

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Estatística

Um Método para Construção de Distribuições de Probabilidades do Tipo Contínuo

ESTELA MARIS PEREIRA BERETA

UFSCar - São Carlos/SP

Julho/2013

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Estatística

Um Método para Construção de Distribuições de Probabilidades do Tipo Contínuo

ESTELA MARIS PEREIRA BERETA

ORIENTADOR: PROF. DR. FRANCISCO LOUZADA NETO

CO-ORIENTADOR: PROF. DRA. MARIA APARECIDA DE PAIVA FRANCO

Trabalho apresentado ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Estatística.

UFSCar - São Carlos/SP

Julho/2013

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar**

B492mc

Bereta, Estela Maris Pereira.

Um método para construção de distribuições de
probabilidades do tipo contínuo / Estela Maris Pereira
Bereta. -- São Carlos : UFSCar, 2013.
66 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos,
2013.

1. Probabilidades. 2. Função geradora de probabilidades.
3. Distribuições compostas. 4. Distribuição do máximo. 5.
Distribuição do mínimo. 6. Cópula. I. Título.

CDD: 519.2 (20^a)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Aluno(a) : Estela Maris Pereira Bereta

TESE DE DOUTORADO DEFENDIDA E APROVADA EM 10/05/2013 PELA
COMISSÃO JULGADORA:

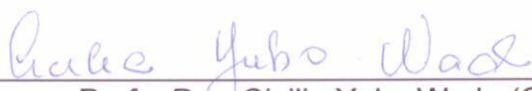
Presidente


Prof. Dr. Francisco Louzada Neto (ICMC-USP/Orientador)

1º Examinador


Prof. Dr. Benedito Galvão Benze (DEs-UFSCar)


2º Examinador


Profa. Dra. Cílicia Yuko Wada (Consultora)

3º Examinador


Profa. Dra. Gleici da Silva Castro Perdoná (FMRP-USP)

4º Examinador


Prof. Dr. José Galvão Leite (DEs-UFSCar)

5º Examinador


Profa. Dra. Maria Aparecida de Paiva Franco (DEs-UFSCar)

Agradecimentos

Quero agradecer a todos os que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho, em particular

Ao professor Francisco Louzada Neto, orientador, pela orientação e incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho;

À professora Maria Aparecida de Paiva Franco, Co-orientadora e amiga, pela orientação segura, pela paciência e dedicação com que transmitiu seus conhecimentos enriquecendo a estrutura da tese, pelo apoio permanente e incansável incentivo para viver a etapa de elaboração e conclusão deste trabalho;

Ao professor Marcio Luis Lanfredi Viola, pela sua incansável contribuição nos vários momentos solicitados e pela amizade;

À professora Teresa Cristina Martins Dias, pelas sugestões e correções feitas e principalmente pela sua amizade e incentivo constante;

Ao Pedro, pela amizade, companheirismo e incentivo a seguir em frente;

À Maria Silvia de Assis Moura, pela amizade e disponibilidade para discutir minhas inquietudes;

Aos professores do Departamento de Estatística da UFSCar por possibilitarem a realização deste trabalho;

À minha mãe, pelo apoio e incentivo constante durante a toda realização deste trabalho;

À minha tia Judith e ao meu pai Angelo Bereta, que infelizmente não compartilharam da alegria ver o final deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho propomos um procedimento para a determinação de distribuições de probabilidades absolutamente contínuas, para o tempo de duração de um determinado sistema, cujo número de componentes, N , não é um número fixo, mas uma variável aleatória discreta assumindo valores no conjunto $Z^{++} = \{1, 2, \dots\}$ dos números inteiros estritamente positivos. Consideramos que o tempo de vida dos componentes do sistema $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de uma variável aleatória Y do tipo contínuo, sendo N e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ independentes. Um primeiro objetivo foi determinar a função de sobrevivência do tempo de vida mínimo, $T_{\min} = \min(Y_1, \dots, Y_N)$, do sistema, através da composição da função geradora de probabilidades de N com a função de sobrevivência de Y . Em seguida, obtivemos a função de distribuição do tempo de vida máximo, $T_{\max} = \max(Y_1, \dots, Y_N)$, compondo a função geradora de probabilidades de N com a função de distribuição de Y . Além disso, estendemos a mesma ideia para o caso de dois sistemas compostos por um número aleatório N de componentes em que os tempos de vida $(X_j)_{j \in Z^{++}}$ e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ dos dois sistemas são variáveis aleatórias latentes independentes e identicamente distribuídas de uma variável aleatória X , para o caso do sistema 1, e de uma variável aleatória Y , para o caso do sistema 2, e que N , $(X_j)_j$ e $(Y_j)_j$ são independentes entre si. Neste caso, o objetivo é determinar a distribuição conjunta de pares de extremos (T_1, T_2) ou de (M_1, M_2) , em que $T_1 = \min(X_1, \dots, X_N)$, $T_2 = \min(Y_1, \dots, Y_N)$, $M_1 = \max(X_1, \dots, X_N)$ e $M_2 = \max(Y_1, \dots, Y_N)$.

Sumário

1	Construção de novas distribuições de probabilidade	5
1.1	Distribuição do máximo e mínimo de um número aleatório N de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas	5
2	Funções Geradoras de Probabilidades: definição, propriedades e utilização na construção de novas distribuições do tipo contínuo	8
2.1	Definição e propriedades	8
2.1.1	Caracterização	9
2.2	Distribuição em série de potências	10
2.2.1	Quociente entre duas séries de potências	11
2.3	Quociente entre duas funções geradoras de probabilidades	14
2.3.1	Quociente entre a função geradora de probabilidades da distribuição geométrica e a função geradora de probabilidades da distribuição de Poisson .	16
2.4	Determinação da distribuição de T_{\min} e de T_{\max} em termos da função geradora de N e da função de distribuição de Y	17
2.4.1	Função quantil da distribuição de T_{\min} e de T_{\max}	19
2.4.2	Alguns Exemplos	19
3	A distribuição Poisson-Weibull	23
3.1	A distribuição Poisson-Weibull	24
3.2	Algumas propriedades da distribuição Poisson-Weibull	25

3.3	Inferência	28
3.4	Aplicação	30
3.5	Considerações finais	34
4	A distribuição SJS-Exponencial	35
4.1	Propriedades da distribuição SJS-Exponencial	36
4.2	Momentos e estatísticas de ordem	39
4.3	Inferência	40
4.4	Estudo de simulação	41
5	Modelos de cópulas	44
5.1	Teoria básica de cópulas	45
5.1.1	Cópulas arquimedianas	47
5.1.2	Medidas de associação	48
5.1.3	Coefficientes de dependência caudal	49
5.2	Cópula associada ao vetor (T_1, T_2)	49
5.3	Cópula associada ao vetor (M_1, M_2)	52
5.4	Medidas de associação para (T_1, T_2) e (M_1, M_2)	55
5.4.1	Relação entre ρ da cópula (T_1, T_2) e ρ da cópula (M_1, M_2)	55
5.4.2	Relação entre τ da cópula (T_1, T_2) e τ da cópula (M_1, M_2)	56
5.4.3	Relação entre λ_U e λ_L para a cópula (T_1, T_2)	58
5.4.4	Relação entre λ_U e λ_L para a cópula (M_1, M_2)	58
5.5	Um procedimento para gerar amostras a partir da cópula bivariada para a distribuição de (M_1, M_2)	58
5.5.1	Amostras aleatórias geradas partir da cópula bivariada C_{M_1, M_2}	59
5.5.2	Amostras aleatórias geradas partir da cópula bivariada C_{T_1, T_2}	61
6	Considerações finais	64

6.1	Perspectivas Futuras	65
-----	--------------------------------	----

Introdução

O estudo do tempo de duração de um sistema formado por vários componentes ou do tempo de vida de um indivíduo submetido a várias causas de morte é muito importante nas áreas de confiabilidade e sobrevivência. Para levar em consideração os inúmeros fatores de riscos que podem contribuir para a ocorrência de falha do sistema ou morte do indivíduo, vários modelos foram propostos na literatura.

Dois modelos bastante difundidos que exprimem o tempo de vida de um sistema constituído de um número fixo N de componentes como função do tempo latente de vida $Y_i, i = 1, \dots, N$, da i -ésima possível causa de falha, são o modelo de riscos competitivos e o modelo de riscos complementares. Nestes modelos a duração do sistema é dada, respectivamente, por:

$$T_{\min} = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_N), \quad (1)$$

e

$$T_{\max} = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_N). \quad (2)$$

Supondo que Y_1, Y_2, \dots, Y_N são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F_Y , a função de distribuição de T_{\min} e de T_{\max} é dada, respectivamente, por (??) e (??),

$$F_{T_{\min}}(t) = 1 - (1 - F_Y(t))^N, \quad (3)$$

e

$$F_{T_{\max}}(t) = (F_Y(t))^N. \quad (4)$$

Consideraremos, neste trabalho, a modelagem da distribuição do tempo de duração de um sistema cujo número de componentes, N , não é um número fixo, mas uma variável aleatória discreta assumindo valores no conjunto $Z^{++} = \{1, 2, \dots\}$ dos números inteiros estritamente

positivos com função de probabilidades $p_n = P(N = n)$. Além disso, suporemos que $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias (v.a.'s) identicamente distribuídas de uma variável aleatória (v.a.) Y absolutamente contínua, sendo N e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ independentes. Então, em um sistema em série,

$$\begin{aligned} F_{T_{\min}}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\underbrace{\min(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)}_{T_{\min}} \leq t, N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_{\min} \leq t | N = n) P(N = n). \end{aligned} \quad (5)$$

Da expressão (5) temos que a função densidade de T_{\min} é dada por,

$$f_{T_{\min}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{T_{\min}}(t | N = n) P(N = n). \quad (6)$$

Uma expressão semelhante pode ser deduzida para o caso de um sistema em paralelo em que o tempo de duração é modelado por T_{\max} .

A partir da relação (5), novas distribuições foram propostas assumindo-se uma forma conhecida para a função densidade condicional de T_{\min} dado $N = n$ e adotando uma distribuição discreta em série de potências com suporte em Z^{++} como distribuição de probabilidade de N . A busca por novas distribuições é justificada pelo fato de que modelos mais tradicionais, como as distribuições exponencial, Rayleigh, Weibull, lognormal e gama, muitas vezes não se ajustam bem ao conjunto de dados reais sob análise de um pesquisador. Neste sentido, no campo de confiabilidade e de análise de sobrevivência, foram feitas diversas propostas visando obter funções de risco em forma de 'banheira', que justificariam a existência de um período inicial de alto risco (?).

Dentre as muitas distribuições podemos citar a distribuição exponencial-geométrica (EG) com função de risco monótona decrescente proposta por (?); a distribuição exponencial geométrica estendida (EEG) introduzida por (?), que é uma generalização da distribuição exponencial geométrica e com funções de risco monótona decrescente, crescente ou constante; a distribuição exponencial-Poisson (EP), definida por (?) e com função de risco decrescente; a distribuição logaritmica exponencial, também com função de risco decrescente, introduzida por (?); a distribuição Weibull-geométrica (WG), definida por (?), com função de risco crescente, decrescente e unimodal, e que também é uma extensão da distribuição exponencial geométrica proposta por (?), a distribuição geométrica exponencial complementar (CEG), proposta por (?) e a distribuição Poisson-exponencial (PED), proposta por (?), que tem função de risco crescente. Os trabalhos aqui citados serviram como motivação para mostrarmos que o procedimento de obtenção da função de sobrevivência do mínimo e da função de distribuição do máximo de um

número aleatório de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) são equivalentes à composição da função geradora de probabilidade de N com a função de sobrevivência ou com a função de distribuição de Y , respectivamente.

Com base neste raciocínio, determinamos duas novas distribuições para o tempo de vida mínimo, (T_{\min}) , de um número aleatório N de variáveis aleatórias (i.i.d.), que podem ser aplicadas para modelar o tempo de duração de sistemas de componentes em série.

A primeira delas, que denominamos Poisson-Weibull (PW), generaliza a distribuição proposta por ?). Esta distribuição tem função de risco que pode assumir curvas com várias formas tais como crescente, decrescente, forma de banheira virada para baixo, entre outras. Determinamos expressões para a função de sobrevivência, para a função densidade de probabilidade e para a função de risco e para os correspondentes momentos, estatísticas de ordens e quantis.

A segunda distribuição, que denominamos de SJS -Exponencial, é uma distribuição para o tempo de duração T_{\min} de um sistema em série, com um número aleatório N de componentes, com durações independentes e identicamente distribuídas. A partir da distribuição do tempo de vida de cada componente, considerada como exponencial, foram deduzidas expressões para a função distribuição, para a função densidade e para a função de risco de T_{\min} , adotando para N uma distribuição da família SJS , proposta por ?).

Para estimar os parâmetros destes modelos foi utilizado o método de máxima verossimilhança. Para a seleção do modelo que melhor se ajustasse aos dados foram usados os critérios de seleção de modelos AIC (critério de informação de akaike), BIC (critério de informação de bayes) e o Teste da Razão de Verossimilhanças.

Utilizando o procedimento proposto para o caso bivariado obtivemos dois modelos de cópulas. Considerando que $(X_j)_{j \in Z^{++}}$ segue as mesmas suposições feitas a respeito de $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ e que $(X_j)_{j \in Z^{++}}$ e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ são independentes, o primeiro modelo de cópulas correspondente à função de sobrevivência conjunta $S_{T_1, T_2}(t_1, t_2)$ de (T_1, T_2) sendo $T_1 = \min(X_1, \dots, X_N)$ e $T_2 = \min(Y_1, \dots, Y_N)$ e assumindo que a variável aleatória N segue uma distribuição de Poisson truncada em zero e que as variáveis aleatórias X e Y são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Weibull. O segundo modelo de cópulas encontrado é relacionado à distribuição conjunta de (M_1, M_2) , sendo $M_1 = \max(X_1, \dots, X_N)$ e $M_2 = \max(Y_1, \dots, Y_N)$, utilizando as mesmas suposições para a distribuição conjunta de (X, Y) , esta segunda cópula é uma cópula arquimediana.

Portanto, o objetivo principal deste trabalho é propor um método conciso para a deter-

minação de novas distribuições de probabilidades. No Capítulo ??, apresentamos a ideia geral do procedimento que permite a construção de novas distribuições de probabilidade. No Capítulo ?? é abordado o conceito de função geradora de probabilidades e sua utilização na construção de novas distribuições absolutamente contínuas, além de desenvolver o tema sobre distribuições em série de potências. No Capítulo ??, propomos uma nova distribuição de probabilidade com três parâmetros, intitulada Poisson-Weibull obtida usando o procedimento de construção de distribuições de probabilidades proposto no Capítulo ?? e detalhado no Capítulo ?. No Capítulo ??, propomos outra distribuição de probabilidade com três parâmetros intitulada *SJS*-Exponencial obtida usando o mesmo procedimento. No Capítulo ??, apresentamos uma breve introdução sobre cópulas, a generalização da distribuição Poisson-Weibull para o caso bivariado, dois modelos de cópulas, sendo um deles associado ao par de variáveis aleatórias (T_1, T_2) e o outro associado ao par de variáveis aleatórias (M_1, M_2) , com $T_1 = \min(X_1, \dots, X_N)$, $T_2 = \min(Y_1, \dots, Y_N)$, $M_1 = \max(X_1, \dots, X_N)$ e $M_2 = \max(Y_1, \dots, Y_N)$. Finalmente, propomos também um procedimento para gerar valores de (M_1, M_2) a partir de seu modelo de cópula.

Capítulo 1

Construção de novas distribuições de probabilidade

Neste capítulo, apresentamos um método para a determinação da distribuição de probabilidades das variáveis aleatórias T_{\min} e T_{\max} que consiste, respectivamente, na composição da função geradora de probabilidades de N com a função de sobrevivência de Y e na composição da função geradora de probabilidades de N com a função de distribuição de Y . Para a determinação deste método, supomos que $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ é uma sequência de v.a.'s identicamente distribuídas como uma variável aleatória do tipo contínuo Y , e que N é uma variável aleatória que assume valores no conjunto $Z^{++} = \{1, 2, \dots\}$ dos números inteiros estritamente positivos, sendo N e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ independentes. A metodologia é ilustrada com exemplos de distribuições propostas por (?), (?), (?), (?), (?) e ?).

1.1 Distribuição do máximo e mínimo de um número aleatório N de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas

Vários autores, tais como (?), (?), (?), (?), (?) e ?), propuseram novas distribuições contínuas para modelar a distribuição do tempo de duração de um sistema em paralelo ou em série com um número aleatório N de componentes. Estes autores consideraram uma sequência $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ de v.a.'s latentes, independentes e identicamente distribuídas como uma variável aleatória do tipo contínuo Y , e que N é uma variável aleatória que assume valores no conjunto Z^{++} , sendo N e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ independentes.

Na Tabela ??, apresentamos a função de sobrevivência e a função densidade de probabilidade das variáveis aleatórias T_{\min} ou T_{\max} das distribuições propostas por (?), (?), (?), (?) e (?). Estas distribuições foram obtidas assumindo que Y tem distribuição exponencial de parâmetro $\beta > 0$ e adotando para N uma distribuição membro da família de distribuições em série de potências, com suporte em Z^{++} .

Tabela 1.1: Autores das distribuições, distribuição de N , função de sobrevivência e função densidade de probabilidade (f.d.p.) de $T_{\min} = \min(Y_1, \dots, Y_N)$ ou de $T_{\max} = \max(Y_1, \dots, Y_N)$.

Autores	Distribuição de N	Variável	Função de Sobrevivência	f.d.p.
Adamidis e Loukas (1998)	Geométrica ¹	T_{\min}	$\frac{pe^{-\beta t}}{1 - e^{-\beta t}(1 - p)}$	$\frac{p\beta e^{-\beta t}}{(1 - e^{-\beta t}(1 - p))^2}$
Kus (2007)	Poisson ²	T_{\min}	$\frac{1 - e^{\lambda e^{-\beta t}}}{1 - e^{\lambda}}$	$\frac{\lambda\beta e^{-\lambda + \lambda e^{-\beta t} - \beta t}}{1 - e^{-\lambda}}$
Tahmasbi e Rezaei (2008)	Logarítmica ¹	T_{\min}	$\frac{\log(1 - pe^{-\beta t})}{\log(1 - p)}$	$\frac{p\beta e^{-\beta t}}{(pe^{-\beta t} - 1)\log(1 - p)}$
Cancho et al. (2011)	Poisson ²	T_{\max}	$\frac{1 - e^{-\lambda e^{-\beta t}}}{1 - e^{-\lambda}}$	$\frac{\lambda\beta e^{-\lambda e^{-\beta t} - \beta t}}{1 - e^{-\lambda}}$
Louzada et al. (2011)	Geométrica ¹	T_{\max}	$\frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t}(1 - p) + p}$	$\frac{p\beta e^{-\beta t}}{(e^{-\beta t}(1 - p) + p)^2}$

¹distribuição com suporte no conjunto Z^{++} , $0 < p < 1$;

²Poisson truncada em zero, $\lambda > 0$.

Os autores mencionados anteriormente partiram da expressão (??) para obter a função densidade de T_{\min} , dada por,

$$f_{T_{\min}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{T_{\min}}(t|N = n)P(N = n). \quad (1.1)$$

Neste trabalho, propomos uma outra forma de se obter a distribuição de probabilidade de T_{\min} ou de T_{\max} , baseada na observação das expressões equivalentes a (??), referentes à função de sobrevivência de T_{\min} e a função de distribuição de T_{\max} , que são dadas, respectivamente, por

$$S_{T_{\min}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [S_Y(t)]^n P(N = n), \quad (1.2)$$

e

$$F_{T_{\max}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [F_Y(t)]^n P(N = n). \quad (1.3)$$

sendo $S_Y(t)$ a função de sobrevivência da variável aleatória Y no ponto t .

Vários resultados dos trabalhos citados podem ser obtidos observando que as expressões (??) e (??) podem ser escritas, respectivamente, como

$$S_{T_{\min}}(t) = G_N(S_Y(t)), \quad (1.4)$$

e

$$F_{T_{\max}}(t) = G_N(F_Y(t)), \quad (1.5)$$

sendo $G_N(\cdot)$ a função geradora de probabilidades da v.a. N , que será o tema do Capítulo ??.

Todos os resultados utilizados no procedimento proposto estão formalizados na Seção ?? do Capítulo ??.

