UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Trivialidade topológica relativa de família de funções

Vitor de Moraes Figueira

São Carlos-SP
Março de 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Trivialidade topológica relativa de família de funções

Vitor de Moraes Figueira

Orientador: Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Março de 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinatura dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Vitor de Moraes Figueira, realizada em 14/03/2025:

Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
UFSCar

Santana

Profa. Dra. Hellen Monção de Carvalho Santana
UFSCar

João Carlos F. Costa

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
UNESP

Agradecimentos

A Deus, pela força e proteção em todos os momentos desta jornada.

Ao meu orientador, Prof. Tomazella, por todo carinho, apoio, incentivo e amizade. Obrigado por todas as conversas e pela sinceridade.

Aos meus pais, Alexandra e Roberto, pelo apoio e amor incondicionais.

Ao meu irmão, Artur, por todo o companheirismo e amizade.

À Gabriela, pela compreensão, paciência e amor em todos os momentos.

Aos meus avôs, Ernestino e José, em memória.

Às minhas avós, Maria e Dalva, pelo zelo e dedicação à família.

Ao Prof. Alexandre Paiva Barreto, pela amizade e apoio durante a graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho investigamos a C^0-$\mathscr{R}_X$-trivialidade de famílias de germes $h : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, estendendo a $\mathscr{R}$-equivalência clássica ao contexto do grupo $\mathscr{R}_X$, que preserva uma subvariedade analítica $(X, 0)$. Analisamos condições suficientes para a trivialidade topológica baseadas no fecho integral do espaço tangente ao grupo $\mathscr{R}_X$, com destaque para deformações em variedades quase-homogêneas. Também estudamos a constância do número de Bruce-Roberts, μ_{BR}, em famílias de funções com singularidade isolada, adaptando um resultado de [14] para o contexto do grupo $\mathscr{R}_X$. Os resultados apresentados são fundamentados nos trabalhos [1], [5], [28] e [29].

Palavras-chave: Campos logarítmicos; fecho integral; $\mathscr{R}_X$-equivalência; trivialidade topológica;

Abstract

In this work, we investigate the C^0-$\mathscr{R}_X$-triviality of families of germs $h : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, extending the classical $\mathscr{R}$-equivalence to the context of the group $\mathscr{R}_X$, which preserves an analytic subvariety $(X, 0)$. We analyze sufficient conditions for topological triviality based on the integral closure of the tangent space to the group $\mathscr{R}_X$, with a particular focus on deformations in quasi-homogeneous varieties. We also study the constancy of the Bruce-Roberts number, μ_{BR}, in families of functions with isolated singularities, adapting a result from [14] to the context of the group $\mathscr{R}_X$. The results presented are based on the works [1], [5], [28] and [29].

Keywords: Logarithmic vector fields; integral closure; $\mathscr{R}_X$-equivalence; topological triviality;

Conteúdo

Introdução

O estudo de germes de funções $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ sob a ação do grupo $\mathscr{R}$, formado pelos germes de difeomorfismos de $\mathbb{C}^n$, conhecido como $\mathscr{R}$-equivalência, é um dos focos principais da teoria das singularidades. Há uma grande quantidade de informações disponíveis sobre esse tema, que podem ser encontradas em livros introdutórios da área, como em [13].

Sejam $(X, 0)$ o germe de uma subvariedade analítica de $\mathbb{C}^n$. J. Bruce e R. Roberts apresentaram em [5] uma generalização da $\mathscr{R}$-equivalência através do grupo $\mathscr{R}_X$ de germes de difeomorfismos de $\mathbb{C}^n$ que preservam X, onde dois germes f e g são $\mathscr{R}_X$-equivalentes se existir um difeomorfismo $\phi \in \mathbb{R}_X$ tal que $f = g \circ \phi$. É necessário, para o estudo da $\mathscr{R}_X$-equivalência, encontrarmos os campos logarítmicos de X, isto é, os campos de vetores tangentes a X.

O objetivo principal deste trabalho é investigar a C^0-$\mathscr{R}_X$-trivialidade em famílias de germes $h : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Especificamente, buscamos determinar condições que garantam a existência de um germe de homeomorfismo $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ que preserva o conjunto $X \times \mathbb{C}$ e satisfaça $h \circ H(x,t) = h_0(x)$, onde h_0 é um germe de função analítica $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado e h uma deformação analítica de h_0.

Nas preliminares, apresentamos uma visão geral dos principais pré-requisitos abordados ao longo do texto, com o objetivo de esclarecer as notações e apresentar alguns resultados fundamentais. Informações mais detalhadas podem ser encontradas nos livros [13] e [15].

No segundo capítulo, estudamos a $\mathscr{R}_x$-equivalência, o módulo Θ_X dos campos logarítmicos, o espaço tangente à $\mathscr{R}_X$-órbita de um germe f, bem como resultados envolvendo a determinação finita. Além disso, discutimos o Teorema da Transversal Completa para o grupo $\mathscr{R}_X$. Detalhes adicionais podem ser consultados em [5].

No terceiro capítulo é baseado nos artigos [28] e [29], ele contém a parte principal do trabalho no qual damos condições suficientes para a trivialidade em termos do espaço tangente do grupo $\mathscr{R}_X$, adaptando resultados de Gaffney [12] e Teissier [34]. Mostramos também que, se X é uma variedade analítica quase-homogênea e h é uma deformação de um germe quase-homogêneo h_0 (consistente com X) com termos de filtração maior ou igual à filtração de h_0, então h é topologicamente $\mathscr{R}_X$-trivial.

No quarto capítulo, baseado em [1], estudamos caracterizações da constância do número de Bruce-Roberts, μ_{BR}, em famílias de funções com singularidade isolada, cuja abordagem foi motivada por Greuel [14].

Finalizando, no apêndice abordamos alguns conceitos da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, no qual o Teorema de Kuo [21] é fundamental para demonstrarmos alguns dos resultados do Capítulo 3.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Ação de um grupo e espaço tangente

Por simplicidade, denotaremos a operação de grupo como sendo a justaposição.

Definição 1.1.1. *Sejam G um grupo e M um conjunto. Dizemos que G **age** em M se existe uma aplicação*

$$\begin{aligned}\phi : G \times M &\to M \\ (g,x) &\mapsto \phi(g,x) = gx,\end{aligned}$$

tal que para todo $x \in M$ e todos $g,h \in G$, temos

1. $1x = x$, *onde* 1 *é a identidade do grupo G;*

2. $(gh)x = g(hx)$.

*O conjunto $Gx = \{gx;\ g \in G\}$ é chamado de **órbita** de x em M. Dois elementos na mesma órbita são ditos **equivalentes**.*

Definição 1.1.2. *Seja G uma variedade diferenciável, a qual também é um grupo. Dizemos que G é um **grupo de Lie** se as aplicações*

$$\begin{aligned}G \times G &\to G \\ (g_1,g_2) &\mapsto g_1 g_2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

são diferenciáveis.

*Dizemos que um grupo de Lie G **age** em uma variedade diferenciável M quando existe uma ação de G em M que é diferenciável.*

Teorema 1.1.3. *Seja $\phi : G \times M \to M$ uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável M. Se as órbitas são subvariedades de M, então para todo $x \in M$ a aplicação $\phi_x : G \to Gx$ dada por $\phi_x(g) = gx$ é uma submersão. Além disso, o espaço tangente à orbita Gx em x é a imagem de $d\phi_x(1) : T_1G \to T_xM$, isto é,*

$$T_xGx = d\phi_x(1)(T_1G).$$

Demonstração. Veja [13], p. 74. ■

1.2 Transversal completa

Uma importante condição a ser analisada é quando um subconjunto de um espaço está contido numa única órbita, isto é, quando todos os elementos do conjunto são equivalentes.

Seja G um grupo de Lie agindo numa variedade X e seja Y uma subvariedade. Claramente, se Y está contida numa única órbita, isto é, $Y \subset Gy$, para algum $y \in Y$, então $T_yY \subset T_yGy$, para todo $y \in Y$. Além disso, verificamos que $dim(T_yGy)$ é constante.

Desta forma, as hipóteses do próximo resultado são naturais.

Lema 1.2.1. *[Lema de Mather, [22]] Sejam G um grupo de Lie agindo suavemente numa variedade X e $W \subset X$ uma subvariedade conexa. Então, W está contido numa única órbita se, e somente se,*

1. *$T_wW \subset T_wGw$, para qualquer $w \in W$;*
2. *$dim_{\mathbb{C}}(T_w(Gw))$ independe da escolha de $w \in W$.*

Demonstração. Veja [22], Lema 3.1. ■

Exemplo 1.2.2. *A condição (a) do lema anterior não é suficiente para garantirmos o resultado. De fato, seja G o subgrupo de matrizes em $Gl(2,\mathbb{R})$ que preserva o eixo x. Então,*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in Gl(2,\mathbb{R}) \right\}.$$

Seja $M = \mathbb{R}^2$ e suponhamos que a ação é dada por $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Existem duas órbitas, o eixo x e $M - \{eixo\ x\}$.

Se considerarmos X como a curva $y = x^2$, então X satisfaz o item (a) mas não satisfaz o item (b) e X não está contida em uma só órbita.

Teorema 1.2.3 ([4], Teorema da Transversal Completa)**.** *Sejam G um grupo de Lie agindo suavemente em um espaço afim A associado a um espaço vetorial V_A e $W \subset V_A$ um subespaço vetorial tal que*

$$T_{a+w}G\cdot(a+w) = T_aGa, \tag{1.1}$$

para qualquer $a \in A$ e qualquer $w \in W$. Então, *(1)* $a+(T_aGa\cap W)\subset Ga\cap(a+W)$, *para qualquer* $a\in A$*;*

(2) Se $a\in A$ *e* T *é um subespaço vetorial de* W *tais que*

$$W\subset T+T_aGa,$$

então para qualquer $w\in W$ *existem* $g\in G$ *e* $t\in T$ *tais que*

$$g(a+w)=a+t.$$

Demonstração. Veja [4], p. 255. ■

O item (2) do teorema acima nos diz que a transversal T da órbita de $a\in A$ intersecta cada órbita através do subespaço afim $a+W$ de A. Consequentemente, o subespaço T é referido como sendo uma **transversal completa**.

O objetivo é tornar o espaço T o menor possível, veja [4].

1.3 O anel $\mathscr{O}_n$

Nosso objetivo é estudar, localmente, funções analíticas $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$. Para isso, vamos introduzir uma relação de equivalência no espaço das funções analíticas definidas num aberto contendo a origem de $\mathbb{C}^n$ da seguinte maneira:

$$f\sim g\Leftrightarrow\exists \text{ aberto } V, \text{ com } 0\in V\subset\mathbb{C}^n \text{ tal que } f_{|_V}=g_{|_V}.$$

As classes dessa relação de equivalência são chamadas de **germes**, as quais são denotadas por $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},f(0))$ ou, simplesmente, por f. A coleção de todos esses germes de funções é denotada por $\mathscr{O}_n$.

Observação 1.3.1. *Observamos que* $\mathscr{O}_n$ *é um anel noetheriano (veja* [31]*, Teorema III 3.3, p. 57) local, cujo* ***ideal maximal*** *é dado por*

$$\mathscr{M}_n=\{f\in\mathscr{O}_n;\ f(0)=0\}.$$

De fato, é imediato que $\mathscr{M}_n$ *é um ideal. Para mostrar que é o único ideal maximal, suponha, por absurdo, que existe um ideal maximal* $I\subset\mathscr{O}_n$ *tal que* $I\neq\mathscr{M}_n$*. Então, se* $f\in I$ *temos que* $f(0)\neq 0$*. Como* f *é analítica (em particular, contínua) sabemos que existe um aberto* $U\subset\mathbb{C}^n$ *tal que* $f(x)\neq 0$, $\forall x\in U$*. Dessa forma, seja* $g(x)=1/f(x)$*. Assim, temos*

$$f(x)\cdot g(X)=1\Rightarrow 1\in I.$$

Com isso, $1\in I$ *e* $I=\mathscr{O}_n$*, o que é um absurdo.*

Definição 1.3.2. *(a) Consideremos os pesos* $w_1,\ldots,w_n\in\mathbb{Z}^+$*,* $i=1,\ldots,n$ *a um dado sistema de coordenadas* $x_1,\ldots,x_n$ *em* $\mathbb{C}^n$*. Definimos a* ***filtração*** *de um monômio* $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ *com respeito a esse sistema de pesos por* $fil(x^\alpha)=\sum_{i=1}^n\alpha_iw_i$*.*

(b) *Definimos a filtração no anel $\mathscr{O}_n$ através da função definida por*

$$fil(f) = \inf_{|\alpha|}\{fil(x^{\alpha}); \ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^{\alpha}}(0) \neq 0\},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

(c) *Dados $(w_1, \ldots, w_n : d_1, \ldots, d_p)$, $w_i, d_j \in \mathbb{Z}^+$, dizemos que um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é **quase-homogêneo** de tipo $(w_1, \ldots, w_n : d_1, \ldots, d_p)$ se, para todo $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, temos*

$$f(\lambda^{w_1} x_1, \ldots, \lambda^{w_n} x_n) = \left(\lambda^{d_1} f_1(x), \ldots, \lambda^{d_p} f_p(x)\right).$$

*O valor w_i é chamado **peso** da variável x_i e o valor d_j é a **filtração** de f_i com respeito ao sistema de pesos $(w_1, \ldots, w_n)$. Escrevemos: peso$(x_i) = w(x_i) = w_i$.*

*O caso em que todos os pesos w_i são iguais a 1, dizemos que o f é um germe de aplicação **homogêneo**.*

Definição 1.3.3. *Seja $f \in \mathscr{O}_n$. Para cada inteiro positivo k, definimos o k-jato de f por*

$$j^k(f) = j^k f(0) = p_k(f)(0) - f(0),$$

onde $p_k(f)(0)$ é o polinômio de Taylor de grau k do representante f no ponto $x = 0$. Notemos que esse polinômio independe do representante escolhido.

Notação 1.3.4. *Denotamos por $J^k(n)$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial dos k-jatos dos germes de $\mathscr{O}_n$ e por H^k o subespaço de $J^k(n)$ formado pelos polinômios homogêneos de grau k.*

Definição 1.3.5. *Seja $f \in \mathscr{O}_n$.*

(i) *Definimos o **ideal Jacobiano** de f como o ideal gerado pelas derivadas parciais de primeira ordem de f, isto é,*

$$J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

(ii) *Definimos a **codimensão** de f como a codimensão do seu ideal Jacobiano, isto é,*

$$codim(f) = codim(J_f) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_n}{J_f}.$$

*Este valor é chamado de **número de Milnor** do germe f.*

A seguir, enunciaremos um importante resultado que será utilizado ao longo deste texto.

Teorema 1.3.6 (Lema de Nakayama)**.** *Sejam M um $\mathscr{O}_n$-módulo finitamente gerado, N um submódulo de M e $I \subset \mathscr{M}_n$ um ideal. Se $M \subseteq IM + N$, então $M \subseteq N$.*

Demonstração. Veja [13], p. 102. ∎

1.4 Germes de variedades

Nosso objetivo nesta seção é definir alguns conceitos fundamentais sobre germes de variedades que utilizaremos ao longo do texto. Também enunciaremos alguns resultados que serão úteis em alguns exemplos e resultados.

Dados dois subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{C}^n$, dizemos que X e Y são **equivalentes** em um ponto $z \in X \cap Y$ se existir uma vizinhança U de z tal que $X \cap U = Y \cap U$. A *classe de equivalência do conjunto* X em um ponto z é chamada de **germe do conjunto** X e denotada por (X, z) ou, simplesmente, por X quando o ponto z estiver subentendido.

Seja $f \in \mathscr{O}_n$. Denotamos por $\mathscr{V}(f)$ a classe de equivalência do conjunto $\{x \in \mathbb{C};\ f(x) = 0\}$, onde f é um representante do germe f. Se f_1 e f_2 são dois representantes de um mesmo germe, então os conjuntos $\mathscr{V}(f_1)$ e $\mathscr{V}(f_2)$ são iguais.

Um **germe de variedade** (X, x) é um conjunto do tipo:

$$X = \bigcap_{i=1}^{r} \mathscr{V}(f_i) = \mathscr{V}(f_1, \ldots, f_r),$$

para determinados $f_1, \ldots, f_r \in \mathscr{O}_n$.

- Chamamos de **germe de variedade analítica** em x um germe de conjunto X em x tal que, para alguma vizinhança V de x, o germe $X \cap V$ pode ser descrito por $\mathscr{V}(f_1, \ldots, f_r)$, para alguns germes de funções analíticas $f_1, \ldots, f_r \in \mathscr{O}_n$.

- Dizemos que um germe de variedade X é **irredutível** quando para quaisquer germes X_1 e X_2 tais que $X = X_1 \cup X_2$ temos $X = X_1$ ou $X = X_2$.

- Dizemos que um germe de variedade $X = \mathscr{V}(f_1, \ldots, f_r)$ é **reduzido** se a $\mathbb{C}$-álgebra local

  $$\frac{\mathscr{O}_n}{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$$

  não possuir elementos nilpotentes.

- Dizemos que um germe de variedade X é **quase-homogêneo** se X for definido por um germe de aplicação quase-homogêneo.

Denotamos por $\mathscr{O}_{X,x_0} = \frac{\mathscr{O}_n}{\mathscr{I}(X)}$ o **anel local de um germe de variedade analítica**.

Dizemos que um ponto x de um germe de variedade X é um **ponto regular** se X for, localmente, uma variedade analítica em uma vizinhança de x, ou seja, existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap X$ pode ser descrito, localmente, como o conjunto de zeros de uma coleção finita de funções analíticas $f_1, \ldots, f_k$ cuja matriz Jacobiana dessas funções em x tem posto k. Um ponto de X que não é regular é chamado de **ponto singular** de X.

Proposição 1.4.1. *Seja X um germe de variedade. Então, existem um inteiro positivo p e $X_1, \ldots, X_p$ variedades irredutíveis, com $X_i \not\subset X_j$ para todo $i \neq j$, tais que $X = X_1 \cup \ldots \cup X_p$.*

Além disso, essas variedades são unicamente determinadas, a menos da ordem, e são chamadas de ***componentes irredutíveis*** *de X.*

Demonstração. Veja [16], p. 89. ■

Seja $Y = \mathscr{V}(f_1, \ldots, f_r)$ uma variedade irredutível. Definimos

$$dim(Y) = n - \max_{x \in Y} posto\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{n \times r}\right).$$

Se X é uma variedade e $X = X_1 \cup \ldots \cup X_p$ é a sua decomposição em componentes irredutíveis, então

$$dim(X) = \max_{1 \leq i \leq p} dim(X_i).$$

Além disso, se $x \in X$, a **dimensão** da variedade $X = X_1 \cup \ldots \cup X_p$ no ponto x é

$$dim_x(X) = \max_{x \in X_i} dim(X_i).$$

Definimos o **ideal** de um germe de variedade X por

$$\mathscr{I}(X) = \{f \in \mathscr{O}_n;\ f(x) = 0,\ \forall x \in X\}.$$

Observemos que $\mathscr{I}(X)$ definido acima é um ideal de $\mathscr{O}_n$.

