UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DEBORAH SILVA SILVEIRA

MATEMÁTICA COM BARBANTES: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS NÓS

SÃO CARLOS
2024

DEBORAH SILVA SILVEIRA

MATEMÁTICA COM BARBANTES: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS NÓS

Monografia do Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti

SÃO CARLOS
2024

Dedico aos meus pais, Regina e José Roberto.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por todo o amor e misericórdia que teve comigo durante toda a graduação, me oferecendo capacitação nos estudos e me ajudando a encarar e vencer todas as adversidades.

Gostaria de agradecer aos meus pais, por sempre me apoiarem, acreditarem em mim, pela motivação ao longo do desenvolvimento do presente trabalho e, principalmente, ao longo da graduação. É graças a eles que cheguei até aqui.

Agradecer às minhas amigas, que estiveram ao meu lado nessa caminhada e de alguma forma colaboraram na conclusão deste trabalho, bem como nos diversos surtos ao longo da graduação. Deixo o meu agradecimento e gratidão.

E por fim, agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti, por todos os materiais disponibilizados, pelas reuniões, aulas de mágicas e correções necessárias.

RESUMO

Este trabalho visa apresentar uma proposta de ensino da Teoria dos Nós por meio de mágicas e brincadeiras com barbante, introduzindo conceitos matemáticos de maneira lúdica na Educação Básica. Inicialmente, será feita uma contextualização da história e relevância da Teoria dos Nós; posteriormente, serão propostas mágicas e brincadeiras envolvendo barbante, que servirão como ferramentas para a compreensão dos conceitos estudados, promovendo benefícios como desenvolvimento da coordenação motora e raciocínio lógico. Uma análise das diretrizes curriculares nacionais será realizada, demonstrando a contribuição da proposta para os objetivos educacionais. Serão apresentadas questões de competições matemáticas como Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e Concurso Canguru de Matemática, destacando a aplicabilidade prática dos conhecimentos. O trabalho foi aplicado em uma escola estadual, tanto em aula regular, buscando tornar o aprendizado mais envolvente, quanto em formato de oficina, permitindo a exploração prática dos nós para promover uma educação abrangente, significativa e divertida.

Palavras-chave: Teoria dos Nós. Matemática com barbante. Ensino de Matemática. Educação Básica.

ABSTRACT

This work aims to present a proposal for teaching Knot Theory through magic tricks and games with yarn, introducing mathematical concepts in a playful way in Basic Education. Initially, there will be a contextualization of the history and relevance of Knot Theory; subsequently, magic tricks and games involving yarn will be proposed, serving as tools for the understanding of the studied concepts and promoting benefits such as the development of motor coordination and logical reasoning. An analysis of national curriculum guidelines will be conducted, demonstrating the proposal's contribution to educational objectives. Questions from mathematical competitions such as the Brazilian Mathematical Olympiad for Public Schools (OBMEP) and the Kangaroo Mathematics Contest will be presented, highlighting the practical applicability of the knowledge. The work was implemented in a state school, both in regular classes, aiming to make learning more engaging, and in workshop format, allowing the practical exploration of knots to promote comprehensive, meaningful, and enjoyable education.

Keywords: Knot Theory. Math with string. Teaching Mathematics. Basic Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 A HISTÓRIA DOS *NÓS* AO LONGO DOS SÉCULOS

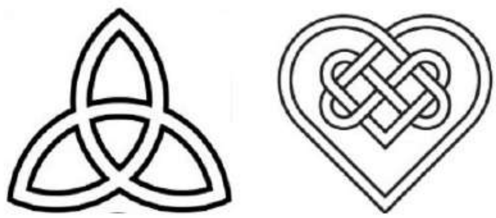
Os *nós* têm desempenhado um papel fundamental na vida humana por milhares de anos. Antigamente, as pessoas utilizavam os nós para prender suas vestimentas e se proteger dos elementos da natureza.

Eles são um elemento importante na arte e cultura celta. Os celtas, viveram por volta de 1200 a.C. e 500 d.C., nas regiões que compreendiam desde a Península Ibérica e Ilhas Britânicas até a Ásia. O nó celta é “um laço que não tem começo ou fim e está associado à interconectividade” (Rodrigues, 2023, n.p.).

> [...] esse símbolo apresenta uma espécie de fio torcido em um determinado padrão. Ele é conhecido por ser um laço que não tem começo ou fim. Ou seja, isso é um prenúncio para o seu verdadeiro significado, que é representar a interconectividade da vida e, ainda, o fato da eternidade (Rodrigues, 2023, n.p.).

Um exemplo, é o nó triquetra, apresentado na figura abaixo; composto por 3 arcos, é frequentemente associado à representação da Santíssima Trindade. O número três também possui significado sagrado na mitologia celta, e outras interpretações dos três arcos incluem conceitos como vida, morte e renascimento; a terra, o céu e o mar; bem como o passado, presente e futuro. O nó do amor, com dois corações entrelaçados, é considerado um símbolo de afeto frequentemente trocado entre amantes, em uma tradição que se assemelha à nossa moderna troca de anéis.

Figura 1.1 – Nó triquetra e Nó do amor



Fonte: Little Aes Bakery (2021, n.p.)[1]

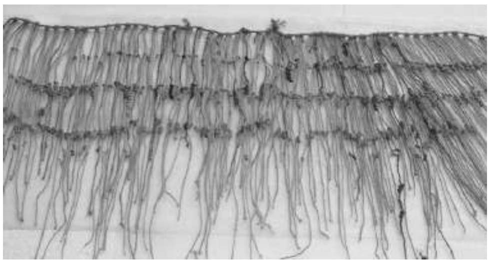
Existem algumas lendas associadas a nós, como é o caso da lenda do "Nó Górdio", com origem no século VIII a.C. Coaracy (2008) revela que, de acordo com a história, o rei da Frígia veio a óbito sem deixar descendentes. Ao consultar o Oráculo, lhe foi informado que o próximo governante seria aquele que chegasse à cidade em uma carroça puxada por bois. Essa profecia foi realizada por um camponês chamado Górdio, que foi coroado rei. Para não esquecer suas origens

[1] Disponível em: <https://littleraesbakery.com/2021/03/09/history-of-celtic-knots/>. Acesso em: 06 de out. de 2023.

humildes, ele colocou a carroça que o havia levado à coroa no templo de Zeus e a amarrou em uma coluna com um nó impossível de ser desatado. Górdio governou por um longo tempo e, após sua morte, seu filho Midas assumiu o trono e expandiu o império. Entretanto, Midas também faleceu sem deixar herdeiros, e o Oráculo anunciou que aquele que conseguisse desatar o nó de Górdio governaria toda a Ásia Menor. Passaram-se quinhentos anos sem que ninguém conseguisse desatar o nó, até que Alexandre, o Grande, passou pela Frígia e ficou interessado na história. Ele foi até o templo de Zeus para observar o nó e, após analisá-lo minuciosamente, retirou sua espada e cortou o nó. A lenda do Nó Górdio deu origem à expressão "cortar o nó górdio", que significa resolver um problema complexo de maneira simples e eficaz.

Os incas, civilização pré-colombiana que se desenvolveu na região dos Andes, na América do Sul, entre os séculos XIII e XVI, são conhecidos por criar uma sociedade amplamente organizada e complexa. Eles também eram conhecidos por seu sistema de comunicação, que se baseava em uma rede de estradas e mensageiros que podiam se mover rapidamente por todo o império. Era utilizada uma técnica de registro de informações chamada de *quipu*, que consistia em nós amarrados em cordas que poderiam ter diferentes cores e espessuras. Os quipus eram usados para registrar dados como censos populacionais, registros comerciais e histórias orais. Os nós simbolizavam números e informações importantes, e as cordas eram organizadas de forma a estabelecer padrões e conexões entre as informações documentadas. Os cordões horizontais simbolizavam categorias contábeis, enquanto os cordões verticais, distintos em cores, representavam as contas contábeis individuais, sendo cada cor associada a uma conta específica.

Figura 1.2 – Cordas com nós do Império Inca



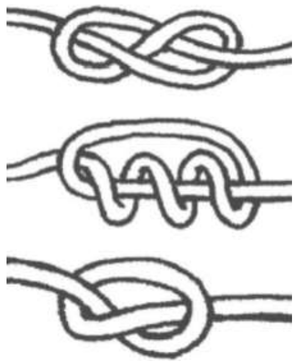
Fonte: G. Urton - University of Chicago

Figura 1.3 – Quipu

Fonte: iStockPhoto

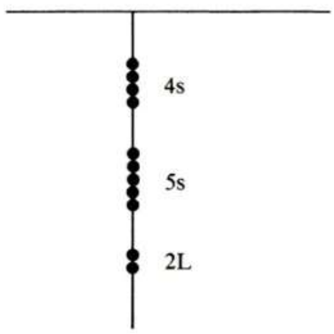
De acordo com Ascher e Ascher (1981) as cordas tinham diferentes nós amarrados em sua extensão, e esses nós, ao longo dos quipus, representavam os números. Isto é, em cada corda havia um agrupamento de nós e a coleção de aglomerados em cada corda formava a representação simbólica de um número, ou seja, o tipo de nó utilizado em uma posição específica esclarece o valor que ela representa. A figura 1.4 apresenta respectivamente: um nó de figura oito (E), que representa o número 1; no meio um nó longo (L), que varia de 2 a 9 de acordo com a quantidade de voltas; e embaixo um nó simples (s) que expressa as unidades, dezenas, centenas e milhares.

Figura 1.4 – Cifras e nós



Fonte: Baulenas (2022, n.p.)

Figura 1.5 – Representação do número 452



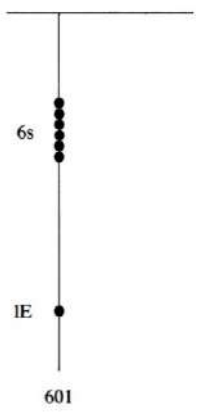
Fonte: Ascher e Ascher (1981, p. 30)

Na figura 1.5, lendo de cima para baixo vemos um cordão pendente com três posições de agrupamento contendo 4 nós simples, 5 nós simples e um nó longo de 2 voltas. Na nossa notação, seria interpretado como:

$$(4 \cdot 100) + (5 \cdot 10) + (2 \cdot 1) = 452$$

De maneira simplificada, para simbolizar o 0, é deixado um espaço em branco, isto é, sem nós, onde se encontraria o zero; a figura 1.6 traz um exemplo disso, representando o número 601.

Figura 1.6 – Representação do número 601



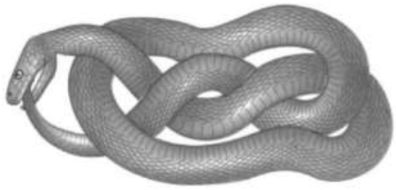
Fonte: Ascher e Ascher (1981, p. 30)

O físico britânico William Thomson (1824-1907), amplamente reconhecido como Lord Kelvin, se empenhou a contemplar as questões fundamentais associadas à estrutura da matéria, uma vez que essas questões se dividiam em dois campos opostos: aqueles que apoiavam a chamada teoria corpuscular, defendendo que a matéria é constituída de átomos, isto é, pequenos corpos rígidos que ocupam uma posição precisa no espaço, e aqueles que concebiam a matéria como uma superposição de ondas dispersas no espaço-tempo. Com o objetivo de conciliar essas duas teorias, em 1860, ele elaborou a teoria dos "átomos do vórtice". Segundo a teoria de Kelvin, os átomos não consistiam em pontos rígidos, mas sim em pequenos nós.

> [...] um átomo é como uma onda que, em vez de se dispersar em todas as direções, se propaga como um feixe estreito que se curva acentuadamente de volta sobre si mesmo - como uma cobra mordendo o próprio rabo. Mas essa cobra poderia se contorcer de maneira bastante complicada antes de se morder, formando assim um nó (Sossinsky, 2002, p. 1, tradução nossa)[2].

[2] No original: “Thus an atom is like a wave that, instead of dispersing in all directions, propagates as a narrow beam bending sharply back on itself-like a snake biting its tail. But this snake could wriggle in a fairly complicated way before biting itself, thus forming a knot.”

Figura 1.7 – Modelo de um átomo



Fonte: Sossinky (2002, p.2)

O teórico em questão sustentava a ideia de que as características físicas e químicas particulares dos átomos eram determinadas pela disposição dos nós que os integravam. Para formular sua teoria, Kelvin precisou classificar os diversos tipos de nós possíveis, utilizando a matemática dos nós como uma ferramenta metodológica. Nesse sentido, foi necessário inicialmente efetuar a classificação dos nós para, posteriormente, estabelecer a relação entre cada tipo de nó com um átomo específico. Sossinsky (2002) traz como exemplos o trevo, o oito deitado e o nó trivial, apresentados na Figura 1.8; eles foram utilizados como modelos para representar o carbono, o oxigênio e o hidrogênio, respectivamente.