Capítulo 2

Funções Geradoras de Probabilidades: definição, propriedades e utilização na construção de novas distribuições do tipo contínuo

O procedimento proposto no Capítulo ?? utiliza o conceito de função geradora de probabilidades. Desta forma, neste capítulo, definimos e apresentamos algumas propriedades de funções geradoras de probabilidades e detalhamos a nova maneira de se obter a distribuição de probabilidade das v.a.'s T_{min} ou T_{max} . A função geradora de probabilidades também é utilizada para a obtenção da distribuição $SJS-1$ proposta por (?), distribuição esta apresentada neste capítulo.

2.1 Definição e propriedades

Definição 2.1 *Seja a_0, a_1, \dots uma seqüência de números reais e $t_0 > 0$. Se*

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \quad (2.1)$$

converge absolutamente no intervalo $-t_0 < t < t_0$, então $A(t)$ é denominada função geradora da seqüência $(a_j)_{j \in Z^+}$, sendo $Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Definição 2.2 *Seja N uma variável aleatória que assume valores no conjunto Z^+ , e seja $p_j = P(N = j)$, $j \in Z^+$. A função geradora da seqüência $(p_j)_{j \in Z^+}$ é denominada função geradora de*

probabilidades (f.g.p.) da v.a. N e será indicada por $G_N(t)$. Portanto, $G_N(t)$ é dada por

$$G_N(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j. \quad (2.2)$$

Observe que a série $G_N(t)$ converge absolutamente, pelo menos, para $|t| \leq 1$ e que a expressão (??) pode ser interpretada como $E(t^N)$.

A primeira derivada de $G_N(t)$ em relação a t , denotada por $G_N^{(1)}(t)$, é

$$G_N^{(1)}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j t^{j-1}.$$

Para $t = 1$ o lado direito de $G_N^{(1)}(t)$ se reduz a $\sum_{j=1}^{\infty} j p_j = E(N)$. Se esta esperança existe, a derivada de $G_N^{(1)}(t)$ será contínua no intervalo $|t| \leq 1$. Se $\sum_{j=1}^{\infty} j p_j$ diverge, então $G_N^{(1)}(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 1$.

A probabilidade $p_j = P(N = j)$, $j \in Z^+$, é obtida da seguinte forma,

$$p_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} G_N(t) \Big|_{t=0} = \frac{G_N^{(j)}(0)}{j!},$$

sendo $G_N^{(j)}(t)$ a j -ésima derivada de $G_N(t)$ em relação a t , $0^0 = 1$ e $G_N^{(0)}(t) = G_N(t)$.

A f.g.p. tem forma fechada para distribuições da família de distribuições em série de potências.

Vale observar que se $G_1(t)$ e $G_2(t)$ são duas funções geradoras de probabilidades, então $Q(t) = \frac{G_1(t)}{G_2(t)}$ pode ser uma função geradora de probabilidades e novas funções de probabilidades discretas podem ser criadas, como fizeram (?), o que é discutido na Seção ?? deste capítulo.

2.1.1 Caracterização

O Teorema ?? (?) estabelece a caracterização de funções geradoras de probabilidades de alguma v.a. que assume valores Z^+ .

Teorema 2.1 *Seja $\rho(t)$ uma função real definida pelo menos no intervalo $[0, 1]$. A função $\rho(t)$ é uma função geradora de probabilidades de uma variável aleatória que assume valores em Z^+ se e somente se,*

1. $\rho(1) = 1$;
2. $\rho(0) \geq 0$;

3. $0 \leq \frac{d^r \rho(t)}{dt^r} = \rho^{(r)}(t) < \infty \quad \forall r \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } t \in [0, 1);$
4. $\lim_{t \rightarrow 1^-} \rho(t) = 1;$

Observadas estas condições, $\rho(t)$ é igual a série de Maclaurin em $[0, 1)$.

2.2 Distribuição em série de potências

Uma v.a discreta X , com suporte em \mathbb{Z}^+ , possui distribuição em série de potências (d.s.p.) se sua função de probabilidades é dada por

$$p_k = \frac{a_k \theta^k}{A(\theta)}, \quad (2.3)$$

sendo θ um parâmetro positivo, $a_k \geq 0, k = 0, 1, \dots$. As distribuições que têm sua função de probabilidades escrita na forma (??) são membros da família de distribuições em série de potências. Por exemplo, a distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$ é um membro da família de distribuições em série de potências, pois sua função de probabilidade é escrita como (??) com $\theta = \lambda$, $A(\theta) = e^\lambda$ e $a_k = (k!)^{-1}, k = 0, 1, 2, \dots$

De (??) e (??) a função geradora de probabilidades de uma v.a X que possui distribuição em série de potências é

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \theta^k t^k}{A(\theta)} = \frac{A(t\theta)}{A(\theta)}, \quad t_0 > 0. \quad (2.4)$$

A Tabela ?? apresenta algumas funções geradoras de probabilidades de distribuições em séries de potências de θ .

Tabela 2.1: Séries de potências, funções de probabilidades e função geradora de probabilidades definidas a partir de série de potências de um parâmetro θ

$A(\theta)$	$p_k = \frac{a_k \theta^k}{A(\theta)}$	$G_X(t)$	$G_X(t)$ (parametrização usual)
$(1 + \theta)^n$	$\frac{\binom{n}{k} \theta^k}{(1 + \theta)^n}$	$\frac{(1 + t\theta)^n}{(1 + \theta)^n}$	$(1 - p + pt)^n$, se $\theta = \frac{p}{1 - p}$
$\theta > 0$		$t \in \mathbb{R}$	Binomial
$(1 - \theta)^{-1}$	$\frac{\theta^k}{(1 - \theta)^{-1}}$	$\frac{(1 - t\theta)^{-1}}{(1 - \theta)^{-1}}$	$\frac{p}{(1 - t(1 - p))}$, se $\theta = 1 - p$
$0 < \theta < 1$		$-\frac{1}{\theta} < t < \frac{1}{\theta}$	Geométrica ¹
$(1 - \theta)^{-n}$	$\frac{\binom{n+k-1}{k} \theta^k}{(1 - \theta)^{-n}}$	$\frac{(1 - t\theta)^{-n}}{(1 - \theta)^{-n}}$	$\left(\frac{1 - p}{1 - tp}\right)^n$ se $\theta = p$
$0 < \theta < 1$		$-\frac{1}{\theta} < t < \frac{1}{\theta}$	Binomial Negativa
e^θ	$\frac{\theta^k}{\frac{k!}{e^\theta}}$	$\frac{e^{t\theta}}{e^\theta}$	$e^{\lambda(t-1)}$, se $\theta = \lambda$
$\theta > 0$		$t \in \mathbb{R}$	Poisson
$-\ln(1 - \theta)$	$-\frac{\theta^k}{\ln(1 - \theta)}$	$\frac{\ln(1 - t\theta)}{\ln(1 - \theta)}$	$\frac{\ln(1 - t\lambda)}{\ln(1 - \lambda)}$ se $\theta = \lambda$
$0 < \theta < 1$		$-\frac{1}{\theta} < t < \frac{1}{\theta}$	Logarítmica

¹Distribuição com suporte no conjunto Z^+ .

2.2.1 Quociente entre duas séries de potências

Teorema 2.2 Se $A_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \theta^k$ e $A_2(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \theta^k$ são duas séries de potências em θ , absolutamente convergentes, de mesmo raio de convergência, com $a_0 = b_0 = 1$, então o quociente $Q(\theta) = \frac{A_1(\theta)}{A_2(\theta)}$ é uma série de potências em θ , absolutamente convergente, que possui a forma

$$Q(\theta) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \theta^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k \theta^k} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \theta^k, \quad (2.5)$$

Em (??), os coeficientes d_k são dados por (??)

$$d_k = \begin{cases} a_k - \sum_{i=1}^k b_i d_{k-i}, & k \geq 1. \\ 1, & \text{se } k = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Prova 2.2.1 Sejam $A_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \theta^k$ e $A_2(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \theta^k$ duas séries de potências em θ , absolutamente convergentes. Considere $Q(\theta) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \theta^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k \theta^k}$.

Os coeficientes d_k podem ser obtidos recursivamente em termos dos coeficientes das séries de potências $A_1(\theta)$ e $A_2(\theta)$.

Então, de $A_1(\theta) = A_2(\theta)Q(\theta)$ temos,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \theta^k &= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \theta^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k \theta^k \right)}_{\text{produto de duas séries de potências}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k b_i d_{k-i} \right) \theta^k, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Da igualdade (??) temos que o coeficiente de a_k é

$$a_k = \sum_{i=0}^k b_i d_{k-i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

para $k = 0$ e $a_0 = b_0 = 1$ temos

$$1 = a_0 = b_0 d_0 = d_0. \quad (2.9)$$

Para $k \geq 1$, segue que,

$$\begin{aligned} a_k &= b_0 d_k + \sum_{i=1}^k b_i d_{k-i} \\ &= d_k + \sum_{i=1}^k b_i d_{k-i}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Isolando d_k em (??), obtemos

$$d_k = a_k - \sum_{i=1}^k b_i d_{k-i}, \quad k \geq 1. \quad (2.11)$$

Portanto, os coeficientes $d_k, k = 0, 1, 2, \dots$ da série $Q(\theta)$ são dados por

$$d_k = \begin{cases} a_k - \sum_{i=1}^k b_i d_{k-i}, & k \geq 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

■

A generalização do Teorema ??, considerando $0 \neq a_0 \neq 1$ e $0 \neq b_0 \neq 1$ é dada pelo Teorema ??.

Teorema 2.3 *Sejam $A_1(\theta) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k \theta^k$ e $A_2(\theta) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \theta^k$ duas séries de potências em θ , absolutamente convergentes, de mesmo raio de convergência, com $m > n$, a_m e $b_n > 0$. Então o quociente $Q(\theta) = \frac{A_1(\theta)}{A_2(\theta)}$ é uma série de potências em θ , absolutamente convergente, da forma,*

$$Q(\theta) = \left[\frac{a_m \theta^m}{b_n \theta^n} \right] \sum_{k=0}^{\infty} d_k^* \theta^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \theta^k, \quad (2.13)$$

com

$$d_k = \left[\frac{a_m \theta^m}{b_n \theta^n} \right] d_k^*, \quad k \geq 0, \quad (2.14)$$

e

$$d_k^* = \begin{cases} \frac{a_{k+m}}{a_m} - \sum_{i=1}^k \frac{b_{i+n}}{b_n} d_{k-i}^*, & k \geq 1, \\ 1, & \text{se } k = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Prova 2.3.1 Considere $A_1(\theta) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k \theta^k$ e $A_2(\theta) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \theta^k$ duas séries de potências em θ , absolutamente convergentes, de mesmo raio de convergência. Para obter os coeficientes da série $Q(\theta)$ será usado o Teorema ?? que exige $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$.

Multiplicando e dividindo $A_1(\theta)$ e $A_2(\theta)$, respectivamente, por $a_m \theta^m$ e $b_n \theta^n$ temos

$$A_1(\theta) = a_m \theta^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k}{a_m} \theta^{k-m} = a_m \theta^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{j+m}}{a_m} \theta^j,$$

e

$$A_2(\theta) = b_n \theta^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{b_n} \theta^{k-n} = b_n \theta^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_{j+n}}{b_n} \theta^j.$$

Logo,

$$Q(\theta) = \frac{A_1(\theta)}{A_2(\theta)} = \frac{a_m \theta^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{j+m}}{a_m} \theta^j}{b_n \theta^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_{j+n}}{b_n} \theta^j} = \frac{a_{j+m}}{a_m} \theta^j b_n \theta^n \left(\frac{\sum_{j=0}^{\infty} a_j^* \theta^j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j^* \theta^j} \right), \quad (2.16)$$

sendo $a_j^* = \frac{a_{j+m}}{a_m}$ e $b_j^* = \frac{b_{j+n}}{b_n}$, para $j \geq 0$, $a_0^* = 1$ e $b_0^* = 1$.

Como $Q(\theta)$ pode ser escrito na forma

$$Q(\theta) = \frac{a_m \theta^m}{b_n \theta^n} \left(\frac{\sum_{j=0}^{\infty} a_j^* \theta^j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j^* \theta^j} \right) = \left[\frac{a_m \theta^m}{b_n \theta^n} \right] \sum_{k=0}^{\infty} d_k^* \theta^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \theta^k, \quad (2.17)$$

então

$$d_k = \left[\frac{a_m \theta^m}{b_n \theta^n} \right] d_k^*, \quad k \geq 0, \quad (2.18)$$

e, pelo Teorema ??, temos

$$d_k^* = \begin{cases} a_k^* - \sum_{i=1}^k b_i^* d_{k-i}^*, & k \geq 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

■

2.3 Quociente entre duas funções geradoras de probabilidades

Para o caso em que $G_1(t)$ e $G_2(t)$ são duas funções geradoras de probabilidades, o quociente $A(t) = \frac{G_1(t)}{G_2(t)}$ pode ser uma nova função geradora de probabilidades. (?) provaram que se $G_1(t)$ for a função geradora de uma distribuição geométrica e $G_2(t)$ for a função geradora de probabilidades da distribuição de Poisson então, para certas restrições nos parâmetros, $A(t)$ é realmente uma nova função geradora de probabilidades sendo que a distribuição correspondente foi denominada de *SJS*.

Teorema 2.4 *Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com distribuição em série de potências que possuem funções geradoras de probabilidades denotadas por $G_1(t)$ e $G_2(t)$, $|t| \leq t_0$. O quociente $Q(t) = \frac{G_1(t)}{G_2(t)}$ é uma função geradora de probabilidades de alguma variável aleatória se e somente se $Q(t)$ é uma série de potências cujos coeficientes são todos positivos, sob condições apropriadas.*

Prova 2.4.1 *Sejam $G_1(t)$ e $G_2(t)$, $|t| \leq t_0$, funções geradoras de probabilidades de duas distribuições em série de potências. Desde que $G_j(t)$, $j = 1, 2$, são séries de potências em t , absolutamente convergentes de mesmo raio de convergência então pelo Teorema ??, a razão $Q(t) = \frac{G_1(t)}{G_2(t)}$ é uma série de potências em t .*

Como

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = \left[\frac{\bar{a}_m A_2(\theta_2)}{\bar{b}_n A_1(\theta_1)} \right] t^{m-n} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^* t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{a}_m &= a_m \theta_1^m, \\ \bar{b}_n &= b_n \theta_2^n, \\ d_{(k)} &= \left[\frac{\bar{a}_m}{\bar{b}_n} \right] t^{m-n} d_k^*, \end{aligned} \quad (2.21)$$

e

$$d_k^* = \begin{cases} \frac{\bar{a}_{k+m}}{\bar{a}_m} - \sum_{i=1}^k \frac{\bar{b}_{i+n}}{\bar{b}_n} d_{k-i}^*, & k \geq 1, \\ 1, & \text{se } k = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Então, sob condições apropriadas para as quais $d_k > 0$, para todo $k = 0, 1, \dots$, $Q(t)$ é uma função geradora de probabilidades. ■

Como $G_1(t)$ e $G_2(t)$ são funções geradoras de probabilidades então $Q(1)$ sempre será sempre igual a 1 pois $Q(t) = \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k} = 1$, já que a_k e b_k , $k = 0, 1, \dots$ são probabilidades e, conseqüentemente, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = 1$.

Para o caso em que $Q(t)$ é uma f.g.p. os momentos fatoriais associados a distribuição gerada por $Q(t)$ podem ser obtidos, em particular, a média μ e a variância σ^2 desta nova distribuição de probabilidades.

A média μ é dada por,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{d}{dt} \left[\frac{G_1(t)}{G_2(t)} \right]_{t=1}, \\ &= \frac{G_1'(t)G_2(1) - G_1(1)G_2'(1)}{(G_2(1))^2}, \\ &= \frac{\mu_1 G_2(1) - G_1(1)\mu_2}{(G_2(1))^2}, \\ &= \mu_1 - \mu_2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

sendo $G(1) = 1$, μ_1 e μ_2 as médias das distribuições associadas as funções geradoras de probabilidades do numerador e do denominador de $Q(t)$, respectivamente.

Para o caso em que a distribuição do numerador e do denominador é a série de potências, μ deve ser positiva, pois representa a média de uma variável aleatória estritamente positiva.

A variância σ^2 é dada por,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{G_1(t)}{G_2(t)} \right]_{t=1} - \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{G_1(t)}{G_2(t)} \right]_{t=1} \right]^2 + \frac{d}{dt} \left[\frac{G_1(t)}{G_2(t)} \right]_{t=1}, \\ &= G_1''(1) - G_2''(1) - [G_1'(1) - G_2'(1)]^2 + G_1'(1) - G_2'(1), \\ &= [G_1''(1) - (G_1'(1))^2 + G_1'(1)] - [G_2''(1) - (G_2'(1))^2 + G_2'(1)], \\ &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

sendo σ_1^2 e σ_2^2 , respectivamente, a variância das distribuições associadas as f.g.p do numerador e do denominador de $Q(t)$, respectivamente, sendo $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ para que $\sigma^2 > 0$.

O fato de que a razão de funções geradoras de probabilidades pode definir uma nova distribuição de probabilidade discreta será utilizado para o quociente entre a f.g.p. da distribuição geométrica e da distribuição de Poisson.

2.3.1 Quociente entre a função geradora de probabilidades da distribuição geométrica e a função geradora de probabilidades da distribuição de Poisson

Nesta subseção exemplificamos o resultado apresentado na Seção ?? para o caso em que as f.g.p. são as da distribuição geométrica e da distribuição de Poisson. Estas funções geradoras de probabilidades estão apresentadas na Tabela ?? e aqui denotadas, respectivamente, por $G_1(t)$ e $G_2(t)$. As distribuições geométrica e Poisson são um membro da família de distribuições em série de potências. Pelo Teorema ??, o quociente destas funções geradoras de probabilidades é

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= \frac{G_1(t)}{G_2(t)} = \frac{p(1-qt)^{-1}}{e^{\lambda(t-1)}}, \\
 &= e^{\lambda p} \underbrace{(1-qt)^{-1} e^{-\lambda t}}_{\text{produto de duas séries}}, \\
 &= e^{\lambda p} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \left(q^j \frac{(-\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \right) t^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} p(k) t^k, \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

em que $q = 1 - p$ e os termos p_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, são dados por,

$$p_k = e^{\lambda p} q^k \underbrace{\left(\left(\frac{-\lambda}{q} \right)^k \frac{1}{k!} + \left(\frac{-\lambda}{q} \right)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} + \left(\frac{-\lambda}{q} \right)^{k-2} \frac{1}{(k-2)!} + \dots + 1 \right)}_D. \tag{2.26}$$

Para concluir que (??) é realmente uma nova função geradora de probabilidades, é necessário mostrar que todos os termos p_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, dados por (??), são positivos.

Teorema 2.5 *O vetor $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots)$ em que p_k , $k = 0, 1, \dots$, é dado por (??) define uma distribuição de probabilidade.*

Prova 2.5.1 *O vetor \mathbf{p} define uma distribuição de probabilidade própria se $p_k \geq 0$ para todo $k = 0, 1, \dots$. Seja*

$$D = \underbrace{\left[1 + \left(\frac{-\lambda}{q} \right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{-\lambda}{q} \right)^4 \frac{1}{4!} + \dots \right]}_A - \frac{\lambda}{q!} \underbrace{\left[1 + \left(\frac{-\lambda}{q} \right)^2 \frac{1}{3!} + \left(\frac{-\lambda}{q} \right)^4 \frac{1}{5!} + \dots \right]}_B$$

Como cada termo de A é maior que cada termo de B , então $A > B$. Além disso, como A e B são somas de potências positivas, segue que $A > 0$ e $B > 0$. Se $0 < \frac{\lambda}{q} < 1$, então $A - \frac{\lambda}{q} B = A - B + (1 - \frac{\lambda}{q})B > A - B > 0$.

Portanto, $D > 0$ e conseqüentemente $p_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Assim, fica provado que $Q(t)$ definida em (??) é de fato, uma função geradora de probabilidades. ■

A distribuição cujas probabilidades $p_k > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, são dadas por

$$p_k = e^{\lambda p} \sum_{j=0}^k \left(q^j \frac{(-\lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \right), \quad (2.27)$$

é denominada **SJS-1**.

A função geradora de probabilidades da distribuição **SJS-1** é

$$G(t) = \frac{p}{(1 - qt)e^{\lambda(t-1)}}. \quad (2.28)$$

A média e a variância da distribuição **SJS-1** são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{d}{dt} [G(t)]_{t=1}, \\ &= \frac{(1-p) - \lambda p}{p}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{d^2}{dt^2} [G(t)]_{t=1} + \frac{d}{dt} [G(t)]_{t=1} - \mu^2, \\ &= \frac{(1-p) - \lambda p^2}{p^2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

A distribuição de probabilidade **SJS-1** especificada pela função de probabilidade discreta dada em (??) é um exemplo dado por (?), e faz parte das distribuições geradas pelo quociente de funções geradoras de probabilidades.

