



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Coeficientes de Lyapunov e bifurcação de Hopf
para sistemas diferenciais analíticos no plano**

Tamires Imaculada Santos Costa

São Carlos - SP
Fevereiro de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Coeficientes de Lyapunov e bifurcação de Hopf para sistemas diferenciais analíticos no plano

Tamires Imaculada Santos Costa

Orientador: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Fevereiro de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Tamires Imaculada Santos Costa, realizada em 27/02/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende (UFSCar)

Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira (USP)

Prof. Dr. Rodrigo dos Santos Bononi (IFSP)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, elevo minha gratidão a Deus, que tem sido minha fortaleza e guia, protegendo-me e iluminando meu caminho. Sua presença me deu forças para vencer os desafios e alcançar essa importante conquista em minha vida.

À minha mãe, Vilma Campos dos Santos, e ao meu padrasto, Clayton de Jesus Santos, agradeço profundamente por sempre acreditarem em mim, por enxergarem meu potencial mesmo nos momentos mais difíceis e por me oferecerem apoio incondicional quando mais precisei.

À minha irmã, Marília Monique Santos Costa, minha eterna companheira de vida, expresso minha mais profunda gratidão pela sua presença constante e pelo apoio incondicional. Sua companhia é um refúgio de força e conforto, seu incentivo ilumina meus passos, e sua torcida cheia de amor torna cada conquista ainda mais especial. Sou imensamente grata por tê-la ao meu lado nessa caminhada.

À minha tia, Jocinéia Campos Rosa, deixo meu reconhecimento e carinho por todo o apoio e afeto ao longo desses anos.

À minha amiga, Brenda Zamerim Oliveira, minha gratidão mais profunda por todo o apoio e incentivo que você me deu ao longo desses anos. Sua amizade tem sido um farol nos momentos de incerteza, um refúgio seguro quando mais precisei. Você sempre esteve disposta a me ouvir, mesmo quando eu me perdia em devaneios matemáticos que não faziam sentido para ninguém além de mim. Sua paciência, generosidade e capacidade de oferecer conforto com palavras e gestos são dádivas que valorizo imensamente. Ter sua amizade torna a jornada muito mais leve e bela. Obrigada por ser o meu porto seguro e por compartilhar comigo essa caminhada.

Às minhas amigas, Andressa Santos Nascimento e Bruna Luiza Messias Alves, minha eterna gratidão por serem presenças tão especiais em minha vida. A amizade de vocês, sempre carregada de carinho, apoio inabalável e incentivo sincero, é um tesouro que ilumina meus dias. Obrigada por estarem ao meu lado com tanta generosidade e por tornarem minha jornada muito mais significativa e feliz.

Às minhas amigas de infância, Helena Lara Lins Teixeira, Júlia Silva Vieira, Lorena Mendes de Jesus e Maria Isabel Melo dos Santos, minha mais profunda gratidão pelo companheirismo inestimável ao longo desta jornada. A amizade de vocês, construída com tanto afeto e cumplicidade ao longo dos anos, foi um alicerce de força e conforto. Cada palavra de apoio, cada gesto de carinho e cada momento compartilhado tornaram esse percurso mais leve e significativo. Ter vocês ao meu lado é um presente que levo comigo para toda a vida.

Ao meus amigos do ensino médio, Felipe Emanuel Moura Ferreira, Monique Oliveira Pacheco e Thamyres de Jesus Camilo da Silva meu sincero agradecimento por toda a amizade, apoio e momentos inesquecíveis que compartilhamos (mesmo que apenas no aniversário de Monique). A jornada acadêmica se torna mais leve e especial quando temos pessoas como vocês ao nosso lado, trazendo incentivo, risadas e lembranças que levarei para sempre. Obrigada por fazerem parte da minha história.

Aos meus amigos de mestrado, Bruno Machado da Cruz, Laurinda Aparecida Ferreira de Moraes e Leonardo de Almeida Carvalho, cuja amizade foi essencial nos momentos de dúvidas e inquietações, minha gratidão. Compartilhamos conhecimento, aprendemos sobre os trabalhos uns dos outros e, acima de tudo, vivemos momentos que tornaram a vida acadêmica mais leve e significativa. Foi uma honra conhecer vocês e acompanhar suas trajetórias. Tenho grande orgulho em ter feito parte desses caminhos, assim como vocês foram parte fundamental do meu, seja nas aulas ou nos dias vividos no DM. A amizade de vocês é um presente que levo comigo com muito carinho.

À minha amiga de mestrado, Vivian Maria dos Santos, minha gratidão pelo apoio e incentivo, mesmo em tão pouco tempo de convivência. Sua amizade rapidamente conquistou minha confiança e trouxe leveza à vida acadêmica. Foi uma honra conhecê-la e acompanhar sua trajetória, marcada por dedicação e determinação. Tenho orgulho de ter feito parte do seu caminho, assim como você foi essencial no meu. Obrigada por me escutar com paciência, mesmo sem entender tudo, e tornar essa jornada mais especial.

Aos meus colegas e amigos de mestrado, Amanda Santos Araújo, Carolina Santana Tomaz, Gustavo de Oliveira Cardoso dos Santos, Odete Lara Melo Budtinger, Marina Maria de Miguel e Rodrigo Thomaz da Silva, minha sincera gratidão por compartilharem comigo tantos momentos enriquecedores de aprendizado e descoberta. A convivência com vocês tornou essa jornada ainda mais especial, repleta de trocas valiosas e crescimento mútuo. Foi um privilégio dividir esse capítulo tão significativo ao lado de pessoas tão dedicadas e inspiradoras.

Ao meu orientador, Professor Dr. Alex Carlucci Rezende, expresso minha mais profunda gratidão por sua orientação cuidadosa e dedicação exemplar. Seus ensinamentos, sempre repletos de clareza e sabedoria, foram fundamentais para meu crescimento acadêmico e pessoal. A paciência e o compromisso com os quais guiou esta jornada deixaram um impacto duradouro em minha formação. Sou imensamente grata por tê-lo como mentor nesse importante capítulo da minha vida.

Ao Professor Dr. Rodrigo dos Santos Bononi, minha mais sincera gratidão pelo apoio indispensável ao longo desta jornada. Suas explicações sempre claras e suas orientações durante nossas reuniões foram fundamentais para meu entendimento e avanço nos estudos. As trocas de conhecimento que tivemos não só ampliaram minha compreensão dos temas, mas também inspiraram minha dedicação e paixão pela pesquisa. Sua paciência e disponibilidade em tirar minhas dúvidas fizeram toda a diferença, e sou profundamente grata por sua valiosa contribuição para meu crescimento acadêmico.

Aos professores, por todos os conselhos, pela ajuda e pela paciência com a qual guiaram o meu

aprendizado.

A todos que participaram, direta ou indiretamente, do desenvolvimento deste trabalho, enriquecendo o meu processo de aprendizado.

À Universidade Federal de São Carlos e ao seu corpo docente, que demonstrou estar comprometido com a qualidade e excelência do ensino.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira e Prof. Dr. Rodrigo dos Santos Bononi, expresso minha mais sincera gratidão pela disposição em avaliar meu trabalho e pelas valiosas contribuições feitas durante a defesa. Suas observações e sugestões não apenas enriquecem esta dissertação, mas também ampliam minha visão sobre o tema, auxiliando no meu crescimento acadêmico. Agradeço pelo tempo dedicado, pelo conhecimento compartilhado e pela oportunidade de aprender com cada um de vocês.

Resumo

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias aborda problemas fundamentais no estudo do comportamento dinâmico de sistemas, entre os quais se destacam o “Problema do Centro-Foco” e o “16º Problema de Hilbert”. Esses dois problemas estão profundamente interligados por meio dos Coeficientes de Lyapunov, ferramenta essencial para a análise do comportamento local de sistemas diferenciais em torno de pontos singulares. Neste trabalho, apresentamos conceitos básicos da Teoria Qualitativa de EDOs como forma de fixar a notação e os objetos de estudo para os capítulos principais sobre Constante de Lyapunov e Bifurcação de Hopf. Além disso, demonstramos e implementamos os Coeficientes de Lyapunov, explorando sua relação com outro problema relevante da teoria: a bifurcação de ciclos limites a partir de um ponto de Hopf. Essa conexão evidencia a importância dos coeficientes na investigação de questões centrais da dinâmica não-linear.

Palavras-chave: Problema do centro-foco; ciclos limites; Coeficientes de Lyapunov; bifurcação de Hopf.

Abstract

The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations addresses fundamental problems in the study of the dynamic behavior of systems, among which the "Center-Focus Problem" and "Hilbert's 16th Problem" stand out. These two problems are deeply interconnected through the Lyapunov Coefficients, an essential tool for analyzing the local behavior of differential systems around singular points. In this work, we present basic concepts of the Qualitative Theory of ODEs as a way to establish notation and study objects for the main chapters on the Lyapunov Constant and Hopf Bifurcation. Furthermore, we demonstrate and implement the Lyapunov Coefficients, exploring their relationship with another relevant problem in the theory: the bifurcation of limit cycles from a Hopf point. This connection highlights the importance of the coefficients in investigating central issues of nonlinear dynamics.

Keywords: Center-focus problem; limit cycles; Lyapunov coefficients; Hopf bifurcation.

Sumário

Introdução	3
1 Fundamentos da Teoria Qualitativa de EDOs	5
1.1 Conceitos básicos da Teoria Qualitativa	5
1.1.1 Campos vetoriais, fluxos vetoriais e retrato de fase	5
1.1.2 Equivalência e conjugação topológicas e o Teorema do Fluxo Tubular	28
1.2 Compactificação de Poincaré	36
2 Singularidades elementares e não-elementares	43
2.1 Singularidades elementares	43
2.1.1 Pontos singulares hiperbólicos	43
2.1.2 Pontos singulares semi-hiperbólicos	49
2.2 Singularidades não-elementares	53
2.2.1 Dessingularização de singularidades não-elementares	54
2.2.2 <i>Blow-up</i> polar	54
2.2.3 <i>Blow-up</i> direcional	59
2.2.4 Relação entre <i>blow-up</i> polar e <i>blow-up</i> direcional	62
2.2.5 Pontos singulares nilpotentes	64
3 Constantes de Lyapunov	69
3.1 Introdução	69
3.2 Resultados	77
3.3 Coeficientes de Lyapunov	91
3.3.1 Calculando os coeficientes de Lyapunov	92
3.3.2 Implementação no <i>software Mathematica</i> para o cálculo dos coeficientes de Lyapunov	95
3.3.3 Cálculo e interpretação dos coeficientes de Lyapunov	97
3.3.4 Exemplos	97

4	Bifurcação de Hopf	105
4.1	O conceito de bifurcação de Hopf	106
4.2	Ciclos limites em sistemas planares	108
5	Considerações finais	115
A	Cálculo de soluções exatas de alguns exemplos	117
A.1	Exemplo 1.21 do Capítulo 1	117
A.2	Exemplo 1.27 do Capítulo 1	118
A.3	Exemplo 3.9 do Capítulo 3	121
	Referências	122

Introdução

O estudo de Sistemas Dinâmicos desempenha um papel fundamental na matemática e nas ciências aplicadas, fornecendo ferramentas essenciais para modelar fenômenos naturais que evoluem no tempo. Tais fenômenos são frequentemente descritos por equações diferenciais ordinárias (EDOs), e a análise dessas equações permite compreender padrões qualitativos de comportamento das soluções. Dentre as diversas abordagens para o estudo das EDOs, destaca-se a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, iniciada por Henri Poincaré no final do século XIX. Esta teoria não busca encontrar soluções explícitas para as equações diferenciais, mas sim investigar a estrutura geométrica e topológica das órbitas geradas por elas.

Neste trabalho, focamos em sistemas diferenciais ou campos de vetores analíticos, que são uma classe fundamental no estudo da dinâmica não-linear. Esses sistemas desempenham um papel crucial em diversas áreas, como a física, a biologia e a economia, pois modelam uma vasta gama de fenômenos dinâmicos observados no mundo real. Ao considerar sistemas analíticos, podemos explorar de maneira mais precisa as propriedades qualitativas de suas soluções, como estabilidade e bifurcações, que são fundamentais para compreender comportamentos complexos e imprevisíveis. A escolha por trabalhar com sistemas polinomiais se justifica não apenas pela sua relevância teórica, mas também pela simplicidade e pela ampla aplicabilidade dessa classe em problemas modeláveis por equações diferenciais.

Ao longo de mais de um século, essa teoria evoluiu consideravelmente, trazendo à tona uma série de resultados e, ao mesmo tempo, vários desafios. Dentre os problemas mais relevantes, podemos destacar o **Problema do Centro-Foco** e o **16º Problema de Hilbert**, os quais estão profundamente interligados através dos **coeficientes de Lyapunov**, ferramentas essenciais para a análise do comportamento local de sistemas diferenciais em torno de pontos singulares.

O Problema do Centro-Foco visa determinar se, ao redor de um ponto singular monodrômico de um sistema planar, o comportamento das órbitas locais caracteriza um **centro** (órbitas fechadas) ou um **foco** (órbitas espirais). Já o 16º Problema de Hilbert, em sua segunda parte, trata da existência de uma cota superior para o número de **ciclos limites** em um sistema polinomial planar, em função de seu grau. A relação entre esses dois problemas é crucial, pois a distinção entre centros e focos é fundamental para compreender a dinâmica não-linear e, assim, determinar o número máximo de ciclos limites que um sistema pode apresentar.

Neste trabalho, abordamos detalhadamente os coeficientes de Lyapunov, que têm papel central

na resolução do Problema do Centro-Foco e na análise das bifurcações de ciclos limites a partir de pontos de Hopf. Além disso, exploramos o fenômeno da **bifurcação de Hopf**, que descreve o surgimento de ciclos limites quando um ponto de equilíbrio sofre uma mudança em sua estabilidade. A conexão entre esses conceitos ressalta a importância dos coeficientes de Lyapunov na investigação de questões-chave da dinâmica não-linear.

A dissertação está organizada da seguinte maneira:

Capítulo 1: Introduzimos os fundamentos da Teoria Qualitativa das EDOs, abordando conceitos básicos como campos vetoriais, fluxos, retratos de fase e a técnica de compactificação de Poincaré, que permite estudar o comportamento das trajetórias no infinito. O leitor que já esteja familiarizado com esses conceitos pode seguir para os próximos capítulos.

Capítulo 2: Discutimos todas as singularidades. Abordamos o método de *blow-up*, que permite desingularizar pontos singulares complicados, transformando-os em curvas compostas por singularidades elementares. Também enfatizamos os principais teoremas usados na classificação dessas singularidades. O leitor com conhecimento prévio sobre singularidades e suas classificações pode avançar diretamente para o capítulo seguinte.

Capítulo 3: Apresentamos, de forma detalhada, os coeficientes de Lyapunov, sua implementação computacional e sua relação com o Problema do Centro-Foco.

Capítulo 4: Exploramos a bifurcação de Hopf, destacando a importância dos coeficientes de Lyapunov na análise do surgimento de ciclos limites.

Capítulo 5: Na última parte da dissertação, buscamos sintetizar as principais contribuições deste trabalho, apresentando uma visão geral dos resultados obtidos e suas implicações para a teoria qualitativa das EDOs.

Assim, o objetivo deste trabalho é contribuir para o entendimento desses problemas clássicos da Teoria Qualitativa das EDOs, oferecendo uma visão integrada dos conceitos matemáticos envolvidos e suas aplicações. Através de exemplos e implementações computacionais, procuramos ilustrar a relevância desses tópicos tanto para a teoria quanto para a prática, destacando sua aplicação em diversas áreas da ciência.

Todas as figuras desta dissertação são autorais e foram criadas utilizando o pacote TikZ no ambiente LaTeX, permitindo a representação precisa dos conceitos matemáticos e a padronização das ilustrações.

Fundamentos da Teoria Qualitativa de EDOs

Neste capítulo, introduziremos os conceitos fundamentais de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e de Teoria Qualitativa que servirão como base para o desenvolvimento dos tópicos apresentados ao longo deste trabalho. O foco não estará na obtenção de soluções exatas, mas na análise das propriedades qualitativas das soluções, como sua estrutura geométrica e topológica. Leitores que já estiverem familiarizados com esses conceitos podem optar por avançar diretamente para os capítulos seguintes. As principais referências para este capítulo incluem [5, 9, 16].

1.1 Conceitos básicos da Teoria Qualitativa

A teoria apresentada neste capítulo pode ser inteiramente desenvolvida no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Entretanto, como nosso foco está no estudo de sistemas diferenciais planares, restringiremos nossa análise ao espaço \mathbb{R}^2 .

1.1.1 Campos vetoriais, fluxos vetoriais e retrato de fase

Seja Λ um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Antes de definirmos formalmente um campo vetorial, é importante esclarecer a regularidade das funções envolvidas. Dizemos que uma função é de classe C^r se possui derivadas contínuas até a ordem r , em que:

- se $r = 1$, a função é **continuamente diferenciável**;
- se $r = +\infty$, a função possui **infinitas derivadas contínuas**;
- se $r = \omega$, a função é **analítica**, ou seja, pode ser localmente expressa por uma série de Taylor convergente.

Com essa distinção em mente, podemos agora definir formalmente um campo vetorial.

Definição 1.1. Um **campo vetorial** de classe C^r , onde $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$, definido em Λ , é uma aplicação de classe C^r

$$X: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

que atribui a cada ponto $\mathbf{x} = (x, y) \in \Lambda$ um vetor $X(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$.

Note que o campo vetorial X é diferenciável até a ordem r , o que significa que suas derivadas parciais até essa ordem existem e são contínuas em Λ .

Ao campo vetorial X de classe C^r definido acima, associamos a equação diferencial

$$\mathbf{x}' = (x', y') = X(\mathbf{x}) = X(x, y), \quad (1.1)$$

que é chamada de **equação diferencial autônoma** (ou **sistema autônomo**).

Observação 1.2. Utilizamos as notações $\mathbf{x}' = \dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ para representar a derivada de primeira ordem de \mathbf{x} em relação a t . As variáveis x e y são denominadas variáveis dependentes, enquanto t é chamada de variável independente.

É importante destacar que, caso o campo vetorial X dependesse explicitamente da variável independente t , ou seja, se $X = X(t, \mathbf{x})$, a equação (1.1) seria classificada como uma equação diferencial não autônoma. No entanto, neste trabalho, restringiremos nossa análise ao estudo de equações diferenciais autônomas.

Uma equação diferencial busca determinar funções que satisfaçam uma relação envolvendo suas derivadas. No caso da equação diferencial (1.1), introduzimos o conceito de solução como uma função que resolve a equação em um intervalo dado.

Definição 1.3. Uma solução da equação diferencial (1.1) em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é uma função

$$\varphi: I \rightarrow \Lambda$$

que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $(t, \varphi(t)) \in I \times \Lambda$, para todo $t \in I$ (o gráfico φ está contido em Λ);
- (ii) φ é diferenciável em I ;
- (iii) $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$, para todo $t \in I$, ou seja, φ satisfaz a equação (1.1).

O gráfico da solução φ ,

$$\Gamma = \{(t, \varphi(t)) \mid t \in I\} \subset I \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^3,$$

é denominado a **curva integral** ou **trajetória** da equação diferencial (1.1). A Figura 1.1 ilustra uma curva integral acompanhada de seu vetor tangente.

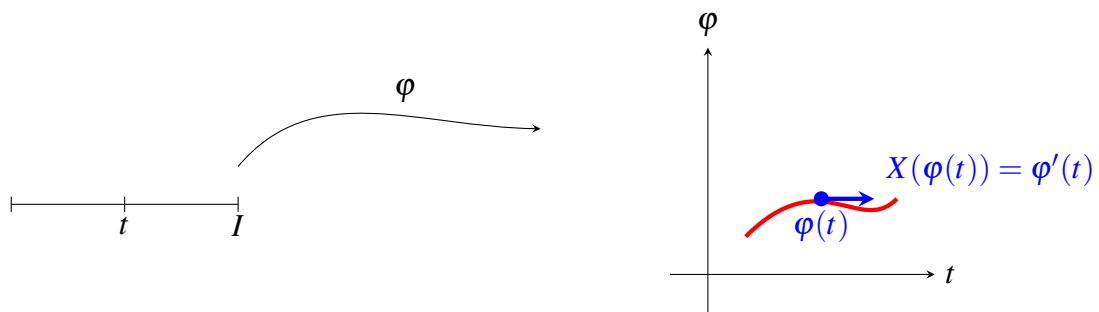


Figura 1.1: A curva integral Γ e um vetor tangente.

Pela Definição 1.3, concluímos que φ é uma função de classe pelo menos C^1 , cujo vetor tangente no ponto $\varphi(t) \in \mathbb{R}^2$ é dado por $X(\varphi(t))$.

Quando uma solução $\varphi(t)$ de uma equação diferencial é parametrizada como

$$t \xrightarrow{\psi} (t, \varphi(t)), \quad t \in I,$$

o gráfico Γ dessa solução pode ser interpretado como uma curva no plano (t, φ) . O vetor tangente a essa curva no ponto $(t, \varphi(t))$ é dado por

$$(1, \varphi'(t)) = (1, X(\varphi(t))).$$

Geometricamente, isso significa que o vetor tangente combina o avanço unitário na direção de t com a taxa de variação da solução $\varphi(t)$.

Além disso, o conjunto

$$\{(\mathbf{x}, X(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \Lambda\}$$

é chamado de **campo de direções** da equação diferencial. Esse campo fornece, para cada ponto $\mathbf{x} \in \Lambda$, o vetor que indica a inclinação das curvas integrais que passam por \mathbf{x} . Ele é essencial para entender o comportamento qualitativo das soluções.

Observação 1.4. 1. $X(\varphi(t))$ determina a inclinação da tangente de Γ no ponto $\varphi(t)$.

2. Representando o campo de direções em \mathbf{x} por um segmento de reta orientado (flecha) com inclinação $X(\mathbf{x})$, podemos ter uma intuição do traço das curvas integrais.

Exemplo 1.5. Seja o campo vetorial $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$X(x, y) = (x, -y).$$

A equação diferencial associada a esse campo vetorial é dada por:

$$(x', y') = X(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

O campo de vetores $X(x, y) = (x, -y)$ representa, em cada ponto (x, y) , um vetor que aponta na direção de $(x, -y)$. Isso implica que a solução da equação diferencial depende diretamente da posição no plano- xy , com as trajetórias das soluções seguindo as direções indicadas pelo campo de vetores.

Note que:

$$X(x, 0) = (x, 0), \quad X(0, y) = (0, -y) \quad \text{e} \quad X(1, 1) = (1, -1).$$

O campo de vetores F está ilustrado na Figura 1.2, onde a seta vermelha representa a direção do vetor $X(x, y)$ em vários pontos no plano- xy . A seta azul destaca o vetor $X(1, 1)$, que é dado por $(1, -1)$. As soluções da equação diferencial, que são as curvas integrais, seguem as direções dadas por esses vetores, e a curva gerada por um ponto inicial é sempre tangente ao vetor no ponto correspondente da solução.

A Figura 1.2 ilustra o campo de vetores de forma detalhada, mostrando como o vetor no ponto $(1, 1)$ se comporta de acordo com o campo de direções. A curva integral associada a um ponto inicial será tangente ao vetor em cada ponto da curva, como mostrado na direção das setas.

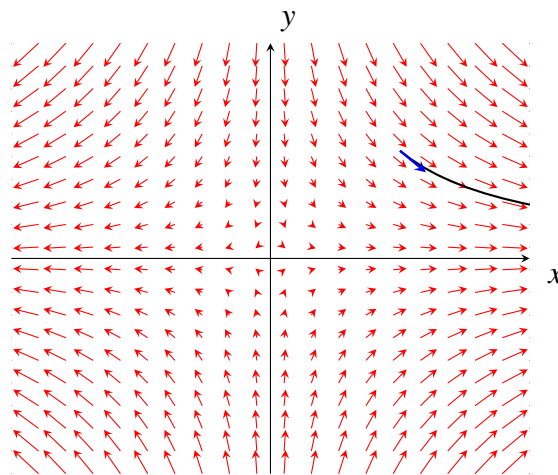


Figura 1.2: Esboço do campo de vetores $X(x, y) = (x, -y)$ no plano- xy , com a curva integral destacada em vermelho. O vetor azul é $X(1, 1) = (1, -1)$.

Definição 1.6. Um ponto p é considerado um **ponto singular** da equação $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ se $X(p) = 0$. Caso contrário, se $X(p) \neq 0$, dizemos que p é um **ponto regular**.

Com base na Definição 1.6, podemos concluir que os pontos singulares são soluções constantes da equação (1.1). Para verificar isso, considere que, se $\varphi(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então a derivada de $\varphi(t)$ é dada por

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(p) = 0,$$

pois p é um ponto singular de X .

Observação 1.7. Pontos singulares também são conhecidos como pontos críticos, pontos estacionários, ou pontos de equilíbrio, e essas denominações serão usadas de forma indistinta ao longo deste trabalho.

Definição 1.8. Sejam $\mathbf{x}_0 \in \Lambda$ e $\varphi: I_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \Lambda$ uma solução de (1.1) tal que $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$. A solução $\varphi: I_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \Lambda$ é uma **solução maximal** de (1.1) se, para qualquer extensão $\psi: J_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \Lambda$ de $\varphi: I_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \Lambda$, temos $I_{\mathbf{x}_0} = J_{\mathbf{x}_0}$ e $\varphi \equiv \psi$.

Se $\varphi: I_{\mathbf{x}_0} \rightarrow \Lambda$ é uma solução maximal, então $I_{\mathbf{x}_0}$ é chamado de **intervalo maximal de existência da solução** φ .

A Figura 1.3 ilustra uma solução maximal e sua extensão. A solução φ está definida no intervalo I , e qualquer extensão ψ no intervalo J coincide com φ para $t \in I$.

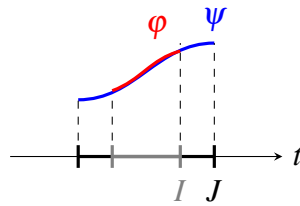


Figura 1.3: Representação de uma solução maximal.

A teoria qualitativa de equações diferenciais busca entender o comportamento das soluções de sistemas dinâmicos, focando nas propriedades gerais dessas soluções, em vez de suas formas explícitas. A seguir, apresentamos três resultados fundamentais que abordam aspectos essenciais dessa teoria: a existência e unicidade das soluções, as propriedades do fluxo de soluções e a continuidade das soluções em relação às condições iniciais. Esses resultados fornecem a base para a análise qualitativa do comportamento das soluções de equações diferenciais. As demonstrações dos Teoremas 1.9, 1.10 e 1.11 podem ser encontrada em [16], na Seção 2 do Capítulo 3.

Teorema 1.9 (Existência e unicidade de soluções maximais). *Seja X um campo vetorial de classe C^r , com $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$. Para cada $\mathbf{x} \in \Lambda$, existe um intervalo aberto $I_{\mathbf{x}}$ no qual uma única solução máxima $\varphi_{\mathbf{x}}$ de (1.1) está definida e satisfaz a condição $\varphi_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$.*

O Teorema 1.9 garante que, a partir de qualquer ponto inicial \mathbf{x} , existe uma única trajetória no espaço de fase que descreve o comportamento do sistema no tempo. Geometricamente, isso pode ser visualizado como uma única curva que passa por \mathbf{x} e evolui sem ambiguidades no intervalo $I_{\mathbf{x}}$, sem cruzamentos ou múltiplas soluções.

Teorema 1.10 (Propriedade do fluxo). *Seja X um campo vetorial de classe C^r , com $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{y} = \varphi_{\mathbf{x}}(t)$, para algum $t \in I_{\mathbf{x}}$, então*

$$I_{\mathbf{y}} = I_{\mathbf{x}} - t = \{r - t; r \in I_{\mathbf{x}}\}$$

e a solução associada a \mathbf{y} é

$$\varphi_{\mathbf{y}}(s) = \varphi_{\mathbf{x}}(t + s),$$

para todo $s \in I_{\mathbf{y}}$.

O Teorema 1.10 descreve como o fluxo de soluções se propaga ao longo do tempo. Se tomarmos uma solução $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ e a deslocarmos no tempo, a nova solução $\varphi_{\mathbf{y}}$ (associada a um novo ponto \mathbf{y}) será uma “cópia” da solução original, deslocada temporalmente. Geometricamente, isso é como o movimento de partículas ao longo de curvas no espaço de fase, com o tempo funcionando como um parâmetro de deslocamento.

Teorema 1.11 (Continuidade em relação às condições iniciais). *Seja X um campo vetorial de classe C^r , com $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$. Seja $\Theta = \{(t, \mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda, t \in I_{\mathbf{x}}\}$. Então, Θ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^3 e a aplicação $\varphi: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi_{\mathbf{x}}(t)$ é de classe C^r . Além disso, φ satisfaz*

$$D_1 D_2 \varphi(t, \mathbf{x}) = DX(\varphi(t, \mathbf{x})) D_2 \varphi(t, \mathbf{x}),$$

para todo $(t, \mathbf{x}) \in \Theta$ onde D_1 denota a derivada em relação ao tempo, D_2 representa a derivada em relação a \mathbf{x} e DX representa a parte linear do campo vetorial.

O Teorema 1.11 assegura que o comportamento das soluções é contínuo em relação às condições iniciais. Em termos geométricos, isso significa que pequenas alterações nas condições iniciais \mathbf{x} geram pequenas variações nas trajetórias das soluções no espaço de fase. Geometricamente, a continuidade das soluções pode ser vista como uma “variedade suave” de trajetórias no espaço de fase, sem descontinuidade ou saltos abruptos.

Em sistemas dinâmicos, uma das principais questões é descrever como as soluções das equações diferenciais evoluem ao longo do tempo. O conceito de fluxo local formaliza essa ideia ao associar a cada ponto do retrato de fase a trajetória gerada a partir desse ponto. Em termos simples, o fluxo local é uma função que descreve o movimento de uma partícula que evolui de acordo com o campo vetorial dado, levando em consideração a evolução do sistema no tempo. A definição a seguir formaliza esse conceito para um campo vetorial dado em um conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 1.12. Uma aplicação $\varphi: I \times \Lambda \rightarrow \Lambda$ é um **fluxo local em Λ** se:

- (i) φ é contínua em Λ ;
- (ii) para cada $\mathbf{x} \in \Lambda$, existem $\omega_-(\mathbf{x}) \in [-\infty, 0)$ e $\omega_+(\mathbf{x}) \in (0, +\infty]$ tais que $(t, \mathbf{x}) \in (\omega_-(\mathbf{x}), \omega_+(\mathbf{x})) \times \Lambda$ se, e somente se, $t \in (\omega_-(\mathbf{x}), \omega_+(\mathbf{x}))$;
- (iii) $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$;
- (iv) (propriedade de semigrupo) se $(t, \mathbf{x}) \in \Lambda$ e $(s, \varphi(t, \mathbf{x})) \in \Lambda$, então $(t + s, \mathbf{x}) \in \Lambda$ e

$$\varphi(t + s, \mathbf{x}) = \varphi(s, \varphi(t, \mathbf{x})).$$

Geometricamente, supondo que o fluxo represente a trajetória de uma partícula em movimento, partimos do ponto \mathbf{x} , andamos com o fluxo φ um tempo t e chegamos ao ponto $\varphi(t, \mathbf{x})$. Em seguida, andamos sobre o mesmo fluxo em um tempo s e chegamos no ponto $\varphi(s, \varphi(t, \mathbf{x}))$. Pela propriedade de fluxo, isso é equivalente a partir de \mathbf{x} e andar por um tempo $t + s$ e chegar no ponto $\varphi(t + s, \mathbf{x})$.

Observação 1.13. (a) A aplicação solução do Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = X(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = p, \end{cases}$$

com $p \in \Lambda$ e $X : \Lambda \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , é um fluxo em $\mathbb{R} \times \Lambda$.

(b) Se $\omega_- = -\infty$ e $\omega_+ = +\infty$, o fluxo é denominado **fluxo global**.

Um problema de valor inicial é invariante sobre translação temporal no seguinte sentido: Se $\varphi(t)$ é uma solução de um problema de valor inicial no intervalo (a, b) , podemos gerar uma nova solução deslocando o intervalo de tempo de forma adequada. Em outras palavras, a solução de $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$, com uma condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, continua válida se o intervalo de tempo for trasladado, desde que a condição inicial seja ajustada para $t_0 + \tau$. A seguinte proposição formaliza essa ideia.

Proposição 1.14 (Invariância do problema de valor inicial sobre translação temporal). *Seja $\varphi(t)$ uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = X(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad t \in (a, b),$$

e seja $\tau \in \mathbb{R}$. Então, a função $\psi(t) := \varphi(t - \tau)$ é uma solução do problema de valor inicial correspondente a

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = X(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0 + \tau) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

definida no intervalo $(a + \tau, b + \tau)$.

Demonstração. Defina $\psi(t) := \varphi(t - \tau)$, com $t \in (a + \tau, b + \tau)$. Então, temos

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t - \tau) = \varphi'(t - \tau) = X(\varphi(t - \tau)) = X(\psi(t)),$$

o que mostra que $\psi(t)$ satisfaz a equação diferencial $\mathbf{y}' = X(\mathbf{y})$.

Além disso, a condição inicial é dada por

$$\psi(t_0 + \tau) = \varphi(t_0 + \tau - \tau) = \varphi(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Logo, $\psi(t)$ também satisfaz a condição inicial $\mathbf{y}(t_0 + \tau) = \mathbf{x}_0$.

Portanto, $\psi(t)$ é uma solução do problema de valor inicial para $\mathbf{y}' = X(\mathbf{y})$, com a condição inicial ajustada para $t_0 + \tau$, como desejado. ■

Após discutirmos os conceitos de fluxos e de soluções máximas de equações diferenciais, podemos agora direcionar nossa atenção para a noção de **órbita**. Assim como uma solução de uma equação diferencial descreve o comportamento de uma partícula ao longo do tempo, a **órbita** corresponde à trajetória seguida por essa partícula no espaço, ou seja, é a projeção da solução no espaço de fases.

Mais formalmente, dado um campo vetorial X e uma solução $\varphi(t, p)$ correspondente a um ponto inicial $p \in \mathbb{R}^2$, a órbita associada a p é simplesmente o conjunto de pontos que a solução ocupa ao longo do tempo, ou seja, o conjunto de todas as imagens de $\varphi(t, p)$, para $t \in I$, onde I é o intervalo maximal de existência da solução. Coloquemos isso em uma definição.

Definição 1.15. A órbita de um ponto p é a projeção da trajetória passando por p em \mathbb{R}^2 , isto é, é o conjunto

$$\gamma(\varphi(t)) := \text{Im}(\varphi) = \{\varphi(t); t \in I\}.$$

Para a órbita $\gamma(p)$ da solução $\varphi(\cdot, p)$, podemos enunciar as seguintes propriedades.

Proposição 1.16. Um ponto q pertence à órbita $\gamma(p)$ se, e somente se, $\gamma(q) = \gamma(p)$.

Demonstração. Considere $q \in \gamma(p)$. Logo, existe $\tau \in I_p$ tal que $\varphi(\tau, p) = q$. Mas isso é equivalente a dizer que

$$\varphi(t, q) = \varphi(t, \varphi(\tau, p)) = \varphi(t + \tau, p) \quad \text{e} \quad I_q = I_p - \tau.$$

A Proposição 1.14 garante que $\gamma(q) = \gamma(p)$.

Note que, na verdade, todas as implicações acima são equivalências e temos o resultado. ■

Corolário 1.17. Se $\gamma(p) \cap \gamma(q) \neq \emptyset$, então $\gamma(p) = \gamma(q)$.

Demonstração. Se $r \in \gamma(p) \cap \gamma(q)$. Então, pela Proposição 1.16, temos:

$$\begin{cases} r \in \gamma(p) \Leftrightarrow \gamma(r) = \gamma(p), \\ r \in \gamma(q) \Leftrightarrow \gamma(r) = \gamma(q). \end{cases}$$

Logo, $\gamma(p) = \gamma(q)$. ■

Sabemos que duas órbitas ou coincidem ou são disjuntas. No entanto, é possível explorar esse fato de forma mais detalhada. Para isso, apresentaremos dois resultados auxiliares.

Lema 1.18. Seja φ uma solução maximal de $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ definida no intervalo maximal $I_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}$. Suponha que existam $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$, tais que

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2).$$

Então, $I_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}$ e $\varphi(t + c) = \varphi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, com $c = t_2 - t_1$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $t_2 > t_1$ e defina $c = t_2 - t_1 > 0$.

Considere a função

$$\psi(t) = \varphi(t - c), \quad t \in [t_2, t_2 + c].$$

Pela definição de ψ , temos:

- $\psi'(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t-c) = \varphi'(t-c) = X(\varphi(t-c)) = F(\psi(t))$, ou seja, ψ também é solução de $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$;
- no instante inicial, $\psi(t_2) = \varphi(t_2-c) = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

Assim, ψ é solução do PVI

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = X(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_2) = \varphi(t_2). \end{cases}$$

Pela unicidade da solução maximal de $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$, segue que

$$\psi(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [t_2, t_2 + c],$$

e, portanto,

$$\varphi(t) = \varphi(t-c), \quad \forall t \in [t_2, t_2 + c].$$

Usando o mesmo argumento, podemos estender o intervalo de periodicidade para o intervalo $[t_1, t_2 + c]$ e mostrar que

$$\varphi(t) = \varphi(t-c), \quad \forall t \in [t_1, t_2 + c].$$

A Figura 1.4 ilustra a relação entre os intervalos $t_1, t_2, t_2 + c$, e os deslocamentos sucessivos por c .

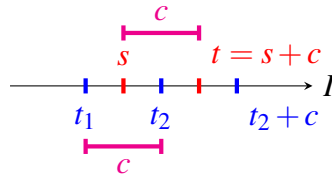


Figura 1.4: Relação entre os intervalos $t_1, t_2, t_2 + c$, e os deslocamentos por c .

Agora, suponha que $\omega_+ = \sup I < \infty$. Replicando o processo acima, conseguimos definir φ em $[t_1, t_2 + Kc]$, com K suficientemente grande para $t_2 + Kc > \omega_+$, o que contradiz a maximalidade de I . Assim, $\omega_+ = +\infty$. Analogamente, mostramos que $\omega_- = -\infty$. Logo, $I = \mathbb{R}$ e $\varphi(t+c) = \varphi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. ■

O comportamento dos subgrupos aditivos de \mathbb{R} revela uma dicotomia interessante: qualquer subgrupo não trivial é ou discretamente distribuído como múltiplos inteiros de um número positivo $\tau > 0$, ou é densamente distribuído ao longo de toda a reta real. A seguir, apresentamos o lema e sua demonstração.

Lema 1.19. *Todo subgrupo aditivo $C \subset \mathbb{R}$, com $C \neq \{0\}$, é de uma das seguintes formas:*

(i) $C = \tau\mathbb{Z}$, para algum $\tau > 0$; ou

(ii) C é denso em \mathbb{R} .

Demonstração. Suponha que $C \neq \{0\}$. Como C é um subgrupo aditivo, então, para todo $c \in C$, $-c \in C$. Assim, $C \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$. Seja $\tau = \inf(C \cap \mathbb{R}_+)$. Consideremos dois casos:

- **Caso 1:** $\tau > 0$. Afirmamos que $\tau \in C$. Suponha, por contradição, que $\tau \notin C$. Nesse caso, existem $u, v \in C \cap \mathbb{R}_+$ tais que $0 < u - v < \tau$. Como $(u, v \in C)$ implica $(u - v \in C)$, isso contradiz a definição de τ como o ínfimo de $C \cap \mathbb{R}_+$. Logo, $\tau \in C$.

Agora, mostremos que $C = \tau\mathbb{Z}$. Como $\tau \in C$, claramente $\tau\mathbb{Z} \subseteq C$. Suponha, por contradição, que existe $c \in C$ tal que $c \notin \tau\mathbb{Z}$. Então, existe um $K \in \mathbb{Z}$ único tal que

$$K\tau < c < (K+1)\tau.$$

Isso implica que $0 < c - K\tau < \tau$ e, como $c - K\tau \in C \cap \mathbb{R}_+$, temos uma contradição com a definição de τ . Portanto, $C = \tau\mathbb{Z}$.

- **Caso 2:** $\tau = 0$. Queremos mostrar que C é denso em \mathbb{R} . Suponha, por contradição, que C não seja denso. Então, existe um intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $C \cap I = \emptyset$. Como $\tau = 0$, podemos escolher $c_0 \in C \cap \mathbb{R}_+$ arbitrariamente pequeno. Por ser subgrupo, $c_0\mathbb{Z} \subseteq C$ particiona \mathbb{R} em intervalos de comprimento c_0 . Como c_0 é pequeno, I conteria um desses intervalos, contradizendo $C \cap I = \emptyset$. Logo, C é denso em \mathbb{R} .