Sendo I um ideal de $\mathscr{O}_n$, o próximo resultado relaciona o ideal da variedade $\mathscr{V}(I)$ com seu radical.

Teorema 1.4.2 (Hilbert's Nullstellensatz - versão local)**.** *Seja I um ideal de $\mathscr{O}_n$. Então,*

$$\mathscr{I}(\mathscr{V}(I)) = Rad(I),$$

onde $Rad(I)$ é o ideal $\{f \in \mathscr{O}_n;\ \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in I\}$.

Demonstração. Veja [15], p. 660. ■

A próxima definição será útil para a Proposição 2.1.5.

Definição 1.4.3 ([10], Definição 4.1.18)**.** *Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de variedade analítica e suponha que a quantidade mínima de geradores de $\mathscr{I}(X)$ é k. Dizemos que $(X,0)$ é uma* ***interseção completa*** *se a dimensão de $(X,0)$ é $n-k$.*

1.5 Anéis Cohen-Macaulay e fecho integral de ideais

A seguinte definição nos diz quando um anel local é Cohen-Macaulay.

Definição 1.5.1 ([10], Definição 6.5.1)**.** *Sejam (R,m) um anel local, com ideal maximal m e M um R-módulo.*

*(1) Uma sequência $f_1,\dots,f_r$ de elementos em m é chamada **sequência regular** de M se f_1 não é um divisor de zero de M e f_i não é um divisor de zero de $M/(f_1,\dots,f_{i-1})M$, para $i=2,\dots,r$.*

(2) Seja $I \subset R$ um ideal com $IM \neq M$. Definimos a I-altura de M, denotada por $altura(I,M)$, como o comprimento máximo de uma sequência regular de M em I. Se $IM = M$, definimos $altura(I,M) = \infty$.

(3) A altura de M, denotada por $altura(M)$, é o comprimento máximo de uma sequência regular em M, ou seja, $altura(M) = altura(m,M)$. Se quisermos enfatizar o anel R, podemos escrever $altura_R(M)$.

*(4) O módulo M é **Cohen-Macaulay** se a altura de M é igual à dimensão de M. A dimensão do módulo M é definida como sendo a dimensão de $R/Ann(M)$, onde $Ann(M)$ é o anulador de M.*

(5) R é Cohen-Macaulay se R é um R-módulo Cohen-Macaulay.

(6) Um germe (X,x) é Cohen-Macaulay se $\mathscr{O}_{X,x} = \frac{\mathscr{O}_n}{\mathscr{I}(X)}$ é Cohen-Macaulay.

Definição 1.5.2. *Seja I um ideal num anel A. Um elemento $h \in A$ é dito ser **integral** sobre I se ele satisfaz a relação de dependência integral $h^n + a_1h^{n-1} + \dots + a_n = 0$, com $a_i \in I^i$, para algum $n \in \mathbb{N}$. O conjunto de tais elementos forma um ideal em A, chamado de **fecho integral** de I em A, denotado por $\overline{I}$.*

Definição 1.5.3. *Seja $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de difeomorfismo. Definimos a aplicação φ^* por*

$$\begin{aligned} \phi^* &: \mathscr{O}_n \to \mathscr{O}_n \\ \phi^*(f) &= f \circ \phi. \end{aligned}$$

Ao considerarmos nosso anel A como sendo $\mathscr{O}_{X,x_0}$, isto é, um anel local de um germe de variedade analítica, Teissier mostra em [34] várias noções equivalentes do conceito acima.

Teorema 1.5.4 ([12], Proposição 1.2)**.** *Sejam X um germe de variedade analítica e I um ideal em $\mathscr{O}_{X,x_0}$. As seguintes sentenças são equivalentes.*

(i) $h \in \overline{I}$.

(ii) *Para cada escolha de geradores* $\{g_i\}$ *de* I*, existe uma vizinhança* U *de* x_0 *e uma constante* $C > 0$ *tal que para todo* $x \in U$ *temos*

$$|h(x)| \leq C \cdot \sup_i |g_i(x)|.$$

(iii) *Para cada curva analítica* $\phi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x_0)$*,* $h \circ \phi$ *pertence a* $(\phi^*(I))\mathscr{O}_1$*.*

O item (iii) do teorema acima é chamado **critério de valorização para dependência integral**.

CAPÍTULO 2

$\mathscr{R}_X$-equivalência

Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de subvariedade analítica reduzida.

Nosso objetivo, neste capítulo, é introduzir e descrever a $\mathscr{R}_X$-equivalência, além de determinar o espaço tangente à $\mathscr{R}_X$-órbita de um germe.

Definição 2.0.1. *Seja $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de difeomorfismo. Dizemos que ϕ **preserva** X se o isomorfismo induzido*

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathscr{O}_n &\to \mathscr{O}_n \\ \phi^*(f) &= f \circ \phi \end{aligned}$$

preserva o ideal $\mathscr{I}(X)$, isto é, $\phi^*(\mathscr{I}(X)) = \mathscr{I}(X)$.

O grupo formado por tais germes é denotado por $\mathscr{R}_X$, onde $\mathscr{R}$ é o grupo de germes de difeomorfismos de $(\mathbb{C}^n,0)$.

Notemos que um germe de difeomorfismo $\phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^n,0)$ preserva X se, e somente se, $(\phi(X),0) = (X,0)$, ou seja,

$$\mathscr{R}_X = \{\phi \in \mathscr{R};\ \phi(X) = X\}.$$

Definição 2.0.2. *Dois germes $f,g \in \mathscr{O}_n$ são $\mathscr{R}_X$**-equivalentes** se existir um difeomorfismo $\phi \in \mathscr{R}_X$ tal que $f = g \circ \phi$, denotamos esta equivalência por $f \sim_{\mathscr{R}_X} g$.*

Notemos que a $\mathscr{R}_X$-equivalência é uma relação de equivalência.

2.1 Campos logarítmicos

Nosso objetivo é identificar germes de difeomorfismos que preservam X. Para isso, utilizamos a técnica de integrar campos de vetores tangentes a X. A seguir, descrevemos esses campos de vetores.

Definição 2.1.1. *1. Denotamos por Θ_n o $\mathscr{O}_n$-módulo formado pelos germes de campos de vetores analíticos de $\mathbb{C}^n$ na origem. Dado $\xi \in \Theta_n$, podemos escrever*

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

*Dizemos que $\xi \in \Theta_n$ é **logarítmico** para X se*

$$\xi(h) = dh(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial h}{\partial x_j} \in \mathscr{I}(X),$$

para qualquer $h \in \mathscr{I}(X)$. O $\mathscr{O}_n$-submódulo formado pelos germes de campos de vetores logarítmicos é denotado por $\Theta_{(X,0)}$. Quando o ponto $x = 0$ estiver subentendido, escrevemos Θ_X.

2. *Denotamos por Θ_X^0 o $\mathscr{O}_n$-módulo formado pelos campos de vetores de Θ_X que se anulam na origem.*

A próxima proposição nos dá um significado geométrico para o $\mathscr{O}_n$-módulo Θ_X.

Proposição 2.1.2. *Seja $X = \bigcup_{j=1}^{p} X_j$ a decomposição em componentes irredutíveis de X. Então $\xi \in \Theta_X$ se, e somente se, para cada ponto regular x, suficientemente próximo da origem, de cada componente irredutível X_j de X, o campo ξ é tangente à X_j em x.*

Demonstração. Sejam ξ um representante de um germe em Θ_X e $x \in X$ um ponto regular da componente irredutível X_j suficientemente próximo da origem. Como $\mathscr{I}(X)$ é finitamente gerado, podemos escolher germes $f_1, \ldots, f_r$, onde $f_i : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ são tais que o germe (X,x) é a imagem inversa do valor regular $0 \in \mathbb{C}^r$ por $f = (f_1, \ldots, f_r)$, isto é,

$$(X,x) = f^{-1}(0) = \bigcap_{i=1}^{r} f_i^{-1}(0).$$

Como $\xi(f_1), \ldots, \xi(f_r)$ se anulam em x, uma vez que $f_i \in \mathscr{I}(X,x)$ e x está suficientemente próximo da origem, então ξ é tangente à X_j em todo ponto regular x próximo da origem.

Por outro lado, seja ξ um campo de vetor tangente às partes suaves X_j, $1 \leq j \leq p$. Se $h \in \mathscr{I}(X)$ e $x \in X_j$ é um ponto regular, então como h se anula em x temos que $\xi(h)$ também se anula em x. Dessa maneira, $\xi(h)$ se anula em cada componente X_j e, portanto, se anula em X. ∎

O seguinte resultado é uma consequência imediata da proposição acima e relaciona o conjunto dos campos logarítmicos com os campos logarítmicos das componentes irredutíveis de X.

Corolário 2.1.3. *Se $X = \bigcup_{j=1}^{p} X_j$ é a decomposição em componentes irredutíveis de X, então $\Theta_X = \bigcap_{j=1}^{p} \Theta_{X_j}$.*

Definição 2.1.4. *Dizemos que um germe $f \in \mathscr{M}_n$ possui uma* ***singularidade isolada na origem*** *em X quando o germe de*

$$\{x \in \mathbb{C}^n;\ \delta(f)(x) = 0,\ \forall \delta \in \Theta_X\}$$

na origem é igual a $\{0\}$.

Observamos que não é uma tarefa simples determinar o módulo Θ_X para uma variedade analítica arbitrária. No entanto, quando X é um germe de interseção completa, com singularidade isolada e definido por um germe de aplicação quase-homogêneo, o próximo resultado nos dá os geradores para Θ_X.

Proposição 2.1.5 ([5], Proposição 7.2)**.** *Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de interseção completa, com singularidade isolada, definido por um germe de aplicação quase-homogêneo $h : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^l,0)$, com pesos w_j, $j = 1,\dots,n$. Então Θ_X é gerado pelos campos de vetores $h_i\partial/\partial x_j$, onde $i = 1,\dots,l$, pelo campo de Euler $\sum_{i=1}^n w_j x_i \partial/\partial x_i$ e pelos campos de vetores triviais:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_{l+1}}} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{i_{l+1}}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_{i_{l+1}}} \end{vmatrix}$$

para todas $(l+1)$-ênuplas $i_1,\dots,i_{l+1}$ satisfazendo $1 \le i_1 < i_2 \dots < i_{l+1} \le n$.

Demonstração. Veja [5], Proposição 7.2. ■

Exemplo 2.1.6. *Seja X a variedade de $\mathbb{C}^3$ definida por $X = \mathscr{V}(z^3 - x^2 - y^2)$ e consideremos $h = z^3 - x^2 - y^2$. Vamos calcular os geradores de Θ_X. Pela Proposição 2.1.5, temos que Θ_X é gerado por*

(1) Campos da forma $h_i\partial/\partial x_j$, ou seja,

$$(z^3 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x}, \quad (z^3 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y}, \quad (z^3 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z};$$

(2) Campo de Euler dado por $\sum_{i=1}^n w_j x_i \partial/\partial x_i$, onde $w_1 = 3$, $w_2 = 3$ e $w_3 = 2$. Assim, temos o campo

$$3x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}.$$

(3) Campos triviais dados pelo determinante dois a dois das derivadas parciais de h, isto é,

3-1)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -2x & -2y \end{vmatrix} = -2y\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y};$$

3-2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2x & 3z^2 \end{vmatrix} = 3z^2\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial z};$$

3-3)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y & 1 \end{vmatrix} = 3z^2\frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Então, Θ_X é gerado pelos campos

- $(z^3-x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial x}, \quad (z^3-x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial y}, \quad (z^3-x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial z},$
- $3x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z},$
- $-2y\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}, \quad 3z^2\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial z}, \quad 3z^2\frac{\partial}{\partial y} + 2y\frac{\partial}{\partial z}.$

Notemos que todos os campos que geram Θ_X se anulam na origem. Logo, esses mesmos campos geram Θ_X^0.

A seguir, apresentaremos como é possível encontrar difeomorfismos que preservam uma determinada variedade analítica X.

Dado um germe de aplicação analítica $\xi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to \mathbb{C}^n$, onde as coordenadas de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ são denotadas por (x,t), com $x \in \mathbb{C}^n$ e $t \in \mathbb{C}$, podemos considerar o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^n$:

$$x'(t) = \xi(x(t),t).$$

Para cada condição inicial $x(0) = x_0$, este sistema tem uma única solução que é uma aplicação $\varphi(t)$ definida em uma vizinhança de 0 de $\mathbb{C}$. Além disso, essa solução depende diferenciavelmente da condição inicial x_0 (veja [32], p. 90 e [33], p. 33).

Para a linguagem de germes, podemos expressar essas condições dizendo que existe um único germe $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, com $F(x,t) = F_t(x)$, que verifica:

(1) $F(x,0) = x$;

(2) $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = \xi(F(x,t),t)$.

Tal germe F recebe o nome de **fluxo** de ξ.

A seguir, apresentamos um importante resultado que envolve o fluxo gerado por um campo logarítmico ξ.

Proposição 2.1.7. *Seja $\xi \in \Theta_X^0$. Então, o fluxo F gerado por ξ preserva X. Dessa forma, $F \in \mathscr{R}_X$ para todo t suficientemente próximo da origem.*

Demonstração. Queremos mostrar que para todo t suficientemente próximo da origem e para todo $h \in \mathscr{I}(X)$ temos $h \circ F \in \mathscr{I}(X)$, pois, assim, teremos $h(F(x,t)) = 0$ e, portanto, $F(x,t) \in X$. Notemos ainda que Θ_X^0 se anula na origem. Dessa forma, vamos verificar que a expansão de Taylor de $h \circ F$ é identicamente nula em $t = 0$ e $x \in X$.

Seja $x \in X$ um ponto arbitrário. Então, $(h \circ F)(x,t) = h(F(x,t))$ e, avaliando em $t = 0$, obtemos $h(F(x,0)) = h(x) = 0$, pois $h \in \mathscr{I}(X)$.

Se

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(h \circ F)(x,t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_j}(F(x,t)) \cdot \frac{\partial F_j}{\partial t}(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_j}(F(x,t)) \cdot \xi_j(F(x,t)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} \right)(F(x,t)) \qquad (2.1) \\
&= \xi(h)(F(x,t)).
\end{aligned}$$

Avaliando em $t = 0$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}(h \circ F)(x,0) = \xi(h)(F(x,0)) = \xi(h)(x) = 0, \qquad (2.2)$$

pois $h \in \mathscr{I}(X)$.

Pela Equação 2.2, temos que $\xi(h) \in \mathscr{I}(X)$. Como $\mathscr{I}(X)$ é finitamente gerado, digamos $\mathscr{I}(X) = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$ temos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathscr{O}_n$ tais que

$$\xi(h)(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) g_i(x).$$

Dessa forma, para a 2ª derivada, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}(h \circ F)(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(F(x,t)) g_i(F(x,t)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha_i(F(x,t)) g_i(F(x,t)) + \alpha_i(F(x,t)) \frac{\partial}{\partial t} g_i(F(x,t)) \right).
\end{aligned}$$

Notemos que ao avaliarmos em $t = 0$, temos $\frac{\partial}{\partial t} \alpha_i(F(x,t)) g_i(F(x,t)) = 0$ e

$$\frac{\partial}{\partial t} g_i(F(x,t))_{|_{t=0}} = \frac{\partial}{\partial t}((g_i \circ F)(x,t))_{|_{t=0}} \overset{(2.1)}{=} 0,$$

pois $g_i \in \mathscr{I}(X)$, para todo $x \in X$ e $i = 1, \ldots, r$.

Por indução, vamos supor que para $k \geq 1$ temos

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}(h \circ F)(x,t)_{|_{t=0}} = 0. \qquad (2.3)$$

Primeiramente, observemos que nesta hipótese de indução, também sabemos que todas as derivadas de ordem s, $1 < s < k$, também são identicamente nulas em $t = 0$, por construção.

Queremos mostrar que

$$\frac{\partial^{k+1}}{t^{k+1}}(h \circ F)(x,t)_{|_{t=0}} = 0.$$

Como $(h \circ F)(x,t)_{|_{t=0}} \in \mathscr{I}(X)$, existem $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathscr{O}_n$ tais que

$$(h \circ F)(x,t)_{|_{t=0}} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i(F(x,t))g_i(F(x,t))_{|_{t=0}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1}}{t^{k+1}}(h \circ F)(x,t)_{|_{t=0}} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}(h \circ F)(x,t)_{|_{t=0}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\beta_i(F(x,t))g_i(F(x,t))_{|_{t=0}}\right)\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois ao calcular a k-ésima derivada de $h \circ F$, temos as seguintes possibilidades

(a) Temos um produto de $\beta_i(F(x,t))$ com uma derivada de ordem s de $g_i(F(x,t))$, onde esta última é igual a 0 pelo processo de indução

(b) Temos um produto de uma derivada de ordem s de $\beta_i(F(x,t))$ com $g_i(F(x,t))$ que resulta em 0 pois $g_i \in \mathscr{I}(X)$.

(c) Temos um produto de uma derivada de ordem s de $\beta_i(F(x,t))$ com uma derivada de ordem $l, 1 < l < k$, de $g_i(F(x,t))$, onde esta última é igual a 0 pelo processo de indução.

Dessa forma,

$$\frac{\partial^{k+1}}{t^{k+1}}(h \circ F)(x,t)_{|_{t=0}} = 0.$$

e provamos a indução.

Portanto, $h \circ F$ é identicamente nula para todo $x \in X$ e todo t suficientemente próximo da origem. Consequentemente, $h \circ F \in \mathscr{I}(X)$, como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 2.1.8. *Como no Exemplo* 2.1.6*, seja X a variedade de $\mathbb{C}^3$ definida por $X = \mathscr{V}(z^3 - x^2 - y^2)$. Vamos calcular o fluxo gerado pelo campo $\xi(x,y,z) = 3x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}$ e verificar que, de fato, ele preserva X.*

O fluxo de um campo vetorial é a solução do sistema de equações diferenciais

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \xi_1(x,y,z), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \xi_2(x,y,z), \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \xi_3(x,y,z),$$

com condições iniciais $\varphi(0) = (x_0, y_0, z_0)$. Resolvendo, obtemos $x(t) = x_0e^{3t}$, $y(t) = y_0e^{3t}$ e $z(t) = z_0e^{2t}$.

