



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



NAARA PRISCILA SOARES DA SILVA

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NO RECONHECIMENTO FACIAL

SÃO CARLOS  
2022

NAARA PRISCILA SOARES DA SILVA

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NO RECONHECIMENTO FACIAL

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Nery de Oliveira

SÃO CARLOS  
2022

da Silva, Naara Priscila Soares

Aplicações da Álgebra Linear no Reconhecimento Facial  
/ Naara Priscila Soares da Silva -- 2022.  
49f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,  
campus São Carlos, São Carlos  
Orientador (a): Leandro Nery de Oliveira  
Banca Examinadora: Adilson Eduardo Presoto, Karina  
Schiabel  
Bibliografia

1. Álgebra linear. 2. Reconhecimento facial. I. da Silva,  
Naara Priscila Soares. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática  
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
 COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET  
 Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905  
 Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 5/2023/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

NAARA PRISCILA SOARES DA SILVA

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA LINEAR NO RECONHECIMENTO FACIAL

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 26 de setembro de 2022

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Leandro Nery de Oliveira
Membro da Banca 1	Karina Schiabel
Membro da Banca 2	Adilson Eduardo Presoto



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Nery de Oliveira, Professor(a) do Ensino Superior**, em 01/08/2023, às 17:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Karina Schiabel, Professor(a) do Ensino Superior**, em 04/08/2023, às 09:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Adilson Eduardo Presoto, Professor(a) do Ensino Superior**, em 09/08/2023, às 09:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1023200** e o código CRC **C91855ED**.

**Referência:** Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.013258/2023-17

SEI nº 1023200

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

*Este é o fruto de muito trabalho, dedicação e madrugadas de estudo.  
Não são apenas símbolos descrevendo a beleza da matemática, significa o prêmio conquistado  
após uma longa jornada.*

*Dedico inicialmente a Deus, pois sem Ele nada seria, sem Ele nada poderia, sem Ele não  
realizaria este sonho.*

*Dedico aos meus queridos pais Antonio e Cidinha que, ainda muito pequenina, me  
apresentaram todo o encanto do saber.*

*Ao meu irmão Jonatas, melhor amigo, a quem pude ensinar os primeiros passos e hoje segue  
lado a lado comigo.*

*À minha amada Máyra, por todos os anos de parceria.*

*Às tão carinhosas e fiéis filhas de quatro patas, Pantera, Charlotte e as caçulinhas Maria Antonia  
e Maria Aurora. Obrigada pela companhia, seja no colo ou embaixo da mesa enquanto eu  
estudava por horas e me desculpem pelos momentos de brincadeiras que tivemos que abdicar.*

*Aos poucos e verdadeiros amigos que sempre me apoiaram e acreditaram que eu alcançaria  
este dia, em especial ao meu amigo e mentor matemático Wagner Sgobbi, meu eterno bixo Dr.*

*Obrigada, nós chegamos!*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Prof. Dr. Leandro Nery, um ser humano incrível, que brilhantemente me conduziu no desenvolvimento deste trabalho.

Meu muito obrigada a todos professores que fizeram parte da minha jornada na Universidade Federal de São Carlos, em especial ao Prof. Dr. Pedro Malagutti, nosso “matemágico”, Prof. Dr. João Sampaio, Profa. Dra. Karina Schiabel e Prof. Dr. Rodrigo Rodrigues por não medirem esforços em provar para cada aluno que a matemática é tão possível quanto linda.

Aos funcionários que zelam pela limpeza, conservação, segurança e funcionamento da Universidade.

Ao querido e eterno Robinson Domingues. Obrigada amigo, obrigada por acreditar em mim. Nunca esquecerei de seu sorriso e palavras de encorajamento.



*Não sabendo que era impossível, ele foi lá e fez.*

*Jean Cocteau*



## RESUMO

A matemática está presente há muito tempo no dia a dia da sociedade. Modelos matemáticos são construídos constantemente para explicar, calcular e prever diversos tipos de fenômenos. Podemos observar desde conceitos iniciais, como as quatro operações elementares, até abstrações e cálculos avançados. Proporção de ingredientes na culinária, linguagem visual através de gráficos na mídia, ou cálculos realizados por computadores de imensa capacidade de processamento, são exemplos da aplicação da matemática no dia a dia. Embora tenhamos a constante presença da matemática em nossa vida, muitos ainda se questionam quanto à aplicação de alguns conceitos que são estudados. Afinal, quem nunca ouviu a famosa pergunta que todo estudante já fez: “onde vou usar isto?”. Nesta direção, o presente trabalho tratará de conceitos de autovetores e autovalores, vistos durante a disciplina de Álgebra Linear e a aplicação destes em uma ferramenta tecnológica, o reconhecimento facial.

**Palavras-chave:** Álgebra Linear. Reconhecimento. autoface. autovetor. matriz de covariância.



## ABSTRACT

Mathematics has been present for a long time in the daily life of society. Mathematical models are constantly constructed to explain, calculate and predict various types of phenomena. We can observe this from initial concepts, such as the four elementary operations, to advanced abstractions and calculations. Proportion of ingredients in cooking, visual language through media graphics, or calculations performed by computers with immense processing power, are examples of the application of mathematics in everyday life. Although we have the constant presence of mathematics in our lives, many still question about the application of some concepts that are studied. After all, who has never heard the famous question that every student has asked: "where am I going to use this?". In this direction, the present work will deal with concepts of eigenvectors and eigenvalues, seen during the discipline of Linear Algebra and their application in a technological tool, facial recognition.

**Keywords:** Linear Algebra. Recognition. eigenface. eigenvector. covariance matrix.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 5.1 – Face dividida em pixels	42
Figura 5.2 – Banco de faces	43
Figura 5.3 – Face Média	44
Figura 5.4 – Eigenfaces	44
Figura 5.5 – Imagem de entrada e sua projeção no espaço definido pela eigenface	45
Figura 5.6 – Entrada, processamento e saída.	45

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR</b>	<b>19</b>
2.1	ESPAÇOS E SUBESPAÇOS VETORIAIS	19
2.1.1	INTERSEÇÃO E SOMAS DE SUBESPAÇOS	21
2.1.2	DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR	22
2.1.3	BASE E DIMENSÃO	23
2.2	TRANSFORMAÇÕES LINEARES	24
2.2.1	MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR	24
2.2.2	NÚCLEO E IMAGEM	26
2.2.3	POSTO E NULIDADE DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR	26
2.3	AUTOVETORES E AUTOVALORES	27
2.3.1	DIAGONALIZAÇÃO	28
2.4	PRODUTO INTERNO	29
2.4.1	ORTOGONALIDADE	31
2.5	TEOREMA ESPECTRAL	31
<b>3</b>	<b>TÓPICOS DE ESTATÍSTICA</b>	<b>33</b>
3.1	MATRIZ DE COVARIÂNCIA	33
<b>4</b>	<b>RECONHECIMENTO FACIAL</b>	<b>35</b>
4.1	CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA	35
4.2	APLICAÇÕES DO MÉTODO	35
<b>5</b>	<b>A ÁLGEBRA LINEAR E O RECONHECIMENTO FACIAL</b>	<b>37</b>
5.1	ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS (ACP)	37
5.1.1	TRANSLAÇÃO	39
5.1.2	DIAGONALIZAÇÃO	39
5.1.3	PROJEÇÃO	40
5.2	EIGENFACES	41
5.2.1	TREINAMENTO	41
5.2.2	RECONHECIMENTO	42
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>47</b>



# 1 INTRODUÇÃO

Podemos considerar o rosto como representação da identidade de cada indivíduo.