■

As propriedades das soluções de sistemas diferenciais autônomos em \mathbb{R}^2 podem ser amplamente analisadas quando o campo de vetores X possui regularidade suficiente. Dessa forma, reforçamos o fato de considerar X pertencente à classe C^r , com $r \geq 1$, garantindo não apenas a existência e unicidade de soluções, mas também a suavidade das soluções em relação às condições iniciais. O teorema abaixo classifica as órbitas dessas soluções em três possibilidades distintas, destacando o papel da suavidade do campo no comportamento dinâmico.

Teorema 1.20. *Sejam $X : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^r , com $r \geq 1$, e $\varphi(t, p)$ a única solução maximal do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = X(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = p, \end{cases}$$

em que $p \in \Lambda$. A solução está definida no intervalo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Então, verifica-se que apenas uma das alternativas a seguir é verdadeira:

(i) φ é injetora: a órbita de φ é homeomorfa a um intervalo;

(ii) φ é constante: $I(p) = \mathbb{R}$ e φ é constante (a órbita é um ponto);

(iii) φ é periódica: $I(p) = \mathbb{R}$ e φ é periódica e não constante, isto é, existe um $T > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi(t+T, p) &= \varphi(t, p), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(t, p) &\neq \varphi(s, p), \quad \text{para } |s-t| < T.\end{aligned}$$

Nesse caso, a órbita de φ é homeomorfa a S^1 .

Demonstração. Suponha que a solução $\varphi(\cdot) = \varphi(\cdot, p)$ não seja injetora. Assim, existem $t_1 \neq t_2$ em $I(p)$ tais que

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2).$$

Pelo Lema 1.18, concluímos que $I(p) = \mathbb{R}$ e que existe $c = t_2 - t_1 > 0$ tal que

$$\varphi(t+c) = \varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Agora, definimos o conjunto de períodos de φ :

$$S = \{T \in \mathbb{R} \mid \varphi(t+T) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Claramente, $c \in S$ e $0 \in S$. Portanto, $S \neq \emptyset$.

Afirmção 1: S é um subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Para provar que S é um subgrupo, verificamos as propriedades:

(a) Fechamento para a soma: se $T_1, T_2 \in S$, então

$$\varphi(t + (T_1 + T_2)) = \varphi((t + T_1) + T_2) = \varphi(t + T_1) = \varphi(t),$$

logo $T_1 + T_2 \in S$.

(b) Fechamento para o inverso: se $T_1 \in S$, então

$$\varphi(t - T_1) = \varphi((t - T_1) + T_1) = \varphi(t),$$

logo $-T_1 \in S$.

Assim, S é um subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Afirmção 2: S é fechado em \mathbb{R} . Seja $\{T_n\}$ uma sequência em S tal que $T_n \rightarrow T \in \mathbb{R}$. Pela continuidade de φ , temos

$$\varphi(t+T) = \varphi\left(t + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n\right) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (t + T_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t + T_n).$$

Como $T_n \in S$, temos $\varphi(t + T_n) = \varphi(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\varphi(t+T) = \varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo, $T \in S$, e S é fechado.

Note que, pelo Lema 1.19, S é um subgrupo fechado de $(\mathbb{R}, +)$. Assim, ou:

1. $S = \mathbb{R}$, ou
2. $S = \tau\mathbb{Z}$, para algum $\tau > 0$.

No caso $S = \mathbb{R}$, temos $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ para qualquer $T \in \mathbb{R}$, ou seja, φ é constante. Por outro lado, se $S = \tau\mathbb{Z}$, então φ é periódica com período fundamental¹ $\tau > 0$, isto é,

$$\varphi(t + \tau) = \varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ para $0 < |t - s| < \tau$.

Portanto, concluímos que, se φ não é injetora, então ou φ é constante, ou φ é periódica com período fundamental. ■

Exemplo 1.21. Considere o sistema diferencial no plano \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' = -x(1-x), \\ y' = y(1-y), \end{cases}$$

com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Para encontrar os pontos singulares, resolvemos:

$$-x(1-x) = 0 \quad \text{e} \quad y(1-y) = 0.$$

Dessa forma, temos:

$$x = 0 \text{ ou } x = 1 \quad \text{e} \quad y = 0 \text{ ou } y = 1.$$

Portanto, os pontos singulares do sistema são:

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).$$

As soluções do sistema podem ser encontradas explicitamente resolvendo as equações diferenciais separadamente. Veja o Apêndice A.1.

Para $x' = -x(1-x)$, sabemos que a solução geral é:

$$x(t) = \frac{p}{p + (1-p)e^t},$$

em que $p = x(0)$. Para $y' = y(1-y)$, a solução é:

$$y(t) = \frac{qe^t}{qe^t + (1-q)},$$

¹O **período fundamental** de uma função periódica é o menor período positivo $T > 0$ para o qual a função se repete identicamente, ou seja, satisfaz: $f(t+T) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Além disso, o período fundamental T tem a propriedade de ser o menor número positivo que gera todos os outros períodos por múltiplos inteiros. Em termos formais, para qualquer período T' da função, temos $T' = nT$, com $n \in \mathbb{Z}$. Se uma função periódica não tem um período fundamental (como uma função constante, que é invariável para qualquer T), dizemos que ela é **identicamente constante**.

com $q = y(0)$. Logo, a solução completa do sistema é:

$$\varphi(t, (p, q)) = \left(\frac{p}{p + (1-p)e^t}, \frac{qe^t}{qe^t + (1-q)} \right).$$

As trajetórias no plano- xy correspondem às combinações das soluções para $x(t)$ e $y(t)$, determinadas pelos valores iniciais (p, q) .

No infinito, temos:

- para $x(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1;$$

- para $y(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0.$$

Assim, as trajetórias convergem para os pontos singulares $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ ou $(1, 0)$, dependendo dos valores iniciais. Veja a Figura 1.5.

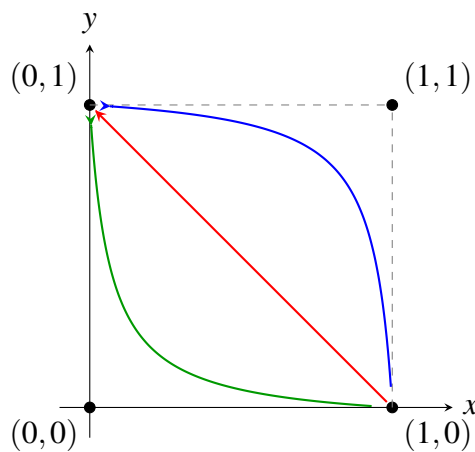


Figura 1.5: Trajetórias reais do sistema com condições iniciais $0 < p, q < 1$, com sentido indicado por setas.

Note que as trajetórias exibem os seguintes comportamentos:

- (a) Se $p, q \in (0, 1)$, então $\varphi(t, (p, q)) \rightarrow (0, 1)$ quando $t \rightarrow +\infty$, e $(1, 0)$ quando $t \rightarrow -\infty$;
- (b) Se $p = 0$ ou $q = 0$, a solução permanece constante em um dos eixos (comportamento trivial);
- (c) Se $p = 1$ e $q = 1$, a solução é constante: $(x(t), y(t)) = (1, 1)$.

Definição 1.22. O conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, com as soluções do sistema diferencial descrito pela equação $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$, é chamado de **retrato de fase** do sistema. Um retrato de fase é uma representação geométrica das órbitas das soluções no plano, em que cada órbita corresponde a uma solução do sistema com um ponto inicial $p \in \mathbb{R}^2$. Essas trajetórias são orientadas de acordo com o tempo $t \rightarrow +\infty$, ou seja, a direção da órbita segue o fluxo das soluções ao longo do tempo.

A *decomposição em órbitas* se refere à maneira como as soluções de uma equação diferencial podem ser agrupadas em “órbitas” que são parametrizadas por diferentes condições iniciais. Cada ponto inicial $p \in \mathbb{R}^2$ define uma órbita, que descreve o comportamento da solução ao longo do tempo. As órbitas são descritas de forma que sua evolução seja contínua e dependente do tempo, geralmente com a orientação dada por $t \rightarrow +\infty$, refletindo a direção do fluxo da solução.

Assim, a definição de retrato de fase pode ser “interpretada” usando a decomposição em órbitas, uma vez que essas órbitas capturam o comportamento dinâmico do sistema.

Exemplo 1.23. No Exemplo 1.21, estudamos o sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = -x(1-x), \\ y' = y(1-y), \end{cases}$$

com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Vimos que ele possui quatro pontos singulares, sendo dois pontos do tipo *sela* e dois pontos do tipo *nó* (veja o Exemplo 1.26 para a definição desses tipos de pontos).

A Figura 1.6 ilustra um esboço do retrato de fase do sistema acima.

Definição 1.24. Um sistema diferencial da forma

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

em que P e Q são polinômios nas variáveis reais x e y , chama-se **um sistema diferencial polinomial de grau m** , se $m = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$.

Observação 1.25. Pelo Teorema de Bézout [10, p. 57], conclui-se que um sistema diferencial polinomial de grau m possui infinitos pontos singulares ou, no máximo, m^2 pontos singulares em \mathbb{R}^2 .

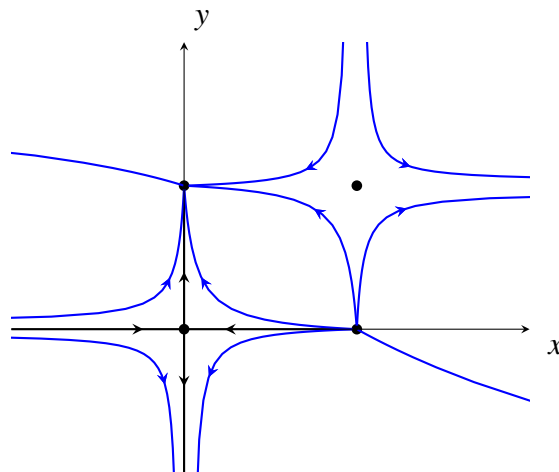


Figura 1.6: Esboço do retrato de fase do sistema $x' = -x(1-x)$, $y' = y(1-y)$ no plano- xy .

Exemplo 1.26 (Sistemas lineares planares). Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (1.2)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc \neq 0$. Ou equivalentemente, em notação matricial temos que

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \text{ com } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \det A \neq 0.$$

Nesse caso, as equações estão associadas a campos vetoriais lineares A em \mathbb{R}^2 . A condição $\det A \neq 0$ é equivalente a que a origem $0 \in \mathbb{R}^2$ seja o único ponto onde A se anula, isto é, o único ponto singular.

O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc).$$

Observe que $\text{tr}(A) = a + d$ e $\det(A) = ad - bc$, assim podemos reescrever o polinômio característico como sendo

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Além do mais, considerando que λ_1 e λ_2 são raízes desse polinômio, então teríamos o seguinte:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

Daí, tomando os termos semelhantes na igualdade, obtemos que

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{e} \quad \det(A) = \lambda_1\lambda_2.$$

Mais ainda, teríamos que

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde $\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)$. Assim, observamos que sempre é possível encontrar uma matriz invertível $M_{2 \times 2}$ (matriz mudança de base) tal que fazendo a mudança de coordenadas

$$y = M^{-1}x \Rightarrow y' = M^{-1}x' = M^{-1}Ax = M^{-1}AMy = By \Leftrightarrow y' = By,$$

onde B pode assumir as seguintes formas

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, distinguimos os seguintes casos:

(I) As raízes λ_1 e λ_2 são autovalores reais e distintos. Necessariamente, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Considere v_1 e v_2 vetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 . A solução geral $x' = Ax$, ou seja, a trajetória A é dada por

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2.$$

Dessa maneira, vamos apresentar inicialmente todas as situações **degeneradas do caso (I)**, ou seja, quando um dos autovalores é nulo. Vale ressaltar que se os dois autovalores fossem nulos, então o campo de vetores seria nulo e todas as trajetórias seriam constantes. (Ver Figura 1.7)

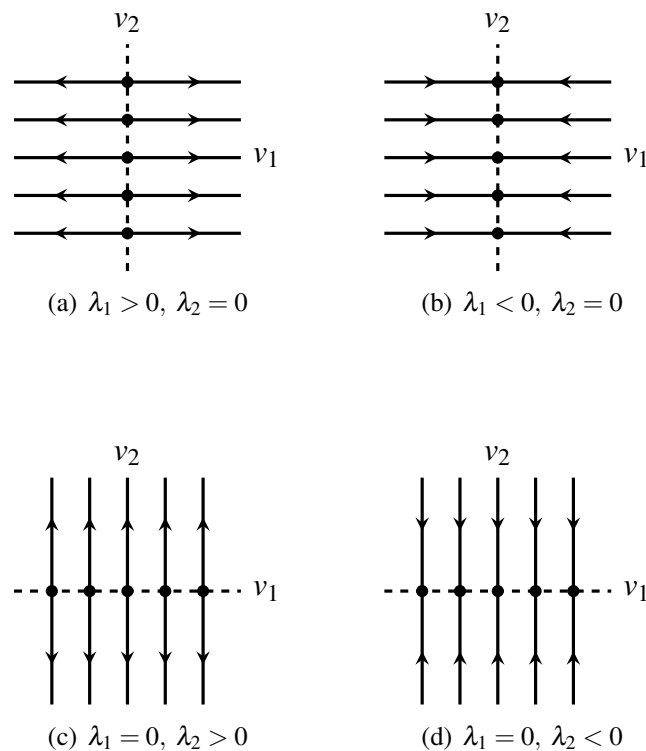


Figura 1.7: Subcasos degenerados do caso (I)

Agora, mostraremos todas as situações **não degeneradas do caso (I)**, assim subdividimos em três casos:

(I₁) **Nó atrator (estável):** Suponha $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$).

Se $c_1 = 0$ ($c_2 = 0$), então a órbita tende a zero na direção de v_2 (v_1).

Se ambos são não nulos, temos que

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \left[\frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{e^{\lambda_1 t}} \right] \frac{e^{\lambda_1 t}}{|\varphi'(t)|} = \left[\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 \underbrace{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}_{\rightarrow 0} v_2 \right] \frac{e^{\lambda_1 t}}{|\varphi'(t)|},$$

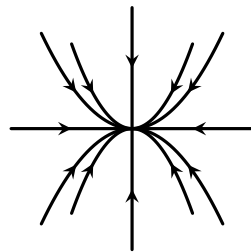
daí

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} \rightarrow \frac{\lambda_1 c_1 v_1}{|\lambda_1 c_1 v_1|} \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

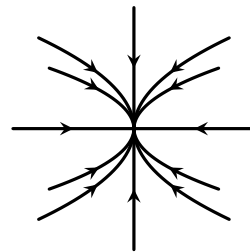
pois

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi'(t)|^2}{(e^{\lambda_1 t})^2} &= \frac{(\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2)^2}{(e^{\lambda_1 t})^2} \\ &= \frac{(\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t})^2 |v_1|^2 + \lambda_1 \lambda_2 c_1 c_2 e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} \langle v_1, v_2 \rangle + (\lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t})^2 |v_2|^2}{(e^{\lambda_1 t})^2} \\ &= (\lambda_1 c_1)^2 |v_1|^2 + \lambda_1 \lambda_2 c_1 c_2 \underbrace{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}_{\rightarrow 0} \langle v_1, v_2 \rangle + (\lambda_2 c_2 \underbrace{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}_{\rightarrow 0})^2 |v_2|^2, \end{aligned}$$

logo $\frac{|\varphi'(t)|^2}{(e^{\lambda_1 t})^2} \rightarrow (\lambda_1 c_1)^2 |v_1|^2 = |\lambda_1 c_1 v_1|^2$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim, $c_1 \neq 0$, as órbitas tendem a zero seguindo a direção de v_1 . Daí, nesse caso temos as seguintes figuras ilustrando o comportamento de todas as trajetórias. As setas indicam o sentido do percurso.



(a) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



(b) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

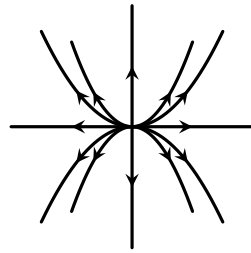
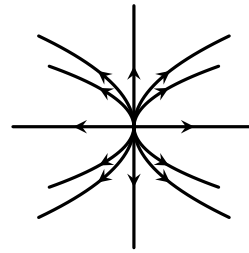
(I₂) **Nó repulsor (instável) :** Suponha $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ($0 < \lambda_2 < \lambda_1$). Assim, as soluções tendem ao infinito. A análise é semelhante ao caso anterior, mas lembramos que agora, as soluções seguem a direção de v_2 (v_1), pois

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \left[\frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{e^{\lambda_2 t}} \right] \frac{e^{\lambda_2 t}}{|\varphi'(t)|} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2 c_2 v_2}{|\lambda_2 c_2 v_2|}.$$

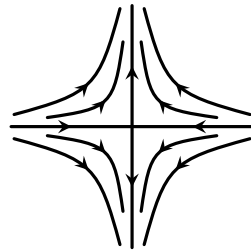
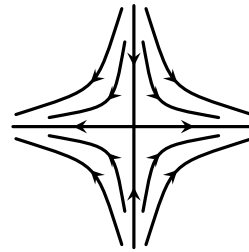
Assim, nesse caso temos as seguintes figuras ilustrando o comportamento de todas as trajetórias. As setas indicam o sentido do percurso.

(I₃) **Ponto de Sela:** Suponha $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Para $c_1 \neq 0$, temos:

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \left[\frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{e^{\lambda_1 t}} \right] \frac{e^{\lambda_1 t}}{|\varphi'(t)|} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 c_1 v_1}{|\lambda_1 c_1 v_1|}.$$

(c) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ (d) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

O mesmo acontece quando $t \rightarrow -\infty$. Assim, nesse caso temos as seguintes figuras ilustrando o comportamento de todas as trajetórias. As setas indicam o sentido do percurso.

(e) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (f) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

(II) As raízes λ_1 e λ_2 são complexos conjugados.

Sejam $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ autovalores e $w = v_1 + iv_2$ e $\overline{w} = v_1 - iv_2$ autovetores associados, com v_1 e v_2 vetores reais.

Vamos encontrar uma solução real $\varphi(t)$ de $x' = Ax$. Então,

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} w &= e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t)) (v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha t} (v_1 \cos(\beta t) - v_2 \operatorname{sen}(\beta t)) + i e^{\alpha t} (v_2 \cos(\beta t) + v_1 \operatorname{sen}(\beta t)). \end{aligned}$$

Logo, $\varphi(t) = c_1 e^{\alpha t} (v_1 \cos(\beta t) - v_2 \operatorname{sen}(\beta t)) + c_2 e^{\alpha t} (v_2 \cos(\beta t) + v_1 \operatorname{sen}(\beta t))$ é a solução geral de $x' = Ax$. Tomando $c_1 = \rho \cos(-\delta)$ e $c_2 = \rho \operatorname{sen}(-\delta)$, obtemos

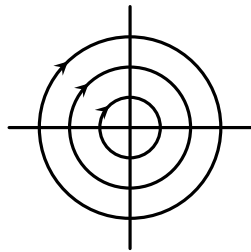
$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{\alpha t} [\rho \cos(-\delta) \cos(\beta t) v_1 - \rho \cos(-\delta) \operatorname{sen}(\beta t) v_2] \\ &\quad + e^{\alpha t} [\rho \operatorname{sen}(-\delta) \cos(\beta t) v_2 + \rho \operatorname{sen}(-\delta) \operatorname{sen}(\beta t) v_1] \\ &= \rho e^{\alpha t} \{ [\cos(-\delta) \cos(\beta t) + \operatorname{sen}(-\delta) \operatorname{sen}(\beta t)] v_1 \\ &\quad + [\cos(\beta t) \operatorname{sen}(-\delta) - \operatorname{sen}(\beta t) \cos(-\delta)] v_2 \} \\ &= \rho e^{\alpha t} \{ [\cos(\delta) \cos(\beta t) - \operatorname{sen}(\delta) \operatorname{sen}(\beta t)] v_1 \\ &\quad + [-\cos(\beta t) \operatorname{sen}(\delta) - \operatorname{sen}(\beta t) \cos(\delta)] v_2 \} \\ &= \rho e^{\alpha t} [\cos(\beta t + \delta) v_1 - \operatorname{sen}(\beta t + \delta) v_2]. \end{aligned}$$

Para valores de t tais que $\beta t + \delta = k\pi$, a órbita corta a reta definida pelo vetor v_1 e, para $\beta t + \delta = k\pi + \frac{\pi}{2}$, a órbita corta a reta definida pelo vetor v_2 . Assim, a órbita gira em torno da origem. Além do mais, o sinal de β nos diz se as trajetórias “giram” no sentido anti-horário ($\beta < 0$) ou no sentido horário ($\beta > 0$).

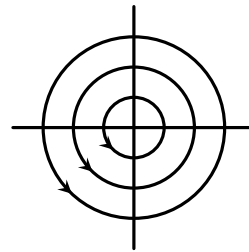
(II₁) **Centro:** Suponha que $\alpha = 0$, então a solução geral é dada por

$$\varphi(t) = \rho[\cos(\beta t + \delta)v_1 - \text{sen}(\beta t + \delta)v_2]$$

em que $\rho > 0$ e δ são constantes arbitrárias. As órbitas são curvas fechadas, $\frac{2\pi}{|\beta|}$ -periódicas. Observe que se $\alpha = 0$ então a solução é a parametrização de uma circunferência para todo valor de $\rho \neq 0$.

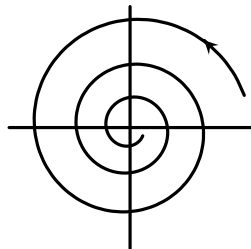


(g) $\beta > 0$

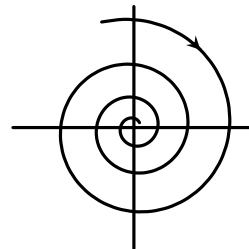


(h) $\beta < 0$

(II₂) **Foco atrator (estável):** Suponha $\alpha < 0$. Então, as órbitas tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$.



(i) $\alpha < 0, \beta < 0$



(j) $\alpha < 0, \beta > 0$

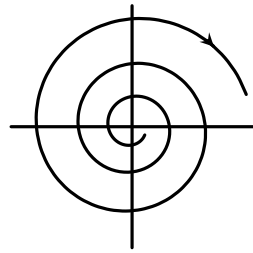
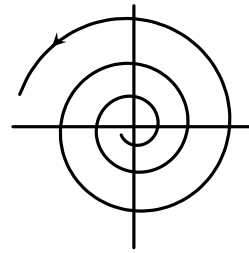
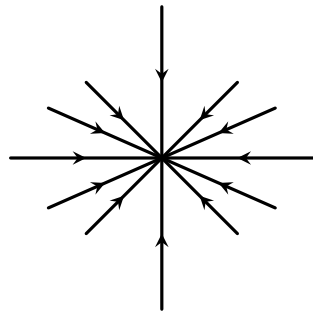
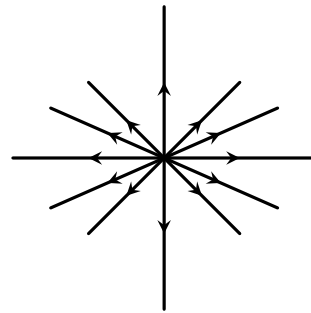
(II₃) **Foco repulsor (instável):** Suponha $\alpha > 0$. Então, as órbitas tendem a zero quando $t \rightarrow -\infty$.

(III) As raízes são reais e iguais, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

(III₁) **Nó impróprio (estrela):** Se $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ e existem dois autovetores linearmente independentes, todo vetor não nulo é autovetor. Neste caso, a solução geral é dada por

$$\varphi(t) = e^{\lambda_1 t}(c_1 v_1 + c_2 v_2).$$

Em ambos os casos as trajetórias estão contidas em retas. Quando $\lambda > 0$ dizemos que é uma **fonte** e quando $\lambda < 0$ dizemos que é um **poço**. Assim, nesse caso temos as seguintes figuras ilustrando o comportamento de todas as trajetórias.

(k) $\alpha > 0, \beta > 0$ (l) $\alpha > 0, \beta < 0$ (m) $\lambda < 0$ (n) $\lambda > 0$

(III₂) **Nó impróprio atrator (estável):** Se $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ e não é possível encontrar dois autovetores linearmente independentes, então o núcleo de $A = \lambda I$ é unidimensional, isto é,

$$N(A - \lambda I)^2 \supsetneq N(A - \lambda I)$$

e existe $w \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)^2 w = 0$ e $(A - \lambda I)w = v \neq 0$. Logo, v é autovetor e $e^{\lambda t} v$ e $te^{\lambda t} v + e^{\lambda t} w$ são soluções linearmente independentes de $x' = Ax$. Em outras palavras, esse caso é quando A possui um autovalor λ duplo com um único autovetor linearmente independente.

A solução geral é dada por

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} v + c_2 (te^{\lambda t} v + e^{\lambda t} w) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} v + c_2 e^{\lambda t} w.$$

Se $c_2 \neq 0$, como

$$\varphi'(t) = \lambda c_1 e^{\lambda t} v + c_2 (e^{\lambda t} v + \lambda t e^{\lambda t} v + \lambda e^{\lambda t} w),$$

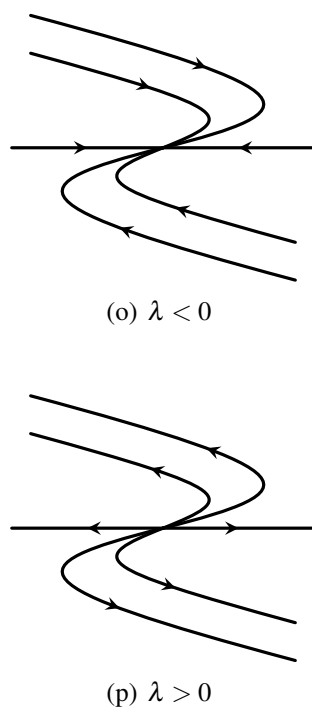
temos

$$\frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{\varphi'(t)}{te^{\lambda t}} \frac{te^{\lambda t}}{|\varphi'(t)|} \rightarrow \frac{\lambda c_2 v}{|\lambda c_2 v|} \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

e as órbitas tendem a zero seguindo na direção de v .

(III₃) **Nó impróprio repulsor (instável):** Análogo ao caso anterior com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$, bastando inverter as flechas.

A Tabela 1.1 resume os resultados anteriores de tal forma que facilita a compreensão da classificação dos sistemas lineares planares a partir do valor do determinante e do traço.



Os tipos de pontos críticos de um sistema linear planar podem ser classificados de acordo com o traço e o determinante da matriz dos coeficientes. A Figura 1.8 ilustra o diagrama de bifurcação dos sistemas (1.2) quando o traço e o determinante da matriz dos seus coeficientes variam.

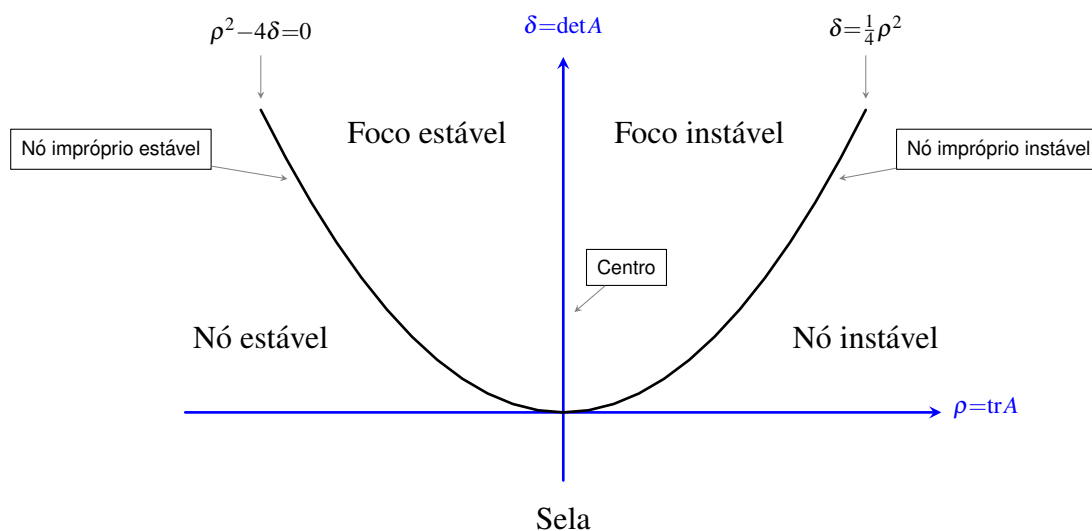


Figura 1.8: Diagrama de bifurcação do sistema linear 2×2 dado por $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Exemplo 1.27. (a) Considere a equação de segunda ordem $x'' = -x$. Tomando $y = x'$, obtemos o seguinte sistema de primeira ordem:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = X(\mathbf{x}), \text{ com } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tabela 1.1: Retrato de fase a partir do determinante e do traço

Determinante	Traço	Discriminante	Retrato de fase
$\det(A) < 0$	$\text{tr}(A) \in \mathbb{R}$	$\Delta > 0$	Ponto de sela
$\det(A) > 0$	$\text{tr}(A) < 0$	$\Delta > 0$	Nó atrator (estável)
	$\text{tr}(A) > 0$	$\Delta > 0$	Nó repulsor (instável)
$\det(A) \in \mathbb{R}$	$\text{tr}(A) = 0$	$\Delta < 0$	Centro
	$\text{tr}(A) < 0$	$\Delta < 0$	Foco atrator (estável)
	$\text{tr}(A) > 0$	$\Delta < 0$	Foco repulsor (instável)
	$\text{tr}(A) > 0$	$\Delta = 0$	Nó impróprio repulsor (instável)
	$\text{tr}(A) < 0$	$\Delta = 0$	Nó impróprio atrator (estável)

Os pontos críticos do sistema são dados por:

$$X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Portanto, $(0, 0)$ é um ponto crítico e solução constante.

Para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, temos que a solução é:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a \sin(t+b) \\ a \cos(t+b) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = a \sin(t+b), \\ y(t) = a \cos(t+b), \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

É importante ressaltar que, nesse caso, temos uma solução com autovalores complexos cuja parte real é zero. Assim, recaímos no caso de um centro linear. O fluxo do sistema é dado por:

$$\varphi_{a,b}(t) = (x(t), y(t)).$$

Note que:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{a,b}(t) - (0, 0)\| &= \|\varphi_{a,b}(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \\ &= \sqrt{(a \sin(t+b))^2 + (a \cos(t+b))^2} = \sqrt{a^2} = |a|. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi_{a,b}(t)$ está a uma distância constante igual a $|a|$ do ponto crítico $(0, 0)$. A Figura 1.9 ilustra o retrato de fase do sistema.

Resolvemos a equação diferencial ordinária pelo método de substituição; para mais detalhes da resolução veja o Apêndice A.2.

(b) Consideremos, agora, o sistema perturbado:

$$\begin{cases} x' = y + \varepsilon x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = -x + \varepsilon y(1 - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (1.3)$$

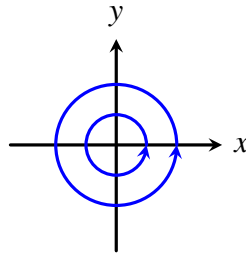


Figura 1.9: Órbitas do sistema no plano fase.

com $\varepsilon \geq 0$ suficientemente pequeno.

Transformando o sistema (1.3) em coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, e $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos:

$$\begin{cases} r' = \varepsilon r(1 - r^2), \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

Note que, como $\theta' = -1$, então as órbitas giram no sentido horário.

Vamos calcular os pontos críticos:

$$r' = 0 \Leftrightarrow \varepsilon r(1 - r^2) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon r = 0 \text{ ou } 1 - r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1.$$

Assim,

- se $r = 0$, então $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, implicando que $(x, y) = (0, 0)$. O valor $r = 0$ corresponde ao ponto crítico do sistema.
- Se $r = 1$, então $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ implica que $x^2 + y^2 = 1$. Isso corresponde à circunferência de raio 1 e centro $(0, 0)$, que é um conjunto invariante para as soluções do sistema. A variação de r em relação a t é descrita pela expressão $\varepsilon r(1 - r^2)$. Quando $0 < r < 1$, temos $r' > 0$, o que significa que as soluções giram em torno de $(0, 0)$ no sentido horário enquanto o raio aumenta. Por outro lado, quando $r > 1$, temos $r' < 0$, indicando que as soluções giram em torno de $(0, 0)$ no sentido horário enquanto o raio diminui.

A Figura 1.10 ilustra o retrato de fase do sistema (1.3). Observamos que no sistema perturbado (1.3) há apenas uma órbita fechada, enquanto que no sistema não perturbado (com $\varepsilon = 0$), temos infinitas órbitas fechadas. Ao tomar $\varepsilon \neq 0$, causamos uma mudança de comportamento das órbitas. Esse fenômeno é chamado de **bifurcação**. No sistema perturbado, temos um ciclo limite, que é uma órbita fechada (periódica não constante) que é isolada no conjunto de todas as órbitas fechadas do sistema. Nos próximos capítulos, definiremos formalmente um ciclo limite.

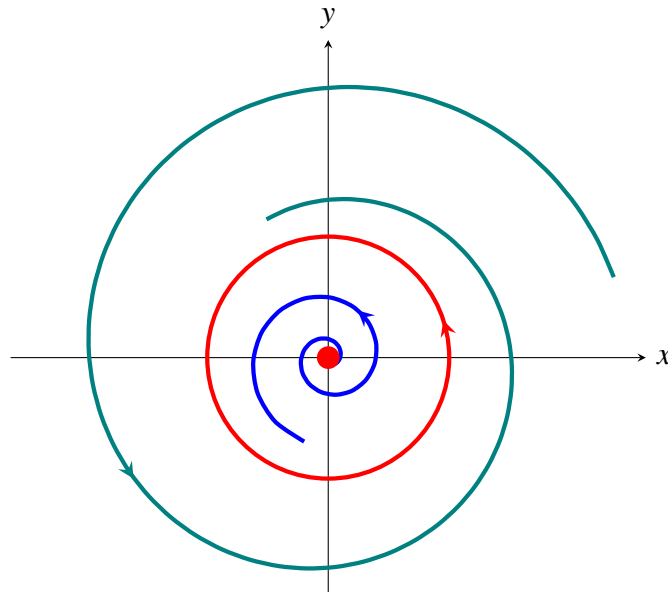


Figura 1.10: Órbitas do sistema (1.3).

O Exemplo 1.27, parte (b), que lida com um sistema perturbado, será bastante utilizado no decorrer desta dissertação. Dessa forma, no que segue omitiremos os detalhes das contas em alguns casos, pois segue de forma inteiramente análoga, nesse sentido analisaremos apenas o comportamento das órbitas a partir dos conceitos dados.

1.1.2 Equivalência e conjugação topológicas e o Teorema do Fluxo Tubular

Nesta seção, apresentaremos o Teorema do Fluxo Tubular, que nos leva naturalmente a um problema de classificação. Surge, então, a seguinte questão: *quando dois fluxos devem ser considerados idênticos?*

Para isso, definiremos diferentes noções de equivalência entre dois campos vetoriais, o que nos possibilitará comparar seus retratos de fases.

Definição 1.28. Sejam X_1 e X_2 dois campos vetoriais definidos em abertos Λ_1 e Λ_2 de \mathbb{R}^2 , respectivamente. Dizemos que X_1 é **topologicamente equivalente** (respectivamente, C^r -equivalente) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ que leva as órbitas de X_1 nas órbitas de X_2 , preservando a orientação. Mais especificamente, para $\mathbf{x} \in \Lambda_1$, seja $\gamma^1(\mathbf{x})$ a órbita orientada de X_1 que passa por \mathbf{x} . Então, temos $h(\gamma^1(\mathbf{x})) = \gamma^2(h(\mathbf{x}))$, que é a órbita orientada de X_2 passando por $h(\mathbf{x})$.

Observe que a Definição 1.28 estabelece uma relação de equivalência entre campos vetoriais definidos em abertos de \mathbb{R}^2 . Em outras palavras, diremos que dois fluxos são equivalentes se existe um homeomorfismo do domínio de um no domínio de outro que leva as trajetórias do primeiro nas

trajetórias do segundo, preservando o sentido do tempo. O homeomorfismo h é chamado de **equivalência topológica** (ou, respectivamente, C^r -equivalência) entre X_1 e X_2 , conforme ilustrado na Figura 1.11.

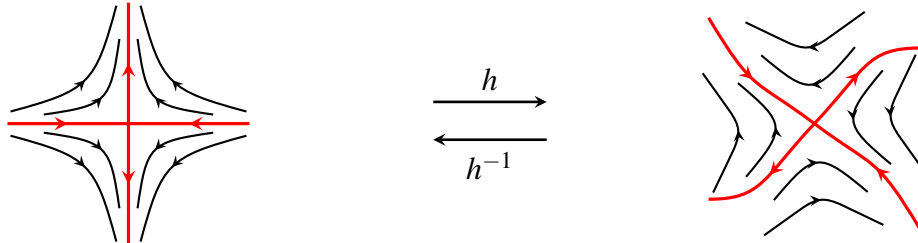


Figura 1.11: Equivalência topológica

Definição 1.29. Sejam $\varphi_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os fluxos gerados pelos campos vetoriais $X_1: \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X_2: \Lambda_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente. Dizemos que X_1 é **topologicamente conjugado** (respectivamente, C^r -conjugado) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo de classe C^r) $h: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, \mathbf{x})) = \varphi_2(t, h(\mathbf{x})), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in D_1.$$

Neste caso, é necessário que os intervalos máximos ($I_{\mathbf{x}}$ e $I_{h(\mathbf{x})}$) das respectivas soluções máximas (φ_1 e φ_2) sejam iguais. O homeomorfismo (ou difeomorfismo) h é denominado **conjugação topológica** (respectivamente, C^r -conjugação) entre X_1 e X_2 .

Na Definição 1.29, se h for linear, dizemos que φ_1 e φ_2 são linearmente conjugados.

Ao analisar a relação de conjugação entre fluxos gerados por campos vetoriais, notamos que ela possui propriedades fundamentais que caracterizam uma relação de equivalência entre esses campos. Uma relação de equivalência deve satisfazer três propriedades essenciais: reflexiva, simétrica e transitiva. Em outras palavras, ela deve cumprir as condições de que cada campo seja conjugado a si mesmo, que a conjugação entre dois campos seja reversível e que a conjugação entre três campos seja transitiva.

A seguir, apresentamos essas três propriedades de conjugação topológica entre fluxos gerados por campos vetoriais, com a respectiva demonstração para cada uma delas. Assim, considere $\varphi_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_3: D_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os fluxos gerados pelos campos vetoriais $X_1: \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X_2: \Lambda_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X_3: \Lambda_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente. A seguir, apresentamos a demonstração dessas propriedades:

- **Reflexiva:** Todo campo vetorial é topologicamente conjugado a si mesmo.

De fato, a aplicação identidade $Id: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_1$ é um homeomorfismo, e temos:

$$Id(\varphi_1(t, \mathbf{x})) = \varphi_1(t, Id(\mathbf{x}))$$

para todo $(t, \mathbf{x}) \in D_1$.

- **Simétrica:** Se X_1 é topologicamente conjugado a X_2 , então X_2 é topologicamente conjugado a X_1 .

De fato, suponhamos que exista um homeomorfismo $h: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ tal que

$$h(\varphi_1(t, \mathbf{x})) = \varphi_2(t, h(\mathbf{x})), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in D_1.$$

Dado $\mathbf{y} \in \Lambda_2$, existe um único $\mathbf{x} \in \Lambda_1$ tal que $h(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Assim,

$$h^{-1}(\varphi_2(t, \mathbf{y})) = h^{-1}(\varphi_2(t, h(\mathbf{x}))) = h^{-1}(h(\varphi_1(t, \mathbf{x}))) = \varphi_1(t, \mathbf{x}) = \varphi_1(t, h^{-1}(\mathbf{y})).$$

Logo, X_2 é topologicamente conjugado a X_1 .

- **Transitiva:** Se X_1 é topologicamente conjugado a X_2 e X_2 é topologicamente conjugado a X_3 , então X_1 é topologicamente conjugado a X_3 .

De fato, suponha que existam homeomorfismos $h_1: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ e $h_2: \Lambda_2 \rightarrow \Lambda_3$ tais que

$$h_1(\varphi_1(t, \mathbf{x})) = \varphi_2(t, h_1(\mathbf{x})) \quad \text{e} \quad h_2(\varphi_2(t, \mathbf{x})) = \varphi_3(t, h_2(\mathbf{x})).$$

Definimos $h = h_2 \circ h_1$, que é um homeomorfismo, pois a composição de homeomorfismos é um homeomorfismo. Agora, mostramos que h é uma conjugação topológica entre X_1 e X_3 :

$$\begin{aligned} h(\varphi_1(t, \mathbf{x})) &= h_2(h_1(\varphi_1(t, \mathbf{x}))) &= h_2(\varphi_2(t, h_1(\mathbf{x}))) \\ & &= \varphi_3(t, h_2(h_1(\mathbf{x}))) \\ & &= \varphi_3(t, h_2 \circ h_1(\mathbf{x})) \\ & &= \varphi_3(t, h(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Portanto, X_1 é topologicamente conjugado a X_3 .