2.4 Determinação da distribuição de T_{\min} e de T_{\max} em termos da função geradora de N e da função de distribuição de Y

Nesta seção são formalizados e detalhados todos os resultados utilizados na proposta de construção de novas distribuições de probabilidade apresentada no Capítulo ??.

Dada uma sequência $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^{++}}$ de v.a.'s i.i.d. como uma v.a. do tipo contínua Y , e sendo N uma variável aleatória que assume valores no conjunto \mathbb{Z}^{++} e tem função geradora de probabilidades $G_N(t)$, determinamos a seguir as distribuições de probabilidades de T_{\min} e de T_{\max} . Estas distribuições são caracterizadas pela função de sobrevivência, para o caso de T_{\min} e pela função de distribuição no caso de T_{\max} . Como a variável N só pode assumir valores em

$\{1, 2, \dots\}$ sua função geradora satisfaz a igualdade $G_N(0) = P(N = 0) = 0$. Desta forma, a função de sobrevivência de T_{min} e a função distribuição acumulada de T_{max} denotadas, respectivamente, por $S_{T_{min}}$ e $F_{T_{max}}$ são dadas em (??) e (??),

$$S_{T_{min}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [S_Y(t)]^n P(N = n), \quad (2.31)$$

e

$$F_{T_{max}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [F_Y(t)]^n P(N = n). \quad (2.32)$$

É imediato verificar pela definição de $G_N(t)$, que

$$S_{T_{min}}(t) = G_N[S_Y(t)],$$

e

$$F_{T_{max}}(t) = G_N[F_Y(t)] = G_N[1 - S_Y(t)].$$

Função densidade de probabilidade e função de risco de T_{min} e de T_{max}

A função densidade de probabilidade de uma lei de distribuição com função distribuição do tipo contínuo é definida como a derivada de $F(t)$ ou, equivalentemente, como a derivada de $S(t)$ multiplicada por (-1) nos pontos em que a derivada existe.

Como a função de sobrevivência do mínimo e a função distribuição acumulada do máximo são obtidas, respectivamente, das expressões (??) e (??), então as funções de densidade e risco de T_{min} e de T_{max} são dadas por,

$$f_{T_{min}}(t) = \left(-\frac{dS_{T_{min}}(t)}{dt} \right) = - \left[\frac{dG_N(y)}{dy} \right]_{y=S_Y(t)} \frac{dS_Y(t)}{dt} = g_N(S_Y(t))f_Y(t), \quad (2.33)$$

$$f_{T_{max}}(t) = \frac{dF_{T_{max}}(t)}{dt} = \left[\frac{dG_N(y)}{dy} \right]_{y=F_Y(t)} \frac{dF_Y(t)}{dt} = g_N(F_Y(t))f_Y(t), \quad (2.34)$$

$$h_{T_{min}}(t) = \frac{f_{T_{min}}(t)}{S_{T_{min}}(t)} = \frac{g_N[S_Y(t)]f_Y(t)}{G_N[S_Y(t)]}, \quad (2.35)$$

e

$$h_{T_{max}}(t) = \frac{f_{T_{max}}(t)}{S_{T_{max}}(t)} = \frac{g_N[F_Y(t)]f_Y(t)}{1 - G_N[F_Y(t)]}. \quad (2.36)$$

2.4.1 Função quantil da distribuição de T_{min} e de T_{max}

A função quantil $Q(q)$, $0 < q < 1$, é a função inversa da função de distribuição quando esta é do tipo absolutamente contínua, isto é,

$$Q_Y(q) = F_Y^{-1}(q) = t \Leftrightarrow F_Y(t) = q, \text{ para } 0 < q < 1.$$

A função inversa da função de sobrevivência guarda a seguinte relação com a função quantil,

$$Q_Y(q) = F_Y^{-1}(q) = t \Leftrightarrow F_Y(t) = q \Leftrightarrow S_Y(t) = 1 - q \Leftrightarrow S_Y^{-1}(1 - q) = t.$$

De forma resumida, temos a seguinte relação importante para o que vem a seguir:

$$F_Y^{-1}(q) = S_Y^{-1}(1 - q)$$

Função quantil para T_{min}

Se $Q_{T_{min}}(q) = F_{T_{min}}^{-1}(q) = t$ então $F_{T_{min}}(t) = q \Rightarrow 1 - S_{T_{min}}(t) = q$.

Portanto $1 - q = S_{T_{min}}(t) = G_N(S_Y(t))$.

Logo $t = S_Y^{-1}(G_N^{-1}(1 - q)) = F_Y^{-1}(1 - G_N^{-1}(1 - q))$.

Finalmente, obtemos a seguinte relação entre a função quantil da distribuição de uma variável Y e a função quantil do Mínimo T_{min} ,

$$Q_{T_{min}}(q) = Q_Y(1 - G_N^{-1}(1 - q)), 0 < q < 1. \quad (2.37)$$

Função quantil para T_{max}

Se $F_{T_{max}}(t) = q$, segue que $F_{T_{max}}(t) = G_N(F_Y(t)) = q$. Logo

$$Q_{T_{max}}(q) = Q_Y(G_N^{-1}(q)), \quad 0 < q < 1. \quad (2.38)$$

2.4.2 Alguns Exemplos

Nesta subseção exemplificamos como obter as funções densidades de probabilidade das variáveis aleatórias T_{min} ou T_{max} utilizando a expressão (??) ou (??), respectivamente, para os exemplos dos autores mencionados na Tabela ?? da Seção ?? do Capítulo ??, .

Por exemplo, considerando

$$T_{max} = \max(Y_1, \dots, Y_N),$$

e assumindo

$$G_N(t) = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^\lambda - 1}, \text{ (f.g.p. da distribuição Poisson truncada em zero),}$$

e

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\beta y} \text{ (função de distribuição da exponencial),}$$

por (??) e (??) obtemos,

$$\begin{aligned} S_{T_{max}}(t) &= 1 - F_{T_{max}}(t) = 1 - G_N(F_Y(t)) \\ &= 1 - \frac{e^{-(\lambda(-1+e)^{-\beta t})} - 1}{e^\lambda - 1} = \frac{1 - e^{-\lambda e^{-\beta t}}}{1 - e^{-\lambda}}, \end{aligned}$$

e

$$f_{T_{max}}(t) = \frac{\lambda \beta e^{-\lambda e^{-\beta t} - \beta t}}{1 - e^{-\lambda}},$$

sendo $S_{T_{max}}(t)$ e $f_{T_{max}}(t)$, respectivamente, a função de sobrevivência e a função densidade da v.a. T_{max} que possui distribuição Poisson-exponencial $PED(\lambda, \beta)$ proposta por ?).

Um outro exemplo é obtido considerando

$$T_{min} = \min(Y_1, \dots, Y_N),$$

e assumindo

$$G_N(t) = \frac{pt}{1 - t(1 - p)}, \text{ (f.g.p. da distribuição geométrica com suporte em } Z^{++}\text{),}$$

e

$$S_Y(y) = e^{-(\beta y)^\gamma} \text{ (função de sobrevivência da Weibull),}$$

por (??) e (??) obtemos,

$$S_{T_{min}}(t) = \frac{pe^{-(\beta t)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta t)^\gamma}(1 - p)},$$

e

$$f_{T_{min}}(t) = \frac{p\beta^\gamma \gamma t^{\gamma-1} e^{-(\beta t)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta t)^\gamma}(1 - p)},$$

sendo $S_{T_{min}}(t)$ e $f_{T_{min}}(t)$, respectivamente, a função de sobrevivência e a função densidade da v.a. T_{min} que possui distribuição Weibull-geométrica $WG(\alpha, \beta, \gamma)$ proposta por ?).

Na Tabela ?? apresentamos a f.g.p. de N , a função de sobrevivência e a função densidade do mínimo ou máximo de N variáveis aleatórias i.i.d. para as distribuições propostas na

Tabela ???. As funções densidades de probabilidade das v.a.'s T_{min} ou T_{max} são obtidas assumindo $S_Y(y) = e^{-\beta y}$ como a função de sobrevivência da variável aleatória Y . Na Tabela ?? apresentamos a função de sobrevivência da v.a. Y , porém para obter a f.d.p. de T_{max} devemos utilizar F_Y como definido em (??). Em todos os exemplos apresentados na Tabela ??, $G_N(t)$ tem forma fechada, pois foi adotada uma distribuição discreta em série de potência como distribuição de probabilidade de N . No entanto, para utilizar esta metodologia não é necessário que $G_N(t)$ seja f.g.p. de uma distribuição membro da família de distribuições em série de potências.

Tabela 2.2: Função geradora de probabilidades de N , função de sobrevivência de Y , função de sobrevivência e função densidade (f.d.p.) para T_{min} ou T_{max} .

Autores	$G_N(t; \alpha)$	Variável	Função de Sobrevivência	f.d.p
Adamidis e Loukas (1998)	Geométrica ¹ $\frac{pt}{1-t(1-p)}$ $-\frac{1}{1-p} < t < \frac{1}{1-p}$	T_{min}	$\frac{pe^{-\beta t}}{1-e^{-\beta t}(1-p)}$	$\frac{p\beta e^{-\beta t}}{(1-e^{-\beta t}(1-p))^2}$
Kus (2007)	Poisson ² $\frac{e^{\lambda t}-1}{e^\lambda-1}$ $t \in \mathbb{R}$	T_{min}	$\frac{1-e^{-\lambda e^{-\beta t}}}{1-e^{-\lambda}}$	$\frac{\lambda\beta e^{-\lambda+\lambda e^{-\beta t}-\beta t}}{1-e^{-\lambda}}$
Tahmasbi e Rezaei(2008)	D. S.Logarítmica ¹ $\frac{\log(1-pt)}{\log(1-p)}$ $-\frac{1}{p} < t < \frac{1}{p}$	T_{min}	$\frac{\log(1-pe^{-\beta t})}{\log(1-p)}$	$\frac{p\beta e^{-\beta t}}{(pe^{-\beta t}-1)\log(1-p)}$
Cancho et al. (2011)	Poisson ² $\frac{e^{\lambda t}-1}{e^\lambda-1}$ $t \in \mathbb{R}$	T_{max}	$\frac{1-e^{-\lambda e^{-\beta t}}}{1-e^{-\lambda}}$	$\frac{\lambda\beta e^{-\lambda e^{-\beta t}-\beta t}}{1-e^{-\lambda}}$
Louzada et al. (2011)	Geométrica ¹ $\frac{\alpha t}{1-t(1-\alpha)}$ $-\frac{1}{1-p} < t < \frac{1}{1-p}$	T_{max}	$\frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t}(1-\alpha)+\alpha}$	$\frac{\alpha\beta e^{-\beta t}}{(e^{-\beta t}(1-\alpha)+\alpha)^2}$

¹distribuição com suporte no conjunto Z^{++} , $0 < p < 1$;

²Poisson truncada em zero, $\lambda > 0$.

Nesta seção, foi mostrado que o procedimento de obtenção da função de sobrevivência do mínimo e da função de distribuição do máximo de um número aleatório de v.a.'s i.i.d. é equivalente a composição da função geradora de probabilidade de N com a função de sobrevivência $S_Y(y)$ ou com a função de distribuição $F_Y(y)$ de Y , respectivamente.

Capítulo 3

A distribuição Poisson-Weibull

Várias distribuições foram propostas na literatura, para modelar a distribuição do tempo de duração de um sistema composto por um número aleatório N de componentes, podem se adequar ao cenário de riscos competitivos, no sentido que não há informação sobre quais foram os fatores responsáveis pela falha do sistema, ou seja, tanto o número como a identificação do(s) componentes(s) que provocou (provocaram) a falha não são observáveis, mas sim é observado o valor do tempo de vida mínimo dos componentes.

Apesar da existência, na literatura, de várias distribuições para este tipo de modelagem, a busca por novas distribuições é justificada pelo fato de que os modelos mais tradicionais, muitas vezes, não se ajustam bem a um conjunto de dados reais. Neste contexto propomos uma distribuição com três parâmetros intitulada Poisson-Weibull (PW), que generaliza a distribuição proposta por ?).

A distribuição Poisson-Weibull possui uma função de risco que pode assumir várias formas tais como crescente, decrescente, banheira virada para baixo, entre outras. Na Seção ?? apresentamos a nova distribuição obtida usando o procedimento de construção de distribuições de probabilidades proposto no Capítulo ?? desta tese; na Seção ?? apresentamos as suas propriedades, que inclui obtenção da sua função densidade de probabilidade, funções de risco e sobrevivência, momentos, estatísticas de ordem e quantis; na Seção ?? obtemos a função de verossimilhança e a matriz de informação de Fisher. A distribuição proposta é aplicada a um conjunto de dados reais na Seção ?? e comentários finais são apresentados na Seção ??.

3.1 A distribuição Poisson-Weibull

Seja N uma v.a que assume valores no conjunto Z^{++} e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ uma sequência de v.a.'s i.i.d. de uma v.a Y do tipo contínuo, sendo N e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ independentes. Assumimos que Y possui distribuição Weibull com parâmetros de forma $\gamma > 0$ e de escala $\beta > 0$, sendo sua função densidade de probabilidades (f.d.p.) e sua função de sobrevivência dadas, respectivamente, por,

$$f_Y(y; \beta, \gamma) = \gamma \beta^\gamma y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} I_{[0, \infty)}(y)$$

e

$$S_Y(y; \beta, \gamma) = I_{(-\infty, 0)}(y) + e^{-(\beta y)^\gamma} I_{[0, \infty)}(y).$$

Consideramos que N possui distribuição de Poisson truncada em zero de parâmetro $\alpha > 0$ cuja função de probabilidade, $p_N(n)$, e a respectiva função geradora de probabilidades, $G_N(t)$, são dadas por,

$$p_N(n) = \frac{\alpha^n}{n!(e^\alpha - 1)}, \quad (3.1)$$

e

$$G_N(t) = \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^\alpha - 1} I_{(-\infty, \infty)}(t). \quad (3.2)$$

Como N e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ são independentes então, de acordo com a expressão (??), a função densidade de $T_{min} = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ é dada por,

$$f_{T_{min}}(t; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}} - e^{-(\beta t)^\gamma}}{e^\alpha - 1} \alpha \beta^\gamma t^{\gamma-1} \gamma I_{[0, \infty)}(t). \quad (3.3)$$

sendo $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Esta distribuição com função densidade de probabilidades dada por (??) é denominada de Poisson-Weibull e denotada por $PW(\alpha, \beta, \gamma)$, sendo daqui por diante mencionada como PW . A distribuição Exponencial-Poisson proposta ?) é um caso particular da distribuição PW quando $\gamma = 1$.

A Figura ?? mostra a forma da função densidade da PW para alguns valores dos parâmetros α, β e γ .

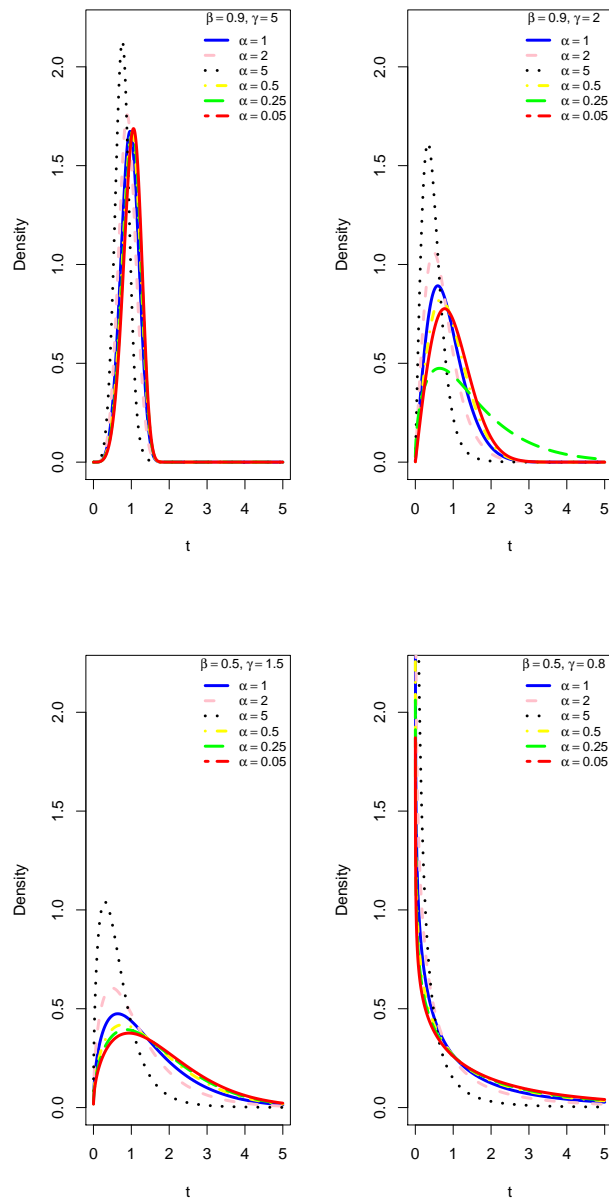


Figura 3.1: Função densidade de probabilidade da distribuição PW para alguns valores dos parâmetros.

3.2 Algumas propriedades da distribuição Poisson-Weibull

Nesta seção, apresentamos a função de distribuição acumulada, a função de risco, a função sobrevivência, a função quantil, os momentos e a função densidade da i -ésima estatística de ordem da variável aleatória T_{min} que possui distribuição PW .

A função distribuição $F_{T_{min}}(t; \alpha, \beta, \gamma)$, a função quantil $Q_{T_{min}}(t; \alpha, \beta, \gamma)$, a função de

sobrevivência $S_{T_{min}}(t; \alpha, \beta, \gamma)$ e a função de risco $h_{T_{min}}(t; \alpha, \beta, \gamma)$, de T_{min} são, respectivamente,

$$F_{T_{min}}(t) = \frac{(e^\alpha - e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}})}{e^\alpha - 1} I_{[0, \infty)}(t),$$

$$Q_{T_{min}}(q) = \frac{(\log(\alpha) - \log(\log(e^\alpha(1-q) + q)))^{1/\gamma}}{\beta} I_{[0, 1]}(q), \quad (3.4)$$

$$S_{T_{min}}(t) = I_{(-\infty, 0)}(t) + \frac{e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}} - 1}{e^\alpha - 1} I_{[0, \infty)}(t), \quad (3.5)$$

e

$$h_{T_{min}}(t) = \frac{e^{(\alpha e^{-(\beta t)^\gamma} - (\beta t)^\gamma)} \gamma \alpha \beta^\gamma t^{\gamma-1}}{e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}} - 1} I_{[0, \infty)}(t),$$

sendo $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

A Figura ?? mostra a forma da função de risco para alguns valores de α, β, γ . Podemos notar que esta função é bastante flexível tendo várias formas, tais como crescente, decrescente e banheira de cabeça para baixo.

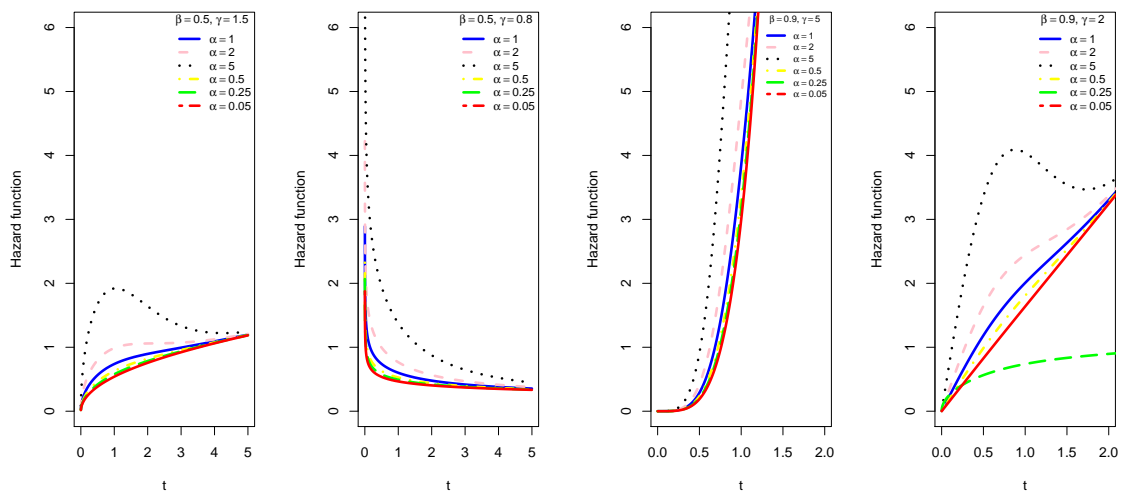


Figura 3.2: Função de risco da distribuição PW para alguns valores dos parâmetros.

