcal{D}}$ definido da mesma maneira que \mathcal{D} mas para o caso de $\mathcal{C}[\tilde{\Delta}]$. Assim, se $f \notin \mathcal{D}$, existe $\beta \in (\mathcal{C} \setminus \{0\})^{m+1}$ tal que

$$x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\beta) = 0,$$

para todo $j \in \{1, \dots, m+1\}$. Mas, isto implica que

$$\begin{cases} x_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(\beta_1, \dots, \beta_m) = 0, & \text{para } j \in \{1, \dots, m\}, \\ g(\beta_1, \dots, \beta_m) = 0. \end{cases}$$

Ou seja, considerando g como uma série formal em m variáveis, temos $g \notin \tilde{\mathcal{D}}$ e, pela hipótese de indução, $\phi(\mathcal{C}[\tilde{\Delta}] \setminus \tilde{\mathcal{D}}) = V(S)$, para algum $S \subset \mathcal{C}[y_1, \dots, y_l]$. Mas, considerando os mesmos polinômios, como $f(x_1, \dots, x_{m+1}) = x_{m+1}^i g(x_1, \dots, x_m)$, segue que $f \in V(S)$. Daí, como tomamos f arbitrária, qualquer $f \notin \mathcal{D}$ é tal que $\phi(f) \in V(S)$. Com um argumento parecido, conseguimos mostrar que se $f \in \mathcal{D}$, então $\phi(f) \notin V(S)$.

Portanto, \mathcal{D} é um aberto em $\mathcal{C}[\Delta]$ na topologia de Zariski. \square

Com isso, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.7. *Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série não conveniente em que os monômios da forma $x_i^{n_i}$ possuem coeficiente nulo para $i \in \{1, \dots, q\}$ e os demais monômios desta forma nas outras variáveis possuem coeficientes não nulos. Se $\text{char } \mathcal{C} = 0$, então existe um m_0 tal que, para todo $m \geq m_0$ e $\alpha_i \neq 0$, $i \in \{1, \dots, q\}$, considerando a série $g_{\alpha, m} = f + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^{m_i}$, a parte principal newtoniana na origem $(g_{\alpha, m})_0$ de $g_{\alpha, m}$ é igual a $f_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^{m_i}$ e é não-degenerada para quase todos os α_i 's.*

Demonstração. Por definição, a fronteira de Newton $\Gamma(f)$ de f é a união das finitas faces compactas de $\Gamma_+(f)$. Logo, $\Gamma(f)$ é limitado. Consequentemente, conseguimos tomar $m_0 \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que o hiperplano que intersecta os eixos em uma distância m_0 seja tal que todo ponto neste hiperplano esteja em uma distância da origem maior que os pontos de $\Gamma(f)$. Assim, se $m \geq m_0$, teremos

$$(g_{\alpha, m})_0 = f_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^{m_i}.$$

Ademais, segue da demonstração do Lema (4.6) que $g_{(\alpha, m)_0}$ é não-degenerada para quase todos os α_i 's. \square

Com isso, somos capazes de demonstrar o Teorema principal (4.8)

Teorema 4.8. *1. O número de Milnor de uma série formal conveniente f é igual ao número de Newton se a parte principal newtoniana f_0 da série f na origem é não-degenerada.*

2. Se $\text{char } \mathcal{C} = 0$, o número de Milnor é igual ao número de Newton para toda série formal com parte principal newtoniana não-degenerada na origem;

3. O número de Milnor de uma série formal f é maior ou igual ao número de Newton:

$$\mu(f) \geq \nu(f).$$

Demonstração. Para o primeiro item do teorema, devemos mostrar que o número de Milnor de uma série formal conveniente f é igual ao número de Newton se a parte principal newtoniana f_0 da série f na origem é não-degenerada.

Seja $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal conveniente com parte principal newtoniana na origem

não-degenerada. Consideremos $I \subset \{1, \dots, k\}$ arbitrário. Denotemos por w_I o volume de dimensão $k - |I|$ do poliedro $\Gamma_-(f_I)$ multiplicado por $(k - |I|)!$, $w_\emptyset = k!V_k$ e $w_{\{1, \dots, k\}} = 1$, em que V_k é o volume de dimensão k de $\Gamma_-(f)$.