Possui relevância significativa nas relações sociais, uma vez que é por ele que as pessoas são reconhecidas e expressam suas emoções.

O ser humano é exposto a outros de sua espécie já desde o nascimento e a partir deste momento, exceto em situações que apresenta alguma limitação visual, começa a aprender e reconhecer outros indivíduos por seus rostos.

Ao longo da vida vamos armazenando estes rostos em nossa memória, formando um imenso "banco de faces".

O passar do tempo traz modificações àquela imagem, porém, para o processamento de reconhecimento humano, isso não é considerado um impedimento, pois mesmo quando expostos a algum tipo de situação que modifica a imagem antes conhecida, somos dotados da capacidade de reconhecer o indivíduo.

Da mesma forma que aprendemos e armazenamos distintas faces, assim ocorre com o conhecimento, no decorrer de nossas vidas aprendemos desde os primeiros códigos para comunicação e com o tempo alimentamos o vasto "banco de conhecimento".

Durante o processo de aquisição de conhecimento é comum nos perguntarmos quanto à relevância de conteúdos e se de fato existe uma aplicação para tudo aquilo.

Difícilmente encontraremos alguém que não tenha escutado, ou até mesmo feito, o famoso questionamento: "Onde vou usar isto?".

Desta forma, motivado pela curiosidade e busca pela aplicabilidade de conteúdos vistos durante o curso de Licenciatura em Matemática, o presente trabalho trará diversos conceitos matemáticos, em particular estudados durante a disciplina de Álgebra Linear, elucidando cada um deles na implementação de um algoritmo de reconhecimento facial.

Não exploraremos a fundo o método em termos computacionais, uma vez que o objetivo central do trabalho é mostrar a aplicação da matemática na tecnologia pesquisada.

É possível encontrar no decorrer do texto uma sequência de conceitos matemáticos além da descrição abordada de forma didática dos métodos de *Análise de Componentes Principais (PCA ou ACP)* e *Eigenface*, tornando este trabalho de significativa contribuição acadêmica para introdução teórica destes conceitos.



## 2 CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR

A seguir apresentaremos algumas definições e conceitos, em geral, trabalhados durante os cursos de Álgebra Linear, necessários para desenvolvermos, demonstrarmos e discutirmos o conteúdo que será apresentado neste trabalho. Não temos aqui a intenção de demonstrar todos os resultados apresentados, visto que trataremos como já aprendidos pelo leitor. Desta forma, trataremos à tona cuidadosamente apenas aqueles que serão trabalhados no entendimento de sua aplicação em Reconhecimento Facial.

Ressaltamos que em todo texto trabalharemos com espaços vetoriais finitos sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

### 2.1 ESPAÇOS E SUBESPAÇOS VETORIAIS

Discutiremos aqui rapidamente a definição de espaço vetorial real. Consideremos  $V$  um conjunto qualquer não vazio. Suponhamos definidas as operações de adição e multiplicação por escalar, respectivamente:

- (i) adição: dados  $u, v \in V \rightarrow u + v \in V$ ;
- (ii) multiplicação por escalar: dados  $v \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda \cdot v \in V$ .

**Definição 2.1.** Dado um conjunto arbitrário e não vazio  $V$ , munido de uma operação de adição,  $V \times V \rightarrow V$ , e uma multiplicação por escalar,  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , diremos que  $V$  é um espaço vetorial real se, para todos  $u, v$  e  $w \in V$  e  $\lambda$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ , são satisfeitas as seguintes propriedades:

- (i)  $u + v = v + u$ , para  $u, v \in V$ ;
- (ii)  $u + (v + w) = (u + v) + w$ , para  $u, v, w \in V$ ;
- (iii) existe  $0 \in V$  tal que  $0 + u = u$  para todo  $u \in V$ ;
- (iv) para cada  $u \in V$  existe  $v \in V$  tal que  $u + v = 0$ ;
- (v)  $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$  para todo  $u \in V$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;
- (vi)  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$  para  $u \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;
- (vii)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$  para  $u, v \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (viii)  $1u = u$  para todo  $u \in V$ .

Tal qual anteriormente, apresentaremos brevemente a definição de subespaço vetorial.

**Definição 2.2.** Dado um espaço vetorial  $V$ , dizemos que  $W \subseteq V$  é um subespaço vetorial de  $V$  se são satisfeitas as seguintes propriedades:

- (i)  $0 \in W$ ;
- (ii)  $u + v \in W$ , para todo  $u, v \in W$ ;
- (iii)  $\lambda u \in W$ , para todo  $u \in W$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

As condições acima pode ser resumidas a seguir:

- (i)  $0 \in W$ ;
- (ii) Sejam  $u, v \in W$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  então  $\lambda u + v \in W$ .

**Exemplo 2.1.** O conjunto  $\mathbb{R}^3$  é um espaço vetorial real, considerando as operações de adição e multiplicação por escalar usuais. De fato, sejam  $u = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $v = (x_2, y_2, z_2)$  e  $w = (x_3, y_3, z_3)$  elementos de  $\mathbb{R}^3$  e também  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Temos que valem as seguintes propriedades:

a) Comutativa da soma:

$$\begin{aligned}
 u + v &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \\
 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
 &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1) \\
 &= (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1) \\
 &= v + u.
 \end{aligned}$$

b) Associativa da soma:

$$\begin{aligned}
 (u + v) + w &= [(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] + (x_3, y_3, z_3) \\
 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3) \\
 &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3, (z_1 + z_2) + z_3) \\
 &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3), z_1 + (z_2 + z_3)) \\
 &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \\
 &= (x_1, y_1, z_1) + [(x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)] \\
 &= u + (v + w).
 \end{aligned}$$

c) Existência do elemento neutro da soma: Considere a origem de  $\mathbb{R}^3$ ,  $O = (0, 0, 0)$ . Temos que

$$O + u = (0, 0, 0) + (x_1, y_1, z_1) = (0 + x_1, 0 + y_1, 0 + z_1) = (x_1, y_1, z_1) = u.$$

d) Existência do inverso aditivo (simétrico): Para cada  $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ , temos que  $-u = (-x_1, -y_1, -z_1)$  é o inverso aditivo de  $u$ :

$$u + (-u) = (x_1, y_1, z_1) + (-x_1, -y_1, -z_1) = (x_1 + (-x_1), y_1 + (-y_1), z_1 + (-z_1)) = (0, 0, 0) = O.$$

e) Associativa em relação ao produto de dois escalares:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta u) &= \alpha[\beta(x, y, z)] = \alpha(\beta x, \beta y, \beta z) = (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y), \alpha(\beta z)) = ((\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y, (\alpha\beta)z) \\ &= (\alpha\beta)(x, y, z) = (\alpha\beta)u.\end{aligned}$$

f) Distributiva do produto em relação à soma de dois escalares:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)u &= (\alpha + \beta)(x, y, z) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y, (\alpha + \beta)z) \\ &= (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta z) \\ &= (\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (\beta x, \beta y, \beta z) \\ &= \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z) \\ &= \alpha u + \beta u.\end{aligned}$$

g) Distributiva do produto de um escalar em relação à soma de dois vetores:

$$\begin{aligned}\alpha(u + v) &= \alpha[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] \\ &= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2), \alpha(z_1 + z_2)) \\ &= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2, \alpha z_1 + \alpha z_2) \\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2) \\ &= \alpha(x_1, y_1, z_1) + \alpha(x_2, y_2, z_2) \\ &= \alpha u + \alpha v.\end{aligned}$$

h) Produto do elemento neutro do corpo dos reais em relação a um vetor:

$$1 \cdot u = 1 \cdot (x, y, z) = (1 \cdot x, 1 \cdot y, 1 \cdot z) = (x, y, z) = u.$$

Isso tudo mostra que o conjunto  $\mathbb{R}^3$  é um espaço vetorial real.