Na Figura ?? temos representada a função de sobrevivência da distribuição PW para alguns valores dos parâmetros α, β, γ .

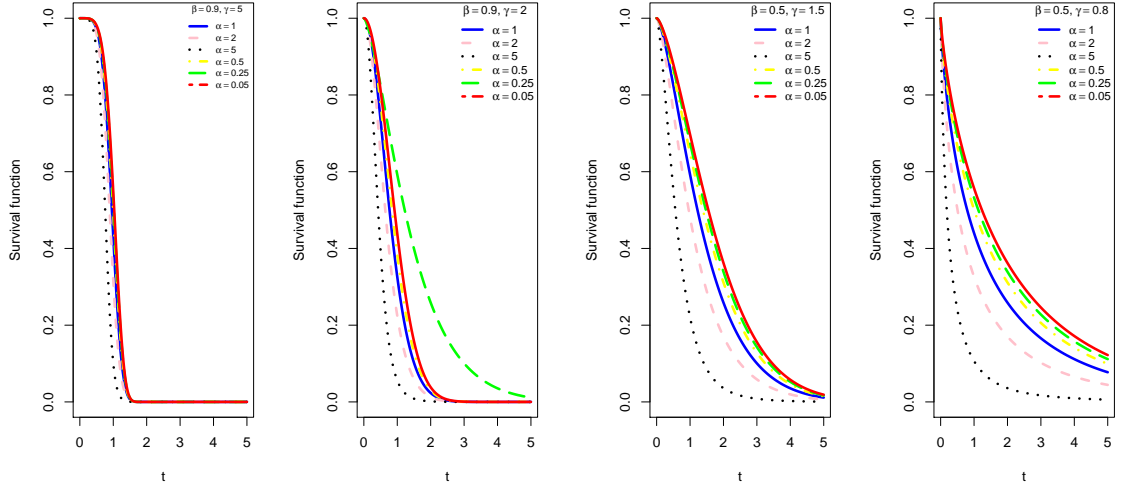


Figura 3.3: Função de sobrevivência da distribuição PW para alguns valores dos parâmetros.

Teorema 3.1 *O r -ésimo momento não central da variável T_{min} com distribuição $PW(\alpha, \beta, \gamma)$ é dado por,*

$$E(T_{min}^r) = \frac{1}{e^\alpha - 1} \Gamma\left(1 + \frac{r}{\gamma}\right) \beta^{-r} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-r/\gamma} \frac{\alpha^j}{j!}. \quad (3.6)$$

Prova 3.1.1 *Seja $T_{min} \sim PW(\alpha, \beta, \gamma)$. O r -ésimo momento desta variável aleatória é dado por,*

$$\begin{aligned} E(T_{min}^r) &= \int_0^{\infty} t^r \frac{1}{e^\alpha - 1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j \gamma (\beta j^{1/\gamma})^\gamma t^{\gamma-1} e^{-(\beta j^{1/\gamma} t)^\gamma}}{j!} dt \\ &= \frac{1}{e^\alpha - 1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \int_0^{\infty} t^r \gamma (\beta j^{1/\gamma})^\gamma t^{\gamma-1} e^{-(\beta j^{1/\gamma} t)^\gamma} dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na expressão (3.7), a integral $\int_0^{\infty} t^r f(t, \beta j^{1/\gamma}, \gamma) dt$ é o r -ésimo momento $\mu(r)$ da distribuição Weibull $(\beta j^{1/\gamma}, \gamma)$ que é dado por,

$$\mu(r) = \int_0^{\infty} t^r \gamma (\beta j^{1/\gamma})^\gamma t^{\gamma-1} e^{-(\beta j^{1/\gamma} t)^\gamma} dt = (\beta j^{1/\gamma})^{-r} \Gamma\left(1 + \frac{r}{\gamma}\right)$$

sendo $\Gamma(\cdot)$ a função Gama. Desta forma, usando $\mu(r)$ em (3.7), obtemos

$$E(T_{min}^r) = \frac{\gamma}{e^\alpha - 1} \Gamma\left(1 + \frac{r}{\gamma}\right) \beta^{-r} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-r/\gamma} \frac{\alpha^j}{j!}.$$

■

Sejam (T_1, \dots, T_n) variáveis aleatórias v.a.'s i.i.d. tais que $T_i, i = 1, 2, \dots, n$ são observações da v.a. $T_{min} \sim PW(\alpha, \beta, \gamma)$. Denotemos por $T_{1:n}, \dots, T_{n:n}$ as suas respectivas estatísticas

de ordem. A função densidade da i -ésima estatística de ordem, denotada por $T_{i:n}$, é dada por,

$$f_{i:n}(t) = \frac{\alpha\beta\gamma t^{\gamma-1}\gamma e^{(\alpha e^{-(\beta t)^\gamma} - (\beta t)^\gamma)}(e^\alpha - e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}})^{k-1}(e^{\{\alpha e^{\{\alpha e^{\{-(\beta t)^\gamma}\}}\}} - 1})^{n-k}}{\beta(k; n-k+1)(e^\alpha - 1)^n}, \quad (3.8)$$

sendo $t > 0$.

3.3 Inferência

Existem vários métodos que podem ser utilizados para estimar os parâmetros de um modelo probabilístico. Um dos mais utilizados é o método de máxima verossimilhança, cuja idéia é encontrar os valores dos parâmetros, entre todos os possíveis valores, que maximizem a função de verossimilhança ou, equivalentemente, o logaritmo da função de verossimilhança.

Seja (T_1, \dots, T_n) uma amostra aleatória da v.a. $T_{min} \sim PW(\alpha, \beta, \gamma)$, com valores observados t_1, \dots, t_n . O logaritmo da função de verossimilhança $l(\boldsymbol{\theta}) = \log(L(\boldsymbol{\theta}))$ é dado por,

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\theta}) &= \alpha \sum_{i=1}^n e^{-(\beta t_i)^\gamma} - \sum_{i=1}^n (\beta t_i)^\gamma + n \log \alpha + n\gamma \log \beta \\ &+ \gamma \sum_{i=1}^n \log t_i - \sum_{i=1}^n \log t_i + n \log \gamma - n \log(e^\alpha - 1), \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \gamma)^\top$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são obtidos igualando-se a função escore $U(\boldsymbol{\theta})$ a zero, ou seja,

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \log(L(\boldsymbol{\theta}))}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

As componentes do vetor $U(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial \ell}{\partial \alpha}, \frac{\partial \ell}{\partial \beta}, \frac{\partial \ell}{\partial \gamma} \right)^\top$ são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - \frac{ne^\alpha}{e^\alpha - 1} + \sum_{i=1}^n e^{-(\beta t_i)^\gamma}, \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta} &= \frac{n\gamma}{\beta} - \gamma\beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n t_i^\gamma - \gamma\alpha\beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n t_i^\gamma e^{-(\beta t_i)^\gamma}, \\ \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} &= \frac{n}{\gamma} - \alpha\beta^\gamma \sum_{i=1}^n t_i^\gamma e^{-(\beta t_i)^\gamma} \log(\beta t_i) - \sum_{i=1}^n (\beta t_i)^\gamma \log(\beta t_i) + n \log \beta + \sum_{i=1}^n \log t_i. \end{aligned}$$

As estimativas $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ dos parâmetros α , β e γ são obtidas resolvendo o sistema de equações resultante de (??). Para isto é necessário o uso de um método numérico.

Inferências para grandes amostras podem ser feitas em $\boldsymbol{\theta}$ utilizando-se o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e seu erro padrão, obtido através da matriz de informação de Fisher.

A matriz de informação de Fisher é definida como,

$$I(\boldsymbol{\theta}) = E \left(- \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \bigg|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}} \right), \quad (3.11)$$

sendo $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})^\top$.

Para a distribuição *PW*, a matriz de informação de Fisher é da forma

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = - \begin{bmatrix} I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta} & I_{\alpha\gamma} \\ I_{\alpha\beta} & I_{\beta\beta} & I_{\beta\gamma} \\ I_{\alpha\gamma} & I_{\beta\gamma} & I_{\gamma\gamma} \end{bmatrix},$$

cujos elementos são,

$$\begin{aligned} I_{\alpha\alpha} &= n/\alpha^2 + ne^\alpha/(e^\alpha - 1)^2, \\ I_{\beta\beta} &= -n/\alpha^2 + ne^\alpha/(e^\alpha - 1)^2, \\ I_{\gamma\gamma} &= -n/\alpha^2 + ne^\alpha/(e^\alpha - 1)^2, \\ I_{\alpha\beta} &= n/\alpha^2 + ne^\alpha/(e^\alpha - 1)^2, \\ I_{\alpha\gamma} &= n/\alpha^2 + ne^\alpha/(e^\alpha - 1)^2, \\ I_{\beta\gamma} &= n/\alpha^2 + ne^\alpha/(e^\alpha - 1)^2. \end{aligned}$$

Vale lembrar que a matriz é simétrica, pois $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$, $I_{\gamma\beta} = I_{\beta\gamma}$ e $I_{\gamma\alpha} = I_{\alpha\gamma}$. Sob condições usuais de regularidade,

$$\sqrt{n} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{D} N_3(\mathbf{0}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})^{-1}),$$

Além disso,

$$I_0(\boldsymbol{\theta}) = - \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} \bigg|_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}},$$

é chamada de matriz observada de Fisher, que é um estimador consistente de $I(\boldsymbol{\theta})$. Neste trabalho, o cálculo da matriz de informação observada é feito numericamente através *software* R.

Para a seleção do modelo que melhor se ajusta aos dados foram usados os critérios de seleção de modelos. Neste trabalho foram utilizados o critério de informação de Akaike(AIC) e o critério de informação de Bayes(BIC) definidos, respectivamente, por

$$AIC = -2 \log(L) + 2p \quad \text{e} \quad BIC = -2 \log(L) + p \log(n),$$

em que L é a função de verossimilhança, p é o número de parâmetros do modelo a ser estimado e n é o número de observações. Tanto para o AIC quanto para BIC, o menor valor resulta no modelo mais adequado. Além disso, podemos testar hipóteses a respeito dos parâmetros de um modelo. Isto pode ser feito, por exemplo, utilizando-se o teste da razão de verossimilhanças

(TRV). Como as distribuições PW e EP são encaixadas pode-se utilizar o teste da razão da verossimilhanças para discriminar estes modelos. Nesse caso, as hipóteses são dadas por,

$$\begin{cases} H_0 : & \text{o modelo de interesse é adequado} \\ H_1 : & \text{o modelo de interesse não é adequado} \end{cases}$$

A estatística do teste da razão de verossimilhanças é

$$TRV = 2[\log(L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1)) - \log(L(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0))],$$

em que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$ é o estimador de máxima verossimilhança para vetor de parâmetros do modelo restrito e $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_1$ é o estimador de máxima verossimilhança para o vetor de parâmetros do modelo geral.

3.4 Aplicação

Nesta seção utilizamos a distribuição PW , proposta nesta tese, para modelar um conjunto de dados. Especificamente, ajustamos as distribuições PW e EP a um conjunto de dados extraído de ?). Os dados consistem de 213 observações sobre o tempo de falhas sucessivas de um sistema de condicionamento de ar de cada Boeing, numa frota de 720 aviões a jato. Primeiramente, identificamos a forma da função de risco usando o método baseado no gráfico do tempo total em teste (TTT) proposto por ?).

Na sua versão empírica, o gráfico TTT é obtido considerando r/n em sua abscissa, e

$$G(r/n) = [(\sum_{i=1}^r T_{i:n} + (n-r)T_{r:n}) / (\sum_{i=1}^r T_{i:n})],$$

em sua ordenada, sendo $r = 1, \dots, n$ e $T_{i:n}, i = 1, 2, \dots, n$ as estatísticas de ordem da amostra. A curva TTT pode apresentar várias formas. A Figura ?? ilustra as diversas formas da curva TTT, como por exemplo se a curva TTT seja um reta diagonal (curva A), a função de risco constante é adequada; quando a curva é convexa (curva B) ou côncava (curva C), a função de risco é monotonicamente decrescente ou crescente, respectivamente, e no caso de convexa (curva D) a função de risco é em forma de U e no caso contrário côncava (curva E) é unimodal.

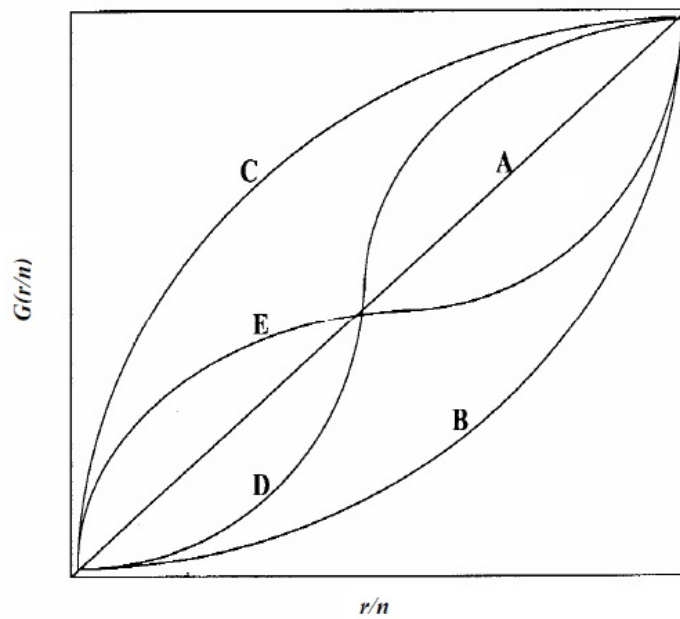


Figura 3.4: Gráficos ilustrativos de algumas curvas TTT.

No entanto, o gráfico TTT é apenas uma condição suficiente, mas não necessária, para mostrar a forma da função de risco. Neste trabalho usamos este método como um indicador da forma da função de risco. A Figura ?? apresenta o gráfico TTT para o conjunto de dados em estudo.

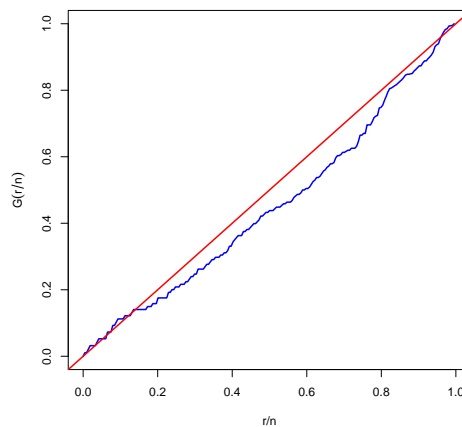


Figura 3.5: Gráfico TTT para o conjunto de dados.

Pela Figura ?? a forma empírica da função risco é decrescente. Logo, é possível ajustar aos dados as distribuições *EP* e *PW*.

Ajustamos as distribuições *PW*, Weibull e *EP* ao conjunto de dados sob estudo. As estimativas de seus parâmetros, obtidas pelo método de máxima verossimilhança, assim como os seus erros padrão são mostrados na Tabela ???. Tais estimativas foram obtidas usando o método numérico BFGS, implementado no *software* R por meio do O comando *optim*.

Tabela 3.1: Resultados das estimativas por máxima verossimilhança de θ , seu erro padrão e logaritmo da função de verossimilhança dos dados de Proschan, $l(\hat{\theta})$ das distribuições *PW*, Weibull, *EP*.

Distribuições	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$l(\cdot)$
PW	2,0253 (0,9810)	160,1753 (44,0010)	1,0717 (0,0646)	-1175,244
Weibull	- -	89,5462 (7,0235)	0,9245 (0,0481)	-1177,585
EP	- -	1,3331 (0,633)0	0,0075 (0,0014)	-1175,793

A Figura ?? apresenta as estimativas da função de sobrevivência obtidas pelo método de Kaplan-Meier e a função de sobrevivência estimada dos modelos Weibull, EP e PW.

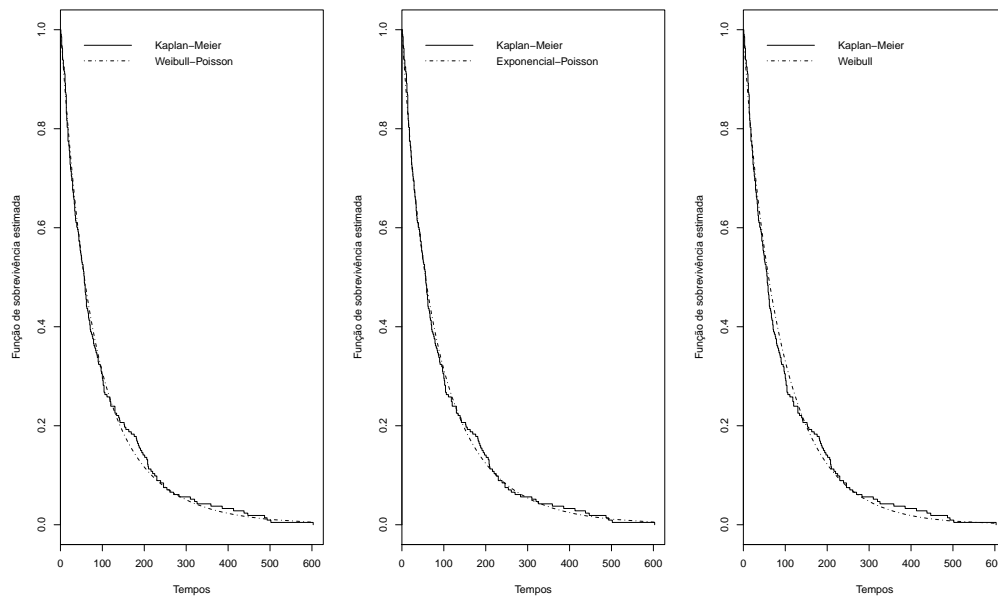


Figura 3.6: Curva da função de sobrevivência estimada pelo método de Kaplan-Meier e as curvas das funções de sobrevivência estimadas a partir das distribuições *PW*, Weibull, *EP*, para os dados de Proschan.

De acordo com a Figura ?? verifica-se que as curvas das funções de sobrevivência para os 3 modelos estão muito próximas à curva de Kaplan-Meier. Também foram usados os critérios de seleção AIC e BIC cujos valores são apresentados na Tabela ?. Podemos observar que as distribuições ajustadas possuem valores bem próximos em ambos os critérios de seleção. Considerando estas pequenas diferenças, temos que pelo critério AIC o modelo mais adequado é o *EP*, e pelo BIC é o modelo *PW*.

Tabela 3.2: Valores dos critérios de seleção AIC e BIC obtidos no ajuste das distribuições *PW*, Weibull, *EP* aos dados de Proschan.

Distribuições	AIC	BIC
Weibull	2359,170	2365,893
Exponencial-Poisson	2355,586	2362,309
Weibull-Poisson	2356,488	2355,572

Por fim, utilizamos o teste da razão de verossimilhanças para verificar qual dos modelos se ajustam melhor aos dados, ou seja, testamos as hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \gamma = 1 & \text{a distribuição EP é adequada} \\ H_1 : \gamma \neq 1 & \text{o modelo não é adequado} \end{cases}$$

O p-valor obtido foi 0,2947054. Podemos dizer que há indícios de que a distribuição *EP* se ajusta adequadamente à estes dados.

e

3.5 Considerações finais

Propusemos uma nova distribuição com três parâmetros, intitulada Poisson-Weibull, obtida usando o procedimento de construção de distribuições de probabilidades proposto no Capítulo ?? e detalhada na Seção ?? do Capítulo ?. A inclusão de um terceiro parâmetro leva à uma distribuição com função de risco mais flexível, como mostra a Figura ?. Apresentamos expressões em forma fechada para as funções de sobrevivência e risco e para a função densidade de probabilidade da variável T_{min} . A utilidade da distribuição *PW* foi mostrada na Seção 3.4, considerando dados reais, na qual a distribuição *PW*, segundo o critério BIC, se ajustou melhor aos dados em comparação as distribuições *EP* e Weibull.

Capítulo 4

A distribuição SJS-Exponencial

O estudo do tempo de duração de um sistema em série composto por um número aleatório de componentes é muito importante na área de confiabilidade. Neste contexto, utilizamos o procedimento proposto nos Capítulos ?? e ?? para determinar uma outra distribuição de probabilidade absolutamente contínua denominada SJS-Exponencial, denotada por (*SJSE*).