Com isso, temos que o fluxo $F : (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ gerado pelo campo ξ é dado por $F(x,y,z,t) = (xe^{3t}, ye^{3t}, ze^{2t})$. Notemos que F preserva X, pois

$$\begin{aligned}(h \circ F_t)(x,y,z) &= h(xe^{3t}, ye^{3t}, ze^{2t}) = (ze^{2t})^3 - (xe^{3t})^2 - (ye^{3t})^2 \\ &= (z^3 - x^2 - y^2)e^{6t} \\ &\overset{z^3=x^2+y^2}{=} 0.\end{aligned}$$

2.2 Espaço tangente à $\mathscr{R}_X$-órbita

Para verificar a determinação finita sob a $\mathscr{R}_X$-equivalência, é necessário identificar o espaço tangente à $\mathscr{R}_X$ órbita de um germe f. Dado um inteiro k positivo e usando Teorema 1.1.3, trabalhando com o espaço dos k-jatos $\mathscr{R}_X^k$ e a variedade diferenciável $J^k(n,1)$, precisamos determinar o espaço tangente $T_1\mathscr{R}_X^k$.

Lema 2.2.1. *Dado um inteiro positivo k e um germe $f \in \mathscr{O}_n$, temos $T_1\mathscr{R}_X^k = j^k\left(\Theta_X^0\right)$.*

Demonstração. a) $T_1\mathscr{R}_X^k \subseteq j^k\left(\Theta_X^0\right)$

Sejam

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_1\mathscr{R}_X^k$$

e

$$\begin{aligned}\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{R}_X^k, \quad \alpha(0) = 1, \quad \alpha'(0) = \xi \\ \alpha(t)(x) = x + t\xi(x).\end{aligned}$$

Notemos que $\alpha(t)(x) \in \mathscr{R}_X^k$ para qualquer t suficientemente pequeno. Além disso, $\xi(0) = 0$ pois os difeomorfismos de $\mathscr{R}_X$ preservam a origem.

Queremos mostrar que

$$\xi(h) \in \mathscr{I}(X), \text{ para todo } h \in \mathscr{I}(X).$$

De fato, para qualquer $x \in X$ e qualquer $h \in \mathscr{I}(X)$, temos, por construção,

$$h(\alpha(t)(x)) = 0.$$

Derivando ambos os lados da equação em relação a t, obtemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(h \circ \alpha(t)(x)) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j'(t)(x) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}(\alpha(t)(x)).$$

Avaliando em $t = 0$, temos

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j'(0)(x) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}(\alpha(0)(x)) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = \xi(h)(x) \Rightarrow \xi(h) \in \mathscr{I}(X)$$

e, portanto, segue que $\xi \in j^k(\Theta_X^0)$.

b) $j^k\left(\Theta_X^0\right) \subseteq T_1\mathscr{R}_X^k$

Suponha $\xi \in j^k(\Theta_X^0)$. Pela Proposição 2.1.7, sabemos que o fluxo F gerado por ξ preserva X. Com isso, consideremos a curva

$$\alpha(t) = j^k(F(x,t)) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{R}_X^k, \quad \alpha(0) = 1.$$

Portanto, $\xi \in T_1\mathscr{R}_X^k$.

■

Com este resultado, podemos determinar o espaço tangente à uma $\mathscr{R}_X^k$-órbita em um germe f, usando o Teorema 1.1.3.

Fixamos um k-jato $f \in J^k(n,1)$ e definimos

$$\begin{aligned} \phi_f : \mathscr{R}_X^k &\to J^k(n) \\ h &\mapsto j^k(f \circ h^{-1}) = j^k f \circ j^k h^{-1}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.1.3, temos

$$T_f\mathscr{R}_X^k f = d\phi_f(1)T_1\mathscr{R}_X^k \overset{Lema\,2.2.1}{=} d\phi_f(1)(j^k(\Theta_x^0)).$$

Desta forma, tomando $\xi \in j^k(\Theta_X^0)$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{R}_X^k$ como no Lema 2.2.1(a), temos

$$\begin{aligned} (\phi_f \circ \alpha)' = (j^k(f \circ \alpha))' = j^k((f \circ \alpha)') &= j^k\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha(t))\right) \\ &= j^k\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_j(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right) \\ &= j^k\left(\xi(f)\right) \in T_f\mathscr{R}_X^k f, \end{aligned}$$

onde $\xi_j \in \mathscr{M}_n$ pois $\alpha(t) \in \mathscr{R}_X^k$ para qualquer t. Portanto, esse campo se anula na origem e, assim,

$$T_f\mathscr{R}_X^k f = j^k\left(\theta_X^0 f\right). \tag{2.4}$$

Desta forma, a seguinte definição é natural.

Definição 2.2.2. *Definimos o* ***espaço tangente à $\mathscr{R}_X$-órbita*** *de um germe $f \in \mathscr{O}_n$ como sendo o conjunto*

$$\Theta_X^0 f = \{\delta(f);\ \delta \in \Theta_X^0\}.$$

O espaço tangente estendido à $\mathscr{R}_X$-órbita de um germe f é o conjunto

$$\Theta_X f = \{\delta(f);\ \delta \in \Theta_X\}.$$

Exemplo 2.2.3. *Seja $X = \mathscr{V}(x^5 - y^2)$ uma variedade analítica de $\mathbb{C}^2$. Temos que o campo de vetores tangentes é gerado por*

$$\xi_1(x,y) = (2x, 5y) \quad e \quad \xi_2(x,y) = (2y, 5x^4).$$

Considere o germe de função $f(x,y) = y^2 + xy$. Notemos que $df = \begin{pmatrix} y & 2y+x \end{pmatrix}$. Dessa forma, o espaço tangente à $\mathscr{R}_X$-órbita de f é dado por

$$\Theta_X^0 f = \langle \xi_1(f), \xi_2(f) \rangle(x,y) = \langle 7xy + 10y^2, 5x^5 + 10x^4 y + 2y^2 \rangle.$$

2.3 Determinação finita

Vamos exibir alguns métodos que nos ajudem a classificar germes sob a determinação finita da $\mathscr{R}_X$-equivalência.

Definição 2.3.1. *Seja k um inteiro positivo. Um germe $f \in \mathscr{O}_n$ é* ***k-$\mathscr{R}_X$-determinado*** *se para todo $g \in \mathscr{O}_n$ tal que $j^k f(0) = j^k g(0)$ temos $f \sim_{\mathscr{R}_X} g$.*

Dizemos que f é ***$\mathscr{R}_X$-finitamente determinado*** *quando f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado para algum inteiro positivo k.*

Teorema 2.3.2. *Seja $f \in \mathscr{M}_n$. Se o ideal $\Theta_X^0 f$ contém alguma potência do ideal maximal $\mathscr{M}_n$, então f é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado. Mais ainda, se $\mathscr{M}_n^k \subset \Theta_X^0 f$, então f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado.*

Demonstração. Seja $g \in \mathscr{M}_n$ tal que $j^k(f) = j^k(g)$. Logo, $g - f \in \mathscr{M}_n^{k+1}$. Definimos a família

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (x,t) &\mapsto F(x,t) = (1-t) f(x) + t g(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

e denotemos $F_t(x) = F(x,t)$. Dessa forma, $F_1(x) = g(x)$ e $F_0(x) = f(x)$.

Seja $I \subset \mathbb{C}$ um compacto contendo 0 e 1. Basta mostrarmos que F_s é $\mathscr{R}_X$-equivalente a F_t, para todos $s,t \in I$. Fixamos $s \in I$ e, por compacidade, basta mostrarmos tal fato para todo t suficientemente próximo de s.

Seja $s_0 \in I$ fixado arbitrariamente. Queremos mostrar que existe uma família de difeomorfismos $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, preservando X, que satisfaz:

(i) $H(x, s_0) = x$;

(ii) $H(0,t) = 0$;

(iii) $F(H(x,t),t) = F(x, s_0)$.

Notemos que, por (iii), $F(H(x,t),t)$ não depente de t. Dessa forma, (iii) é equivalente a:

(iii)' $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x,t),t)\frac{\partial H_j}{\partial t}(x,t)\right)+\frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t)=0.$

Com isso, para mostrarmos (i), (ii) e $(iii)'$ basta encontrarmos um campo ξ na origem de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}$ tal que

(a) $\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial F}{\partial x_j}=-\frac{\partial F}{\partial t}$;

(b) $\xi_j(0,t)=0$, para qualquer $j=1,\dots,n$;

(c) $\xi_t\in\Theta_X^0$, para cada t fixo.

Observemos ainda que, se o campo ξ existir, seu fluxo H preserva X, para cada t fixo (Proposição 2.1.7) e, pela definição de fluxo, H verifica:

(1) $H(x,s_0)=x$;

(2) $\frac{\partial H}{\partial t}(x,t)=\xi(H(x,t),t)$.

Além disso, o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial t}(x,t)=\xi(H(x,t),t)\\ H(0,s_0)=0\end{cases}$$

tem solução única $H(0,t)=0$. Com isso, mostramos (ii) e, por consequência, (b) e (c). Resta-nos mostrar (a) para provarmos a existência do campo ξ.

Por (2.5), vejamos que $f=F+t(f-g)$. Além disso, se $\eta\in\Theta_X^0$, então tomando $\eta(F)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial F}{\partial x_j}$ e considerando o germe $(x_1,\dots,x_n,t)\mapsto t$ como um elemento de $\mathscr{O}_{n+1}$ que só depende de t, temos

$$\eta(f)=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial F}{\partial x_j}+t\sum_{j=1}^{n}\eta_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}-\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)\in\Theta_X^0F+\mathscr{M}_{n+1}\mathscr{M}_n^{k+1}\qquad(2.6)$$

e, consequentemente,

$$\mathscr{M}_n^{k+1}\subseteq\mathscr{M}_n^{k}\overset{\text{hipótese}}{\subseteq}\Theta_X^0f\overset{(2.6)}{\subseteq}\Theta_X^0F+\mathscr{M}_{n+1}\mathscr{M}_n^{k+1}.$$

Segue do Lema de Nakayama 1.3.6 que $\mathscr{M}_n^{k+1}\subseteq\Theta_X^0F$ e, portanto,

$$\frac{\partial F}{\partial t}=g-f\in\mathscr{M}_n^{k+1}\subseteq\Theta_X^0F,$$

mostrando que (a) é satisfeito e provando a existência de tal campo ξ tangente à variedade X. ■

O seguinte teorema é quase uma recíproca do Teorema 2.3.2.

Teorema 2.3.3. *Se f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado, então $\mathscr{M}_n^{k+1}\subseteq\Theta_Xf$.*

Demonstração. Consideremos a projeção

$$\begin{aligned}\Pi : J^{k+1}(n) &\to J^k(n)\\ j^{k+1}(g) &\mapsto \Pi(j^{k+1}(g)) = j^k(g).\end{aligned}$$

Afirmação: $\Pi^{-1}(j^k(f)) \subseteq \mathscr{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1}(f)$.

De fato, como, por hipótese, f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado, então dado $g \in \Pi^{-1}(j^k(f))$ temos $g \sim_{\mathscr{R}_X} f$ e existe $h \in \mathscr{R}_X$ tal que $g = f \circ h$. Assim,

$$g = j^{k+1}(g) = j^{k+1}(f \circ h) \in \mathscr{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1}(f).$$

Agora, como

$$T_{j^{k+1}f}\mathscr{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1}f \overset{Eq.\,(2.4)}{=} j^{k+1}(\Theta_X f) = \frac{\Theta_X f + \mathscr{M}_n^{k+2}}{\mathscr{M}_n^{k+2}}$$

e

$$\begin{aligned}T_{j^{k+1}(f)}\Pi^{-1}(j^k(f)) &= (d\Pi)^{-1}(j^{k+1}(f))(T_{j^k(f)}j^k(f)) = (d\Pi)^{-1}(j^{k+1}(f))(0)\\ &= \ker\Big(d\Pi(j^{k+1}(f)\Big) = \Pi^{-1}(0) = \frac{\mathscr{M}_n^{k+1}}{\mathscr{M}_n^{k+2}},\end{aligned}$$

temos pela afirmação

$$\frac{\mathscr{M}_n^{k+1}}{\mathscr{M}_n^{k+2}} \subseteq \frac{\Theta_X f + \mathscr{M}_n^{k+2}}{\mathscr{M}_n^{k+2}} \overset{Lema\,1.3.6}{\Rightarrow} \mathscr{M}_n^{k+1} \subseteq \Theta_X f.$$

■

Com os Teoremas 2.3.2 e 2.3.3, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.4. *Seja $f \in \mathscr{M}_n$. Então, f é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado se, e somente se, $\mathscr{M}_n^k \subset \Theta_X^0 f$, para algum k inteiro positivo.*

O próximo corolário é um critério geométrico para verificar a $\mathscr{R}_X$-determinação de um germe.

Corolário 2.3.5. *Um germe $f \in \mathscr{M}_n$ é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado se, e somente se, o germe do conjunto*

$$\{x \in \mathbb{C}^n;\ \delta(f)(x) = 0,\ \forall \delta \in \Theta_X\}$$

em 0 *é igual a* $\{0\}$ *ou é vazio.*

Demonstração. Observemos que

$$\mathscr{V}(\Theta_X f) = (\{x \in \mathbb{C}^n;\ \delta(f)(x) = 0,\ \forall \delta \in \Theta_X\}, 0).$$

Vamos supor que f é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado. Pelo Corolário 2.3.4 existe k inteiro positivo tal que $\mathscr{M}_n^k \subset \Theta_X f$. Olhando para as variedades desses elementos, temos

$$\{0\} = \mathscr{V}(\mathscr{M}_n^k) \supset \mathscr{V}(\Theta_X f) = (\{x \in \mathbb{C}^n;\ \delta(f)(x) = 0,\ \forall \delta \in \Theta_X\}, 0).$$

Portanto, o germe de $\{x \in \mathbb{C}^n;\ \delta(f)(x) = 0,\ \forall \delta \in \Theta_X\}$ é vazio ou é $\{0\}$.

Por outro lado, se $\mathscr{V}(\Theta_X f)$ é vazio ou $\{0\}$, então $\mathscr{I}(\mathscr{V}(\Theta_X f))$ é igual a $\mathscr{M}_n$ ou a $\mathscr{O}_n$ e segue pelo Teorema 1.4.2

$$\mathscr{M}_n \subseteq \mathscr{I}(\mathscr{V}(\Theta_X f)) = Rad(\Theta_X f).$$

Como $\Theta_X f$ contém uma potência do seu radical (veja [2], p. 83), temos

$$\mathscr{M}_n^k \subseteq (Rad(\Theta_X f))^k \subset \Theta_X f, \text{ para algum } k \in \mathbb{N},$$

e, pelo Teorema 2.3.2, temos que f é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado. ■

Fica evidente que se um germe possui singularidade isolada na origem em X, Definição 2.1.4, então ele é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado.

Exemplo 2.3.6. *Seja $X = \mathscr{V}(x^5 - y^2)$ uma variedade analítica de $\mathbb{C}^2$. Temos que o campo de vetores tangentes é gerado por*

$$\xi_1(x,y) = (2x, 5y) \quad e \quad \xi_2(x,y) = (2y, 5x^4).$$

Vamos considerar os seguintes germes de funções

$$f(x,y) = y^2 + xy \quad e \quad g(x,y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^4.$$

Notemos que

$$df = \begin{pmatrix} y & 2y + x \end{pmatrix} \quad e \quad dg = \begin{pmatrix} 4x^3 + 6x^2y + 6xy^4 & 2x^3 + 12x^2y^3 \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que f é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado e g não é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado, usando o Corolário 2.3.5.

De fato, temos

$$\begin{aligned} \Theta_X f &= \langle \xi_1(f), \xi_2(f) \rangle(x,y) = \langle 7xy + 10y^2, 5x^5 + 10x^4y + 2y^2 \rangle; \\ \Theta_X g &= \langle \xi_1(g), \xi_2(g) \rangle(x,y) \\ &= \langle 8x^4 + 22x^3y + 72x^2y^4, 10x^7 + 60x^6y^3 + 8x^3y + 12x^2y^2 + 12xy^5 \rangle. \end{aligned}$$

e, portanto, $V(\Theta_X f) = \{(0,0)\}$ enquanto $V(\Theta_X g) = \{(0,y)\}$.

2.4 Transversal completa para o grupo $\mathscr{R}_X$

Notação 2.4.1. *(1) Denotaremos por Θ_X^1 o $\mathscr{O}_n$-submódulo de Θ_X formado pelos campos cujos 1-jatos são nulos.*

(2) Denotaremos por $\mathscr{R}_1$ o subgrupo de $\mathscr{R}$ formado pelos difeomorfismos cujos 1-jatos são a identidade e por $\mathscr{R}_{1_X}$ o subgrupo de $\mathscr{R}_1$ que preserva X.

Observamos que o grupo $\mathscr{R}_{1_X}$ é um subgrupo de Lie de $\mathscr{R}_1$.

Agora, vamos descrever as deformações $\mathscr{R}_X$-triviais.

Definição 2.4.2. *Sejam $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma família de funções a 1-parâmetro com $F(0,t) = 0$, para t próximo da origem, e k um inteiro positivo.*

*(1) F é uma **família $\mathscr{R}_X$-trivial** se existir uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ que preservam X, com $H(x,0) = x$, $H(0,t) = 0$, para t próximo da origem, e*

$$F(H(x,t),t) = F(x,0).$$

*(2) F é uma **família k-$\mathscr{R}_X$-trivial** se existir uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ que preservam X, com $H(x,0) = x$, $H(0,t) = 0$, para t próximo da origem, e*

$$F(H(x,t),t) = F(x,0) + \phi(x,t),$$

para algum $\phi \in \mathscr{M}_{n+1}^{k+1}$.

A definição acima nos diz que se uma família F é $\mathscr{R}_X$-trivial, então, para t próximo da origem fixado, F_t é $\mathscr{R}_X$-equivalente a F_0.

Observemos que uma família é k-$\mathscr{R}_X$-trivial se ela é $\mathscr{R}_X$-trivial a menos de termos de grau k. Obviamente, uma família $\mathscr{R}_X$-trivial é k-$\mathscr{R}_X$-trivial para todo inteiro positivo k.