Figura 1.8 – O trevo, o oito deitado e o nó trivial

Fonte: Sossinky (2002, p. 3)

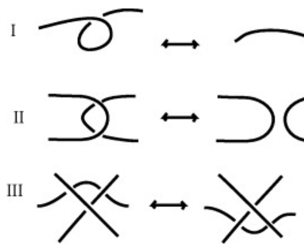
Peter Guthrie Tait (1831 - 1901) apoiou a "teoria do vórtice" e começou a estudar partículas como "torções topológicas minúsculas ou nós na estrutura espaço-tempo". Ele criou as primeiras tabelas de classificação de nós e publicou uma tabela de nós com até dez cruzamentos. Tait também propôs as conjecturas de Tait, que, embora tenham sido contestadas, foram importantes e motivaram os primeiros teóricos do nó. É explicado, posteriormente, o conceito de cruzamento.

Dmitri Mendeleiev (1834-1907) realizou uma descoberta inesperada, a qual evidenciou a existência de relações altamente simplificadas, que até então não haviam sido percebidas, entre as propriedades químicas dos elementos. Em razão disso, em 1869, ele publicou o que atualmente é denominado de tabela periódica dos elementos. Embora tenha demorado certo tempo para que tal feito fosse plenamente reconhecido na Europa Ocidental, uma vez que isso ocorreu, o conceito de átomos como nós foi abandonado. Diversos matemáticos haviam previamente se dedicado ao estudo de nós, dentre eles Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que de acordo com Santos (2021) se dedicou à classificação de curvas planas fechadas que possuem um número limitado de auto-interseções, além de ter trabalhado na catalogação de nós e ligações; no entanto, foi a teoria desenvolvida por Kelvin que despertou significativo interesse na investigação de potenciais nós.

Por volta de 1920, o matemático alemão Kurt Reidemeister (1893-1971), autor do que viria a ser o primeiro livro sobre a matemática dos nós "Knottentheorie" começou a estudar profundamente os nós, mais especificamente se questionando como eles poderiam ser classificados. De acordo com Sossinsky (2002) definir um nó através de equações ou como uma curva poligonal fechada com base nas coordenadas dos vértices sucessivos não colaborou, uma vez que, em ambos os casos a informação não possibilita ver ou manipular o nó.

Ver um nó, na prática, significa fazer a projeção em um plano apropriado para então obter o que é chamado de diagrama de nó. Manipular a corda que determina a posição do nó faz com que seu diagrama sofra modificações contínuas, o que permite seguir a evolução de suas posições no espaço. A questão motivadora para Reidemeister foi como seria se o processo fosse invertido, ou seja, a projeção poderia ser modificada continuamente de tal maneira que se obtenha todas as possíveis posições da corda no espaço? Para que isso ocorra, basta realizar um número finito de manipulações no diagrama do nó sem mudar o número e a disposição relativa dos pontos de cruzamento. A figura 1.9 apresenta as três operações denominadas de movimentos de Reidemeister.

Figura 1.9 – Movimentos de Reidemeister



Fonte: ResearchGate

Mais adiante, será discutido de forma mais precisa e formal o conceito desses movimentos, porém, de forma sucinta, os movimentos de Reidemeister estão envolvidos na representação da manipulação de um nó. A ideia de Reidemeister era classificar nós utilizando os movimentos. Então se iniciou o desenvolvimento de um algoritmo que determina se dois nós são equivalentes. Porém, se o algoritmo fosse aplicado a dois nós não equivalentes, ele iria prosseguir indefinidamente; mas a dúvida se encontrava em: o nó era não trivial ou o computador precisava de mais tempo para encontrar a solução? A partir disso, o algoritmo não resolveu o problema de classificar nós, porém o teorema colaborou no desenvolvimento dos estudos de invariantes de nós de Vaughan Jones (1952- 2020), Louis Kauffman (1945 -) e seus seguidores.

“Para que a função proposta de um diagrama de nó na forma de um novo invariante seja de fato invariante, a função não deve mudar durante o processo de manipulação de nós” (Sossinsky, 2002, p. 45, tradução nossa)[3]. Segundo o autor, a falha do algoritmo para desembaraçar nós mencionado acima é relativa. Embora não seja considerado um algoritmo verdadeiro para desembaraçar nós do ponto de vista teórico, já que pode continuar indefinidamente sem fornecer uma resposta, do ponto de vista prático, este algoritmo e suas modificações recentes podem ser utilizados como uma ferramenta relativamente eficiente que muitas vezes permite que um computador desembarace nós que não podem ser desfeitos "manualmente" a menos que recorramos ao método que Alexandre, o Grande, utilizou no nó górdio: cortá-lo.

Em 1980 os matemáticos Clifford Hugh Dowker (1912 - 1982) e Morwen Thistlethwait, pioneiros na informatização dos problemas de enumeração de acordo com Santos (2021), conseguiram elaborar uma tabela de nós com até 13 cruzamentos. Logo depois, por volta de 1990, Jim Hoste colaborou no trabalho para enumerar todos os alternados de 14 cruzamentos. Juntos, os três estudiosos encontraram 1.701.936 nós primos distintos. "Os recursos computacionais facilitaram o processamento de dados mas também permitiram o surgimento de uma quantidade absurdamente alta de novos nós" (Santos, 2021, p. 28).

Conforme Colli (2004, p.1) afirma “Um nó não é uma curva particular, mas todo o conjunto de posições que ela pode assumir se for deformada de acordo com esses critérios”. A Teoria dos Nós se tornou um ramo da Matemática que se encontra em constante evolução, o principal problema consiste em classificá-los, em outras palavras, identificar a qual nó da lista cada curva se refere. Apesar dos diversos métodos para classificar nós, estudiosos afirmam que nenhum deles é ainda um método completo.

A Teoria dos Nós se desenvolveu no âmbito da matemática pura e atualmente apresenta várias aplicações. A física Elisabetta Matsumoto, professora do Instituto de Tecnologia da Geórgia, nos Estados Unidos, de acordo com Chandrasekaran (2021), utiliza a teoria dos nós para estudar a matemática do tricô; ela pesquisa como os nós influenciam as propriedades têxteis, alterando a elasticidade, a resistência mecânica e a estrutura 3D do tecido final. Dias (2004) cita as aplicações ao nível da física, na teoria das supercordas, teoria essa que explica as partículas elementares como pequenos enlaces e à teoria quântica. A autora também traz a aplicação a respeito da compressão da estrutura e propriedades das grandes moléculas, tais como o comportamento das moléculas de DNA.

[3] No original: “In order for the proposed function of a knot diagram in the form of a new invariant to be truly invariant, the function must not change during the process of manipulating knots.”

2 TÓPICOS DA TEORIA DOS NÓS

Para abordar as definições e resultados analisados neste capítulo foram utilizados os livros (Adams, 1994), (Adams, 2004) , (Livingston, 1993) e (Santos, 2021), bem como a tese de (Dias, 2004) e os trabalhos (Oliveira, 2018) e (Colli, 2004).

2.1 NÓS, PROJEÇÕES E CRUZAMENTOS

Explicitar uma definição clara para um nó sem adentrar nos detalhes da Topologia não é uma tarefa simples. Tomemos como exemplo Dias (2004, p. 16) que o define como: “Seja f uma aplicação contínua e injetiva da circunferência usual S^1 em $\mathbb{R}^3$. A imagem $K = f(S^1)$ diz-se um nó".

Encontramos em Adams (1994, p. 2, tradução nossa)[1] a seguinte descrição: “Um nó é apenas um laço enovelado de corda, exceto que pensamos na corda como não tendo espessura, com sua seção transversal sendo um único ponto. O nó é então uma curva fechada no espaço que não se intersecta em nenhum lugar”.

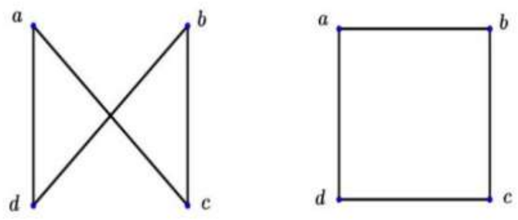
Livingston (1993, p. 15, tradução nossa)[2] o caracteriza como: “Um nó é uma curva poligonal simples e fechada em $\mathbb{R}^3$”.

Para essa definição, é necessário trazer alguns pré-requisitos. Seguindo a linha de Santos (2021) considere dois pontos a e b em $\mathbb{R}^3$, onde o segmento de reta que une esses pontos é denotado por $\overline{ab}$ e suponha um conjunto de pontos distintos $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ em $\mathbb{R}^3$. A união dos segmentos $(\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, \ldots, \overline{a_{n-1}a_n}, \overline{a_na_1})$ é uma curva poligonal fechada. Nesse caso, é utilizado somente a curva simples, isto é, quando cada segmento de reta intersecta exatamente outros dois por seus pontos extremos, para evitarmos cruzamentos inconvenientes. A figura 2.1 ilustra respectivamente um exemplo de curva poligonal fechada e de uma curva poligonal fechada e simples.

1 No original: “A knot is just such a knotted loop of string, except that we think of the string as having no thickness, its cross-section being a single point. The knot is then a closed curve in space that does not intersect itself anywhere.”

2 No original: “A knot is a simple closed polygonal curve in $\mathbb{R}^3$.”

Figura 2.1 – Curva poligonal fechada e curva poligonal fechada e simples, respectivamente



Fonte: Santos (2021, p. 32)

Definição 2.1. Um nó é uma curva simples fechada no $\mathbb{R}^3$.

Uma curva fechada é uma função contínua f do intervalo $[0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$, tal que $f(0) = f(1)$, isto é, f é injetora no intervalo $[0, 1)$.

Figura 2.2 – Um nó em $\mathbb{R}^3$

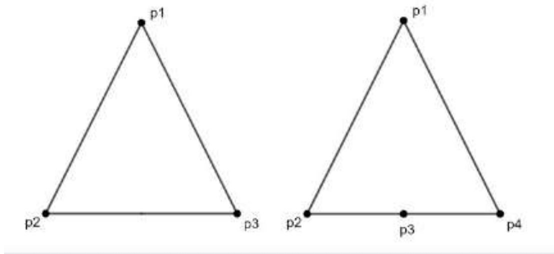
Fonte: Adaptado de ResearchGate

A continuidade é fundamental para garantir que a curva não possua "quebras" ao longo de sua extensão, isto é, sem que haja saltos, buracos ou pontos isolados. Ela garante que a curva possa ser percorrida de forma ininterrupta e suave, sem mudanças abruptas na direção ou posição.

Definição 2.2. Um nó poligonal é uma curva fechada simples e poligonal em $\mathbb{R}^3$

De acordo com Santos (2021), dois ou mais conjuntos ordenados de pontos podem determinar um mesmo nó poligonal. Se tomarmos em consideração três pontos consecutivos e colineares, e em seguida eliminarmos o ponto localizado entre os outros dois, ainda assim preservaremos o mesmo segmento de reta que contém os pontos, ou seja, o mesmo polígono, porém, constituído por um conjunto distinto do original.

Figura 2.3 – Nó trivial poligonal determinado por conjuntos distintos de pontos



Fonte: Elaborado pela autora

Definição 2.3. Se o conjunto ordenado $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ define um nó poligonal, e nenhum subconjunto não próprio ordenado define o mesmo nó poligonal, então cada um dos elementos deste conjunto são os vértices do nó poligonal.

Definição 2.4. O nó trivial é o nó poligonal que fica totalmente definido à custa de três pontos não colineares.

Figura 2.4 – Nó trivial, nó trevo (trifólio) e nó figura oito

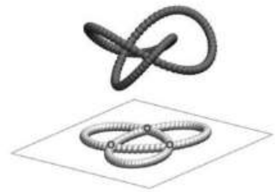
Fonte: Dias (2004, p. 16)

De acordo com Adams (1994) o nó trivial é o nó mais simples de todos, sendo conhecido também como "unknot", em tradução livre "nó desembaraçado". O próximo nó mais simples, é o nó trevo, também conhecido como nó trifólio.

Definição 2.5. Uma projeção é a representação de um nó em um plano $2D$.

A projeção nesse caso, é como se pegássemos uma lanterna e fizéssemos uma representação de sua sombra.

Figura 2.5 – Origem de uma projeção



Fonte: Oliveira (2018, p. 2)

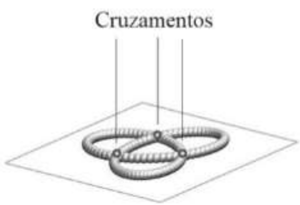
De acordo com Santos (2021) as projeções, reduzem a dimensão e apresentam uma visualização simplificada, o que possibilita uma melhor manipulação.

Segundo Livingston (1993), nós diferentes podem ter a mesma projeção. “Uma vez que a curva é projetada no plano, não fica mais claro quais partes do nó passaram sobre outras partes” (Livingston, 1993, p. 21, tradução nossa)[3].

A fim de compensar essa perda de informação, são incorporadas lacunas nos desenhos das projeções, revelando quais partes do nó se encontram abaixo de outras. Esses desenhos, conhecidos como **diagramas de nó**, representam visualmente essa relação.

Definição 2.6. Um cruzamento é o local da projeção onde dois segmentos de um mesmo nó se cruzam.

Figura 2.6 – Cruzamentos de uma projeção



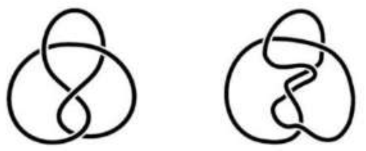
Fonte: Oliveira (2018, p. 2)

Se uma projeção não possuir cruzamentos, ela representa o nó trivial.