A conjugação topológica, de fato, define uma relação de equivalência entre fluxos gerados por campos vetoriais. Isso implica que os fluxos pertencentes à mesma classe de equivalência, se comportam de maneira estruturalmente idêntica sobre uma conjugação, preservando tanto os pontos singulares quanto as órbitas periódicas. Mais especificamente, uma conjugação entre dois fluxos leva pontos singulares a pontos singulares e, no caso de fluxos periódicos, preserva o período das órbitas.

A partir disso, podemos deduzir algumas propriedades importantes da conjugação topológica. Vamos formalizar essas propriedades em uma proposição.

Proposição 1.30. *Se $h: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ é uma conjugação topológica entre os fluxos gerados pelos campos vetoriais X_1 e X_2 , então as seguintes propriedades se verificam:*

(i) *A conjugação h leva órbitas em órbitas, preservando o tempo;*

(ii) *A conjugação h leva órbitas periódicas em órbitas periódicas, preservando o período.*

Demonstração. (i) Seja $\gamma_{\mathbf{x}}^1(t)$ a órbita de X_1 que passa pelo ponto \mathbf{x} , para $t \in \mathbb{R}$. Como h é um homeomorfismo, existe um único $\mathbf{y} \in \Lambda_2$ tal que $h(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \in \Lambda_2$. Então, temos

$$h(\gamma_{\mathbf{x}}^1(t)) = \gamma_{h(\mathbf{x})}^2(t) = \gamma_{\mathbf{y}}^2(t),$$

ou seja, a conjugação h leva a órbita de X_1 que passa por \mathbf{x} para a órbita de X_2 que passa por $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$. Logo, a conjugação preserva o comportamento das órbitas, mantendo a correspondência temporal entre elas.

(ii) Seja $\gamma(\varphi(t)) = \{\varphi(t); s \leq t \leq s + T\} \subset \mathbb{R}^2$ uma órbita periódica de período T . Pelo item anterior, sabemos que $h(\gamma_{\mathbf{x}}^1(t)) = \gamma_{\mathbf{y}}^2(t)$ é uma órbita. Agora, vamos demonstrar que essa órbita é também periódica de período T . Como a conjugação preserva o tempo, temos:

$$h(\gamma_{\mathbf{x}}^1(t)) = \gamma_{\mathbf{y}}^2(s) \quad \text{e} \quad h(\gamma_{\mathbf{x}}^1(s+T)) = \gamma_{\mathbf{y}}^2(s+T).$$

Logo, como $\gamma(\varphi(t))$ é periódica, temos:

$$h(\gamma_{\mathbf{x}}^1(t)) = h(\gamma_{\mathbf{x}}^1(s+T)) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\mathbf{y}}^2(s) = \gamma_{\mathbf{y}}^2(s+T).$$

Portanto, $\gamma_{\mathbf{y}}^2(s)$ é uma órbita periódica de período T . ■

Essas propriedades destacam o comportamento das órbitas sobre conjugação topológica, evidenciando a preservação estrutural das dinâmicas envolvidas.

Exemplo 1.31. Considere a função $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4} \right).$$

Vamos mostrar que h é uma conjugação C^r entre os fluxos gerados pelos campos vetoriais

$$X_1(x, y) = (x, -y) \quad \text{e} \quad X_2(x, y) = (x, -y + x^3).$$

Primeiro, vamos determinar os fluxos associados aos campos vetoriais dados:

• **Fluxo de $X_1(x, y) = (x, -y)$.** A equação diferencial associada a X_1 é dada por:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Resolvendo essas equações por separação de variáveis, obtemos:

$$x(t) = K_1 e^t \quad \text{e} \quad y(t) = K_2 e^{-t}.$$

Assim, a solução geral é:

$$X_1(t) = (x(t), y(t)) = (ae^t, be^{-t}),$$

onde (a, b) são as condições iniciais. Portanto, o fluxo de X_1 é dado por:

$$\varphi_1(t, (a, b)) = (ae^t, be^{-t}).$$

- **Fluxo de** $X_2(x, y) = (x, -y + x^3)$. A equação diferencial associada a X_2 é:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y + x^3. \end{cases}$$

Sabemos que $x(t) = K_1 e^t$, então substituindo em $y' = -y + x^3$, obtemos $y' = -y + K_1^3 e^{3t}$. Esta é uma equação diferencial do tipo linear, e podemos resolvê-la utilizando o fator integrante. A equação resultante é:

$$y' + y = K_1^3 e^{3t}.$$

O fator integrante é e^t , portanto multiplicamos a equação por e^t e integramos:

$$e^t y' + e^t y = e^t K_1^3 e^{3t} \Rightarrow (e^t y)' = K_1^3 e^{4t}.$$

Integrando ambos os lados:

$$\int (e^t y)' dt = \int K_1^3 e^{4t} dt \Rightarrow e^t y = \frac{K_1^3}{4} e^{4t} + K_3.$$

Logo, a solução para $y(t)$ é:

$$y(t) = \frac{K_1^3}{4} e^{3t} + K_3 e^{-t}.$$

Com as condições iniciais $(x(0), y(0)) = (a, b)$, temos $K_1 = a$ e $K_3 = b - \frac{a^3}{4}$, de modo que o fluxo de X_2 é:

$$X_2(t) = \left(a e^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right).$$

Portanto, o fluxo de X_2 é dado por $\varphi_2(t, (a, b)) = \left(a e^t, \left(b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right)$.

Agora, mostramos que h é uma conjugação entre os fluxos φ_1 e φ_2 . Se $p = (a, b)$, temos:

$$h(\varphi_1(t, p)) = h(\varphi_1(t, (a, b))) = h(a e^t, b e^{-t}) = \left(a e^t, b e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right),$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_2(t, h(p)) &= \varphi_2(t, h(a, b)) = \varphi_2 \left(t, \left(a, b + \frac{a^3}{4} \right) \right) = \left(a e^t, \left(b + \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right) \\ &= \left(a e^t, b e^{-t} + \frac{a^3 e^{3t}}{4} \right). \end{aligned}$$

Logo, temos:

$$h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p)),$$

o que implica que h é uma conjugação de classe C^r entre X_1 e X_2 .

No Exemplo 1.31, vimos que existe uma conjugação C^r entre uma sela linear e uma sela não linear. Agora, vamos explorar uma forma de conjugação que permite comparações diretas entre sistemas lineares. Isso acontece quando a aplicação que realiza a conjugação também é linear.

Uma propriedade interessante de conjugação topológica entre os fluxos de campos vetoriais lineares $X'_1 = AX_1$ e $X'_2 = BX_2$ é que as matrizes A e B devem ser semelhantes. Essas e outras propriedades relacionadas aos fluxos lineares e às conjugações podem ser encontradas em [9].

Definição 1.32. Seja $X: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^r , com $r \geq 1$, e $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ e $A \subset \mathbb{R}$ subconjuntos abertos. Uma aplicação diferenciável $f: A \rightarrow \Lambda$, de classe C^r , é chamada de **seção transversal local** de X (de classe C^r) quando, para cada $a \in A$, os vetores $f'(a)$ e $X(f(a))$ são linearmente independentes, ou seja, geram o espaço \mathbb{R}^2 . Seja $\Sigma = f(A)$, com a topologia induzida. Se $f: A \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo, dizemos que Σ é uma **seção transversal** de X .

A Figura 1.12 ilustra a seção transversal Σ ao longo das órbitas γ do campo vetorial X .

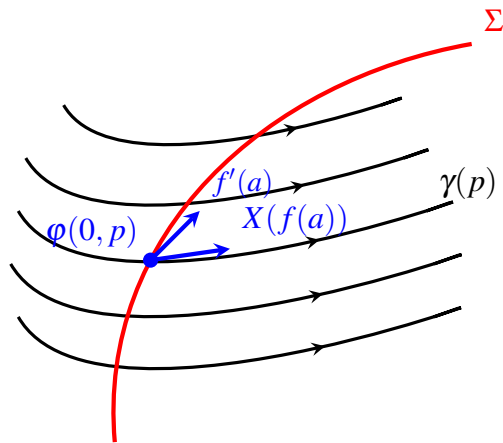


Figura 1.12: Seção transversal

O Teorema do Fluxo Tubular é um resultado fundamental em teoria de sistemas dinâmicos e análise de equações diferenciais. Ele fornece uma descrição local do comportamento de soluções de campos vetoriais diferenciáveis em termos de coordenadas simplificadas. Especificamente, afirma que, em uma vizinhança suficientemente pequena de cada ponto onde o campo vetorial não se anula, as órbitas são “parecidas” com o campo horizontal $Y = (1, 0)$.

Esse teorema é crucial porque permite reduzir a análise de problemas locais envolvendo campos vetoriais a problemas em espaços mais simples, onde as soluções podem ser tratadas como segmentos de linhas retas no espaço.

Teorema 1.33 (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja p um ponto regular de um campo vetorial $X: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r , com $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$. Seja também $f: A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal de X de classe C^r , satisfazendo $f(0) = p$. Então, existem uma vizinhança V de p em Λ e um difeomorfismo $h: V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^r , onde $\varepsilon > 0$ e B é um intervalo aberto centrado na origem $0 = f^{-1}(p)$, tais que:*

(i) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;

(ii) h é uma conjugação de classe C^r entre o campo vetorial restrito $X|_V$ e o campo vetorial constante $Y: (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $Y = (1, 0)$.

A Figura 1.13 ilustra a estrutura descrita no Teorema do Fluxo Tubular, destacando a parametrização local do campo vetorial e a seção transversal associada.

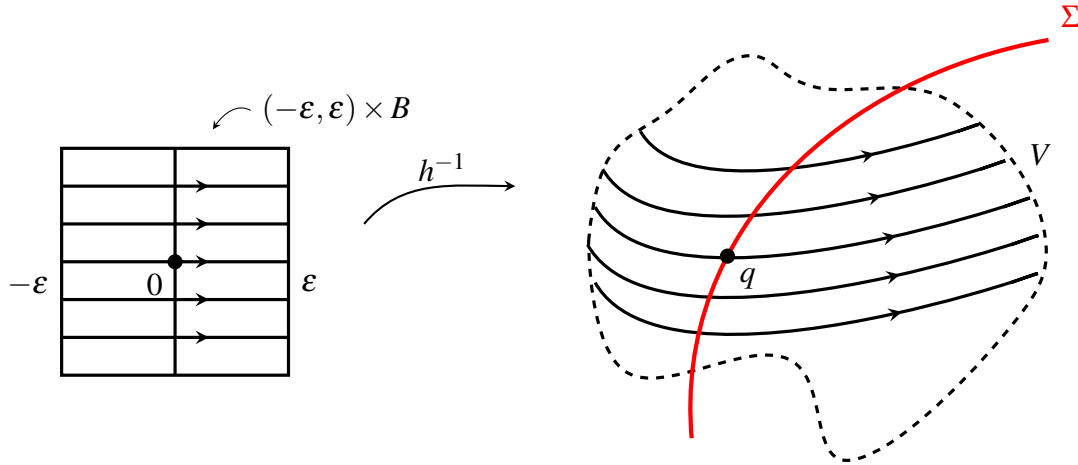


Figura 1.13: Ilustração do Teorema do Fluxo Tubular. A imagem da direita mostra o domínio V no espaço original, com uma seção transversal Σ e as trajetórias do campo vetorial X . A imagem da esquerda representa a parametrização tubular dada pelo difeomorfismo $h: V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$, onde o campo X é conjugado ao campo constante $Y = (1, 0)$.

Demonstração. Sejam $\varphi: D \rightarrow \Lambda$ o fluxo de X e $F: D_A \rightarrow \Lambda$ definido por

$$F(t, u) = \varphi(t, f(u)),$$

onde $D_A = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mid (t, f(u)) \in D\}$. Observe que F aplica linhas paralelas (isto é, as curvas integrais de Y) em curvas integrais de X . Nosso objetivo é encontrar um difeomorfismo que leve as curvas integrais de X nas de Y . Para isso, mostraremos que F é um difeomorfismo local em $0 := (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pelo Teorema da Função Inversa, é suficiente mostrar que $DF(0)$ é um isomorfismo.

Calculamos a derivada de F :

$$D_1F(0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, f(0)) \right|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p),$$

e $D_2F(0) = f'(0) \neq (0, 0)$.

Pelo Teorema da Função Inversa, existe localmente uma aplicação inversa continuamente diferenciável para F em $0 := (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ou seja, existem $\varepsilon > 0$ e uma vizinhança $B \subset \mathbb{R}$, com centro na origem 0 , tais que $F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B}$ é um difeomorfismo sobre um conjunto aberto $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$. Definimos $h = \left(F|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times B} \right)^{-1}$.

Note que, para $t = 0$:

$$(0, u) = F^{-1}(\varphi(0, f(u))) = F^{-1}(f(u)) = h(f(u)),$$

para todo $u \in B$. Como $f(u) \in \Sigma$, segue que $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, o que prova (i).

Por outro lado, para todo $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$, temos:

$$Dh^{-1}(t, u) \cdot Y(t, u) = DF(t, u) \cdot (1, 0) = D_1F(t, u) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, f(u)).$$

Pela hipótese,

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, f(u)) = X(\varphi(t, f(u))) = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)).$$

Portanto, h^{-1} conjuga Y e X , mostrando (ii). Assim, a demonstração está concluída. ■

No Teorema do Fluxo Tubular, demonstramos que todo ponto regular de um campo vetorial em \mathbb{R}^2 (e, mais geralmente, em \mathbb{R}^n) admite uma vizinhança na qual o campo vetorial é diferencialmente conjugado ao campo constante. Esse resultado possui implicações significativas para o estudo local de campos vetoriais, permitindo simplificações no comportamento das soluções. Em particular, podemos derivar as seguintes consequências:

1. *Redução da complexidade local:* Todo campo vetorial regular pode ser localmente descrito, em coordenadas adequadas, como um campo vetorial constante. Isso simplifica a análise local de sistemas dinâmicos, especialmente em regiões longe de pontos singulares.
2. *Estudo de seções transversais:* O teorema fornece uma ferramenta poderosa para investigar como curvas integrais de campos vetoriais intersectam seções transversais, facilitando a compreensão do comportamento das órbitas em diferentes contextos.
3. *Aplicações em sistemas dinâmicos:* Em teoria qualitativa de sistemas diferenciais, o teorema garante que o comportamento local das órbitas pode ser modelado por um fluxo linear, possibilitando a análise de propriedades geométricas e dinâmicas das soluções.

Essas consequências não apenas destacam a utilidade do Teorema do Fluxo Tubular, mas também evidenciam a importância de coordenadas locais que simplifiquem o estudo de sistemas diferenciais.

Ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, a autora estudou e demonstrou diversos conceitos e resultados relevantes na teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, que, embora importantes, não estão diretamente relacionados aos temas principais desta dissertação: coeficientes de Lyapunov e bifurcação de Hopf. Entre esses tópicos adicionais destacam-se: conjuntos limites de uma órbita, estrutura local de pontos singulares, estrutura local próxima a órbitas periódicas, o Teorema de Poincaré-Bendixson, funções de Lyapunov e elementos fundamentais dos retratos de fase. Esses conceitos e as demonstrações de suas propriedades, essenciais para um entendimento aprofundado da teoria, podem ser encontrados em obras clássicas sobre EDOs, como [9, 16].

Na próxima seção, exploraremos a técnica conhecida como **compactificação de Poincaré**, uma ferramenta fundamental para o estudo global de campos vetoriais no plano. Essa técnica permite “transformar” o plano euclidiano \mathbb{R}^2 em uma esfera, conhecida como a *esfera de Poincaré*. Com isso, é possível analisar o comportamento das trajetórias do campo vetorial não apenas em uma vizinhança finita, mas também no infinito, que é mapeado para um conjunto finito de pontos na esfera.

A compactificação de Poincaré é particularmente útil para entender o retrato de fase completo de um campo, pois permite identificar singularidades no infinito e descrever como as trajetórias se comportam à medida que tendem para regiões arbitrariamente distantes. Na próxima seção, apresentaremos as ideias centrais dessa técnica, o mapeamento usado para a transformação e como aplicá-la a sistemas diferenciais concretos.

1.2 Compactificação de Poincaré

Para estudar o comportamento das trajetórias de um sistema diferencial planar no infinito, uma técnica amplamente utilizada é a compactificação. Entre as abordagens possíveis, a projeção estereográfica, que compactifica o plano projetando-o sobre uma esfera, é conhecida como a *compactificação de Bendixson*. Nessa técnica, o infinito é representado por um único ponto adjacente ao plano. No entanto, a **compactificação de Poincaré** se destaca como uma alternativa mais eficaz, pois distribui os pontos singulares no infinito ao longo do equador de uma esfera. Essa abordagem simplifica a análise, tornando os pontos singulares no infinito mais acessíveis e sistematicamente organizados em comparação à compactificação de Bendixson.

Ainda assim, é importante observar que, mesmo na esfera de Poincaré, alguns pontos singulares no infinito podem exibir uma dinâmica intrinsecamente complexa, o que exige um estudo mais detalhado.

A seguir, exploraremos a aplicação da compactificação de Poincaré no estudo de sistemas diferenciais, com foco no mapeamento envolvido e nas principais vantagens proporcionadas por essa abordagem.

Para desenhar o retrato de fase de um campo vetorial, seria necessário considerar todo o plano real \mathbb{R}^2 , o que pode ser impraticável em muitas situações. Entretanto, quando o campo vetorial é definido por funções polinomiais, a compactificação de Poincaré oferece uma solução eficiente. Essa técnica possibilita representar o retrato de fase em uma região finita, permitindo, simultaneamente, a análise detalhada do comportamento das órbitas no infinito ou na sua vizinhança.

Nesta seção, utilizaremos as coordenadas (x_1, x_2) para o plano, em substituição às tradicionais (x, y) .

Considere o campo vetorial polinomial

$$X = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)),$$

onde as funções P e Q são polinômios de grau arbitrário nas variáveis x_1 e x_2 . Em outras palavras, o

sistema de equações diferenciais associado a X é dado por:

$$\begin{cases} x_1' = P(x_1, x_2), \\ x_2' = Q(x_1, x_2). \end{cases} \quad (1.4)$$

O grau do campo vetorial X é definido como $m = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$, ou seja, o maior grau entre os polinômios $P(x_1, x_2)$ e $Q(x_1, x_2)$.

A compactificação de Poincaré é construída a partir de uma representação da reta projetiva estendida como uma esfera, permitindo que os pontos no infinito sejam trazidos para uma região finita. Ela funciona da seguinte forma: inicialmente, identificamos \mathbb{R}^2 como o plano em \mathbb{R}^3 definido por

$$\{(x_1, x_2, 1); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2.$$

Nesse contexto, consideramos a esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

denominada **esfera de Poincaré**, que é tangente ao plano \mathbb{R}^2 no ponto $N = (0, 0, 1)$. Essa esfera serve como uma ferramenta para “trazer” o infinito para dentro do domínio de análise.

Dividimos a esfera nos seguintes conjuntos principais:

$$H_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2; x_3 > 0\} \quad (\text{o hemisfério norte}),$$

$$H_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2; x_3 < 0\} \quad (\text{o hemisfério sul}),$$

$$\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2; x_3 = 0\} \quad (\text{o equador}).$$

Nesta construção, o plano \mathbb{R}^2 é compactificado no disco \mathbb{D}^2 , onde os pontos no infinito correspondem ao equador \mathbb{S}^1 . Essa abordagem facilita a análise global de sistemas diferenciais polinomiais, pois permite estudar tanto o comportamento das órbitas no plano quanto no infinito, agora representado por uma região acessível.

Segue a descrição da projeção central do campo vetorial X de \mathbb{R}^2 para \mathbb{S}^2 , utilizando as projeções centradas no hemisfério norte e no hemisfério sul da esfera.

A projeção central é definida por duas funções:

$$f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \quad \text{e} \quad f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

que associam a cada ponto do plano (x_1, x_2) um ponto da esfera \mathbb{S}^2 . Mais precisamente:

(a) **Projeção f^+** : o ponto $f^+(x_1, x_2)$ é obtido como a interseção da linha que passa pela origem e pelo ponto $(x_1, x_2, 1)$ com o hemisfério norte da esfera ($x_3 > 0$). Sua fórmula é dada por:

$$f^+(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right),$$

onde

$$\Delta(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}.$$

(b) **Projeção f^-** : analogamente, $f^-(x_1, x_2)$ é a interseção da linha que passa pela origem e pelo ponto $(x_1, x_2, -1)$ com o hemisfério sul da esfera ($x_3 < 0$). Sua fórmula é dada por:

$$f^-(x_1, x_2) = \left(\frac{-x_1}{\Delta(x)}, \frac{-x_2}{\Delta(x)}, \frac{-1}{\Delta(x)} \right).$$

Essas projeções mapeiam os pontos no plano para pontos da esfera, permitindo que o campo vetorial seja representado em \mathbb{S}^2 , facilitando o estudo de seu comportamento global, incluindo as dinâmicas no infinito.

A Figura 1.14 ilustra como as projeções f^+ e f^- são realizadas, destacando as interseções das linhas projetivas com os hemisférios norte e sul.

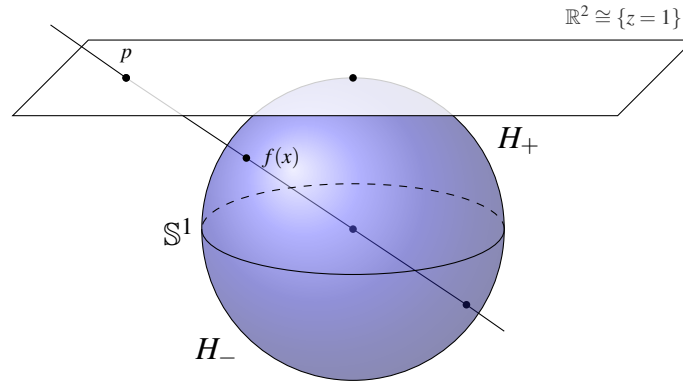


Figura 1.14: Projeção central do plano $z = 1$ nos hemisférios de \mathbb{S}^2 .

Assim, os campos vetoriais induzidos são definidos em cada hemisfério da esfera de Poincaré. No hemisfério norte (H_+), o campo vetorial induzido é dado por:

$$\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x),$$

onde $y = f^+(x)$. Analogamente, no hemisfério sul (H_-), o campo vetorial induzido é descrito por:

$$\bar{X}(y) = Df^-(x)X(x),$$

onde $y = f^-(x)$. Esses campos vetoriais são tangentes à esfera \mathbb{S}^2 em todos os pontos e são analiticamente conjugados ao campo vetorial original X em \mathbb{R}^2 . Dessa forma, \bar{X} está bem definido no conjunto $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$.

Um aspecto importante dessa compactificação é a correspondência entre os pontos no infinito de \mathbb{R}^2 e os pontos do equador \mathbb{S}^1 da esfera \mathbb{S}^2 . Cada direção no infinito de \mathbb{R}^2 está associada a dois pontos distintos, que são mapeados de forma bijetiva por f^+ e f^- .

Nosso próximo objetivo é estender o campo vetorial \bar{X} , que atualmente está definido apenas em $\mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$, para todo o espaço \mathbb{S}^2 . No entanto, essa extensão enfrenta uma dificuldade técnica: à medida que nos aproximamos do equador \mathbb{S}^1 , o campo vetorial induzido \bar{X} geralmente não permanece

limitado. Isso impede uma extensão direta e exige uma reformulação cuidadosa para analisar o comportamento em \mathbb{S}^1 .

Multiplicando o campo vetorial pelo fator $\rho(x) = x_3^{m-1}$, é possível realizar a extensão desejada, como veremos a seguir. O campo vetorial estendido em \mathbb{S}^2 é conhecido como a **Compactificação de Poincaré** do campo vetorial $X = (P, Q)$ em \mathbb{R}^2 , sendo denotado por $p(X)$. Embora, em cada hemisfério H_+ e H_- , o campo estendido deixe de ser C^ω -conjugado a X , ele permanece C^ω -equivalente.

Essa técnica é útil para desenhar retratos de fase, mas requer cautela em cálculos mais precisos, como a determinação dos autovalores em singularidades e dos períodos das órbitas fechadas.

Agora, vamos apresentar a construção utilizando cartas locais para facilitar os cálculos. No caso de \mathbb{S}^2 , consideramos as seis cartas locais definidas por

$$U_k = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_k > 0\} \quad \text{e} \quad V_k = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_k < 0\},$$

para $k = 1, 2, 3$. Essas cartas formam uma cobertura de \mathbb{S}^2 . As aplicações locais correspondentes $\phi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$ são dadas por

$$\phi_k(x_1, x_2, x_3) = -\psi_k(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_i}{x_k}, \frac{x_j}{x_k} \right),$$

onde $i < j$ e $i, j \neq k$. Denotamos o valor de $\phi_k(x_1, x_2, x_3)$ ou $\psi_k(x_1, x_2, x_3)$ por $z = (u, v)$, independentemente de k , de modo que as coordenadas (u, v) assumem diferentes significados, dependendo da carta local considerada.

Geometricamente, as coordenadas (u, v) podem ser interpretadas conforme mostrado na Figura 1.15. Em qualquer carta, os pontos de \mathbb{S}^1 correspondem àqueles para os quais $v = 0$.

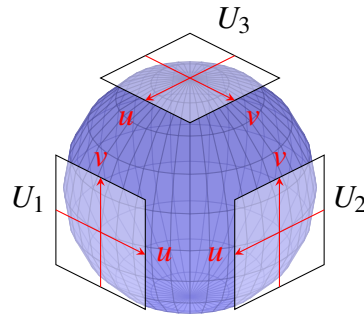


Figura 1.15: As cartas locais (U_k, ϕ_k) para $k = 1, 2, 3$ da esfera de Poincaré.

A seguir, apresentamos um cálculo detalhado da expressão de $p(X)$, considerando exclusivamente a carta local U_1 . Suponhamos que $X(x) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$. Nesse caso, temos

$$\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x),$$

com $y = f^+(x)$, e

$$D\phi_1(y)\bar{X}(y) = D\phi_1(f^+(x))\bar{X}(f^+(x)) = D\phi_1(f^+(x)) \circ Df^+(x)X(x) = D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x).$$

Seja $\bar{X}|_{U_1}$ o sistema definido como $D\phi_1(y)\bar{X}(y)$. Assim, $\phi_1 \circ f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e temos:

$$(\phi_1 \circ f^+)(x) = \phi_1 \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) = \left(\frac{\frac{x_2}{\Delta(x)}}{\frac{x_1}{\Delta(x)}}, \frac{\frac{1}{\Delta(x)}}{\frac{x_1}{\Delta(x)}} \right) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1} \right) := (u, v).$$

Daí, em coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{X}|_{U_1} &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{x_1} \right) & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{x_1} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} P(x_1, x_2) + \frac{1}{x_1} Q(x_1, x_2), -\frac{1}{x_1^2} P(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P(x_1, x_2) + x_1 Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)) \\ &= v^2 \left(-\frac{u}{v} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v} Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right). \end{aligned}$$

Note que $\bar{X}|_{U_1}$ não está definida para $v = 0$ (equador).

Agora, para garantir a extensão do campo vetorial a \mathbb{S}^1 (equador), considere:

$$\rho(y) = x_3^{m-1} = \left(\frac{1}{\Delta(x)} \right)^{m-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} \right)^{m-1}.$$

Observe que

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{u^2}{v^2} + 1} = \sqrt{\frac{1 + u^2 + v^2}{v^2}} = \frac{1}{v} \Delta(z).$$

Assim,

$$\rho(y) = \frac{v^{m-1}}{\Delta(z)^{m-1}} = v^{m-1} \kappa(z),$$

onde $\kappa(z) = 1/\Delta(z)^{m-1}$. Consequentemente, temos:

$$\rho(y) \bar{X}(y)|_{U_1} = \rho \left(\bar{X}|_{U_1} \right) (z) = v^{m+1} \kappa(z) \left(-\frac{u}{v} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v} Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right).$$

Para mostrar que a extensão de $\rho \bar{X}$ para $p(X)$ está definida em toda a esfera \mathbb{S}^2 , observamos que, embora $\bar{X}|_{U_1}$ não esteja bem definida na região onde $v = 0$, a expressão $p(X)|_{U_1} = \rho \bar{X}|_{U_1}$ permanece bem definida ao longo de $v = 0$. Isso ocorre porque o fator multiplicativo v^{m+1} elimina qualquer termo de v que possa surgir no denominador. O mesmo raciocínio pode ser estendido de forma análoga nas demais cartas locais, garantindo assim a consistência da extensão em toda a esfera.

Para simplificar o campo vetorial estendido, realizamos uma mudança na variável temporal e eliminamos o fator $\kappa(z)$. Mesmo com essa modificação, o campo vetorial resultante em \mathbb{S}^2 permanece C^ω -equivalente a X em ambos os hemisférios H_+ e H_- .

A expressão para $p(X)$ na carta local (U_1, ϕ_1) é dada por:

$$\begin{cases} u' = v^m \left[-u P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right], \\ v' = -v^{m+1} P \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right). \end{cases} \quad (1.5)$$

A expressão para (U_2, ϕ_2) é

$$\begin{cases} u' = v^m \left[P \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) - u Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right) \right], \\ v' = -v^{m+1} Q \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v} \right), \end{cases} \quad (1.6)$$

e para (U_3, ϕ_3) é

$$\begin{cases} u' = P(u, v), \\ v' = Q(u, v). \end{cases} \quad (1.7)$$

A expressão para $p(X)$ nas cartas (V_k, ψ_k) é a mesma que para (U_k, ϕ_k) , multiplicada por $(-1)^{m-1}$, para $k = 1, 2, 3$.

Para analisar o campo vetorial X em todo o plano \mathbb{R}^2 , incluindo seu comportamento nas proximidades do infinito, basta considerar a região $H_+ \cup \mathbb{S}^1$, conhecida como *disco de Poincaré*. Todos os cálculos podem ser realizados nas três cartas locais (U_1, ϕ_1) , (U_2, ϕ_2) e (U_3, ϕ_3) , onde as respectivas expressões são descritas pelas equações (1.5), (1.6) e (1.7).

No estudo de campos vetoriais compactificados, é importante classificar os pontos singulares de um campo vetorial X na esfera \mathbb{S}^2 . O campo $p(X)$, obtido pela compactificação de X , apresenta dois tipos de pontos singulares: aqueles localizados na região interna da esfera, fora do equador \mathbb{S}^1 , e aqueles situados no equador. A seguir, definimos formalmente esses dois tipos de pontos singulares.

Definição 1.34. Seja $p(X)$ o campo vetorial compactificado de X em \mathbb{S}^2 . Um ponto singular x_0 de $p(X)$ (e de X) é dito **ponto singular finito** se $x_0 \in \mathbb{S}^2 - \mathbb{S}^1$. Um ponto singular x_0 de $p(X)$ (e de X) é dito **ponto singular infinito** se $x_0 \in \mathbb{S}^1$.

Exemplo 1.35. Consideremos o campo vetorial $X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Para determinar os pontos singulares no infinito na carta U_1 , fazemos $v = 0$ e buscamos valores de u que satisfaçam a condição $p(X)|_{U_1}(u, 0) = (0, 0)$.

Seja a parametrização $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right)$, e note que o grau do campo vetorial é

$$m = \max(\deg P, \deg Q) = 1.$$

Assim, temos:

$$p(X)|_{U_1} = v^m \left(-uP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) + Q \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right), -vP \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v} \right) \right)$$

Substituindo as expressões de P e Q , obtemos:

$$p(X)|_{U_1} = v \left(-u \cdot \frac{1}{v} - \frac{u}{v}, -v \cdot \frac{1}{v} \right) = (-2u, -v).$$

Impondo $v = 0$, resulta em:

$$(-2u, 0) = (0, 0) \Rightarrow u = 0,$$

ou seja, o ponto $(0, 0)$ é singular. A matriz jacobiana associada na carta U_1 é:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

indicando que o ponto é um nó atrator.

Analogamente, na carta U_2 , tomamos a parametrização $(x_1, x_2) = \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right)$. Assim, temos:

$$p(X)|_{U_2} = v^m \left(P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), -vQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right)$$

Substituindo os valores de P e Q :

$$p(X)|_{U_2} = v \left(\frac{u}{v} - u \cdot \left(-\frac{1}{v}\right), -v \cdot \left(-\frac{1}{v}\right) \right) = (2u, v).$$

Impondo $v = 0$, obtemos:

$$(2u, 0) = (0, 0) \Rightarrow u = 0,$$

mostrando novamente que $(0, 0)$ é um ponto singular. A matriz jacobiana correspondente na carta U_2 é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

indicando que o ponto é um nó repulsor.

Como o grau $m = 1$ é ímpar, os pontos diametralmente opostos na esfera possuem a mesma estabilidade. Vejamos a Figura 1.16.

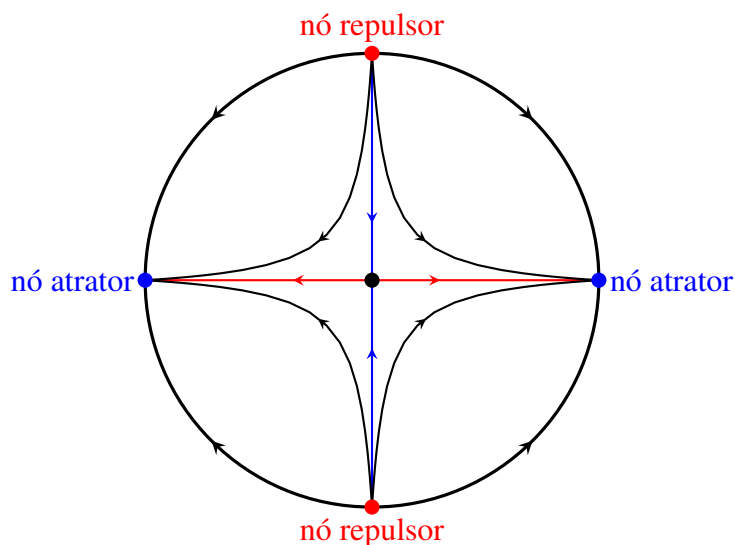


Figura 1.16: O retrato de fase no disco Poincaré do campo $X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$.

Singularidades elementares e não-elementares

2.1 Singularidades elementares

Nesta seção, discutiremos os pontos singulares elementares, bem como sua classificação em hiperbólicos e semi-hiperbólicos.

Definição 2.1. Um **ponto singular elementar** é um ponto cuja matriz jacobiana não possui autovalores nulos.

Entre os pontos singulares elementares, destacamos os pontos hiperbólicos, que são caracterizados por possuírem dois autovalores com partes reais não nulas. Já os pontos semi-hiperbólicos possuem exatamente um autovalor nulo.

A presença de uma singularidade semi-hiperbólica indica que o sistema linearizado correspondente não exibe crescimento nem decrescimento exponencial ao longo de uma direção característica. Essa perda da estabilidade hiperbólica torna a análise qualitativa mais sutil e complexa. Ademais, singularidades semi-hiperbólicas são suscetíveis a bifurcações quando submetidas a perturbações apropriadas.

Apresentaremos dois teoremas práticos baseados em [9], que permitem determinar o comportamento qualitativo dos pontos singulares elementares.

2.1.1 Pontos singulares hiperbólicos

Os pontos singulares, como vimos, são os locais onde o campo vetorial de um sistema de equações diferenciais se anula. Eles desempenham um papel fundamental na compreensão do comportamento dinâmico do sistema, pois determinam a natureza das soluções nas proximidades desses pontos, como sua estabilidade, periodicidade e outros aspectos qualitativos.

Definição 2.2. Um ponto singular de um sistema de equações diferenciais é dito **hiperbólico** se são elementares com os dois autovalores da matriz jacobiana associada ao sistema possuem partes reais diferentes de zero.

Essa condição assegura que o comportamento local do sistema seja bem definido e que as soluções do sistema se afastem ou se aproximem do ponto singular de maneira controlada. Ela facilita a análise de estabilidade, já que sistemas hiperbólicos não exibem comportamentos caóticos ou instáveis nas suas vizinhanças. O Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 2.3) formaliza essa noção ao estabelecer que, nas proximidades de um ponto hiperbólico, o comportamento qualitativo do sistema não linear é topologicamente equivalente ao de sua parte linear. Isso simplifica significativamente a análise da estabilidade e do retrato de fase local.

Teorema 2.3 ([14], Teorema de Hartman-Grobman). *Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^r ($r \geq 1$) com uma singularidade hiperbólica em p . Então, existem uma vizinhança U de p e um homeomorfismo $h : U \rightarrow h(U)$ que leva as órbitas de X nas órbitas do sistema linearizado*

$$\dot{\mathbf{y}} = DX(p)\mathbf{y},$$

ou seja, o campo vetorial X é localmente C^0 -conjugado ao seu sistema linearizado.

É importante observar que, no Teorema 2.3, a conjugação h pode não ser diferenciável, mesmo que o campo vetorial X seja de classe C^r . A conjugação C^0 , ou seja, uma conjugação topológica, é suficiente para os objetivos desta dissertação, pois garante que as órbitas de X e do sistema linearizado compartilham a mesma estrutura qualitativa. Para garantir uma conjugação C^r , são necessárias condições adicionais sobre os autovalores de $DX(p)$, como a separação espectral adequada, que não serão abordadas aqui. Caso consideremos campos vetoriais analíticos (C^ω), a conjugação garantida será C^ω , o que implica em uma conjugação analítica entre o campo vetorial e sua parte linear, preservando a suavidade das soluções. Referimos à Seção 2.8 de [14] para uma discussão sobre o Teorema 2.3 e um esboço da sua demonstração.

No que segue, caracterizaremos o retrato de fase local de pontos singulares hiperbólicos, enunciando o Teorema dos Pontos Singulares Hiperbólicos, sem abordar sua demonstração. Como nosso foco principal está em sistemas diferenciais polinomiais, apresentaremos o teorema dentro do contexto mais geral de sistemas analíticos.

Teorema 2.4 ([9], Teorema dos Pontos Singulares Hiperbólicos). *Seja $(0,0)$ um ponto singular isolado do campo vetorial X , dado por*

$$\begin{cases} x' = ax + by + A(x,y), \\ y' = cx + dy + B(x,y), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde A e B são funções analíticas numa vizinhança da origem com $A(0,0) = B(0,0) = 0$ e $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores da parte linear $DX(0,0)$ do sistema na origem. Então, as seguintes afirmações são válidas:

(i) Se λ_1 e λ_2 são reais e $\lambda_1\lambda_2 < 0$, então $(0,0)$ é uma **sela**. Se denotamos por E_1 e E_2 os espaços de, respectivamente, λ_1 e λ_2 , então podemos encontrar duas curvas analíticas invariantes tangentes respectivamente a E_1 e E_2 em $(0,0)$, em uma das quais os pontos são atraídos para a origem, e na outra os pontos são repelidos para longe da origem. Nestas curvas invariantes X é C^ω -linearizável. Existe uma mudança de coordenadas C^∞ que transforma (2.1) numa das seguintes formas:

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x, \\ y' = \lambda_2 y, \end{cases}$$

se $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, e

$$\begin{cases} x' = x(\lambda_1 + f(x^k y^l)), \\ y' = y(\lambda_2 + g(x^k y^l)), \end{cases}$$

se $\lambda_2/\lambda_1 = -k/l \in \mathbb{Q}$, com $k, l \in \mathbb{N}$ e onde f e g são funções C^∞ . Todos os sistemas (2.1) são C^0 -conjugados a

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \end{cases}$$

cujos retratos de fase estão representados na Figura 2.1.

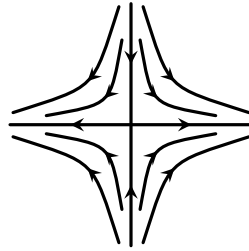


Figura 2.1: Retrato de fase da sela (hiperbólica).

(ii) Se λ_1 e λ_2 são reais com $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$ e $\lambda_1\lambda_2 > 0$, então $(0,0)$ é um **nó**. Se $\lambda_1 > 0$ (respectivamente, $\lambda_1 < 0$), então o nó é repulsor ou instável (respectivamente, atrator ou estável). Existe uma mudança de coordenadas C^∞ que transforma (2.1) em

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x, \\ y' = \lambda_2 y, \end{cases}$$

se $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N}$, e em

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x, \\ y' = \lambda_2 y + \delta x^m, \end{cases}$$

para algum $\delta = 0$ ou 1 , se $\lambda_2 = m\lambda_1$, com $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 1$. Todos os sistemas (2.1) são C^0 -conjugados a

$$\begin{cases} x' = \delta x, \\ y' = \delta y, \end{cases}$$

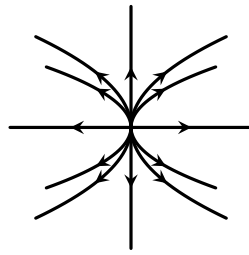


Figura 2.2: Retrato de fase do nó repulsor (instável).

com $\delta = \pm 1$ e $\lambda_1 \delta > 0$, cujo retrato de fase é ilustrado na Figura 2.2, se for instável. A imagem do retrato de fase para o nó estável é análoga, bastando reverter a orientação das flechas.