De forma análoga é fácil demonstrar que  $\mathbb{R}^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , são exemplos de espaços vetoriais reais.

**Exemplo 2.2.** O conjunto  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x + 1\}$  não é espaço vetorial. De fato, note que  $(0, 0) \notin V$ , pois se  $x = 0$  então  $y = 1$  em  $V$ .

### 2.1.1 INTERSEÇÃO E SOMAS DE SUBESPAÇOS

Considere  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de um espaço vetorial  $V$ , temos os resultados a seguir:

- (i) A interseção de dois subespaços vetoriais é um espaço vetorial;
- (ii) A soma de dois subespaços vetoriais é um espaço vetorial;
- (iii) Soma direta: Dizemos que  $U + W$  é soma direta se  $U \cap W = \{0\}$  e denotamos  $U \oplus W$ .

**Exemplo 2.3.** Sejam  $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  e  $W = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ . Temos que a soma

$$U + W = \{(x, 0) + (0, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Por outro lado,  $U \cap W = \{(0, 0)\}$ . Logo,  $\mathbb{R}^2$  é a soma direta dos espaços  $U$  e  $W$ , ou seja  $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ . Neste caso, cada elemento de  $\mathbb{R}^2$  é escrito de maneira única como a soma de um elemento de  $U$  com um elemento de  $W$ .

A união de dois espaços vetoriais nem sempre é um espaço vetorial, como podemos ver no exemplo a seguir:

**Exemplo 2.4.** Sejam  $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  e  $W = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^2$ . Considere  $(1, 0), (0, 1) \in U \cup W$ . Somando estes dois vetores, temos

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W.$$

Logo, nem sempre a união de dois espaços vetoriais é um espaço vetorial.

### 2.1.2 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Dado um espaço vetorial  $V$ , com  $v_1, \dots, v_n \in V$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , dizemos que o vetor

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

é uma combinação linear dos vetores  $v_1, \dots, v_n \in V$ .

Temos que o conjunto formado por todos os vetores  $V$  que são combinações lineares de  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  é um subespaço de  $V$ . Chamamos a este subespaço de subespaço gerado por  $v_1, \dots, v_n \in V$  e denotamos

$$W = [v_1, \dots, v_n].$$

**Definição 2.3.** Sejam  $V$  um espaço vetorial,  $v_1, \dots, v_n \in V$ , um conjunto de vetores não nulos e

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0.$$

Dizemos que estes vetores não nulos são *linearmente independentes* (LI) se  $a_1 = \dots = a_n = 0$ . Caso exista pelo menos um  $a_i \neq 0$ , dizemos que estes vetores não nulos são *linearmente dependentes* (LD).

**Exemplo 2.5.** Vejamos se o subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  dado é LI ou LD:

$$S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Temos que dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$  então:

$$a(1, 0, 1) + b(1, 1, 1) + c(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Logo, o conjunto  $S$  é LI.

### 2.1.3 BASE E DIMENSÃO

**Definição 2.4.** Dizemos que um subconjunto  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  é uma base de  $V$ , se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i)  $B$  é um conjunto de geradores de  $V$ ;
- (ii)  $B$  é um conjunto *linearmente independente*.

**Definição 2.5.** Dizemos que um espaço vetorial  $V$  é finitamente gerado quando é gerado por um número finito dos seus elementos.

**Exemplo 2.6.**  $M_2(\mathbb{R})$  é finitamente gerado. O conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gera  $M_2(\mathbb{R})$ , uma vez que, para quaisquer  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.6.** Seja  $V$  um espaço finitamente gerado, definimos a dimensão de  $V$  como sendo o número de elementos de uma base qualquer de  $V$ .

Assim, a dimensão do espaço das matrizes quadradas de ordem 2 é 4, em notação,  $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ .

## 2.2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Considere  $V$  e  $W$  espaços vetoriais. Dizemos que  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear se

- (i)  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ , para todo  $u, v \in V$ ;
- (ii)  $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e todo  $v \in V$ .

Quando  $V = W$ , chamamos a transformação linear  $T$  de **operador linear** de  $V$ .

Podemos unir as condições (i) e (ii) acima em apenas uma condição. Assim, dizemos que  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear se

$$T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v),$$

para quaisquer  $u, v \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.7.**  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $T(x, y) = x + y$ . Sejam  $u = (x, y)$ ,  $v = (z, w) \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} T(u + \lambda v) &= T((x, y) + \lambda(z, w)) \\ &= T(x + \lambda z, y + \lambda w) \\ &= (x + \lambda z) + (y + \lambda w) \\ &= (x + y) + \lambda(z + w) \\ &= T(x, y) + \lambda T(z, w) \\ &= T(u) + \lambda T(v). \end{aligned}$$

Assim,  $T$  é uma transformação linear.

### 2.2.1 MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Considere  $U$  e  $V$  espaços vetoriais de dimensão finita. Fixemos as bases  $B$  de  $U$  e  $C$  de  $V$ , sendo  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  e  $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ . Se  $T \in \mathcal{L}(U, V)$  podemos escrever

$$T(u_j) = a_{1j}v_1 + \dots + a_{mj}v_m.$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

é chamada de matriz da transformação  $T$  com relação às bases  $B$  e  $C$  e é denotada por  $[T]_{B,C}$ . No caso em que  $U = V$  e  $B = C$  usaremos a notação  $[T]_B$ .

**Exemplo 2.8.** Seja a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x)$ . Considere as base  $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$  e  $C = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ . Vamos calcular a transformação linear aplicada nos vetores da base  $B$ :

$$\begin{aligned} T(1, 1) &= (1 + 1, 1 - 1, 2 \cdot 1) = (2, 0, 2) \\ T(1, -1) &= (1 + (-1), 1 - (-1), 2 \cdot 1) = (0, 2, 2). \end{aligned}$$

Escrevemos  $T(1, 1)$  e  $T(1, -1)$  como combinação linear dos vetores da base  $C$ :

$$\begin{aligned} T(1, 1) = (2, 0, 2) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) &\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases} . \\ T(1, -1) = (0, 2, 2) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) &\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 2 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Logo, a matriz da transformação linear  $T$  é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 2.9.** Ainda usando a transformação  $T$  do exemplo anterior, calculamos a matriz de  $T$  em relação às bases canônicas do domínio e contradomínio:

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (1, 1, 2) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1) \\ T(0, 1) &= (1, -1, 0) = 1(1, 0, 0) - 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Logo, a matriz de  $T$  em relação à base canônica é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, se tomarmos a matriz  $A$  e multiplicarmos por um vetor qualquer  $v$ , escrito por meio de

suas coordenadas, obtemos

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

A matriz resultante, na base canônica, é a matriz das coordenadas da lei de

$$T(x, y) = (x + y, x - y, 2x).$$

### 2.2.2 NÚCLEO E IMAGEM

Considere  $U$  e  $V$  espaços vetoriais e  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear.