Definição 2.7. Um nó é dito alternado, se o seu diagrama apresenta cruzamentos que aparecem alternadamente por cima e por baixo ao longo da corda.

[3] No original: “Once the curve is projected into the plane, it is no longer clear which portions of the knot passed over other parts.”

Figura 2.7 – Respectivamente, um nó alternado e um nó não alternado

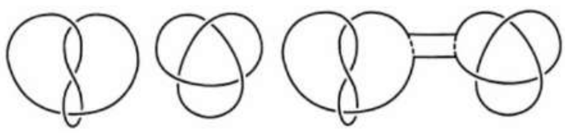


Fonte: Santos (2021, p. 41)

2.2 COMPOSIÇÃO DOS NÓS

Definição 2.8. Dada duas projeções de nós, podemos remover um pequeno pedaço de qualquer ponto de ambas as projeções, e então conectar os 4 pontos que restaram. O nó resultante é denominado de nó composto.

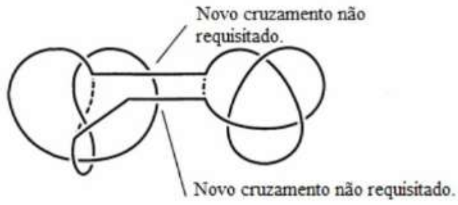
Figura 2.8 – Construção de um nó composto



Fonte: Oliveira (2018, p. 3)

Conforme afirma Oliveira (2018), são escolhidos arcos da parte externa da projeção, para evitar a criação de novos cruzamentos. O nó composto pode ser representado como a composição de dois nós, onde nenhum dos dois é trivial. A composição de um nó qualquer H com um nó trivial, resultará novamente no nó H. De acordo com Adams (2004), é impossível realizar a composição de dois nós não triviais e obter um nó trivial.

Figura 2.9 – Construção de cruzamentos não requisitados



Fonte: Oliveira (2018, p. 3)

Definição 2.9. Nós primos são nós que não são compostos, isto é, não podem ser expressos como a composição de dois ou mais nós não triviais.

> Podemos entender os nós primos fazendo uma analogia com os números primos. Por exemplo, o número 3 é um número primo porque não pode ser dividido por nenhum fator, exceto ele mesmo e o número 1. Com os nós primos é a mesma coisa, se um nó é primo ele não pode ser decomposto em dois nós que não sejam triviais (Oliveira, 2018, p. 3).

Um exemplo de nó primo, é o trifólio, também conhecido como nó trevo, apresentado na Figura 2.4.

2.3 MOVIMENTOS DE REIDEMEISTER

Sabemos que um mesmo nó pode ter mais de uma projeção, suponhamos que seja este o caso, ou seja, temos duas projeções do mesmo nó. Se fizermos um nó de corda que ocasionou na primeira projeção, podemos rearranjar a corda para que ela se assemelhe à segunda projeção. Os teóricos do nó chamam o movimento da corda através do espaço tridimensional sem deixá-lo passar através de si como uma isotopia de ambiente. De acordo com Oliveira (2018) “isotopia” se refere a deformação da corda, enquanto a palavra “ambiente” ao fato da corda estar sendo deformada através do espaço tridimensional que está.

Em uma isotopia de ambiente, não podemos encolher uma parte do nó para tentar se livrar do nó; devemos pensar em um nó feito de corda, pois assim será perceptível que não é possível o puxar a um ponto que o nó desapareça, portanto, uma isotopia de ambiente não nos permite se livrar de um nó dessa maneira. Ou seja, é impossível reduzir um nó a um único ponto, pois ele persiste por isotopia. Oliveira (2018, p. 4) define isotopia planar como uma “deformação de uma projeção de nó”, a palavra “planar” é usada pois a deformação do nó é realizada no plano de projeção. Os movimentos de Reidemeister, são formas de mudar a projeção ou o diagrama de um nó, alterando a relação entre seus cruzamentos. Importante ressaltar, que os movimentos nunca irão alterar o nó, somente a projeção e o diagrama.

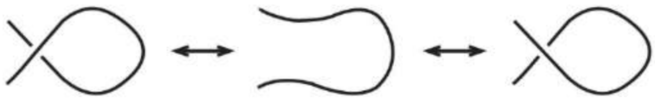
Tal como já foi mencionado anteriormente, quem definiu estes movimentos foi o alemão Kurt Reidemeister (1893 - 1971), daí o nome.

Definição 2.10. Um movimento de Reidemeister é uma forma de alterar o diagrama de um nó que permite deformar os arcos ou alterar a relação entre os cruzamentos.

$[R_0]$ Movimento simples de deformação dos arcos sem alteração de cruzamentos.

$[R_1]$ Movimento que introduz ou remove uma torção no diagrama.

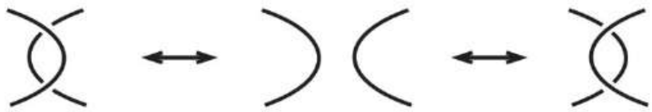
Figura 2.10 – Movimento $[R_1]$ - Torção no diagrama



Fonte: Dias (2004, p. 21)

$[R_2]$ Movimento que introduz ou remove dois cruzamentos que cruzam ambos por cima ou ambos por baixo.

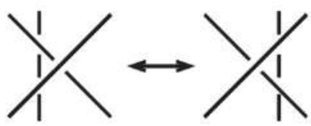
Figura 2.11 – Movimento $[R_2]$ - Remoção ou introdução de cruzamentos



Fonte: Dias (2004, p. 22)

$[R_3]$ Movimento que faz passar um dos arcos do diagrama por cima ou por baixo de um cruzamento.

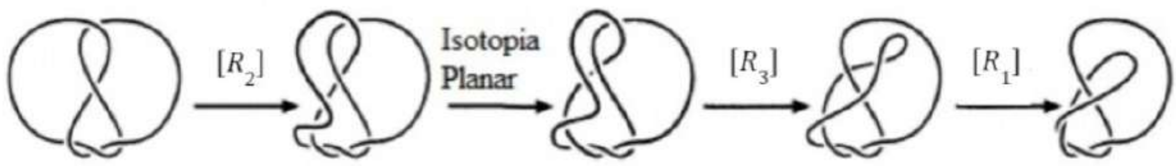
Figura 2.12 – Movimento $[R_3]$ - Passagem do arco por cima ou por baixo do cruzamento



Fonte: Dias (2004, p. 22)

Observe na figura 2.13, que o diagrama do nó muda, mas o nó continua o mesmo.

Figura 2.13 – A figura continua a mesma

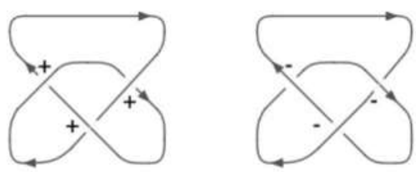


Fonte: Oliveira (2018, p. 6)

Um nó é chamado de **anfiquiral** se, a partir de uma sequência de movimentos de Reidemeister se consegue chegar de uma projeção de um nó até a sua espelhada.

O nó trevo, não é equivalente a sua projeção espelhada, como podemos observar na figura 2.14.

Figura 2.14 – Projeções espelhadas do nó trevo



Fonte: Adaptado de Oliveira (2018, p. 5)

Teorema 2.1. *Dois diagramas* (K_1) *e* (K_2) *representam nós equivalentes se, e somente se, existe uma sequência de movimentos de Reidemeister que transforma* K_1 *em* K_2.

Apesar do teorema ser de fácil compreensão, sua prova é complexa e envolve topologia combinatória, portanto não cabe ao objetivo desta monografia.

A figura 2.15 apresenta uma transformação através de movimentos de Reidemeister.

Figura 2.15 – Sequência de movimentos de Reidemeister

Fonte: Santos (2021, p. 43)

É impossível transformar o nó trevo no nó trivial utilizando somente os movimentos de Reidemeister, a menos que cortemos algum ponto, o torcêssemos e depois voltássemos a colar no mesmo ponto. A prova para este fato envolve a análise das propriedades invariantes sob as transformações de Reidemeister, mais especificamente um conceito denominado Tricolorabilidade, que iremos discorrer mais adiante.

Figura 2.16 – Transformação do nó trevo no nó trivial por meio de um rompimento

Fonte: Dias (2004, p. 16)

2.3.1 Equivalência

"Dois nós são equivalentes se um deles puder ser deformado no outro, sem cortar e abrir ou sem passar um trecho da corda por dentro de outro" (Adams, 2004, p. 7, tradução nossa)[4].

Se dois nós são equivalentes, há uma sequência de movimentos de Reidemeister que leva uma projeção de um nó em uma projeção de outro nó, independentemente do número de movimentos de Reidemeister necessários.

Segundo Oliveira (2018, p. 2) "duas projeções podem ser equivalentes se o nó que elas representarem forem o mesmo".

[4] No original: "Two knots are equivalent if one can be deformed to make the other without cutting the knot open or passing one strand through another."

2.4 NÓS ORIENTADOS E INVERTÍVEIS

Definição 2.11. Um nó orientado apresenta uma direção escolhida de circulação.

Figura 2.17 – Nó oito orientado

Fonte: Adaptado de Santos (2021, p. 44)

Para cada cruzamento, é atribuído um sinal, conforme explicitado na figura 2.18.

Figura 2.18 – Sinais para cruzamento

Fonte: Colli (2004, p. 10)

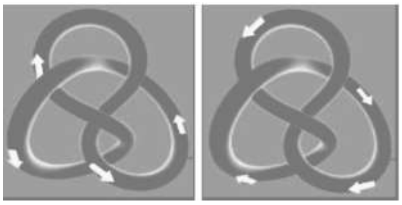
A figura 2.19 traz o nó figura oito com os sinais no cruzamento.

Figura 2.19 – Nó oito com sinais nos cruzamentos

Fonte: Adaptado de Santos (2021, p. 45)

Definição 2.12. O inverso de um nó poligonal K definido por um conjunto ordenado de pontos $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ é o nó $-K$ definido por $(p_n, \ldots, p_2, p_1)$

Figura 2.20 – Nó K e nó -K



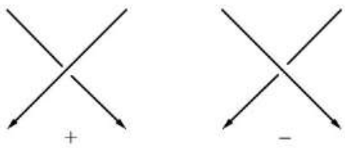
Fonte: Adaptado de Santos (2021, p. 46)

Definição 2.13. A contorção $W(D)$ de um diagrama orientado D, é a soma de sinais de todos os cruzamentos.

Proposição 2.1. *Considere os nós K e $-K$ e seus respectivos diagramas D_K e D_{-K} . Então* $W(D_K) = W(D_{-K})$.

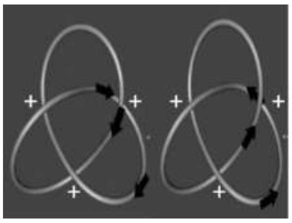
Demonstração. Considerando um nó K arbitrário, os cruzamentos possíveis de seu diagrama D_K são aqueles representados na figura 2.18. Se invertermos a orientação da projeção D_K obtemos D_{-K}, de modo que os seus novos cruzamentos serão apresentados conforme a figura 2.21. Observe que a alteração na orientação do diagrama não modifica os sinais dos cruzamentos, portanto, $W(D_K) = W(D_{-K})$. □

Figura 2.21 – Cruzamentos do nó -K



Fonte: Santos (2021, p. 47)

Figura 2.22 – Sinais do nó trifólio



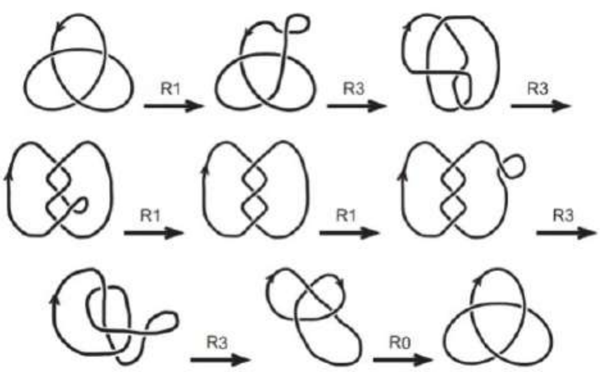
Fonte: Adaptado de Santos (2021, p. 47)

A figura 2.22 apresenta os sinais do nó trifólio (nó trevo). Portanto, tomando o nó trifólio e seu inverso como exemplo, vemos que $W(D_K) = 3 = W(D_{-K})$.

Definição 2.14. Um nó K é classificado como invertível se K e $-K$ são equivalentes.

O nó trevo é invertível, pois, se tomarmos um diagrama com orientação definida, é possível aplicar uma sequência de movimentos de Reidemeister até inverter a sua orientação. A figura 2.23 apresenta essa transformação.

Figura 2.23 – Movimentos de Reidemeister na inversão do trevo orientado



Fonte: Dias (2004, p. 26)

Abaixo temos um exemplo de nó não invertível.