Para obter a distribuição *SJSE* assumimos que o sistema é formado um número aleatório N de componentes modelado por uma distribuição obtida a partir da distribuição *SJS* proposta por ?) e apresentada na equação (??) da Seção ?? do Capítulo ??. Consideramos também que os tempos de duração dos componentes $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ são v.a.'s i.i.d. de uma v.a. Y tendo distribuição exponencial, sendo N e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ independentes.

Na Seção ??, apresentamos as expressões da função de distribuição, da função de densidade, da função de sobrevivência e da função de risco da distribuição *SJSE*. Na Seção ??, é deduzida a função densidade da k -ésima estatística de ordem da distribuição *SJSE*. O logaritmo da função de verossimilhança de uma amostra de tamanho n do tempo de duração do sistema é apresentado na Seção ??. Na Seção ?? é realizado um estudo de simulação calculando o vício médio e a média do erro quadrático médio das estimativas dos parâmetros em 5000 simulações para diferentes tamanhos de amostras da distribuição *SJSE*.

Este capítulo foi desenvolvido tendo como objetivo a obtenção de um novo modelo probabilístico a fim de ilustrar a aplicação da metodologia apresentada nos Capítulos ?? e ??. Desta forma, a obtenção de propriedades deste modelo, além de um estudo mais amplo a respeito do comportamento de seus estimadores, é deixado como trabalho futuro.

4.1 Propriedades da distribuição SJS-Exponencial

Seja $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^{++}}$ uma sequência de v.a.'s latentes i.i.d. de uma v.a Y e N uma v.a. que assume valores em \mathbb{Z}^{++} , sendo N e $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^{++}}$ independentes. Assumimos que Y tem distribuição exponencial de parâmetro $\alpha > 0$. Como o tamanho da amostra N , ou seja, o número de componentes que constitui o sistema, deve ser maior que zero, assumimos que N possui distribuição $SJS - 1$ transladada de uma unidade à direita, apresentada na equação (??) da Seção ?? do Capítulo ?. A função de probabilidades e função geradora de probabilidades desta distribuição, são dadas, respectivamente, por

$$p(n) = P(N = n) = e^{\lambda p} \sum_{j=0}^{n-1} \left(q^j \frac{(-\lambda)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

e

$$G_N(t) = \frac{pt}{(1-t(1-p))e^{\lambda(t-1)}}. \quad (4.2)$$

Uma condição necessária mas não suficiente para que essas expressões definam realmente uma distribuição de probabilidade é que $p < 1 - \lambda$.

Temos interesse em determinar a função de sobrevivência do tempo de vida mínimo $T_{min} = \min(Y_1, \dots, Y_N)$.

Assim, utilizando a expressão (??) e o fato de que N possui distribuição **SJS-1** transladada uma unidade à direita, a função de sobrevivência de T_{min} é dada por,

$$S_{T_{min}}(t) = I_{(-\infty, 0)}(t) + \frac{pe^{-\alpha t}}{(1 - qe^{-\alpha t})e^{\lambda(e^{-\alpha t} - 1)}} I_{[0, \infty)}(t), \quad (4.3)$$

sendo $0 < \alpha$, $p < 1 - \lambda$ e $0 < \lambda < 1$.

A função de distribuição da variável aleatória T_{min} é dada por,

$$F_{T_{min}}(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t} - pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda}}{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t}} I_{[0, \infty)}(t). \quad (4.4)$$

A função densidade de probabilidade da distribuição $SJSE$, que é obtida derivando (??) em relação a t , é dada por,

$$f_{T_{min}}(t) = \frac{pe^{-\alpha t} \left(\alpha + \frac{\alpha q e^{-\alpha t}}{1 - q e^{-\alpha t}} - \lambda \alpha e^{-\alpha t} \right)}{(1 - qe^{-\alpha t}) e^{\lambda(e^{-\alpha t} - 1)}} I_{[0, \infty)}(t). \quad (4.5)$$

A função de risco da v.a. T_{min} é dada por

$$h_{T_{min}}(t) = \left(\alpha + \frac{\alpha q e^{-\alpha t}}{1 - q e^{-\alpha t} - \lambda \alpha e^{-\alpha t}} \right) I_{[0, \infty)}(t). \quad (4.6)$$

A função em (??) é decrescente em t .

A Figura ?? apresenta o gráfico da função densidade e da função de sobrevivência da distribuição $SJSE$ para diferentes valores dos parâmetros p , α e λ .

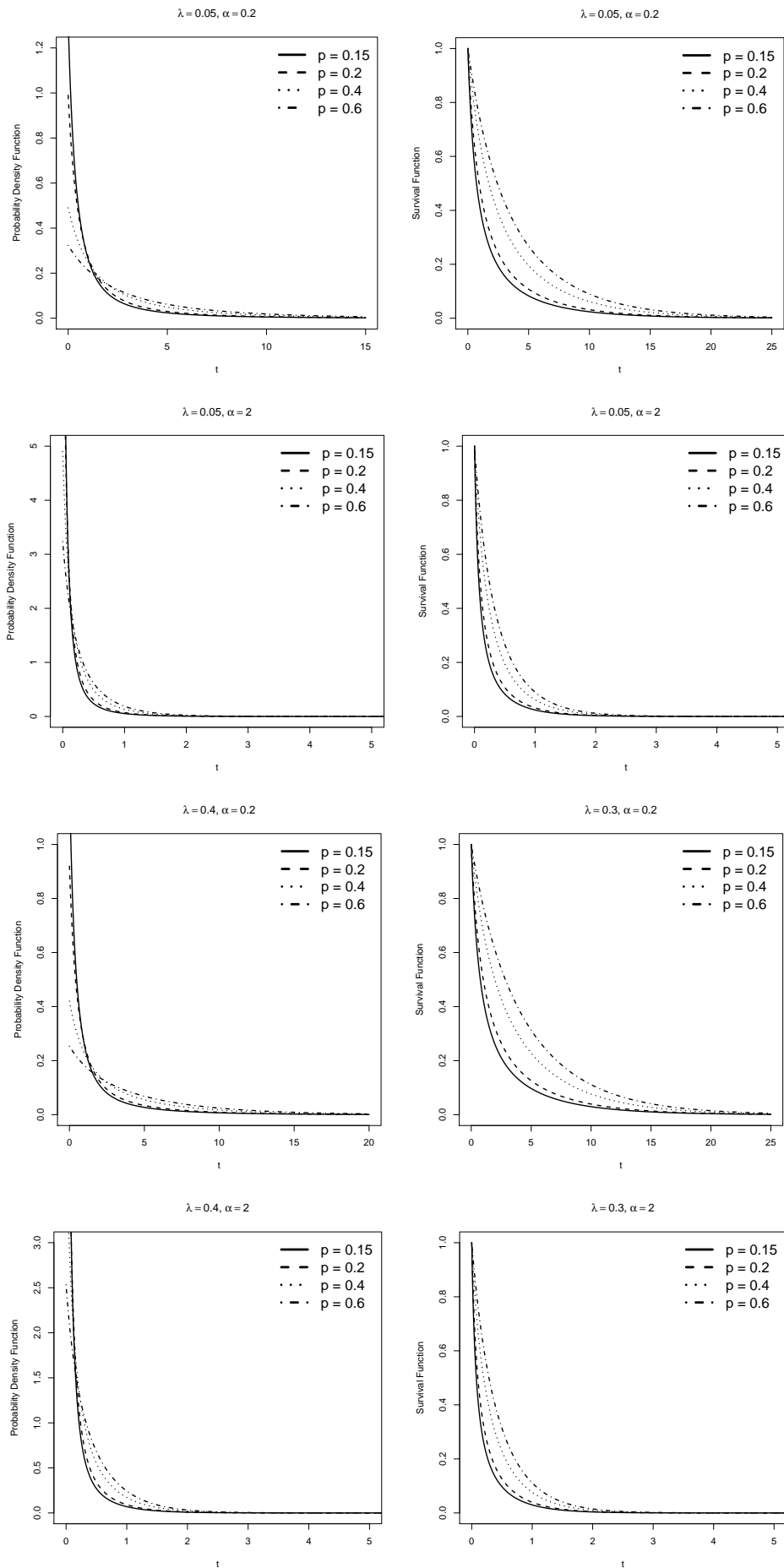


Figura 4.1: Função densidade e de sobrevivência da distribuição $SJSE$ para alguns valores de p , α , e λ .

A Figura ?? apresenta o gráfico da função de risco da distribuição considerando diferentes valores de p , α e λ .

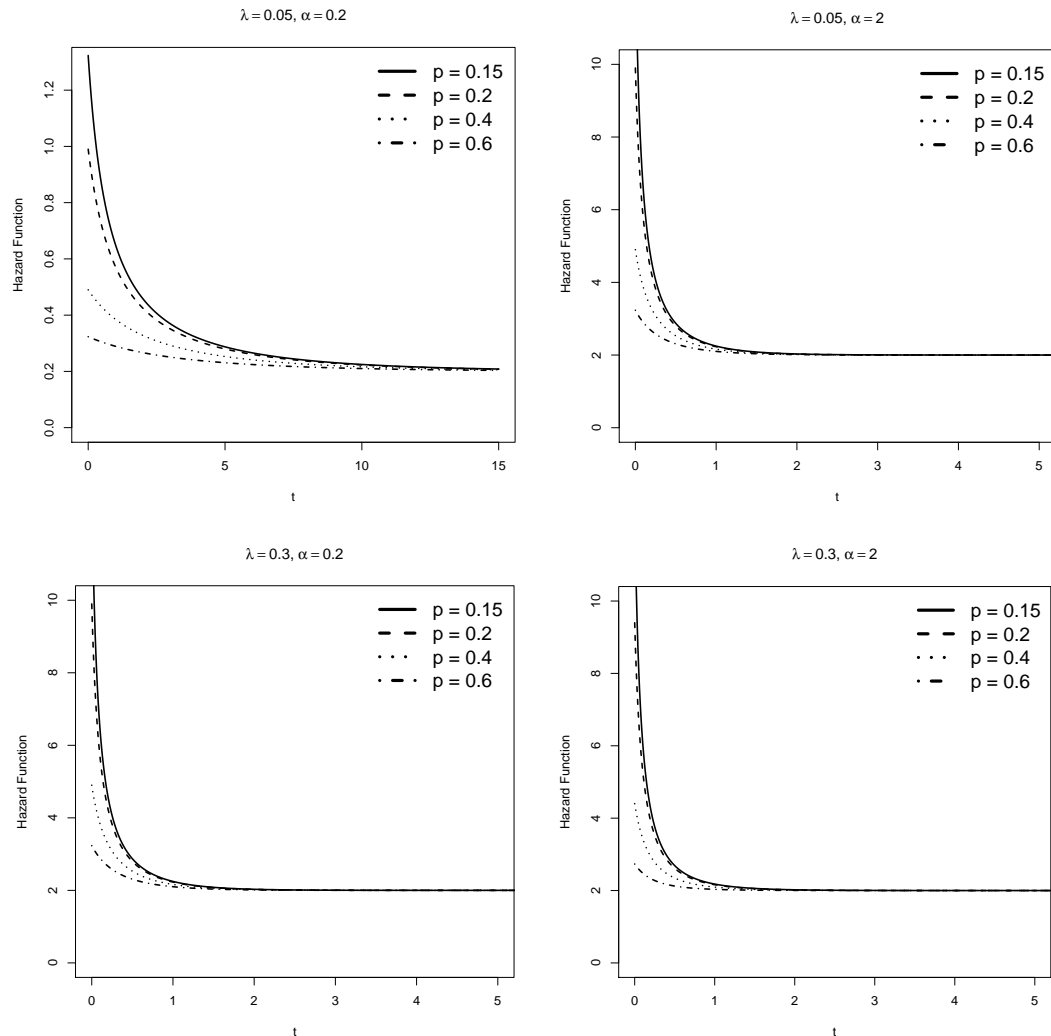


Figura 4.2: Função de risco da distribuição $SJSE$ para alguns valores de p , α , e λ .

4.2 Momentos e estatísticas de ordem

Os momentos das estatísticas de ordem desempenham um papel importante em testes de controle de qualidade e confiabilidade. Muitas vezes, é necessário prever a falha de itens futuros com base nos tempos de falhas passadas. Estes indicadores são, muitas vezes, baseados nos momentos de estatísticas de ordem.

Teorema 4.1 *Sejam T_1, T_2, \dots, T_n uma amostra aleatória da v.a. T_{min} que possui distribuição $SJSE(p, \alpha, \lambda)$ e $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n:n}$ as respectivas estatísticas de ordem. Então, a função*

densidade, $f_{k:n}(t)$, da k -ésima estatística de ordem $k = 1, \dots, n$, é dada por

$$f_{k:n}(t) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(p\alpha e^{-2\alpha t + \lambda - \lambda e^{-\alpha t}} \right) (-1 + \lambda e^{-\alpha t} - \lambda e^{-2\alpha t}(1-p)) \\ \times \frac{\left(\frac{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t} - pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda}}{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t}} \right)^k \left(\frac{pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda}}{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t}} \right)^{n-k}}{(1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t} - pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda})(-1 + (1-p)e^{-\alpha t})} I_{[0, \infty)}(t). \quad (4.7)$$

Prova 4.1.1 A função densidade, $f_{k:n}(t)$, da k -ésima estatística de ordem é dada por

$$f_{k:n}(t) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(t) (F_T(t))^{k-1} (S_T(t))^{n-k}, \quad (4.8)$$

sendo $F_T(\cdot)$ e $S_T(\cdot)$ as funções de distribuição de uma v.a. T , respectivamente. Utilizando, em (??), as expressões (??) e (??) temos

$$f_{k:n}(t) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(t) (F(t))^{k-1} (S(t))^{n-k} \\ = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{pe^{-2\alpha t + \lambda - \lambda e^{-\alpha t}} \alpha (-1 + \lambda e^{-\alpha t} - \lambda e^{-2\alpha t}(1-p))}{(-1 + (1-p)e^{-\alpha t})(1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t})} \right) \\ \times \left(\frac{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t} - pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda}}{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t}} \right)^{k-1} \left(\frac{pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda}}{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t}} \right)^{n-k} \\ = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(pe^{-2\alpha t + \lambda - \lambda e^{-\alpha t}} \alpha \right) (-1 + \lambda e^{-\alpha t} - \lambda e^{-2\alpha t}(1-p)) \\ \times \frac{\left(\frac{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t} - pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda}}{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t}} \right)^k \left(\frac{pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda}}{1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t}} \right)^{n-k}}{(1 - e^{-\alpha t} + pe^{-\alpha t} - pe^{-\alpha t - \lambda e^{-\alpha t} + \lambda})(-1 + (1-p)e^{-\alpha t})}.$$

■

4.3 Inferência

Existem vários métodos que podem ser utilizados para estimar os parâmetros de um modelo probabilístico. O método que utilizamos para estimar os parâmetros da distribuição da proposta é o de máxima verossimilhança.

Seja (T_1, \dots, T_n) uma amostra aleatória da v.a. $T_{min} \sim SJSE(p, \alpha, \lambda)$, com valores observados t_1, \dots, t_n . O logaritmo da função de verossimilhança, $l(\boldsymbol{\theta}) = \log(L(\boldsymbol{\theta}))$, associada a esta amostra é

$$l(\boldsymbol{\theta}) = n \log p - \alpha \sum_{i=1}^n t_i + \sum_{i=1}^n \log \left(\alpha + \frac{\alpha q e^{-\alpha t_i}}{1 - q e^{-\alpha t_i}} - \lambda \alpha e^{-\alpha t_i} \right) \\ - \sum_{i=1}^n (1 - q e^{-\alpha t_i}) - \lambda \sum_{i=1}^n e^{-\alpha t_i} + n\lambda, \quad (4.9)$$

em que $\theta = (p, \alpha, \lambda)$.

4.4 Estudo de simulação

Nesta seção um estudo de simulação foi realizado com o objetivo de avaliar o desempenho dos estimadores dos parâmetros da distribuição *SJSE* proposta neste capítulo. Foram geradas 5000 observações da distribuição *SJSE* para diferentes valores dos parâmetros p , α e λ considerando amostras de tamanho 30, 50, 100, 200 e 500. Para cada tamanho de amostra foram obtidas as estimativas médias das 5000 amostras geradas para cada um dos parâmetros do modelo considerado, as probabilidades de cobertura dos intervalos de confiança 0,95 construídos para cada parâmetro, bem como o vício médio e a média do erro quadrático médio. Os resultados obtidos estão na Tabela ??.

Para gerar m valores da distribuição *SJSE* utiliza-se o fato de que a função de sobrevivência do $\min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ é $(S_Y(y))^n$. Como a função quantil da variável aleatória N , com função densidade de probabilidade dada em (??), não tem forma explícita, utiliza-se o procedimento descrito a seguir para gerar amostras de tamanho m da distribuição *SJSE*.

Passo I:

a. Construa uma tabela da distribuição acumulada da variável aleatória discreta N , com função densidade (??).

b. Gere uma amostra aleatória de tamanho 1 de uma variável aleatória U uniforme no intervalo $[0, 1]$ denotada, por u . O valor gerado n_1 de uma amostra aleatória de tamanho 1 da variável aleatória discreta N é dado por

$$n_1 = \begin{cases} 1, & u_1 < F_N(1) \\ 2, & F_N(1) \leq u_1 < F_N(2) \\ \vdots & \\ j, & F_N(j-1) \leq u_1 < F_N(j) \end{cases}$$

c. Repita a etapa b. do Passo I m vezes, indicando os sucessivos valores da amostra de N por n_1, n_2, \dots, n_m .

Passo II:

a. Para cada $n_j, j = 1, \dots, m$, gere uma amostra de tamanho 1 de uma exponencial com parâmetro (αn_j) .

b. Repita o Passo II até conseguir o número de elementos desejados na amostra. Os valores gerados ao término do Passo II, correspondem aos valores gerados da distribuição *SJSE*.

Pela Tabela ?? podemos observar que o EQM diminui para todos os parâmetros do modelo ajustado à medida que se aumenta o tamanho da amostra. As probabilidades de cobertura para α e para p , respectivamente, estão melhores do que para λ .

Tabela 4.1: Valores fixados para os parâmetros, vício médio, média dos EQM e das EMV e estimativas da probabilidade de cobertura de intervalos de confiança Nominal em amostragem da distribuição *SJSE*, para diversos tamanhos amostrais.