**Definição 2.7.** Chamamos **Núcleo** de  $T$ , e denotamos  $\ker(T)$  ou  $\mathcal{N}(T)$ , ao conjunto

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in U : T(u) = 0\}.$$

**Definição 2.8.** Chamamos **Imagem** de  $T$ , e denotamos  $Im(T)$ , ao conjunto

$$Im(T) = \{v \in V : \exists u \in U, \text{ tal que } v = T(u)\}.$$

Um importante resultado destes conceitos é o **Teorema do Núcleo e da Imagem** que, embora sua demonstração seja de fácil entendimento, não a traremos neste trabalho.

**Teorema 2.1** (Teorema do Núcleo e da Imagem). *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais e  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear. Suponha que  $U$  tenha dimensão finita. Temos então*

$$\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim Im(T).$$

### 2.2.3 POSTO E NULIDADE DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Considere  $U$  e  $V$  espaços vetoriais.

**Definição 2.9.** Denotamos  $\mathcal{L}(U, V)$  como o conjunto de todas as transformações lineares  $T : U \rightarrow V$ .

Caso  $U = V$ , denotamos  $\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(U, U)$ .

**Definição 2.10.** Considere  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ . Definimos o **Posto** de  $T$  como  $\dim Im(T)$ .

Notação:  $posto(A)$ ,  $rank(A)$ ,  $rk(A)$  ou  $p(A)$ .

**Definição 2.11.** Considere  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ . Denotamos **Nulidade** de  $T$  como  $\dim \mathcal{N}(T)$ .

Consequentemente, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que a soma do posto com a nulidade, resulta na dimensão de  $U$ .

Quando observamos estes conceitos em termos matriciais, o posto de uma matriz  $A$  é o máximo de linhas ou colunas LI. Já a nulidade é igual ao número de colunas da matriz menos o posto.

## 2.3 AUTOVETORES E AUTOVALORES

**Definição 2.12.** Considere  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $u \in V$  é um autovetor de  $T$  se  $u \neq 0$  e existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , um autovalor de  $T$  associado ao autovetor  $u$ , tal que  $T(u) = \lambda u$ .

Considere  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ ,  $A$  a matriz do operador linear  $T : V \rightarrow V$ .

**Teorema 2.2.** Seja  $u$  um autovetor de  $A$  associado a um autovalor  $\lambda$ . O conjunto

$$V_\lambda = \{u \in V; Au = \lambda u\}.$$

é um subespaço vetorial de  $V$ , chamado autoespaço de  $A$  em relação ao autovalor  $\lambda$ .

**Definição 2.13.** Considere  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $B$  uma base de  $V$ . Sendo  $T : V \rightarrow V$  um operador linear tal que sua matriz em relação à base  $B$  é representada por  $A$ . Dizemos que

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

é o polinômio característico de  $T$  (ou de  $A$ ).

As raízes do polinômio característico são os autovalores de  $A$ .

**Exemplo 2.10.** Seja a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $T(x, y) = (x, x + y)$ . Vamos encontrar um autovetor de  $T$ .

Pela definição,  $v = (x, y)$  é autovetor de  $T$  se  $T(v) = \lambda v$ :

$$T(v) = \lambda v \iff (x, x + y) = \lambda(x, y) \iff \begin{cases} x = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ x + (1 - \lambda)y = 0 \end{cases}.$$

Vamos resolver este sistema para  $\lambda$ , temos daí a matriz dos coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A - \lambda I$$

cujos determinante é  $(1 - \lambda)^2$ , que é o polinômio característico de  $T$ . Queremos encontrar os valores de  $\lambda$  para os quais o determinante da matriz dos coeficientes é zero.

$$(1 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Portanto,  $\lambda = 1$  é o único autovalor de  $T$ . Agora encontramos os autovetores associados a  $\lambda$ . Para  $\lambda = 1$ , temos que  $Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0$ . Assim,

$$(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow (A - I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0.$$

Portanto,  $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$  é o autoespaço associados ao autovalor  $\lambda = 1$ .

### 2.3.1 DIAGONALIZAÇÃO

Considere  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  e  $T \in \mathcal{L}(V)$ .

**Definição 2.14.** Dizemos que  $T$  é diagonalizável se existir uma base de  $V$  formada por autovetores de  $T$ . Isto equivale a dizer que existe base de  $V$  na qual a matriz de  $T$  é diagonal.

Uma matriz  $A$  é diagonalizável se ela for semelhante a uma matriz diagonal. Assim, dizemos que um operador linear  $T$  é diagonalizável se a matriz de  $T$  for semelhante a uma matriz diagonal.

**Exemplo 2.11.** Verifique se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T(x, y) = (x + y, x - y)$ , é diagonalizável. Já vimos em exemplos anteriores que a matriz de  $T$  é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Polinômio Característico:**

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 1 = -(1 - \lambda^2) - 1 \\ &= \lambda^2 - 2 = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

**Autovalores:**  $\lambda_1 = -\sqrt{2}$  e  $\lambda_2 = \sqrt{2}$ .

**Autovetores:**

Para  $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ , temos

$$\begin{aligned} (A + \sqrt{2}I)v = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (-1 + \sqrt{2})y = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow y = -(1 + \sqrt{2})x. \end{aligned}$$

Um autovetor associado a  $\lambda_1$  é  $(1, -1 - \sqrt{2})$ .

Para  $\lambda_2 = \sqrt{2}$ , temos

$$\begin{aligned} (A - \sqrt{2}I)v = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x + y = 0 \\ x + (-1 - \sqrt{2})y = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow y = -(1 - \sqrt{2})x. \end{aligned}$$

Um autovetor associado a  $\lambda_2$  é  $(1, -1 + \sqrt{2})$ .

Note que  $\{(1, -1 - \sqrt{2}), (1, -1 + \sqrt{2})\}$  é uma base de autovetores de  $T$  para  $\mathbb{R}^2$ . Logo,  $T$  é diagonalizável.

## 2.4 PRODUTO INTERNO

Considere  $V$  um espaço vetorial,  $u, v$  e  $w \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.15.** Definimos um *produto interno no espaço vetorial*  $V$  como uma função que associa a cada par ordenado de vetores  $(u, v) \in V$  um escalar  $\langle u, v \rangle$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i)  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ ;
- (ii)  $\langle \lambda u, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle$ ;
- (iii)  $\langle u, w \rangle = \langle w, u \rangle$ ;
- (iv)  $u \neq 0, \langle u, u \rangle > 0$ .

**Exemplo 2.12.** Sejam  $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Definimos

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = \frac{ax}{2} + \frac{by}{3} + \frac{cz}{4}.$$

Mostre que a expressão acima define um produto interno.

Para a expressão acima ser produto interno, ela deve gozar das propriedades da definição.