A próximo Proposição nos dá critérios para identificar se uma família é $\mathscr{R}_X$-trivial ou k-$\mathscr{R}_X$-trivial, para algum k.

Proposição 2.4.3 ([6], Proposição 3.9)**.** *Sejam $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe tal que $F(0,t) = 0$, para t próximo da origem, e $\xi_1, \ldots, \xi_p$ os germes de campos de vetores que geram Θ_X^0. Então*

(1) F é $\mathscr{R}_X$-trivial se existir um germe $\alpha : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to \mathbb{C}^p$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i(F) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0,$$

onde

$$\xi_i(F) = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_j},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \Theta_X^0 F.$$

(2) *F é k-$\mathscr{R}_X$-trivial se existir um germe $\alpha : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to \mathbb{C}^p$ satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i(F) + \frac{\partial F}{\partial t} \in \mathscr{M}_n^{k+1},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \Theta_X^0 F + \mathscr{M}_n^{k+1}.$$

Demonstração. (1) Suponhamos que exista tal germe α e definimos o campo

$$\eta \equiv \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \xi_i \equiv \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Então, a equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \eta(H(x,t),t) \\ H(x,0) = x \end{cases} \tag{2.7}$$

tem solução definida em alguma vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, ou seja, podemos encontrar $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ satisfazendo (2.7).

O campo η é tangente a X, pois é uma combinação de campos de Θ_X^0 e, pela Proposição 2.1.7, o fluxo gerado por η, H_t, preserva X para t próximo da origem.

Definimos, então, uma nova família

$$\begin{aligned} G : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\to (\mathbb{C}, 0) \\ (x,t) &\mapsto G(x,t) = F(H(x,t),t). \end{aligned}$$

Diferenciando em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(F(H(x,t),t)\right) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x,t),t)\frac{\partial H_j}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) \\ &\overset{Eq.\ (2.7)}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x,t),t)\eta_j(H(x,t),t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x,t),t) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial t}\right)(H(x,t),t) \overset{\text{hipótese}}{=} 0. \end{aligned}$$

Assim, vemos que G não depente de t, ou seja, $G(x,t) = G(x,0)$ para t próximo da origem. Portanto,

$$F(H(x,t),t) = G(x,t) = G(x,0) = F(H(x,0),0) = F(x,0).$$

Observemos ainda que $\frac{\partial H}{\partial t}(0,t) = \eta(H(0,t),t)$ tem solução única $H(0,t) = 0$, já que os campos ξ_i, $i = 1, \ldots, p$ se anulam na origem. Sendo assim, H tem as propriedades requiridas.

(2) Da mesma forma que fizemos no item (1), como ξ_i são tangentes a X, H_t preserva X. Se $G(x,t) = F(H(x,t),t)$, temos

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x,t) = \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) (H(x,t),t) \in \mathscr{M}_n^{k+1}.$$

Observando que $\mathscr{M}_n^{k+1} = \langle x^I = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \rangle$, onde $|I| = \sum_{l=1}^{n} i_l = k+1$, podemos escrever $\frac{\partial G}{\partial t}$ como uma soma $\sum G_X x^I$. Então,

$$G(x,t) - G(x,0) = \int_0^t \frac{\partial G}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}u = \sum \left(\int_0^t \frac{\partial G_I}{\partial u}(x,u)\,\mathrm{d}u \right) x^I \in \mathscr{M}_n^{k+1}.$$

Como $G(x,0) = F(x,0)$, segue o resultado.

■

Como aplicação da Proposição 2.4.3, vamos demonstrar o Teorema da Transversal Completa para o grupo $\mathscr{R}_X$.

Teorema 2.4.4 (Transversal Completa para o grupo $\mathscr{R}_X$, [[6], Teorema 3.11)**.** *] Sejam $f \in \mathscr{M}_n$ e $\{h_1, \dots, h_r\}$ uma coleção de polinômios homogêneos de grau $k+1$ tais que*

$$\Theta_X^1 f + \langle h_1, \dots, h_r \rangle + \mathscr{M}_n^{k+2} \supset \mathscr{M}_n^{k+1}.$$

Então, qualquer germe $g \in \mathscr{M}_n$ com $j^k(g) = j^k(f)$ é $\mathscr{R}_{1_X}$-equivalente a um germe da forma:

$$f(x) + \sum_{i=1}^{r} u_i h_i(x) + \phi(x),$$

onde $\phi \in \mathscr{M}_n^{k+2}$ e $u_i \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $g \in \mathscr{M}_n$, com $j^k(g) = j^k(f)$, e consideremos a diferença $g - f \in \mathscr{M}_n^{k+1}$. Por hipótese, notemos que

$$g - f = \eta(f) + \sum_{i=1}^{r} u_i h_i + \phi, \tag{2.8}$$

onde $\eta = \sum \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Theta_X^1$, $u_i \in \mathbb{C}$ e $\phi \in \mathscr{M}_n^{k+2}$. Vamos considerar um compacto $I \subset \mathbb{C}$ que contenha os pontos 1 e 0 e, para cada ponto $t_0 \in I$, definimos a família $F^0 : \mathbb{C}^n \times I \to \mathbb{C}$ por

$$F^0(x,t) = f(x) + (1 - t - t_0)(g - f)(x) + (t + t_0) \sum_{i=1}^{r} u_i h_i(x),$$

onde $F_t^0(x) = F^0(x,t)$ e $F^0(0,t) = 0$. Para cada $t_0 \in I$ fixado, temos

$$\eta(F^0) = \eta(f) + (1 - t - t_0)(\eta(g - f)) + (t + t_0) \sum_{i=1}^{r} u_i \eta(h_i) = \eta(f) + \psi,$$

com $\psi \in \mathscr{M}_n^{k+2}$. Além disso,

$$\frac{\partial F^0}{\partial t} = f - g + \sum_{i=1}^{r} u_i h_i \overset{Eq.\ (2.8)}{=} -\eta(f) - \phi.$$

Como $\eta \in \Theta_X^1$, obtemos

$$\eta(F^0) + \frac{\partial F^0}{\partial t} = \eta(f) + \psi - \eta(f) - \phi = \psi - \phi \in \mathscr{M}_n^{k+2}.$$

Pela Proposição 2.4.3, a família F^0 é k-$\mathscr{R}_X$-trivial.

Assim, para cada t_0 fixo e t próximo da origem, existe uma família de difeomorfismos que preserva X, $H^0(x,t)$, tal que

$$\left(F_t^0 \circ H_t^0\right)(x) = f(x) + (1-t_0)(g-f)(x) + t_0 \sum_{i=1}^{r} u_i h_i(x) + \phi_t^0(x). \tag{2.9}$$

Para cada t_0, conseguimos uma vizinhança aberta centrada em t_0 na qual F_t^0 é k-$\mathscr{R}_X$-equivalente ao germe da segunda parcela de (2.9). Como essas vizinhanças formam uma cobertura de abertos do compacto I, temos que existe uma subcobertura finita de I formada por vizinhanças dos pontos $t_0 \ldots t_r$. Sem perda de generalidade, podemos supor $t_r = 1$ e $t_0 = 0$ e

$$\left(F_t^0 \circ H_t^0\right)(x) = g(x) + \phi_t^0(x),$$

$$\left(F_t^r \circ H_t^r\right)(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} u_i h_i(x) + \phi_t^r(x).$$

Como a $\mathscr{R}_X$-equivalência é transitiva, podemos concluir que os dois germes acima são $\mathscr{R}_X$-equivalentes. Além disso, como $\eta \in \Theta_X^1$ então, para cada t, H_t tem como 1-jato a identidade. ■

Podemos enfraquecer a hipótese do teorema acima da seguinte forma a partir do Lema de Nakayama 1.3.6:

Corolário 2.4.5. *Sejam $f \in \mathscr{M}_n$ e $\{h_1, \ldots, h_r\}$ uma coleção de polinômios homogêneos de grau $k+1$ tais que*

$$\Theta_X^1 f + \langle h_1, \ldots, h_r \rangle \supset \mathscr{M}_n^{k+1}. \tag{2.10}$$

Então, qualquer germe $g \in \mathscr{M}_n$ com $j^k(g) = j^k(f)$ é $\mathscr{R}_{1X}$-equivalente a um germe da forma

$$f(x) + \sum_{i=1}^{r} u_i h_i(x),$$

onde $u_i \in \mathbb{C}$.

O seguinte resultado é consequência do Teorema da Transversal Completa, que é conhecido como Teorema da Determinação Finita para o grupo $\mathscr{R}_X$.

Corolário 2.4.6 (Determinação Finita para o grupo $\mathscr{R}_X$)**.** *Dado $f \in \mathscr{M}_n$ e $\mathscr{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f$, então f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado.*

Demonstração. Seja $g \in \mathscr{M}_n$ com $j^k(g) = j^k(f)$. Então, pelo Teorema 2.4.4, g é $\mathscr{R}_X$-equivalente a um germe da forma

$$f + \sum_{i=1}^{r} u_i \cdot 0 + 0 = f.$$

∎

Corolário 2.4.7. *[[6], Corolário 3.12] Seja $f \in \mathscr{M}_n$.*

(1) Se $\mathscr{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathscr{M}_n^{k+2}$, então f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado.

(2) Se $\mathscr{M}_n^{k} \subset \Theta_X^0 f + \mathscr{M}_n^{k+1}$, então f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado.

Demonstração. (1) Se $\mathscr{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathscr{M}_n \mathscr{M}_n^{k+1}$, então, pelo Lema de Nakayama 1.3.6, temos que $\mathscr{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f$ e, pelo Corolário 2.4.6, f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado.

(2) Observemos que

$$\mathscr{M}_n \Theta_X^0 f \subset \Theta_X^1 f,$$

pois se $\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$, com $\xi_i(0) = 0$, então $j^1\xi(0) = 0$. Portanto,

$$\mathscr{M}_n^{k} \subset \Theta_X^0 f + \mathscr{M}_n^{k+1} \Rightarrow \mathscr{M}_n^{k+1} \subset \mathscr{M}_n \Theta_X^0 f + \mathscr{M}_n^{k+2},$$

onde obtemos $\mathscr{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathscr{M}_n^{k+2}$ e, pelo item (1), f é k-$\mathscr{R}_X$-determinado.

∎

CAPÍTULO 3

Critério infinitesimal para a $\mathscr{R}_X$-trivialidade topológica

Este capítulo é baseado nos artigos [28] e [29]. Seja $(X,0)$ um germe de uma subvariedade analítica de $\mathbb{C}^n$. Apresentamos condições suficientes para a $\mathscr{R}_X$-trivialidade topológica de famílias de germes de aplicações $h:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ em termos de dois critérios infinitesimais sobre o espaço tangente $T\mathscr{R}_X(h)$: o Teorema 3.1.7 e o Teorema 3.2.3.

Mostramos que o Teorema 3.1.7 é corolário do Teorema 3.2.3. Decidimos demonstrá-lo da forma apresentada porque nosso principal interesse estava no fecho integral do espaço tangente da $\mathscr{R}_X$-equivalência, imitando os resultados já existentes para a $\mathscr{R}$-equivalência. Essa abordagem será detalhada no próximo capítulo.

Mostramos também que se X é uma variedade analítica quase-homogênea e h é uma deformação de um germe quase-homogêneo h_0 (consistente com X) com termos de filtração maior ou igual à filtração de h_0, então h é topologicamente $\mathscr{R}_X$-trivial.

3.1 Critério 1: Fecho integral de $T\mathscr{R}_X(h_t)$

Sejam $h_0:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ um germe de função analítica $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado e

$$h:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0),\quad h(0,t)=0, \tag{3.1}$$

uma deformação analítica de h_0.

Definição 3.1.1. *Uma deformação a um parâmetro $h:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ de $h_0:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ é **topologicamente $\mathscr{R}_X$-trivial** ou (**C^0-$\mathscr{R}_X$-trivial**) se existir um germe de homeomorfismo*

$$H:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)$$
$$H(x,t)=(\overline{h}(x,t),t),$$

tal que $h\circ H(x,t)=h_0(x)$ e $H(X\times\mathbb{C})=X\times\mathbb{C}$.

Observemos que a propriedade de ser $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado é **aberta** no sentido de que o germe

$$\{x \in \mathbb{C}^n;\ dh_t\xi(x) = 0,\ \forall \xi \in \Theta_X\}$$

em 0 é $\{0\}$ ou vazio para valores suficientemente pequenos do parâmetro t. No entanto, tal propriedade não garante a existência de uma vizinhança $U \subset \mathbb{C}^n$ de 0 e de uma bola aberta de raio ε centrada na origem em $\mathbb{C}$ tal que a condição acima vale para todo $x \in U$ e para todo $t \in B_\varepsilon$.

Para tal, necessitaremos da seguinte definição.

Definição 3.1.2. *Seja $h_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado. Dizemos que uma deformação $h : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ de h_0 é uma **boa deformação** se*

$$V(h) \subseteq \{0\} \times (\mathbb{C}, 0),$$

onde

$$V(h) = \{(x,t) \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0);\ dh_t(x)\xi(x) = 0,\ \forall \xi \in \Theta_X\}.$$

O próximo exemplo nos ajudará a entender os conceitos acima.

Exemplo 3.1.3. *Seja $X = \mathscr{V}(y)$ o eixo x em $\mathbb{C}^2$. Temos que Θ_X é gerado por $\xi_1 = (1,0)$ e $\xi_2 = (0,y)$. Consideremos o germe $h_0(x,y) = x^2 + y^3$, então $dh_0 = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \end{pmatrix}$ e*

$$\Theta_X h_0 = \langle dh_0(x,y)\xi_1(x,y), dh_0(x,y)\xi_2(x,y)\rangle = \langle 2x, 3y^3\rangle \supset \mathscr{M}_2^3.$$

Pelo Corolário 2.3.4, h_0 é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado.

Agora, consideremos a deformação

$$h_t(x,y) = x^2 + y^3 + ty^2$$

de h_0. Como $dh_t = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 + 2ty \end{pmatrix}$, temos $dh_t\xi_1 = 2x$ e $dh_t\xi_2 = 3y^3 + 2ty^2$.

Notemos que para cada t fixado, a deformação h_t é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinada, pelo Corolário 2.3.5. No entanto, h_t não é uma boa deformação, pois como

$$3y^3 + 2ty^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -\frac{2}{3}t,$$

temos que

$$V(h) \not\subseteq \{0\} \times (\mathbb{C}, 0),$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $t < \frac{3}{2}\varepsilon$ que a inclusão não será válida.

Agora, vamos enunciar alguns lemas que serão fundamentais para a demonstração do resultado principal desta seção.

No que se segue, podemos assumir que $dh_t\xi(0) = 0$, $\forall \xi \in \Theta_X$. De fato, se $dh_t\xi_0(0) \neq 0$, para algum $\xi_0 \in \Theta_X$, então

$$dh_t\xi_0 \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = dh_t\left(\frac{\partial h}{\partial t} \cdot \xi_0\right),$$

o que implica

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh_t\left(\frac{\partial h}{\partial t}\cdot\xi_0\right)}{dh_t\xi_0} = dh_t\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}\cdot\xi_0}{dh_t\xi_0}\right) \in dh(\Theta_X^0),$$

pois $\xi_0 \in \Theta_X$ e $h(0,t)=0$. Assim, pela Proposição 2.4.3, a deformação é analiticamente trivial.

Lema 3.1.4. *Sejam I e J ideais em $\mathscr{O}_n$ com $\mathscr{M}_n I \subseteq J \subseteq I$ e $\mathscr{V}(I)=\{0\}$. Então, $\mathscr{V}(J)=\{0\}$.*

Demonstração. Da hipótese, temos $\mathscr{V}(\mathscr{M}_n I) \supseteq \mathscr{V}(J) \supseteq \mathscr{V}(I)$. Como $\mathscr{V}(\mathscr{M}_n I) = \mathscr{V}(\mathscr{M}_n) \cup \mathscr{V}(I) = \{0\}\cup\{0\}$, temos $\mathscr{V}(J)=\{0\}$. ■

Para o próximo lema, vamos considerar o seguinte contexto.

Sejam $h_0 : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ um germe $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado e $h:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ uma boa deformação de h_0. Sejam $\{\xi_1,\ldots,\xi_r\}$ geradores de Θ_X e $I=\langle dh_t\xi_1,\ldots,dh_t\xi_r\rangle$ o ideal em $\mathscr{O}_{n+1}$. Então, como h é uma boa deformação de h_0, temos por definição $V(I)\subseteq\{0\}\times\mathbb{C}$.

Sejam $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ geradores de Θ_X^0, $dh_t\alpha_i=\rho_i$, $i=1,\ldots,m$ e $J=\langle\rho_1,\ldots,\rho_m\rangle$. Como, por construção, α_i se anula em $\{0\}\times\mathbb{C}$, ρ_i também se anula, para todo $i=1,\ldots,m$ e, portanto, segue que $V(J)\supseteq\{0\}\times\mathbb{C}$.

Por outro lado, notemos que a inclusão $\mathscr{M}_n I \subset J \subset I$ é imediata. Portanto, pelo Lema 3.1.4, $V(J)=\{0\}\times\mathbb{C}$.

Se $\rho(x,t)=\sum_{i=1}^m|\rho_i|^2$, a condição $V(J)=\{0\}\times\mathbb{C}$ implica que $\rho_t(x)=0$ se, e somente se, $x=0$.

Então, temos o seguinte resultado.

Lema 3.1.5. *Sejam $h_0:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ um germe $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado e $h:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ uma boa deformação de h_0. Se*

$$\rho(x,t)=\sum_{i=1}^m|dh_t\alpha_i|^2,$$

então

$$V(\rho(x,t))=\{0\}\times\mathbb{C}.$$

Demonstração. Uma vez que $V(J)=\{0\}\times\mathbb{C}$ e h é uma boa deformação de h_0, temos

$$V(\rho(x,t))=\{(x,t)\in(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0);\ dh_t\alpha_i=0,\ \forall\alpha_i\in\Theta_X^0\}=\{0\}\times\mathbb{C}.$$

■

No lema a seguir, vamos considerar $\mathbb{K}$ como $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Lema 3.1.6. *Seja $h:(\mathbb{K}^n\times\mathbb{K},0)\to(\mathbb{K},0)$ uma boa deformação de h_0. Suponha que exista um campo de vetores contínuo $(W,1)\in\Theta_{X\times\mathbb{K}}$ tal que*

(i) $\rho\frac{\partial h}{\partial t}=dh_t(W)$, *onde ρ é uma função controle, ou seja, $\rho:(\mathbb{K}^n\times\mathbb{K},0)\to\mathbb{R}$ com $\rho(x,t)\geq 0$ e $\rho(x,t)=0$ se, e somente se, $x=0$.*

(ii) $\left(-\frac{W}{\rho},1\right)$ *é localmente integrável.*

Então, h é topologicamente $\mathscr{R}_X$-trivial.