Parâmetros			n	Vício Médio			EQM			EMV			PC		
p	α	λ		p	α	λ	p	α	λ	\hat{p}	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	p	α	λ
0.15	0.2	0.05	30	0.160	0.279	0.538	0.412	0.267	1.820	0.309	0.478	0.588	0.981	0.903	0.394
			50	0.063	0.115	0.435	0.041	0.062	0.845	0.213	0.315	0.485	0.959	0.890	0.413
			100	0.030	0.063	0.348	0.036	0.028	0.9772	0.180	0.263	0.397	0.949	0.900	0.491
			200	0.009	0.023	0.172	0.002	0.005	0.195	0.159	0.223	0.221	0.940	0.928	0.588
			500	0.010	0.024	0.169	0.002	0.005	0.226	0.160	0.224	0.219	0.945	0.926	0.564
0.15	0.9	0.05	30	0.122	1.042	0.587	0.145	4.408	1.449	0.272	1.942	0.637	0.628	0.873	0.295
			50	0.058	0.484	0.434	0.037	1.811	0.874	0.208	1.384	0.484	0.952	0.903	0.385
			100	0.045	0.330	0.302	0.015	0.551	0.542	0.195	0.123	0.352	0.981	0.809	0.463
			200	0.019	0.186	0.252	0.006	0.251	0.375	0.169	0.186	0.302	0.955	0.910	0.502
			500	0.009	0.099	0.166	0.002	0.096	0.187	0.159	0.999	0.216	0.942	0.932	0.538
0.15	2.0	0.05	30	0.117	2.241	0.578	0.152	8.908	2.050	0.267	4.241	0.628	0.933	0.887	0.322
			50	0.060	1.136	0.436	0.037	6.200	0.886	0.210	3.137	0.486	0.945	0.886	0.388
			100	0.031	0.703	0.333	0.013	4.313	0.599	0.181	2.703	0.383	0.957	0.899	0.464
			200	0.018	0.419	0.271	0.006	1.284	0.433	0.168	2.419	0.322	0.947	0.912	0.541
			500	0.010	0.228	0.162	0.002	0.497	0.201	0.160	2.228	0.212	0.946	0.929	0.538
0.15	0.2	0.5	30	0.723	0.135	0.211	0.047	0.112	0.943	0.223	0.335	0.711	0.966	0.922	0.257
			50	0.034	0.056	0.118	0.018	0.031	0.662	0.184	0.256	0.618	0.948	0.926	0.387
			100	0.019	0.032	0.070	0.008	0.014	0.480	0.169	0.232	0.570	0.962	0.937	0.496
			200	0.008	0.015	0.031	0.002	0.004	0.140	0.158	0.215	0.531	0.956	0.930	0.627
			500	0.003	0.006	0.003	0.001	0.003	0.204	0.153	0.206	0.503	0.955	0.940	0.838
0.15	0.9	0.5	30	0.075	0.140	0.213	0.047	0.110	0.921	0.225	0.340	0.713	0.964	0.920	0.258
			50	0.041	0.271	0.095	0.025	0.669	0.660	0.191	1.171 α	0.595	0.950	0.930	0.375
			100	0.020	0.142	0.062	0.009	0.293	0.482	0.170	1.042	0.562	0.958	0.932	0.503
			200	0.008	0.064	0.036	0.004	0.145	0.345	0.158	0.964	0.536	0.958	0.932	0.639
			500	0.003	0.024	0.003	0.001	0.063	0.204	0.153	0.924	0.503	0.952	0.935	0.832
0.15	2.0	0.5	30	0.073	1.340	0.208	0.047	10.615	0.968	0.223	3.340	0.708	0.963	0.924	0.269
			50	0.034	0.553	0.121	0.018	3.029	0.638	0.184	2.553	0.621	0.950	0.932	0.368
			100	0.016	0.262	0.064	0.008	1.384	0.478	0.166	2.262	0.564	0.958	0.930	0.494
			200	0.008	0.138	0.032	0.004	0.702	0.344	0.158	2.138	0.532	0.962	0.938	0.629
			500	0.002	0.046 α	0.001	0.001	0.308	0.205	0.152	2.045	0.501	0.957	0.940	0.835
0.2	0.2	0.5	30	0.058	0.098	0.215	0.049	0.068	0.950	0.258	0.298	0.715	0.957	0.938	0.268
			50	0.029	0.040	0.089	0.023	0.213	0.664	0.230	0.240	0.589	0.949	0.924	0.389
			100	0.017	0.021	0.048	0.012	0.010	0.476	0.217	0.221	0.548	0.960	0.935	0.490
			200	0.008	0.011	0.028	0.005	0.005	0.344	0.207	0.210	0.528	0.956	0.931	0.632
			500	0.002	0.004	0.003	0.002	0.002	0.203	0.202	0.204	0.503	0.962	0.932	0.835
0.2	0.9	0.5	30	0.054	0.429	0.206	0.050	1.405	1.010	0.254	1.329	0.706	0.958	0.939	0.252
			50	0.029	0.169	0.106	0.022	0.407	0.665	0.229	1.069	0.606	0.95	0.931	0.403
			100	0.020	0.109	0.042	0.013	0.221	0.492	0.220	1.009	0.542	0.965	0.922	0.499
			200	0.008	0.051	0.025	0.005	0.109	0.346	0.208	0.951	0.525	0.958	0.935	0.623
			500	0.003	0.018	0.002	0.002	0.049	0.204	0.203	0.918	0.498	0.963	0.936	0.844
0.2	2.0	0.5	30	0.047	0.846	0.239	0.044	6.510	0.884	0.247	2.847	0.739	0.959	0.945	0.269
			50	0.031	0.403	0.098	0.024	2.234	0.683	0.231	2.403	0.598	0.945	0.926	0.390
			100	0.021	0.238	0.051	0.013	1.082	0.478	0.221	2.238	0.551	0.947	0.926	0.488
			200	0.007	0.109	0.030	0.005	0.533	0.343	0.207	2.109	0.530	0.960	0.933	0.634
			500	0.003	0.048	0.008	0.002	0.240	0.203	0.203	2.048	0.508	0.959	0.932	0.838

Capítulo 5

Modelos de cópulas

Estamos interessados em generalizar para o caso bivariado o estudo feito nos Capítulos ?? e ?. Isto significa que desejamos determinar a distribuição conjunta de extremos (valores máximos ou mínimos) de cada uma das componentes de amostras aleatórias de tamanho aleatório N , de duas variáveis aleatórias X e Y independentes entre si.

Mais precisamente, consideraremos uma v.a N tomando valores no conjunto Z^{++} dos números inteiros estritamente positivos, e duas sequências $(X_j)_{j \in Z^{++}}$ e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ de variáveis aleatórias, satisfazendo as condições:

- N , $(X_j)_{j \in Z^{++}}$ e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ são independentes entre si,
- a sequência $(X_j)_{j \in Z^{++}}$ é constituída de variáveis aleatórias i.i.d. de uma v.a. X ,
- a sequência $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ é constituída de variáveis aleatórias i.i.d. de uma v.a. Y .

Nosso objetivo é determinar duas funções distribuições conjuntas: a de (T_1, T_2) , sendo $T_1 = \min(X_1, \dots, X_N)$ e $T_2 = \min(Y_1, \dots, Y_N)$ e a de (M_1, M_2) sendo $M_1 = \max(X_1, \dots, X_N)$ e $M_2 = \max(Y_1, \dots, Y_N)$ quando (X_1, \dots, X_N) e (Y_1, \dots, Y_N) são amostras aleatórias de tamanho N das variáveis aleatórias X e Y , respectivamente.

Vale lembrar que se o tamanho das amostras N for fixo, as variáveis aleatórias T_1 e T_2 são independentes, o mesmo ocorrendo com as variáveis aleatórias M_1 e M_2 . No entanto, se N for uma v.a., T_1 e T_2 não serão independentes, assim como M_1 e M_2 também não serão v.a.

independentes. Uma prova desta afirmação é dada abaixo:

$$\begin{aligned}
 P(T_1 > a, T_2 > b) &= \sum_N P(T_1 > a|N = n)P(T_2 > b|N = n)P(N = n) \\
 &\neq \underbrace{\left[\sum_N (P(T_1 > a|N = n)P(N = n)) \right]}_{P(T_1 > a)} \underbrace{\left[\sum_N (P(T_2 > b|N = n)P(N = n)) \right]}_{P(T_2 > b)}.
 \end{aligned}$$

A função de sobrevivência conjunta de (T_1, T_2) é obtida compondo-se a função geradora da variável aleatória N com o produto das funções de sobrevivência marginais de X e de Y . Analogamente, compondo-se a função geradora de N com o produto das funções distribuições marginais de X e Y obtivemos a função distribuição de (M_1, M_2) .

Após a obtenção destas duas distribuições completamos o trabalho determinando as cópulas correspondentes as distribuições de (T_1, T_2) e de (M_1, M_2) . Vale lembrar que as cópulas obtidas não constam na literatura. Por fim, apresentamos na Seção ?? uma breve introdução sobre cópulas. Na Seção ??, apresentamos a generalização da distribuição Poisson-Weibull para o caso bivariado e obtemos um modelo de cópula associada ao par de variáveis (T_1, T_2) . Na Seção ??, determinamos a cópula correspondente a (M_1, M_2) . Por fim, na Seção ?? propomos um procedimento para gerar valores de (M_1, M_2) a partir de seu modelo de cópula.

5.1 Teoria básica de cópulas

Nesta seção são apresentados alguns conceitos básicos para o entendimento da teoria de cópulas.

Definição 5.1 *Uma função C , com domínio em $[0, 1]^2$ e contradomínio em $[0, 1]$, é uma cópula bivariada se satisfizer as seguintes propriedades:*

1. $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$, para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$;
2. $C(u, 0) = C(0, v) = 0$ para todo $u, v \in [0, 1]$;
3. $C(u, 1) = u$ e $C(1, v) = v$, para todo $u, v \in [0, 1]$.

A ligação entre funções de distribuição bivariada e suas marginais univariadas é dada pelo Teorema ??. O nome *cópula* foi escolhido para enfatizar a maneira como a cópula une uma função distribuição conjunta às suas marginais univariadas. A prova deste teorema se encontra em ?) e ?).

Teorema 5.1 (*Teorema Sklar*): Seja (X, Y) o vetor aleatório com função de distribuição conjunta $H(\cdot)$ e funções distribuições marginais $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$, respectivamente. Então existe uma cópula $C(\cdot)$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (5.1)$$

Se $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ são contínuas, então $C(\cdot)$ é única; caso contrário, $C(\cdot)$ é unicamente determinada no conjunto $Im(F) \times Im(G)$. Reciprocamente, se $C(\cdot)$ é uma cópula e $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ são funções de distribuição, então a função $H(\cdot)$ definida pela equação (5.1) é uma função distribuição conjunta com marginais $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$.

Definição 5.2 Seja F uma função distribuição. Então a inversa generalizada de F é qualquer função $F^{(-1)}$ com domínio em \mathbf{I} tal que

1. Se $t \in Im(F)$, então $F^{(-1)}(t) = x$ com $x \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = t$, ou seja, $\forall t \in Im(F)$,

$$F(F^{(-1)}(t)) = t;$$

2. Se $t \notin Im(F)$, então

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\} = \sup\{x | F(x) \leq t\}.$$

O seguinte corolário mostra que podemos extrair uma cópula de qualquer distribuição bivariada e usá-la independentemente das distribuições marginais originais.

Corolário 5.1 Seja $H(\cdot)$ uma função distribuição conjunta com marginais contínuas $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ e uma cópula $C(\cdot)$ satisfazendo a identidade definida em (5.1). Então para qualquer $(u, v) \in Domínio C$,

$$C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)), \quad (5.2)$$

sendo $F^{(-1)}$ e $G^{(-1)}$ as inversas generalizadas de $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$, respectivamente.

Como $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$ são funções contínuas então $U = F(X) \sim \mathcal{U}(0, 1)$ e $V = G(Y) \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Deste modo, pelo Corolário 5.1, uma cópula bivariada $C(\cdot)$ é uma função de distribuição conjunta do vetor aleatório (U, V) com marginais $\mathcal{U}(0, 1)$, isto é, $C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v)$, para todo u, v no intervalo $[0, 1]$ tal que $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, e $V \sim \mathcal{U}(0, 1)$

5.1.1 Cópulas arquimedianas

Entre as diferentes famílias de cópulas, uma classe especial é a classe de cópulas de arquimedianas. Esta classe é muito utilizada na prática e abrange uma grande variedade de estruturas de dependência.

Definição 5.3 *Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ uma função contínua e estritamente decrescente tal que $\varphi(1) = 0$. A pseudo-inversa de φ é a função $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \text{se } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Note que $\varphi^{[-1]}$ é contínua e não crescente em $[0, \infty]$, e estritamente decrescente em $[0, \varphi(0)]$. Além disso, $\varphi^{[-1]}(\varphi(t)) = t$, $\forall t \in [0, 1]$ e $\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \min(t, \varphi(0))$. Finalmente, se $\varphi(0) = \infty$, então $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Teorema 5.2 *Seja a função $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad (5.3)$$

sendo φ e $\varphi^{[-1]}$ como na Definição ???. Então C é uma cópula se e somente se φ é uma função convexa.

Note que φ é uma função convexa se e somente se φ^{-1} é uma função convexa.

As cópulas obtidas por (??) são denominadas cópulas arquimedianas e a função $\varphi(\cdot)$ é denominada gerador da cópula arquimediana. Se $\varphi(0) = \infty$, dizemos que φ é um gerador estrito. Se $\varphi(0) < \infty$, dizemos que φ é um gerador não estrito.

Se $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, a cópula $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ é denominada cópula Arquimediana estrita.

Se $C(u, v)$ é uma cópula Arquimediana bivariada com gerador $\varphi(\cdot)$, então $C(\cdot)$ possui as seguintes propriedades

1. $C(\cdot)$ é simétrica, isto é, $C(u, v) = C(v, u)$ para todo $u, v \in [0, 1]$;
2. $C(\cdot)$ é associativa, isto é, $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para todo $u, v, w \in [0, 1]$;
3. Sendo $\varphi(\cdot)$ o gerador de $C(\cdot)$, e $a > 0$ uma constante então $a\varphi(\cdot)$ também é gerador de $C(\cdot)$.

Uma maneira de obter um gerador $\varphi(\cdot)$ de uma cópula Arquimediana é utilizar a transformada de Laplace de uma v.a. positiva pois, neste caso, $\varphi(t) = \psi^{-1}(t)$.

5.1.2 Medidas de associação

A dependência entre as variáveis aleatórias é totalmente definida pela função de distribuição conjunta dessas variáveis, ou seja, todo o conhecimento da dependência entre as variáveis está encerrado nesta função.

As medidas de dependência são instrumentos que quantificam essa associação. A seguir são apresentadas as seguintes medidas de dependência: o τ de Kendall, o ρ de Spearman e os coeficientes de dependência caudal superior e inferior.

Medida de associação de Kendall

O próximo resultado estabelece uma ligação entre a medida τ de Kendall para duas variáveis aleatórias X e Y , denotado por $\tau(X, Y)$ ou τ , e a cópula $C(\cdot)$ associada a estas variáveis.

Teorema 5.3 *Seja (X, Y) um vetor de variáveis aleatórias contínuas com cópula $C(\cdot)$. A medida de associação de Kendall para X, Y , denotado por $\tau(X, Y)$ ou τ_C , é dado por*

$$\tau(X, Y) = \tau_C = Q(C, C) = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1, \quad (5.4)$$

sendo $dC(u, v) = (\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v})(u, v) du dv$ quando $C(\cdot)$ é absolutamente contínua. Note que a integral que aparece em (??) pode ser interpretada como a esperança da função $C(U, V)$ de variáveis aleatórias U e V uniformes no intervalo $[0, 1]$ cuja função de distribuição conjunta é $C(\cdot)$, ou seja, $\tau_C = 4\mathbb{E}(C(U, V)) - 1$

Medida de associação de Spearman

O próximo resultado estabelece uma ligação entre a medida de associação ρ de Spearman para o vetor aleatório (X, Y) , denotado por $\rho(X, Y)$, e a cópula $C(\cdot)$ associada a estas variáveis.

Teorema 5.4 *Seja (X, Y) um vetor aleatório de variáveis aleatórias contínuas com cópula $C(\cdot)$. Então o coeficiente populacional de Spearman para (X, Y) , denotado por $\rho(X, Y)$ ou ρ_C , é dado por*

$$\rho(X, Y) = \rho_C = 3Q(C, \Pi) = 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 \iint_{I^2} C(u, v) du dv - 3 \quad (5.5)$$

sendo $\Pi = uv$ a cópula de independência e $dC(u, v) = (\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v})(u, v) du dv$ quando $C(\cdot)$ é absolutamente contínua.

A medida de associação de Spearman $\rho(X, Y)$ para pares de variáveis aleatórias contínuas X e Y , é o coeficiente de correlação linear entre as variáveis aleatórias $U = F(X)$ e $V = G(Y)$ sendo U e V variáveis aleatórias uniformes no intervalo $[0, 1]$ pois

$$\rho(X, Y) = \rho_C = 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3 = 12\mathbb{E}(UV) - 3 = \frac{\mathbb{E}(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{\mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}}.$$

Após alguns cálculos obtemos que $\rho(X, Y) = 12 \iint_{I^2} [C(u, v) - uv] dudv$.

5.1.3 Coeficientes de dependência caudal

Nesta seção, os coeficientes de dependência caudal superior e inferior são expressos em termos de uma cópula $C(\cdot)$ associada ao vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas.

Teorema 5.5 *Considere X e Y variáveis aleatórias contínuas com funções de distribuição $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$, respectivamente, e seja $C(\cdot)$ a cópula do vetor (X, Y) . O coeficiente de dependência caudal superior é*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t},$$

e o coeficiente de dependência caudal inferior é

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t}.$$

5.2 Cópula associada ao vetor (T_1, T_2)

Nesta seção obtemos um modelo de cópula referente às v.a's T_1 e T_1 . Se $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}^{++}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, conforme especificado no início deste capítulo, e N é uma v.a. com distribuição de Poisson truncada em zero, a função de sobrevivência de $T_1 = \min(X_1, \dots, X_N)$, denotada por $S_{T_1}(t_1)$, pode ser obtida compondo-se a função geradora de probabilidades de N , dada por $G_N(t) = \frac{e^{\lambda t} - 1}{e^\lambda - 1}$, $\lambda > 0$ com a função de sobrevivência de X , denotada por $S_X(\cdot)$, de acordo com (??).

Se N , $(X_j)_{j \in \mathbb{Z}^{++}}$ e $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}^{++}}$ satisfazem as condições colocadas no início deste capítulo então a função de sobrevivência conjunta do vetor (T_1, T_2) , denotada por $S_{T_1, T_2}(t_1, t_2)$, é obtida

compondo-se a função geradora de probabilidades de N com a função de sobrevivência conjunta de X e Y , isto é,

$$S_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = \frac{e^{\lambda(S_X(t_1)S_Y(t_2))} - 1}{e^\lambda - 1}. \quad (5.6)$$

Assumindo que $X \sim W(\beta, \gamma)$ e $Y \sim W(\beta, \gamma)$, $\beta, \gamma > 0$ a função de sobrevivência conjunta do vetor (T_1, T_2) é

$$S_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = \frac{e^{\lambda(e^{-(\beta t_1)^\gamma} e^{-(\beta t_2)^\gamma})} - 1}{e^\lambda - 1}. \quad (5.7)$$

Uma relação que existe entre uma função distribuição bivariada e a respectiva função de sobrevivência é dada por:

$$F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = S_{T_1, T_2}(t_1, t_2) + 1 - S_{T_1}(t_1) - S_{T_2}(t_2).$$

Em consequência, a função de distribuição de (T_1, T_2) é

$$F_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = \frac{e^{\lambda(e^{-(\beta t_1)^\gamma} e^{-(\beta t_2)^\gamma})} - 1}{e^\lambda - 1} + 1 - \frac{e^{\lambda(e^{-(\beta t_1)^\gamma})} - 1}{e^\lambda - 1} - \frac{e^{\lambda(e^{-(\beta t_2)^\gamma})} - 1}{e^\lambda - 1}. \quad (5.8)$$

O q -ésimo quantil de T_i , $i = 1, 2$, já obtido em (??) é apresentado em (??)

$$Q_{T_i}(q) = \frac{(\log(\lambda) - \log(\log(e^\lambda(1-q) + q)))^{1/\gamma}}{\beta} I_{[0,1]}(q), \quad (5.9)$$

Pelo Teorema ??, substituindo, respectivamente, t_1 e t_2 em (??) pelos quantis $Q(u)$ e $Q(v)$, dados em (??) obtemos a cópula, que passamos a denominar de cópula de Poisson,

$$C_{T_1, T_2}(u, v) = \frac{(e^\lambda - v e^\lambda + v)^{\frac{\ln(e^\lambda - u e^\lambda + u)}{\lambda}} - 1}{e^\lambda - 1} + u + v - 1, \quad \lambda > 0, 0 \leq u, v \leq 1. \quad (5.10)$$

Os gráficos da cópula de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$ estão apresentados na Figura ??.

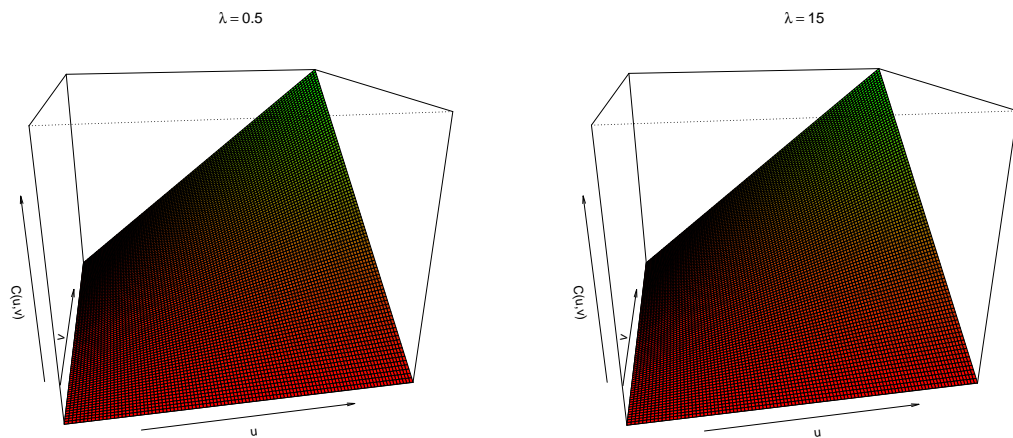


Figura 5.1: Cópula de Poisson para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$.

O gráfico das curvas de níveis da cópula de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$ está apresentado na Figura ??.