Sejam  $u = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $v = (x_2, y_2, z_2)$  e  $w = (x_3, y_3, z_3)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

(i)

$$\begin{aligned}
 \langle u + v, w \rangle &= \langle (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\
 &= \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\
 &= \frac{(x_1 + x_2)x_3}{2} + \frac{(y_1 + y_2)y_3}{3} + \frac{(z_1 + z_2)z_3}{4} \\
 &= \left( \frac{x_1 x_3}{2} + \frac{y_1 y_3}{3} + \frac{z_1 z_3}{4} \right) + \left( \frac{x_2 x_3}{2} + \frac{y_2 y_3}{3} + \frac{z_2 z_3}{4} \right) \\
 &= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle + \langle (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\
 &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle;
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha u, v \rangle &= \langle \alpha(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\
 &= \langle (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\
 &= \frac{(\alpha x_1)x_2}{2} + \frac{(\alpha y_1)y_2}{3} + \frac{(\alpha z_1)z_2}{4} \\
 &= \alpha \left( \frac{x_1 x_2}{2} + \frac{y_1 y_2}{3} + \frac{z_1 z_2}{4} \right) \\
 &= \alpha \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\
 &= \alpha \langle u, v \rangle;
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle &= \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\
 &= \frac{x_1 x_2}{2} + \frac{y_1 y_2}{3} + \frac{z_1 z_2}{4} \\
 &= \frac{x_2 x_1}{2} + \frac{y_2 y_1}{3} + \frac{z_2 z_1}{4} \\
 &= \langle (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_1, z_1) \rangle \\
 &= \langle v, u \rangle;
 \end{aligned}$$

(iv) Suponha que  $u \neq 0$ . Então  $\langle u, u \rangle > 0$  se  $u \neq 0$ . De fato,

$$\langle u, u \rangle = \langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1) \rangle = \frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{3} + \frac{z_1^2}{4} > 0.$$

Logo, a expressão acima é um produto interno.

### 2.4.1 ORTOGONALIDADE

Considere  $V$  um espaço vetorial com produto interno.

**Definição 2.16.** Um subconjunto  $\mathcal{X} \subset V$  é ortogonal se dados  $v$  e  $w$  vetores distintos de  $\mathcal{X}$ , tem-se

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Se, além disso, os vetores de  $\mathcal{X}$  possuem norma igual a 1, dizemos que  $\mathcal{X}$  é ortonormal.

**Definição 2.17.** Sejam  $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$  um conjunto ortonormal de um espaço  $V$  com produto interno e  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ . Se  $u \in V$ , o vetor

$$\langle u, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle u, u_n \rangle u_n$$

é chamado de projeção ortogonal de  $u$  sobre o subespaço  $U$

## 2.5 TEOREMA ESPECTRAL

Dizemos que um operador linear  $T : V \rightarrow V$  é simétrico se e somente se a sua representação matricial, a qual chamaremos de  $A$ , é uma matriz simétrica. Ou seja,  $A = A^T$ . Destaquemos alguns fatos:

(1) Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $W$  um subespaço de  $V$ . Temos

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp.$$

onde  $\dim W^\perp = \{v \in V / \langle v, w \rangle = 0, \text{ para todo } w \in W\}$ .

Verificação em Seção 12.7, ZANI [11].

(2)  $A$  é simétrica se, e somente se, para quaisquer  $v, w$  vale  $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ .

Definição 12.64, ZANI [11].

**Lema 2.1.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita, munido de produto interno,  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear. Se  $T$  é simétrico, então  $T$  admite um autovetor.*

Apresentados os resultados acima, estamos prontos para enunciar o Teorema Espectral.

**Teorema 2.3.** *(Teorema Espectral) Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita, munido de produto interno,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear, então existe uma base ortonormal de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .*

*Demonstração.* [7] Usaremos indução sobre a dimensão de  $V$ . Se  $\dim V = 1$  então  $V = [v]$ . Assim, é imediato que  $T(v) = \lambda v$ , ou seja, todo vetor de  $V$  é um autovetor de  $T$ , basta escolher como gerador de  $V$  um vetor  $v$  tal que  $\|v\| = 1$ . Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para  $n - 1$  e seja  $\dim V = n$ . Então, pelo Lema 2.1 existe um autovetor unitário  $u_n$  tal que  $U = [u_n]$ . Temos também que o mesmo vale para o complemento ortogonal  $U^\perp$  de  $U$ , ou seja,  $T(U^\perp) \subset U^\perp$ . Como  $\dim U^\perp = n - 1$ , pela hipótese de indução temos que existe uma base ortonormal  $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$  de  $U^\perp$  formada por autovetores de  $T$  restrito a  $U^\perp$ . Por (1), temos que  $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$  é uma base ortonormal formada por autovetores de  $T$ .  $\square$

A seguir trataremos brevemente de alguns conteúdos que fazem parte da disciplina de Estatística, a fim de complementar o embasamento matemático necessário para discutirmos a aplicação no desenvolvimento e utilização da tecnologia de reconhecimento facial.

### 3 TÓPICOS DE ESTATÍSTICA

#### 3.1 MATRIZ DE COVARIÂNCIA

A seguir, trataremos brevemente de alguns conceitos que não são trabalhados exatamente nos cursos de Álgebra Linear, porém necessários para entendimento e aplicação da tecnologia estudada.

**Definição 3.1.** (Esperança) A **esperança**, ou valor esperado, expressa o valor médio do fenômeno que a variável representa. Assim, seja o conjunto de variáveis  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ , temos:

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i.$$

**Definição 3.2.** (Variância) A **variância** expressa o quanto a variável está distante do valor esperado. Seja o conjunto de variáveis  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  e o valor esperado  $\bar{X}$ , temos:

$$\text{var}(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{X})^2.$$

**Definição 3.3.** (Covariância) Definimos como **covariância** o quanto duas variáveis estão (ou não) relacionadas. Sejam os conjuntos de variáveis  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  e  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$  e  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  seus valores esperados, respectivamente, temos:

$$\text{cov}(A, B) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (a_i - \bar{A})(b_i - \bar{B}).$$

Temos que uma matriz de covariância é uma matriz simétrica quadrada de ordem  $n$  com entradas da forma:

$$C_{i,j}(X) = \text{cov}(X_i, X_j).$$

Dados os vetores  $x$ ,  $y$  e  $z$ , uma matriz de covariância pode ser da forma:

$$\begin{bmatrix} \text{cov}(x, x) & \text{cov}(x, y) & \text{cov}(x, z) \\ \text{cov}(y, x) & \text{cov}(y, y) & \text{cov}(y, z) \\ \text{cov}(z, x) & \text{cov}(z, y) & \text{cov}(z, z) \end{bmatrix}.$$

Temos também, de forma geral, os seguintes resultados:

(i) A covariância de uma variável por ela mesma é a variação da própria variável:

$$\text{cov}(x, x) = \text{var}(x).$$

(ii) A diagonal principal da matriz de covariância é formada pelas variâncias de todas as variáveis do sistema:

$$\text{cov}(x, x) = \text{var}(x)$$

$$\text{cov}(y, y) = \text{var}(y)$$

$$\text{cov}(z, z) = \text{var}(z).$$

(iii) A covariância possui uma propriedade comutativa:

$$\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)$$

$$\text{cov}(y, z) = \text{cov}(z, y)$$

$$\text{cov}(z, x) = \text{cov}(x, z).$$

Os conceitos trabalhados até aqui contemplam o conteúdo necessário para o entendimento do leitor quanto à aplicação destes no desenvolvimento e utilização da tecnologia de reconhecimento facial.

A seguir, no próximo capítulo, trataremos da tecnologia de forma cronológica.

Será possível observar desde os estudos iniciais, disseminação e popularização do método, até sua atual aplicação em diversas áreas.