Demonstração. Inicialmente, notemos que a condição (ii) nos garante a existência local do fluxo integral. Assim, seja $F(x,t,\tau)$ o fluxo em $(\mathbb{K}^n\times\mathbb{K},0)$ definido pelo campo $(-W/\rho,1)$. Então, pela definição de fluxo, temos

(1) $F(x,t,0)=(x,t)$;

(2) $\frac{\partial F}{\partial\tau}=\left(-\frac{W}{\rho},1\right)\circ F$.

Temos dois casos a considerar.

Caso 1: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Definimos o homeomorfismo $\varphi:(\mathbb{K}^n\times\mathbb{K},0)\to(\mathbb{K}^n\times\mathbb{K},0)$ dado por

$$\varphi(x,t)=F(x,0,t)=(\overline{\varphi}(x,t),t).$$

Derivando $h(\varphi(x,t))=h(\overline{\varphi}(x,t),t)=h(\overline{\varphi}_1(x,t),\dots,\overline{\varphi}_n(x,t),t)$ em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(h(\varphi(x,t))) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}(\overline{\varphi}(x,t),t)\cdot\frac{\partial\overline{\varphi}_i}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial h}{\partial t}(\overline{\varphi}(x,t),t)\\ &\underset{def.\,fluxo}{\overset{item\,(2)}{=}} -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}(\overline{\varphi}(x,t),t)\cdot\frac{W_i}{\rho}(\overline{\varphi}(x,t),t)+\frac{\partial h}{\partial t}(\overline{\varphi}(x,t),t)\\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{W_i}{\rho}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)(\overline{\varphi}(x,t),t)\\ &\overset{\text{hipótese }(i)}{=} 0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde W_i são as componentes de W.

Assim, para x fixado, segue que $h(\varphi(x,t))$ é constante, ou seja,

$$h(\varphi(x,t))=h(\varphi(x,0))\underset{def.\,fluxo}{\overset{item\,(1)}{=}}h(x,0)=h_0(x),$$

para todo $t\in\mathbb{K}$ fixado e para todo $x\in\mathbb{K}^n$. Portanto, h é topologicamente $\mathscr{R}_X$-trivial.

Caso 2: $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Novamente, seja $F(x,t,\tau)$ tal que

(1) $F(x,t,0)=(x,t)$,

(2) $\frac{\partial F}{\partial\tau}=\left(-\frac{W}{\rho},1\right)\circ F$.

Consideremos a restrição

$$h^1=h_{|_{\mathbb{K}^n\times(\mathbb{R}\times\{0\},0)}}\to\mathbb{K},\quad F(x,u,v)=\overline{F}(x,u+iv)\quad e\quad F(x,0,u)=\overline{\overline{F}}(x,u).$$

Vamos mostrar que h é uma deformação topologicamente $\mathscr{R}_X$-trivial de h^1, a qual é uma deformação topologicamente $\mathscr{R}_X$-trivial de h_0.

Afirmação 1: $h\circ\overline{F}$ é constante em relação a v.

De fato, Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial v}(h\circ F)(x,u,v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial F_i}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial v}\overset{Eq.\ 3.2}{=}0.$$

Afirmação 2: $h^1\circ\overline{\overline{F}}$ é constante em relação a u.

De fato, notemos que

$$\frac{\partial}{\partial u}h\circ F(x,0,u)\overset{Eq.\ 3.2}{=}0.$$

Portanto, pelas Afirmações 1 e 2, temos

$$h(\overline{F}(x,u+iv))=h(\overline{F}(x,u))=h(x,u)=h^1(x,u),$$
$$h^1(\overline{\overline{F}}(x,u))=h^1(\overline{\overline{F}}(x,0))=h^1(x,0)=h_0.$$

Portanto, h é uma deformação topologicamente $\mathscr{R}_X$-trivial de h_0. ∎

Agora, estamos em condição de enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.1.7. *Seja $h_0:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ um germe $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado e considere $h:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ uma boa deformação de h_0. Se*

$$\frac{\partial h}{\partial t}\in\overline{dh_t\left(\Theta_X^0\right)},$$

para todo $t\in\mathbb{C}$ suficientemente próximo de 0, então h é C^0-$\mathscr{R}_X$-trivial.

Demonstração. Com as notações acima e lembrando que $\rho(x,t)=\sum_{i=1}^{m}|\rho_i|^2$, temos

$$\rho_i=dh_t\alpha_i\Leftrightarrow\rho_i\overline{\rho_i}=\overline{\rho_i}dh_t\alpha_i\Leftrightarrow|\rho_i|^2\frac{\partial h}{\partial t}=dh_t\left(\overline{\rho}_i\frac{\partial h}{\partial t}\alpha_i\right)\Leftrightarrow\rho\frac{\partial h}{\partial t}=dh_t\left(\frac{\partial h}{\partial t}\sum_{i=1}^{m}\overline{\rho}_i\alpha_i\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{\partial h}{\partial t}=dh_t\left(\frac{\partial h}{\partial t}\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{m}\overline{\rho}_i\alpha_i\right).$$

Pelo Lema 3.1.5, $V(\rho(x,t))=\{0\}\times\mathbb{C}$. Defina o campo de vetores X em $(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)$ dado por

$$X(x,t)=\begin{cases}\left(-\frac{\partial h}{\partial t}\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{m}\overline{\rho}_i\alpha_i,1\right) & \text{se } x\neq 0\\ (0,1) & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Notemos que o campo de vetores $X(x,t)$ é analítico real fora de $\{0\}\times\mathbb{C}$ e, com isso, temos a existência e unicidade de soluções passando por cada ponto fora de $\{0\}\times\mathbb{C}$. Agora, queremos mostrar que a existência e unicidade para $\{0\} \times \mathbb{C}$ também é verdadeira e, para isso, mostraremos que X satisfaz a condição de Lipschitz, Definição $A.0.3$.

Da hipótese, $\frac{\partial h}{\partial t} \in \overline{dh_t\left(\Theta_X^0\right)}$ e, pelo item (ii) do Teorema 1.5.4, temos

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \leq c \sup\{|\rho_i|\},$$

onde $c > 0$ e ρ_i são os geradores de $dh_t\left(\Theta_X^0\right)$.

Então, como $\sup\{|\rho_i|\}|\rho_j|/\rho \leq 1$, para todo $j = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned}
|X(x,t) - X(0,t)| &= \left|\frac{\partial h}{\partial t}\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{m}\overline{\rho}_i\alpha_i\right| \leq \left|\frac{\partial h}{\partial t}\right|\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{m}|\overline{\rho}_i||\alpha_i| \leq c\sup\{|\rho_i|\}\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{m}|\rho_i||\alpha_i| \\
&= c\sup\{|\rho_i|\}\frac{1}{\rho}|\rho_1||\alpha_1| + c\sup\{|\rho_i|\}\frac{1}{\rho}|\rho_2||\alpha_2| + \cdots + c\sup\{|\rho_i|\}\frac{1}{\rho}|\rho_m||\alpha_m| \\
&\leq c\,(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m|) \\
&\leq C|x|
\end{aligned}$$

(pois $\alpha_i(0) = 0$ e $|\alpha_i(x) - \alpha_i(0)| \leq C_i|x|$ pela Desigualdade do Valor Médio).

Logo, pelo Teorema $A.0.4$, X satisfaz a condição de Lipschitz numa vizinhança de $(0,t)$ e, portanto, segue que $X(x,t)$ é localmente integrável numa vizinhança de $(0,0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

Portanto, pela Proposição $A.0.5$, existe uma família de homeomorfismos

$$\begin{aligned}
F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}, 0) &\to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \\
(x,t,\tau) &\mapsto F(x,t,\tau)
\end{aligned}$$

tal que

(1) $F(x,t,0) = (x,t)$;

(2) $\frac{\partial F}{\partial \tau} = -X \circ F$.

A demonstração segue usando o Lema 3.1.6. ■

Exemplo 3.1.8. *Seja* $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ *um germe de variedade analítica definida por* $\varphi(x,y) = x^3 - y^2 = 0$. *O módulo* Θ_X *é gerado por*

$$\xi_1(x,y) = (2x, 3y) \quad e \quad \xi_2(x,y) = (2y, 3x^2).$$

Consideremos $h_0(x,y) = y^2 + ax^4$, $a \neq 0$, *um germe* $\mathscr{R}_X$*-finitamente determinado e* $h_t(x,y) = y^2 + ax^4 + tx^5$ *uma deformação de* h_0. *Notemos que* h_t *é uma boa deformação de* h_0 *pois*

$$dh_t(\Theta_X^0) = \langle 8ax^4 + 10tx^5 + 6y^2, 8ax^3y + 10tx^4y + 6x^2y\rangle,$$

e, portanto, $V(h) \subseteq \{0\} \times (\mathbb{C},0)$.

Temos que $\partial h/\partial t = x^5 \in \overline{dh_t\left(\Theta_X^0\right)}$ *(veja [30]). Portanto, pelo Teorema* 3.1.7 *segue que* h *é* C^0-$\mathscr{R}_X$*-trivial.*

3.2 Critério 2: Fecho integral de $T\mathscr{R}_X(h_t)$ com pesos

Podemos estender a filtração, Definição 1.3.2, para o módulo Θ_X como segue.

Definição 3.2.1. *Consideremos $w(\frac{\partial}{\partial x_j}) = -w_j$ para todo $j = 1, \dots n$. Então, dado*

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Theta_X,$$

temos $fil(\xi) = \inf_j\{fil(\xi_j) - w_j\}$.

Utilizaremos a notação $A \lesssim B$ para indicar que $A \leq CB$ onde C é uma constante positiva.

Definição 3.2.2 ([11], p. 82)**.** *Fixado um vetor de pesos $\mathbb{w} = (w_1, \dots, w_n)$, com $w = w_1 w_2 \dots w_n$, definimos a função*

$$\|x\|_{\mathbb{w}} := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{2w}{w_i}}\right)^{\frac{1}{2w}}. \tag{3.3}$$

Teorema 3.2.3. *Sejam $\mathbb{w} = (w_1, \dots, w_n)$ uma n-upla de inteiros positivos, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ um sistema de geradores de Θ_X^0 e $d_i = fil(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, m$. Sejam $h_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado e $h : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma boa deformação de h_0. Se*

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \lesssim \sup_{i=1,\dots,m}\{|dh_t(\alpha_i)| \cdot \|x\|_{\mathbb{w}}^{-d_i}\}, \text{ para } x \neq 0 \text{ próximo de } 0,$$

então h é C^0-$\mathscr{R}_X$-trivial.

Demonstração. Escolhemos inteiros não negativos e_i, $i = 1, \dots, m$ de tal forma que $d_i + e_i$ seja uma constante s. Definimos a função ρ por

$$\rho^2 = \sum_{i=1}^{m} |\rho_i|^2 \|x\|_{\mathbb{w}}^{2e_i},$$

onde $\rho_i = dh_t(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, m$ e $\|x\|_{\mathbb{w}}$ é como na Definição 3.2.2. Analogamente ao feito no Teorema 3.1.7, definimos o campo de vetores X em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ por

$$X(x,t) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial h}{\partial t}\sum_{i=1}^{m} \overline{\rho}_i \|x\|_{\mathbb{w}}^{2e_i} \alpha_i, 1\right) & \text{se } x \neq 0 \\ (0,1) & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como o campo $X(x,t)$ é analítico real fora de $\{0\} \times \mathbb{C}$, temos a existência e unicidade de soluções garantida. Queremos mostrar que o mesmo vale para $\{0\} \times \mathbb{C}$. Para $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$, denotemos por X_j a j-ésima componente de X e seja α_{ij} a j-ésima componente de α_i. Assim,

$$X_j(x,t) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial h}{\partial t}\sum_{i=1}^{m} \overline{\rho}_i \|x\|_{\mathbb{w}}^{2e_i} \alpha_i.$$

Como $fil(\alpha_i) = d_i$, temos pelas Definições 1.3.2-(d) e 3.3.9 que $fil(\alpha_{ij}) \geq d_i + w_j$. Então, $|\alpha_{ij}| \lesssim \|x\|_{\mathbb{w}}^{d_i+w_j}$ e

$$\begin{aligned}
|X_j(x,t) - X_j(0,t)| &= \left| \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial h}{\partial t} \sum_{i=1}^{m} \overline{\rho}_i \|x\|_{\mathbb{w}}^{2e_i} \alpha_i \right| \lesssim \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial h}{\partial t} \right| \sum_{i=1}^{m} \|x\|_{\mathbb{w}}^{e_i} \|x\|_{\mathbb{w}}^{d_i+w_j} \\
&\overset{d_i+e_i=s}{\lesssim} \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial h}{\partial t} \right| \|x\|_{\mathbb{w}}^{s} \|x\|_{\mathbb{w}}^{w_j} \overset{hip.}{\lesssim} \frac{1}{\rho} \sup_i \{|\rho_i| \|x\|_{\mathbb{w}}^{-d_i}\} \|x\|_{\mathbb{w}}^{s} \|x\|_{\mathbb{w}}^{w_j} \\
&\lesssim \|x\|_{\mathbb{w}}^{w_j}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 3.2.4 abaixo, o campo X é localmente integrável. ■

Lema 3.2.4. *Seja*

$$X(x,t) = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} X_j(x,t), 1 \right) & se\ x \neq 0 \\ (0,1) & se\ x = 0 \end{cases}$$

um campo vetorial em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ *tal que* X_j *é analítico real fora de* $\{0\} \times \mathbb{C}$ *e existe* $C > 0$ *com* $|X_j(x,t) - X_j(0,t)| \leq C \|x\|_{\mathbb{w}}^{w_j}$ *para todo* $j = 1, \ldots, n$. *Então,* $X(x,t)$ *é localmente integrável em uma vizinhança de* $(0,0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

Demonstração. Temos que o campo de vetores X analítico real fora de $0 \times \mathbb{C}$. Com isso, precisamos mostrar a unicidade de soluções apenas em $(0,t)$. De fato, $\phi(\tau) = (0, \tau + t)$ é uma curva integral de X tal que $\phi(0) = (0,t)$. Denotemos $\varphi(\tau) = (x(\tau), t(\tau))$ uma outra curva integral com condição inicial $\varphi(0) = (0,t)$. Como $x(0) = 0$ então $x_j(0) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Assim,

$$x_j(\tau) \overset{T.F.C}{=} \int_0^\tau \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} \mathrm{d}s \overset{\text{definição}}{=} \int_0^\tau X_j(x(s), t(s)) \, \mathrm{d}s$$

e

$$|x_j(\tau)| \leq \int_0^\tau |X_j(x(s), t(s))| \, \mathrm{d}s \overset{\text{hipótese}}{\leq} \int_0^\tau C \|x(s)\|_{\mathbb{w}}^{w_j} \, \mathrm{d}s. \tag{3.4}$$

Dessa forma, temos

$$\|x(\tau)\|_{\mathbb{w}}^{2w} \overset{\text{definição}}{=} \sum_{j=1}^{n} |x_j(\tau)|^{2w/w_j} \overset{Eq.\,3.4}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^\tau \|x(s)\|_{\mathbb{w}}^{w_j} \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{2w}{w_j}} = n \int_0^\tau \|x(s)\|_{\mathbb{w}}^{2w} \, \mathrm{d}s.$$

Pela Desigualdade de Gronwall, Teorema $A.0.10$, segue que $x(\tau) = 0$. Assim, $\varphi(\tau) = (0, t(\tau))$. Como,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\phi(\tau) - \varphi(\tau)) = X(0, \tau + t) - X(0, t(\tau)) = 0,$$

obtemos $t(\tau) = r + t$ e $\varphi \equiv \phi$. ■

Observamos que se tomarmos a filtração trivial $w_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$ em $\mathbb{C}^n$ então $\mathbb{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, $\|x\|_{\mathbb{w}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ e $fil(\alpha_i) = d_i \geq 0$. Portanto

$$|dh_t(\alpha_i)| < |dh_t(\alpha_i)| \|x\|_{\mathbb{w}}^{-d_i},$$

então

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t} \right| \lesssim \sup_i \{|dh_t(\alpha_i)|\} \Rightarrow \left| \frac{\partial h}{\partial t} \right| \lesssim \sup_i \{|dh_t(\alpha_i)| \|x\|_{\mathbb{w}}^{-d_i}\}.$$

Portanto, o Teorema 3.1.7 é corolário do Teorema 3.2.3.

3.3 O caso quase-homogêneo

Nesta seção iremos considerar germes de aplicações quase-homogêneos, Definição 1.3.2.

Definição 3.3.1. *Seja $h : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quase-homogêneo de tipo $(w_1, \ldots, w_n : k)$. Definimos a* ***função controle padrão*** *de grau r associada a h por*

$$p(x) = |x_1|^{2\alpha_1} + \cdots + |x_n|^{2\alpha_n},$$

onde α_i são escolhidos de forma que $p(x)$ seja quase-homogêneo de tipo $(w_1, \ldots, w_n : 2r)$.

Lema 3.3.2. *Sejam $h_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quase-homogêneo de tipo $(w_1, \ldots, w_n : k)$ e h_t uma deformação de h_0 de mesmo tipo de h_0, $t \in B_\varepsilon$, onde B_ε é a bola fechada de centro 0 e raio ε de $\mathbb{C}$. Seja $p(x)$ a função controle padrão de grau r associada a h_0. Então:*

(a) Existe contante c tal que

$$|h_t(x)| \leq c \cdot p(x)^{\frac{k}{2r}}.$$

(b) Se existem constantes α e c tais que $|h_t(x)| \geq c \cdot |x|^\alpha$, então

$$|h_t(x)| \geq c_1 p(x)^{\frac{k}{2r}},$$

para alguma constante c_1.

Demonstração. (a) Seja $M = \{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times B_\varepsilon;\ p(y) = 1\}$.

Para cada (x,t), $x \neq 0$ fixado, existem $(y,t) \in M$ e $\lambda \neq 0$ tal que

$$(x,t) = (\lambda^{w_1} y_1, \ldots, \lambda^{w_n} y_n, t).$$

Seja $\beta = \sup\{|h_t(y)|;\ (y,t) \in M\}$. Então,

$$|h_t(x)|^{\frac{2r}{k}} = |h_t(\lambda^{w_1} y_1, \ldots, \lambda^{w_n} y_n)|^{\frac{2r}{k}} = \left|\lambda^k h_t(y)\right|^{\frac{2r}{k}} \leq \lambda^{2r} \beta^{\frac{2r}{k}} = \lambda^{2r} \beta^{\frac{2r}{k}} p(y) = \beta^{\frac{2r}{k}} p(x)$$

e segue o resultado.