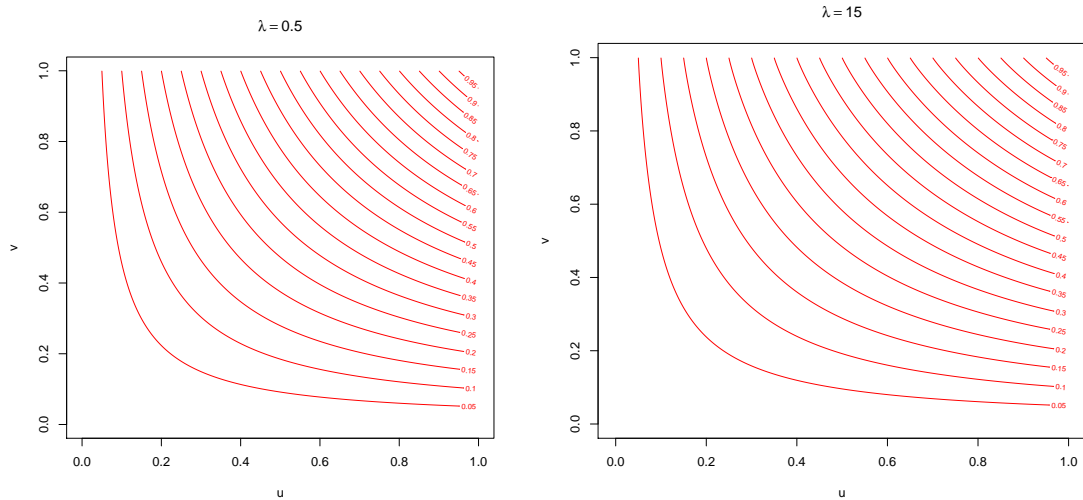


Figura 5.2: Curvas de níveis da cópula de Poisson para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$.

Podemos observar pelas Figuras ?? e ?? que o comportamento da cópula de Poisson (??) segue o mesmo padrão para diferentes valores do parâmetro.

Na Figura ?? está apresentada a função densidade da cópula de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$.

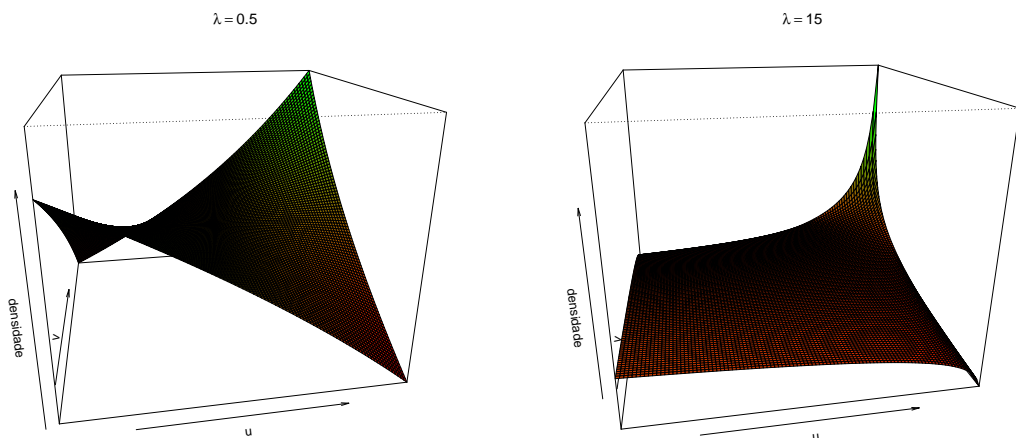


Figura 5.3: Função densidade da cópula de Poisson para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$.

O comportamento da função densidade da cópula de Poisson (??) se altera quando variamos os valores do parâmetro. Podemos observar que para $\lambda = 0,5$ as regiões próximas

aos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ apresentam maior concentração enquanto que para $\lambda = 15$ isto ocorre próximo ao ponto $(1, 1)$.

5.3 Cópula associada ao vetor (M_1, M_2)

Nesta seção obtemos um modelo de cópula referente às v.a's M_1 e M_2 . Se N , $(X_j)_{j \in Z^{++}}$ e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ satisfazem as condições já estabelecidas no início deste capítulo então a função distribuição conjunta do vetor (M_1, M_2) , denotada por $F_{M_1, M_2}(t_1, t_2)$, é obtida compondo-se a função geradora de probabilidades de N com a função distribuição conjunta de X e Y , isto é,

$$F_{M_1, M_2}(t_1, t_2) = \frac{e^{\lambda(F_X(t_1)F_Y(t_2))} - 1}{e^\lambda - 1}. \quad (5.11)$$

Assumindo que $X \sim W(\beta, \gamma)$ e $Y \sim W(\beta, \gamma)$, $\beta, \gamma > 0$ a função distribuição conjunta do vetor (M_1, M_2) é

$$F_{M_1, M_2}(t_1, t_2) = \frac{(e^{\lambda(1-e^{-(\beta t_1)^\gamma})(1-e^{-(\beta t_2)^\gamma})}) - 1}{e^\lambda - 1}. \quad (5.12)$$

O q -ésimo quartil de M_i , $i = 1, 2$, é apresentado em (??).

$$Q_{M_i}(q) = \frac{(\log(\lambda) - \log(\lambda - \log(e^\lambda q - q + 1)))^{1/\gamma}}{\beta} I_{[0,1]}(q), \quad (5.13)$$

Pelo Teorema ??, substituindo, respectivamente, t_1 e t_2 de (??) pelos quantis $Q(u)$ e $Q(v)$, dados em ?? obtemos uma outra cópula, que passamos a denominar Cópula arquimediana de Poisson,

$$C_{M_1, M_2}(u, v) = \frac{(1+(e^\lambda-1)v)^{\frac{\log(1+(e^\lambda-1)u)}{\lambda}} - 1}{e^\lambda - 1}, \quad \lambda > 0, \quad 0 \leq u, v \leq 1. \quad (5.14)$$

Esta é uma cópula arquimediana, pois (??) pode ser obtida por (??) considerando o gerador

$$\varphi(t) = -\log\left(\frac{\log(1+t(e^\lambda-1))}{\lambda}\right). \quad (5.15)$$

cujas inversa é

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{e^{\lambda e^{-t}} - 1}{e^\lambda - 1} = G_N(e^{-t}). \quad (5.16)$$

Teorema 5.6 *As cópulas $C_{T_1, T_2}(u, v)$ e $C_{M_1, M_2}(u, v)$ satisfazem as seguintes relações:*

$$C_{M_1, M_2}(u, v) = u + v - 1 + C_{T_1, T_2}(1 - u, 1 - v)$$

e

$$C_{T_1, T_2}(u, v) = u + v - 1 + C_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v)$$

Prova:

Para provar a primeira relação lembramos que $C_{T_1, T_2}(u, v)$ é dado por

$$C_{T_1, T_2}(u, v) = \frac{(e^\lambda - ve^\lambda + v)^{\frac{\ln(e^\lambda - ue^\lambda + u)}{\lambda}} - 1}{e^\lambda - 1} + u + v - 1, \quad \lambda > 0, 0 \leq u, v \leq 1.$$

Calculando o valor de $C_{T_1, T_2}(1 - u, 1 - v)$, temos:

$$\begin{aligned} C_{T_1, T_2}(1 - u, 1 - v) &= \frac{(ue^\lambda + 1 - u)^{\frac{\ln(ve^\lambda + 1 - v)}{\lambda}} - 2 - ue^\lambda + u + e^\lambda + ve^\lambda - v}{e^\lambda - 1} \\ &= \frac{(ue^\lambda + 1 - u)^{\frac{\ln(ve^\lambda + 1 - v)}{\lambda}} - 1 - u(e^\lambda - 1) + (e^\lambda - 1) - v(e^\lambda - 1)}{e^\lambda - 1} \\ &= \frac{(ue^\lambda + 1 - u)^{\frac{\ln(ve^\lambda + 1 - v)}{\lambda}} - 1}{e^\lambda - 1} - u + 1 - v. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Portanto, fica demonstrado que vale a igualdade

$$C_{M_1, M_2}(u, v) = u + v - 1 + C_{T_1, T_2}(1 - u, 1 - v)$$

Para provar a segunda igualdade, façamos $u^* = 1 - u$ e $v^* = 1 - v$ na primeira igualdade. Como $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 1$, então $0 \leq u^* \leq 1$ e $0 \leq v^* \leq 1$. Obtém-se então com esta substituição

$$\begin{aligned} C_{M_1, M_2}(u, v) &= u + v - 1 + C_{T_1, T_2}(1 - u, 1 - v) \\ C_{M_1, M_2}(1 - u^*, 1 - v^*) &= (1 - u^*) + (1 - v^*) - 1 + C_{T_1, T_2}(1 - (1 - u^*), 1 - (1 - v^*)) \\ C_{M_1, M_2}(1 - u^*, 1 - v^*) &= -u^* - v^* + 1 + C_{T_1, T_2}(u^*, v^*) \\ C_{T_1, T_2}(u^*, v^*) &= C_{M_1, M_2}(1 - u^*, 1 - v^*) + u^* + v^* - 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Portanto, fica demonstrado que vale a igualdade

$$C_{T_1, T_2}(u, v) = u + v - 1 + C_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v)$$

Na literatura de cópulas, $C_{T_1, T_2}(u, v)$ é chamada de cópula de sobrevivência de $C_{M_1, M_2}(u, v)$ e, também, $C_{M_1, M_2}(u, v)$ é chamada de cópula de sobrevivência de $C_{T_1, T_2}(u, v)$. O gráfico da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$ estão apresentads na Figura ??.

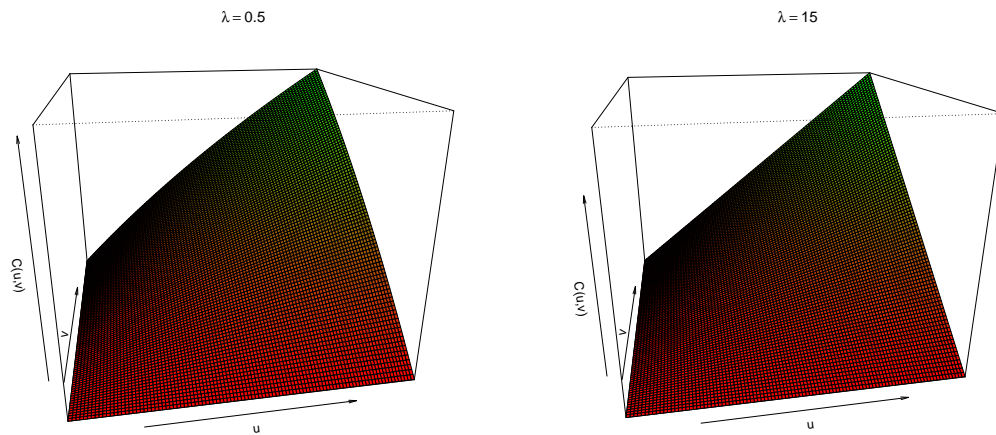


Figura 5.4: Cópula arquimediana de Poisson para $\lambda = 0, 5$ e $\lambda = 15$.

O gráfico das curvas de níveis da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0, 5$ e $\lambda = 15$ está apresentado na Figura ??.

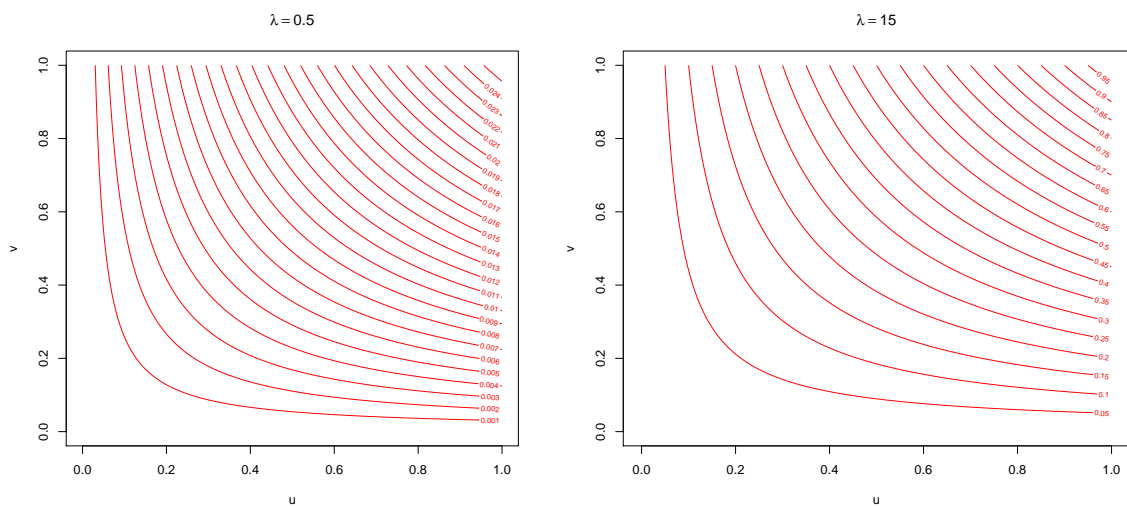


Figura 5.5: Curvas de níveis da cópula arquimediana de Poisson para $\lambda = 0, 5$ e $\lambda = 15$.

Podemos observar pelas Figuras ?? e ?? que o comportamento da cópula arquimediana de Poisson (??) segue o mesmo padrão para diferentes valores do parâmetro.

Na Figura ?? está apresentada a função densidade da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0, 5$ e $\lambda = 15$.

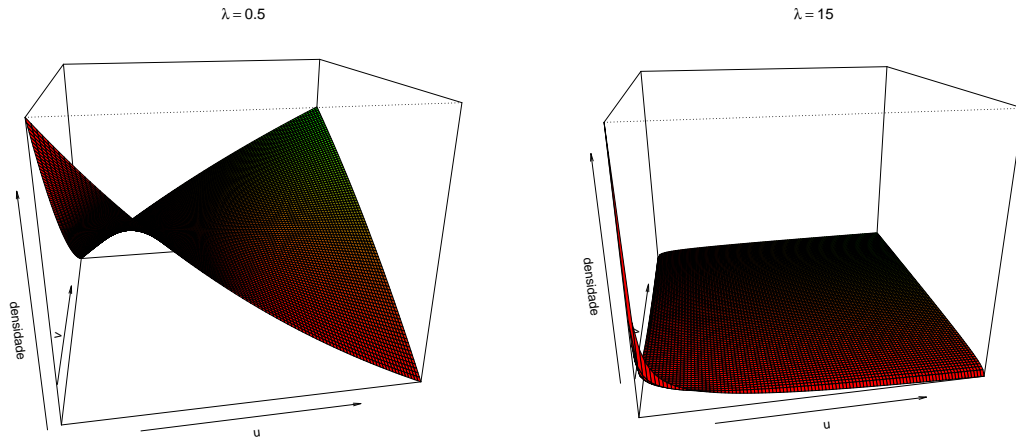


Figura 5.6: Densidade da cópula arquimediana de Poisson para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$.

O comportamento da função densidade da cópula arquimediana de Poisson (??) se altera quando variamos os valores do parâmetro. Pela Figura ?? observamos que para $\lambda = 0,5$ as regiões próximas aos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ apresentam maior concentração, enquanto que para $\lambda = 15$ isto ocorre próximo ao ponto $(0,0)$.

5.4 Medidas de associação para (T_1, T_2) e (M_1, M_2)

Os coeficientes de dependencia caudal superior e inferior para (T_1, T_1) e para (M_1, M_1) expressos em termos das cópulas correspondentes são nulos. As medidas de associação τ de Kendall e ρ de Spearman associadas tanto a cópula (??) quanto a cópula (??) não têm forma fechada.

A medida de associação τ de Kendall associada tanto a cópula (??) quanto a cópula (??) apresentam os mesmos valores e isto também ocorre para o ρ de Spearman. A razão deste fato está provada a seguir.

5.4.1 Relação entre ρ da cópula (T_1, T_2) e ρ da cópula (M_1, M_2)

Pelo Teorema ?? temos que

$$C_{T_1, T_2}(u, v) = u + v - 1 + C_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v)$$

Derivando ambos os lados da igualdade anterior em relação a u e a v obtemos

$$\frac{\partial^2 C_{T_1, T_2}(u, v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 C_{M_1, M_2}(1-u, 1-v)}{\partial u \partial v},$$

que corresponde a

$$f_{T_1, T_2}(u, v) = f_{M_1, M_2}(1-u, 1-v) \quad (5.19)$$

De (??) temos que $\rho(T_1, T_2)$ é dado por

$$\begin{aligned} \rho(T_1, T_2) &= 12 \iint_{I^2} uv \frac{\partial^2 C_{T_1, T_2}(u, v)}{\partial u \partial v} dudv - 3 \\ &= 12 \iint_{I^2} uv f_{T_1, T_2}(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \iint_{I^2} uv f_{M_1, M_2}(1-u, 1-v) dudv - 3 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Substituindo $u' = 1-u$ e $v' = 1-v$ em (??) temos

$$\begin{aligned} \rho(T_1, T_2) &= 12 \iint_{I^2} (1-u')(1-v') f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' - 3 \\ \frac{\rho(T_1, T_2) + 3}{12} &= \iint_{I^2} f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' - \iint_{I^2} v' f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' \\ &\quad - \iint_{I^2} u' f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' + \iint_{I^2} u' v' f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' \\ &= 1 - E(U) - E(V) + \iint_{I^2} u' v' f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' \\ &= \iint_{I^2} u' v' f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv'. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho(T_1, T_2) = 12 \iint_{I^2} (u')(v') f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' - 3 = \rho(M_1, M_2) \quad (5.21)$$

5.4.2 Relação entre τ da cópula (T_1, T_2) e τ da cópula (M_1, M_2)

Provaremos agora o fato relativo ao coeficiente tau (τ) de Kendall. Usando (??) temos que

$$\begin{aligned} \tau(T_1, T_2) &= 4 \iint_{I^2} C_{T_1, T_2}(u, v) \frac{\partial^2 C_{T_1, T_2}(u, v)}{\partial u \partial v} dudv - 1 \\ &= 4 \iint_{I^2} C_{T_1, T_2}(u, v) f_{M_1, M_2}(1-u, 1-v) dudv - 1 \end{aligned}$$

Pelo Teorema ??,

$$\begin{aligned}
\frac{\tau(T_1, T_2) + 1}{4} &= \iint_{I^2} (u + v - 1 + C_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v)) f_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v) dudv \\
&= \iint_{I^2} u f_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v) dudv + \iint_{I^2} v f_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v) dudv \\
&\quad - \iint_{I^2} f_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v) dudv + \iint_{I^2} f_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v) C_{M_1, M_2}(1 - u, 1 - v) dudv
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Substituindo $u' = 1 - u$ e $v' = 1 - v$ em (??) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\tau(T_1, T_2) + 1}{4} &= - \iint_{I^2} u' f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' + \iint_{I^2} f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' \\
&\quad - \iint_{I^2} v' f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' + \iint_{I^2} C_{M_1, M_2}(u', v') f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' \\
&= -E(U') - E(V') + 1 + \iint_{I^2} C_{M_1, M_2}(u', v') f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' \\
&= \iint_{I^2} C_{M_1, M_2}(u', v') f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv'
\end{aligned}$$

Portanto fica provado que

$$\tau(T_1, T_2) = 4 \iint_{I^2} C_{M_1, M_2}(u', v') f_{M_1, M_2}(u', v') du' dv' - 1 = \tau(M_1, M_2) \tag{5.23}$$

Os valores desses coeficientes para as cópulas (??) e (??) estão representados na Figura (??) para alguns valores do parâmetro.

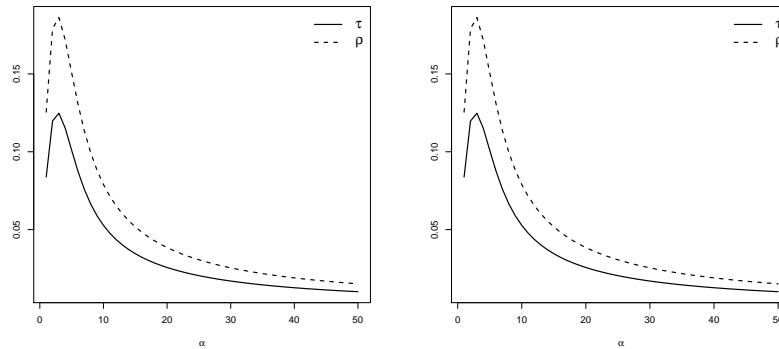


Figura 5.7: Medidas de dependência para as cópulas (??) e (??).