(iii) Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, com $\alpha, \beta \neq 0$, então $(0,0)$ é um **foco (forte)**. Se $\alpha > 0$ (respectivamente, $\alpha < 0$), o foco é repulsor ou instável (respectivamente, atrator ou estável). Existe uma mudança de coordenadas C^∞ que transforma (2.1) em

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y, \\ y' = -\beta x + \alpha y. \end{cases}$$

Todos os sistemas (2.1) são C^0 -conjugados a

$$\begin{cases} x' = \delta x, \\ y' = \delta y, \end{cases}$$

com $\delta = 1$ e $\alpha\delta > 0$, cujo retrato de fase é ilustrado na Figura 2.3, se for instável. A imagem do retrato de fase para o foco estável é análoga, bastando reverter a orientação das flechas.

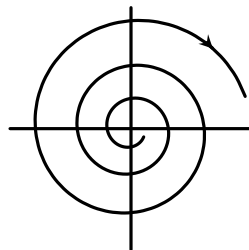


Figura 2.3: Retrato de fase do Foco repulsor (instável).

(iv) Se $\lambda_1 = i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$, com $\beta \neq 0$, então $(0,0)$ é um **centro**. Veja as Figuras 2.3 e 2.4.

No item (iii) do Teorema 2.4, denominamos **foco (forte)** a singularidade cuja parte linear $DX(0,0)$ possui autovalores complexos com parte real distinta de zero. Chamamos de **foco fraco** a singularidade em que $DX(0,0)$ apresenta autovalores puramente imaginários, mas em que $(0,0)$ ainda se comporta como um foco devido a efeitos não lineares.

Observação 2.5. Observamos que os itens (i) – (iii) do Teorema 2.4 decorrem diretamente do Teorema 2.3, sendo, contudo, enunciados de forma mais robusta em virtude das condições adicionais

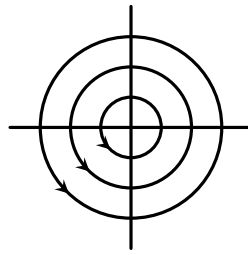


Figura 2.4: Retrato de fase do centro.

assumidas. Todos os resultados apresentados nesse teorema estão provados no Capítulo 2 de [9] (mais especificamente na Seção 2.7), com exceção da última afirmação (iv) do Teorema 2.4, que afirma que X é topologicamente um foco ou um centro. Nesse item, destaca-se que, ao perturbar um centro linear, não há garantia de que a origem continuará sendo um centro ou se tornará um foco. Isso é conhecido como o **problema do centro-foco**.

A origem do sistema (2.1) é um ponto singular hiperbólico nos casos (i), (ii) e (iii) do Teorema 2.4. Vale ressaltar que o Teorema 2.4 também pode ser enunciado em termos do determinante (\det), do traço (tr) e do discriminante (Δ) da parte linear no ponto singular. Assim, temos:

- A afirmação (i) corresponde a $\det < 0$;
- A afirmação (ii) corresponde a $\det > 0$, $\text{tr} \neq 0$ e $\Delta \geq 0$;
- A afirmação (iii) corresponde a $\det > 0$, $\text{tr} \neq 0$ e $\Delta < 0$;
- A afirmação (iv) corresponde a $\det > 0$, $\text{tr} = 0$ e $\Delta < 0$.

De posse desse resultado, passaremos a analisar exemplos específicos, aplicando os critérios estabelecidos aos sistemas em estudo.

Exemplo 2.6. Considere o campo vetorial X dado por

$$\begin{cases} x' = -x + y + y^2, \\ y' = x + y + x^2, \end{cases}$$

com singularidade isolada na origem $(0,0)$.

Note que estamos no caso do Teorema 2.4, com $A(x,y) = y^2$ e $B(x,y) = x^2$. Verificamos que as condições do teorema são satisfeitas, pois A e B são funções analíticas, $A(0,0) = B(0,0) = 0$, e $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$.

Agora, determinaremos os autovalores da parte linear $DX(0,0)$. Para isso, calculamos a matriz Jacobiana do campo vetorial X avaliada em $(0,0)$:

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial P}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com a matriz Jacobiana em mãos, seguimos para a análise dos autovalores. Para determiná-los, resolvemos a equação característica associada à matriz $DX(0,0)$:

$$\det(DX(0,0) - \lambda I) = 0 \implies \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Expandindo o determinante, temos:

$$\det(DX(0,0) - \lambda I) = (-1 - \lambda)(1 - \lambda) - (1)(1) = \lambda^2 - 2.$$

Assim, a equação característica é $\lambda^2 - 2 = 0$, cujas soluções são:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}.$$

Os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e de sinais opostos ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$), o que nos permite concluir que $(0,0)$ é uma **sela**. O retrato de fase local para esse caso é ilustrado na Figura 2.1.

Exemplo 2.7. Considere o campo vetorial X dado por:

$$\begin{cases} x' = 3x + y + y^2, \\ y' = x + 4y + x^2, \end{cases}$$

com singularidade isolada na origem $(0,0)$.

Neste caso, estamos no contexto do Teorema 2.4. Temos $A(x,y) = y^2$ e $B(x,y) = x^2$, e verificamos que as condições do teorema são satisfeitas, pois A e B são analíticas e $A(0,0) = B(0,0) = 0$, e $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$.

Agora, vamos calcular os autovalores da parte linear $DX(0,0)$. Para isso, calculamos a matriz Jacobiana do campo vetorial X aplicada no ponto $(0,0)$:

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para determinar os autovalores, resolvemos a equação característica:

$$\det(DX(0,0) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 11 = 0.$$

A solução dessa equação nos dá os autovalores:

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2,$$

que são reais, positivos e distintos. Assim, concluímos que $(0,0)$ é um **nó repulsor** (instável), conforme ilustrado na Figura 2.2.

Exemplo 2.8. Considere o campo vetorial X dado por

$$\begin{cases} x' = x - y + y^2, \\ y' = x + y + x^3, \end{cases}$$

com singularidade isolada na origem $(0,0)$.

Neste caso, estamos no contexto do Teorema 2.4. Temos $A(x,y) = y^2$ e $B(x,y) = x^3$, e verificamos que as condições do teorema são satisfeitas, pois A e B são analíticas e $A(0,0) = B(0,0) = 0$, e $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$.

Agora, calculamos os autovalores da parte linear $DX(0,0)$, que é a matriz Jacobiana de X no ponto $(0,0)$:

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos a equação característica:

$$\det(DX(0,0) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

obtendo os seguintes autovalores:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm 2i}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm i.$$

Como os autovalores são complexos e não nulos, concluímos que $(0,0)$ é um **foco forte instável**, conforme ilustrado na Figura 2.3.

Exemplo 2.9. Considere o campo vetorial X dado por

$$\begin{cases} x' = -y + y^3, \\ y' = x + x^2, \end{cases}$$

com singularidade isolada na origem $(0,0)$.

Aplicando o Teorema 2.4, temos $A(x,y) = y^3$ e $B(x,y) = x^2$ analíticas e tais que $A(0,0) = B(0,0) = 0$, e $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$. A matriz Jacobiana do campo vetorial X aplicada no $(0,0)$ é dada por:

$$DX(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuja equação característica associada é:

$$\det(DX(0,0) - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0.$$

Neste caso, os autovalores são $\lambda_1 = -\sqrt{-1} = -i$ e $\lambda_2 = \sqrt{-1} = i$, que são números imaginários puros com $\beta \neq 0$. Assim, concluímos que $(0,0)$ é um **centro** (ver Figura 2.4).

O *problema do centro-foco*, que será discutido no Capítulo 3, define se este centro linear é um centro ou um foco.

2.1.2 Pontos singulares semi-hiperbólicos

Nesta seção, formalizaremos a caracterização do retrato de fase local em pontos singulares semi-hiperbólicos.

Definição 2.10. Um ponto singular p de um campo vetorial X é chamado de **semi-hiperbólico** se exatamente um autovalor de $DX(p)$ for igual a zero.

Esse tipo de ponto pode gerar um comportamento mais complexo, pois as soluções próximas ao ponto não são completamente atraídas nem repelidas em todas as direções. Em vez disso, podem permanecer na vizinhança do ponto ao longo das direções associadas ao autovalor nulo. A seguir, enunciaremos, sem demonstração, o Teorema dos Pontos Singulares Semi-Hiperbólicos.

Observação 2.11. Singularidades hiperbólicas (Definição 2.2) e semi-hiperbólicas (Definição 2.10) também são chamadas de *pontos singulares elementares*.

Teorema 2.12 (Teorema 2.15 de [9], Teorema dos Pontos Singulares Semi-Hiperbólicos). *Seja $(0, 0)$ um ponto singular isolado do campo vetorial X dado por*

$$\begin{cases} x' = A(x, y), \\ y' = \lambda y + B(x, y), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde A e B são funções analíticas numa vizinhança da origem com $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$, $DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$ e $\lambda > 0$. *Seja $y = f(x)$ a solução da equação*

$$\lambda y + B(x, y) = 0$$

numa vizinhança do ponto $(0, 0)$, e suponha que a função $g(x) = A(x, f(x))$ tenha a expressão

$$g(x) = a_m x^m + O(x^m),$$

onde $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. *Então, existe uma curva analítica invariante, designada por variedade instável forte, tangente em 0 ao eixo y , na qual X é analiticamente conjugado a*

$$y' = \lambda y,$$

que representa um comportamento de repulsão, uma vez que $\lambda > 0$. Além disso, as seguintes afirmações são válidas:

- (i) *Se m é ímpar e $a_m < 0$, então $(0, 0)$ é uma **sela topológica** (ver Figura 2.5). Existe uma única curva invariante de classe C^∞ , que é tangente ao eixo x e chamada de variedade central, na qual X é C^∞ -conjugado a*

$$x' = -x^m(1 + ax^{m-1}), \quad (2.3)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Se esta curva invariante for analítica, então, ao longo dessa curva, X é C^ω -conjugado a (2.3). O sistema X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} x' = -x^m(1 + ax^{m-1}), \\ y' = \lambda y, \end{cases}$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$$

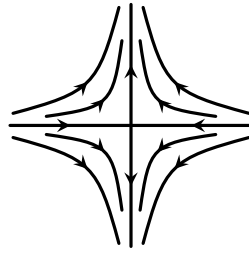


Figura 2.5: Retrato de fase da sela topológica.

(ii) Se m é ímpar e $a_m > 0$, então $(0,0)$ é um **nó topológico instável** (ver Figura 2.6). Todos os pontos que não pertencem à variedade instável forte estão sobre uma curva invariante de classe C^∞ , chamada variedade central, que é tangente ao eixo x na origem, e na qual X é C^∞ -conjugado a

$$x' = x^m(1 + ax^{m-1}), \quad (2.4)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Todas essas variedades centrais são mutuamente infinitamente tangentes entre si e, portanto, no máximo uma delas pode ser analítica, caso em que X é C^ω -conjugado a (2.4) sobre ela.

O sistema X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} x' = x^m(1 + ax^{m-1}), \\ y' = \lambda y, \end{cases}$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

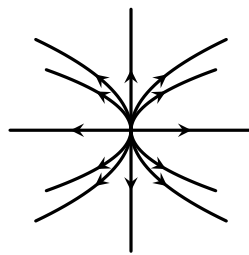


Figura 2.6: Retrato de fase do nó topológico repulsor (instável).

(iii) Se m é par, então $(0,0)$ é uma **sela-nó** (ver Figura 2.7), ou seja, o ponto singular é uma união de um setor parabólico e de dois setores hiperbólicos. Fazendo a mudança $x \mapsto -x$, se necessário, supomos que $a_m > 0$. Cada ponto à direita da variedade fortemente instável (lado $x > 0$) encontra-se sobre uma curva invariante de classe C^∞ , chamada variedade central, tangente ao eixo x na origem, e na qual X é C^∞ -conjugado a

$$x' = x^m(1 + ax^{m-1}), \quad (2.5)$$

para algum $a \in \mathbb{R}$. Todas essas variedades centrais coincidem no lado $x \leq 0$ e são, portanto, infinitamente tangentes à origem. No máximo uma dessas variedades centrais pode ser analítica, caso em que X é C^ω -conjugada a (2.5) sobre ela.

O sistema X é C^∞ -conjugado a

$$\begin{cases} x' = x^m(1 + ax^{m-1}), \\ y' = \lambda y, \end{cases}$$

e é C^0 -conjugado a

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ y' = y. \end{cases}$$

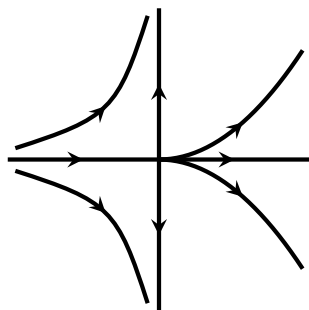


Figura 2.7: Retrato de fase da sela-nó.

Observação 2.13. No Teorema 2.12, o caso $\lambda < 0$ pode ser reduzido a $\lambda > 0$ transformando X por $-X$.

Com esse resultado posto, podemos explorar diferentes exemplos.

Exemplo 2.14. Considere o campo vetorial X dado por

$$\begin{cases} x' = -x^2, \\ y' = y + y^2, \end{cases}$$

com singularidade isolada na origem $(0,0)$.

Aplicando o Teorema 2.12, temos $A(x,y) = -x^2$, $B(x,y) = y^2$ e $\lambda = 1$. Note que A e B são funções analíticas tais que $A(0,0) = B(0,0) = 0$, $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$, e $\lambda = 1 > 0$. Agora, seja $y = f(x)$ a solução da equação:

$$\lambda y + B(x,y) = 0 \Leftrightarrow y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1+y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -1.$$

Logo, $f(x) = 0$ ou $f(x) = -1$. Suponha $g(x) = A(x, f(x))$. Neste caso, temos $g(x) = A(x, 0) = A(x, -1) = -x^2$. Assim, $a_m = -1$ e $m = 2$, e com isso temos m par. Então, $(0,0)$ é uma **sela-nó** (ver Figura 2.7).

Exemplo 2.15. Considere o campo vetorial X dado por

$$\begin{cases} x = -x^3, \\ y = y + y^2, \end{cases}$$

com singularidade isolada na origem $(0, 0)$.

Para aplicar o Teorema 2.12, identificamos $A(x, y) = -x^3$, $B(x, y) = y^2$ e $\lambda = 1$. Note que A e B são funções analíticas tais que $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$, $DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$, e $\lambda = 1 > 0$. Se $y = f(x)$ é a solução da equação

$$\lambda y + B(x, y) = 0 \Leftrightarrow y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1 + y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -1,$$

então $f(x) = 0$ ou $f(x) = -1$. Tomando $g(x) = A(x, f(x))$, temos $g(x) = A(x, 0) = A(x, -1) = -x^3$. Assim, $a_m = -1$ e $m = 3$, e com isso temos m ímpar e $a_m < 0$. Logo, $(0, 0)$ é uma **sela topológica** (ver Figura 2.5).

Exemplo 2.16. Considere o campo vetorial X dado por

$$\begin{cases} x = x^3, \\ y = y + y^2, \end{cases}$$

com singularidade isolada na origem $(0, 0)$.

Para aplicar o Teorema 2.12, vemos que $A(x, y) = x^3$, $B(x, y) = y^2$ e $\lambda = 1$. Note que A e B são funções analíticas tais que $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$, $DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$, e $\lambda = 1 > 0$. Se $y = f(x)$ a solução da equação

$$\lambda y + B(x, y) = 0 \Leftrightarrow y + y^2 = 0 \Leftrightarrow y(1 + y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -1,$$

então $f(x) = 0$ ou $f(x) = -1$. Considerando $g(x) = A(x, f(x))$, obtemos $g(x) = A(x, 0) = A(x, -1) = x^3$. Assim, $a_m = 1$ e $m = 3$, e com isso temos m ímpar e $a_m > 0$. Logo, $(0, 0)$ é um **nó topológico** (ver Figura 2.6).

2.2 Singularidades não-elementares

Na Seção 2.1, estudamos os pontos singulares elementares, que são divididos em pontos singulares hiperbólicos e semi-hiperbólicos. Nesta seção, estudaremos os pontos singulares não-elementares.

Definição 2.17. Um ponto singular é chamado de **não-elementar** se não é hiperbólico nem semi-hiperbólico.

Os pontos singulares não-elementares são classificados conforme a seguinte definição.

Definição 2.18. Seja p um ponto singular não-elementar do campo vetorial X .

- (a) O ponto singular p é chamado de **nilpotente** se ambos os autovalores de $DX(p)$ forem iguais a 0, mas $DX(p) \neq 0$.
- (b) O ponto singular p é chamado de **linearmente zero** se $DX(p) \equiv 0$.
- (c) O ponto singular p é chamado de **centro** se existir uma vizinhança aberta que consista, além da singularidade, de órbitas periódicas. O ponto singular é dito **linearmente um centro** (ou um **centro linear**) se os autovalores de $DX(p)$ forem imaginários puros, mas não nulos. Nesse caso, e supondo que o campo vetorial X seja analítico, o campo vetorial X pode ter ou um centro ou um foco em p .

Vamos introduzir uma ferramenta fundamental para o estudo de singularidades não-elementares de um sistema diferencial no plano. Essa ferramenta baseia-se em mudanças de variáveis conhecidas como **blow-ups**, que consiste em dessingularizar uma singularidade não-elementar. Utilizaremos esse método para classificar as singularidades nilpotentes. Ao longo da seção, usaremos o termo “suave” para nos referir, de forma indistinta, a uma aplicação de classe C^∞ . A referência principal para esta seção é [9].

2.2.1 Dessingularização de singularidades não-elementares

De forma geral, o *blow-up* do campo vetorial X pode ser descrito como uma técnica na qual uma mudança de coordenadas “explode”, uma singularidade em uma curva, ao longo da qual surgem, genericamente, um número finito de novas singularidades. Após realizar a mudança de coordenadas, cada singularidade é analisada isoladamente no novo campo vetorial \bar{X} ao longo dessa curva. Se alguma singularidade não for elementar, aplicamos um novo *blow-up* sobre ela, repetindo o processo conforme necessário. Sobre condições genéricas, após uma sequência finita de *blow-ups*, restarão apenas singularidades elementares. Por fim, por meio do processo inverso, conhecido como **blow-down**, obtemos o retrato de fase local de X em uma vizinhança do ponto singular degenerado.

É importante ressaltar que a singularidade é degenerada devido à natureza da matriz jacobiana associada. Em outras palavras, a parte linear do campo em torno da origem não fornece informações suficientes para descrever o comportamento das trajetórias próximas a esse ponto.

A seguir, exploraremos os conceitos de **blow-up homogêneo**. O *blow-up* homogêneo será analisado sobre duas perspectivas: a **polar** e a **direcional**. Em seguida, mostraremos como essas duas abordagens se inter-relacionam e apresentaremos exemplos que ilustram o uso da técnica.

2.2.2 Blow-up polar

Considere

$$X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

um campo vetorial em \mathbb{R}^2 de classe C^∞ com singularidade isolada na origem $(0,0)$, e a aplicação que define as coordenadas polares

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),\end{aligned}$$

em que $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}; r \geq 0\}$. Dessa forma, podemos definir um campo vetorial \bar{X} no cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ de classe C^∞ tal que

$$\phi_*(\bar{X}) = X,$$

no sentido de que $D\phi_v(\bar{X}(v)) = X(\phi(v))$. Essa aplicação ϕ_* é chamada de *pullback* de X por ϕ (veja em [13] mais detalhes sobre a teoria de *pullback*), e nada mais é do que o campo X escrito em coordenadas polares. A aplicação $\phi|_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1}$ é um difeomorfismo de classe C^∞ e, portanto, uma autêntica mudança de coordenadas polares suave em $(0, \infty) \times \mathbb{S}^1$, mas não em $\{r = 0\}$. Tal aplicação ϕ transforma $\{r = 0\}$ em $(0,0)$, de forma que a aplicação inversa ϕ^{-1} “explode” a origem em um círculo.

Para analisar o retrato de fase de X em uma vizinhança V da origem, basta estudar o retrato de fase de \bar{X} na vizinhança $\phi^{-1}(V)$ no círculo $\{0\} \times \mathbb{S}^1$. Assim, vamos expressar o campo vetorial X em coordenadas polares. Se $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, então, derivando as seguintes relações em função de t :

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$$

obtemos:

$$2xx' + 2yy' = 2rr' \quad \text{e} \quad (\sec^2 \theta)\theta' = \frac{yx' - y'x}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Isolando r' e θ' , temos:

$$\begin{cases} r' = \frac{xx' + yy'}{r}, \\ \theta' = \frac{yx' - y'x}{r^2}. \end{cases}$$

Como $x' = P(x,y)$, $y' = Q(x,y)$, aplicando a mudança para coordenadas polares, segue que:

$$\begin{cases} r' = P(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + Q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta, \\ \theta' = \frac{Q(r \cos \theta, r \sin \theta) r \cos \theta - P(r \cos \theta, r \sin \theta) r \sin \theta}{r^2}, \end{cases}$$

ou mais simplificadamente, omitindo na expressão os argumentos das funções P e Q ,

$$\begin{cases} r' = P \cos \theta + Q \sin \theta, \\ \theta' = \frac{Q \cos \theta - P \sin \theta}{r}, \end{cases}$$

em que P e Q são funções de $r \cos \theta$ e $r \sin \theta$.

Denotemos por

$$\tilde{X}(r, \theta) = \left(X_r(r, \theta), \frac{1}{r} X_\theta(r, \theta) \right),$$

em que $X_r = P \cos \theta + Q \sin \theta$ e $X_\theta = Q \cos \theta - P \sin \theta$. Agora, consideremos k o maior inteiro positivo tal que r^k divide $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $Q(r \cos \theta, r \sin \theta)$, e definimos

$$\bar{X} = \frac{\tilde{X}}{r^{k-1}}.$$

Logo,

$$\bar{X}(r, \theta) = (\bar{X}_r(r, \theta), \bar{X}_\theta(r, \theta)) = \left(r \frac{X_r(r, \theta)}{r^k}, \frac{X_\theta(r, \theta)}{r^k} \right).$$

Observação 2.19. Observemos que a singularidade $(0,0)$ foi levada para a curva $\{0\} \times \mathbb{S}^1$. Além disso, ao longo de $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, as singularidades são determinadas pelas soluções de $\bar{X}_\theta(0, \theta) = 0$.

De [8], temos o seguinte resultado:

Proposição 2.20. A função $\bar{X}_\theta(r, \theta)$ satisfaz umas das seguintes condições:

- (i) $\bar{X}_\theta(0, \theta)$ nunca se anula, isto é, $\bar{X}_\theta(0, \theta) \neq 0$;
- (ii) $\bar{X}_\theta(0, \theta) = 0$ tem um número finito de soluções (no máximo $2k + 4$);
- (iii) $\bar{X}_\theta(0, \theta) = 0$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demonstração. A demonstração segue do Teorema de Bézout (veja em [12]), já que $\bar{X}_\theta(0, \theta)$ é um polinômio na variável θ . ■

Observação 2.21. Quando θ_0 for uma solução de $\bar{X}_\theta(0, \theta) = 0$, então $\theta_0 + \pi$ também será solução, isto é, $\bar{X}_\theta(0, \theta_0 + \pi) = 0$. Como $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ e $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$, aplicando a mudança $(r \mapsto -r)$ e deslocando θ por π , temos a seguinte relação: $X_r(-r, \theta + \pi) = -X_r(r, \theta)$, ou seja, mudar o sinal de r e ajustar o ângulo em π resulta em mudar o sinal da função. Daí:

$$\begin{aligned} \bar{X}_r(-r, \theta + \pi) &= (-r) \frac{X_r(-r, \theta + \pi)}{(-r)^k} = (-1)^{-k} \frac{r X_r(r, \theta)}{r^k} = (-1)^k \bar{X}_r(r, \theta), \\ \bar{X}_\theta(-r, \theta + \pi) &= \frac{X_\theta(-r, \theta + \pi)}{(-r)^k} = \frac{(-1)^{-k+1} X_\theta(r, \theta)}{r^k} = (-1)^k \bar{X}_\theta(r, \theta). \end{aligned}$$

Logo, em uma vizinhança de $(0, \theta_0 + \pi)$, o campo vetorial \bar{X} é, a menos de reflexão, o próprio campo \bar{X} ou $-\bar{X}$ em uma vizinhança de $(0, \theta_0)$, dependendo se k é par ou ímpar. Mesmo no caso em que k é ímpar, as órbitas de \bar{X} na vizinhança de $(0, \theta_0 + \pi)$ são análogas às órbitas de \bar{X} na vizinhança de $(0, \theta_0)$, com a única provável diferença sendo o sentido dessas órbitas. Dessa forma, é suficiente considerar somente uma dessas singularidades para obtermos a informação topológica sobre ambos os campos. Em [8], Dumortier classifica tais singularidades por iguais a menos de simetria. Chamaremos esse par de *par simétrico de singularidades*.

Exemplo 2.22. Considere o campo vetorial $X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ com singularidade isolada na origem $(0,0)$. Fazendo a mudança em coordenadas polares, obtemos:

$$\begin{aligned} P(r \cos \theta, r \sin \theta) &= (r \cos \theta)^2 - 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) = r^2(\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta), \\ Q(r \cos \theta, r \sin \theta) &= (r \sin \theta)^2 - 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) = r^2(\sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{X}(r, \theta) &= \left(X_r(r, \theta), \frac{1}{r} X_\theta(r, \theta) \right) \\ &= (r^2(\cos^3 \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta - 2\cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta), 3r(\sin^2 \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \sin \theta)).\end{aligned}$$

Note que $k = 2$ é o maior inteiro positivo tal que r^2 divide $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $Q(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\bar{X}(r, \theta) &= \frac{\tilde{X}(r, \theta)}{r} \\ &= \left(\frac{r^2(\cos^3 \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta - 2\cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta)}{r}, \frac{3r(\sin^2 \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \sin \theta)}{r} \right) \\ &= (r(\cos^3 \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta - 2\cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta), 3(\sin^2 \theta \cos \theta - \cos^2 \theta \sin \theta)) \\ &= (r(\cos^3 \theta - 2\cos^2 \theta \sin \theta - 2\cos \theta \sin^2 \theta + \sin^3 \theta), 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)).\end{aligned}$$

Como as singularidades de $\bar{X}_\theta(r, \theta)$ são determinadas pelas soluções de $\bar{X}_\theta(0, \theta) = 0$, temos a seguinte equação:

$$\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) = 0. \quad (2.6)$$

Para resolver a equação (2.6), analisamos cada fator separadamente:

- $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin \theta - \cos \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \cos \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Dessa forma, as soluções são:

$$\theta = k\pi, \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assumindo $\theta \in [0, 2\pi]$, os zeros em $\{r = 0\}$, dados pela equação (2.6), são:

$$\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}.$$

Agora, cabe realizar um estudo local de \bar{X} em cada um desses pontos singulares.

A matriz Jacobiana de \bar{X} no ponto (r, θ) é dada por:

$$D\bar{X}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{X}_r(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial \bar{X}_r(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \bar{X}_\theta(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial \bar{X}_\theta(r, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{X}_r(r, \theta)}{\partial r} &= \sin^3 \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta - 2\sin \theta \cos^2 \theta + \cos^3 \theta, \\ \frac{\partial \bar{X}_r(r, \theta)}{\partial \theta} &= r(2\sin^3 \theta + 7\sin^2 \theta \cos \theta - 7\sin \theta \cos^2 \theta - 2\cos^3 \theta), \\ \frac{\partial \bar{X}_\theta(r, \theta)}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{X}_\theta(r, \theta)}{\partial \theta} = -3(\sin \theta + \cos \theta)(3\sin \theta \cos \theta - 1).\end{aligned}$$

Assim:

$$\det[D\bar{X}(r, \theta)] = -3(\sin\theta + \cos\theta)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta)^2.$$

Como

$$\det[D\bar{X}(0, 0)] = \det[D\bar{X}(0, \pi)] = \det\left[D\bar{X}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right] = \det\left[D\bar{X}\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)\right] = -3$$

e

$$\det\left[D\bar{X}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)\right] = \det\left[D\bar{X}\left(0, \frac{5\pi}{4}\right)\right] = -\frac{3}{2},$$

então, pela Tabela 1.1, as singularidades sobre o círculo $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ são do tipo **sela** (pontos singulares hiperbólicos). Reunindo tais informações e aplicando o *blow-down*, concluímos que o retrato de fase local de X na origem é a união de seis setores hiperbólicos, como ilustrado na Figura 2.8.

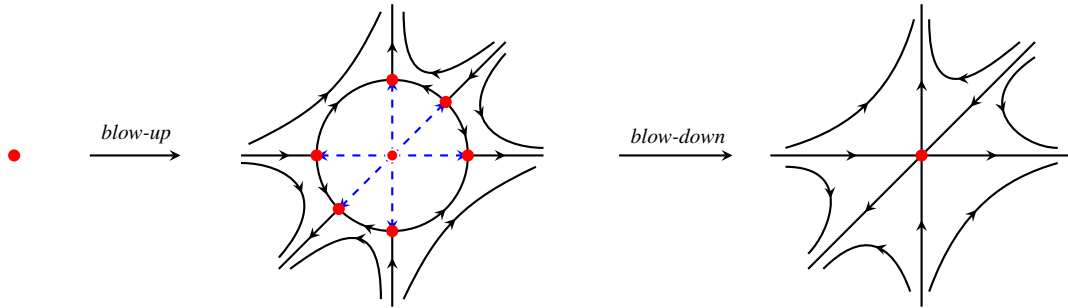


Figura 2.8: Exemplo de *blow-up* polar: retrato de fase local do campo vetorial $X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$. A origem é um ponto singular formado pela união de seis setores hiperbólicos.

Definição 2.23. O campo vetorial X em $(0, 0)$ está **dessingularizado** se todas as singularidades de $\bar{X}|_{\{r=0\}}$ são elementares.

Exemplo 2.24. Considere o campo vetorial $X(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ com singularidade isolada em $(0, 0)$. Fazendo a mudança de coordenadas polares, temos:

$$P(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

$$Q(r \cos \theta, r \sin \theta) = 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) = 2r^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{X}(r, \theta) &= \left(X_r(r, \theta), \frac{1}{r} X_\theta(r, \theta) \right) \\ &= (r^2(\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta), r(\sin^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta)) \\ &= (r^2 \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

Como $k = 2$ é o maior inteiro positivo tal que r^2 divide $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ e $Q(r \cos \theta, r \sin \theta)$, então:

$$\bar{X}(r, \theta) = \frac{\tilde{X}(r, \theta)}{r} = \left(\frac{r^2 \cos \theta}{r}, \frac{r \sin \theta}{r} \right) = (r \cos \theta, \sin \theta).$$

As singularidades de $\bar{X}(r, \theta)$ são determinadas pelas soluções de $\bar{X}_\theta(0, \theta) = 0$. Assim,

$$\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Assumindo $\theta \in [0, 2\pi]$, os zeros em $\{r = 0\}$, dados pela equação (2.7), são $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Para o estudo local de \bar{X} em cada um desses pontos singulares, consideremos a sua matriz jacobiana no ponto (r, θ) :

$$D\bar{X}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{X}_r(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial \bar{X}_r(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \bar{X}_\theta(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial \bar{X}_\theta(r, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \text{sen}\theta \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

cujo determinante e traço são, respectivamente,

$$\det[D\bar{X}(r, \theta)] = \cos^2 \theta, \quad \text{tr}[D\bar{X}(r, \theta)] = 2 \cos \theta.$$

Observemos que $\det[D\bar{X}(0, 0)] = 1$ e $\text{tr}[D\bar{X}(0, 0)] = 2$. Logo, pela Tabela 1.1, a singularidade $(0, 0)$ é um **nó repulsor**. Por outro lado, $\det[D\bar{X}(0, \pi)] = (-1)^2 = 1$ e $\text{tr}[D\bar{X}(0, \pi)] = 2(-1) = -2$, e pela Tabela 1.1, a singularidade $(0, \pi)$ é um **nó atrator**. Reunindo tais informações e aplicando o *blow-down*, concluimos que o retrato de fase local de X é como ilustrado na Figura 2.9.

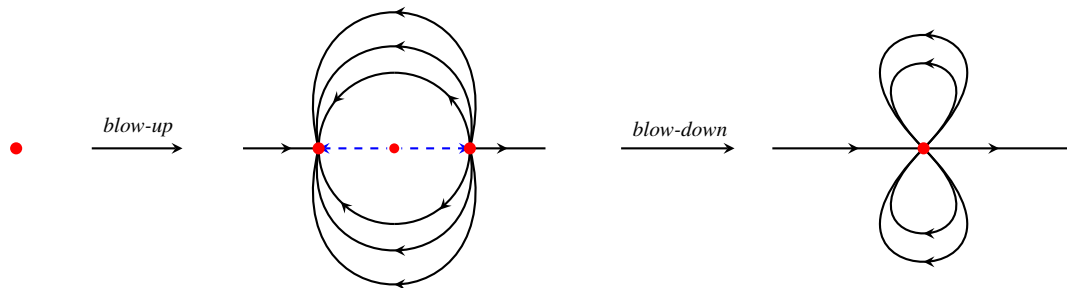


Figura 2.9: Exemplo de *blow-up* polar: retrato de fase local do campo vetorial $X(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

2.2.3 Blow-up direcional

2.2.3.1 Blow-up na direção x

Seja $X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial em \mathbb{R}^2 com singularidade isolada em $(0, 0)$. Considerando a mudança de coordenadas $x = u$ e $y = uv$, temos:

$$\begin{cases} x' = u' \\ y' = u'v + uv' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = x' \\ v' = \frac{y' - u'v}{u} \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} u' = P(u, uv), \\ v' = \frac{Q(u, uv) - vP(u, uv)}{u}. \end{cases}$$

Denote por $\tilde{X}(u, v) = (\tilde{X}_u(u, v), \tilde{X}_v(u, v))$ o campo vetorial no qual

$$\tilde{X}_u(u, v) = P(u, uv) \quad \text{e} \quad \tilde{X}_v(u, v) = \frac{Q(u, uv) - vP(u, uv)}{u}.$$

Tome $k \geq 0$ o maior inteiro tal que u^k divide \tilde{X}_u e \tilde{X}_v , e defina:

$$\bar{X}(u, v) = (\bar{X}_u(u, v), \bar{X}_v(u, v)) = \frac{1}{u^k} \tilde{X}(u, v).$$

Note que a singularidade $(0, 0)$ é levada em $\{u = 0\}$ e, para $u = 0$, as singularidades são determinadas pelas soluções de $\bar{X}_v(0, v) = 0$.

Exemplo 2.25. Considere o campo vetorial $X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ com singularidade isolada na origem. Aplicando o *blow-up* na direção de x , se $x = u$ e $y = uv$, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(u, v) &= (\tilde{X}_u(u, v), \tilde{X}_v(u, v)) \\ &= \left(P(u, uv), \frac{Q(u, uv) - vP(u, uv)}{u} \right) \\ &= \left(u^2 - 2u^2v, \frac{(u^2v^2 - 2u^2v) - v(u^2 - 2u^2v)}{u} \right) \\ &= (u^2 - 2u^2v, 3uv^2 - 3uv). \end{aligned}$$

Como $k = 1$ é o maior inteiro tal que u divide \tilde{X}_u e \tilde{X}_v , então

$$\bar{X}(u, v) = \frac{1}{u} \tilde{X}(u, v) = (\bar{X}_u(u, v), \bar{X}_v(u, v)) = (u - 2uv, 3v^2 - 3v).$$

O zeros de \bar{X} em $\{u = 0\}$, dados pela equação $\bar{X}_v(0, v) = 0$, são:

$$3v^2 - 3v = 0 \Rightarrow 3v(v - 1) = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ e } v = 1.$$

Considerando a matriz Jacobiana de $\bar{X}(u, v)$ no ponto (u, v) , temos:

$$D\bar{X}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{X}_u(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \bar{X}_u(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{X}_v(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \bar{X}_v(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2v & -2u \\ 0 & 6v - 3 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é

$$\det[D\bar{X}(u, v)] = (1 - 2v)(6v - 3) = -12v^2 + 12v - 3.$$

Assim, como $\det[D\bar{X}(0, 0)] = -3$ e $\det[D\bar{X}(0, 1)] = -3$ então, pela Tabela 1.1, as singularidades são do tipo **sela**. Reunindo tais informações e aplicando o *blow-down*, concluímos que o retrato de fase local de X é como ilustrado na Figura 2.10.

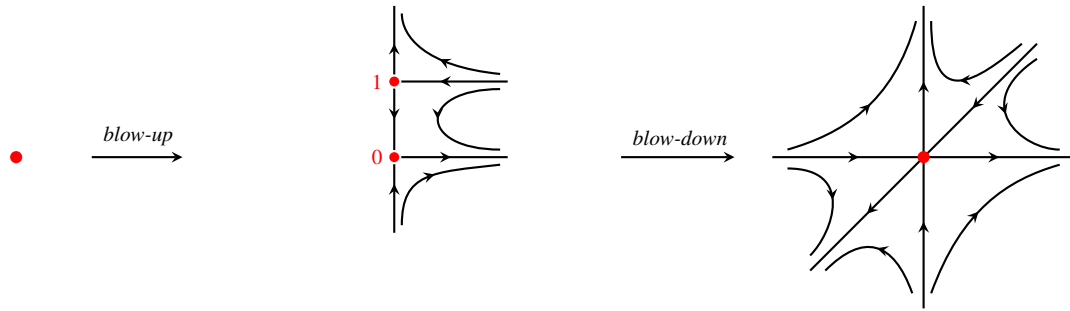


Figura 2.10: Exemplo de *blow-up* na direção de x : retrato de fase local do campo vetorial $X(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$.

2.2.3.2 Blow-up na direção y

Seja $X(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ um campo vetorial em \mathbb{R}^2 com singularidade isolada em $(0,0)$. Considerando a mudança de coordenadas $x = uv$ e $y = v$, temos

$$\begin{cases} x' = u'v + uv', \\ y' = v', \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{x' - uv'}{v}, \\ v' = y', \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} u' = \frac{P(uv, v) - uQ(uv, v)}{v}, \\ v' = Q(uv, v). \end{cases}$$

Denote por

$$\tilde{X}(u, v) = (\tilde{X}_u(u, v), \tilde{X}_v(u, v)) = \left(\frac{P(uv, v) - uQ(uv, v)}{v}, Q(uv, v) \right)$$

e tome $k \geq 0$ o maior inteiro tal que v^k divida \tilde{X}_u e \tilde{X}_v . Defina:

$$\bar{X}(u, v) = (\bar{X}_u(u, v), \bar{X}_v(u, v)) = \frac{1}{v^k} \tilde{X}(u, v).$$

Neste caso, a singularidade $(0,0)$ é levada em $\{v = 0\}$ e, para $v = 0$, as singularidades de \bar{X} são determinadas pelas soluções de $\bar{X}_u(u, 0) = 0$.

Exemplo 2.26. Considere o campo vetorial $X(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ com singularidade isolada na origem. Aplicando o *blow-up* na direção de y , se $x = uv$ e $y = v$, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(u, v) &= (\tilde{X}_u(u, v), \tilde{X}_v(u, v)) \\ &= \left(\frac{P(uv, v) - uQ(uv, v)}{v}, Q(uv, v) \right) \\ &= \left(\frac{(u^2v^2 - 2uv^2) - u(v^2 - 2uv^2)}{v}, v^2 - 2uv^2 \right) \\ &= (3u^2v - 3uv, v^2 - 2uv^2). \end{aligned}$$

Como $k = 1$ é o maior inteiro tal que v divide \tilde{X}_u e \tilde{X}_v , então

$$\bar{X}(u, v) = \frac{1}{v} \tilde{X}(u, v) = (\bar{X}_u(u, v), \bar{X}_v(u, v)) = (3u^2 - 3u, v - 2uv).$$

O zeros de \bar{X} em $\{v = 0\}$, dados pela equação $\bar{X}_u(u, 0) = 0$, são

$$3u^2 - 3u = 0 \Rightarrow 3u(u - 1) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ e } u = 1.$$

Considerando a matriz Jacobiana de \bar{X} no ponto (u, v) , temos:

$$D\bar{X}(u, v) = \begin{pmatrix} 6u - 3 & 0 \\ -2v & 1 - 2u \end{pmatrix},$$

cujo determinante é

$$\det[D\bar{X}(u, v)] = (6u - 3)(1 - 2u) = -12u^2 + 12u - 3.$$

Assim, como $\det[D\bar{X}(0, 0)] = \det[J\bar{X}(1, 0)] = -3$, então, pela Tabela 1.1, as singularidades são do tipo **sela**. Reunindo tais informações e aplicando o *blow-down*, concluímos que o retrato de fase local de X é como ilustrado na Figura 2.11.