Figura 2.24 – Nó não invertível - 8_{17}

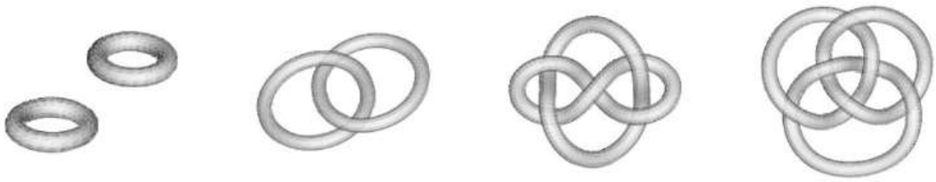
Fonte: Adaptado de Santos (2021, p. 49)

2.5 ENLACES

Definição 2.15. Um enlace é uma união finita de nós, onde cada nó é um componente do enlace.

De acordo com Dias (2004, p. 32) "Qualquer nó pode ser construído entrelaçando um pedaço de uma corda”. Porém, existem alguns nós que não podem ser obtidos entrelaçando apenas uma corda. Dois enlaces são considerados idênticos quando podemos transformar um no outro através dos Movimentos de Reidemeister, sem que eles se interceptem ao longo da transformação. Enlaces, podem também ser conhecidos como elos ou links.

Figura 2.25 – Enlace trivial com duas componentes, Elo de Hopf, Elo de Whitehead e Anéis de Borromeo.



Fonte: Dias (2004, p. 32)

2.6 INVARIANTES DE NÓS

Uma invariante de nós, na matemática, especificamente no campo da teoria dos nós é a quantidade definida para cada nó que é a mesma para nós equivalentes a ele. A investigação é motivada não somente pelo problema de distinção de um nó para outro, mas também para compreender as propriedades fundamentais de nós e as relações com outros ramos da matemática. Neste trabalho iremos abordar apenas três invariantes: a tricolorabilidade, o número de desembaraçamento e o número de cruzamentos.

2.6.1 Tricolorabilidade

A tricolorabilidade é um princípio básico da Teoria dos Nós. Conforme citado na seção 2.3 é impossível transformar o nó trivial no nó trifólio sem que em algum momento fizéssemos um corte no nó. A prova de que é impossível transformar o nó trifólio (ou nó trevo) no nó trivial somente com os movimentos de Reidemeister se dá por conta da tricolorabilidade. Iremos provar que há pelo menos um nó que é distinto do nó trivial, com base no conceito da tricolorabilidade.

Definição 2.16. Uma projeção de um nó ou de um enlace são tricoloráveis se pudermos colorir cada seus arcos de forma que:

I. Seja atribuída uma cor a cada cruzamento;

II. Se utilize pelo menos duas cores e no máximo três;

III. Para cada cruzamento, não se pode concorrer duas cores: ou concorre apenas uma ou as três.

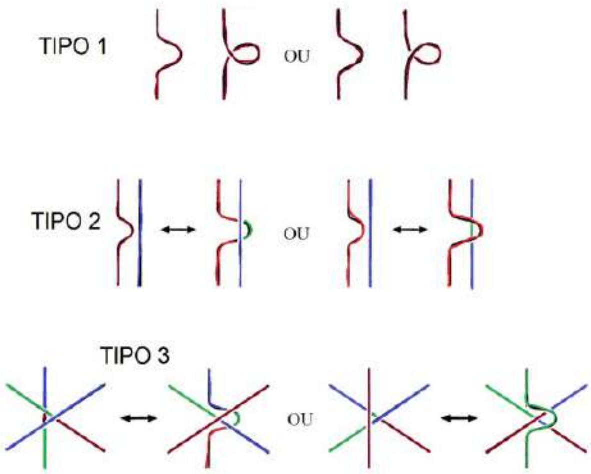
Como provamos que um nó é ou não tricolorável? Escolhemos um cruzamento na sua projeção e começamos a colorir por ele. Esse cruzamento começa com apenas uma cor. Agora, partimos do mesmo cruzamento escolhido, mas com três cores se encontrando nele. Segundo Oliveira (2018, p. 9) “na primeira projeção, o nó recebe em cada cruzamento, três cores diferentes; na segunda, ele recebe ou três cores diferentes ou apenas uma em cada cruzamento”. Portanto são tricoloráveis. É mostrado também que se uma projeção de um nó for tricolorável, todas as outras projeções também serão.

Os Movimentos de Reidemeister mantém a tricolorabilidade do nó.

Figura 2.26 – Enlace não tricolorável

Fonte: Oliveira (2018, p. 10)

Figura 2.27 – Conceito da Tricolorabilidade nos Movimentos de Reidemeister



Fonte: Oliveira (2018, p. 10)

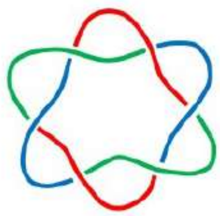
Ou toda projeção de um nó é tricolorável ou nenhuma das projeções é. No caso do nó trivial, nenhuma de suas projeções é tricolorável, ao passo que todas as projeções do nó trifólio são tricoloráveis. Logo, podemos dizer que o nó trevo e o nó trivial são distintos. Então, provamos que existe pelo menos um nó diferente do nó trivial.

Figura 2.28 – Duas projeções do nó trevo

Fonte: Oliveira (2018, p. 9)

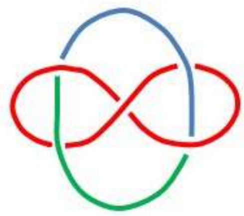
Definição 2.17. Um enlace é tricolor se os seus diagramas são tricolores.

Figura 2.29 – Enlace tricolor



Fonte: Santos (2021, p. 64)

Figura 2.30 – Enlace não tricolor



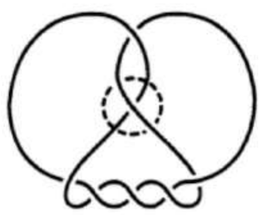
Fonte: Santos (2021, p. 64)

2.6.2 Número de Desembaraçamento

Definição 2.18. O número de desembaraçamento, conhecido também como número de desatamento, denotado por $u(K)$, consiste no número mínimo de mudanças de cruzamentos, cujo objetivo é transformar o nó correspondente no nó trivial.

A figura abaixo, apresenta um nó com o número de desembaraçamento igual a 1, pois se alterássemos o cruzamento que está sinalizado por uma linha pontilhada, o nó poderia ser transformado no nó trivial.

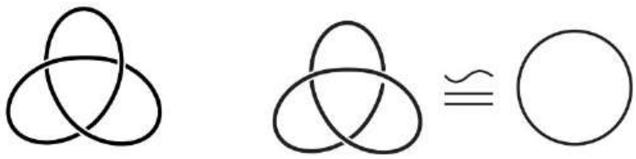
Figura 2.31 – Cruzamento que deve ser mudado



Fonte: Oliveira (2018, p. 24)

No caso do nó trifólio, $u(K) = 1$

Figura 2.32 – Troca de cruzamento no diagrama do nó trifólio



Fonte: Dias (2004, p. 45)

Teorema 2.2. *Se um nó K é tal que* $u(K) = 1$*, então K é um nó primo.*

2.6.3 Número de Cruzamento

Definição 2.19. Dado um nó K, o número de cruzamentos $c(K)$ é o menor possível dentre todos os diagramas desse nó. O diagrama que possui $c(K)$ cruzamentos denomina-se mínimo de K.

O nó 7_3 é um exemplo, ele possui 7 cruzamentos e sua projeção é diferente de todos os nós com menos de 7 cruzamentos.

Figura 2.33 – Nó 7_3

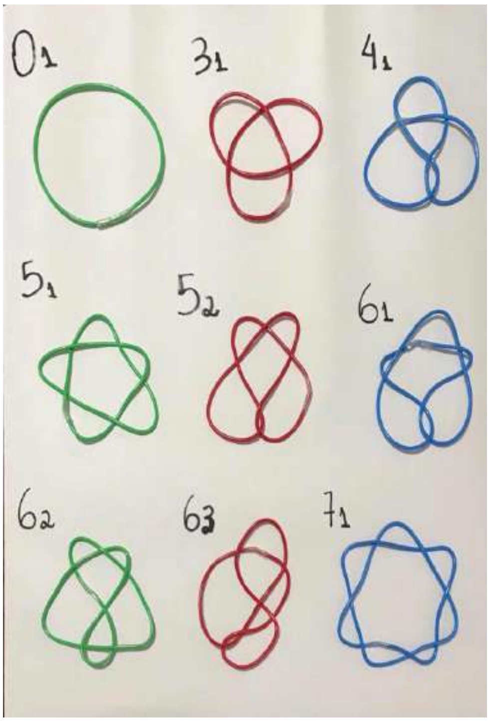
Fonte: Elaborado pela autora

De acordo com Oliveira (2018) é complicado determinar o número de cruzamentos, pois como podemos provar que uma projeção de 15 e 14 cruzamentos não são equivalentes uma vez que não se sabem todos os nós com 14 cruzamentos.

2.7 TABULAÇÃO DOS NÓS

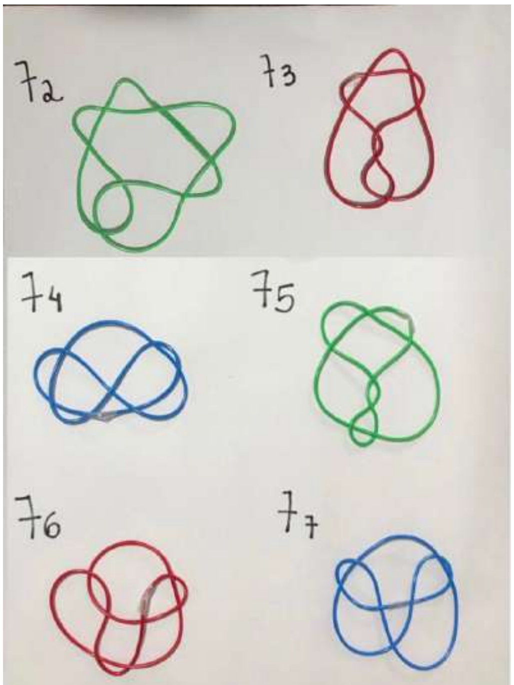
Como mencionado previamente, a Teoria dos Nós é um campo relativamente novo, tendo surgido no final do século XIX. Por volta de 1880, Thomas Penyngton Kirkman (1806-1895) realizou o primeiro trabalho de tabulação de projeções de nós. No entanto, sua escrita era complexa e de difícil compreensão. Apesar disso, Peter Guthrie Tait (1831-1901) utilizou as ideias de Kirkman para listar todos os nós alternados com até 10 cruzamentos. Essa foi a primeira vez que os nós foram tabulados com sucesso. As figuras 2.34 e 2.35 apresentam uma tabela de nós (primos) contendo até 7 cruzamentos; o primeiro número exibido representa o número de cruzamentos em cada nó, ao passo que o segundo número indica a posição na tabela.

Figura 2.34 – Tabela de nós: Parte 1



Fonte: Elaborado pela autora

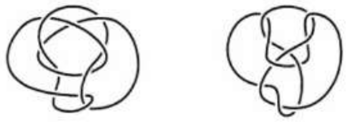
Figura 2.35 – Tabela de nós: Parte 2



Fonte: Elaborado pela autora

Charles Newton Little (1858 - 1923), engenheiro civil e professor da Universidade de Nebraska, dedicou-se à contagem dos nós não alternados. Após seis anos de trabalho árduo, em 1899, ele conseguiu publicar uma tabela contendo 43 nós não alternados com 10 cruzamentos. Essa tabela foi considerada correta por 75 anos. No entanto, em 1974, um matemático e um advogado de Nova York, Kenneth Albert Perko, fizeram uma descoberta surpreendente. Eles perceberam que dois nós da tabela de Little eram, na verdade, o mesmo nó. Esses nós ficaram conhecidos como o "par de Perko". Além disso, foi concluído que havia apenas 42 nós distintos de 10 cruzamentos na tabela de Little. Em seu estudo, Oliveira (2018, p. 11) afirma: "Little começou a publicar um censo de 11 nós alternados, que posteriormente foi descoberto conter onze omissões e uma duplicação".

Figura 2.36 – Par de Perko



Fonte: Oliveira (2018, p. 12)

Em 1917, Mary Gertrude Haseman (1889 - 1979) compilou em sua tese de doutorado uma lista contendo todos os nós anfiqueirais com 12 cruzamentos. Somente em 1927, dois matemáticos, Alexander e Briggs, forneceram a primeira prova de que os nós com até nove cruzamentos nas tabelas eram verdadeiramente distintos.

John Horton Conway (1937 - 2020), em 1969, desenvolveu uma nova notação para nós e a utilizou para determinar todos os nós primos com 11 ou menos cruzamentos, bem como todos os enlaces primos não separáveis com 10 ou menos cruzamentos. De acordo com Oliveira (2018), essa tabulação foi realizada manualmente, sem o auxílio de um computador.

Por volta de 1992, Jim Hoste e um grupo de estudantes do ensino médio, tiveram acesso a um supercomputador, enquanto Morwen Thistlethwaite retomou suas pesquisas na tabulação e desenvolveu a tabela para nós com até quinze cruzamentos. Esses dois grupos trabalharam separadamente para descobrir os nós com 16 cruzamentos. Embora as equipes tenham utilizado métodos diferentes, ambas chegaram ao mesmo número de nós com 16 cruzamentos, o qual foi mencionado no trabalho intitulado "Os primeiros 1.701.936 nós"[5].

[5] No original: “The first 1.701.936 knots”.