(b) Seja $\delta = \inf\{|h_t(y)|;\ y(t) \in M\}$. Da hipótese, $\delta > 0$, onde

$$|h_t(x)|^{\frac{2r}{k}} = |\lambda^k h_t(y)|^{\frac{2r}{k}} \geq \lambda^{2r} \delta^{\frac{2r}{k}} = \delta^{\frac{2r}{k}} \lambda^{2r} p(y) = \delta^{\frac{2r}{k}} p(x)$$

e segue o resultado.

■

Observação 3.3.3. *Com as mesmas hipóteses do Lema* 3.3.2*, se $fil(f(x)) > fil(h_0)$, então*

$$\frac{|f(x)|}{p(x)^{\frac{k}{2r}}} \leq c\varphi(x),$$

onde $\varphi(0) = 0$ e c é constante. Consequentemente,

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{p(x)^{\frac{k}{2r}}} = 0.$$

Notemos que esta última passagem segue da definição de limite.

A observação acima é de grande relevância e será usada algumas vezes durante esta seção.

Como corolário da demonstração do Teorema 3.1.7 e usando a Observação 3.3.3, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.4. *Sejam $h_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quase-homogêneo $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado e $h : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação de h_0 com*

$$fil(h_t - h_0) \geq fil(h_0) \quad e \quad \rho(x,t) \geq \alpha p(x),$$

onde $p(x)$ é a função controle de grau k associada a h_0.

Então, h é C^0-$\mathscr{R}_X$-trivial.

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 3.1.7, temos

$$\begin{aligned}
|X(x,t) - X(0,t)| &\leq \left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \frac{1}{\rho} (|\overline{\rho}_1||\alpha_1| + \cdots + |\overline{\rho}_m||\alpha_m|) \\
&\leq \left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \frac{1}{\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}} (\sqrt{\rho}|\alpha_1| + \cdots + \sqrt{\rho}|\alpha_m|) \\
&= \left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \frac{1}{\sqrt{\rho}} (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m|) \\
&\leq \left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \frac{1}{\sqrt{\alpha p}} (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m|) \\
&\overset{Obs.\ 3.3.3}{\leq} C|x|,
\end{aligned}$$

(pois $fil(\partial h/\partial t) > fil(\sqrt{p(x)})$). O resultado segue analogamente ao feito no Teorema 3.1.7.

Portanto, h é C^0-$\mathscr{R}_X$-trivial. ■

Mesmo que o Teorema 3.3.4 estabeleça um critério para verificar a C^0-$\mathscr{R}_X$-trivialidade de germes quase-homogêneos, sem nenhuma hipótese sobre X, a condição $\rho(x,t) \geq \alpha p(x)$ é um tanto quanto complicada de ser verificada. Com isso, para resultados mais práticos será necessário assumir que X e h são ambos quase-homogêneos de mesmo tipo.

Definição 3.3.5. *Sejam X um germe de variedade analítica quase-homogêneo e h um germe de função. Dizemos que h é* ***quase-homogêneo consistente*** *com X se h é quase-homogêneo com respeito ao mesmo conjunto de pesos de X.*

Exemplo 3.3.6. *Seja $X = \varphi^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^3$, onde $\varphi(x,y,z) = z^2 - x^2y$. Temos que φ é quase-homogêneo de tipo $(1,2,2:4)$, pois*

$$\varphi(\lambda x, \lambda^2 y, \lambda^2 z) = \lambda^4(z^2 - x^2 y).$$

Sejam $h(x,y,z) = x^2 + xy + xz$ e $f(x,y,z) = x^3 + xy + z^2$. Notemos que

$$h(\lambda x, \lambda^2 y, \lambda^2 z) = \lambda^3(x^3 + xy + xz),$$
$$f(\lambda^2 x, \lambda^4 y, \lambda^3 z) = \lambda^6(x^3 + xy + z^2),$$

ou seja, h é quase-homogêneo de tipo $(1,2,2:3)$ *e f é quase-homogêneo de tipo* $(2,4,3:6)$. *Portanto, h é consistente com X mas f não é.*

Suponhamos agora que $h_0 : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado consistente com X e $dh_0(\alpha_i)$ quase-homogêneo para cada i, onde $\{\alpha_i\}$ são geradores de Θ_X^0. Definimos

$$\omega_0(x) = |dh_0(\alpha_1)(x)|^{2s_1} + \cdots + |dh_0(\alpha_m)(x)|^{2s_m},$$

onde $s_i = k/r_i$, $r_i = fil(dh_0(\alpha_i))$ e $k = m.m.c.\{r_i\}$, onde $m.m.c.$ denota o mínimo múltiplo comum, $i = 1,\ldots,m$. Como h_0 é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado, segue que $\omega_0(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Portanto,

$$\omega_0(x) \geq c|x|^{\alpha},$$

para constantes c e α.

Para deformações h_t de h_0, com $fil(h_t) \geq fil(h_0)$, definimos

$$\omega(x,t) = \sum_{i=1}^{m} |\rho_i|^{2s_i},$$

com $\rho_i = dh_t(\alpha_i)$. Logo, temos $fil(\omega) \geq fil(\omega_0)$.

Lema 3.3.7. *Existe uma constante c tal que* $\omega(x,t) \geq cp(x)$, *onde* $p(x)$ *é a função controle padrão de grau k associada a* ω_0.

Demonstração. Temos dois casos para considerar.

Quando h_t é quase-homogêneo de mesmo tipo que h_0, então ω e ω_0 são quase-homogêneos de mesmo tipo e o resultado segue pelo Lema 3.3.2.

Se $fil(h_t - h_0) > fil(h_0)$, escrevemos

$$\omega(x,t) = \omega_0(x) + R(x,t),$$

com $fil(R(x,t)) > fil(w_0(x)) = 2k$. Então,

$$\omega_0(x) \leq \omega(x,t) + |R(x,t)|.$$

Pelo Lema 3.3.2-(b), existe uma constante c_1 tal que

$$c_1 p(x) \leq \omega_0(x) \leq \omega(x,t) + |R(x,t)|.$$

Como $fil(R(x,t)) > fil(\omega_0(x))$, temos pela Observação 3.3.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{|R(x,t)|}{p(x)} = 0$$

e, portanto, $\omega(x,t) \geq cp(x)$, para alguma constante c. ■

Observação 3.3.8. *Uma consequência muito importante do lema acima é que se h_t é uma deformação com termos de filtração maior ou igual à filtração de h_0, com h_0 $\mathscr{R}_X$-finito e quase-homogêneo, então h_t é uma boa deformação de h_0 para t suficientemente pequeno.*

Definição 3.3.9. *Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade analítica quase-homogêneo. Dizemos que o conjunto $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ de geradores de Θ_X é* ***quase-homogêneo*** *de tipo $(w_1,\ldots,w_n : d_1,\ldots,d_r)$ se*

- $\alpha_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$;
- $w(x_j) = w_j$;
- $w\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -w_j$;
- $fil(\alpha_i) = d_i = fil(\alpha_{ij}) - w_j$.

Em [8], p. 41, vemos que quando X é uma variedade quase-homogênea, sempre podemos tomar geradores quase-homogêneos de Θ_X.

O seguinte lema segue da Definição 3.3.9.

Lema 3.3.10. *Se X é quase-homogêneo e $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ é um conjunto de geradores quase-homogêneo de Θ_X com $fil(\alpha_i) = d_i$ e $h_0 : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ consistente com X e $fil(h_0) = d$, então $dh_0(\alpha_i)$ é quase-homogêneo de filtração $d + d_i$ para cada $i = 1,\ldots,r$.*

Demonstração. Temos que $dh_0(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h_0}{\partial x_j}\alpha_{ij}$. Como $d = fil(h_0)$, segue que

$$fil\left(\frac{\partial h_0}{\partial x_j}\alpha_{ij}\right) = (d - w_j) + (d_i + w_j) = d + d_i,$$

para todo $j = 1,\ldots,n$. ∎

Exemplo 3.3.11. *Seja $X = \varphi^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^3$, onde $\varphi(x,y,z) = 2x^2y^2 + y^3 - z^2 + x^4y$.*

Notemos que φ é quase-homogêneo de tipo $(1,2,3:6)$, uma vez que

$$\varphi(\lambda x, \lambda^2 y, \lambda^3 z) = \lambda^6\left(2x^2y^2 + y^3 - z^2 + x^4y\right).$$

Temos que o conjunto $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4\}$ dado por

$$\xi_1 = (2x,4y,6z), \xi_2 = (0,2z,x^4+4x^2y+3y^2), \xi_3 = (x^2+3y,-4xy,0), \xi_4 = (z,0,2x^3y+2xy^2)$$

são geradores quase-homogêneos de Θ_X. Observemos ainda que pela Definição 3.3.9,

$$\begin{aligned}
d_1 &= fil(\xi_1) = fil(\xi_{1j}) - w_j \overset{j=1}{=} fil(\xi_{11}) - w_1 = 1 - 1 = 0;\\
d_2 &= fil(\xi_2) = fil(\xi_{2j}) - w_j \overset{j=2}{=} fil(\xi_{22}) - w_2 = 3 - 2 = 1;\\
d_3 &= fil(\xi_3) = fil(\xi_{3j}) - w_j \overset{j=1}{=} fil(\xi_{31}) - w_1 = 2 - 1 = 1;\\
d_4 &= fil(\xi_4) = fil(\xi_{4j}) - w_j \overset{j=1}{=} fil(\xi_{41}) - w_1 = 3 - 1 = 2.
\end{aligned}$$

Consideremos o germe $h_0(x,y,z) = y + 2x^2$. Notemos que h_0 é consistente com X e $d = fil(h_0) = 2$. Além disso, como $dh_0 = \begin{pmatrix} 4x & 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos pelo Lema 3.3.10 *que*

$$fil(dh_0(\xi_1)) = d + d_1 = 2, \quad fil(dh_0(\xi_2)) = d + d_2 = 3,$$
$$fil(dh_0(\xi_3)) = d + d_3 = 3, \quad fil(dh_0(\xi_4)) = d + d_4 = 4.$$

Nosso principal resultado desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 3.3.12. *Sejam X uma subvariedade quase-homogênea de $(\mathbb{C}^n,0)$ e $h_0 : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ um germe quase-homogêneo consistente com X e $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado. Então, toda deformação h_t de h_0 com $fil(h_t - h_0) \geq fil(h_0)$ é C^0-$\mathscr{R}_X$-trivial.*

Demonstração. Sejam $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ um conjunto de geradores quase-homogêneo de Θ_X e $d_i = fil(\alpha_{ij}) - w_j$. Nas condições acima, $dh_0(\alpha_i)$ e $\rho^2(x,0) = \sum_{i=1}^m |dh_0(\alpha_i)|^2 \|x\|_{\mathrm{w}}^{2e_i}$ são ambos quase-homogêneos.

Como h_0 é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado, segue que $\rho^2(x,0)$ tem singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^n$. Além disso, $\rho^2(x,t)$ é uma deformação de $\rho^2(x,0)$ com termos de filtração maior ou igual à filtração de h_0. Então, existem constantes positivas c_1, c_2 tais que $c_1\rho^2(x,0) \leq \rho^2 \leq c_2\rho^2(x,0)$ e, assim, h é uma boa deformação de h_0 (veja [27], Lema 3), para t suficientemente próximo de 0. Observemos que $fil\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right) \geq fil(h_0)$ e

$$fil(dh_t(\alpha_i)\|x\|_{\mathrm{w}}^{-d_i}) = fil(h_0) - w_j + (d_i + w_j) + (-d_i) = fil(h_0).$$

Como h é uma boa deformação de h_0, segue que

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right| \lesssim \sup_i \left\{ |dh_t(\alpha_i)| \|x\|_{\mathrm{w}}^{-d_i} \right\},$$

e o resultado segue pelo Teorema 3.2.3. ■

Observação 3.3.13. *Notemos que também podemos demonstrar o resultado acima de maneira muito similar aos passos do Teorema* 3.1.7*, veja [28]*

Exemplo 3.3.14. *Seja $(X,0) \subseteq (\mathbb{C}^3,0)$ um germe de variedade analítica definida pela aplicação*

$$\varphi(x,y,z) = 2x^{k+1}y^2 + y^3 - z^2 + x^{2(k+1)}y = 0.$$

Essa é a equação implícita para as S_k-singularidades classificadas por Mond, [23].

Notemos que o germe de aplicação φ é quase homogêneo de tipo $(2, 2k+2, 3k+3 : 6k+6)$, uma vez que

$$\varphi(\lambda^2 x, \lambda^{2k+2} y, \lambda^{3k+3} z) = \lambda^{6k+6}\varphi(x,y,z).$$

Consideremos o germe $h_0(x,y,z) = y + a_{k+1}x^{k+1}$. Observemos que h_0 é $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado para $a_{k+1} \neq 0,\ 1$ e consistente com X. Portanto, deformações de h_0 com termos de filtração de ordem maior ou igual à $fil(h_0)$ são C^0-$\mathscr{R}_X$-triviais. Para k ímpar, $h_1(x,y,z) = z + ax^{3(k+1)/2}$ e $h_2(x,y,z) = z + bx^{(k+1)/2}$ são consistentes com X e $\mathscr{R}_X$-finitos, para todos $a^2 \neq -4/27$ e $b \neq \pm 2$. Assim, deformações de h_1 e h_2 com, respectivamente, termos de ordem maior ou igual à $fil(h_1)$ e $fil(h_2)$ são C^0-$\mathscr{R}_X$-triviais.

CAPÍTULO 4

Invariantes topológicos da $\mathscr{R}_X$-equivalência

Este capítulo é baseado no artigo [1]. Vamos considerar $(X,0)$ o germe de uma variedade analítica em $\mathbb{C}^n$ e $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ um germe de função analítica. Para funções com singularidade isolada em X, Bruce e Roberts introduziram em [5] uma generalização do número de Milnor de f, que chamamos de número de Bruce-Roberts, $\mu_{BR}(X,f)$. Como o número de Milnor de f, esse número mostra algumas propriedades de f e X. Por exemplo, se considerarmos o grupo $\mathscr{R}_X$ dos automorfismos de $(\mathbb{C}^n,0)$ preservando X, então f é finitamente determinado com respeito à ação do grupo $\mathscr{R}_X$ em $\mathscr{O}_n$ se, e somente se, $\mu_{BR}(X,f)$ é finito e, neste caso, a codimensão da órbita de f sob essa ação é exatamente $\mu_{BR}(X,f)$.

Quando $X = \mathbb{C}^n$, o número de Bruce-Roberts se reduz ao número de Milnor, onde as famílias μ-constantes têm sido muito estudadas e podem ser caracterizadas por condições algébricas e geométricas.

Neste capítulo, iremos estudar caracterizações da constância do número de Bruce-Roberts para famílias de funções com singularidade isolada definidas em X. Vamos introduzir os análogos algébricos e geométricos relativos e estudar seus papéis na caracterização das famílias μ_{BR}-constantes.

Nossa abordagem foi motivada pelo seguinte resultado dado por Greuel [[14], p. 161].

Teorema 4.0.1. *Para toda deformação $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ de um germe de função f com singularidade isolada na origem, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) F é uma deformação μ-constante de f, isto é, $dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_n}{J_F}$ constante;

(2) para toda curva holomorfa $\gamma : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0)$

$$\nu\left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma\right) > \inf\left\{\nu\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \circ \gamma\right) ;\, i = 1,\ldots,n\right\},$$

onde ν denota a valorização usual de um número complexo;

(3) mesma afirmação de (ii) substituindo $>$ por $\geq$;

(4) $\partial F/\partial t \in \overline{J_F}$;

(5) $\partial F/\partial t \in \sqrt{J_F}$;

(6) a curva polar C de F com respeito a $\{t=0\}$ não splita, isto é,

$$C = \left\{(x,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C};\ \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0,\ i=1,\ldots,n\right\} = \{0\} \times \mathbb{C} \textit{ próximo de } (0,0).$$

Nosso objetivo é estudar essa teoria no caso relativo, isto é, trocando J_F por $J_F(\Theta_X)$. Iremos denotar as condições de (1) a (6) no caso relativo por (1_r) a (6_r).

No Teorema 4.1.3 vamos mostrar que $(2_r) \Rightarrow (3_r) \Leftrightarrow (4_r) \Rightarrow (5_r)$ para o caso relativo. Na Preposição 4.1.4 vamos mostrar a equivalência $(1_r) \Leftrightarrow (6_r)$ para o caso relativo assumindo que

$$C = \{(x,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}; dF(\xi_i) = 0,\ i=1,\ldots,p\}$$

é uma variedade Cohen-Macaulay.

No Exemplo 4.1.1 vamos mostrar que as implicações $(1_r) \Rightarrow (4_r)$ e $(5_r) \Rightarrow (4_r)$ não valem para o caso relativo. No Exemplo 4.1.2 mostraremos que (2_r) não é equivalente a (3_r).

A seguir, vamos apresentar alguns conceitos que serão necessários para desenvolver a teoria deste capítulo.

Definição 4.0.2. *Dados $(X,0)$ germe de uma variedade analítica em $\mathbb{C}^n$ e $f:(\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ um germe de função analítica. Suponhamos que Θ_X é gerado por $\xi_1,\ldots,\xi_p$, denotemos por $J_f(\Theta_X)$ o ideal $\langle df(\xi_i);\ i=1,\ldots,p\rangle$ em $\mathscr{O}_n$. O número*

$$\mu_{BR}(X,f) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_n}{J_f(\Theta_X)}$$

*é chamado **número de Bruce-Roberts** de f com respeito a X.*

Seja $F:(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ uma deformação de f. Vamos denotar por $J_F(\Theta_X)$ o ideal $\langle dF(\xi_i);\ i=1,\ldots,p\rangle$ de $\mathscr{O}_{n+1}$, onde $dF = (\partial F/\partial x_1,\ldots,\partial F/\partial x_n)$. Com isso, a deformação F de f é **μ_{BR}-constante** se $\mu_{BR}(X,F_t) = \mu_{BR}(X,f)$ para t suficientemente pequeno.