## 4 RECONHECIMENTO FACIAL

Apresentaremos neste capítulo uma descrição cronológica dos estudos, desenvolvimento da tecnologia de reconhecimento facial e suas aplicações.

### 4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Na década de 60 surgem os primeiros estudos pelos cientistas Woody Bledsoe, Helen Chan Wolf e Charles Bisson ([1], [2], [5]). O método consistia em adotar referenciais computacionais para distinguir as faces, como pontos nos olhos e boca. Já na década de 1970, Godstein, Harmon e Lesk, através do mesmo estudo, adotaram outros referenciais como cor do cabelo e formato dos lábios [6]. No período entre 80 e 90, Srovich e Kirby com auxílio de conteúdos de Álgebra Linear, desenvolvem a metodologia conhecida como Eigenface [9].

O método Eigenface consiste na representação de padrões e o cálculo através de um conjunto de autovetores de uma matriz de covariância para a imagem de faces. Para tanto utilizaram o método de análise de componentes principais (PCA - Principal Component Analysis).

Na sequência, TURK e PENTLAND utilizam da mesma técnica, comparando faces à uma face média e identificando em um banco de dados chamado espaço de faces [10].

No próximo capítulo, descreveremos detalhadamente tanto o método de análise de componentes principais (PCA ou na tradução ACP), quanto o método Eigenface.

Na próxima seção descreveremos, independente do método utilizado, as aplicações da tecnologia de reconhecimento facial em diversas áreas.

### 4.2 APLICAÇÕES DO MÉTODO

A tecnologia vem sendo aplicada nas mais diversas áreas. O uso vai desde a proteção de dados e acessos contra intrusos, até o mais comum utilizado desbloqueio de Smartphones. Na área da segurança, por exemplo, atualmente encontramos fechaduras inteligentes, controle de acesso a portarias e cancelas, controle de jornadas de trabalho com marcação de ponto, identificação de entregadores, embarque em aeroportos, dentre outras funcionalidades.

Em um futuro não muito distante teremos operações em caixas eletrônicos, por exemplo, sendo autorizadas através do reconhecimento facial.

A variedade de softwares utilizados diferem desde a forma em que são desenvolvidos até as muitas aplicações. A precisão para desbloqueio de smartphones, por exemplo, é diferente das câmeras de monitoramento nas ruas [8].

Na década de 90, temos o início da utilização da tecnologia com fins governamentais.

Surge o programa Face Recognition Technology, conhecido como FERET<sup>1</sup>. O programa

<sup>1</sup> <https://www.nist.gov/itl/products-and-services/color-feret-database>. Acesso em: 15 set. 2022.

consistia na criação de um banco de dados contendo rostos. Com o uso da tecnologia, além do patrulhamento de ruas à distância, é possível identificar criminosos, evitar que crimes ocorram e até mesmo auxiliar em investigações.

No início da segunda década dos anos 2000, ocorre uma grande disseminação da utilização do reconhecimento facial com o surgimento das redes sociais. Mark Zuckerberg cria o tão usado e conhecido Facebook, onde seu algoritmo reconhecia rostos e identificava perfis de usuários em imagens (Social Mapper).

Já no final deste período, a empresa Apple populariza a tecnologia com o anúncio da nova funcionalidade de desbloqueio de tela de seus aparelhos celulares. Chamada de Face ID, a novidade consistia no reconhecimento facial pelo aparelho, na época os iPhones X. Atualmente a funcionalidade já não é um diferencial dos iPhones, sendo possível encontrá-la nas mais diversas marcas de smartphones, inclusive em aparelhos muito mais acessíveis.

Além da utilização em identificação de perfis em redes sociais, mais tarde foi possível notar a utilização da tecnologia até por crianças, com a adoção dos chamados filtros. Neste processo o algoritmo identifica alguma expressão facial e cria a interação com o usuário. Um exemplo muito conhecido do surgimento dos filtros nas redes sociais é o cachorro que mostra a língua quando o usuário abre a boca.

Atualmente existem redes sociais que permitem a criação de filtros próprios pelos usuários. A exemplo, Snapchat e Instagram.

No meio corporativo, além dos usos já citados na área de segurança e acesso à informação, como controle de jornada de trabalho, temos também a detecção de reações em processos seletivos, análise e comparação com movimentações musculares já padronizadas para identificação de emoções.

Além do reconhecimento facial, praticamente os mesmos algoritmos são desenvolvidos para identificar outros elementos, como objetos e/ou animais.

A seguir trataremos detalhadamente como a tecnologia funciona e descreveremos suas etapas em termos matemáticos, evidenciando a presença dos conceitos trabalhados na disciplina Álgebra Linear.

## 5 A ÁLGEBRA LINEAR E O RECONHECIMENTO FACIAL

O método de reconhecimento facial consiste na divisão da imagem em pixels e, após o tratamento destes dados, aprende e/ou reconhece a face.

Todo o processo é dividido em passos, chamados de Etapas de Reconhecimento.

- (1) Detecção de faces: o algoritmo reconhece a parte da imagem em que está a face.
- (2) Pré-processamento: os dados serão transformados de acordo com a forma necessária para o processamento.
- (3) Extração de Recursos: o algoritmo filtra de toda a imagem àqueles dados mais importantes para o processamento, ignorando todo o restante.
- (4) Reconhecimento facial: o sistema compara os dados extraídos com o banco de dados registrados anteriormente e identifica o indivíduo.

Após efetuar estas etapas, caso não encontre no banco de dados, o sistema registra a face, garantindo o reconhecimento e identificação futura. Temos aqui uma explicação simplificada de como ocorre o processo de reconhecimento facial.

No decorrer deste capítulo, detalharemos o método, elucidando ao leitor tanto o funcionamento da tecnologia, quanto os conceitos de Álgebra Linear presentes.

### 5.1 ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS (ACP)

Como visto anteriormente, diversos são os tipos de algoritmos de reconhecimento facial, diferindo em sua eficiência, tipo de dados e aplicações.

Os mais utilizados processam imagens 2D, visto a facilidade de criação de um banco de dados com fatores de distinção das faces como contorno dos lábios, distância entre olhos, formato de orelhas, queixo, dentre outros chamados de características locais.

O método ACP, diferente dos métodos que utilizam características locais da imagem, consiste praticamente no redimensionamento da imagem para a determinação de vetores que possuam a maior quantidade de informações, nos proporcionando uma facilidade nos cálculos, já que trabalharemos com dimensões reduzidas.

O processo ocorre em três passos: translação, diagonalização e projeção [3]. Descreveremos a seguir como ocorre cada um deles.

Vamos aqui trabalhar com a descrição de um algoritmo simples, que efetua o processamento em condições próximas às ideais, a fim de atingir o objetivo principal do trabalho, identificando a utilização de conceitos matemáticos na tecnologia abordada.

Delimitamos a região do rosto, para que não haja interferência de ruídos nas imagens garantindo, além do posicionamento das faces, a mesma resolução para todas as imagens.

Em seguida, as imagens são formatadas para escala de cinza, o que nos permite trabalhar com um número menor de cores.

A imagem é dividida em pixels (do inglês *picture elements*) e em seguida a cada um deles atribuímos o número correspondente à cor representada, nos permitindo representar esta imagem em uma matriz. Ou seja, destinamos cada número atribuído ao pixel, à uma entrada da matriz.