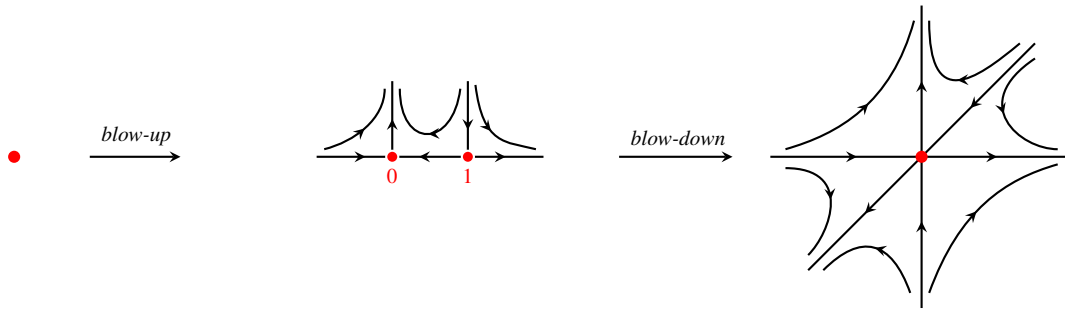


Figura 2.11: Exemplo de *blow-up* na direção de y : retrato de fase local do campo vetorial $X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$

Note que os retratos de fase locais ilustrados nas Figuras 2.10 e 2.11 são exatamente o mesmo retrato obtido pelo *blow-up* polar no Exemplo 2.22.

Nesse contexto, podemos nos perguntar: **existe alguma relação entre o *blow-up* polar e o *blow-up* direcional?** Responderemos essa pergunta na Seção 2.2.4.

2.2.4 Relação entre *blow-up* polar e *blow-up* direcional

Primeiramente, estabeleceremos o caminho necessário para expor a relação entre o *blow-up* na direção de x e *blow-up* polar.

Seja $F: \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(r, \theta) = (r \cos \theta, \tan \theta)$. Temos:

$$DF(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial F_1(r, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F_2(r, \theta)}{\partial r} & \frac{\partial F_2(r, \theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sec^2 \theta \\ 0 & \sec^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det[DF(r, \theta)] = \cos \theta \sec^2 \theta = \sec \theta \neq 0$ em $\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Portanto, pelo Teorema da Função Inversa, segue que F é um difeomorfismo.

Além disso,

- (a) F aplica o semicírculo $\{(r, \theta); r = 0 \text{ e } -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$ sobre o eixo- y , sendo que, para $\theta = 0$, temos $F(0, 0) = (0, 0)$ pertencente à interseção dos eixos x e y ;
- (b) $DF(0, 0)$ é a matriz identidade de ordem 2 e, assim, F mantém a parte linear do campo vetorial;
- (c) $F(r, \theta) = (x, y/x)$, daí $F^{-1}(u, v) = F^{-1}(x, y/x) = (r, \theta)$, pois

$$\begin{cases} u = r \cos \theta, \\ v = \tan \theta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = r \cos \theta = x, \\ uv = r \sin \theta = y. \end{cases}$$

Exemplo 2.27. Consideremos o campo vetorial $X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ do Exemplo 2.25. Quando aplicamos o *blow-up* na direção x , obtivemos as singularidades $(0, 0)$ e $(0, 1)$, que são do tipo sela. Aplicando a função inversa $F^{-1}(u, v) = (r, \theta)$, temos $F^{-1}(0, 0) = (0, 0)$ e $F^{-1}(0, 1) = (0, \pi/4)$. Por simetria, temos $(0, \pi)$ e $(0, 5\pi/4)$ singularidades do tipo sela. A Figura 2.12 ilustra a ação da aplicação F sobre tais singularidades.

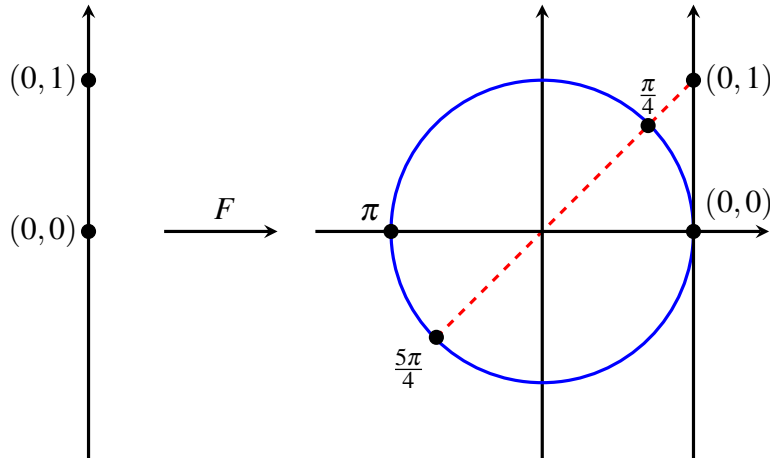


Figura 2.12: Relação entre *blow-up* na direção x e *blow-up* polar.

Agora, vamos estabelecer o caminho necessário para explicarmos a relação entre o *blow-up* na direção de y e *blow-up* polar.

Seja $G: (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $G(\theta, r) = (\cot \theta, r \sin \theta)$. Temos:

$$DG(r, \theta) = \begin{pmatrix} -\csc^2 \theta & 0 \\ r \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det[DG(\theta, r)] = -\csc \theta \neq 0$ em $(0, \pi) \times \mathbb{R}$. Portanto, G também é um difeomorfismo.

Além disso,

- (a) G aplica o semicírculo $\{(r, \theta); r = 0 \text{ e } 0 < \theta < \pi\}$ sobre o eixo- x , sendo que, para $\theta = \pi/2$, temos $G(\pi/2, 0) = (0, 0)$ pertencente à interseção dos eixos x e y ;
- (b) $DG(\frac{\pi}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e, assim, G mantém a parte linear do campo vetorial;
- (c) $G(\theta, r) = (x/y, y)$, daí $G^{-1}(u, v) = G^{-1}(x/y, y) = (\theta, r)$, pois

$$\begin{cases} u = r \cot \theta, \\ v = r \operatorname{sen} \theta, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} uv = r \cos \theta = x, \\ v = r \operatorname{sen} \theta = y. \end{cases}$$

Exemplo 2.28. Consideremos o campo vetorial $X(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ do Exemplo 2.25. Quando aplicamos o *blow-up* na direção y , obtivemos as singularidades $(0, 0)$ e $(1, 0)$, que são do tipo sela. Aplicando a função inversa $G^{-1}(u, v) = (\theta, r)$, temos $G^{-1}(0, 0) = (\pi/2, 0)$ e $G^{-1}(1, 0) = (\pi/4, 0)$. Por simetria, temos $(3\pi/2, 0)$ e $(5\pi/4, 0)$ singularidades do tipo sela. A Figura 2.13 ilustra a ação da aplicação G sobre tais singularidades.

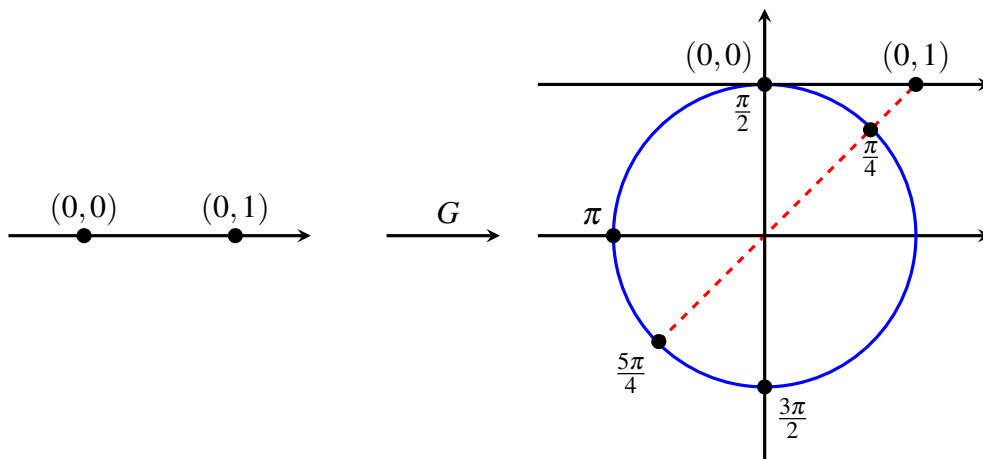


Figura 2.13: Relação entre *blow-up* na direção y e *blow-up* polar.

2.2.5 Pontos singulares nilpotentes

Nesta seção, caracterizaremos o retrato de fase local de um ponto singular nilpotente, enunciando o Teorema dos Pontos Singulares Nilpotentes, sem demonstração. Esse resultado discute os retratos de fase locais de uma forma normal para sistemas analíticos que contém uma singularidade nilpotente na origem. A demonstração desse resultado pode ser encontrada no Capítulo 3 (mais especificamente, na Seção 3.5) de [9].

Teorema 2.29 (Teorema 3.5 de [9], Teorema dos Pontos Singulares Nilpotentes). *Seja $(0, 0)$ um ponto singular isolado do campo vetorial X dado por*

$$\begin{cases} x' = y + A(x, y), \\ y' = B(x, y), \end{cases} \quad (2.8)$$

onde A e B são funções analíticas numa vizinhança do ponto $(0,0)$ e também $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$. Seja $y = f(x)$ a solução da equação $y + A(x,y) = 0$ numa vizinhança do ponto $(0,0)$, e considere $F(x) = B(x, f(x))$ e $G(x) = (\partial A/\partial x + \partial B/\partial y)(x, f(x))$. Então, as seguintes afirmações são válidas:

- (i) Se $F(x) \equiv G(x) = 0$, então o retrato de fase de X é dado pela Figura 2.14(a).
- (ii) Se $F(x) \equiv 0$ e $G(x) = bx^n + O(x^n)$, para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$ e $b \neq 0$, então o retrato de fase de X é dado pela Figura 2.14(b) ou (c).
- (iii) Se $G(x) \equiv 0$ e $F(x) = ax^m + O(x^m)$, para $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq 1$ e $a \neq 0$, então
 - (iii.1) Se m é ímpar e $a > 0$, então a origem de X é uma **sela** (Figura 2.14(d)), e se $a < 0$, então é um **centro** ou um **foco** (Figuras 2.14(e)–(g));
 - (iii.2) Se m é par, então a origem de X é uma **cúspide**, como na Figura 2.14(h).
- (iv) Se $F(x) = ax^m + o(x^m)$ e $G(x) = bx^n + o(x^n)$, com $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então temos:
 - (iv.1) Se m é par e:
 - (iv.1.1) $m < 2n + 1$, então a origem de X é uma **cúspide**, como na Figura 2.14(h);
 - (iv.1.2) $m > 2n + 1$, então a origem de X é uma **sela-nó** como nas Figuras 2.14(i) ou (j);
 - (iv.2) Se m é ímpar e $a > 0$, então a origem de X é uma **sela**, como na Figura 2.14(d);
 - (iv.3) Se m é ímpar, $a < 0$ e:
 - (iv.3.1) ou $m < 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 - 4a(n + 1) < 0$, então a origem de X é um **centro** ou um **foco** (Figuras 2.14(e)–(g));
 - (iv.3.2) n é ímpar e ou $m > 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 - 4a(n + 1) \geq 0$, então o retrato de fase de origem de X consiste em um setor hiperbólico e um setor elíptico, como na Figura 2.14(k);
 - (iv.3.3) n é par e ou $m > 2n + 1$, ou $m = 2n + 1$ e $b^2 - 4a(n + 1) \geq 0$, então a origem de X é um **nó** como nas Figuras 2.14(l) ou (m). O nó é atrator se $b < 0$ e repulsor se $b > 0$.

Os próximos exemplos aplicam os resultados do Teorema 2.29.

Exemplo 2.30. Considere o campo vetorial X dado por

$$\begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = y^2 - 2xy, \end{cases}$$

com singularidade isolada na origem $(0,0)$.

Pelo Teorema 2.29, identificamos $A(x,y) = -x^3$ e $B(x,y) = y^2 - 2xy$. Note que A e B são funções analíticas e $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$.

Se $y = f(x)$ é a solução da equação

$$\lambda y + A(x, y) = 0 \Leftrightarrow y - x^3 = 0 \Leftrightarrow y = x^3,$$

temos: $f(x) = x^3$. Considere

$$F(x) = B(x, f(x)) = B(x, x^3) = -2x^4 + x^6$$

e

$$G(x) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) (x, f(x)) = (-3x^2 + 2y - 2x)|_{y=x^3} = -2x - 3x^2 + 2x^3.$$

Assim, $F(x) \neq 0$ e $G(x) \neq 0$, e temos $m = 4 \geq 2$, $a = -2 \neq 0$, $n = 1 \geq 1$ e $b = -2 \neq 0$.

Logo, m é par e $4 > 2 \cdot (-2) + 1 = -3$, o que satisfaz o item (iv.1.2) do Teorema 2.29. Então, a origem de X é uma **sela-nó**, cujo retrato de fase é topologicamente equivalente à Figura 2.14(j).

Exemplo 2.31. Considere o campo vetorial $X(x, y) = (y, x^2 + xy)$ com singularidade isolada na origem. Pelo Teorema 2.29, identificamos $A(x, y) = 0$ e $B(x, y) = x^2 + xy$.

Note que A e B são funções analíticas e $DA(0, 0) = DB(0, 0) = 0$. Se $y = f(x)$ é a solução da equação

$$\lambda y + 0 = 0 \Leftrightarrow y = 0,$$

temos $f(x) = 0$. Considere

$$F(x) = B(x, f(x)) = B(x, 0) = x^2$$

e

$$G(x) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) (x, f(x)) = (x)|_{y=0} = x.$$

Assim, $F(x) \neq 0$ e $G(x) \neq 0$, e temos $m = 2 \geq 2$, $a = 1 \neq 0$, $n = 1 \geq 1$ e $b = 1 \neq 0$. Então, m é par e $2 < 2 \cdot (1) + 1 = 3$, implicando que a origem de X é uma **cúspide**. Portanto, pelo item (iv.1.1) do Teorema 2.29, o retrato de fase de X é topologicamente equivalente à Figura 2.14(h). Este exemplo corresponde a um caso particular do sistema apresentado em [6], que será analisado em detalhes no Capítulo 3.

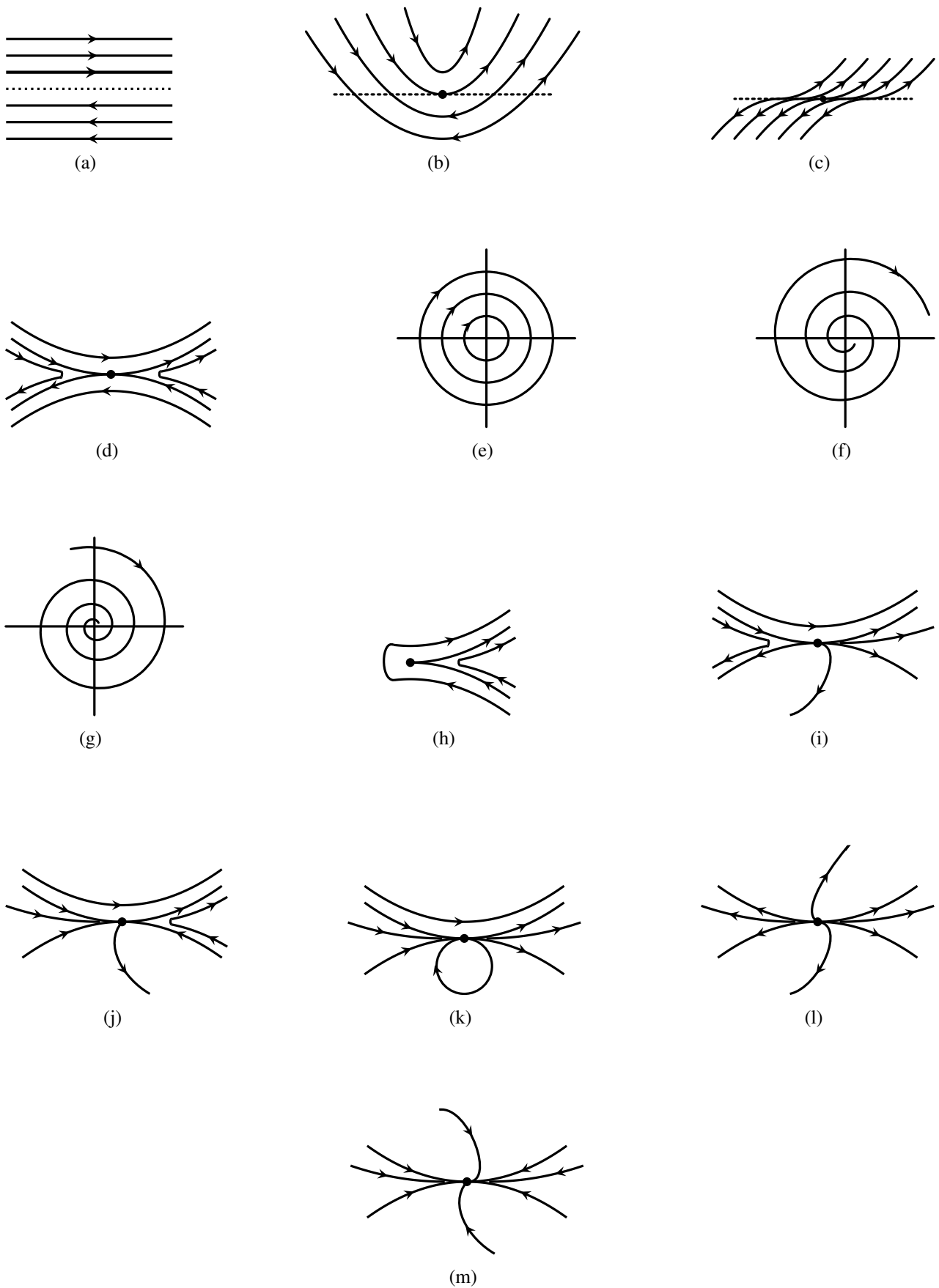


Figura 2.14: Retratos de fase de pontos singulares nilpotentes

Constantes de Lyapunov

Na teoria qualitativa, um dos problemas clássicos das equações diferenciais planares é o problema de distinguir entre um centro e um foco, comumente denominado de **Problema do Centro-Foco**. Em outras palavras, trata-se de determinar se o comportamento local das órbitas ao redor de um ponto singular monodrômico de um sistema linear planar caracteriza um centro ou um foco. De modo geral, esse problema não possui solução única, mas, quando o ponto singular é um centro linear, existem algoritmos específicos para resolvê-lo. Neste sentido, este capítulo apresentará uma técnica clássica para determinar se o sistema apresenta um centro ou um foco. Para informações mais detalhadas sobre o histórico desse problema, recomendamos [15].

Consideremos o seguinte teorema, enunciado por Dulac em 1923:

Teorema 3.1 ([14], Teorema de Dulac). *Em qualquer região limitada do plano, um sistema analítico $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ tem, no máximo, um número finito de ciclos limite. Qualquer sistema polinomial tem, no máximo, um número finito de ciclos limite em \mathbb{R}^2 .*

Um ciclo limite é uma órbita fechada que possui uma vizinhança na qual não existem outras órbitas fechadas distintas (veja a Definição 3.7).

Note que, para um sistema analítico $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$, o Teorema 3.1 garante que existe um número finito de ciclos limites ao redor da origem, ou seja, não pode haver um número infinito de ciclos limite acumulados em torno do ponto crítico.

Com base em [1], [4], [9] e [14], desenvolvemos a teoria apresentada a seguir.

3.1 Introdução

Seja X um campo vetorial analítico,

$$X = (A(x,y), B(x,y)).$$

Identificamos esse campo vetorial com o par equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} x' = A(x, y), \\ y' = B(x, y). \end{cases} \quad (3.1)$$

Suponha que o sistema (3.1) tenha uma singularidade isolada na origem $(0, 0)$ e que sua matriz Jacobiana seja da forma

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0. \quad (3.2)$$

Dessa forma, o sistema (3.1) pode ser colocado na forma

$$\begin{cases} x' = ax - by + p(x, y), \\ y' = bx + ay + q(x, y), \end{cases} \quad (3.3)$$

em que

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j, \quad q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j. \quad (3.4)$$

Na busca por condições necessárias e suficientes sobre $p(x, y)$ e $q(x, y)$ para que a origem seja um centro, há uma longa história, com o desenvolvimento de diversas técnicas e métodos. Um resultado fundamental, atribuído a Poincaré, afirma que, se a origem é um centro, então o sistema admite uma *integral primeira analítica*. Uma função $H(x, y)$ é chamada de integral primeira do sistema se é de classe C^1 e satisfaz

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0$$

ao longo das soluções, isto é, se

$$\frac{\partial H}{\partial x}(ax - by + p(x, y)) + \frac{\partial H}{\partial y}(bx + ay + q(x, y)) = 0.$$

A existência de uma integral primeira analítica simplifica significativamente o estudo do comportamento das soluções próximas à origem, pois garante que as órbitas são fechadas e podem ser descritas como curvas de nível de uma função analítica. Consequentemente, a origem não pode ser um foco, uma vez que as órbitas estão “presas” às curvas de nível de $H(x, y)$. Para referências, ver, por exemplo, Arnold [3] e Dumortier, Llibre e Artés [9].

Suponha que A e B , da equação (3.1), sejam funções analíticas definidas em uma vizinhança da origem, satisfazendo (3.2). Além disso, assuma que a natureza da singularidade na origem seja linearmente um foco quando $a \neq 0$ ou um centro quando $a = 0$, para o sistema (3.1).

Fazendo a mudança de coordenadas polares (r, θ) , dada por:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

$x \neq 0$ e $r > 0$, temos:

$$r' = \frac{xx' + yy'}{r}, \quad \theta' = \frac{y'x - yx'}{r^2}. \quad (3.5)$$

Substituindo (3.3) em (3.5), obtemos:

$$r' = \frac{a(x^2 + y^2) + x p(x, y) + y q(x, y)}{r}, \quad \theta' = \frac{b(x^2 + y^2) + x q(x, y) - y p(x, y)}{r^2},$$

e aplicando a mudança em coordenadas polares, obtemos:

$$\begin{cases} r' = \frac{a(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) + (r \cos \theta) p(r \cos \theta, r \sin \theta) + (r \sin \theta) q(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r}, \\ \theta' = \frac{b(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) + (r \cos \theta) q(r \cos \theta, r \sin \theta) - (r \sin \theta) p(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r^2}, \end{cases}$$

que implica:

$$\begin{cases} r' = ar + \cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta), \\ \theta' = b + \frac{1}{r} [\cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta)], \end{cases}$$

Agora, defina:

$$\begin{aligned} P(r, \theta) &:= \cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta), \\ Q(r, \theta) &:= \frac{1}{r} [\cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta)], \end{aligned}$$

e reescrevemos o sistema (3.5) como:

$$\begin{cases} r' = ar + P(r, \theta), \\ \theta' = b + Q(r, \theta). \end{cases} \quad (3.6)$$

Observe que a menor potência de r em $P(r, \theta)$ é 2 e em $Q(r, \theta)$ é 1, esse fato segue diretamente da definição de p e q .

Seja $\varphi(t, r_0, \theta_0) = (r(t, r_0, \theta_0), \theta(t, r_0, \theta_0))$ a solução do sistema (3.6), com $r(0, r_0, \theta_0) = r_0$ e $\theta(0, r_0, \theta_0) = \theta_0$. Consideremos a expansão em série de Taylor de Q ao redor de $r = 0$ dada por

$$Q(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(\cos \theta, \sin \theta) r^i.$$

Então, se $r_0 > 0$ for suficientemente pequeno, o sinal de θ' será igual ao sinal de b , isto é, se $b > 0$ então θ' é positivo. Logo, para órbitas do sistema (3.6) de pontos suficientemente próximos da origem, a determinação do ângulo $\theta(t, r_0, \theta_0)$ é estritamente crescente em relação a t . Dito de outra forma, as órbitas de pontos próximos da origem, giram, conforme as Figuras 3.1 e 3.2.

Definição 3.2. Um **ponto singular monodrômico** de um campo de vetores planar analítico é aquele para o qual existe uma vizinhança pontuada (uma vizinhança de um ponto excluindo o próprio ponto) em que todas as órbitas giram em torno do ponto singular, sendo periódicas ou tendendo ao ponto singular quando $t \rightarrow \pm\infty$.

De acordo com a Definição 3.2, um ponto singular monodrômico é um centro ou um foco (veja [4]).

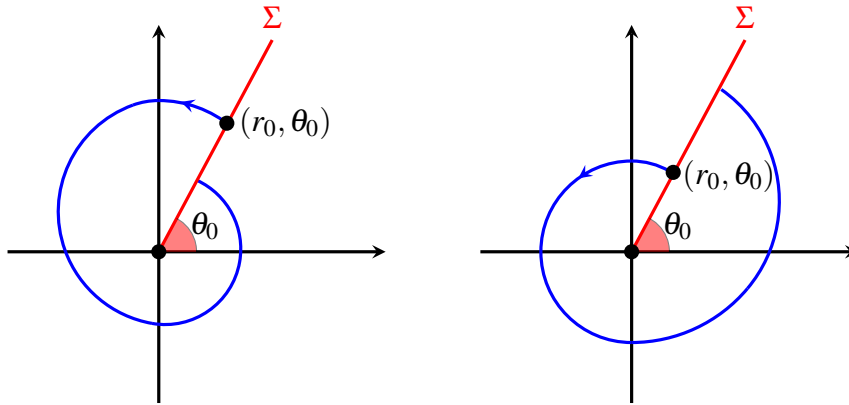


Figura 3.1: Se $b > 0$ em θ' na equação (3.6), então as órbitas giram no sentido anti-horário.

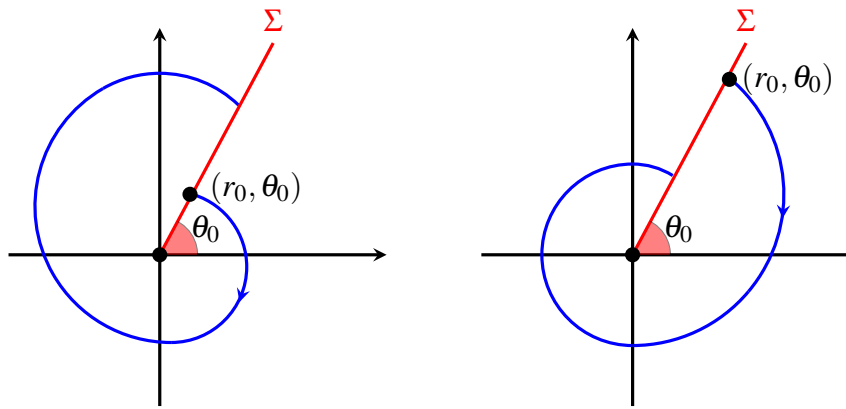


Figura 3.2: Se $b < 0$ em θ' na equação (3.6), então as órbitas giram no sentido horário.

Observe que, fixando (r_0, θ_0) , o sinal de b nos indicará se o sentido de rotação da órbita é horário ou anti-horário. Em razão desse comportamento e de acordo com a Definição 3.2, nos referiremos ao ponto singular na origem do sistema (3.1) como ponto singular *monodrômico*.

Note que, independentemente de θ_0 , a função $\theta(t, r_0, \theta_0)$ é uma aplicação monótona e, portanto, bijetiva, o que implica que ela possui uma inversa. Assim, seja $t(\theta, r_0, \theta_0)$ a inversa dessa aplicação. Para um valor fixo de θ_0 , definimos $\Pi(\theta, r_0, \theta_0) = r(t(\theta, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0)$. Assim, para cada r_0 suficientemente pequeno, consideramos a aplicação

$$\Pi_{\theta_0}(r_0) = \Pi(\theta_0 + 2\pi, r_0, \theta_0) = r(t(\theta_0 + 2\pi, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0).$$

Observe que, para $r_0 > 0$ suficientemente pequeno, $\Pi_{\theta_0}(r_0)$ é uma aplicação analítica em r_0 , pois Π é analítica. Consideremos uma seção transversal Σ apropriada (veja Definição 1.32). Isso nos permite determinar o ponto em que a trajetória r retorna a interseccionar a seção pela primeira vez, ou seja, o primeiro retorno do ponto (r_0, θ_0) . Se $b > 0$, então, dado o sistema da forma (3.3), a aplicação

$$\Pi_{\theta_0}(r_0) = r(t(\theta_0 + 2\pi, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0)$$

é chamada de *aplicação de Poincaré* ou *aplicação de primeiro retorno*.

Analogamente, se $b < 0$, a aplicação de primeiro retorno é definida como

$$\Pi_{\theta_0}(r_0) = r(t(\theta_0 - 2\pi, r_0, \theta_0), r_0, \theta_0).$$

Além disso, consideremos a expansão em série de Taylor de P em torno de $r = 0$ dada por

$$P(r, \theta) = \sum_{i=2}^{\infty} P_i(\cos \theta, \sin \theta) r^i.$$

Portanto, para $r_0 > 0$ suficientemente pequeno, o sinal de r' coincide com o sinal de a . Em particular, se $a > 0$, então r é positiva, e, conseqüentemente, $r(t, r_0, \theta_0)$ é uma função estritamente crescente em relação a t em uma vizinhança de $t = 0$. Analogamente, se $a < 0$, então $r(t, r_0, \theta_0)$ é estritamente decrescente em função de t .

Note que o sinal de a determina se a órbita se afasta ($a > 0$) ou se aproxima ($a < 0$) do ponto singular, conforme ilustrado nas Figuras 3.3 e 3.4.

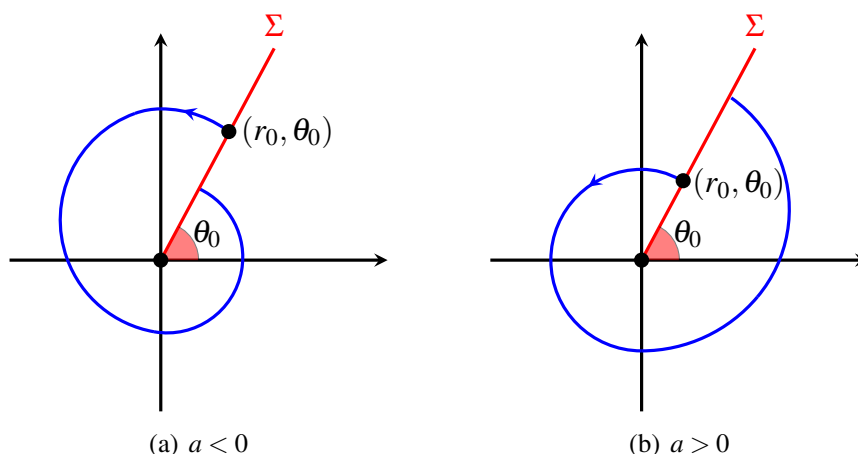


Figura 3.3: Se $b > 0$, as órbitas giram no sentido anti-horário. Além disso, se $a < 0$, elas se aproximam da origem, enquanto, se $a > 0$, elas se afastam da origem.

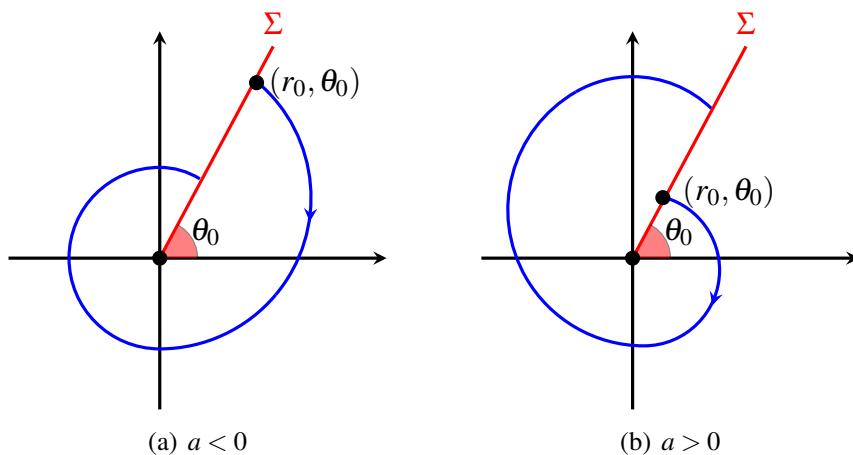


Figura 3.4: Se $b < 0$, as órbitas giram no sentido horário. Além disso, se $a < 0$, elas se aproximam da origem, enquanto, se $a > 0$, elas se afastam da origem.

Agora, reescrevemos o sistema (3.6) definindo

$$P_0(r, \theta) := ar + P(r, \theta) \quad \text{e} \quad Q_0(r, \theta) := b + Q(r, \theta).$$

Assim, podemos expressá-lo como

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = P_0(r, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} = Q_0(r, \theta). \end{cases}$$

Observamos que, se $b \neq 0$ e $r_0 > 0$ for suficientemente pequeno, então $Q_0(r, \theta)$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente em relação a t . Portanto, t pode ser expresso como uma função de θ . Pelo Teorema da Função Inversa, obtemos

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{Q_0(r, \theta)}.$$

Dessa forma, aplicando a Regra da Cadeia, as curvas integrais do sistema (3.6) são determinadas pela equação

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = P_0(r, \theta) \cdot \frac{1}{Q_0(r, \theta)} = \frac{P_0(r, \theta)}{Q_0(r, \theta)} = R(r, \theta).$$

Como $R(r, \theta)$ é o quociente de funções analíticas e periódicas de período 2π em relação a θ , então $R(r, \theta)$ também é periódica em relação a θ . Além disso, para r suficientemente pequeno, $R(r, \theta)$ é analítica em r , e

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta) = \frac{P_0(r, \theta)}{Q_0(r, \theta)} = \frac{ar + P(r, \theta)}{b + Q(r, \theta)} = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\theta)r^k = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + \dots, \quad (3.7)$$

representa a expansão de Taylor de $R(r, \theta)$ em torno de $r = 0$. Assim, segue que

$$\left. \frac{\partial R(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{\left(a + \frac{\partial P}{\partial r} \right) Q_0(r, \theta) + P_0(r, \theta) \frac{\partial Q}{\partial r}}{(b + Q(r, \theta))^2} = \frac{a \cdot b}{b^2} = \frac{a}{b}. \quad (3.8)$$

Logo, $R_1(\theta) = a/b$. Como $R(r, \theta)$ é analítica em r , segue que para todo ponto (r_0, θ_0) no sistema de coordenadas polares, existe uma solução $r(\theta)$, também analítica, do sistema

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta), \\ r(\theta_0) = r_0. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, para cada condição inicial r_0 suficientemente pequena, existe uma única solução $\varphi(\theta, r_0, \theta_0)$ passando por (r_0, θ_0) . A aplicação φ é analítica em r_0 e satisfaz $\varphi(\theta_0, r_0, \theta_0) = r_0$, além de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, r_0, \theta_0) = R(\varphi(\theta, r_0, \theta_0), \theta). \quad (3.9)$$

Portanto, $\varphi(\theta, r_0, \theta_0)$ pode ser expandida em série de potências de r_0 ,

$$\varphi(\theta, r_0, \theta_0) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\theta)r_0^k = u_0(\theta) + u_1(\theta)r_0 + \dots, \quad (3.10)$$

sendo a solução da equação $dr/d\theta = R(r, \theta)$ que passa pelo ponto (r_0, θ_0) quando $\theta = \theta_0$.

A origem é um ponto singular de (3.6), o que implica que $R(0, \theta) \equiv 0$. Assim, $r = 0$ é uma solução da equação $dr/d\theta = R(r, \theta)$. Em outras palavras, $r = 0$ é um ponto singular dessa equação diferencial de primeira ordem, ou seja, $\varphi(\theta, 0, \theta_0) = 0$ para todo $\theta, \theta_0 \in \mathbb{R}$. Substituindo $r_0 = 0$ em (3.10), obtemos

$$0 = \varphi(\theta, 0, \theta_0) = u_0(\theta) + u_1(\theta) \cdot 0 + \dots \implies 0 = u_0(\theta).$$

Portanto, (3.10) pode ser reescrita como

$$\varphi(\theta, r_0, \theta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) r_0^k = u_1(\theta) r_0 + u_2(\theta) r_0^2 + \dots \quad (3.11)$$

Além disso, a igualdade $\varphi(\theta_0, r_0, \theta_0) = r_0$ implica que

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta_0) r_0^k = u_1(\theta_0) r_0 + u_2(\theta_0) r_0^2 + \dots$$

Comparando os coeficientes, segue que

$$r_0 = u_1(\theta_0) r_0, \quad u_k(\theta_0) r_0^k = 0 \text{ para todo } k \geq 2.$$

Daí, obtemos

$$u_1(\theta_0) = 1, \quad u_k(\theta_0) = 0 \text{ para todo } k \geq 2. \quad (3.12)$$

Portanto, para r_0 próximo de zero, temos

$$\varphi(\theta, r_0, \theta_0) = r_0 + \sum_{k=2}^{\infty} u_k(\theta) r_0^k,$$

onde $u_k(\theta_0) = 0$ para todo $k \geq 2$.

O problema do centro-foco busca critérios para determinar se um ponto singular, cuja parte linear indica um centro, é de fato um centro.

Observe que, se estivermos apenas interessados em distinguir entre um foco e um centro, podemos realizar uma reparametrização do tempo, $\tau = bt$, com $b \neq 0$, reescrevendo o sistema na forma:

$$\begin{cases} x' = \lambda x - y + p(x, y), \\ y' = x + \lambda y + q(x, y), \end{cases}$$

onde p e q são funções analíticas que não contêm termos constantes nem lineares. Essa reparametrização preserva o comportamento topológico das trajetórias, embora modifique o sistema original (3.3).

Quando o sistema é não linear, determinar a natureza da singularidade torna-se mais difícil. Relembre que o Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 2.3) garante que, em uma vizinhança suficientemente pequena da origem, o sistema é topologicamente equivalente à sua parte linear, ou seja, os termos de ordem superior podem ser ignorados, desde que os autovalores da matriz Jacobiana

$DX(0,0)$ não sejam puramente imaginários. Em outras palavras, sempre que a parte linear não indicar um centro, a matriz Jacobiana determina o tipo topológico do ponto singular, tornando o sistema não linear topologicamente equivalente à sua linearização. Com isso, a proposição a seguir decorre diretamente do Teorema de Hartman-Grobman.

Proposição 3.3. *Se o sistema polinomial (3.1) possui um ponto singular não degenerado na origem e esse ponto singular for monodrômico, então existe uma transformação linear de coordenadas e uma reparametrização do tempo que levam o sistema à forma*

$$\begin{cases} x' = \lambda x - y + p(x, y), \\ y' = x + \lambda y + q(x, y), \end{cases}$$

onde $p(x, y)$ e $q(x, y)$ são polinômios sem termos constantes nem lineares.

A demonstração da Proposição 3.3 ocorre em duas etapas: (1) transformação linear para colocar a parte linear do sistema em sua forma canônica e (2) reparametrização do tempo para simplificar a estrutura do sistema.

(1) *Transformação linear:* Como a origem é um ponto singular não degenerado, a matriz Jacobiana $DX(0,0)$ tem determinante não nulo, o que garante que seus autovalores são diferentes de zero ou conjugados complexos com parte real não nula. Assim, existe uma transformação linear de coordenadas

$$(x, y) \mapsto (X, Y) = M(x, y),$$

em que M é uma matriz invertível, que leva o sistema analítico à forma

$$\begin{cases} X' = \lambda X - Y + P(X, Y), \\ Y' = X + \lambda Y + Q(X, Y), \end{cases}$$

em que $P(X, Y)$ e $Q(X, Y)$ são funções analíticas, sem termos constantes nem lineares.

(2) *Reparametrização do tempo:* Se os autovalores de $DX(0,0)$ são $\lambda = \pm i\omega$, podemos realizar a reparametrização do tempo

$$d\tau = b dt,$$

para algum $b \neq 0$, de modo a normalizar λ sem alterar a equivalência topológica do sistema. Assim, o sistema é escrito na forma desejada:

$$\begin{cases} x' = \lambda x - y + p(x, y), \\ y' = x + \lambda y + q(x, y), \end{cases}$$

em que $p(x, y)$ e $q(x, y)$ são funções analíticas, sem termos constantes nem lineares.

Nesse contexto, temos:

- Se $\lambda \neq 0$, então a origem é um **foco forte**:
 - se $\lambda < 0$, o sistema possui um **foco estável**;
 - se $\lambda > 0$, o sistema possui um **foco instável**.
- Se $\lambda = 0$, vamos mostrar que a origem é um **foco** ou um **centro**.

O problema de distinguir entre um foco e um centro tem sido significativamente impulsionado pelo uso de sistemas de álgebra computacional. Em particular, tais ferramentas permitiram a obtenção de condições necessárias e suficientes para que uma singularidade seja um centro em diversos casos da equação (3.1), que antes eram considerados intratáveis. Com esse propósito, apresentaremos um algoritmo para distinguir entre um foco e um centro quando o sistema é *linearmente um centro*, ou seja, quando os autovalores na origem são puramente imaginários ($\alpha \pm i\beta$, com $\beta \neq 0$).

3.2 Resultados

Com o objetivo de determinar a natureza da singularidade na origem do sistema (3.3), a *aplicação de Poincaré* e a *função deslocamento* são ferramentas poderosas, pois permitem descrever de forma completa o comportamento das trajetórias do sistema em uma vizinhança suficientemente pequena da origem.