Definição 4.0.3. *Suponhamos que os campos de vetores $\xi_1,\ldots,\xi_p$ geram Θ_X para alguma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}^n$. Se $T_U^*\mathbb{C}^n$ é a restrição do fibrado cotangente de $\mathbb{C}^n$ em U, definimos a **variedade característica logarítimica** de X por*

$$LC_U(X) := \{(x,\delta) \in T_U^*\mathbb{C}^n;\ \delta(\xi_i(x)) = 0,\ i=1,\ldots,p\}.$$

Nessas condições, $LC(X)$ é o germe de $LC_U(X)$ em $T_0^*\mathbb{C}^n$ e pode-se mostrar que é independente da escolha de geradores de Θ_X. Veja [5], p. 62.

4.1 Resultados principais

Pelo Teorema 4.0.1, temos as seguintes afirmações para o caso relativo:

(1_r) F é uma deformação μ_{BR}-constante de f;

(2_r) para toda curva homolorfa $\gamma\colon (\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)$

$$\nu\left(\frac{\partial F}{\partial t}\circ\gamma\right) > \inf\{\nu(dF(\xi_i)\circ\gamma);\ i=1,\dots,p\};$$

(3_r) mesma afirmação de (ii) trocando $>$ por $\geq$;

(4_r) $\partial F/\partial t\in\overline{J_F(\Theta_X)}$;

(5_r) $\partial F/\partial t\in\sqrt{J_F(\Theta_X)}$;

(6_r) a curva polar C de F em X com respeito a $\{t=0\}$ não splita, isto é,

$$C=\{(x,t)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C};\ df(\xi_i(x))=0,\ \forall i=1,\dots,p\}=\{0\}\times\mathbb{C} \text{ próximo de } (0,0).$$

Nosso objetivo agora será estudar as equivalências para o caso relativo.

Pelo Teorema 3.1.7, temos que (4_r) e (6_r) implicam que F é C^0-$\mathscr{R}_X$-trivial.

Agora, vamos exibir um exemplo no qual as implicações $(1_r)\Rightarrow(4_r)$ e $(5_r)\Rightarrow(4_r)$ não valem para o caso relativo.

Exemplo 4.1.1. *Sejam $(X,0)\subset(\mathbb{C}^3,0)$ definido por*

$$\Phi(x,y,z)=2x^2y^2+y^3-z^2+x^4y=0 \quad e \quad F(x,y,z,t)=y+(a+t)x^2.$$

Vamos mostrar que (4_r) não é satisfeito enquanto que (1_r) e (5_r) o são.

Temos que o módulo Θ_X é gerado por

$$\eta_1=(2x,4y,6z),\quad \eta_2=(0,2z,x^4+4x^2y+3y^2),$$
$$\eta_3=(x^2+3y,-4xy,0),\quad \eta_4=(z,0,2x^3y+2xy^2)$$

e segue que

$$J_F(\Theta_X)=\left\langle 4(a+t)x^2+4y, 2z, (a+t)(2x^3+6xy)-4xy, 2(a+t)xz\right\rangle.$$

Afirmamos que $\partial F/\partial t\notin\overline{J_F(\Theta_X)}$. De fato, dado

$$\gamma\colon(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C}^4,0)$$
$$\gamma(s)=(s,-as^2,0,0),$$

temos

$$\gamma^*(J_F(\Theta_X))=\left\langle 0,0,(2a-6a^2)s^3,0\right\rangle.$$

Portanto,

$$\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma = s^2 \notin \left\langle 0, 0, (2a - 6a^2)s^3, 0 \right\rangle,$$

e pelo Teorema 1.5.4, $\partial F / \partial t \notin \overline{J_F(\Theta_X)}$.

Além disso, observemos que a variedade X é quase-homogênea de tipo $(1,2,3:6)$ e F é uma deformação quase-homogênea consistente com X de grau 2 do germe $\mathscr{R}_X$-finitamente determinado quase-homogêneo $f = y + ax^2$. Ou seja, pelo Teorema 3.3.12, *F é C^0-$\mathscr{R}_X$-trivial.*

Agora, vamos verificar que a deformação F é μ_{BR}-constante. De fato, temos que

$$\mu_{BR}(X,F) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_3}{J_F(\Theta_X)} = 3 = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_3}{J_f(\Theta_X)} = \mu_{BR}(X,f)$$

e, portanto, (1_r) é satisfeito.

Para mostrarmos (5_r), notemos que existe k tal que a inclusão

$$\mathscr{M}_3^k \mathscr{O}_4 \subset J_F(\Theta_X) \subset \mathscr{M}_3 \mathscr{O}_4$$

se verifica. Desta forma, temos que

$$\mathscr{M}_3 \mathscr{O}_4 \subset \sqrt{J_F(\Theta_X)},$$

e, portanto,

$$x^2 = \frac{\partial F}{\partial t} \in \sqrt{J_F(\Theta_X)}.$$

O próximo exemplo nos mostra que (2_r) não é equivalente a (3_r).

Exemplo 4.1.2. *Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ definido por*

$$\Phi(x,y) = x^3 - y^2 = 0.$$

O conjunto Θ_X é gerado por

$$\eta_1 = (2x, 3y), \quad \eta_2 = (2y, 3x^2).$$

Consideremos $F(x,y,t) = x^5 + y^2 + tx^5$. Desta forma, temos

$$J_F(\Theta_X) = \left\langle 10x^5 + 6y^2 + 10tx^5, 10x^4y + 6x^2y + 10tx^4y \right\rangle.$$

Vamos mostrar que $\partial F / \partial t = x^5$ satisfaz (3_r) mas não satisfaz (2_r). De fato, seja $\gamma : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^3,0)$ dada por

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)).$$

Desta forma,

$$dF(\eta_1) \circ \gamma = 10\gamma_1^5 + 6\gamma_2^2 + 10\gamma_1^5\gamma_3,$$
$$dF(\eta_2) \circ \gamma = 10\gamma_1^4\gamma_2 + 6\gamma_1^2\gamma_2 + 10\gamma_1^4\gamma_2\gamma_3.$$

Como $\partial F / \partial t = x^5$, temos

$$\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma = \gamma_1^5(s) \Rightarrow \nu\left(\frac{\partial F}{\partial t} \circ \gamma\right) = 5 \cdot \nu(\gamma_1). \tag{4.1}$$

Com isso, temos alguns casos a considerar em relação à valorização das componentes de γ:

- *Se* $\nu(\gamma_2) \leq \nu(\gamma_1)$*, então* $\nu(dF(\eta_1)\circ\gamma) = 2\nu(\gamma_2) \overset{(4.1)}{\leq} 5\nu(\gamma_1)$.

- *Se* $2\nu(\gamma_2) = 5\nu(\gamma_1)$*, então* $\nu(dF(\eta_2)\circ\gamma) = 2\nu(\gamma_1)+\nu(\gamma_2) = \frac{9}{2}\nu(\gamma_1) < 5\nu(\gamma_1)$.

- *Se* $2\nu(\gamma_2) < 5\nu(\gamma_1)$*, então* $\nu(dF(\eta_1)\circ\gamma) = 2\nu(\gamma_2) < 5\nu(\gamma_1)$.

- *Se* $2\nu(\gamma_2) > 5\nu(\gamma_1)$*, então* $\nu(dF(\eta_1)\circ\gamma) = 5\nu(\gamma_1)$.

Portanto,

$$\nu\left(\frac{\partial F}{\partial t}\circ\gamma\right) \geq \inf\{\nu(dF(\eta_1)\circ\gamma, \nu(dF(\eta_2)\circ\gamma\},$$

satisfazendo (3_r).

Agora, consideremos $\alpha : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C}^3,0)$ *dada por*

$$\alpha(s) = (s,0,0).$$

Temos,

$$\frac{\partial F}{\partial t}\circ\alpha = s^5 \Rightarrow \nu\left(\frac{\partial F}{\partial t}\circ\alpha\right) = 5.$$

Por outro lado,

$$\nu(dF(\eta_1)\circ\alpha) = 5, \quad \nu(dF(\eta_2)\circ\alpha) = \infty,$$

o que implica $\inf\{\nu(dF(\eta_1)\circ\alpha, \nu(dF(\eta_2)\circ\alpha\} = 5$*, que não satisfaz* (2_r).

Agora, podemos estabelecer as seguintes equivalências para o caso relativo.

Teorema 4.1.3. *Sejam* $X = \Phi^{-1}(0)$*,* $\Phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^m,0)$ *e* $F : \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ *uma deformação qualquer de* f*. Então,*

$$(2_r) \Longrightarrow (3_r) \Longleftrightarrow (4_r) \Longrightarrow (5_r).$$

Demonstração. Notemos que as implicações $(2_r) \Rightarrow (3_r)$ e $(4_r) \Rightarrow (5_r)$ são imediatas, enquanto a equivalência $(3_r) \Leftrightarrow (4_r)$ é o Teorema 1.5.4-(iii). ■

A demonstração da equivalência entre (1_r) e (6_r) depende do *princípio da conservação dos números* (veja [10], Teorema 6.4.7, p. 253), como veremos agora.

Proposição 4.1.4. *Sejam* $X = \Phi^{-1}(0)$*,* $\Phi : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^m,0)$*,* $F : \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ *uma deformação qualquer de* f *e* C *a curva polar de* F *com respeito a* $\{t=0\}$*. Então,*

(i) $(1_r) \Rightarrow (6_r)$*;*

(ii) se a variedade C *é Cohen-Macaulay, então* $(6_r) \Rightarrow (1_r)$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar $(1_r) \Rightarrow (6_r)$. Pelo princípio da conservação dos números, tomemos pequenas bolas $B = \{x \in \mathbb{C}^n;\ \|x\| < \varepsilon\}$, $T = \{t \in \mathbb{C};\ |t| < \delta\}$ tais que ε e δ sejam suficientemente pequenos. Seja $C = \{(x,t) \in B \times T;\ dF(\sigma_i) = 0,\ i = 1,\dots,p\}$, onde σ_i são os geradores de Θ_X e $\pi : B \times T \to T$ a projeção. Então, temos

$$\sum_{(x,t)\in C\cap(B\times\{t\})} \mu_{BR}(X, f_t, x) = \mu_{BR}(X, f), \tag{4.2}$$

para todo $t \in T$. Logo, $(1_r) \Rightarrow (6_r)$.

Reciprocamente, $(6_r) \Rightarrow (1_r)$ segue imediatamente da Equação (4.2) assumindo que C é Cohen-Macaulay. ■

Nesse próximo exemplo vamos mostrar que apenas condições na variedade X não são, de fato, suficientes para garantir a equivalência $(1_r) \Leftrightarrow (6_r)$, mesmo X sendo uma variedade suave.

Exemplo 4.1.5. *Seja $X : x_1 = x_2 = 0$ uma superfície não-singular em $\mathbb{C}^4$ contendo 0. Como X tem codimensão maior que 1, segue de [5], Proposição 5.10, que $LC(X)$ não é Cohen-Macaulay.*

O módulo Θ_X de campos de vetores tangentes a X é gerado por

$$\left\langle x\frac{\partial}{\partial x_1}, x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right\rangle.$$

Seja $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Então,

$$J_f(\Theta_X) = \left\langle x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_3, x_4 \right\rangle.$$

Assim,

$$\mu_{BR}(X, f) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_4}{J_f(\Theta_X)} = 3.$$

Consideremos $F(x_1,x_2,x_3,x_4,t) = f_t = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + tx_1$ uma deformaçaõ de f. Dessa forma,

$$J_F(\Theta_X) = \left\langle 2x_1^2 + tx_1, 2x_2^2, 2x_1x_2 + tx_2, 2x_1x_2, 2x_3, 2x_4 \right\rangle.$$

Notemos que

$$C = C_1 \cup C_2,$$

onde

$$C_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4;\ (x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,0,0)\},$$
$$C_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4;\ (x_1,x_2,x_3,x_4) = (-t/2,0,0,0)\}.$$

Ou seja, as singularidades de f_t, $t \neq 0$, são

$$(0,0,0,0) \quad e \quad \left(-\frac{t}{2}, 0, 0, 0\right).$$

Além disso, observemos que

$$\mu_{BR}(X,f_t,0) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_4|_{(0,0,0,0)}}{J_F(\Theta_X)} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_2|_{(0,0)}}{\langle x_1(2x_1+t), x_2(2x_1+t)\rangle} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_2|_{(0,0)}}{\langle x_1,x_2\rangle} = 1$$

e

$$\mu_{BR}(X,f_t,(-t/2,0)) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_4|_{(-t/2,0)}}{J_F(\Theta_X)} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_2|_{(-t/2,0)}}{\langle x_1(2x_1+t), 2x_1x_2\rangle} = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_2|_{(-t/2,0)}}{\langle 2x_1+t, x_2\rangle} = 1.$$

Desta forma,

$$\mu_{BR}(X,f_t)_{|_{(-t/2,0,0,0)}} + \mu_{BR}(X,f_t)_{|_{(-t/2,0,0,0)}} = 2 \neq \mu_{BR}(X,f) = 3.$$

Os próximos dois lemas nos auxiliarão a demonstrar o Teorema 4.1.8.

Lema 4.1.6 ([3], Lema 6.1)**.** *Sejam $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^p,0)$ um germe de aplicação analítica e J um ideal de $\mathscr{O}_p$. Seja $f^*:\mathscr{O}_p\to\mathscr{O}_n$ o homomorfismo de anéis induzido por f tal que $I=f^*(J)$. Se $\frac{\mathscr{O}_p}{J}$ é Cohen-Macaulay e $codim(V(I)) = codim(V(J))$, então $\frac{\mathscr{O}_n}{I}$ também é Cohen-Macaulay.*

Lema 4.1.7. *[[25], Teorema 5.4] Seja X uma hipersuperfície qualquer com singularidade isolada. Então, $LC(X)$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração. Veja [25], Teorema 5.4. ■

Teorema 4.1.8. *Se X é uma hipersuperfície com singularidade isolada, então $(1_r)\Leftrightarrow(6_r)$.*

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que C é Cohen-Macaulay para que a equivalência seja válida pela Proposição 4.1.4.

Pelo Lema 4.1.7, $LC(X)$ é Cohen-Macaulay.

Agora, seja

$$\psi_F : \mathbb{C}^n\times\mathbb{C} \to T^*(\mathbb{C}^n)\cong\mathbb{C}^{2n}$$
$$(x,t)\mapsto(x,dF(x)).$$

Sejam $I\subset\mathscr{O}_{n+1}$ e $J\subset\mathscr{O}_{2n}$ ideais de C e de $LC(X)$, respectivamente. Então, por construção temos $\psi_F^*(J)=I$ e

$$\psi_F^{-1}(LC(X)) = V(dF(\Theta_X)) = C.$$

Ainda, notemos que $codim(V(I)) = codim(C) = n = codim(LC(X)) = codim(V(J))$, $I = \mathscr{I}(C)$ e $J=\mathscr{I}(LC(X))$. Assim, como por hipótese $LC(X)$ é Cohen-Macaulay, então

$$\frac{\mathscr{O}_{2n}}{\mathscr{I}(LC(X))} = \frac{\mathscr{O}_{2n}}{J}$$

é Cohen-Macaulay. Portanto, pelo Lema 4.1.6

$$\frac{\mathscr{O}_{n+1}}{I} = \frac{\mathscr{O}_{n+1}}{\mathscr{I}(C)}$$

e concluímos que C é Cohen-Macaulay.

O resultado segue pela Proposição 4.1.4. ■

Em [1], os autores mostram que $(4_r) \Rightarrow (1_r)$ se X for uma hipersuperfície com singularidade isolada. Não iremos apresentar a demonstração desse resultado neste texto por ser necessário abordarmos conceitos fora do nosso objetivo de estudo.

Resumidamente, temos as seguintes implicações:

(a) $(2_r) \Rightarrow (3_r) \Leftrightarrow (4_r) \Rightarrow (5_r)$;

(b) $(1_r) \not\Rightarrow (4_r)$;

(c) $(5_r) \not\Rightarrow (4_r)$;

(d) $(2_r) \not\Leftarrow (3_r)$;

(e) $(1_r) \Rightarrow (6_r)$;

(f) $(6_r) \overset{C \text{ Cohen-Macaulay}}{\Rightarrow} (1_r)$;

(g) $(4_r) \underset{\text{sing. isolada}}{\overset{X \text{ hipersuperfície}}{\Rightarrow}} (1_r)$.

APÊNDICE A

Teorema de Kuo

Sabemos que, se X for um campo de classe C^r definido em um aberto, então existe o fluxo local de classe C^r associado a X, veja [26]. Na demosntração do Teorema 3.1.7, construímos um campo que é analítico fora da origem e, portanto, sabemos que X é localmente integrável. Precisamos mostrar que, na origem, X também é localmente integrável. Para isso, vamos mostrar que X satisfaz a condição de Lipschitz ao longo das soluções, Teorema A.0.4, e que essa condição é suficiente para garantir a unicidade de soluções passando pela origem.

Neste apêndice, vamos dar as definições e resultados necessários para demonstrarmos o resultado mencionado acima.

Um **campo de vetores** ξ em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $\xi(p)$ no espaço tangente a M no ponto p, T_pM. O campo é **suave** se a aplicação $\xi : M \to TM$ é suave, em que TM denota o fibrado tangente de M.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{C}^n \to M$, com U aberto, podemos escrever

$$\xi(p) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $\xi_j : U \to \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}$ é uma base associada a x para T_pM. Notemos que o conjunto dos campos de vetores formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Considerando D como o conjunto formado pelas funções analíticas em M, é conveniente pensarmos em um campo ξ como uma aplicação $\xi : D \to D$ dada por

$$(\xi f)(p) = \xi(f)(p) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p),$$

onde $f : M \to \mathbb{C}$ indica a expressão de f na parametrização x. Notemos que também podemos considerar germes de campos de vetores.

A seguir, apresentaremos alguns conceitos e resultados que usaremos ao longo do texto.

Definição A.0.1 ([20], p. 116). *Dizemos que uma função escalar $V(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ é uma* ***função de Lyapunov*** *se*

- $V(x,t) \geq 0$, *para todos* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *e* $V(x,t) = 0$ *apenas na solução de interesse.*
- $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leq 0$.

Uma das utilidades de uma função de Lyapunov é, de certa forma, medir o quanto duas soluções estão se aproximando uma da outra.

Definição A.0.2. *Um campo vetorial X é dito ser **localmente integrável** se, para cada ponto x em uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^n$ existe uma única solução $F(x,t)$ para o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} F(x,0) = x, \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = X(F(x,t),t), \end{cases}$$

onde $F : (U \times I, 0) \to \mathbb{C}^n$ é o fluxo local do campo vetorial X, com $I \subset \mathbb{R}$ sendo um intervalo aberto contendo $t = 0$.

Seja $\varphi(x_0,t) = \varphi_t(x_0)$ uma solução definida para $|t| < \eta$ com $\varphi(x_0,0) = x_0$. Temos a seguinte definição.