Tabela 2.1 – Tabulação dos nós (a)

Números de Cruzamentos	Número de nós primos
0	1
1	0
2	0
3	1
4	1
5	2
6	3
7	7
8	21
9	49
10	165
11	367
12	1.288
13	4.878
14	19.536
15	85.263
16	379.799
17	1.769.979
18	8.400.285
19	40.619.285
20	199.631.989
21	990.623.857
22	4.976.016.485

Fonte: Adaptado de Colli (2004, p. 21)

Os resultados da tabela acima, de acordo com Colli (2004) são retirados de um programa de computador denominado *"Math. Intelligencer"*. Já a tabela abaixo, foi retirada de Oliveira (2018), nela não estão contados o nó e a sua imagem espelhada.

Tabela 2.2 – Tabulação dos nós (b)

Números de Cruzamentos	Número de nós primos
3	1
4	1
5	2
6	3
7	7
8	21
9	49
10	165
11	552
12	2.176
13	9.988
14	46.972
15	253.293
16	1.388.705

Fonte: Oliveira (2018, p. 13)

> Em 2003, relatórios de Hoste indicavam a tabulação de todos os primos e alternados de 22 cruzamentos, realizada por S. Rankin, J. Schermann, e O. Smith, com inacreditáveis 6.217.553.258 nós. (Santos, 2021, p. 28)

Até o presente momento, não foi alcançado êxito na elucidação de uma fórmula que permita o cálculo preciso da quantidade de nós existentes com base nos cruzamentos efetuados.

3 BRINCADEIRAS E MÁGICAS COM BARBANTES

Malagutti e Sampaio (2008) afirmam que existem diversas maneiras de aproveitar um pedaço de barbante, abrangendo desde atividades puramente lúdicas até aquelas que incentivam a socialização e estimulam a imaginação, “apresentando aspectos geométricos curiosos ou aparentemente impossíveis” (Malagutti; Sampaio, 2008, p. 51).

Neste capítulo, serão apresentadas brincadeiras e mágicas com barbante com o intuito de trazer tópicos intuitivos da teoria dos nós. O barbante, com sua flexibilidade e maleabilidade, se torna um instrumento perfeito para explorar os conceitos de nós e suas propriedades. Através de truques e brincadeiras, os participantes poderão experimentar de forma prática os princípios fundamentais da teoria dos nós, como a identificação de nós diferentes. Além disso, a interação com o barbante permitirá explorar de forma prática as noções de laços - formas específicas de amarrar o barbante, torções - voltas ou giros dados no barbante enquanto se forma um nó ou laço, e cruzamentos. Essa experiência proporcionará um aprendizado lúdico e educativo ao mesmo tempo.

Para listar as atividades apresentadas nesta seção foram utilizados os livros (Malagutti; Sampaio, 2008) e (Malagutti; Sampaio, 2013).

3.1 NÓS A DOIS

3.1.1 Cama de gato

A brincadeira “cama de gato” também conhecida como brincadeira com barbante, de acordo com Atzinger (2001) tem origem possivelmente asiática e é praticada em várias regiões do mundo. Na Austrália, por exemplo, expedições antropológicas de 1928 descobriram que os aborígenes, primeiros povos habitantes do território australiano, já se envolviam em diversas brincadeiras com barbante.

Instruções para montar a brincadeira "Cama de gato" na mão:

I. Um participante deverá adquirir um pedaço de barbante considerável e fazer um nó para unir as duas pontas do barbante.

II. Em seguida, o participante deverá segurar cada extremidade do barbante com as mãos, formando duas linhas paralelas.

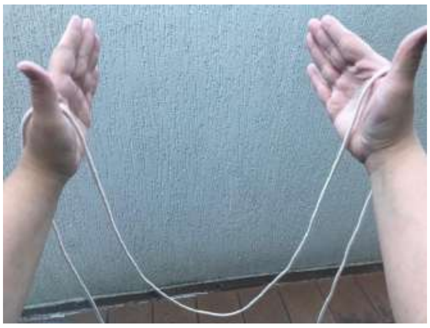
III. O participante deverá dar uma volta por baixo do barbante em cada uma das mãos, enlaçando o barbante ao redor da mão.

IV. Utilizando ambos os dedos médios, o participante deverá passá-los por baixo da parte do barbante que está na palma da mão, puxando-o.

V. Após realizar esses passos, a configuração inicial da brincadeira estará completa.

As figuras abaixo ilustram essa construção.

Figura 3.1 – Cama de gato: Passo I. e II.



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.2 – Cama de gato: Passo III.

Fonte: Elaborado pela autora

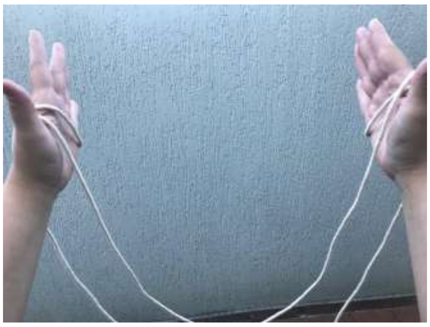
Figura 3.3 – Cama de gato: Puxando

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.4 – Cama de gato: Passo III. com a outra mão

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.5 – Cama de gato: Puxando

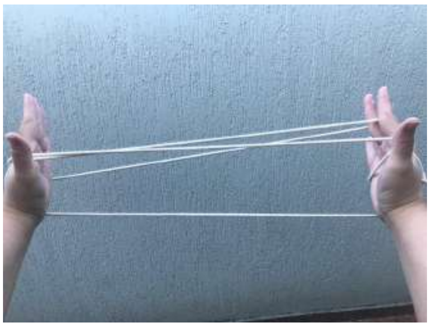


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.6 – Cama de gato: Passo IV.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.7 – Cama de gato: Esticando



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.8 – Cama de gato: Passo IV. com o outro dedo médio

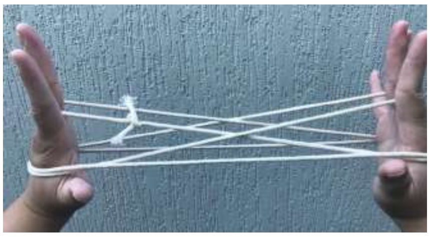
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.9 – Cama de gato: Configuração inicial

Fonte: Elaborado pela autora

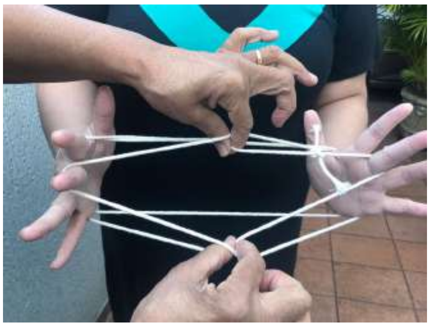
A partir desse ponto, o barbante será passado de um participante para o outro. Os movimentos consistem em pegar quaisquer dois nós que estejam na mesma direção, utilizando uma mão para cada nó, e, em seguida, puxando-os para fora ou para dentro. Esse ciclo de movimentos, com período 3, se repetirá infinitamente, sendo realizado alternadamente por cada participante.

Figura 3.10 – Cama de gato: Configuração inicial por outro ângulo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.11 – Cama de gato: Pegando os cruzamentos

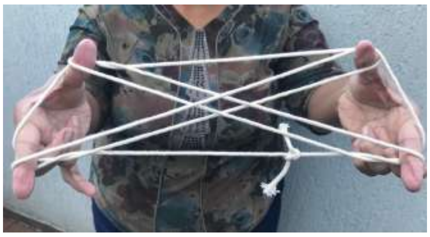


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.12 – Cama de gato: Passando por baixo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.13 – Cama de gato: Configuração número 2

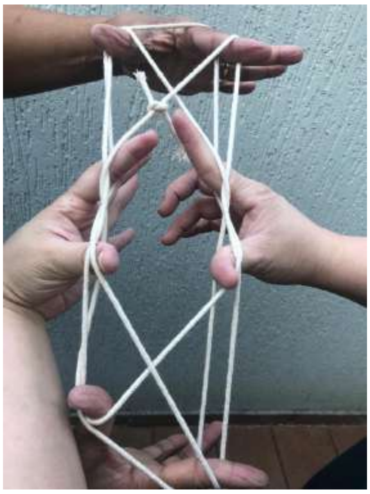


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.14 – Cama de gato: Pegando os cruzamentos

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.15 – Cama de gato: Passando por baixo

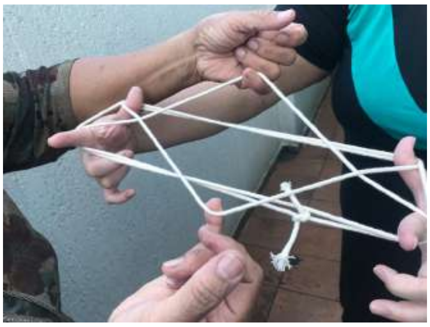


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.16 – Cama de gato: Configuração número 3

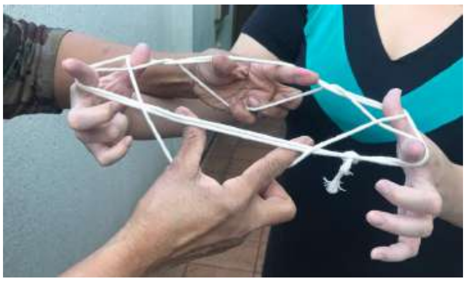
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.17 – Cama de gato: Puxando com os dedinhos



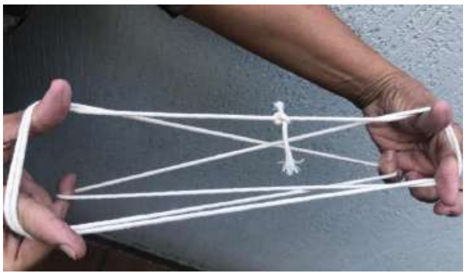
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.18 – Cama de gato: Passando por baixo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.19 – Cama de gato: Configuração número 4

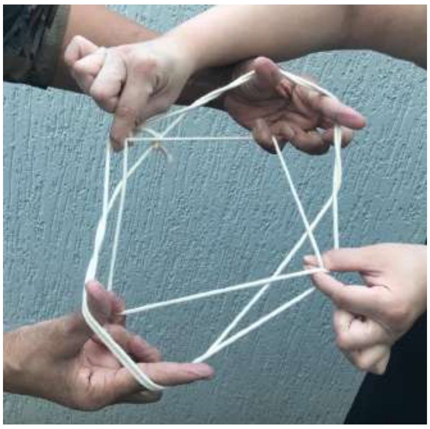


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.20 – Cama de gato: Pegando interiormente os cruzamentos

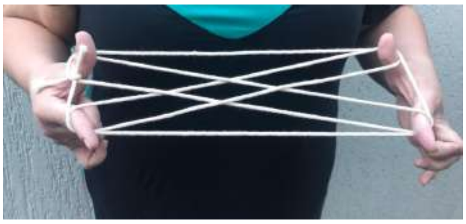
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.21 – Cama de gato: Passando por cima



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.22 – Cama de gato: Repetição da configuração número 2



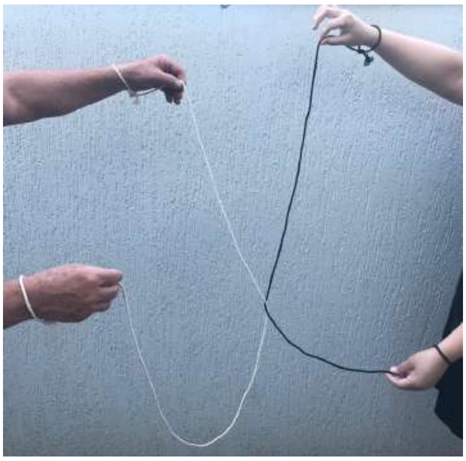
Fonte: Elaborado pela autora

Estes padrões, construídos ao longo da brincadeira, podem ser considerados como representações simplificadas de nós matemáticos. Portanto, essa brincadeira pode ser interpretada como uma forma lúdica de explorar conceitos básicos da Teoria dos Nós, tais como cruzamentos, bem como explorar as diferentes formas e padrões que podem ser criados com o barbante. Por meio dessa exploração, é possível experimentar como as mudanças nas amarrações afetam a configuração geral, mantendo, no entanto, a equivalência. Isso ocorre porque, a partir do nó trivial (I.), é possível obter as demais configurações, proporcionando, assim, uma introdução intuitiva à Teoria dos Nós.

3.1.2 Enlaçando uma dupla

Para esta brincadeira, você precisará de dois pedaços de barbante, cada um com aproximadamente 2 metros de comprimento. Comece amarrando os pulsos do primeiro participan- te com o barbante, de forma semelhante a uma algema. Em seguida, passe o outro pedaço de barbante através dessa algema e amarre também os pulsos do segundo participante. O objetivo da brincadeira é que ambos consigam se soltar sem romper os barbantes.

Figura 3.23 – Enlaçando uma dupla: Início



Fonte: Elaborado pela autora

Para se soltarem, os participantes devem seguir os seguintes passos:

I. Pegue um dos barbantes e dobre ao meio.

II. Passe-o pela folga existente entre o outro barbante amarrado e o pulso, movendo no sentido do braço para a mão.

III. Passe a mão por dentro do laço formado.

IV. Leve o barbante pela folga entre o braço e o barbante, desta vez no sentido da mão para o braço.

Ao fazer isso, os barbantes começarão a se desenrolar, permitindo que os participantes se soltem.