Quando $\varphi(\theta, r_0, \theta_0)$ está bem definida, podemos formalmente definir a aplicação de Poincaré ou aplicação de primeiro retorno como na seguinte definição.

Definição 3.4. A **aplicação de Poincaré** ou **aplicação de primeiro retorno** $\Pi_{\theta_0}(r_0)$ no ponto (r_0, θ_0) é definida como

$$\Pi_{\theta_0}(r_0) = \begin{cases} \varphi(\theta_0 + 2\pi, r_0, \theta_0), & \text{se } b > 0, \\ \varphi(\theta_0 - 2\pi, r_0, \theta_0), & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

No caso particular em que $r_0 = 0$, isto é, quando estamos na origem, definimos a aplicação de Poincaré como

$$\Pi(0) = \begin{cases} \varphi(2\pi, 0, 0) = 0, & \text{se } b > 0, \\ \varphi(-2\pi, 0, 0) = 0, & \text{se } b < 0, \end{cases}$$

pois, nesse caso, a origem independe de θ_0 .

Observação 3.5. Note que $\Pi_{\theta_0}(r_0)$ é uma aplicação que depende de r_0 . Além do mais, segue diretamente da definição de $\Pi(0)$ e da igualdade (3.11) que

$$\Pi'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(2\pi, 0, 0) = u_1(2\pi).$$

Definição 3.6. A **aplicação deslocamento** $d_{\theta_0}(r_0)$ em um ponto (r_0, θ_0) no plano de coordenadas polares é definida como

$$d_{\theta_0}(r_0) = \Pi_{\theta_0}(r_0) - r_0.$$

Quando $\theta_0 = 0$, escrevemos apenas $d(r_0) = \Pi(r_0) - r_0$.

A Figura 3.5 ilustra geometricamente essa aplicação, mostrando a diferença entre a aplicação de primeiro retorno e o ponto inicial.

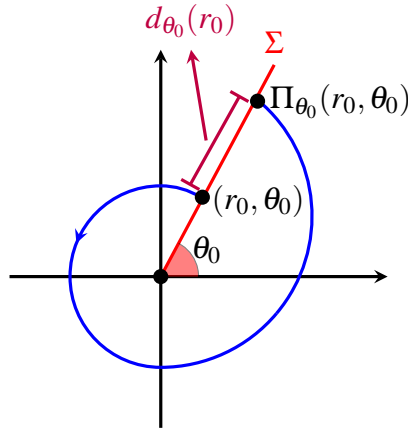


Figura 3.5: Representação geométrica da aplicação deslocamento (nesta figura, assumimos $b > 0$ e $a > 0$ na equação (3.3)).

Observe que $d'_{\theta_0}(r_0) = \Pi'_{\theta_0}(r_0) - 1$. Assim, no caso em que $r_0 = 0$, temos que

$$d'_{\theta_0}(0) = \Pi'_{\theta_0}(0) - 1.$$

Além disso, fixando $\theta_0 = 0$, obtemos

$$d(0) = \Pi(0) - 0 = \varphi(2\pi, 0, 0) = 0.$$

Agora, considere r_0 suficientemente pequeno e aplique o Teorema do Valor Médio no subintervalo $[0, r_0]$. Então, existe $c \in [0, r_0]$ tal que

$$d(r_0) = d(r_0) - 0 = d(r_0) - d(0) = d'(c)r_0 \Rightarrow d(r_0) = d'(c)r_0.$$

Como $r_0 > 0$, segue que

$$\left. \begin{array}{l} d(r_0) > 0 \Leftrightarrow d'(c) > 0 \\ d(r_0) < 0 \Leftrightarrow d'(c) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d(r_0)d'(c) > 0. \quad (3.13)$$

Uma vez que d' é contínua, então temos

$$\left. \begin{array}{l} d'(c) > 0 \Rightarrow d'(0) > 0 \\ d'(c) < 0 \Rightarrow d'(0) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d'(c)d'(0) > 0. \quad (3.14)$$

Assim, de (3.13) e (3.14), obtemos $d(r_0)d'(0) > 0$, para r_0 suficientemente pequeno.

Nesse sentido, estudar a estabilidade de um possível foco equivale a analisar $d'(0)$. De fato, temos:

$$d'(0) > 0 \Rightarrow \Pi'(0) - 1 > 0 \Rightarrow \Pi'(0) > 1,$$

ou

$$d'(0) < 0 \Rightarrow \Pi'(0) - 1 < 0 \Rightarrow \Pi'(0) < 1.$$

Em outras palavras, isso equivale a verificar se a derivada da aplicação de primeiro retorno na origem é maior ou menor que 1. Nesse contexto, estamos determinando se o ponto será instável ou estável. Logo, a estabilidade do ponto é determinada pela aplicação de Poincaré.

No próximo exemplo, consideraremos um sistema diferencial que possui um *ciclo limite*. Para esse sistema, calcularemos a aplicação de Poincaré.

Definição 3.7. Dado um sistema de equações diferenciais $X(x, y)$, um **ciclo limite** é uma solução periódica $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que, para qualquer ponto (x_0, y_0) suficientemente próximo de $\Gamma(t)$, a solução do sistema com condições iniciais (x_0, y_0) é uma trajetória que se aproxima de $\Gamma(t)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$, ou seja, permanece próxima da órbita periódica.

Dito de outra forma, um ciclo limite é uma órbita fechada (periódica não constante) que é isolada no conjunto de todas as órbitas fechadas do sistema, e pode ser classificado como estável ou instável, dependendo de as trajetórias próximas a ele se aproximarem ou se afastarem.

Definição 3.8. Um ciclo limite é **estável** se as trajetórias próximas se aproximam com o tempo, e **instável** se as trajetórias próximas se afastam com o tempo.

Exemplo 3.9. Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (3.15)$$

Seguindo o raciocínio análogo ao Exemplo 1.27, parte (b), faremos a transformação do sistema acima em coordenadas polares, e obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} r' = r(\mu - r^2), \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Note que, como $\theta' = 1$, então aqui também as trajetórias giram no sentido anti-horário.

Os pontos singulares de $r' = r(\mu - r^2)$ são:

$$r' = 0 \Leftrightarrow r(\mu - r^2) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } \mu - r^2 = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = \sqrt{\mu}.$$

Logo, temos:

- se $r = 0$, então $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$, e $(x, y) = (0, 0)$ é um ponto singular de (3.15);
- se $r = \sqrt{\mu}$, com $\mu > 0$, então $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mu}$, e a circunferência $x^2 + y^2 = \mu$ é um conjunto invariante pelo fluxo de (3.15).

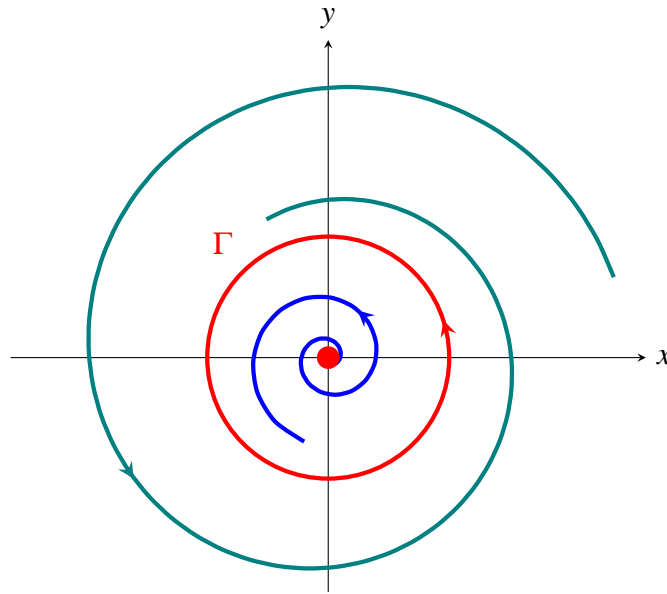


Figura 3.6: Um ciclo limite estável

Para $\mu > 0$, a circunferência $\Gamma: x^2 + y^2 = \mu$ é um ciclo limite estável¹ de todas as trajetórias deste sistema, exceto pela origem. A Figura 3.6 ilustra o retrato de fase do sistema (3.15).

Observe que, de fato, Γ é um ciclo limite do sistema (3.15), pois:

- (1) Para $0 < r < \sqrt{\mu}$, as órbitas giram no sentido anti-horário a partir da origem, aumentando o raio e tendendo à curva Γ ;
- (2) Para $r > \sqrt{\mu}$, as órbitas giram no sentido anti-horário, diminuindo o raio e tendendo à curva Γ .

Além disso, as órbitas com condições iniciais $0 < r < \sqrt{\mu}$ ou $r > \sqrt{\mu}$ não podem interseccionar com Γ , conforme garantido pelo Teorema de Existência e Unicidade (Teorema 1.9). Ou seja, o sistema (3.15) possui apenas uma órbita fechada, que é o ciclo limite Γ .

Agora, calculemos a expressão da aplicação de Poincaré para Γ . Isso é feito resolvendo o sistema descrito em coordenadas polares (3.16), com condições iniciais $r(0, r_0, \theta_0) = r_0$ e $\theta(0, r_0, \theta_0) = \theta_0$. Ou seja, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = r(\mu - r^2), \\ r(0) = r_0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \theta' = 1, \\ \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Observe que o primeiro problema de valor inicial em (3.17) pode ser resolvido utilizando o método de Bernoulli, enquanto o segundo problema pode ser abordado pelo método de separação de variáveis. Para mais detalhes sobre essas resoluções, consulte o Apêndice A.3.

¹Para a definição e propriedades do conjunto ω -limite, indicamos a Seção 1.4 de [9].

A solução do sistema (3.17) é dada por

$$r(t, r_0) = \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-2\mu t} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \theta(t, \theta_0) = t + \theta_0.$$

Seja Σ a semirreta $\theta = \theta_0$ que passa pela origem. Como essa reta é perpendicular ao ciclo limite Γ , a trajetória que parte do ponto $(r_0, \theta_0) \in \Sigma$ em $t = 0$ intersecta novamente Σ no instante $t = 2\pi$. Esse comportamento local das trajetórias próximas a Γ é ilustrado na Figura 3.7.

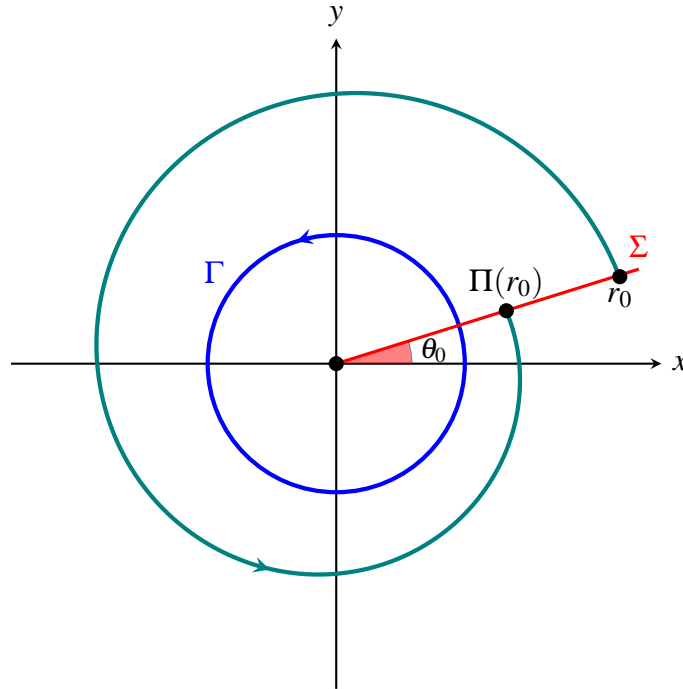


Figura 3.7: Interseção das trajetórias com a seção transversal Σ próximas ao ciclo limite Γ .

Para $\theta_0 = 0$, a aplicação de Poincaré é dada por

$$\Pi(r_0) = r(2\pi, r_0) = \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-4\mu\pi} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Em particular, avaliando em $r_0 = \sqrt{\mu}$, obtemos

$$\Pi(\sqrt{\mu}) = r(2\pi, \sqrt{\mu}) = \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-4\mu\pi} \right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\mu}.$$

Além disso, derivando $\Pi(r_0)$, temos

$$\Pi'(r_0) = e^{-4\mu\pi} r_0^{-3} \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-4\mu\pi} \right]^{-\frac{3}{2}},$$

e avaliando em $r_0 = \sqrt{\mu}$, segue que

$$\Pi'(\sqrt{\mu}) = e^{-4\mu\pi} (\sqrt{\mu})^{-3} \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-4\mu\pi} \right]^{-\frac{3}{2}} = e^{-4\mu\pi} < 1.$$

Portanto, como $\Pi'(\sqrt{\mu}) < 1$, a órbita Γ é estável, ou seja, trata-se de um ciclo limite atrator. A Figura 3.7 ilustra geometricamente a aplicação de Poincaré para o sistema.

Com base nas definições da aplicação de Poincaré e da função deslocamento, apresentamos a seguir alguns resultados fundamentais que servirão para demonstrar o principal teorema deste capítulo.

Lema 3.10. *Suponha que o sistema $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ seja planar, analítico, e que a origem satisfaça a condição (3.2). Então, a aplicação de Poincaré satisfaz*

$$\Pi(0) = 0 \quad e \quad \Pi'(0) = \exp\left(\frac{2a\pi}{|b|}\right).$$

Demonstração. Considere o sistema na forma polar

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta), \\ r(\theta_0) = r_0. \end{cases}$$

Seja $\varphi(\theta, r_0, \theta_0)$ a solução desse sistema. Como $R(0, \theta) \equiv 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, a origem $(0, \theta)$ é um ponto singular do sistema. Assim, segue que

$$\varphi(\theta, 0, \theta_0) = 0, \quad \text{para todo } \theta, \theta_0 \in \mathbb{R}.$$

Diferenciando a equação

$$\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta, r_0, \theta_0) = R(\varphi(\theta, r_0, \theta_0), \theta)$$

em relação a r_0 , obtemos

$$\frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, r_0, \theta_0) \right) = \frac{\partial R}{\partial r}(\varphi(\theta, r_0, \theta_0), \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(\theta, r_0, \theta_0).$$

Como $\varphi(\theta, r_0, \theta_0)$ é analítica, segue que

$$\frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\theta, r_0, \theta_0) \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(\theta, r_0, \theta_0) \right).$$

Substituindo essa expressão, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(\theta, r_0, \theta_0) \right) = \frac{\partial R}{\partial r}(\varphi(\theta, r_0, \theta_0), \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(\theta, r_0, \theta_0).$$

Tomando $r_0 = 0$, segue de $\varphi(\theta, 0, \theta_0) = 0$ que

$$\frac{\partial R}{\partial r}(0, \theta) = \frac{a}{b}.$$

Assim, a equação se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(\theta, 0, \theta_0) \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(\theta, 0, \theta_0).$$

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \frac{a}{b}\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = 1, \end{cases}$$

onde $\mathbf{y}(\theta) = \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(\theta, 0, 0)$ é solução. Integrando, obtemos

$$\mathbf{y}(\theta) = e^{\frac{a}{b}\theta}.$$

Se $b > 0$, então $\Pi(r_0) = \varphi(2\pi, r_0, 0)$, e segue que

$$\Pi'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(2\pi, 0, 0) = e^{\frac{2a\pi}{b}}.$$

Analogamente, se $b < 0$, então $\Pi(r_0) = \varphi(-2\pi, r_0, 0)$, e obtemos

$$\Pi'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}(-2\pi, 0, 0) = e^{\frac{2a\pi}{-b}}.$$

Portanto, em ambos os casos, temos

$$\Pi'(0) = \exp\left(\frac{2a\pi}{|b|}\right).$$

■

Observação 3.11. Segue diretamente do Lema 3.10 e do raciocínio desenvolvido até o momento que, se $a \neq 0$, então a origem é um foco forte. Mais precisamente, distinguimos os seguintes casos:

- se $a < 0$, a origem é um foco estável;
- se $a > 0$, a origem é um foco instável.

Isso indica se o fluxo está se aproximando ou se afastando da origem. Além disso, o sinal de b determina se o movimento ocorre no sentido horário ou anti-horário.

Retornando ao sistema (3.3) e utilizando (3.6), podemos reescrevê-lo na forma:

$$\begin{cases} r' = ar + P(r, \theta) = F(r, \theta), \\ \theta' = b + Q(r, \theta) = b + H(r, \theta). \end{cases}$$

Pela definição de $P(r, \theta)$ e $Q(r, \theta)$, segue que

$$F(r, \theta) := ar + \cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

e

$$H(r, \theta) := \frac{1}{r} (\cos \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta)).$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta, \quad \text{sen}(\theta + \pi) = -\text{sen} \theta,$$

segue que

$$F(-r, \theta + \pi) = -F(r, \theta) \quad \text{e} \quad H(-r, \theta + \pi) = H(r, \theta).$$

A partir de (3.7), temos

$$\frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta) = \frac{ar + P(r, \theta)}{b + Q(r, \theta)} = \frac{F(r, \theta)}{b + H(r, \theta)}.$$

Isso implica que a equação acima permanece inalterada sobre uma substituição simultânea. De fato, ao aplicarmos a transformação $(r, \theta) \mapsto (-r, \theta + \pi)$, obtemos

$$R(-r, \theta + \pi) = \frac{F(-r, \theta + \pi)}{b + H(-r, \theta + \pi)} = \frac{-F(r, \theta)}{b + H(r, \theta)} = -R(r, \theta). \quad (3.18)$$

Observação 3.12. Lembremos que, em um sistema de coordenadas polares, quando $r > 0$, o ponto $(-r, \theta)$ é o simétrico de (r, θ) em relação à origem, ou seja, $(-r, \theta) = (r, \theta + \pi)$. De forma mais explícita, dado

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \text{sen} \theta,$$

seu simétrico é dado por

$$-x = -r \cos \theta = r \cos(\theta + \pi),$$

$$-y = -r \text{sen} \theta = r \text{sen}(\theta + \pi).$$

A Figura 3.8 ilustra essa relação, destacando a simetria do ponto em relação à origem no plano cartesiano.

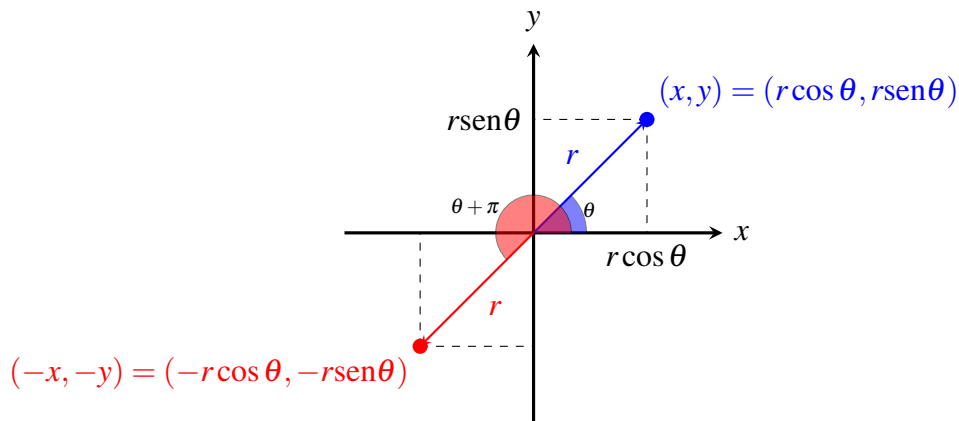


Figura 3.8: Representação da simetria de um ponto em coordenadas polares. O ponto (r, θ) tem seu simétrico em relação à origem dado por $(-r, \theta)$.

Lema 3.13. A seguinte igualdade é válida:

$$d_{\theta_0}(-r_0) = -d_{\theta_0 + \pi}(r_0).$$

Demonstração. Defina $r^* := -r$ e $\theta^* := \theta + \pi$. Com essa notação, podemos reescrever (3.18) como

$$R(r^*, \theta^*) = R(-r, \theta + \pi) = -R(r, \theta). \quad (3.19)$$

Agora, considere o sistema diferencial

$$\begin{cases} \frac{dr^*}{d\theta^*} = R(r^*, \theta^*), \\ r^*(\theta_0^*) = r_0. \end{cases}$$

A solução desse sistema pode ser escrita como $\varphi(\theta^*, r_0, \theta_0^*) = \varphi(\theta + \pi, r_0, \theta_0 + \pi) = \psi_1(\theta)$.

Defina agora $\psi_2(\theta) := -\varphi(\theta, -r_0, \theta_0)$. Note que essa função satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = -R(r, \theta), \\ r(\theta_0) = r_0. \end{cases}$$

Como φ é analítica em r_0 e satisfaz $\varphi(\theta_0, r_0, \theta_0) = r_0$, segue que

$$\psi_1(\theta_0) = \varphi(\theta_0 + \pi, r_0, \theta_0 + \pi) = r_0,$$

e

$$\psi_2(\theta_0) = -\varphi(\theta_0, -r_0, \theta_0) = -(-r_0) = r_0.$$

Portanto,

$$\psi_1(\theta_0) = r_0 = \psi_2(\theta_0). \quad (3.20)$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções (Teorema 1.9), combinando (3.19) e (3.20), obtemos $\psi_1(\theta) = \psi_2(\theta)$, o que implica

$$\varphi(\theta_0 + \pi, r_0, \theta_0 + \pi) = -\varphi(\theta_0, -r_0, \theta_0).$$

Agora, pela definição da função deslocamento, temos:

- Se $b > 0$, então

$$d_{\theta_0}(-r_0) = \varphi(\theta_0 + 2\pi, -r_0, \theta_0) - (-r_0) = -[\varphi(\theta_0 + 3\pi, r_0, \theta_0 + \pi) - r_0] = -d_{\theta_0 + \pi}(r_0).$$

- Se $b < 0$, então

$$d_{\theta_0}(-r_0) = \varphi(\theta_0 - 2\pi, -r_0, \theta_0) - (-r_0) = -[\varphi(\theta_0 - \pi, r_0, \theta_0 + \pi) - r_0] = -d_{\theta_0 + \pi}(r_0).$$

Portanto, em ambos os casos, concluímos que

$$d_{\theta_0}(-r_0) = -d_{\theta_0 + \pi}(r_0).$$



Geometricamente, considere ρ_0 o ponto de coordenadas $(-r_0, \theta_0)$ com $r_0 > 0$, Γ a trajetória que passa por ρ_0 e $\rho_1 = (-r_1, \theta_0 + 2\pi)$ o ponto obtido a partir de ρ_0 após percorrer um ângulo de 2π no sentido horário ou anti-horário, dependendo do sinal de b .

A Figura 3.9 ilustra a simetria presente na dinâmica do sistema e fornece uma interpretação geométrica do Lema 3.13. Nela, os pontos ρ_1 e $-\rho_1$ representam a aplicação de Poincaré em direções opostas, evidenciando a relação estabelecida no lema.

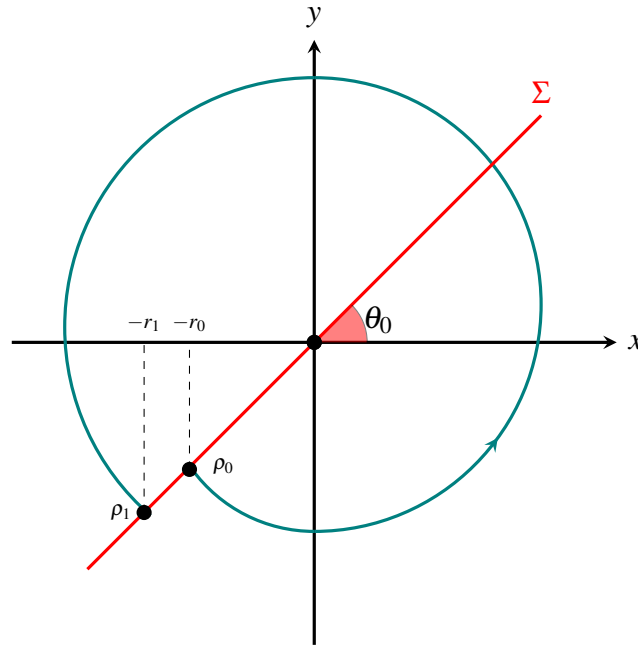


Figura 3.9: Representação geométrica do Lema 3.13.

Resumidamente, por definição, temos

$$d_{\theta_0}(-r_0) = -r_1 - (-r_0) = r_0 - r_1.$$

Pela Observação 3.12, podemos reinterpretar os pontos ρ_0 e ρ_1 como $(r_0, \theta_0 + \pi)$ e $(r_1, \theta_0 + \pi)$, respectivamente. Assim, a aplicação deslocamento correspondente a $\theta_0 + \pi$ é dada por

$$d_{\theta_0 + \pi}(r_0) = r_1 - r_0.$$

Portanto, segue diretamente que

$$d_{\theta_0 + \pi}(r_0) = -(r_0 - r_1) = -d_{\theta_0}(-r_0).$$

Observe que a função deslocamento só possui interpretação direta quando $r_0 \geq 0$. No entanto, nada impede que ela seja calculada para valores negativos de r_0 . O Lema 3.13 estabelece essa relação.

Lema 3.14. *Se existir $r_1 > 0$ tal que, para todo $0 < r_0 \leq r_1$, tivermos*

$$d_{\theta_0}(r_0) > 0 \quad (\text{respectivamente, } d_{\theta_0}(r_0) < 0),$$

então existe $r_2 > 0$ tal que, para todo $0 < r_0 \leq r_2$, vale

$$d_{\theta_0}(-r_0) < 0 \quad (\text{respectivamente, } d_{\theta_0}(-r_0) > 0).$$

Consequentemente, para todo $0 < |r_0| \leq \min\{r_1, r_2\}$, tem-se

$$d_{\theta_0}(r_0) d_{\theta_0}(-r_0) < 0.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $b > 0$ e que $d_{\theta_0}(r_0) > 0$. Isso significa que qualquer trajetória que passe pelo ponto (r_0, θ_0) , com $0 < r_0 \leq r_1$, espirala em direção à origem quando $t \rightarrow -\infty$. Como consequência, todas essas trajetórias interceptam o semi-eixo correspondente a $\theta_0 + \pi$.

A função $d_{\theta_0+\pi}(r_0)$, portanto, está bem definida para todo $0 < r_0 \leq r_2$, onde

$$r_2 = \varphi(\theta_0 - \pi, r_1, \theta_0),$$

e, nesse intervalo, é positiva. Pelo Lema 3.13, isso implica que $d_{\theta_0}(-r_0)$ está bem definida e é negativa para todo $0 < r_0 \leq r_2$.

Assim, para todo $0 < |r_0| \leq \min\{r_1, r_2\}$, segue que

$$d_{\theta_0}(r_0) d_{\theta_0}(-r_0) < 0.$$

■

No Lema 3.14, mostramos que a função $d_{\theta_0}(r_0)$ assume sinais opostos em r_0 e $-r_0$ para valores pequenos de r_0 , garantindo a existência de uma raiz. Agora, investigamos a estrutura dessa raiz e demonstramos que a ordem de anulação da função d na origem deve ser um número ímpar. Esse resultado é formalizado no seguinte lema.

Lema 3.15. *Se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \quad e \quad d^{(k)}(0) \neq 0, \quad (3.21)$$

então k é ímpar.

Demonstração. Pela fórmula de Taylor com o resto de Lagrange, expandimos $d(r_0)$ em torno de $r_0 = 0$:

$$d(r_0) = d(0) + \frac{d'(0)}{1!}r_0 + \frac{d''(0)}{2!}r_0^2 + \dots + \frac{d^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}r_0^{k-1} + \frac{d^{(k)}(\delta r_0)}{k!}r_0^k, \quad (3.22)$$

para algum $0 < \delta < 1$ tal que δr_0 está no intervalo onde d é analítica.

Pela hipótese (3.21), temos $d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0$, de modo que a equação (3.22) se simplifica para

$$d(r_0) = \frac{d^{(k)}(\delta r_0)}{k!}r_0^k.$$

Como d é analítica, a função $d^{(k)}$ é contínua. Assim, $d^{(k)}(0)$ e $d^{(k)}(\delta r_0)$ têm o mesmo sinal para r_0 suficientemente pequeno. Da mesma forma, $d^{(k)}(\delta(-r_0))$ tem o mesmo sinal de $d^{(k)}(0)$.

Portanto, se k fosse par, teríamos

$$d(-r_0) = \frac{d^{(k)}(\delta(-r_0))}{k!} (-r_0)^k = \frac{d^{(k)}(\delta(-r_0))}{k!} r_0^k,$$

o que implica que $d(r_0)$ e $d(-r_0)$ teriam sempre o mesmo sinal para $r_0 > 0$ pequeno.

Contudo, isso contradiz o Lema 3.14, que garante que $d(r_0)$ e $d(-r_0)$ têm sinais opostos para r_0 suficientemente pequeno. Logo, k não pode ser par, ou seja, k é ímpar. ■

Observação 3.16. Se a condição (3.21) não for satisfeita, ou seja, se $d^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então, pela Fórmula de Taylor, temos $d(r_0) = 0$ para todo $r_0 > 0$ suficientemente pequeno. Isso implica que a origem é um *centro*.

Por outro lado, se (3.21) for satisfeita, então, pela expressão (3.22) e pela continuidade de $d^{(k)}$, segue que $d(r_0)$ tem o mesmo sinal que $d^{(k)}(0)$ para $r_0 > 0$ suficientemente pequeno. Assim, a origem é um *foco estável* se $d^{(k)}(0) < 0$ e um *foco instável* se $d^{(k)}(0) > 0$.

Definição 3.17. Se a condição (3.21) for satisfeita e $k = 2m + 1$, dizemos que a origem é um **foco de multiplicidade m** . Em particular:

- (i) Se $m = 0$, a origem é chamada de **foco simples** ou **foco forte**.
- (ii) Se $m > 0$, a origem é chamada de **foco múltiplo** ou **foco fraco**.

Com base nos resultados obtidos até aqui, a demonstração do próximo teorema, que sintetiza o conteúdo deste capítulo, segue diretamente dos Lemas 3.10, 3.13, 3.14 e 3.15, bem como das Observações 3.11 e 3.16.

Teorema 3.18. *Seja $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ um sistema planar linear e analítico, cuja matriz jacobiana na origem é dada por*

$$DX(0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

com $b \neq 0$. Se $d(r_0) = \Pi(r_0) - r_0$ é a função deslocamento, então:

- (i) $d(0) = 0$ e $d'(0) = \exp\left(\frac{2a\pi}{|b|}\right) - 1$;
- (ii) a origem é um *foco simples* se, e somente se, $a \neq 0$. Além disso, a origem é *estável* se $a < 0$ e *instável* se $a > 0$;
- (iii) existe $\delta > 0$ tal que, para todo $0 < r_0 < \delta$, tem-se $d(r_0) d(-r_0) < 0$;

(iv) se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $d^{(k)}(0) \neq 0$ e k for o menor natural com essa propriedade, então k é ímpar. Nesse caso, a origem é estável se $d^{(k)}(0) < 0$ e instável se $d^{(k)}(0) > 0$. Neste caso, necessariamente temos $a = 0$;

(v) se $d^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então a origem é um centro.

Observação 3.19. A hipótese de que o sistema $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ seja analítico é essencial para a validade do Teorema 3.18. Se o sistema fosse apenas de classe C^∞ , por exemplo, a função deslocamento $d(r_0)$ também pertenceria a C^∞ , mas poderia não ser expressada como uma série de Taylor em torno da origem. Isso invalidaria alguns argumentos da demonstração. Além disso, se $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ for de classe C^∞ mas não analítico, o Teorema 5 de [14, página 142] afirma que, além de um centro ou um foco, o sistema pode apresentar uma singularidade do tipo centro-foco na origem, conforme a Definição 3.20. Note que, pelo Teorema 3.18, tal comportamento não pode ocorrer em sistemas analíticos.

Definição 3.20. A origem é chamada de **centro-foco** do sistema $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ se existe uma sequência de trajetórias fechadas $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que Γ_{n+1} está contida no interior de Γ_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n = 0$ e toda trajetória entre Γ_n e Γ_{n+1} espirala em direção a Γ_n ou Γ_{n+1} quando $t \rightarrow \pm\infty$ (ver Figura 3.10).

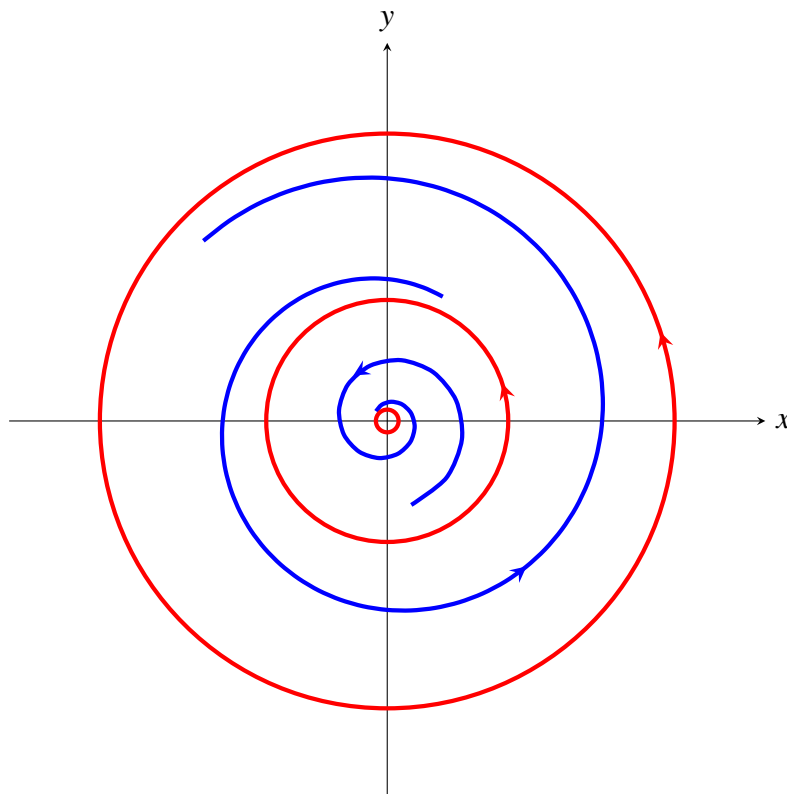


Figura 3.10: Ilustração de um centro-foco: as trajetórias fechadas Γ_n se acumulam na origem, enquanto as trajetórias entre elas espiralam para dentro ou para fora.

Observamos que um centro para um sistema linear pode permanecer um centro ou transformar-se em um foco estável ou instável com a inclusão de termos não lineares analíticos na origem. O

exemplo a seguir mostra que um centro de um sistema linear também pode se transformar em um centro-foco quando esses termos não lineares são adicionados e não são analíticos na origem.

Exemplo 3.21. Considere o campo vetorial

$$X(x, y) = \begin{cases} \left(-y + x\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), x + y\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right), & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0, \\ (0, 0), & \text{se } x = y = 0. \end{cases}$$

Note que esse campo de vetores é contínuo, mas não analítico, em $(0, 0)$.

Agora, seguindo o raciocínio análogo ao Exemplo 1.27, parte (b), realizamos a transformação para coordenadas polares e obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} r' = r^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Observe que, como $\theta' = 1$, as trajetórias giram no sentido anti-horário. Além disso, a origem $(0, 0)$ é um ponto singular do sistema, e os círculos $r = 1/(n\pi)$, com $n \in \mathbb{N}$, são trajetórias desse sistema. Esses círculos são concêntricos em torno da origem. Entre esses círculos $r = 1/(n\pi)$, o comportamento das trajetórias é o seguinte:

- se n é par, as trajetórias espiralam para fora, pois $r' > 0$ para $n\pi < \frac{1}{r} < (n+1)\pi$;
- se n é ímpar, as trajetórias espiralam para dentro, pois $r' < 0$ para $n\pi < \frac{1}{r} < (n+1)\pi$.

Portanto, concluímos que a origem é um centro-foco para este sistema.

Agora, consideremos um exemplo em que a função deslocamento não é analítica. De acordo com o Teorema 3.18, essa falta de analiticidade impede que ela esteja associada a um sistema diferencial analítico, como será ilustrado a seguir.

Exemplo 3.22. Neste exemplo, consideramos a função $d(r_0) = \operatorname{sen}(1/r_0)$ e analisamos seu comportamento para $r_0 > 0$. O gráfico de $\operatorname{sen}(1/r_0)$ exibe a sequência $(r_n) = (1/(n\pi))$ de zeros, o que implica a existência de uma sequência (Γ_n) de órbitas periódicas, com a propriedade de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n = 0$, uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Em outras palavras, à medida que r_0 diminui, o argumento $1/r_0$ cresce, fazendo com que a função $\operatorname{sen}(1/r_0)$ oscile cada vez mais rápido. Como consequência, a função gera uma série de zeros, ou seja, valores de r_0 para os quais $\operatorname{sen}(1/r_0) = 0$. Esses zeros correspondem a valores de r_0 onde existem órbitas periódicas associadas.

O gráfico da função $\operatorname{sen}(1/r_0)$ é ilustrado na Figura 3.11. Nela, as linhas horizontais $y = 1$ e $y = -1$ são as assíntotas máximas e mínimas da função, e os zeros são as interseções da curva com o eixo r_0 .

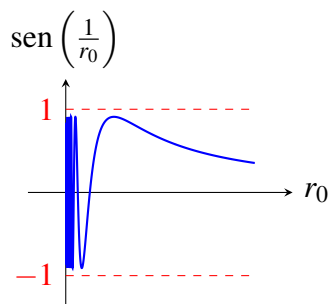


Figura 3.11: Gráfico de $\text{sen}(1/r_0)$ para $r_0 > 0$.

Observando o gráfico de $\text{sen}(1/r_0)$, podemos perceber que a derivada da função em r_n alterna entre positiva e negativa conforme variamos n . Isso implica que as órbitas Γ_n alternam entre ser atratoras e repulsoras.

Além disso, como não existem zeros de $\text{sen}(1/r_0)$ entre r_n e r_{n+1} , concluímos que não existem órbitas periódicas entre as órbitas Γ_n e Γ_{n+1} . Dessa forma, se houver uma órbita Γ entre Γ_n e Γ_{n+1} , ela espiralará de uma órbita periódica para a outra. Em outras palavras, a origem se caracteriza como um centro-foco.

Como $d(r_0)$ não está associada a um sistema $\mathbf{x}' = X(\mathbf{x})$ analítico, o comportamento das órbitas neste contexto não pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais analítico.

3.3 Coeficientes de Lyapunov

Os coeficientes de Lyapunov são definidos em termos das derivadas da função deslocamento, conforme apresentado a seguir:

Definição 3.23. Dado $k \geq 1$, definimos o k -ésimo coeficiente de Lyapunov como

$$V_k = \frac{d^{(k)}(0)}{k!},$$

onde $d^{(k)}(0)$ denota a k -ésima derivada da função deslocamento $d(r_0)$ avaliada em $r_0 = 0$.

Nesta seção, nosso objetivo é desenvolver um algoritmo para o cálculo dos coeficientes de Lyapunov.

Como discutido anteriormente, o primeiro valor de k tal que $V_k \neq 0$ deve ser ímpar. Além disso, V_1 não nulo indica que o ponto crítico é um foco simples. Iremos demonstrar o algoritmo utilizado para calcular os coeficientes de Lyapunov de ordem superior, implementando-o no *software Mathematica*, com base nos fundamentos teóricos apresentados nas Seções 3.1 e 3.2 desta dissertação.

3.3.1 Calculando os coeficientes de Lyapunov

Vamos calcular os três primeiros coeficientes de Lyapunov. Os coeficientes para $k \geq 3$ são calculados seguir o mesmo procedimento.