Uma imagem de  $64 \times 64$  pixels, por exemplo, é representada por uma matriz  $M_{64 \times 64}$ :

$$M_{64 \times 64} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,64} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{64,1} & \dots & m_{64,64} \end{bmatrix}.$$

Vamos agora separar esta matriz em linhas, denotando cada vetor linha da matriz  $M$  por  $l_i = \{m_{i,1}, \dots, m_{i,64}\}$ . Desta forma, teremos 64 vetores linha construídos. Transformemos agora cada  $l_i$  em sua forma transposta. Desta forma, teremos 64 vetores coluna construídos. Em seguida vamos ordenar todos os vetores  $l_i$  em uma única coluna.

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{64} \end{bmatrix}$$

Assim, ao observarmos cada elemento dos vetores  $l_i$ , podemos escrever a matriz coluna  $N_{64^2 \times 1}$ :

$$N_{64^2 \times 1} = \begin{bmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{1,64} \\ \vdots \\ m_{64,1} \\ \vdots \\ m_{64,64} \end{bmatrix}$$

Consideremos agora  $X$  um conjunto de faces descritas como acima, em vetores  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $X$  é representado pela matriz  $X_{n \times k}$ , composta por  $k$  colunas tal que cada uma delas é um vetor  $x_i$  do conjunto.

### 5.1.1 TRANSLAÇÃO

Inicialmente devemos calcular a face média  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i.$$

E em seguida construir a matriz  $Y$  tal que  $y_i = x_i - \bar{x}$ . Ou seja, tomando  $\bar{X}$  como sendo a matriz com todas as colunas iguais a  $\bar{x}$ , construímos a matriz que representa o quanto cada face está distante da face média. Subtraindo a face média de cada face:

$$Y = X - \bar{X}.$$

### 5.1.2 DIAGONALIZAÇÃO

Nesta etapa, vamos construir a matriz de covariância  $C(X)$ , o que nos fornecerá o quanto cada face está relacionada às demais do conjunto de faces:

$$C_{i,j}(X) = \text{cov}(x_i, x_j).$$

Desta forma, fixamos cada face e comparamos uma a uma com as demais. Assim, a matriz de dimensão  $i \times i$ ,  $C(X)$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} \text{cov}(x_1, x_1) & \dots & \text{cov}(x_1, x_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_i, x_1) & \dots & \text{cov}(x_i, x_j) \end{bmatrix}.$$

Em seguida determinaremos os autovetores, neste caso chamados de “autofaces” e autovalores de  $C$ :

$$Cv = \lambda v.$$

Podemos notar claramente, pelas entradas de  $C$ , que trata-se de uma matriz simétrica. Desta forma, pelo Teorema Espectral, podemos encontrar uma base  $B$  de autofaces de  $C$  que gera todo  $\mathbb{R}^n$ . Temos ainda que  $B$  diagonaliza  $C$  e os elementos da diagonal são os autovalores de  $C$ .

### 5.1.3 PROJEÇÃO

Organizamos agora as autofaces da matriz de covariância, classificando os componentes principais de acordo com sua ordem de importância. Desta forma, podemos escolher uma base de dimensão menor  $B' \subset B$  formada pelas autofaces associadas aos maiores autovalores  $\lambda$  de  $C$

$$B' = \{b'_1, \dots, b'_m\}.$$

Denotemos aqui por  $F$  o espaço gerado por  $B'$ .

Determinamos a projeção dos vetores de  $Y = X - \bar{X}$  no subespaço  $F$ :

$$v_F = F^T v.$$

Ao escolher um subconjunto  $B' \subset B$  contendo os autovetores associados aos maiores autovalores de  $C$ ,  $F$  conservará mais informação e terá maior capacidade de distinguir os objetos.

Quanto menos autofaces escolhidas, mais informações perdemos. Teremos ainda uma menor escolha de componentes principais, mas ainda mantendo a capacidade de descrever a diferença entre o objeto e a média.

Finalizada a projeção de  $y_i$  em  $F$ , é possível determinar a matriz  $Z_{m \times k}$  onde  $z_i = y_i F$ . Assim,

$$v_F = F^T v$$

$$Z = F^T Y.$$

Doravante denotaremos por  $F$  a matriz formada pelos vetores de  $B'$ . Para voltarmos os dados projetados no novo espaço, temos  $FF^T = I_{n \times n}$ .

Assim,

$$Z = F^T Y.$$

Multiplicando ambos os lados por  $F$ , temos

$$FZ = FF^T Y.$$

Como  $FF^T = I$ , então

$$FZ = IY.$$

Assim,

$$FZ = Y.$$

Mas  $Y = X - \bar{X}$ , portanto

$$\begin{aligned} Y &= FZ \\ X - \bar{X} &= FZ \\ X &= FZ + \bar{X}. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$x_i = Fz_i + \bar{x}.$$

Em termos geométricos, os componentes principais são os vetores presentes na imagem que correspondem à maior quantidade de dados.

## 5.2 EIGENFACES

O método possui abordagem bidimensional (2D), analisando a imagem como um todo, porém escolhendo os dados que realmente importam para reconhecer a face. A imagem passa a ser tratada como uma combinação de informações, embora que inicialmente pixel a pixel.

O processamento é dividido em duas grandes etapas, a preparação e o reconhecimento.

Considerando a imagem de entrada, a implementação é capaz de obter informações a fim de comparar com o banco de dados pré existente e identificar a face.

No primeiro momento, é aplicado o ACP e, em seguida, o algoritmo tenta identificar a imagem como sendo alguma das que estão armazenadas no banco de faces. Caso não consiga identificar, ou a precisão não tenha sido suficiente, o algoritmo aprende a imagem.

Desta forma, a cada execução o insucesso faz com que o banco de faces cresça, mantendo informações para posteriores reconhecimentos e garantindo também o aumento da possibilidade de localização da face de entrada.

### 5.2.1 TREINAMENTO

Consideremos aqui o algoritmo de uma implementação que não seja tão robusto em funcionalidades. Desta forma nos atentaremos para o objetivo central do trabalho que é discutir em termos matemáticos a tecnologia.

Como descrevemos anteriormente no método ACP, o algoritmo carrega as informações da imagem no banco de dados e as converte para escala de cinza, o que facilita na obtenção da matriz que contenha as informações em relação à cor.

Ocorre então o pré-processamento onde a partir da aplicação do método ACP, determinamos a face média e a matriz dos vetores transladados.

Determinamos a diferença dos vetores obtidos a partir da face de entrada pelo vetor da

face média.

Com isso é possível determinar a matriz de covariância e consequentemente os autovetores e autovalores associados.

Denotamos “eigenfaces” os autovetores determinados, uma vez que este conjunto de informações difere de indivíduo para indivíduo. Obtemos então a matriz de projeção e as imagens são transladadas.

Desta forma temos um grande conjunto de informações para efetuarmos a identificação, garantindo que o algoritmo quanto mais processa, mais aprende, maior fica o espaço facial e maior é a possibilidade de sucesso do processamento.

### 5.2.2 RECONHECIMENTO

Munido então das informações obtidas anteriormente, o algoritmo realiza a busca por estes dados, eigenfaces, no espaço de faces.

A seguir, temos as imagens da pesquisa de TURK e PENTLAND [10] que ilustram claramente a aplicação do método.

Na Figura 5.1, é apresentada a adaptação de uma face utilizada no estudo, conforme apresentada na seção da descrição do método, formatada na escala de cinza e dividida em pixels.