Figura 3.24 – Enlaçando uma dupla: Passo I.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.25 – Enlaçando uma dupla: Passo II.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.26 – Enlaçando uma dupla: Passo III.

Fonte: Elaborado pela autora

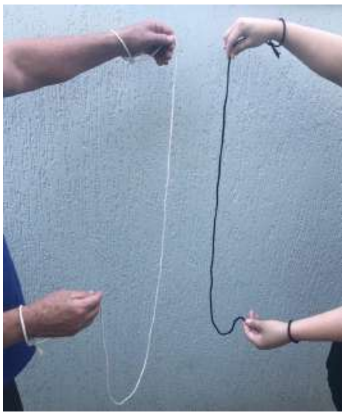
Figura 3.27 – Enlaçando uma dupla: Passo IV.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.28 – Enlaçando uma dupla: Puxando

Fonte: Elaborado pela autora

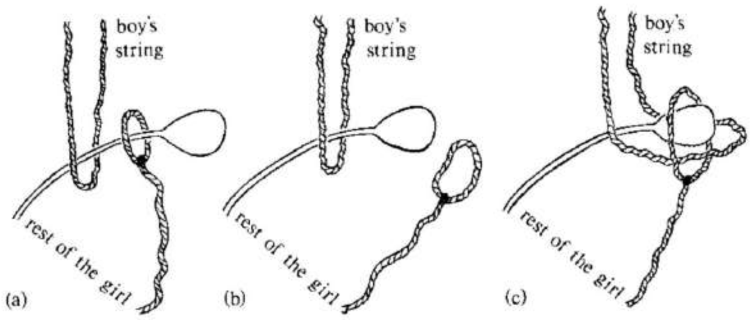
Figura 3.29 – Enlaçando uma dupla: Final



Fonte: Elaborado pela autora

Berlekamp, Conway, Guy (2004) apresentam essa brincadeira como “Boys Leaves Girl” e segundo os autores, para entendermos a brincadeira, devemos olhar mais de perto, como se tivéssemos um espelho mágico, que possibilite enxergar mais a fundo.

Figura 3.30 – Boys Leaves Girl



Fonte: Berlekamp, Conway, Guy (2004, p. 856)

Ao amarrar os pulsos dos participantes com os barbantes, é criado uma espécie de *nó* em torno de seus punhos. Ao tentar se soltar, os participantes precisam entender como os barbantes estão enlaçados e utilizar técnicas específicas para desfazer a amarração sem romper os barbantes, sendo necessária a compreensão da estrutura da amarração, a identificação de pontos de passagem e a manipulação das linhas para alcançar a liberação. Ao tentar desfazer a amarração dos barbantes nos pulsos dos participantes sem rompê-los, é necessário realizar uma série de movimentos que podem ser considerados semelhantes aos Movimentos de Reidemeister. Esses movimentos envolvem a passagem do barbante por dentro e por fora de outros segmentos do próprio barbante; apesar de não estarmos trabalhando com diagramas de nós, podemos fazer uma analogia às transformações dos Movimentos de Reidemeister.

3.1.3 Dedinho

Um dos participante deve ficar com a mão de lado, de forma que o polegar esteja na parte de cima e com todos os dedos dobrados exceto o dedo mínimo; o segundo participante, com um pedaço de barbante deve enlaçar o dedinho, seguindo esta ordem:

I. Coloque o barbante no espaço entre o dedo mínimo e o dedo anelar.

II. Utilizando a mão que se encontra do mesmo lado da palma da mão do primeiro participante, deve envolver o dedinho deste último com o barbante.

III. Após realizar uma volta no dedinho e estar voltando à posição inicial, basta puxar o barbante de ambos os lados e ele irá se soltar do dedinho, voltando à posição inicial (I.), na qual o barbante se encontra no meio do dedinho com o anelar.

Figura 3.31 – Dedinho: Passo I.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.32 – Dedinho: Passo II.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.33 – Dedinho: Momento que está voltando à posição

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.34 – Dedinho: Final (III.)

Fonte: Elaborado pela autora

Vale ressaltar que, caso a mágica seja iniciada com o barbante embaixo do dedo mínimo, mesmo puxando o barbante no final, ele não irá se soltar, irá apenas apertar o dedo do colega.

Através da mágica, os participantes podem desenvolver uma compreensão intuitiva de como a manipulação do barbante afeta a estrutura e o entrelaçamento dos segmentos. É uma oportunidade para discutir como diferentes combinações de voltas e laços podem ser formadas, já que os alunos podem perceber que existem sequências específicas de movimentos para realizar os cruzamentos e voltas corretamente.

3.2 EXPERIMENTOS INDIVIDUAIS

3.2.1 Pé de galinha

Para realizar essa brincadeira, será necessário um pedaço de barbante com formato circular, ou seja, faça um nó nas duas pontas.

I. Passe o barbante em volta do polegar e do dedo mínimo.

II. Com um dos dedos médios, segure a parte do barbante que está na palma da outra mão. Passe o dedo por baixo do barbante, movendo-o de baixo para cima, formando um "X" com o barbante.

III. Retorne o dedo à posição inicial, esticando o passo anterior.

IV. Com o outro dedo médio, de baixo para cima, segure a parte do barbante que está na palma da outra mão. Puxe essa parte por cima do "X" formado anteriormente e estique.

V. Agora, solte o dedinho e o dedão da mão com a qual você puxou o barbante, deixando apenas o dedo médio segurando o barbante.

Ao fazer isso, você perceberá que na mão em que nada foi solto, haverá um formato semelhante a um "pé de galinha".

Figura 3.35 – Pé de galinha: Passo I.

Fonte: Elaborado pela autora

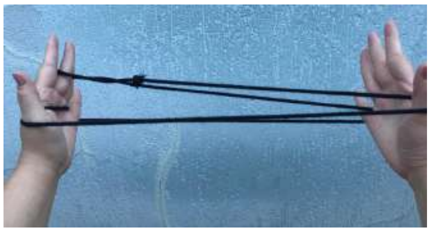
Figura 3.36 – Pé de galinha: Passo II. passando por baixo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.37 – Pé de galinha: Passo II.
formando um "X"

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.38 – Pé de galinha: Passo III.



Fonte: Elaborado pela autora

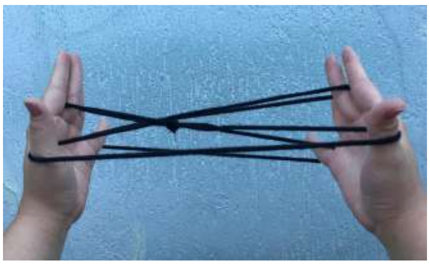
Figura 3.39 – Pé de galinha: Passo IV.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.40 – Pé de galinha: Passo IV.
passando por baixo

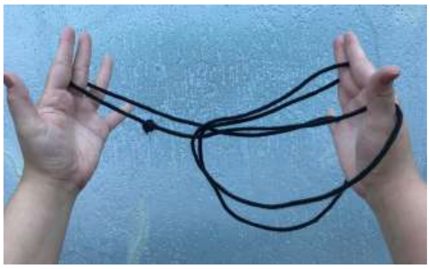
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.41 – Pé de galinha: Passo IV.
puxando por cima do "X"



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.42 – Pé de galinha: Passo V.



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.43 – Pé de galinha: Final

Fonte: Elaborado pela autora

Com essa brincadeira, podemos apresentar aos alunos a ideia de que os nós são estruturas formadas por um ou mais fios entrelaçados. Além disso, podemos explicar que eles estão presentes em diversas situações cotidianas, como laços de sapato, nós em cordas e até mesmo em tecidos. É uma oportunidade para explorarmos os diferentes tipos de laços e nós simples, proporcionando uma compreensão mais prática e visual desses conceitos.

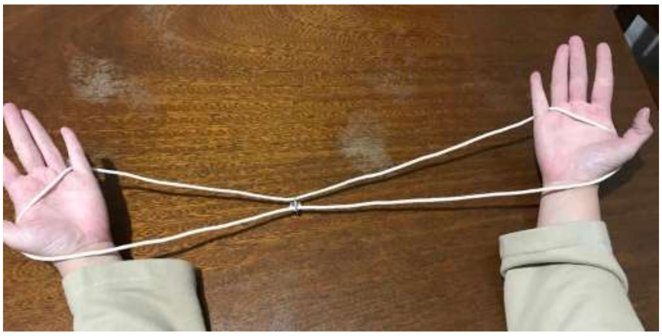
Os participantes podem praticar a realização desses nós utilizando o barbante, desenvolvendo habilidades manuais e compreendendo a importância dos nós em diversas atividades práticas. É viável explicar que diferentes tipos de nós possuem diferentes propriedades e aplicações, como a utilização de nós seguros em escaladas ou nós simples em atividades recreativas. Há a possibilidade de apresentar o conceito de topologia destacando que a teoria dos nós é uma área específica dessa disciplina. Além de explorar as aplicações práticas da teoria dos nós em diversas áreas, como biologia e química.

Ademais, é uma forma de incentivar os alunos a explorar a criatividade na criação de seus próprios nós e estruturas utilizando o barbante, promovendo a experimentação e o trabalho em equipe, encorajando-os a compartilhar e explicar os nós que criaram, estimulando assim a comunicação e o pensamento crítico.

3.2.2 Mágica do anel

Para realizar a presente construção, requer-se um segmento de barbante, com suas extremidades devidamente unidas por um nó, além de um anel. No início, deve-se segurar os lados opostos do barbante com as mãos, garantindo que o mesmo esteja passando ao redor do dedo polegar e do dedo mínimo. O anel é posicionado no ponto médio do barbante, entre as duas mãos.

Figura 3.44 – Mágica do anel: Configuração inicial



Fonte: Elaborado pela autora

Com ambos os dedos médios, puxe a parte do barbante que se encontra na palma da outra mão, começando com a mão esquerda. Após isso, basta soltar o barbante dos dedos na ordem correta:

I. Primeiro os dois dedos mínimos.

II. O dedo médio da mão direita.

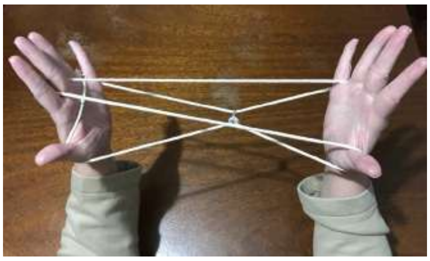
III. E por último, o polegar esquerdo.

Deste modo, o anel será solto.

Figura 3.45 – Mágica do anel: Puxando com o dedo médio da mão esquerda

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.46 – Mágica do anel: Esticado

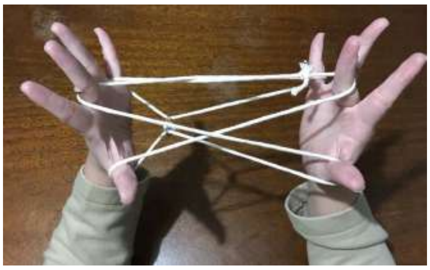


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.47 – Mágica do anel: Puxando com o outro dedo médio

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.48 – Mágica do anel: Mão esticada

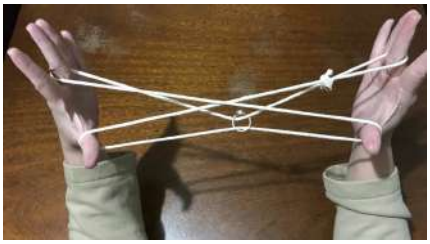


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.49 – Mágica do anel: Soltando os dedos mínimos (I.)

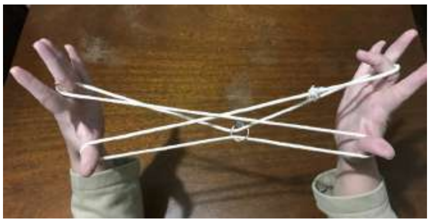
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.50 – Mágica do anel: Esticando



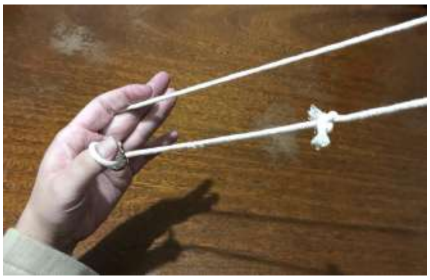
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.51 – Mágica do anel: Soltando o dedo médio da mão direita (II.)



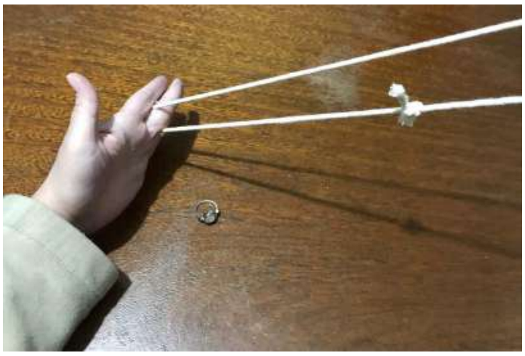
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.52 – Mágica do anel: Soltando o polegar esquerdo (III.)