Do primeiro item do Lema (4.3), podemos aplicar o Corolário (3.29) em cada uma das séries f_I . Assim, obtemos da Equação (4.4) o seguinte:

$$w_I = \sum_{I \subseteq I_1 \subseteq \{1, \dots, k\}} \mu_{I_1}.$$

Agora, notemos que

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\{1, \dots, k\})} (-1)^{|I|} w_I = \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1, \dots, k\})} (-1)^{|I|} \sum_{I \subseteq I_1 \subseteq \{1, \dots, k\}} \mu_{I_1} = \sum_{I_1 \subseteq \{1, \dots, k\}} \left(\sum_{I \subseteq I_1} (-1)^{|I|} \right) \mu_{I_1}.$$

O coeficiente de μ_\emptyset é 1, enquanto o de μ_{I_1} é $\sum_{0 \leq i \leq |I_1|} (-1)^i \binom{|I_1|}{i}$, o qual é nulo.

Ademais, do segundo item do Lema (4.3), segue que

$$v(f) = k!V_k - (k-1)!V_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} 1!V_1 + (-1)^k = \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1, \dots, k\})} (-1)^{|I|} w_I.$$

Portanto, $\mu(f) = v(f)$.

Para o segundo item, devemos mostrar que se $\text{char } \mathcal{C} = 0$, o número de Milnor é igual ao número de Newton para toda série formal com parte principal newtoniana não-degenerada na origem, mesmo que não conveniente. Com efeito, sejam \mathcal{C} um corpo com $\text{char } \mathcal{C} = 0$ e $f \in \mathcal{C}[[x_1, \dots, x_k]]$ uma série formal com parte principal newtoniana na origem não-degenerada. Suponhamos que f satisfaça as condições do Teorema (4.7) e que $v(f) < \infty$. Então, do Teorema (4.7), existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$, a parte principal newtoniana na origem da série $g_{\alpha, m}$ é dada por $f_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i x_i^m$ e $g_{\alpha, m}$ possui parte principal newtoniana não-degenerada na origem para quase todo α . Ademais, por definição,

$$v(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} v(f + x_1^m + \dots + x_q^m).$$

Assim, da primeira afirmação do Teorema (4.8) e da definição do número de Newton, teremos $\mu(g_{\alpha, m}) = v(g_{\alpha, m}) = v(f)$, para m suficientemente grande.

Agora, como $g_{\alpha, m} - f \in \mathcal{M}^m$, supondo que $m > v(f) + 2$, segue do Teorema (4.5) que $\mu(f) = \mu(g_{\alpha, m})$.

Daí, $\mu(f) = v(f)$.

Agora, se $v(f) = \infty$, mostremos que $\mu(f) = \infty$. Para isso, suponhamos por absurdo que $\mu(f) < \infty$. Com um argumento análogo ao feito nos parágrafos anteriores, segue novamente do Teorema (4.5) que $\mu(g_{\alpha, m}) = \mu(f)$, para todo m grande o suficiente. Entretanto, $g_{\alpha, m}$ é conveniente e possui parte principal newtoniana na origem não-degenerada para quase todo α . Logo, pelo primeiro item do Teorema (4.8), $\mu(g_{\alpha, m}) = v(g_{\alpha, m})$. Consequentemente, $v(f) = \sup_{m \in \mathbb{N}} v(g_{\alpha, m}) < \infty$, contrariando a

hipótese.

Portanto, a segunda afirmação do Teorema (4.8) é válida.

Agora, para o terceiro item, devemos demonstrar que o número de Milnor de uma série formal f é maior ou igual ao número de Newton.

Suponhamos primeiramente que $\text{char } \mathcal{C} = 0$. Dada uma série formal f , de acordo com o Teorema (4.6), podemos encontrar uma aproximação de f consistindo em uma família de séries não-degeneradas a um parâmetro, sobre a mesma fronteira de Newton $\Gamma(f)$ para cada série.