Inicialmente, definimos as variáveis x' e y' da seguinte forma:

$$x' = ax - by + \sum_{i+j=2}^3 a_{ij}x^i y^j \quad \text{e} \quad y' = bx + ay + \sum_{i+j=2}^3 b_{ij}x^i y^j.$$

Em seguida, fazemos a mudança para coordenadas polares, dada por:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Utilizando os mesmos raciocínios desenvolvidos na Seção 3.1, podemos definir as variáveis r' e θ' como:

$$r' = \frac{x' + yy'}{r} \quad \text{e} \quad \theta' = \frac{xy' - yx'}{r^2}.$$

Agora, calculamos o polinômio de Taylor de grau 3 na variável r e centrado na origem para a expressão:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'}{\theta'} = R(r, \theta) = \sum_{k=1}^3 R_k(\theta)r^k = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + R_3(\theta)r^3.$$

Suponhamos que $r(\theta) = f_\rho(\theta) = \sum_{k=1}^3 u_k(\theta)\rho^k$ seja a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = R(r, \theta), \\ r(0) = \rho, \quad \theta_0 = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Note que:

$$f_\rho(0) = r(0) = \rho \Rightarrow u_1(0)\rho + u_2(0)\rho^2 + u_3(0)\rho^3 = \rho \Rightarrow u_1(0) = 1 \quad \text{e} \quad u_k(0) = 0, \quad \text{para } k \geq 2.$$

Além disso, temos:

$$r'(\theta) = f'_\rho(\theta) = \sum_{k=1}^3 u'_k(\theta)\rho^k \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = f'_\rho(\theta) = \sum_{k=1}^3 u'_k(\theta)\rho^k,$$

e, a partir de (3.23), obtemos a equação:

$$\sum_{k=1}^3 u'_k(\theta)\rho^k = \sum_{k=1}^3 R_k(\theta)(f_\rho(\theta))^k := \sum_{k=1}^3 H_k(\theta)\rho^k. \quad (3.24)$$

Logo, nesse caso, teremos três problemas de valores iniciais para resolver. Expansão da segunda equação em (3.24) nos dá:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 R_k(\theta)(f_\rho(\theta))^k &= \sum_{k=1}^3 R_k(\theta) \left[\sum_{j=1}^3 u_j(\theta)\rho^j \right]^k = R_1(\theta) [u_1(\theta)\rho + u_2(\theta)\rho^2 + u_3(\theta)\rho^3] \\ &+ R_2(\theta) [u_1(\theta)\rho + u_2(\theta)\rho^2 + u_3(\theta)\rho^3]^2 + R_3(\theta) [u_1(\theta)\rho + u_2(\theta)\rho^2 + u_3(\theta)\rho^3]^3. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Logo, das equações (3.8), (3.24) e (3.25), obtemos a primeira equação para resolvermos:

$$\begin{aligned} u_1'(\theta)\rho = R_1(\theta)u_1(\theta)\rho = H_1(\theta)\rho &\Rightarrow u_1'(\theta) = R_1(\theta)u_1(\theta) = H_1(\theta) \\ &\Rightarrow H_1(\theta) = \frac{a}{b}u_1(\theta), \end{aligned}$$

onde $H_1(\theta)$ é o coeficiente de ρ em $R(f_\rho(\theta), \theta)$. Sabemos que a condição inicial é $u_1(\theta_0) = 1$, logo, a solução da equação é dada por:

$$u_1(\theta) = \exp\left[\frac{a(\theta - \theta_0)}{|b|}\right].$$

Agora, para formalizar, considere $H_1(\theta)$ o coeficiente de ρ em $R(f_\rho(\theta), \theta)$ e resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_1'(\theta) = H_1(\theta), \\ u_1(0) = 1, \end{cases}$$

para encontrar $u_1(\theta)$. Uma vez que, por definição, a função deslocamento é dada por:

$$\begin{cases} d(\rho) = f_\rho(2\pi) - \rho, & \text{se } b > 0, \\ d(\rho) = f_\rho(-2\pi) - \rho, & \text{se } b < 0, \end{cases}$$

temos:

$$\begin{cases} d(\rho) = \sum_{k=1}^3 u_k(2\pi)\rho^k - \rho, & \text{se } b > 0, \\ d(\rho) = \sum_{k=1}^3 u_k(-2\pi)\rho^k - \rho, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Desse modo,

$$\begin{cases} d(\rho) = [u_1(2\pi) - 1]\rho + \sum_{k=2}^3 u_k(2\pi)\rho^k, & \text{se } b > 0, \\ d(\rho) = [u_1(-2\pi) - 1]\rho + \sum_{k=2}^3 u_k(-2\pi)\rho^k, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Portanto, temos:

$$\begin{cases} d(\rho) = \frac{d'(0)}{1!}\rho + \sum_{k=2}^3 \frac{d^{(k)}(0)}{k!}\rho^k, & \text{se } b > 0, \\ d(\rho) = \frac{d'(0)}{1!}\rho + \sum_{k=2}^3 \frac{d^{(k)}(0)}{k!}\rho^k, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} d(\rho) = V_1\rho + \sum_{k=2}^3 V_k\rho^k, & \text{se } b > 0, \\ d(\rho) = V_1\rho + \sum_{k=2}^3 V_k\rho^k, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} V_1 = u_1(2\pi) - 1, & \text{se } b > 0, \\ V_1 = u_1(-2\pi) - 1, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Para calcular os próximos coeficientes de Lyapunov, basta substituir $a = 0$, o que implica em $u_1(\theta) \equiv 1$.

Agora, usando a mesma expansão da segunda equação em (3.24), obtemos a segunda equação para resolvermos:

$$u_2'(\theta) = R_1(\theta)u_2(\theta) + R_2(\theta) = H_2(\theta) \quad \Rightarrow \quad H_2(\theta) = \frac{a}{b}u_2(\theta) + R_2(\theta),$$

com a condição inicial $u_2(\theta_0) = 0$.

Novamente, formalizando, considere $H_2(\theta)$ o coeficiente de ρ^2 em $R(f_\rho(\theta), \theta)$ e resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_2'(\theta) = H_2(\theta), \\ u_2(0) = 0, \end{cases}$$

para encontrar $u_2(\theta)$. Isso posto, observe que, de acordo com a definição da função deslocamento usada no caso anterior, temos que:

$$\begin{cases} V_2 = u_2(2\pi), & \text{se } b > 0, \\ V_2 = u_2(-2\pi) - 1, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Por fim, o cálculo do terceiro coeficiente de Lyapunov segue analogamente. Ou seja, se $H_3(\theta)$ é o coeficiente de ρ^3 em $R(f_\rho(\theta), \theta)$, então $u_3(\theta)$ é obtida resolvendo o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_3'(\theta) = H_3(\theta), \\ u_3(0) = 0, \end{cases}$$

o que nos proporciona encontrar o terceiro coeficiente de Lyapunov:

$$\begin{cases} V_3 = u_3(2\pi), & \text{se } b > 0, \\ V_3 = u_3(-2\pi) - 1, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Observação 3.24. Como comentado no início desta seção, é possível calcular até o n -ésimo coeficiente de Lyapunov seguindo o mesmo raciocínio apresentado nessa subseção. Para isso, basta definir as variáveis x' e y' da seguinte forma:

$$x' = ax - by + \sum_{i+j=2}^n a_{ij}x^i y^j \quad \text{e} \quad y' = bx + ay + \sum_{i+j=2}^n b_{ij}x^i y^j,$$

em seguida, calcular o polinômio de Taylor de grau n na variável r e centrado na origem, dada por:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'}{\theta'} = R(r, \theta) = \sum_{k=1}^n R_k(\theta)r^k = R_1(\theta)r + R_2(\theta)r^2 + \cdots + R_n(\theta)r^n.$$

Agora, suponha que $r(\theta) = f_\rho(\theta) = \sum_{k=1}^n u_k(\theta)\rho^k$ seja a solução de (3.23), com condição inicial $r(0) = \rho$.

Com essas definições, o raciocínio para calcular os coeficientes de Lyapunov segue o mesmo procedimento descrito nas subseções anteriores, aplicando as expansões necessárias e resolvendo os problemas de valor inicial para cada $u_k(\theta)$.

3.3.2 Implementação no software Mathematica para o cálculo dos coeficientes de Lyapunov

Nesta subseção, apresentaremos o código-fonte desenvolvido no *software Mathematica*, permitindo ao leitor visualizar os comandos que utilizamos para o cálculo dos coeficientes de Lyapunov.

Inicialmente, vamos definir as variáveis $x' := xp$ e $y' := yp$, isto é, o campo vetorial. Utilizaremos o comando de somatório em ambas as variáveis para facilitar as futuras adaptações no programa, caso o grau do campo seja alterado, conforme ilustrado no Algoritmo 3.1.

```
1 xp = ax - by + Sum[Subscript[a, i, j - i] x^i y^(j - i), {j, 2, 3}, {i, 0, j}]
2 yp = bx + ay + Sum[Subscript[b, i, j - i] x^i y^(j - i), {j, 2, 3}, {i, 0, j}]
```

Algoritmo 3.1: Definindo o campo.

Observação 3.25. Note que, se quisermos realizar os cálculos para o campo de grau n , basta tomarmos $3 = n$ nas variáveis definidas no Algoritmo 3.1. Nos algoritmos que seguem, também é possível realizar a mesma alteração.

As variáveis definidas no Algoritmo 3.1 nos conduzem ao problema do centro-foco. No entanto, para calcular os coeficientes de Lyapunov, é necessário anular a variável a , o que nos leva ao caso do centro-linear perturbado. Vale ressaltar que os resultados a seguir também são aplicáveis quando $a \neq 0$.

Em seguida, realizamos a mudança para coordenadas polares ($x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$) e definimos $r' := rp$ e $\theta' := \backslash[\text{Theta}]p$. No Algoritmo 3.2, optamos pelos comandos `Collect` para agrupar os coeficientes em r , e `Simplify` para reduzir a quantidade de cálculos nas etapas seguintes.

```
1 rp = Collect[((x xp + y yp)/r) /. {x -> r Cos[\[Theta]], y -> r Sin[\[Theta]]},
  r, Simplify]
2 \[Theta]p = Collect[((x yp - y xp)/r^2) /. {x -> r Cos[\[Theta]], y -> r Sin[\[Theta]]}, r, Simplify]
```

Algoritmo 3.2: Passando para coordenadas polares.

Por conseguinte, definiremos os comandos responsáveis por calcular o polinômio de Taylor de grau 3 na variável r , centrado na origem, conforme ilustrado no Algoritmo 3.3.

```
1 drd\[Theta] = Collect[Normal[Series[rp/\[Theta]p, {r, 0, 3}]], r, Simplify]
```

Algoritmo 3.3: Calculando o polinômio de Taylor de grau 3.

No Algoritmo 3.3, utilizamos o comando `Series` para gerar a expansão em série de Taylor de ordem 3, e o comando `Normal` para converter essa série em uma expressão algébrica usual (padrão), removendo os termos de ordem superior.

Antes de prosseguirmos, vamos utilizar o comando `Coefficient` para calcular os respectivos coeficientes das potências de r no polinômio de Taylor, conforme ilustrado no Algoritmo 3.4.

```

1 RR1 = Coefficient[drd\[Theta], r]
2 RR2 = Coefficient[drd\[Theta], r^2]
3 RR3 = Coefficient[drd\[Theta], r^3]

```

Algoritmo 3.4: Preparações para o cálculo dos coeficientes.

Agora, faremos a substituição $r = \sum_{i=1}^n u_i r^i$ para calcular os coeficientes de Lyapunov. Mais uma vez, utilizamos o comando de somatória para permitir futuras adaptações no programa, caso sejam necessárias alterações no grau do campo. Veja o Algoritmo 3.5.

```

1 d\[Rho]d\[Theta] = Collect[drd\[Theta] /. r -> Sum[Subscript[u, i] \[Rho]^i, {i,
1, 3}], \[Rho], Simplify]

```

Algoritmo 3.5: Substituindo no polinômio de Taylor.

Com isso, estamos preparados para o cálculo dos coeficientes de Lyapunov. Para tal, basta utilizar o comando `DSolve` para resolver as devidas equações diferenciais ordinárias correspondentes, conforme ilustrado no Algoritmo 3.6. Nesse algoritmo, `H1` representa o coeficiente da equação diferencial de Lyapunov. O comando `DSolve` resolve a equação diferencial para $u_1(\theta)$, permitindo o cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov ao aplicar a condição inicial $u_1(0) = 1$.

```

1 H1 = Coefficient[d\[Rho]d\[Theta], \[Rho]]
2 u1 = Subscript[u, 1]
3 S1 = DSolve[{u1'[\[Theta]] - (H1 /. u1 -> u1[\[Theta]]) == 0, u1[0] == 1}, u1[\[Theta]], \[Theta]]
4 V1 = ((u1[\[Theta]] /. S1[[1]]) /. \[Theta] -> 2 Pi) - 1

```

Algoritmo 3.6: Cálculo do primeiro coeficiente de Lyapunov.

De modo análogo, faremos os cálculos para o segundo e terceiro coeficientes de Lyapunov, conforme ilustrado nos Algoritmos 3.7 e 3.8.

```

1 H2 = Coefficient[d\[Rho]d\[Theta], \[Rho]^2]
2 u2 = Subscript[u, 2]
3 S2 = DSolve[{u2'[\[Theta]] - (H2 /. {u1 -> 1, u2 -> u2[\[Theta]}) == 0, u2[0] == 0}, u2[\[Theta]], \[Theta]]
4 V2 = ((u2[\[Theta]] /. S2[[1]]) /. \[Theta] -> 2 Pi) - 0 // Factor

```

Algoritmo 3.7: Cálculo do segundo coeficiente de Lyapunov.

```

1 H3 = Coefficient[d\[Rho]d\[Theta], \[Rho]^3]
2 u3 = Subscript[u, 3]
3 S3 = DSolve[{u3'[\[Theta]] - (H3 /. {u1 -> 1, u2 -> (u2[\[Theta]] /. S2[[1]]), u3 -> u3[\[Theta]}) == 0, u3[0] == 0}, u3[\[Theta]], \[Theta]]
4 V3 = ((u3[\[Theta]] /. S3[[1]]) /. \[Theta] -> 2 Pi) - 0 // Factor

```

Algoritmo 3.8: Cálculo do terceiro coeficiente de Lyapunov.

Nos Algoritmos 3.7 e 3.8, o comando `Factor` é utilizado para fatorar a expressão algébrica, o que ajuda a simplificar e organizar as expressões. Isso é especialmente útil quando trabalhamos com equações diferenciais complexas e queremos tornar o resultado mais manejável.

Observe que à medida que as equações diferenciais se tornam mais extensas, elas exigem um maior poder de processamento do computador. Isso ocorre porque a complexidade das equações

aumenta com o grau de perturbação e a ordem das derivadas, o que implica em mais termos a serem calculados e manipulados. Portanto, ao trabalhar com coeficientes de Lyapunov de ordens mais altas, é recomendável ter um sistema computacional capaz de lidar com o aumento de complexidade sem comprometer o desempenho.

3.3.3 Cálculo e interpretação dos coeficientes de Lyapunov

Nesta seção, apresentaremos os primeiros coeficientes de Lyapunov e discutiremos algumas observações pertinentes a respeito de seu comportamento.

O cálculo do primeiro coeficiente já foi realizado no Lema 3.10, resultando na expressão

$$V_1 = \exp\left(\frac{2a\pi}{|b|}\right) - 1.$$

Conforme discutido na Seção 3.2, o segundo coeficiente é nulo quando $a = 0$. No entanto, para $a \neq 0$, o valor de V_2 toma a forma

$$V_2 = K \cdot V_1,$$

onde K é uma constante apropriada.

Embora tenhamos calculado os coeficientes V_3 e V_4 para o caso $a \neq 0$, apresentaremos apenas as expressões para o caso $a = 0$. O terceiro coeficiente de Lyapunov é dado por

$$V_3 = \frac{\pi}{4b} [a_{12} + 3(a_{30} + b_{03}) + b_{21}] + \frac{\pi}{2b^2} [a_{02}b_{02} - a_{20}b_{20}] \\ - \frac{\pi}{4b^2} [a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})].$$

Por sua vez, o quarto coeficiente de Lyapunov assume a forma

$$V_4 = \left(\frac{a_{11} + 2b_{02} + b_{20}}{3b}\right) V_3.$$

Os coeficientes subsequentes não serão exibidos devido à complexidade e comprimento excessivo de suas expressões.

3.3.4 Exemplos

Aqui, apresentamos exemplos nos quais calculamos efetivamente os coeficientes de Lyapunov para sistemas concretos.

Exemplo 3.26. Se o sistema

$$\begin{cases} x' = ax - by + \sum_{i+j=2} a_{ij}x^i y^j, \\ y' = bx + ay + \sum_{i+j=2} b_{ij}x^i y^j, \end{cases}$$

satisfaz as condições $a_{20} + a_{02} = 0$ e $b_{20} + b_{02} = 0$, então a origem é um centro ou um foco de multiplicidade $m \geq 2$.

De fato, segue diretamente da expressão do terceiro coeficiente de Lyapunov e das hipóteses assumidas que $V_3 = 0$. Assim, a origem é um centro ou um foco de multiplicidade $m \geq 2$.

Exemplo 3.27. A família de campos vetoriais no plano dada por

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x^2 + \alpha + y(\mu + vx + \lambda x^3 + x^4), \end{cases} \quad (3.26)$$

foi estudada em [6], e aqui apresentamos uma releitura desse estudo. Uma análise semelhante para uma família de campos vetoriais com três parâmetros e grau três foi realizada em [7].

A origem do sistema (3.26) é uma cúspide de ordem 4 quando os parâmetros $(\mu, v, \lambda, \alpha) = (0, 0, 0, 0)$. Segundo a classificação dos pontos singulares não elementares (ver Seção 2.2.5), trata-se de um ponto nilpotente.

Aplicaremos mudanças de coordenadas apropriadas, para obter o sistema:

$$\begin{cases} x' = y - \frac{cx^2}{2\varepsilon} + \frac{(d+10)x^4}{16\varepsilon^2} - \frac{dx^3}{2\sqrt{2\varepsilon^3}} - \frac{x^5}{4\sqrt{2\varepsilon^5}}, \\ y' = -x + \frac{x^2}{2\sqrt{2\varepsilon}}, \end{cases} \quad (3.27)$$

para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e $c, d \in \mathbb{R}$.

Note que a parte linear do sistema (3.27) corresponde a um centro linear. Ao considerar o sistema completo, calcularemos os coeficientes de Lyapunov e mostraremos que da origem bifurcam três ciclos limites.

Vale ressaltar que, se $\alpha \rightarrow -\infty$, então o sistema (3.26) é C^0 -equivalente ao sistema (3.27) para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (ver [6]). Isso significa que, no sistema original (3.26), os ciclos limites surgem em regiões muito afastadas (quando $\alpha \rightarrow -\infty$), enquanto no sistema C^0 -equivalente (3.27), esses ciclos limites aparecem ao redor da origem.

A família de sistemas dada por (3.26) pode ser reescrita através das seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} x &= t^2 x_1, & \alpha &= -t^4, & v &= t^6 v_1, \\ y &= t^3 y_1, & \mu &= t^8 \mu_1, & \lambda &= t^2 \lambda_1, \end{aligned}$$

com $t \in \mathbb{R}$ não nulo. Substituindo essas expressões em (3.26), obtemos o sistema

$$\begin{cases} t^2 x_1' = t^3 y_1, \\ t^3 y_1' = t^4 x_1^2 - t^4 + t^3 y_1 (t^8 \mu_1 + t^8 v_1 x_1 + t^8 \lambda_1 x_1^3 + t^8 x_1^4), \end{cases}$$

o que implica na seguinte forma simplificada:

$$\begin{cases} x_1' = t y_1, \\ y_1' = t x_1^2 - t + y_1 (t^8 \mu_1 + t^8 v_1 x_1 + t^8 \lambda_1 x_1^3 + t^8 x_1^4). \end{cases}$$

Aqui, introduzimos a variável $T = t^7$ e reescalamos as equações dividindo por t , resultando no sistema

$$\begin{cases} x_1' = y_1, \\ y_1' = x_1^2 - 1 + T y_1 (\mu_1 + v_1 x_1 + \lambda_1 x_1^3 + x_1^4). \end{cases} \quad (3.28)$$

Essa reformulação facilita a análise assintótica quando $T \rightarrow 0^+$, permitindo um estudo mais detalhado do comportamento dinâmico do sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio.

Aqui, aplicamos a *transformação de Liénard* para reescrever o sistema (3.28) na forma de uma equação diferencial de segunda ordem do tipo Liénard. A equação de Liénard é dada por:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0,$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - F(x_1), \\ x_2' = -g(x_1), \end{cases}$$

chamado de *sistema de Liénard*. Façamos a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= x_1' + F(x_1), \quad \text{onde} \quad F(x_1) = \int_0^{x_1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Assim, o sistema (3.28) pode ser reescrito como uma equação de segunda ordem do tipo Liénard:

$$x_1'' + \underbrace{(\mu_1 + \nu_1 x_1 + \lambda_1 x_1^3 + x_1^4)}_{f(x_1)} (-T) x_1' + \underbrace{1 - x_1^2}_{g(x_1)} = 0.$$

Tomando $x_2 = -Ty_1$, a equação anterior é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - F(x_1), \\ -Ty_1 = x_2 = x_1' + F(x_1). \end{cases}$$

Logo, a função $F(x_1)$ é dada por:

$$F(x_1) = \int_0^{x_1} f(s) ds = \int_0^{x_1} -T(\mu_1 + \nu_1 s + \lambda_1 s^3 + s^4) ds = -T \left(\mu_1 x_1 + \frac{\nu_1}{2} x_1^2 + \frac{\lambda_1}{4} x_1^4 + \frac{x_1^5}{5} \right).$$

Assim, podemos expressar x_1' como:

$$x_1' = x_2 - F(x_1) = -Ty_1 - T \left(\mu_1 x_1 + \frac{\nu_1}{2} x_1^2 + \frac{\lambda_1}{4} x_1^4 + \frac{x_1^5}{5} \right),$$

e para a equação de y_1' , temos:

$$-Ty_1' = x_2' = -g(x_1) = -(1 - x_1^2) \Rightarrow -Ty_1 = x_1^2 - 1 \Rightarrow y_1' = -\frac{1}{T}(x_1^2 - 1).$$

Chamando $x_1 = x$ e $y_1 = y$, temos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x' = -Ty - T \left(\mu_1 x + \frac{\nu_1}{2} x^2 + \frac{\lambda_1}{4} x^4 + \frac{x^5}{5} \right), \\ y' = -\frac{1}{T}(x^2 - 1). \end{cases} \quad (3.29)$$

Multiplicando o sistema (3.29) por $-1/T$ e denotando $\varepsilon = 1/T^2$, obtemos:

$$\begin{cases} x' = y - \left(\mu_1 x + \frac{\nu_1}{2} x^2 + \frac{\lambda_1}{4} x^4 + \frac{x^5}{5} \right), \\ y' = \varepsilon(x^2 - 1). \end{cases} \quad (3.30)$$

Em (3.30), vamos realizar uma nova mudança de variáveis:

$$y = \frac{y_1}{5}, \quad \nu = \frac{2\nu_1}{5}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{5}, \quad \lambda = \frac{4\lambda_1}{5}.$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} x' = \frac{y_1}{5} - \left(\frac{\mu_1}{5} x + \frac{\nu_1}{5} x^2 + \frac{\lambda_1}{5} x^4 + \frac{x^5}{5} \right), \\ \frac{y_1'}{5} = \varepsilon(x^2 - 1), \end{cases}$$

Agora, multiplicando esse sistema por 5 e renomeando $y = y_1$, $\mu = \mu_1$, $\nu = \nu_1$, $\lambda = \lambda_1$, obtemos:

$$\begin{cases} x' = y - (\mu x + \nu x^2 + \lambda x^4 + x^5), \\ y' = \varepsilon(x^2 - 1). \end{cases} \quad (3.31)$$

Observe que a parte linear do sistema (3.31) não caracteriza um centro (linear). Portanto, realizaremos uma nova mudança de variáveis para que o sistema apresente um centro linear. Consideremos, primeiramente, a transformação:

$$x_1 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1 - 1.$$

Com essa mudança, conseguimos introduzir uma parte linear em x na equação para y' , resultando na seguinte expressão:

$$y' = \varepsilon[(x_1 - 1)^2 - 1] = \varepsilon(x_1^2 - 2x_1).$$

Além disso, usando a mesma mudança de variáveis, obtemos a seguinte expressão para x_1' :

$$\begin{aligned} x_1' &= y - \left[\mu(x_1 - 1) + \nu(x_1 - 1)^2 + \lambda(x_1 - 1)^4 + (x_1 - 1)^5 \right] \\ &= x_1(4\lambda - 5 - \mu_1 + 2\nu) + x_1^2(10 - 6\lambda - \nu) + 2x_1^3(2\lambda - 5) + x_1^4(5 - \lambda) - x_1^5 + (1 + y - \lambda + \mu - \nu). \end{aligned}$$

Observe que a parte não linear da expressão acima deverá permanecer, sobrando apenas a expressão $1 + y - \lambda + \mu - \nu$. Definindo $y_1 = 1 + y - \lambda + \mu - \nu$, obtemos o novo sistema:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(4\lambda - 5 - \mu_1 + 2\nu) + x_1^2(10 - 6\lambda - \nu) + x_1^3(4\lambda - 10) + x_1^4(5 - \lambda) - x_1^5 + y_1, \\ y_1' = \varepsilon(x_1^2 - 2x_1). \end{cases} \quad (3.32)$$

Agora, realizamos uma nova mudança de parâmetros no sistema (3.32):

$$-b = 4\lambda - 5 - \mu_1 + 2\nu, \quad -c = 10 - 6\lambda - \nu, \quad -d = 4\lambda - 10,$$

Denotando $x = x_1$ e $y = y_1$, temos o sistema:

$$\begin{cases} x' = x(-b) + x^2(-c) + x^3(-d) + x^4(5 - \lambda) - x^5 + y, \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x). \end{cases} \quad (3.33)$$

Como $\lambda = (10 - d)/4$, temos:

$$5 - \lambda = 5 - \frac{10 - d}{4} = \frac{10 + d}{4}.$$

Substituindo essa expressão em (3.33), obtemos o sistema:

$$X_{\varepsilon,b,c,d} : \begin{cases} x' = y - \left[bx + cx^2 + dx^3 - \left(\frac{10+d}{4} \right) x^4 + x^5 \right], \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x). \end{cases} \quad (3.34)$$

Vamos denotar

$$F_{b,c,d}(x) = bx + cx^2 + dx^3 - \left(\frac{10+d}{4} \right) x^4 + x^5.$$

Agora, estudamos as singularidades da família (3.34). Quando $\varepsilon = 0$, as singularidades, com (b, c, d) fixos, correspondem aos pontos da curva $y = F_{b,c,d}(x)$. Com exceção dos pontos críticos, todos os pontos dessa curva são normalmente pontos singulares hiperbólicos.

Para $\varepsilon \neq 0$, as singularidades do campo vetorial $X_{\varepsilon,b,c,d}$, dado por (3.34), são os pontos $(0, 0)$ e $(2, F_{b,c,d}(2))$. A matriz Jacobiana de $X_{\varepsilon,b,c,d}$ em $(0, 0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} -b & 1 \\ -2\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso, o polinômio característico e os autovalores são:

$$z^2 + bz + 2\varepsilon = 0, \quad \text{e} \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8\varepsilon}}{2},$$

respectivamente. Analisando os autovalores, temos as seguintes situações:

- se $b^2 - 8\varepsilon < 0$, então $X_{\varepsilon,b,c,d}$ tem um foco repulsor para $b < 0$ e um foco atrator para $b > 0$;
- se $b^2 - 8\varepsilon \geq 0$, então $X_{\varepsilon,b,c,d}$ tem um nó repulsor para $b < 0$ e um nó atrator para $b > 0$.

Note que $\sqrt{b^2 - 8\varepsilon} < |b|$. Além disso, temos:

$$F_{b,c,d}(2) = 2b + 4c + 4d - 8.$$

Com isso, procedemos com a seguinte mudança de parâmetros no sistema (3.34):

$$x = x_1 + 2, \quad y = y_1 + F_{b,c,d}(2),$$

e, denotando $x = x_1$ e $y = y_1$, obtemos o sistema modificado:

$$\overline{X}_{\varepsilon,b,c,d} : \begin{cases} x' = y - \left[(b + 4c + 4d)x + (20 + c)x^2 + (20 - d)x^3 - \left(\frac{30 - d}{4} \right) x^4 + x^5 \right], \\ y' = \varepsilon(x^2 + 2x). \end{cases} \quad (3.35)$$

Quando trasladamos o ponto $(2, F_{b,c,d}(2))$ para a origem, a matriz Jacobiana do sistema (3.35) em $(0,0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} -b-4c-4d & 1 \\ 2\varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso, obtemos a matriz Jacobiana de $X_{\varepsilon,b,c,d}$ em $(2, F_{b,c,d}(2)) = (2, 2b+4c+4d-8)$. O polinômio característico da matriz é:

$$z^2 + (b+4c+4d)z - 2\varepsilon = 0,$$

de onde os autovalores são:

$$z = \frac{(-b-4c-4d) \pm \sqrt{(b+4c+4d)^2 + 8\varepsilon}}{2}.$$

Para $\varepsilon > 0$, o ponto $(2, 2b+4c+4d-8)$ é uma sela. A condição para que esse ponto seja um ponto crítico de $F_{b,c,d}$ ocorre quando os parâmetros satisfazem a equação:

$$b+4c+4d = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -4(c+d).$$

Essa equação define uma condição no plano dos parâmetros (b,c,d) , caracterizando a situação em que o ponto crítico correspondente é uma sela. A Tabela 3.1 resume os resultados obtidos acima.

Tabela 3.1: As singularidades de (3.34) para $\varepsilon > 0$

Singularidades	$b^2 - 8\varepsilon \geq 0$	$b^2 - 8\varepsilon < 0$
$(0,0)$	$b > 0$ Nó atrator	Foco atrator
	$b < 0$ Nó repulsor	Foco repulsor
$(2, F_{b,c,d}(2))$	$b \in \mathbb{R}$ Sela	Sela

Com isso, o objetivo em [6] é analisar a singularidade $(0,0)$ no caso em que $b = 0$. Assim, ao tomar $b = 0$, obtemos o sistema:

$$X_{\varepsilon,c,d} : \begin{cases} x' = y - \left[cx^2 + dx^3 - \left(\frac{10+d}{4} \right) x^4 + x^5 \right], \\ y' = \varepsilon(x^2 - 2x). \end{cases}$$

Nosso objetivo agora é reescrever o sistema na forma $x' = Ky + \dots$ e $y' = -Kx + \dots$, de modo a obter um centro linear. Para isso, introduzimos a mudança de variável $y = ky_1$ e determinamos k :

$$X_{\varepsilon,c,d} \begin{cases} x' = ky_1 - \left[cx^2 + dx^3 - \left(\frac{10+d}{4} \right) x^4 + x^5 \right], \\ ky_1' = \varepsilon(x^2 - 2x). \end{cases} \quad (3.36)$$

Da segunda equação, vemos que $y_1 = \varepsilon(x^2 - 2x)/k$. Assim, como a constante que multiplica y_1 na equação de x' deve ser igual à constante que multiplica $-x$ na equação de y_1 , fazemos:

$$k = \frac{2\varepsilon}{k} \Rightarrow k^2 = 2\varepsilon \Rightarrow k = \sqrt{2\varepsilon}.$$

Dessa forma, faremos a seguinte mudança no sistema (3.36):

$$y = \sqrt{2\varepsilon} y_1,$$

e, denotando $y = y_1$, temos:

$$X_{\varepsilon,c,d} : \begin{cases} x' = \sqrt{2\varepsilon} y_1 - \left[cx^2 + dx^3 - \left(\frac{10+d}{4} \right) x^4 + x^5 \right], \\ y' = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} x^2 - \sqrt{2\varepsilon} x. \end{cases}$$

Com o objetivo de deixar a constante igual a 1, fazemos a nova mudança de variáveis:

$$x = \frac{x_1}{\sqrt{2\varepsilon}}, \quad y = \frac{y_1}{\sqrt{2\varepsilon}},$$

e, denotando $x = x_1$ e $y = y_1$, temos:

$$X_{\varepsilon,c,d} : \begin{cases} x' = y - \frac{cx^2}{2\varepsilon} + \frac{(d+10)x^4}{16\varepsilon^2} - \frac{dx^3}{2\sqrt{2\varepsilon^3}} - \frac{x^5}{4\sqrt{2\varepsilon^5}}, \\ y' = -x + \frac{x^2}{2\sqrt{2\varepsilon}}, \end{cases}$$

que é exatamente o sistema (3.27).

Agora, calculamos os coeficientes de Lyapunov do sistema (3.27). Utilizando o algoritmo descrito na Subseção 3.3.1 e implementado no *software Mathematica*, obtemos:

$$V_1 = V_2 = 0, \quad V_3 = -\frac{\pi(c+3d)}{8\sqrt{2\varepsilon^{3/2}}}, \quad V_4 = -\frac{\pi(c+3d)}{96\varepsilon^2},$$

$$V_5 = \frac{\pi}{4608\varepsilon^{7/2}} \left[-52\sqrt{2}c^2(c+3d) - 3\sqrt{2}\varepsilon(13c+19d-80) + 54\pi\sqrt{\varepsilon}(c+3d)^2 \right],$$

$$V_6 = \frac{\pi}{46080\varepsilon^4} \left[-372c^3 - 1452c^2d - 1008cd^2 + 105\pi\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}(c+3d)^2 - 155c\varepsilon - 165d\varepsilon + 1200\varepsilon \right],$$

$$V_7 = \frac{\pi}{17694720\varepsilon^{11/2}} \left[(1920\pi\sqrt{\varepsilon}(c+3d)(52c^2(c+3d) + \varepsilon(41c+63d-240)) \right. \\ \left. - \sqrt{2}(51920c^4(c+3d) + 6\varepsilon(14001c^3 + c^2(36241d-84800) + 3cd(8693d-25600) \right. \\ \left. - 3105d^3) + 5\varepsilon^2(6509c+8367d-24480)) - 21600\pi^2\sqrt{2}\varepsilon(c+3d)^3 \right].$$

Para aplicar o Teorema 3.18 e garantir que a origem do sistema (3.27) seja um foco fraco de multiplicidade $m \leq 3$, devemos impor as condições $V_1 = V_2 = \dots = V_6 = 0$ e garantir que $V_7 \neq 0$.

Observamos que $V_1 = V_2 = 0$ e que a anulação do terceiro coeficiente de Lyapunov ocorre se, e somente se,

$$V_3 = 0 \Leftrightarrow c = -3d.$$

Tomando $c = -3d$, obtemos automaticamente $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 0$, e o quinto coeficiente de Lyapunov assume a forma

$$V_5 = \frac{5\pi(d+4)}{192\sqrt{2}\varepsilon^5}.$$

Se impusermos $V_5 = 0$, ou seja, $d = -4$, então verificamos que

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = V_6 = 0,$$

e que o sétimo coeficiente de Lyapunov é dado por

$$V_7 = -\frac{35\pi}{3072\sqrt{2}\varepsilon^7} \neq 0.$$

Como V_7 nunca se anula, concluímos que a origem do sistema (3.27) é um foco de multiplicidade $m = 3$ para os valores dos parâmetros $(c, d) = (12, -4)$. Além disso, como $k = 7 = 2m + 1$, segue que $m = 3$.

Por fim, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.28. *Seja $X_{\varepsilon, b, c, d}$ dado por (3.34), com $\varepsilon > 0$, e definimos:*

$$M = c + 3d, \quad N = -52\sqrt{2}c^2(c + 3d) - 3\sqrt{2}\varepsilon(13c + 19d - 80) + 54\pi\sqrt{\varepsilon}(c + 3d)^2.$$

Se $b = 0$, o sistema (3.34) é C^0 -equivalente ao sistema (3.27). Além disso, temos as seguintes classificações para a origem $(x, y) = (0, 0)$:

- (a) *A origem é um foco (ou nó) atrator se $b > 0$ e um foco (ou nó) repulsor se $b < 0$.*
- (b) *Se $b = 0$, a origem é um foco fraco atrator quando $M < 0$ e um foco fraco repulsor quando $M > 0$.*
- (c) *Se $b = M = 0$, a origem é um foco fraco atrator quando $N < 0$ e um foco fraco repulsor quando $N \geq 0$.*

Demonstração. A demonstração segue do Exemplo 3.27. Observamos que, quando $b = 0$, os cinco primeiros coeficientes de Lyapunov se anulam, ou seja, $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = 0$, se e somente se $c = 12$ e $d = -4$. Além disso, verificamos que $V_5 > 0$ para $c = 12$ e $d > -4$, enquanto $V_5 < 0$ para $c = 12$ e $d < -4$. Dessa forma, o sistema $X_{\varepsilon, b, c, d}$ apresenta um foco fraco atrator quando $c = 12$ e $d > -4$, e um foco fraco repulsor quando $c = 12$ e $d < -4$.

Para o caso particular em que $(c, d) = (12, -4)$, temos:

$$V_7 = \frac{5\pi(296 + \varepsilon)}{16\sqrt{2}\varepsilon^3} \neq 0.$$

Portanto, a origem $(0, 0)$ é um foco fraco repulsor de multiplicidade 3. ■

É importante ressaltar que o Exemplo 3.27 será utilizado para a análise da bifurcação de Hopf na origem, como veremos no próximo capítulo, mas especificamente no Exemplo 4.8.

Bifurcação de Hopf

Proposta no ano de 1900, o 16° Problema de Hilbert trata de determinar o número máximo de ciclos limites (conhecido como número de Hilbert) e suas posições relativas em um sistema de equações diferenciais polinomiais planares de grau n . Apesar da simplicidade do seu enunciado, este famoso problema permanece sem solução, mesmo no caso $n = 2$. No entanto, sua formulação incentivou o desenvolvimento de técnicas sofisticadas de investigação de ciclos limites, além de dar origem a versões mais fracas do problema. Entre essas versões, destaca-se a que busca estimar o número de ciclos limites de pequena amplitude que bifurcam de um centro ou foco elementares, ou seja, sistemas cuja parte linear possui autovalores imaginários puros.

A teoria das bifurcações está especialmente interessada no estudo da mudança de comportamento topológico associado a um fluxo de soluções do sistema. A bifurcação ocorre quando a variação de um determinado parâmetro provoca uma mudança qualitativa no fluxo de um dado sistema.

De modo geral, as bifurcações podem ser classificadas em dois tipos: locais e globais. As bifurcações mais elementares são aquelas relacionadas ao comportamento local, próximo a um ponto singular ou órbitas fechadas de um sistema, ocorrendo quando a variação do parâmetro causa uma mudança de estabilidade local associada a um ponto fixo ou a órbitas periódicas. Já as bifurcações globais envolvem transformações qualitativas que afetam aspectos globais do sistema.

Uma bifurcação de Hopf descreve a transição de um foco atrator para um ciclo limite, isto é, trata do surgimento de uma órbita periódica a partir de um estado de equilíbrio quando o parâmetro de bifurcação cruza o valor crítico. Em termos mais técnicos, uma bifurcação de Hopf é caracterizada pela existência de um par de autovalores puramente imaginários no ponto de bifurcação. Nesse sentido, isto implica que a bifurcação ocorre apenas em sistemas de equações diferenciais constituídos por duas ou mais equações. O fenômeno é particularmente interessante porque, ao mesmo tempo em que o ponto de equilíbrio perde a estabilidade, pode ocorrer o aparecimento de um ciclo limite que envolve este ponto.

Neste capítulo, mostraremos algumas técnicas para estudar os ciclos limite que bifurcam de um

ponto de Hopf por pequenas perturbações, ou seja, iremos analisar a representação de um sistema sujeito a uma bifurcação de Hopf. Além do mais, apresentaremos os teoremas que fornecem as condições suficientes para a existência deste tipo de bifurcação em sistemas lineares planares. Com base em [6] e [14] desenvolvemos a teoria que segue.

4.1 O conceito de bifurcação de Hopf

Considere um sistema autônomo da forma

$$\mathbf{u}' = X(\mathbf{u}, \mu), \quad (4.1)$$

onde $X: U \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação analítica com $\mathbf{u} \in U$ e $\mu \in \Lambda$, $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto contendo a origem e $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é o espaço de parâmetros. Assim, segue que \mathbf{u} é a variável de estado e μ é o parâmetro de bifurcação.

Considere $X(0, \mu) = 0$ para todo $\mu \in \Lambda$, ou seja, $\mathbf{u} = 0$ é um ponto de singular para (4.1), para todo μ . Assuma que, para $m = 2$, $DX(0, \mu)$ tem autovalores imaginários puros não nulos para todo $\mu \in \Lambda$. Definimos o **conjunto solução** de X como

$$\gamma = \{(\mathbf{u}, \mu) \in U \times \Lambda; X(\mathbf{u}, \mu) = 0\}.$$

Para cada $\mu \in \Lambda$, denotamos $n(\mu)$ o número de valores de \mathbf{u} para os quais (\mathbf{u}, μ) é uma solução de $X(\mathbf{u}, \mu) = 0$. Como nosso estudo é local, assumimos que $X(\mathbf{u}, \mu) = 0$ está definida em alguma vizinhança de um ponto $(\mathbf{u}_0, \mu_0) \in U \times \Lambda$, e que $n(\mu)$ representa apenas o número de soluções dentro dessa vizinhança. Com isso, apresentamos a seguinte definição:

Definição 4.1. Dizemos que $(\mathbf{u}_0, \mu_0) \in U \times \Lambda$ tal que $X(\mathbf{u}_0, \mu_0) = 0$ é um **ponto de bifurcação** se $n(\mu)$ muda conforme μ varia em uma vizinhança de μ_0 .

Para simplificar a análise, assumimos que $X(\mathbf{u}_0, \mu_0) = 0$. Observe que, se (\mathbf{u}_0, μ_0) é um ponto de bifurcação, então $\det(DX(\mathbf{u}_0, \mu_0)) = 0$, onde $DX(\mathbf{u}_0, \mu_0)$ é a matriz Jacobiana de ordem m obtida ao diferenciar X em relação a \mathbf{u} no ponto (\mathbf{u}_0, μ_0) . De fato, pelo Teorema da Função Implícita, se $\det(DX(\mathbf{u}_0, \mu_0)) \neq 0$, a equação $X(\mathbf{u}, \mu) = 0$ pode ser resolvida unicamente em \mathbf{u} como uma função de μ . Isso significa que, para cada μ perto de μ_0 , existe uma única solução \mathbf{u} de $X(\mathbf{u}, \mu) = 0$ próximo de \mathbf{u}_0 . Neste caso, $n(\mu) = 1$ para μ perto de μ_0 , o que implica que (\mathbf{u}_0, μ_0) não é um ponto de bifurcação.