Definição A.0.3. *Dizemos que o campo de vetores $X(x)$ satisfaz a **condição de Lipschitz** ao longo de φ com constante de Lipschitz $K = K(\varphi)$ se para todo x em uma vizinhança do conjunto $\{\varphi(x_0,t);\ |t| < \eta\}$ temos $|X(x) - X(\varphi(x_0,t))| < K|x - \varphi_t(x_0)|$.*

Notemos que a condição acima é mais fraca do que a condição de Lipschitz usual, uma vez que X satisfaz a condição de Lipschitz ao longo de uma solução.

Teorema A.0.4 ([21], Teorema 2)**.** *Seja $X(x)$ um campo de vetores contínuo e definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que para cada $x_0 \in U$ existe uma solução $\varphi(x_0,t) = \varphi_t(x_0)$ com $\varphi_0(x_0) = x_0$ ao longo da qual X satisfaz a condição de Lipschitz. Então, X admite uma única solução passando por cada ponto de U, isto é, duas soluções satisfazendo a mesma condição inicial são idênticas em seus domínios comuns de definição.*

Além disso, a solução $\varphi_t(x_0)$, definida em seu intervalo maximal de existência, é uma função contínua de x_0 e t.

Ideia da demonstração. Temos que mostrar a unicidade de soluções e que a solução depende continuamente da condição inicial x_0.

Para a unicidade, seja $\varphi(t)$ uma solução ao longo da qual X satisfaz a condição de Lipschitz com constante K. Seja $\xi(t)$ uma solução qualquer com $\xi(0) \neq \varphi(0)$. Então, $\xi(t) \neq \varphi(t)$ para todo $t \geq 0$.

Definimos uma função (motivada pela função de Lyapunov) $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$V(x,t) = e^{2Kt}|x - \varphi(t)|^2.$$

Notemos que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, $V(x,t) \geq 0$ e $V(x,t) = 0$ se, e somente se, $x = \varphi(t)$. Além disso, utilizando a hipótese de que φ e ξ são soluções tais que X satisfaz a condição de Lipschitz com constante K, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\xi(t),t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{2Kt}|\xi(t)-\varphi(t)|^2\right) \\
&= 2Ke^{2Kt}|\xi(t)-\varphi(t)|^2 + 2e^{2Kt}\langle \xi(t)-\varphi(t), \xi'(t)-\varphi'(t)\rangle \\
&\geq 2Ke^{2Kt}|\xi(t)-\varphi(t)|^2 - 2e^{2Kt}|\xi(t)-\varphi(t)||\xi'(t)-\varphi'(t)| \\
&= 2e^{2Kt}|\xi(t)-\varphi(t)|\,(K|\xi(t)-\varphi(t)| - |X(\xi(t)) - X(\varphi(t))).
\end{aligned}
$$

Por hipótese, $K|\xi(t)-\varphi(t)| - |X(\xi(t)) - X(\varphi(t)) > 0$ quando $\xi(t)$ e $\varphi(t)$ estiverem definidos e $|\xi(t)-\varphi(t)| \neq 0$, pois como $\xi(0) \neq \varphi(0)$, então, pelo menos em uma vizinhança, essa diferença nunca é nula. Além disso, como $V(x,t) > 0$ se $x \neq \varphi(t)$, então ambas soluções estão se afastando uma da outra, para todo $t \in \mathbb{R}$ e, portanto, essa diferença é não nula globalmente. Então, $V(\xi(t),t)$ sempre é diferente de 0, provando a unicidade das soluções.

Para a continuidade, seja $\varphi(x_0,t)$ uma solução definida em, pelo menos, $0 \leq t \leq T$. É suficiente mostrarmos que, para todo x_1 próximo de x_0, $\varphi(x_1,t)$ também está definida em, pelo menos, $0 \leq t \leq T$ e que a aplicação $(x_1,t) \to \varphi(x_1,t)$ é contínua em (x_0,T).

Vamos assumir que X satisfaz a condição de Lipschitz ao longo de toda a solução $\varphi(x_0,t)$ com constante de Lipschitz K. Comentaremos sobre caso geral em que a constante de Lipschitz não seja constante ao longo de toda solução a posteriori.

Vamos definir uma função de Lyapunov $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$
W(x,t) = e^{-2Kt}|x - \varphi(x_0,t)|^2.
$$

Notemos que $W(x,t) \geq 0$ e $W(x,t) = 0$ se, e somente se, $x = \varphi(x_0,t)$.

Para $\delta > 0$, seja

$$
N_\delta = \{(x,t);\, t \in [-\delta, T+\delta],\, W(x,t) \leq \delta\}.
$$

Observemos que N_δ limita a distância de qualquer solução em relação a $\varphi(x_0,t)$.

Afirmação 1: O conjunto N_δ forma uma base para o sistema de vizinhança do conjunto de pontos $\{\varphi(x_0,t);\, t \in [0,T]\}$.

De fato, vamos verificar que N_δ satisfaz a definição de base.

(1) Para $t_0 \in [0,T]$, tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subseteq [0,T]$. Dessa forma, temos que, nesse intervalo, W(x,t) é uma função contínua e $W(\varphi(x_0,t),t) = 0$. Portanto, $(\varphi(x_0,t_0),t_0) \in N_\delta$.

(2) Dado $(\bar{x},\bar{t}) \in N_{\delta_1} \cap N_{\delta_2}$, temos

$$
\begin{aligned}
x \in N_{\delta_1} &\Rightarrow \bar{t} \in [t_0-\delta_1, t_0+\delta_1]\ e\ W(\bar{x},\bar{t}) \leq \delta_1, \\
x \in N_{\delta_2} &\Rightarrow \bar{t} \in [t_0-\delta_2, t_0+\delta_2]\ e\ W(\bar{x},\bar{t}) \leq \delta_2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$(\bar{x},\bar{t}) \in N_{\delta_1} \cap N_{\delta_2} \Rightarrow \bar{t} \in [t_0 - \min(\delta_1,\delta_2), t_0 + \min(\delta_1,\delta_2)] \; e \; W(\bar{x},\bar{t}) \leq \min(\delta_1,\delta_2).$$

Agora, escolhemos δ_3 suficientemente pequeno para satisfazer:

- $\delta_3 \leq \min(\delta_1,\delta_2)$,
- $W(x,t) \leq \delta_3$, para $t \in [\bar{t} - \delta_3, \bar{t} + \delta_3]$.

Dessa forma, $N_{\delta_3} \subset N_{\delta_1} \cap N_{\delta_2}$, pois para qualquer $y = (y_x, y_t) \in N_{\delta_3}$, temos

$$W(y_x,y_t) \leq \delta_3 \quad e \quad y_t \in [\bar{t} - \delta_3, \bar{t} + \delta_3].$$

Como $\delta_3 \leq \min(\delta_1,\delta_2)$, segue que

$$W(y_x,y_t) \leq \delta_1 \quad e \quad W(y_x,t_y) \leq \delta_2.$$

Além disso, $y_t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ e $y_t \in [t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$. Portanto, $y \in N_{\delta_1} \cap N_{\delta_2}$, que termina essa afirmação.

Como N_δ é uma base, o estudo local das trajetórias das soluções pode ser feito dentro de um N_δ e podemos estender esse estudo para cobrir o intervalo $[0,T]$.

Agora, escolha τ suficientemente pequeno que, para $(x,t) \in N_\tau$,

$$|X(x) - X(\varphi(x_0,t)| < K|x - \varphi(x_0,t).$$

Afirmação 2: Se $\xi(t)$ é uma solução qualquer com $(\xi(0),0) \in N_\tau$, então $(\xi(t),t) \in N_\tau$, para todo $t \in [0,T]$.

De fato, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(\xi(t),t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-2Kt}|\xi(t) - \varphi(x_0,t)|^2\right) \\
&= -2Ke^{-2Kt}|\xi(t) - \varphi(x_0,t)|^2 + 2e^{-2Kt}\langle \xi(t) - \varphi(x_0,t), \xi'(t) - \varphi'(x_0,t)\rangle \\
&\leq -2Ke^{-2Kt}|\xi(t) - \varphi(x_0,t)|^2 + 2e^{-2Kt}|\xi(t) - \varphi(x_0,t)||\xi'(t) - \varphi'(x_0,t)| \\
&= 2e^{-2Kt}|\xi(t) - \varphi(x_0,t)|(|X(\xi(t)) - X(\varphi(x_0,t))| - K|\xi(t) - \varphi(x_0,t)|)
\end{aligned}$$

Se $(\xi(b),b) \in N_\tau$ então $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t < 0$ em $t = b$. Então, para algum $\varepsilon > 0$ e todo $t \in [b, b+\varepsilon]$, temos

$$W(\xi(t),t) < W(\xi(b),b), \quad (\xi(t),t) \in N_\tau.$$

Então, se $(\xi(0),0) \in N_\tau$ temos $(\xi(t),t) \in N_\tau$ para todo $t \in [0,T]$, finalizando essa afirmação.

Portanto, concluímos que $(x_1,t) \to \varphi(x_1,t)$ é contínua em $u_1 = u_0$.

Como $X(x)$ é contínuo, segue do Teorema de Existência e Unicidade Local de equações diferenciais (veja [32] ou [33]), que $\varphi(x_1,t)$ é contínua em t.

Comentaremos, agora, o caso geral em que a constante de Lipschitz ao longo da solução não seja constante globalmente.

Notemos que o intervalo $[0,T]$ pode ser dividido em subintervalos da forma

$$[T_0 = 0, T_1, \ldots, T_s = T]$$

de tal forma que $X(x)$ satisfaça a condição de Lipschitz ao longo da solução $\varphi(x_0,t)$ para cada $t \in [T_i, T_{i+1}]$, para cada $i = 0,1,\ldots,s$. Então, $\varphi(x_0,t)$ é contínua em cada intervalo da forma (x_0, T_i). Como $X(x)$ independe de t, então

$$\varphi(x_0,T) = \varphi(\varphi(\varphi(\ldots(\varphi(x_0,T_1),T_2),\ldots,T_s).$$

Dessa maneira, $\varphi(x_0,T)$ é uma composição de s aplicações contínuas e, portanto, é contínua.

■

Corolário A.0.5. *Com as mesmas hipóteses do teorema acima, o fluxo* $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ *associado ao campo vetorial X define um homeomorfismo local.*

Demonstração. Inicialmente, consideremos o fluxo F definido por

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\to (\mathbb{C}^n, 0) \\ (x,t) &\mapsto F(x,t) = F_t(x), \end{aligned}$$

onde $\varphi(x,t) = \varphi_t(x)$ é a solução da equação diferencial com $\varphi_0(x_0) = x_0$.

Pelo Teorema A.0.4, temos a garantia da existência e unicidade das soluções localmente, onde para cada condição inicial x_0 e t fixado existe uma única solução $\varphi_t(x_0)$.

Afirmamos que a aplicação $F_t : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ dada por $F_t(x) = \varphi_t(x)$ é um homeomorfismo. Para provar este fato, mostraremos que F_t é contínua com inversa contínua.

Para a continuidade, o Teorema A.0.4 nos garante que a solução $\varphi_t(x)$ é contínua em x e t (onde a solução está definida em seu intervalo maximal de existência). Logo, F_t é uma função contínua de x.

Para a inversa, notemos que F_t também é contínua e está bem definida, onde

$$(F_t \circ F_{-t})(x) = \varphi_t(\varphi_{-t}(x)) = \varphi_0(x) = x.$$

Segue que F_t é um homeomorfismo.

■

Observação A.0.6. *Observemos que as definições e resultados acima foram feitos para um campo de vetores* $X(x)$. *No nosso caso, usamos um campo* $X(x,t)$ *e a teoria segue da mesma forma, onde utilizamos* τ *como parâmetro.*

Consideremos o clássico problema de EDO

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{A.1}$$

Definição A.0.7 ([11], p. 85). *Dizemos que $f(x,t)$ satisfaz a **condição quase Lipschitz** com respeito ao peso $\mathbb{w}$ se a seguinte condição é válida:*

$$\|f(x,t) - f(\tilde{x},t)\|_{\mathbb{w}} \leq c\|x - \tilde{x}\|_{\mathbb{w}},$$

*para qualquer $x, \tilde{x}$ próximos de x_0 e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que $f(t,x)$ é **quase Lipschitz** se satisfaz a condição quase Lipschitz para algum peso $\mathbb{w}$.*

Lema A.0.8 ([11], Lema 2.3). *Se $f(x,t)$ é quase Lipschitz próximo de $(x,t) = (x_0,t_0)$, então $(A.1)$ admite, no máximo, uma solução próxima de $t = t_0$.*

Demonstração. Veja [11], Lema 2.3. ∎

Observação A.0.9. *Notemos que a definição de condição de Lipschitz e os resultados posteriores foram definidos para $\mathbb{R}^n$. No entanto, podemos estender as definições e os resultados para $\mathbb{C}^n$ a partir do homeomorfismo com $\mathbb{R}^{2n}$.*

Uma das mais simples e mais úteis desigualdades envolvendo integrais é a do teorema a seguir, que utilizaremos no Capítulo 3.

Teorema A.0.10 (Desigualdade de Gronwall, [17], p. 24). *Sejam $u(t), v(t)$ funções contínuas não negativas em um intervalo $[a,b]$. Seja $C \geq 0$ uma constante e suponha*

$$v(t) \leq C + \int_a^t +v(s)u(s)\,\mathrm{d}s,$$

para $a \leq t \leq b$. Então,

$$v(t) \leq Ce^{\int_a^t u(s)\,\mathrm{d}s},$$

para $a \leq t \leq b$. Em particular, se $C = 0$ então $v(t) \equiv 0$.

Demonstração. Veja [17], p. 24. ∎

Bibliografia

[1] AHMED, I; RUAS, M; TOMAZELLA, J. **Invariants of topological relative right equivalences**. Math. Proc. Camb. Phil. Soc 155, p. 307-015, 2013.

[2] ATIYAH, M.; MACDONALD, I. **Introduction to commutative algebra**. Reading: Addison-Wesley, 1969.

[3] AUSINA, C.; NUÑO-BALLESTEROS, J. **The deformation multiplicity of a map germ with respect to Boardman symbol**. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 131A, p. 1003-1022, 2001.

[4] BRUCE, J.; KIRK, N.; DU PLESSIS, A. **Complete transversals and the classification of singularities**. Nonlinearity 10, p. 253-275, 1997.

[5] BRUCE, J.; ROBERTS, R. **Critical points of functions on analytic varieties**. Topology 27, p. 57-90, 1988.

[6] BRUCE, J.; WEST, J. **Function on a crosscap**. Math. proc. camb. phil. soc. 123, p. 19-39, 1998.

[7] DAMON, J. **Finite determiacy and topological triviality I**. Invent. Math. 62, p. 299-324, 1980.

[8] DAMON, J. **On the freeness of equisingular deformations of plane curve singulatiries**. Topology Appl. 118, p. 31-43, 2002.

[9] DAMON, J. **Topological triviality and versality for subgroups of $\mathscr{A}$ and $\mathscr{K}$: *II*. Sufficient conditions and applications**. Nonlinearity 5, p. 373-412, 1992.

[10] DE JONG, T.; PFISTER, G. **Local Analytic Geometry**. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 2000.

[11] FUKUI, T.; PAUNESCU, L. **Stratification theory from the weighted point of view**. Canad. J. Math., 53 no.1, p. 73-97, 2001.

[12] GAFFNEY, T. **Integral closure of modules and Whitney equisingularity**. Invent. Math 107, p. 301-322, 1992.

[13] GIBSON, C. **Singular points of smooth mappings**. London, Pitman, 1979.

[14] GREUEL, M. **Constant Milnor Nunmber implies Constant Multiplicity for Quasihomogeneous Singularities**. Manuscripta Math. 56, p. 159-166, 1986.

[15] GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. **Principles of algebraic geometry**. New York: John Wiley & sons, 1978.

[16] GUNNING, R.; ROSSI, H. **Analytic functions of several complex variables**. New Jersey: Prentice - Hall, 1965.

[17] HARTMAN, P.; **Ordinary Differential Equations**. Wiley, 1964.

[18] HIRSCH, M. **Differential Topology**. New York: Springer-Verlag, 1976.

[19] HUNGERFORD, T. **Algebra**. 1ª ed. New York: Springer, 1980.

[20] KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

[21] KUO, T. **On C^0-sufficiency of jets of potential functions**. Topology 8, p. 167-171, 1969.

[22] MATHER, J. **Stability of $\mathbb{C}^\infty$ mappings, IV: classification of stable germs by R-algebras**. Publ. Math. IHES 37, p. 223-248, 1969.

[23] MOND, D. **On the classification of germes of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$**. Proc. of London Math. Soc., 3, 50, p. 333-369, 1985.

[24] MUNKRES, J.; **Elements of Algebraic Topology**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.

[25] NUÑO-BALLESTEROS, J.; ORÉFICE, B.; TOMAZELLA, J. **The Bruce-Roberts number of a function on a weighted homogeneous hypersurface**. Quat. J. Math. 64(1), p. 269-280, 2013.

[26] PALIS JR, J.; MELO, W. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[27] RUAS, M.; SAIA, M. **C^l-determinacy of weighted homogeneous germes**. Hokkaido Math. J. 26, p. 89-99, 1997.

[28] RUAS, M; TOMAZELLA, J. **An infinitesimal criterion for topological triviality of families of sections of analytic varieties**. Adv. Stud. Pure Math. 43, p. 421-436, 2006.

[29] RUAS, M; TOMAZELLA, J. **Topological triviality of families of functions on analytic varieties**. Nagoya Math. J., vol. 175, p. 39-50, 2004.

[30] SAIA, M. **The integral closure of ideals and the Newton filtration**. J. Algebraic Geometry, 5, p. , 1-11, 1996.

[31] SEBASTIANI, M. **Introdução à geometria analítica complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[32] SOTOMAYOR, J.; **Equações Diferenciais Ordinárias**. 1ª. Editora Livraria da Física, 2011.

[33] SOTOMAYOR, J.; **Lições de Equações Difernenciais Ordinárias**. IMPA, 1979.

[34] TEISSIER, B. **Multiplicities polaires, sections planes, et conditions de Whitney**. Lecture Notes in Mathematics 961, p. 314-491, 1982.

[35] WARNER, F. **Foundations of differentiable manifolds and Lie groups**. New York: Scott, Foresman, 1983.

[36] YOSHINAGA, E. **Topologically principal part of analytic functions**. Transactions of the American Mathematical Society, v. 314, n. 2, p. 803-814, 1989.