Ademais, de acordo com o primeiro item do Teorema (4.8), sendo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência que aproxima f , teremos

$$v(f_n) = \mu(f_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, como o número de Newton é dado por uma soma de volumes, segue que o número de Newton é uma função contínua. Ademais, como o número de Milnor é semicontínuo superiormente,

$$v(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} v(f_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) \leq \mu(f).$$

Agora, suponhamos que $\text{char } \mathcal{C} \neq 0$. Mostremos que para cada subconjunto $M \subset \mathbb{N}^k$ e para cada natural v ,

$$\inf \left\{ \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^v \right)} : f \in \mathcal{A} \text{ e } \text{supp } f \subset M \right\}$$

é maior ou igual a

$$\inf \left\{ \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x]]}{\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) + \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^v \right)} : g \in \mathbb{C}[[x]] \text{ e } \text{supp } g \subset M \right\}.$$

Sejam $f = \sum_{m \in M} u_m x^m \in \mathcal{A}$ e $g = \sum_{m \in M} v_m x^m \in \mathbb{C}[[x]]$. Consideremos H um dos corpos \mathcal{C} e \mathbb{C} e h uma das funções f e g . Então, considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_H : \left(\frac{H[[x]]}{\mathcal{M}_H^v} \right)^k &\rightarrow \frac{H[[x]]}{\mathcal{M}_H^v} \\ (a_1 + \mathcal{M}_H^v, \dots, a_k + \mathcal{M}_H^v) &\mapsto a_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + \dots + a_k \frac{\partial h}{\partial x_k} + \mathcal{M}_H^v. \end{aligned}$$

Estudemos a matriz desta aplicação sobre a base monomial. Se $H = \mathbb{C}$ e $h = g$, os coeficientes da matriz obtida são polinômios de um número finito de variáveis v_m com coeficientes inteiros. Já no caso $H = \mathcal{C}$ e $h = f$, é necessário substituir no polinômio obtido que representam os coeficientes da matriz do caso anterior v_m por u_m e os coeficientes inteiros por seus valores módulo $\text{char } \mathcal{C}$. Logo,

sendo $N_{\mathbb{C}}$ e $N_{\mathcal{C}}$ as matrizes de $\phi_{\mathbb{C}}$ e $\phi_{\mathcal{C}}$, respectivamente, teremos que o posto de $N_{\mathbb{C}}$ é maior ou igual que o posto de $N_{\mathcal{C}}$. Consequentemente,

$$\dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^v\right)} \geq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{A}}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^v\right)},$$

para todo f satisfazendo as hipóteses.

Logo, temos a desigualdade desejada. Agora, pelo o que acabamos de demonstrar, $v(g) \leq \mu(g)$, para todo $g \in \mathbb{C}[[x]]$. Assim, se $\mu(f) < \infty$, pelo Lema (4.4)

$$\mu(f) = \dim_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{A}}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^v\right)},$$

para algum $v \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\infty > \mu(f) \geq \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x]]}{\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^v\right)},$$

para toda $g \in \mathbb{C}[[x]]$ com $\text{supp } g \subset \text{supp } f$. Em particular, podemos tomar g tal que $\text{supp } g = \text{supp } f$. Novamente pelo Lema (4.4), temos $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}^v \subset \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$ e, logo, $\mu(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x]]}{\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^v\right)}$.

Portanto,

$$\mu(f) \geq \mu(g) \geq v(g) = v(f),$$

o que completa a demonstração. \square

A condição de não-degenerescência é essencial, uma vez que, se removida, o resultado não é mais válido, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 4.9. Consideremos novamente $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + x^2y$. Então, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y + x^2$. Assim, como vimos no Exemplo (3.19), a fronteira de Newton de f é representada da seguinte maneira:

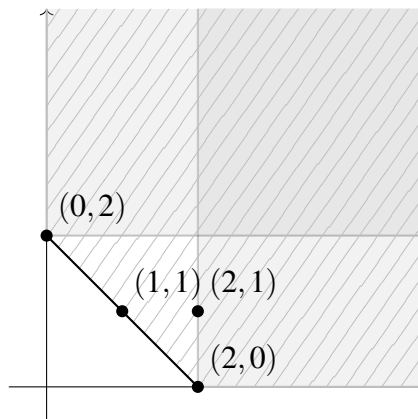


Figura 4.1: Poliedro de Newton de f .

Ademais,

$$\left(x \frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma(f)} = 2x(x+y) \text{ e } \left(y \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma(f)} = 2y(x+y),$$

consequentemente f não é Newton não-degenerada. Além disso, como $x^2 - 2xy = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \in \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ e $\frac{x \partial f}{\partial x} = x^2 + xy + x^2y \in \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, então

$$-3xy - x^2y = (-3 - x)xy \in \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Desde que $-3 - x$ é unidade no anel dos germes analíticos, obtemos $xy \in \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Consequentemente, $x + y \in \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $x^2 \in \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ e $y^2 \in \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Assim, os geradores de $\frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}$ são 1, x e y . Mas, $x + y \in \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ implica que a classe de x é igual a classe de y no anel quociente.