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.53 – Mágica do anel: Final



Fonte: Elaborado pela autora

Além de envolver coordenação motora, a manipulação espacial e a compreensão de sequências e padrões. A mágica também envolve a manipulação habilidosa do barbante e a ordem correta de soltura dos dedos, resultando na liberação do anel. Demonstrando um controle da estrutura do barbante e dos movimentos dos dedos. Em termos conceituais, a mágica pode ser vista como uma forma prática de explorar noções de entrelaçamento, torção e desembaraçamento de objetos.

3.2.3 Estrela Pitagórica

A Estrela Pitagórica é a denominação atribuída à figura de cinco pontas formada pelas diagonais de um pentágono regular. O pentágono regular possuía um profundo significado místico para os adeptos da escola pitagórica e já era conhecido desde os tempos remotos da antiga Babilônia. De acordo com Lauro (2005), no pentágono regular, foram identificados segmentos que se encontram divididos na proporção da Razão Áurea, cuja descoberta é considerada um fator motivador para os seguidores de Pitágoras adotarem o pentagrama (um pentágono regular estrelado) como símbolo distintivo de sua seita.

Para a execução dessa construção, é necessário dispor de um segmento de barbante, o qual deverá ser utilizado para realizar um nó, entrelaçando as duas extremidades. Em seguida, deve-se passar o referido barbante ao redor do pescoço, trazendo-o para a parte frontal do corpo. Ambos os polegares devem ser inseridos através do barbante, mantendo uma posição de agarre. Posteriormente, utilizando o dedo indicador da mão direita, procede-se puxando o segmento de barbante localizado do lado oposto, acima do polegar; esse mesmo procedimento deverá ser repetido com o dedo indicador da mão esquerda. Por fim, é crucial manter todos os quatro dedos em posição de agarre, enquanto se puxa o barbante, efetuando uma rotação da mão para baixo.

Figura 3.54 – Estrela Pitagórica: Passo 1

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.55 – Estrela Pitagórica: Passo 2

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.56 – Estrela Pitagórica: Passo 3

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.57 – Outra perspectiva do Passo 3

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.58 – Estrela Pitagórica: Resultado

Fonte: Elaborado pela autora

Agora, passo a passo da construção por outro ângulo, sendo que no início o barbante está ao redor do pescoço:

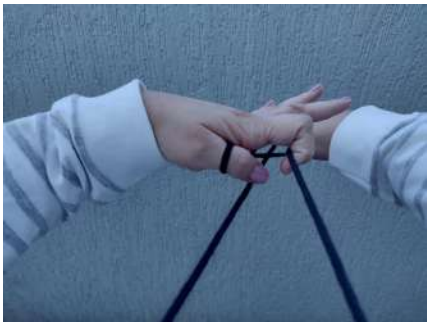
Figura 3.59 – Passo 1

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.60 – Passo 2

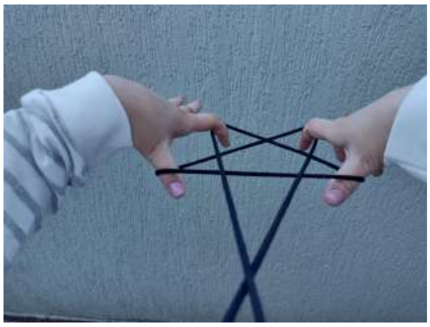
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.61 – Passo 3



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.62 – Passo 4



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.63 – Resultado

Fonte: Elaborado pela autora

Esta brincadeira permite explorar o conceito de entrelaçamento e torção de um barbante,o que resulta numa estrutura nodal. Essa manipulação envolve a coordenação motora, o raciocínio espacial e a compreensão intuitiva de como os movimentos afetam a formação e a estabilidade dos nós. Essa introdução lúdica aos nós pode ser um ponto de partida para despertar o interesse por conceitos matemáticos mais avançados relacionados à teoria dos nós. Ao explorar a brincadeira, as pessoas podem começar a perceber padrões nos nós formados, experimentar diferentes manipulações e descobrir quais movimentos produzem nós mais complexos. Podendo despertar a curiosidade sobre os fundamentos matemáticos subjacentes e levar a questionamen- tos como:

- Quais são as propriedades que diferenciam um nó de outro?
- Existem diferentes tipos de nós?
- Como podemos classificá-los?

3.2.4 Estrela de mão

Esta construção, apresentada pelo Território do Brincar (2020), envolve a realização de uma estrela de cinco pontas na mão, diferente das demais brincadeiras, o barbante, no início, deve ser dobrado de maneira a ficar "duplo". A figura abaixo ilustra a formação do barbante:

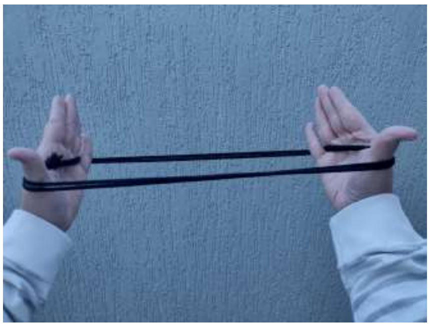
Figura 3.64 – Estrela de mão: Barbante "duplo"

Fonte: Elaborado pela autora

A posição inicial consiste em deixar o barbante em volta dos polegares e do dedo mínimo. Após isso, com ambos os dedos indicadores, puxe a parte que está na palma da mão. Depois, com os dois dedões, puxe a parte que está enlaçada no dedinho e passe por baixo da parte presa no dedão. Posteriormente, solte ambos dedinhos, você notará que no meio ficou um espaço, e você deve passar os dedinhos por lá e puxá-los. Em seguida, solte ambos os dedões, depois, puxe as diagonais formadas entre os dedinhos e os indicadores com ambos os dedões. Por fim, basta soltar somente um dos dedinhos e esticar. Assim, observamos que uma estrela será formada.

A explicação detalhada da construção, desenvolvida acima, apresenta certa complexidade. Abaixo temos as ilustrações para colaborar na visualização da construção, o vídeo correspondente à brincadeira encontra-se devidamente referenciado.

Figura 3.65 – Estrela de mão: Posição inicial

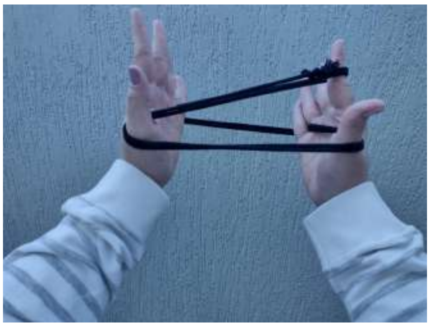


Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.66 – Estrela de mão: Puxe, com o dedo indicador direito, a parte que está na palma da mão esquerda

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.67 – Estrela de mão: Estique



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.68 – Estrela de mão: Repita o processo para o dedo indicador esquerdo

Fonte: Elaborado pela autora

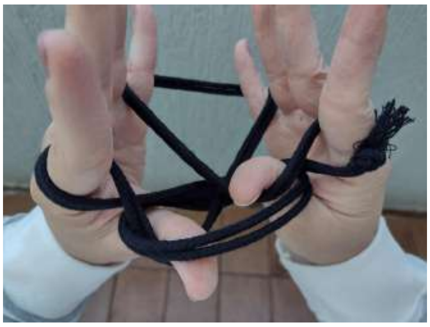
Figura 3.69 – Estrela de mão: Estique

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.70 – Estrela de mão: Puxe com os dois polegares a parte que está enlaçada no dedinho

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.71 – Estrela de mão: Passando um polegar por baixo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.72 – Estrela de mão: Passe ambos os polegares por baixo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.73 – Estrela de mão: Estique

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.74 – Estrela de mão: Solte ambos os dedinhos

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.75 – Estrela de mão: Estique

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.76 – Estrela de mão: Passe os dedinhos pelo espaço ao meio

Fonte: Elaborado pela autora

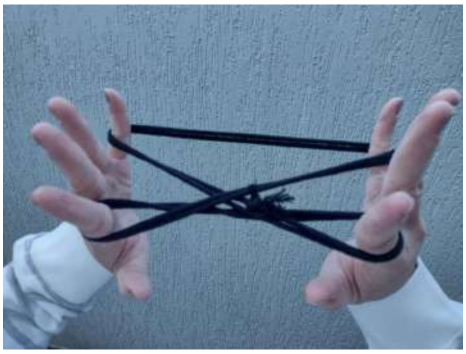
Figura 3.77 – Estrela de mão: Puxe

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.78 – Estrela de mão: Soltando o polegar esquerdo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.79 – Estrela de mão: Ambos polegares soltos



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.80 – Estrela de mão: Com os polegares, puxe as diagonais que são formadas pela ligação do dedinho e do indicador

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.81 – Estrela de mão: Estique

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.82 – Estrela de mão: Solte apenas um dedinho

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.83 – Estrela de mão: Resultado Final

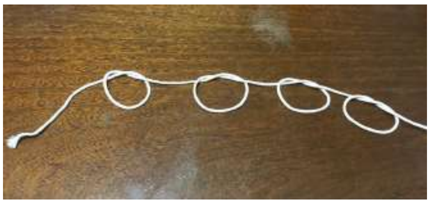
Fonte: Elaborado pela autora

Com essa brincadeira, podemos explorar os diferentes tipos de nós que podem ser criados com ela e identificar suas características distintas, como o número de voltas e a forma geral do nó. Podemos também investigar propriedades matemáticas dos nós, como a orientação do nó. Além disso, é possível analisar os enlaçamentos presentes na brincadeira e estudar como diferentes linhas se cruzam e se entrelaçam para formar o nó. Também é possível trabalhar com o conceito de projeção, caso colocarmos um papel por baixo e uma luz em cima, teremos a projeção, e posteriormente trazer o conceito de diagrama, onde os cruzamentos são indicados por sobreposições e interseções de linhas. É factível experimentar com variações na brincadeira e explorar como as diferentes manipulações dos dedos podem resultar em nós alternativos e diferentes formas geométricas. É viável também trazer uma discussão acerca da classificação deste nó, uma vez que ele se encontra na tabela de nós como o nó 5_1.

3.2.5 Quebrar elos de uma “corrente”

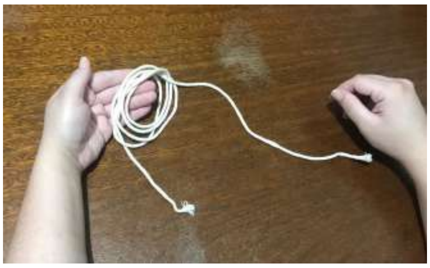
Suponha que você tenha mais de um nó, no mesmo fio de barbante. Para soltar todos eles de uma vez, basta colocar um em cima do outro, começando do último para o primeiro e então pegar a extremidade do barbante e passá-lo pelo meio. Ao puxar, todos os nós serão desfeitos.

Figura 3.84 – Elos da corrente: Sequência de quatro nós



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.85 – Elos da corrente: Um nó em cima do outro



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.86 – Elos da corrente: Indicação da ponta do barbante

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.87 – Elos da corrente: Passando por dentro e puxando

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.88 – Elos da corrente: Final

Fonte: Elaborado pela autora

Na mágica, ao empilhar os nós um em cima do outro e desfazê-los simultaneamente, estamos criando uma composição de nós. Ao empilhar os nós no fio de barbante e desfazê-los, estamos criando uma estrutura composta que possui propriedades únicas resultantes da combinação dos nós individuais. Embora a mágica seja uma representação simplificada desse conceito, ela pode nos apresentar uma noção inicial de uma estrutura composta a partir de múltiplos nós.

3.2.6 Dar um nó segurando as pontas

É possível dar um nó cego segurando as pontas do barbante. O truque é cruzar os braços no início, de modo que uma das pontas passe por cima de um dos braços.

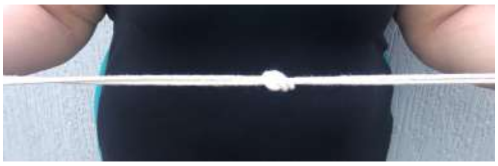
Figura 3.89 – Nó segurando as pontas: Início

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.90 – Nó segurando as pontas: Puxando

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.91 – Nó segurando as pontas: Final



Fonte: Elaborado pela autora

Ao cruzar os braços e passar uma das pontas do barbante por cima de um dos braços, estamos manipulando o caminho do barbante de forma a criar um nó simples, mas específico. A construção exemplifica a ideia fundamental de que a intersecção das linhas cria entrelaçamentos. Ao cruzarmos os braços e fazermos com que uma das pontas do barbante passe por cima de um dos braços, podemos atribuir uma orientação ao nó. Essa orientação pode ser estabelecida ao identificarmos a ponta que passou por cima do braço como a "ponta superior"e a outra ponta como a "ponta inferior". Assim, ao explorar o truque do nó cego, podemos introduzir o conceito de orientação dos nós.

3.2.7 Truque da passagem do barbante pelo pescoço

Nesta mágica, é necessário um pedaço de barbante, na qual as pontas estão amarradas, ficando de uma forma circular. O barbante se inicia atrás do pescoço e termina na frente.