Figura 5.1 – Face dividida em pixels



Fonte: Eigenfaces for recognition(adaptação)

Na figura 5.2, observamos o Banco de faces criado para dar início à etapa de treinamento da aplicação.

Figura 5.2 – Banco de faces



Fonte: Eigenfaces for recognition

Temos dezesseis faces distintas posicionadas. Ressaltamos que, como elucidado sobre o método anteriormente, este banco de dados é ponto de partida para o treinamento e em seguida, cresce a cada execução em que uma face não é identificada dentre as armazenadas e é incorporada ao banco para as próximas execuções. Ou seja, temos um ganho de faces a cada insucesso na identificação.

A figura 5.3, representa a face média, calculada a partir das faces da Figura 5.2.

Figura 5.3 – Face Média



Fonte: Eigenfaces for recognition

Como visto anteriormente, dispendo das faces do banco de faces e realizando o cálculo da face média, é possível determinar as autofaces (eigenfaces).

Na sequência, temos sete das eigenfaces calculadas a partir das faces disponibilizadas inicialmente no banco de faces.

Figura 5.4 – Eigenfaces



Fonte: Eigenfaces for recognition

A seguir, temos uma face de entrada e sua projeção no espaço de faces definido pelas eigenfaces, mostrado na figura anterior.

Figura 5.5 – Imagem de entrada e sua projeção no espaço definido pela eigenface

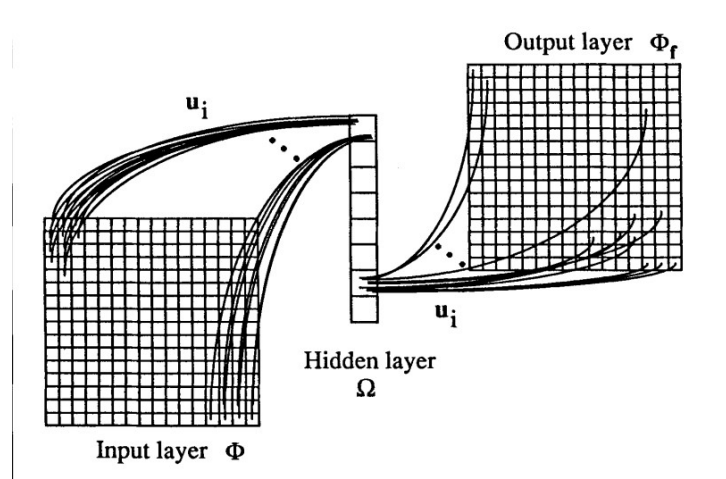


Fonte: Eigenfaces for recognition

Por fim temos uma representação de execução do cálculo de eigenface, onde as posições simétricas  $u_i$  representam as eigenfaces.

O processo consiste em tratar os dados de entrada a partir da obtenção das eigenfaces e comparar as informações de saída com as que já estão armazenadas no banco de faces.

Figura 5.6 – Entrada, processamento e saída.



Fonte: Eigenfaces for recognition

Como já explicitado anteriormente, o processo de reconhecimento consiste em o algoritmo, ao comparar as informações, encontrá-las ou não no banco de faces. Caso não encontre, é capaz de armazená-las para um próximo processamento.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O algoritmo ilustra de forma clara e didática a aplicação de conteúdos aprendidos por alunos dos mais diversos cursos de graduação de áreas exatas.

É evidente que a forma aqui apresentada é de cunho didático-descritivo, havendo necessidade de conhecimento técnico em área de computação e capacidade de processamento para efetivar a implementação de ferramentas que realmente executem o reconhecimento facial.

Optamos por manter um algoritmo mais perto das condições ideais possíveis, delimitando a imagem da face e padronizando a resolução, a fim de contemplar tão somente a utilização de conteúdos matemáticos aplicados à tecnologia abordada.

Tendo em vista as pesquisas realizadas para embasamento do trabalho, é possível concluir que quanto maior o padrão das imagens do banco de dados, menor a necessidade de robustez no algoritmo utilizado.

Quando efetuamos o processamento de imagens que não estejam no mesmo padrão, encontramos diversos obstáculos para o sucesso da execução:

- (i) Iluminação: como observado por FIGUEREDO [4] a iluminação do ambiente interfere consideravelmente na execução do algoritmo. Como é trabalhado com escala de cinza, imagens mais escuras ou muito mais claras, podem atrapalhar na obtenção de dados;
- (ii) Posição da face: não temos grandes prejuízos quando a imagem é invertida somente vertical ou horizontalmente, porém faces levemente rotacionadas ou de tamanhos diferentes (sem a limitação, estando longe ou muito perto) podem também atrapalhar o processamento;
- (iii) Ruídos: granulação ou resolução da imagem;
- (iv) Expressões faciais, uso de acessórios, corte de cabelo, dentre outras situações.

Além dos problemas já descritos, sabemos que características faciais mudam com o decorrer do tempo, havendo diferença entre o rosto de um indivíduo ainda bebê e na fase adulta, por exemplo.

Os métodos possuem diversas vantagens, quando comparado à outros, uma vez que é relativamente simplificado, possui a capacidade de aprendizagem de novas faces, além de que possui certa resistência a pequenas mudanças faciais, uma vez que utiliza características globais para efetuar a comparação.

Entretanto, destacamos que a melhor máquina para o processamento facial continua sendo o ser humano, uma vez que passa armazenando faces por toda a vida e em velocidade instantânea é capaz de identificar uma face, mesmo sendo exposta à alguma modificação.

Durante o desenvolvimento do trabalho analisamos os métodos ACP e Eigenface, o que nos possibilitou entrar em contato com um vasto conteúdo matemático, atingindo o objetivo inicial

do trabalho: responder o questionamento "onde vou usar isto?". Além disso será de grande contribuição na introdução teórica dos métodos aqui estudados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] W. Bledsoe. Some results on multicategory pattern recognition. *Journal of the ACM (JACM)*, 13(2):304–316, 1966.
- [2] W. Bledsoe. Semiautomatic facial recognition. *Technical report sri project 6693*, 1968.
- [3] V. V. Boas and G. Farias. *Álgebra linear aplicada a reconhecimento facial*. 2013.
- [4] M. B. Figueredo. *Reconhecimento de faces aplicado ao problema de pessoas desaparecidas - Estudo de caso do Eigenface*. Dissertação de mestrado. SENAI CIMATEC, 2011.
- [5] R. D. Joseph, S. Viglione, and H. Wolf. Cloud pattern recognition. In *Proceedings of the 1964 19th ACM national conference*, pages 42–301, 1964.
- [6] R. D. Joseph, S. Viglione, and H. Wolf. Identification of human faces. In *Proceedings of the IEEE*, pages 748–760, 1971.
- [7] L. N. Oliveira. *Álgebra Linear*, volume 1. A ser publicado.
- [8] C. Reis, E. Almeida, F. da Silva, and F. Dourado. Relatório sobre o uso de tecnologias de reconhecimento facial e câmeras de vigilância pela administração pública no brasil. 2021.
- [9] A. B. N. Silva. Reconhecimento facial utilizando eigenfaces. 2013.
- [10] M. Turk and A. Pentland. Eigenfaces for recognition. *Journal of cognitive neuroscience*, 3(1):71–86, 1991.
- [11] S. L. Zani. *Álgebra linear*. São Carlos: ICMC, 2003.