Portanto, $\mu(f) = 2$.

Ademais, o número de Newton de f é

$$v(f) = 2 \frac{2 \cdot 2}{2} - 4 + 1 = 1.$$

Logo, $\mu(f) = 2 > 1 = v(f)$.

Vejam agora um exemplo de quando a série é conveniente e não-degenerada.

Exemplo 4.10. Seja $f(x,y) = x^3 - y^2$. Então,

$$\left(x \frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma(f)} = 3x^3 \text{ e } \left(y \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma(f)} = -2y^2.$$

Assim, $\left(x \frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\Gamma(f)}$ e $\left(y \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\Gamma(f)}$ geram sobre $\mathcal{C}[P(\Gamma(f))]$ um ideal de codimensão finita, ou seja, f é newton não degenerada na origem.

O ideal jacobiano de f é dado por $J_f = (x^2, y)$. Logo, o número de Milnor de f é

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{(x^2, y)} = 2.$$

Por outro lado, vimos no Exemplo (2.11) que o número de Newton de f é dado por $v(f) = 2 \left(\frac{3 \cdot 2}{2}\right) - 5 + 1 = 2$.

Finalmente, vejamos um exemplo de quando a série é não conveniente e não-degenerada.

Exemplo 4.11. Consideremos novamente $g(x,y) = x^2 + xy$. De fato, g não é conveniente. Entretanto, como $\left(x \frac{\partial g}{\partial x}\right)_{\Gamma(g)} = x^2 + xy$ e $\left(y \frac{\partial g}{\partial y}\right)_{\Gamma(g)} = xy$, segue que g é não-degenerada.

Ademais, de acordo com o Exemplo (2.11), $v(g) = 1$ e, como $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = x$, temos $\mu(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{(x,y)} = 1$.

Conclusões

Neste trabalho, estudamos como calcular o número de Milnor de um germe de função analítica com singularidade isolada utilizando o Poliedro de Newton sob certas condições de não-degenerescência, baseando-se principalmente no artigo do matemático russo A. G. Kouchnirenko (1976, [7]).

O objetivo deste trabalho foi o de compreender o que foi feito e exibir de maneira mais detalhada as demonstrações que estão presentes neste artigo.

No trabalho de Kouchnirenko, ele faz essas demonstrações para caso de séries formais, polinômios e polinômios de Laurent, com as respectivas definições de número de Milnor. Entretanto, questões podem ser geradas sobre quais generalizações podemos obter destes resultados utilizando os poliedros de Newton.

Neste sentido, este trabalho pode servir de base para explorar diversas possibilidades sobre o que ainda podemos extrair dos poliedros de Newton, com potencial para outros invariantes que são generalizações do número de Milnor.

Espero que esta dissertação possa ajudar aos próximos estudantes interessados em desbravar este elegante resultado obtido por Kouchnirenko.

Referências Bibliográficas

- [1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*, 1 ed. California: Addison-Wesley Publishing Company, 1994. (Addison-Wesley Series in Mathematics).
- [2] Bruns, W., Herzog, J. *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)
- [3] Greuel, G. M., Lossen, C. Shustin, E. I. *Introduction to Singularities and Deformations*, 1 ed. Heidelberg: Springer Berlin, 2007.
- [4] Greuel, G. M., Pfister, G. *A Singular Introduction to Commutative Algebra*, 2 ed. Heidelberg: Springer Berlin, 2007.
- [5] Hatcher, A. *Algebraic Topology*, 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [6] Hochster, M. *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes*, 96., 1972, *Annals of Mathematics*, p. 318-337.
- [7] Kouchnirenko, A. G. *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, *Invent. Math.* 32 (1976), no. 1, 1-31.
- [8] Matsumura, H. *Commutative Ring Theory*, New York: Cambridge University Press, 1987. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics).
- [9] Mond, D., Nuño-Ballesteros, J. J. *Singularities of Mappings: The Local Behavior of Smooth and Complex Analytic Mappings*, 1 ed. Switzerland: Springer Cham, 2020. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).
- [10] Serre, J-P. *Local Algebra*. Translated from the French by CheeWhye Chin and revised by the author. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.