5.4.3 Relação entre λ_U e λ_L para a cópula (T_1, T_2)

Provaremos a relação entre os coeficientes λ_U e λ_L para a cópula (T_1, T_2) .

$$\begin{aligned}
 \lambda_L^{C_{min}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{min}(t, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + t - 1 + C_{max}(1 - t, 1 - t)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - C_{max}(1 - t, 1 - t)}{t} \\
 &= 2 - \lim_{t' \rightarrow 1^-} \frac{1 - C_{max}(t', t')}{1 - t'} = \lambda_U^{C_{max}}.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Portanto fica provado que $\lambda_L^{C_{min}} = \lambda_U^{C_{max}}$.

5.4.4 Relação entre λ_U e λ_L para a cópula (M_1, M_2)

Provaremos agora a relação entre os coeficientes λ_U e λ_L para a cópula (M_1, M_2) .

$$\begin{aligned}
 \lambda_L^{C_{max}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{max}(t, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + t - 1 + C_{min}(1 - t, 1 - t)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - C_{min}(1 - t, 1 - t)}{t} \\
 &= 2 - \lim_{t' \rightarrow 1^-} \frac{1 - C_{min}(t', t')}{1 - t'} = \lambda_U^{C_{min}}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Portanto fica provado que $\lambda_L^{C_{max}} = \lambda_U^{C_{min}}$.

5.5 Um procedimento para gerar amostras a partir da cópula bivariada para a distribuição de (M_1, M_2)

Um procedimento simples de geração de uma amostra aleatória de tamanho k de valores da cópula considerada é sugerido da seguinte forma. Sejam U e V variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Inicialmente, um valor aleatório de N , denotado por n , é selecionado a partir de uma distribuição de Poisson truncada em zero. Na segunda etapa, uma amostra aleatória (u_1, \dots, u_n) de tamanho n de U é gerada. Na terceira etapa, outra amostra (v_1, \dots, v_n) de tamanho n da variável aleatória V é gerada de forma independente. Na quarta etapa, os valores $m_1 = \max(u_1, \dots, u_n)$ e $m_2 = \max(v_1, \dots, v_n)$ são obtidos. Na quinta etapa, obtemos um valor gerado da cópula $C_{M_1, M_2}(u, v)$, através da transformação do par (m_1, m_2) em $(F_{M_1}(m_1), F_{M_2}(m_2))$ sendo $F_{M_i}(m_i) = G_N(m_i), i = 1, 2$. O procedimento é repetido até que a amostra de tamanho k pretendida seja obtida. Embora simples como é, esse procedimento também pode ser usado para obter amostras de valores das

cópuas arquimedianas de Frank e Ali-Mikhail-Haq ?), considerando para N a distribuição log de séries e a distribuição geométrica, respectivamente, como as duas cópuas citadas são cópuas bivariadas de extremos máximos. Pelo nosso conhecimento, tal procedimento não é observado na literatura de cópuas.

5.5.1 Amostras aleatórias geradas partir da cópuas bivariada C_{M_1, M_2}

A partir do procedimento apresentado na Seção ?? geramos 500 e 2000 valores da cópuas arquimediana de Poisson para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$. Construímos os histogramas das distribuições marginas dos valores gerados da cópuas arquimediana de Poisson e o gráfico de dispersão dos 500 e 2000 valores gerados da cópuas arquimediana de Poisson.

Na Figura ?? estão apresentados os gráficos de dispersão dos 500 valores gerados da cópuas arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e para $\lambda = 15$.

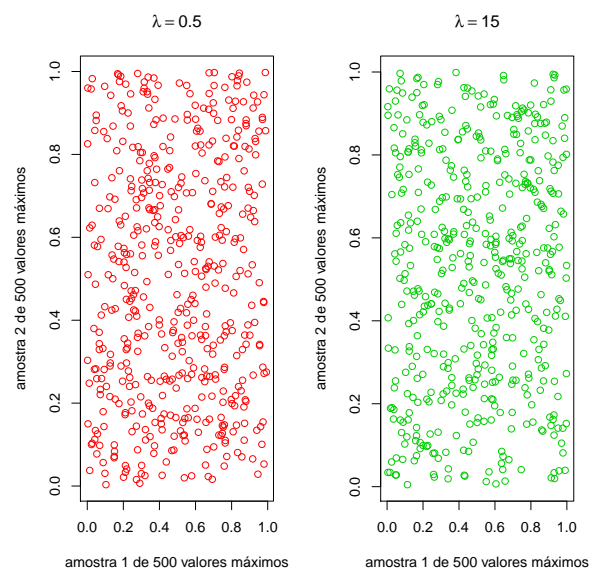


Figura 5.8: Gráficos de dispersão dos 500 valores gerados da cópuas arquimediana de Poisson.

O comportamento do gráfico de dispersão dos valores gerados segue o mesmo padrão tanto para $\lambda = 0,5$ quanto para $\lambda = 15$, não apresentando dependência caudal.

Na Figura ?? estão apresentados os histogramas dos 500 valores gerados da cópuas arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e para $\lambda = 15$.

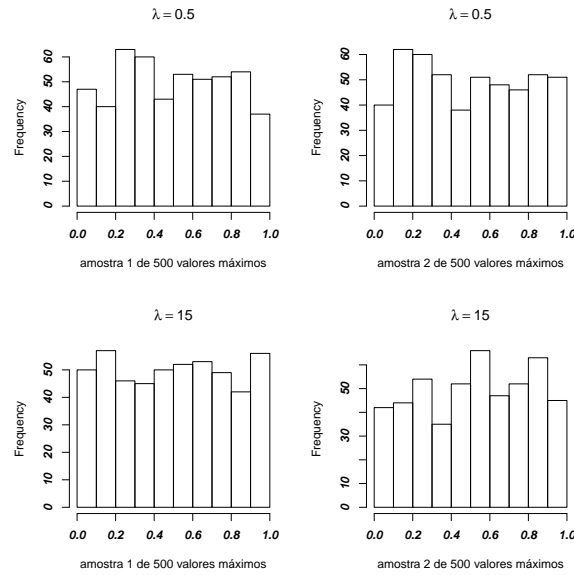


Figura 5.9: Histogramas das distribuições marginais dos valores gerados da cópula arquimediana de Poisson.

O comportamento das distribuições marginais da cópula segue o padrão uniforme tanto para $\lambda = 0,5$ quanto para $\lambda = 15$, como era esperado.

Na Figura ?? estão apresentados os gráficos de dispersão dos 2000 valores gerados da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e para $\lambda = 15$.

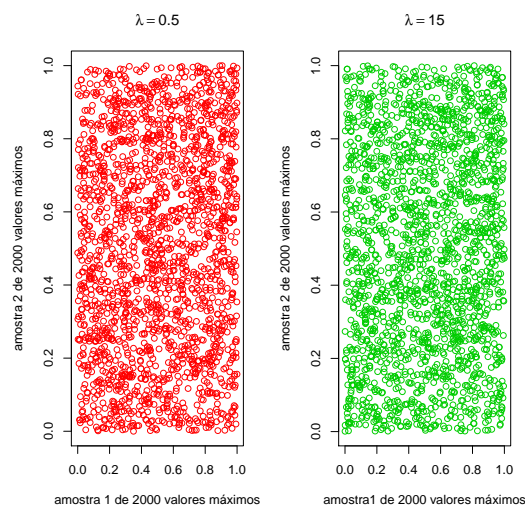


Figura 5.10: Gráficos de dispersão dos 2000 valores gerados da cópula arquimediana de Poisson.

O comportamento do gráfico de dispersão de valores gerados para ambas as amostras segue o mesmo padrão tanto para $\lambda = 0,5$ quanto para $\lambda = 15$, não apresentando dependência

caudal.

Na Figura ?? estão apresentados os histogramas dos 2000 valores gerados da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e para $\lambda = 15$.

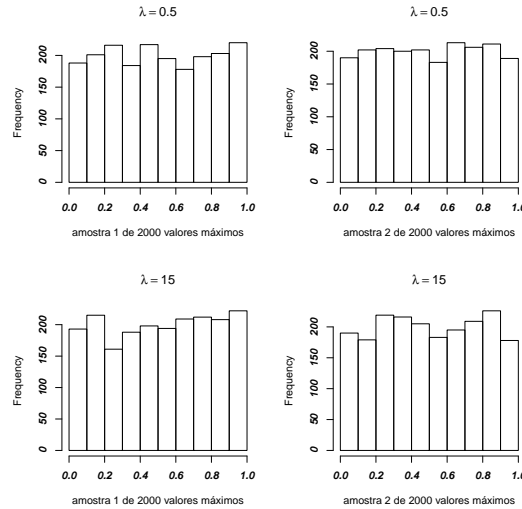


Figura 5.11: Histogramas das distribuições marginais dos valores gerados da cópula arquimediana de Poisson.

O comportamento das distribuições marginais da cópula segue o padrão uniforme tanto para $\lambda = 0,5$ quanto para $\lambda = 15$ como era de se esperar.

5.5.2 Amostras aleatórias geradas partir da cópula bivariada C_{T_1, T_2}

Para obtemos um valor gerado da cópula $C_{T_1, T_2}(u, v)$ devemos executar as mesmas etapas apresentadas na Seção ?? exceto a quarta e a quinta etapas. Na quarta etapa, devemos obter os valores $t_1 = \min(u_1, \dots, u_n)$ e $t_2 = \min(v_1, \dots, v_n)$. Na quinta etapa, obtemos um valor gerado da cópula $C_{T_1, T_2}(u, v)$, através da transformação do par (t_1, t_2) em $(F_{T_1}(t_1), F_{T_2}(t_2))$ sendo $F_{T_i}(t_i) = 1 - G_N(1 - t_i)$, $i = 1, 2$.

Utilizando o procedimento apresentado geramos 500 e 2000 valores da cópula de Poisson para $\lambda = 0,5$ e $\lambda = 15$. Construímos os histogramas das distribuições marginais dos valores gerados da cópula de Poisson e o gráfico de dispersão dos 500 e 2000 valores gerados da cópula de Poisson.

Na Figura ?? estão apresentados os gráficos de dispersão dos 500 valores gerados da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e para $\lambda = 15$.

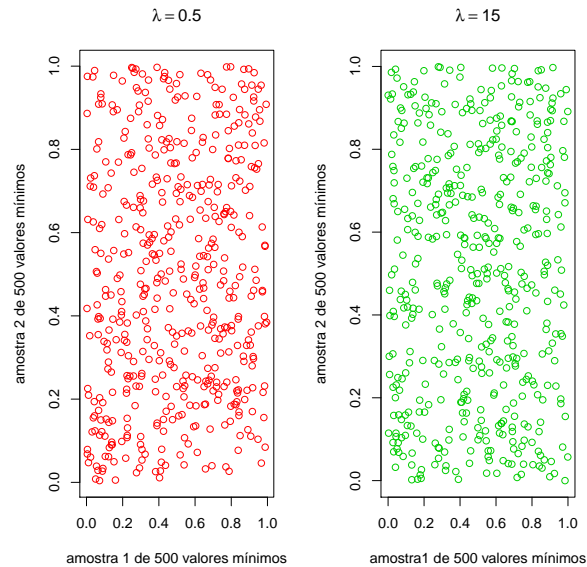


Figura 5.12: Gráficos de dispersão dos 500 valores gerados da cópula de Poisson.

O comportamento do gráfico de dispersão dos valores gerados segue o mesmo padrão tanto para $\lambda = 0,5$ quanto para $\lambda = 15$, não apresentando dependência caudal.

Na Figura ?? estão apresentados os histogramas dos 500 valores gerados da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e para $\lambda = 15$.

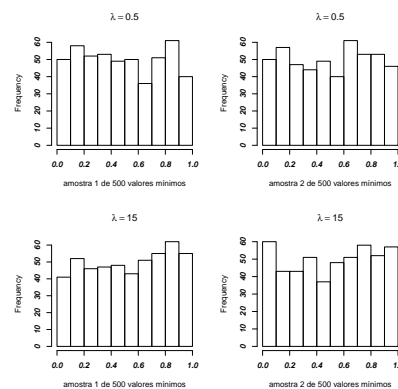


Figura 5.13: Histogramas das distribuições marginais dos valores gerados da cópula de Poisson.

O comportamento das distribuições marginais da cópula segue o padrão uniforme tanto para $\lambda = 0,5$ quanto para $\lambda = 15$, como era esperado.

Na Figura ?? estão apresentados os gráficos de dispersão dos 2000 valores gerados da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e para $\lambda = 15$.

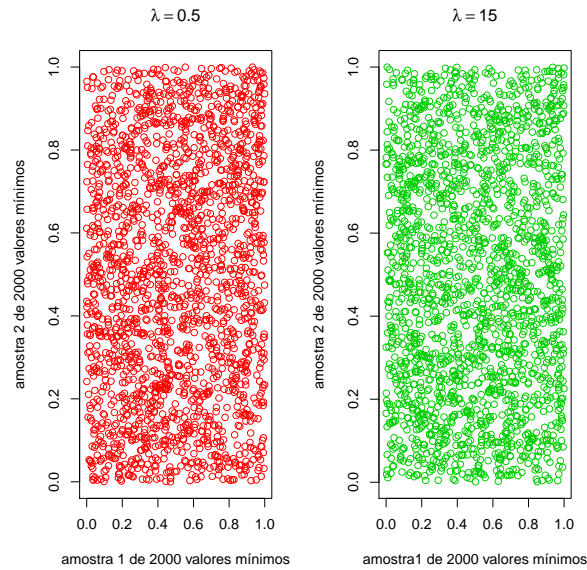


Figura 5.14: Gráficos de dispersão dos 2000 valores gerados da cópula de Poisson.

O comportamento do gráfico de dispersão de valores gerados para ambas as amostras segue o mesmo padrão tanto para $\lambda = 0,5$ quanto para $\lambda = 15$, não apresentando dependência caudal.

Na Figura ?? estão apresentados os histogramas dos 2000 valores gerados da cópula arquimediana de Poisson (??) para $\lambda = 0,5$ e para $\lambda = 15$.

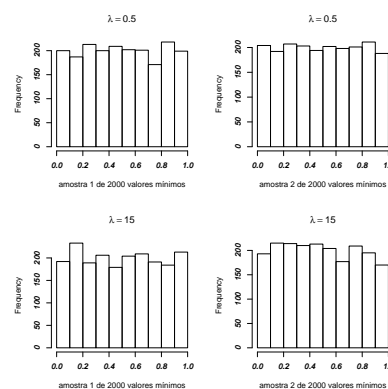


Figura 5.15: Histogramas das distribuições marginais dos valores gerados da cópula de Poisson.

O comportamento das distribuições marginais da cópula segue o padrão uniforme tanto para $\lambda = 0,5$ quanto para $\lambda = 15$ como era de se esperar.

Capítulo 6

Considerações finais

Neste trabalho, propomos um procedimento para a determinação de novas distribuições de probabilidades absolutamente contínuas para o tempo de duração de um sistema cujo número de componentes, N , não é um número fixo, mas uma variável aleatória discreta assumindo valores no conjunto Z^{++} com função de probabilidades p_n . Consideramos que o tempo de vida das componentes do sistema $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas como uma variável aleatória Y do tipo contínuo, sendo N e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ independentes.

Um primeiro objetivo foi determinar a função de sobrevivência do tempo de vida mínimo, T_{min} , de um sistema. Para isto, compusemos a função geradora de probabilidades de N com a função de sobrevivência de Y . Em seguida, obtivemos a função de distribuição do tempo de vida máximo, T_{max} , compondo a função geradora de probabilidades de N com a função de distribuição de Y . Além disso, aplicamos o procedimento proposto para a criação de duas distribuições: A Poisson-Weibull assumindo que Y possui distribuição Weibull com parâmetros de forma γ e de escala β e que N possui distribuição de Poisson truncada em zero de parâmetro α conforme desenvolvido no Capítulo ???. A distribuição SJS-Exponencial, apresentada no Capítulos ??, assumindo para a v.a Y uma distribuição exponencial de parâmetro α e para a v.a N uma distribuição $SJS - 1$ transladada de uma unidade à direita.

Estendemos a mesma ideia utilizada para o caso de um sistema composto por um número aleatório N de componentes em que os tempos de vida da j -ésima componente $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ são variáveis aleatórias latentes i.i.d. para a situação de dois sistemas. Assumimos que a v.a N tome valores no conjunto Z^{++} e que os tempos de vida $(X_j)_{j \in Z^{++}}$ e $(Y_j)_{j \in Z^{++}}$ dos dois sistemas são variáveis aleatórias i.i.d. como uma v.a. X , para o caso do sistema 1 e como uma v.a. Y para

o sistema 2 e que N , $(X_j)_j$ e $(Y_j)_j$ são independentes entre si. Assim, nosso objetivo foi o de determinar a distribuição conjunta de pares de extremos (T_1, T_2) ou de (M_1, M_2) , já especificadas no Capítulo ?? usando a mesma estratégia. Para determinar a função de sobrevivência de (T_1, T_2) compusemos a função geradora de probabilidades de N com o produto das funções de sobrevivência marginais de X e de Y . Analogamente, compondo-se a função geradora de N com o produto das funções distribuições marginais de X e Y obtivemos a função distribuição de (M_1, M_2) . Após a obtenção destas duas distribuições determinamos as cópulas correspondentes às distribuições de (T_1, T_2) e a (M_1, M_2) que não constam literatura.

Vale lembrar que a cópula correspondentes a distribuição de (M_1, M_2) possui como caso particulares a cópula de Frank e a cópula Ali-Mikhail-Haq. Desta forma, propomos uma maneira mais fácil de gerar valores das cópulas de Frank e de Ali-Mikhail-Haq.

Além disso, mostramos que a cópula associada a distribuição de (M_1, M_2) é arquimediana e mostramos que:

- O τ de Kendall da cópula associada a distribuição de (T_1, T_2) é igual ao τ de Kendall da cópula correspondente a distribuição de (M_1, M_2) .
- O ρ de Spearman da cópula correspondente a distribuição de (T_1, T_2) é igual ao ρ de Spearman da cópula correspondente a distribuição de (M_1, M_2) .
- O coeficiente caudal inferior da cópula associada a distribuição de (T_1, T_2) é igual ao coeficiente caudal superior da cópula correspondente a distribuição de (M_1, M_2) .
- O coeficiente caudal inferior da cópula correspondente a distribuição de (M_1, M_2) é igual ao coeficiente caudal superior da cópula correspondente a distribuição de (T_1, T_2) .

6.1 Perspectivas Futuras

Propor um modelo de regressão assumindo que a variável resposta possui distribuição Poisson-Weibull definida nesta tese. Além disso, podemos explorar os tipos de dependência existentes como a dependência do quadrante positivo, dependência TP_2 , entre outras (?) da cópula obtidas para (T_1, T_2) e (M_1, M_2) e utilizando a metodologia proposta podemos obter novos modelos de cópula.

Referências

- Aarset, M. V. (1985). The null distribution for a test of constant versus bathtub failure rate. *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**(1), 55–68.
- Adamidis, K. & Loukas, S. (1998). A lifetime distribution with decreasing failure rate. *Statistics and Probability Letters*, **39**, 35–42.
- Adamidis, K., Dimitrakopoulou, T. & Loukas, S. (2005). On an generalization of the exponential-geometric distribution. *Statistics and Probability Letters*, **73**, 259–269.
- Barreto-Souza, W. & Cribari-Neto, F. (2009). A generalization of the exponential-poisson distribution. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 2493–2500.
- Barreto-Souza, W., Morais, A. L. & Cordeiro, G. M. (2008). The Weibull-geometric Distribution. *Journal of Statistical computation and Simulation*, (First published on: 11 June 2010 (iFirst)).
- Cancho, V., Louzada, F. & Barriga, G. (2011). The poisson-exponential lifetime distribution. *Computational Statistics and Data analysis*, **55**, 677–686.
- Fristedt, B. & Gray, L. (1997). *A Modern Approach to Probability Theory*. Birkhäuser.
- Hjorth, U. (1980). A reliability distribution with increasing, decreasing, constant and bathtub - shaped failure rates. *Technometrics*, **22**(1), 99–107.
- Jayasree, G. & Swamy, R. (2006). Some new discrete probability distributions derived from power series distributions. *Communications in Statistics Theory and Methods*, **35**, 1555–1567.
- Kus, C. (2007). A new lifetime distribution distributions. *Computational Statistics and Data analysis*, **11**, 4497–4509.
- Louzada, F., Roman, M. & Cancho, V. (2011). The complementary exponential geometric distribution: Model, properties, and a comparison with its counterpart. *Computational Statistics and Data analysis*, **55**, 2516–2524.

- Nelsen, R. (2006). *An Introduction to Copulas*.. Springer-Verlang, Ney York, second edition.
- Proschan, F. (2000). Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. *Technometrics*, **42**(1), 7–11.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs merges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229–231.
- Tahmasbi, R. & Rezaei, S. (2008). A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate. *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3889–3901.