Por conseguinte, apresentaremos a definição principal deste capítulo.

Definição 4.2. Dizemos que o sistema (4.1) sofre uma **bifurcação de Hopf** em $\mu = 0$ se a matriz $DX(0, 0)$ tem um par de autovalores puramente imaginários.

Com condições adicionais, a definição acima garante a existência de órbitas periódicas. Apresentaremos um exemplo elementar no plano em que ocorre a bifurcação de Hopf. Vale ressaltar que o

Exemplo 4.3 corresponde ao Exemplo 3.9 do Capítulo 3 no qual calculamos a aplicação de Poincaré, e ilustramos seu retrato de fase.

Exemplo 4.3. Considere o sistema

$$X = \begin{cases} x' = -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Note que o único ponto crítico está na origem e

$$DX(0, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema 3.18, a origem é um foco estável se $\mu < 0$ e instável se $\mu > 0$. Agora, para $\mu = 0$, a matriz

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tem um par de autovalores imaginários puros e, pelo Teorema 3.18 e o Teorema de Dulac (Teorema 3.1, no Capítulo 3), a origem é um centro ou um foco para esse sistema não linear. No Exemplo 3.9, foi feita uma transformação no sistema acima em coordenadas polares, indicando que, para $\mu = 0$, a origem é um foco estável e, para $\mu > 0$, há um ciclo limite estável. Ver Figura 4.1.

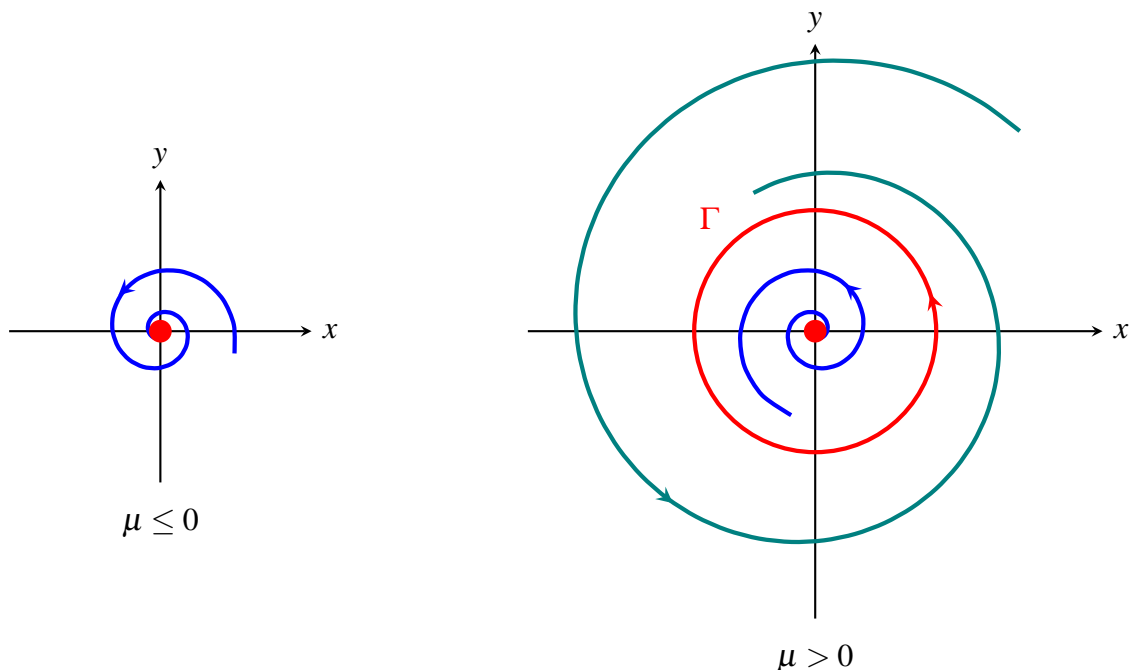


Figura 4.1: Retrato de fase do sistema do Exemplo 4.3

As curvas $\Gamma = \sqrt{\mu}e^{\mu t}(\cos t, \sin t)$ representam uma família de ciclos limites a um parâmetro desse sistema. A bifurcação do ciclo limite da origem que ocorre no ponto de bifurcação $\mu = 0$, à medida que a origem muda sua estabilidade, é chamada bifurcação de Hopf. Ver Figura 4.2.

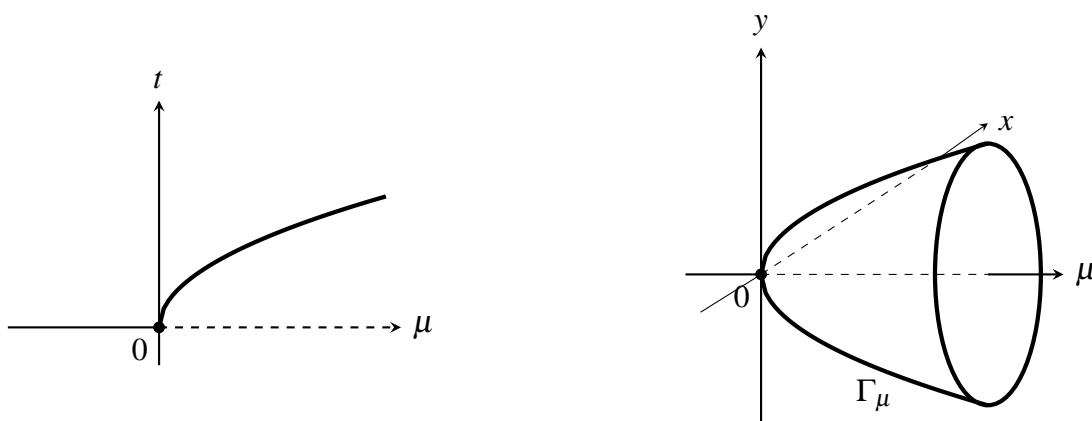


Figura 4.2: O diagrama de bifurcação e a família de um parâmetro de ciclos limites Γ_μ resultantes da bifurcação de Hopf no Exemplo 4.3.

Definição 4.4. O número máximo de ciclos limites que bifurcam a partir de um ponto de Hopf por pequenas perturbações dos parâmetros é chamado de **ciclicidade** deste ponto.

Assim, nosso objetivo é obter cotas inferiores para a ciclicidade do ponto singular na origem em sistemas da forma (4.1). Neste trabalho, focamos exclusivamente no caso planar.

4.2 Ciclos limites em sistemas planares

Considerando o sistema planar (4.1), podemos aplicar mudanças de variáveis e procedimentos descritos previamente para obter a função deslocamento que, neste caso, depende analiticamente de $\mu \in \Lambda$. Isto é, expandindo a função deslocamento em série de Taylor em torno de ρ_0 tal como a equação (3.22), temos:

$$d(\rho_0, \mu) = V_1(\mu)\rho_0 + V_2(\mu)\rho_0^2 + V_3(\mu)\rho_0^3 + \dots, \quad (4.2)$$

onde os coeficientes $V_k(\mu)$ são os coeficientes de Lyapunov (ver Definição 3.23) que dependem analiticamente do parâmetro $\mu \in \Lambda$. Como os coeficientes de Lyapunov são funções de μ , se houver uma certa liberdade nos valores assumidos por estes coeficientes ao variarmos μ , podemos provocar mudanças de sinal na função deslocamento, criando zeros para essa função, os quais correspondem a ciclos limites do sistema.

Lembre-se que a função deslocamento $d(\rho_0, \mu)$ é obtida através da aplicação de Poincaré. O número e a posição dos ciclos limites em uma vizinhança da origem são determinados pelos zeros isolados da função deslocamento. Em particular:

- se $d(\rho_0, \mu) > 0$, para todo ρ_0 suficientemente pequeno, as trajetórias espiralam para fora da origem;
- se $d(\rho_0, \mu) < 0$, para todo ρ_0 suficientemente pequeno, as trajetórias espiralam em direção à origem;

- se $d(\rho_0, \mu)$ muda de sinal, então existem valores de $\rho_0 > 0$ para os quais $d(\rho_0, \mu) = 0$, correspondendo a ciclos limites isolados.

O Teorema 4.7 garante que a bifurcação de Hopf aconteça em um sistema que possua um foco múltiplo. Esse resultado está contido na dissertação de mestrado de Arakaki [2], e é uma adaptação do resultado de Han [11].

Agora, formalizamos o conceito de proximidade entre funções e sistemas, esclarecendo o significado da expressão “pequenas perturbações” amplamente utilizada na literatura.

Definição 4.5 (δ -Proximidade). Dadas funções $f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^p com $p > r$ ou analíticas em $W \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que f está δ -próxima de g com posto r em $U, U \subset W$, se para todo ponto de U :

$$|f - g| < \delta, \quad e \quad |D^l f - D^l g| < \delta, \quad \text{para } l = 1, \dots, r.$$

Dados sistemas $A: \dot{\mathbf{u}} = X(\mathbf{u}, \mu)$ e $B: \dot{\mathbf{u}} = Y(\mathbf{u}, \mu)$, onde X e Y são de classe C^p , com $p > r$ ou analíticos em $W \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que A está δ -próximo de B com posto r em $U, U \subset W$, quando cada componente de X é δ -próxima da respectiva componente de Y em U .

Teorema 4.6. *Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de classe $C^l, l > r$, ou analítica em um aberto $U \subset \mathbb{R}$ contendo a origem e tal que:*

$$f(0) = 0, \quad \frac{d^j f}{dx^j}(0) = 0 \text{ para } j = 1, \dots, r-1, \quad e \quad \frac{d^r f}{dx^r}(0) \neq 0.$$

Então existem $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tal que toda função g δ_0 -próxima de f com posto r tem no máximo r zeros para $|x| < \varepsilon_0$.

Demonstração. Seja $m = \left| \frac{d^r f}{dx^r}(0) \right|$. Como $m > 0$, por continuidade, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que:

$$\left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) \right| > \frac{m}{2}, \quad \text{para } |x| < \varepsilon_0.$$

Seja $\delta_0 = \frac{m}{4}$. Assim, temos que para toda função g δ_0 -próxima de f com posto r , e para todo $|x| < \varepsilon_0$:

$$\left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) \right| = \left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) - \frac{d^r g}{dx^r}(x) + \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right| \leq \left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) - \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right| + \left| \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right|$$

Daí:

$$\left| \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right| > \left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) \right| - \left| \frac{d^r f}{dx^r}(x) - \frac{d^r g}{dx^r}(x) \right| > \frac{m}{2} - \delta_0 = \frac{m}{4}.$$

Suponhamos que exista uma função g que seja δ_0 -próxima com posto r de f e tenha pelo menos $r + 1$ raízes em $|x| < \varepsilon_0$. Pelo Teorema de Rolle, para $j \leq r$, $\frac{d^j g}{dx^j}$ tem pelo menos $r - j + 1$ raízes neste intervalo. Logo, $\frac{d^r g}{dx^r}$ se anula em algum ponto \tilde{x} com $|\tilde{x}| < \varepsilon_0$, o que contradiz a desigualdade acima. ■

O Teorema 4.6 fornece uma cota superior para o número de ciclos limites que podem bifurcar após pequenas perturbações nos parâmetros para um foco múltiplo. De fato, a função deslocamento associada ao sistema (4.1) planar é dada pela expansão em série de potências de ρ_0 por (4.2).

Usaremos as ideias e notações de [2]. Denote $L_k := V_{2k+1}$. Para $\mu = s$ fixo, temos que

$$\frac{d^k d}{d\rho_0^k}(0, s) = k!V_k(s),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponhamos que o sistema correspondente $u = F_s(u)$ tenha um foco de multiplicidade K na origem. Isto é, a primeira constante de Lyapunov não nula é $V_{2K+1}(s) = L_K(s)$. Pelo Teorema 4.6, e pelo Teorema da Dependência Contínua das EDOs com relação às Condições Iniciais e Parâmetros (Teorema 1.11), para valores de μ suficientemente próximos de s , as funções deslocamento associadas $d_\mu(\rho_0) = d(\rho_0, \mu)$ são δ -próximas de $d_s(\rho_0)$ com posto $2K + 1$ para algum $\delta > 0$, e portanto tem no máximo $2K + 1$ zeros. Um destes zeros é $\rho_0 = 0$ para quaisquer valores de μ . Além disso, como cada ciclo limite de (4.1) intersecciona o eixo- u em dois pontos de abscissas com sinais opostos, temos que K é o número máximo de ciclos limites de (4.1) numa vizinhança da origem.

Estabelecemos agora algumas notações. O sistema (4.1) planar, pode ser escrito, após mudanças de variáveis lineares adequadas, como:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x, y, \mu) = -y + P(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n), \\ \dot{y} = x + Q(x, y, \mu) = x + Q(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde P e Q são analíticas em $U \times \Lambda$. Adicionamos uma perturbação linear a este sistema dependendo de um parâmetro real μ_0 , isto é, consideramos o sistema analítico em $U \times (\mathbb{R} \times \Lambda)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu_0 x - y + P(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n), \\ \dot{y} = x + \mu_0 y + Q(x, y, \mu_1, \dots, \mu_n). \end{cases} \quad (4.4)$$

Notemos que V_1 depende apenas de μ_0 , uma vez que $V_1 = e^{2\pi\mu_0} - 1$. Além disso, $V_1 > -1$, para qualquer valor de μ_0 , e $\frac{dV_1}{d\mu_0}(0) = 2\pi$.

A partir dessa discussão, podemos demonstrar o resultado que analisa a ciclicidade de sistemas (4.3) cuja origem é um foco múltiplo.

Teorema 4.7 ([2], Bifurcação de ciclos limites a partir de um foco múltiplo). *Dado um sistema da forma (4.3), seja $s \in \Lambda$ tal que a origem seja um foco de multiplicidade $k > 1$ para $\mu = s$. Se os coeficientes de Lyapunov V_3, \dots, V_{2k+1} são tais que:*

$$\text{posto} \left[\frac{\partial(V_3, \dots, V_{2k+1})}{\partial(\mu_1, \dots, \mu_n)} \right]_{\mu=s} = k - 1,$$

então existem variações dos parâmetros do sistema (4.4) que geram k ciclos limites em uma vizinhança da origem.

Demonstração. Por hipótese, temos:

$$\text{posto} \left[\frac{\partial(V_3, \dots, V_{2k+1})}{\partial(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \dots, \mu_n)} \right]_{\mu=s} = k-1,$$

Logo, existem $k-1$ colunas linearmente independentes na matriz $\left[\frac{\partial(V_3, \dots, V_{2k+1})}{\partial(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \dots, \mu_n)} \right]_{\mu=s}$. Podemos renomear as variáveis em Λ de forma que:

$$\text{posto} \left[\frac{\partial(V_3, \dots, V_{2k+1})}{\partial(\mu_1, \dots, \mu_{k-1})} \right]_{\mu=s} = k-1.$$

O sistema (4.3) no ponto $\mu = s$ é equivalente ao sistema (4.4) perturbado com $(\mu_0, \mu) = (0, s)$. Como $\frac{\partial V_1}{\partial \mu_0}(0, s) = 2\pi$ e $\frac{\partial V_1}{\partial \mu_i}(0, s) = 0$ para $i > 0$, temos:

$$\text{posto} \left[\frac{\partial(V_1, V_3, \dots, V_{2k+1})}{\partial(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1})} \right]_{(\mu_0, \mu)=(0, s)} = k.$$

Escrevemos $s = (s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, \dots, s_n)$. Fixamos as outras variáveis $\mu_i = s_i$ para $i = k, \dots, n$ em $\mathbb{R} \times \Lambda$. Para facilitar as construções a seguir, escrevemos $\tilde{s} = (0, s_1, \dots, s_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ e $\hat{s} = (s_k, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n-k+1}$. Consideramos a aplicação $\mathcal{L}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, dada por:

$$\mathcal{L}(\mu_0, \dots, \mu_{k-1}) = (V_1, V_3, \dots, V_{2k+1}),$$

onde para $i = 0, \dots, k$, $V_{2i+1} = V_{2i+1}(\mu_0, \dots, \mu_{k-1}, \hat{s})$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, \mathcal{L} é um difeomorfismo local de uma vizinhança U de \tilde{s} , pois $\det(\mathcal{L}_{\tilde{s}}) \neq 0$.

Consideremos a função deslocamento $d(\rho_0, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \hat{s})$. Como o sistema (4.4) correspondente a $(0, s)$ tem um foco de multiplicidade k na origem, temos que, para ρ_0 suficientemente pequeno,

$$d(\rho_0, \tilde{s}, \hat{s}) = d(\rho_0, 0, s) = V_{2k+1}(0, s)\rho_0^{2k+1} + O(\rho_0^{2k+2}),$$

com $V_{2k+1}(0, s) - \tilde{V}_{2k+1} \neq 0$. Como $\mathcal{L}(\tilde{s}) = 0$, existe $\mu_0 > 0$ tal que $B(0, \mu) \subset \mathcal{L}(U)$ para todo $\mu < \mu_0$. Pelo Teorema de Dependência Contínua das EDOs com relação às Condições Iniciais e Parâmetros, existe $\mu > 0$ tal que a função deslocamento d é analítica para $(\mu_0, \dots, \mu_{k-1}) \in \mathcal{L}^{-1}(B(0, \mu))$ e $|\rho_0| < \bar{r}$, com $\bar{r} > 0$ suficientemente pequeno. Pelo Teorema 4.6, existe $\varepsilon_0 > 0$ e uma vizinhança W de \tilde{s} tal que para todo $(\tilde{\mu}_0, \dots, \tilde{\mu}_{k-1}) \in W$, $d(\rho_0, \tilde{\mu}_0, \dots, \tilde{\mu}_{k-1}, \hat{s})$ tem no máximo $2k+1$ raízes para $|\rho_0| < \varepsilon_0$. Sejam $\tilde{U} = W \cap \mathcal{L}^{-1}(B(0, \mu))$ e $r = \min\{\bar{r}, \varepsilon_0\}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\tilde{V}_{2k+1} > 0$. Logo, como

$$d_{\tilde{s}}(\rho_0) = d(\rho_0, \tilde{s}, \hat{s}) = \tilde{V}_{2k+1}\rho_0^{2k+1} + O(\rho_0^{2k+2}),$$

para valores suficientemente pequenos de ρ_0 , $d_{\tilde{s}}(\rho_0) > 0$. Seja r_0 um desses valores, tal que $r_0 < r$. Daí, $d_{\tilde{s}}(r_0) > 0$.

Como $d(r_0, \tilde{s}, \hat{s}) > 0$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $d(r_0, \mathbf{l}, \hat{s}) > 0$ para todo $\mathbf{l} \in B(\tilde{s}, \varepsilon_0) \cap \tilde{V}$. Pela continuidade de \mathcal{L}^{-1} , podemos tomar $\mathbf{V}_1 = (0, \dots, \tilde{V}_{2k-1})$ com $\tilde{V}_{2k-1} < 0$ e $\|\mathbf{V}_1\| = |\tilde{V}_{2k-1}| < \tilde{V}_{2k+1}$ suficientemente pequeno para $\mathbf{v}_1 = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{V}_1) \in B(\tilde{s}, \varepsilon_0) \cap \tilde{U}$. Obtemos assim \mathbf{v}_1 , cuja função deslocamento $d_{\mathbf{v}_1}$ associada ao sistema $\mathbf{u}' = F(\mathbf{u}, (\mathbf{v}_1, \hat{s}))$ é dada, pela fórmula de Taylor para valores suficientemente pequenos de ρ_0 , por:

$$d_{\mathbf{v}_1}(\rho_0) = d(\rho_0, \mathbf{v}_1, \hat{s}) = \tilde{V}_{2k-1}\rho_0^{2k-1} + O(\rho_0^{2k}).$$

Para valores positivos pequenos o suficiente de ρ_0 , $d_{\mathbf{v}_1}(\rho_0) < 0$. Seja r_1 um desses valores, tal que $r_1 < r_0$. Daí, $d_{\mathbf{v}_1}(r_0) > 0$ e $d_{\mathbf{v}_1}(r_1) < 0$.

Agora, como $d(r_1, \mathbf{v}, \hat{s}) < 0$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $d(r_1, \mathbf{v}, \hat{s}) < 0$ para todo $\mathbf{v} \in B(\mathbf{v}_1, \varepsilon_1) \cap B(\tilde{s}, \varepsilon_0) \cap \tilde{U}$. Analogamente ao argumento anterior, podemos tomar $\mathbf{V}_2 = (0, \dots, \tilde{V}_{2k-3}, \tilde{V}_{2k-1})$ com $\tilde{V}_{2k-3} > 0$ e $\|\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1\| = |\tilde{V}_{2k-3}| < |\tilde{V}_{2k-1}|$ pequeno o suficiente para que $\mathbf{v}_2 = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{V}_2) \in B(\mathbf{v}_1, \varepsilon_1) \cap B(\tilde{s}, \varepsilon_0) \cap \tilde{U}$. Assim, obtemos \mathbf{v}_2 , cuja função deslocamento $d_{\mathbf{v}_2}$ associada ao sistema $\mathbf{u}' = F(\mathbf{u}, (\mathbf{v}_2, \hat{s}))$ é dada por:

$$d_{\mathbf{v}_2}(\rho_0) = d(\rho_0, \mathbf{v}_2, \hat{s}) = \tilde{V}_{2k-3}\rho_0^{2k-3} + O(\rho_0^{2k-2}),$$

e para valores positivos pequenos o suficiente de ρ_0 , $d_{\mathbf{v}_2}(\rho_0) > 0$. Seja r_2 um desses valores, tal que $r_2 < r_1$. Assim, $d_{\mathbf{v}_2}(r_0) > 0$, $d_{\mathbf{v}_2}(r_1) < 0$ e $d_{\mathbf{v}_2}(r_2) > 0$.

Continuamos com este procedimento e obtemos os parâmetros $\mathbf{v}_i \in \tilde{U}$, $i = 1, \dots, k$ de modo que $\mathcal{L}(\mathbf{V}_k) = \mathbf{V}_k = (\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_{2k+1})$ com $\tilde{V}_{2i-1}\tilde{V}_{2i+1} < 0$ e $|\tilde{V}_{2i-1}| < |\tilde{V}_{2i+1}|$. Também obtemos os valores positivos r_i com $r_i < r_{i+1}$ de modo que:

$$d_{\mathbf{v}_k}(r_0) > 0, d_{\mathbf{v}_k}(r_1) < 0, d_{\mathbf{v}_k}(r_2) > 0, \dots$$

Daí, pela continuidade da função deslocamento, entre os valores r_{i-1} e r_i , há pelo menos um zero de $d_{\mathbf{v}_k}$ e conseqüentemente, pelo menos um ciclo limite. Logo, o sistema (4.4) corresponde ao parâmetro (\mathbf{v}_k, \hat{s}) tem no mínimo k ciclos limite em uma vizinhança da origem. Mas como $\mathbf{v}_k \in \tilde{U}$, sua cota superior de ciclos limite é k . Portanto, este sistema tem exatamente k ciclos limite. ■

Isso posto, vamos aplicar o Teorema 4.7 no sistema (3.27) do Exemplo 3.27.

Exemplo 4.8. Considere

$$X_{\varepsilon, c, d} : \begin{cases} x' = y - \frac{cx^2}{2\varepsilon} + \frac{(d+10)x^4}{16\varepsilon^2} - \frac{dx^3}{2\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}} - \frac{x^5}{4\sqrt{2}\varepsilon^{5/2}}, \\ y' = -x + \frac{x^2}{2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon}}, \end{cases}$$

que é exatamente o sistema (3.27). Vamos calcular a matriz Jacobiana:

$$\frac{\partial(V_3, V_5)}{\partial(c, d, \varepsilon)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial c} & \frac{\partial V_3}{\partial d} & \frac{\partial V_3}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial V_5}{\partial c} & \frac{\partial V_5}{\partial d} & \frac{\partial V_5}{\partial \varepsilon} \end{pmatrix}$$

com a condição que $c = 12$ e $d = -4$, logo obtemos que

$$\frac{\partial(V_3, V_5)}{\partial(c, d, \varepsilon)} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{8\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}} & -\frac{3\pi}{8\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}} & 0 \\ -\frac{13\pi(\varepsilon + 192)}{768\sqrt{2}\varepsilon^{7/2}} & -\frac{\pi(19\varepsilon + 7488)}{768\sqrt{2}\varepsilon^{7/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, temos 2 colunas linearmente independentes, assim de acordo com Teorema 4.7 da origem do sistema bifurcam 3 ciclos limites.

No Exemplo 3.27, vimos que os três primeiros coeficientes de Lyapunov associados ao sistema $X_{\varepsilon, c, d}$ são:

$$V_1 = V_2 = 0, \quad V_3 = -\frac{\pi(c + 3d)}{8\sqrt{2}\varepsilon^{3/2}}.$$

Se $M = c + 3d$, o Teorema 3.28 garante que $V_3 \neq 0$ se, e somente se, $M \neq 0$ e, pelo Teorema 3.18, temos um foco fraco de multiplicidade 1. O Teorema 4.7 assegura que existem valores de parâmetros $(\varepsilon, c, d, \mu_0)$ tais que $\varepsilon > 0$, $c \neq -3d$, $d, \mu_0 \in \mathbb{R}$, tais que da origem bifurca 1 ciclo limite.

Agora, fazendo $M = 0$, ou seja, $c = -3d$, temos:

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 0.$$

Além disso, pelo Teorema 3.28, se $N|_{c=-3d} = d + 4 \neq 0$, então

$$V_5 = \frac{5\pi(d + 4)}{192\sqrt{2}\varepsilon^{5/2}} \neq 0.$$

Pelo Teorema 3.18, temos um foco fraco de multiplicidade 2, e o Teorema 4.7 garante que existem valores de parâmetros $(\varepsilon, c, d, \mu_0)$ tais que $\varepsilon > 0$, $c = -3d$, $d \neq -4$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$, de forma que da origem bifurcam 2 ciclos limites.

Por fim, considerando $d = -4$, que implica $c = 12$, obtemos:

$$V_7 = -\frac{35\pi}{3072\sqrt{2}\varepsilon^{7/2}} \neq 0.$$

Daí, se $M = N = 0$, então $V_7 \neq 0$, para todo $\varepsilon > 0$, e, pelo Teorema 3.18, temos um foco fraco de multiplicidade 3. Pelo Teorema 4.7, existem valores de parâmetros $(\varepsilon, c, d, \mu_0)$ tais que $\varepsilon > 0$, $c = -3d$, $d = -4$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$, de forma que da origem bifurcam 3 ciclos limites.

Considerações finais

Ao longo desta dissertação, exploramos conceitos fundamentais, como os *Coefficientes de Lyapunov* e a *Bifurcação de Hopf*, que desempenham um papel central na análise do comportamento dinâmico de sistemas diferenciais planares. Em particular, destacamos a importância dos coeficientes de Lyapunov na resolução do **Problema do Centro-Foco**, que permite distinguir entre centros e focos em torno de pontos singulares. Além disso, discutimos a relação desses coeficientes com o surgimento de ciclos limites, um fenômeno essencial na teoria das bifurcações. A implementação computacional apresentada no Capítulo 3 ilustra a aplicabilidade prática desses conceitos, possibilitando a análise eficiente de sistemas dinâmicos complexos.

Na análise da bifurcação de Hopf, evidenciamos sua relevância na compreensão das transições dinâmicas em sistemas diferenciais. Esse fenômeno não apenas reforça sua importância na matemática pura, mas também se mostra essencial em diversas aplicações. Além dos modelos de reações químicas oscilantes, onde o parâmetro de controle está associado à concentração dos reagentes, a bifurcação de Hopf também desempenha um papel fundamental em sistemas físicos, como nos circuitos elétricos com realimentação não linear (circuito de van der Pol, introduzido por Balthasar van der Pol entre 1920 e 1930), e em modelos estatísticos SIRS (Suscetíveis-Infetados-Recuperados-Suscetíveis), como na dinâmica de populações em epidemiologia, onde oscilações periódicas podem surgir na propagação de doenças devido à interação entre suscetíveis e infectados.

Os resultados obtidos ressaltam a relevância dos métodos analíticos e computacionais no estudo de sistemas dinâmicos, promovendo uma abordagem que integra teoria e prática. Como perspectivas futuras, seria interessante estender esses métodos para sistemas diferenciais em dimensões superiores, bem como explorar bifurcações mais complexas, como as do tipo Bogdanov-Takens ou Hopf-Hopf.

Por fim, sugerimos que a combinação de técnicas analíticas e computacionais pode abrir novos caminhos para o estudo de sistemas dinâmicos não lineares. Esperamos que esta dissertação contribua para o aprofundamento da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, oferecendo uma visão integrada entre fundamentos teóricos e aplicações, e que possa inspirar novas investigações

nessa área fascinante da matemática.

Cálculo de soluções exatas de alguns exemplos

Neste apêndice, mostraremos a resolução mais detalhada de alguns exemplos que foram utilizados durante a dissertação, mas que não são demonstrados no texto principal. Tais resoluções envolvem o cálculos de soluções exatas.

A.1 Exemplo 1.21 do Capítulo 1

Considere $x' = -x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Assim, resolveremos a EDO seguinte pelo método de separação de variáveis:

$$\begin{cases} x' = -x(1-x), \\ x(0) = p, p \neq 0 \text{ e } p \neq 1. \end{cases}$$

Logo,

$$x' = -x(1-x) \Rightarrow \underbrace{\int \frac{1}{-x(1-x)} dx}_{*} = \int dt.$$

Vamos resolver $\int \frac{1}{-x(1-x)} dx$ utilizando o método de fração parcial

$$\frac{A}{-x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x) + B(-x)}{-x(1-x)} = \frac{A - Ax - Bx}{-x(1-x)} = \frac{(-B-A)x + A}{-x(1-x)},$$

daí

$$\begin{cases} -B-A=0, \\ A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1, \\ A=1. \end{cases}$$

Logo,

$$\int \frac{1}{-x(1-x)} dx = \int \left(\frac{1}{-x} + \frac{-1}{1-x} \right) dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx.$$

Substituindo em $\textcircled{*}$, temos que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{-x(1-x)} dx &= \int dt \Rightarrow \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \int dt \\
 &\Rightarrow -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = t + C \\
 &\Rightarrow -\ln|x| + \ln|x-1| = t + C \\
 &\Rightarrow \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| = t + C \\
 &\Rightarrow e^{\ln \left| \frac{x-1}{x} \right|} = e^{t+C} \\
 &\Rightarrow \left| \frac{x-1}{x} \right| = e^t \underbrace{e^C}_{>0} \\
 &\Rightarrow \frac{x-1}{x} = Ke^t \\
 &\Rightarrow x-1 = xKe^t \\
 &\Rightarrow x(1-Ke^t) = 1 \\
 &\Rightarrow x = \frac{1}{1-Ke^t}.
 \end{aligned}$$

Como $x(0) = p \Rightarrow \frac{1}{1-Ke^0} = p \Rightarrow 1 = (1-K)p \Rightarrow 1 = p - pK \Rightarrow pK = p - 1 \Rightarrow K = \frac{p-1}{p}$, logo

$$x(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)e^t} = \frac{p}{p - (p-1)e^t} = \frac{p}{p + (1-p)e^t} = \frac{pe^{-t}}{pe^{-t} + 1 - p}.$$

E assim,

$$\varphi(t, p) = \frac{pe^{-t}}{pe^{-t} + 1 - p}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 pe^{-t} + 1 - p \neq 0 &\Leftrightarrow pe^{-t} \neq p - 1 \\
 &\Leftrightarrow e^{-t} \neq \frac{p-1}{p} \\
 &\Leftrightarrow \ln(e^{-t}) \neq \ln\left(\frac{p-1}{p}\right) \\
 &\Leftrightarrow -t \neq \ln\left(\frac{p-1}{p}\right) \\
 &\Leftrightarrow t \neq -\ln\left(\frac{p-1}{p}\right) \\
 &\Leftrightarrow t \neq \ln\left(\frac{p}{p-1}\right).
 \end{aligned}$$

A.2 Exemplo 1.27 do Capítulo 1

Considere a equação de segunda ordem

$$x'' = -x.$$

Tomando $y = x'$ obtemos o seguinte sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases} &\Leftrightarrow X' = F(X), \text{ com } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow X' = AX. \end{aligned}$$

Vejam os pontos críticos é tal que

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Portanto, $(0, 0)$ é um ponto crítico e é solução constante.

Para $X \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, temos que

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - [1(-1)] = \lambda^2 + 1.$$

Assim,

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

Agora, vamos encontrar o autovetor associado ao autovalor $\lambda = -i$, obtemos que

$$\begin{aligned} K = 0 &\Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow (A - (-i)I)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ix + y = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = iy. \end{aligned}$$

Daí,

$$K = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} i =: B_1 + B_2 i.$$

Escrevendo a solução $Z = Ke^{\lambda t}$, com $\lambda = -i$ e $K = B_1 + B_2 i$, temos que $Z = X_1 + iX_2$, e assim obtemos as duas soluções reais

$$X_1 = B_1 \cos t - B_2(-\sin t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

$$X_2 = B_1(-\sin t) + B_2 \cos t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-\sin t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \sin t \\ c_1 \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \cos t \\ -c_2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Em particular, para $c_1 = a \cos b$ e $c_2 = a \operatorname{sen} b$, temos que

$$X = \begin{pmatrix} a \cos b \operatorname{sen} t \\ a \cos b \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \operatorname{sen} b \cos t \\ -a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos b \operatorname{sen} t + a \operatorname{sen} b \cos t \\ a \cos b \cos t - a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \operatorname{sen}(t+b) \\ a \cos(t+b) \end{pmatrix}.$$

Note que se fossemos encontrar o autovetor associado ao autovalor $\lambda = i$, obteremos

$$K = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} i := B_1 - B_2 i.$$

E assim, escrevendo a solução $Z = Ke^{\lambda t}$, com $\lambda = i$ e $K = B_1 - B_2 i$, temos que $Z = X_1 + iX_2$, e assim obtemos as duas soluções reais

$$X_1 = B_1 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

$$X_2 = B_1 \operatorname{sen} t - B_2 \cos t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

E de forma análoga, obtemos

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \operatorname{sen} t \\ c_1 \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \cos t \\ c_2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Em particular, para $c_1 = a \cos b$ e $c_2 = -a \operatorname{sen} b$, temos que

$$X = \begin{pmatrix} a \cos b \operatorname{sen} t \\ a \cos b \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \operatorname{sen} b \cos t \\ -a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos b \operatorname{sen} t + a \operatorname{sen} b \cos t \\ a \cos b \cos t - a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \operatorname{sen}(t+b) \\ a \cos(t+b) \end{pmatrix}.$$

Com isso, podemos concluir que a solução é

$$X(t) = \begin{pmatrix} a \operatorname{sen}(t+b) \\ a \cos(t+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = a \operatorname{sen}(t+b) \\ y(t) = a \cos(t+b) \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$\varphi_{a,b}(t) = (x(t), y(t))$$

é o fluxo dos sistema. Vemos que:

$$\begin{aligned} \|\varphi_{a,b}(t) - (0,0)\| &= \|\varphi_{a,b}(t)\| \\ &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \\ &= \sqrt{(a \operatorname{sen}(t+b))^2 + (a \cos(t+b))^2} \\ &= \sqrt{a^2(\operatorname{sen}^2(t+b) + \cos^2(t+b))} \\ &= \sqrt{a^2} \\ &= |a|. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi_{a,b}(t)$ está a uma distância constante igual a $|a|$ do ponto crítico $(0,0)$.

A.3 Exemplo 3.9 do Capítulo 3

Considere os seguinte problemas de valores iniciais

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = r(\mu - r^2), \\ r(0) = r_0. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \theta' = 1, \\ \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Como mencionado vamos resolver primeiro problema de valor inicial utilizando o método de Bernoulli. Assim, nosso objetivo é transformar o primeiro P.V.I. em uma equação linear. Logo, se o expoente do primeiro P.V.I. fosse 0 ou 1, então a equação diferencial ordinária é linear. Daí, tome $r(t)$ uma solução dessa equação diferencial ordinária, então

$$r' = r\mu - r^3 \quad (\div r^3) \Rightarrow \underbrace{\frac{r'}{r^3}}_{(**)} = r^{-2}\mu - 1.$$

Seja $z = r^{-2}$, daí $z' = -2r^{-3}r'$. Agora, substituindo $z(t)$ e $z'(t)$ em (**), temos

$$\frac{z'}{-2} = \mu z - 1 \Rightarrow \underbrace{z' = -2[\mu z - 1]}_{(***)} = -2\mu z + 2.$$

Note que (***) é uma E.D.O. linear de 1ª ordem.

Assim, vamos resolver essa E.D.O. usando o fator integrante,

$$u(t) = e^{-\int a(t)dt} = e^{-\int (-2)\mu dt} = e^{2\mu t}.$$

Multiplicando z' por $u(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} z'(t)e^{2\mu t} &= -2\mu z(t)e^{2\mu t} + 2e^{2\mu t} \Rightarrow z'(t)e^{2\mu t} + 2\mu z(t)e^{2\mu t} = 2e^{2\mu t} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} [ze^{2\mu t}] = 2e^{2\mu t} \\ &\Rightarrow \int \frac{d}{dt} [ze^{2\mu t}] = \int 2e^{2\mu t} \\ &\Rightarrow ze^{2\mu t} = 2 \left(\frac{1}{2\mu} e^{2\mu t} + \frac{C}{2\mu} \right) \\ &\Rightarrow ze^{2\mu t} = \frac{1}{\mu} e^{2\mu t} + C \\ &\Rightarrow z = \frac{1}{\mu} + \frac{c}{\mu e^{2\mu t}}. \end{aligned}$$

Voltando para a variável r :

$$z = r^{-2} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{z} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{z}}.$$

Logo,

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\mu} + \frac{c}{\mu e^{2\mu t}}}}.$$

Mas $r(0) = r_0 \Rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\mu} + \frac{c}{\mu}}} \Rightarrow r_0^2 = \frac{\mu}{1+C} \Rightarrow C = \frac{\mu - r_0^2}{r_0^2} = \frac{\mu}{r_0^2} - 1$. Com isso,

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu e^{2\mu t}} \left(\frac{\mu}{r_0^2} - 1 \right)}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-2\mu t}}}.$$

Portanto,

$$r(t, r_0) = \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-2\mu t} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

O segundo P.V.I. pode ser resolvido pelo método de separação de variáveis.

$$\theta' = 1 \Rightarrow \int d\theta = \int 1 dt \Rightarrow \theta = t + C.$$

Mas $\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = C$, daí $\theta(t) = t + \theta_0$. Portanto,

$$\theta(t, \theta_0) = t + \theta_0.$$

Referências

- [1] ANDRONOV, A. A., LEONTOVICH, E. A., GORDON, I. I., AND MAIER, A. G. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971.
- [2] ARAKAKI, L. Q. Teoria dos centros e ciclicidade de pontos de Hopf para campos de vetores planares e tridimensionais. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2019. Dissertação (mestrado), Orientador: Cláudio Gomes Pessoa.
- [3] ARNOLD, V. I. *Ordinary Differential Equations*, 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Translated from the Russian by Roger Cooke.
- [4] CHRISTOPHER, C., LI, C., AND TORREGROSA, J. *Limit cycles of differential equations*, 2 ed. Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona. Birkhäuser, 2024.
- [5] COLONIUS, F. Dynamics and linear algebra. Notes of the IMA (Institute of Mathematics and Its Applications) PI Summer Program for Graduate Students: Linear Algebra and Applications, 2008.
- [6] DA SILVA, P. R. The Hopf bifurcation in a four parameter family of vector fields on the plane: the cusp case. *Métrica* 60 (1998), 7.
- [7] DA SILVA, P. R. Canard cycles and homoclinic bifurcation in a 3 parameter family of vector fields on the plane. *Publicacions Matemàtiques* 43 (1999), 163–189.
- [8] DUMORTIER, F. Singularities of vector fields on the plane. *Journal of Differential Equations* 23 (1977), 53–106.
- [9] DUMORTIER, F., LLIBRE, J., AND ARTÉS, J. C. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Universitext. Springer, New York, 2006.
- [10] FULTON, W. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. University of Michigan, Ann Arbor, 2008. Revised version available online.

-
- [11] HAN, M. Liapunov constants and Hopf cyclicity of Liénard systems. *Annals of Differential Equations* 15, 2 (1999), 113–126.
- [12] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [13] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed. Springer, New York, 2013.
- [14] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, vol. 1. Springer Science & Business Media, 1991.
- [15] ROMANOVSKI, V., AND SHAFER, D. *The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach*, 1 ed. Birkhäuser Boston, MA, 2009.
- [16] SOTOMAYOR, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.