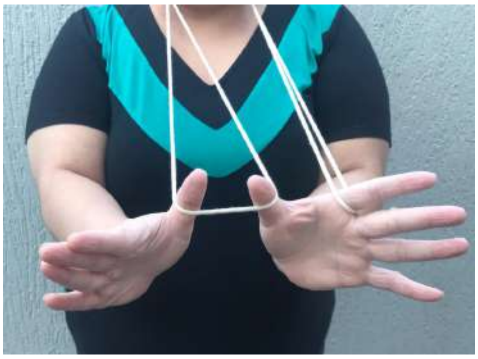
A técnica envolve segurar as extremidades do barbante firmemente com as mãos. Em um dos lados, segure-o com o indicador, e do outro lado, com o polegar. Em seguida, bata palmas e, nesse momento, a mão que segura o barbante com o indicador deve puxar o outro barbante com o dedão. Enquanto retorna, a outra mão, que segura o barbante apenas com o polegar, deve deslizar para cima. O truque consiste em soltar o dedo indicador, permitindo que o barbante passe através do pescoço.

A chave para o sucesso está na rapidez de execução. Quanto mais rápido o truque for realizado, menos o observador perceberá o que está acontecendo, o que criará a ilusão de um truque de mágica.

Figura 3.92 – Truque da passagem do barbante pelo pescoço: Início

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.93 – Truque da passagem do barbante pelo pescoço: Puxando com o outro dedão no momento da palma



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.94 – Truque da passagem do barbante pelo pescoço: Deslizando a outra mão para cima

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.95 – Truque da passagem do barbante pelo pescoço: Final

Fonte: Elaborado pela autora

No truque, as extremidades do barbante são amarradas para formar um laço circular, que pode ser considerado um tipo de nó trivial. A forma como o barbante é segurado, puxado e deslizado através do pescoço cria a ilusão de que o nó está passando pelo corpo do mágico.

Essa manipulação rápida e habilidosa do barbante pode ser relacionada à ideia de deformação contínua de um objeto topológico. Embora a estrutura básica do nó não seja alterada durante o truque, ele é manipulado e movido de forma a criar a ilusão de que está se movendo através do pescoço do mágico. Sendo assim, a mágica explora a capacidade de criar ilusões e manipular o objeto de forma a enganar o observador. O truque demonstra como a manipulação rápida e precisa pode levar a percepções enganosas, fazendo com que pareça que o nó está se movendo pelo corpo do mágico, embora, na realidade, está apenas sendo manipulado.

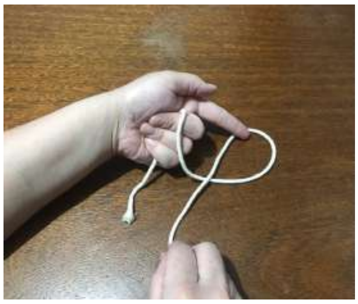
3.2.8 Laçadas aéreas para enlaçar um dedo

Posicione o fio de barbante em torno dos dedos do meio, anelar e mínimo, assegurando que a porção maior do barbante fique externa aos dedos. Estenda o dedo indicador e proceda a uma volta com o segmento maior do barbante ao redor do dedo anelar, de forma que a ponta do barbante fique na parte interior do indicador. Posteriormente, puxe-o, resultando assim na formação de um laço no referido dedo. Esse procedimento pode ser repetido à vontade.

Figura 3.96 – Laçadas aéreas: Início

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.97 – Laçadas aéreas: Volta



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.98 – Laçadas aéreas: Puxe

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.99 – Laçadas aéreas: Segunda volta

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.100 – Laçadas aéreas: Puxe

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.101 – Laçadas aéreas: Após várias repetições

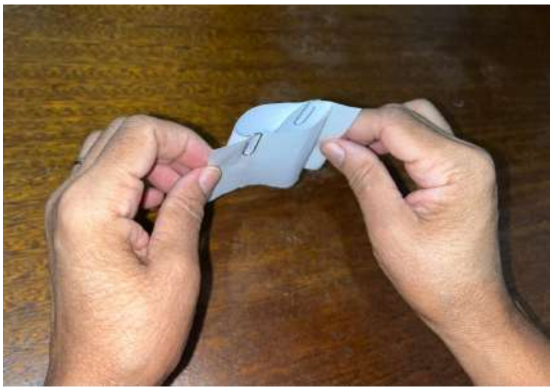
Fonte: Elaborado pela autora

É possível explorar número de voltas ou componentes entrelaçados em um nó e comparar a criação de múltiplas laçadas nos dedos com a multiplicidade de nós. Ao criar laçadas aéreas nos dedos usando o fio de barbante, estamos construindo nós. A brincadeira pode ser usada para ilustrar a invariância de nós, pois mesmo que alteremos a forma do nó ao longo da brincadeira, desde que não corte ou desfaça completamente o barbante, o nó em si permanecerá o mesmo. Podemos também investigar as propriedades do nó criado na brincadeira. Por exemplo, como diferentes manipulações dos dedos afetam a forma do nó?

3.2.9 Clipes enlaçados

Para realizar este truque mágico, você precisará de um pedaço de papel e, pelo menos, dois clipes. O processo é simples: dobre o papel progressivamente e coloque um clipe onde as dobras se encontram, como mostrado na figura abaixo:

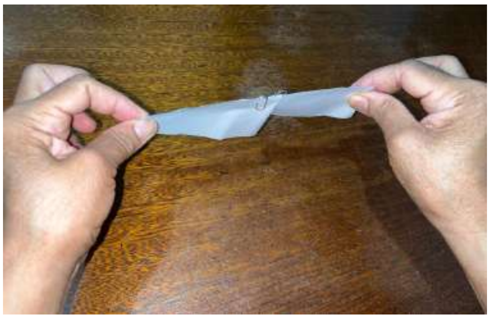
Figura 3.102 – Clipes enlaçados: Início



Fonte: Elaborado pela autora

Para a mágica ocorrer, basta puxar ambas as pontas da folha, e assim, os clipes ficarão enlaçados.

Figura 3.103 – Clipes enlaçados: Puxando



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.104 – Clipes enlaçados: Final

Fonte: Elaborado pela autora

É necessário ter no mínimo dois clipes, mas é possível usar mais, contanto que o tamanho do papel permita. Por exemplo, nas imagens abaixo, foi usado um pedaço da parte maior de uma folha sulfite. No entanto, ao usar apenas dois clipes, a parte menor é suficiente.

Figura 3.105 – Clipes enlaçados: 4 clipes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.106 – Clipes enlaçados: Final

Fonte: Elaborado pela autora

Ao considerar cada clipe como um nó, quando eles são entrelaçados e as extremidades do papel são puxadas, os clipes se unem formando um enlace.

3.2.10 O jogo do enlaçamento

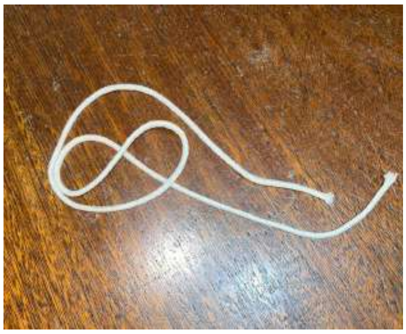
Para esse desafio, é necessário um pedaço pequeno de barbante. Comece colocando o barbante sobre uma mesa, formando dois pequenos "buracos" (identificados como 1 e 2 na figura 3.109). Em seguida, peça para alguém escolher um dos buracos e colocar o dedo dentro dele, mantendo-o em contato com a mesa.

O próximo passo é puxar o barbante. Se o dedo ficar enlaçado pelo barbante, a pessoa que inseriu o dedo ganha o desafio. Por outro lado, se o dedo não ficar enlaçado, você ganha. É um jogo simples, mas que envolve estratégia e percepção para quem participa.

Figura 3.107 – O jogo do enlaçamento: Passo 1

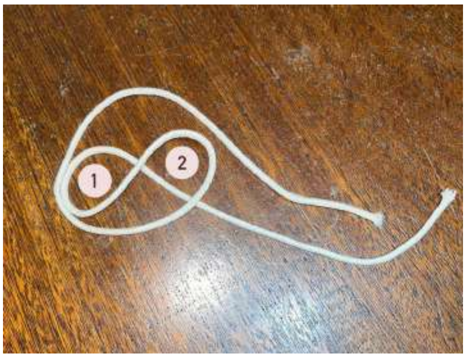
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.108 – O jogo do enlaçamento: Passo 2



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.109 – O jogo do enlaçamento: Escolha



Fonte: Elaborado pela autora

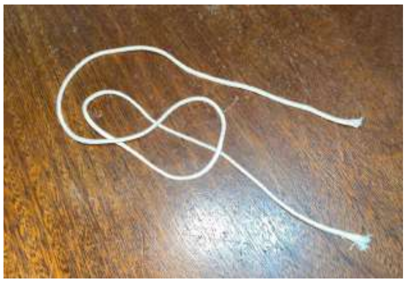
Se alguém escolher o buraco 1 (conforme mostrado na figura 3.109), o dedo não ficará preso quando o barbante for puxado. No entanto, se optar pelo buraco 2, o dedo ficará enlaçado pelo barbante.

Quando a pessoa estiver confiante de que compreendeu o jogo, é possível surpreendê-la alterando a disposição do barbante, conforme ilustrado nas figuras abaixo. Isso resulta em uma nova configuração na qual o dedo nunca será capturado pelo barbante.

Figura 3.110 – O jogo do enlaçamento: Construção

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.111 – O jogo do enlaçamento: Outra forma



Fonte: Elaborado pela autora

Embora o desafio do barbante não envolva nós físicos, ele destaca a importância de entender a estrutura. Na Teoria dos Nós, compreender as propriedades dos diferentes nós e como eles se relacionam é essencial para criar, modificar ou desvendar padrões.

3.2.11 Passador de cinto

Para realizar este truque, é necessário um pedaço generoso de barbante. Comece fazendo um nó unindo as extremidades. Em seguida, enlace o barbante no passador da calça e, depois, prenda a outra extremidade em algum ponto fixo.

Para se soltar, simplesmente deslize a parte do barbante que foi dobrada ao meio ao redor do corpo.

Figura 3.112 – Passador de cinto: Início

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.113 – Passador de cinto: Parte que irá passar no corpo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.114 – Passador de cinto

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.115 – Passador de cinto: Passando a perna esquerda

Passador de cinto

Figura 3.116 – Passador de cinto

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.117 – Passador de cinto: Passando a perna direita

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.118 – Passador de cinto: Passada as duas pernas

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.119 – Passador de cinto: Puxando para cima

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.120 – Passador de cinto

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.121 – Passador de cinto

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.122 – Passador de cinto: Após passar envolta do corpo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.123 – Passador de cinto: Puxando

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.124 – Passador de cinto: Final

Fonte: Elaborado pela autora

Esse truque com o barbante é um exemplo de como um nó pode ser utilizado de forma estratégica para criar um mecanismo de travamento temporário. A parte intrigante é a simplicidade da solução para se soltar. Ao deslizar a parte do barbante que foi dobrada ao meio ao redor do corpo, você libera a tensão que mantinha o nó preso ao passador da calça. Isso permite que o nó se desfaça, possibilitando a libertação sem a necessidade de desfazer manualmente o nó original.

3.2.12 Desenlaçar o colete

Tenha em mãos um colete e um pedaço de barbante. Una as extremidades do barbante com um nó. Peça à pessoa que vista o colete e, em seguida, passe o barbante por uma das mãos, envolvendo-o, e mantenha essa mão presa ao colete, conforme mostrado na imagem abaixo:

Figura 3.125 – Desenlaçar o colete: Início

Fonte: Elaborado pela autora

Para se libertar, comece passando o barbante entre o colete e o corpo. Em seguida, deslize as pernas pelo espaço entre o barbante e o colete, e reinsira o barbante entre o colete e o corpo, em direção ao outro braço. Lembre-se de que a mão inicialmente presa nunca se solta durante esse procedimento. Depois disso, enrole o barbante ao redor do braço livre, puxe e, assim, o barbante estará solto.

Figura 3.126 – Desenlaçar o colete

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.127 – Desenlaçar o colete: Perna esquerda

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.128 – Desenlaçar o colete

Fonte: Elaborado pela autora

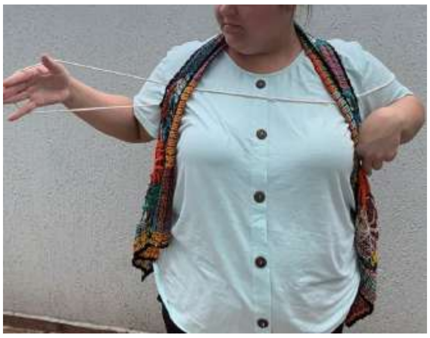
Figura 3.129 – Desenlaçar o colete

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.130 – Desenlaçar o colete

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.131 – Desenlaçar o colete: Por volta do braço



Fonte: Elaborado pela autora

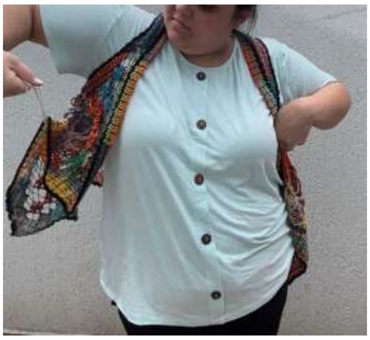
Figura 3.132 – Desenlaçar o colete: Por volta do braço

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.133 – Desenlaçar o colete: Por volta da cabeça

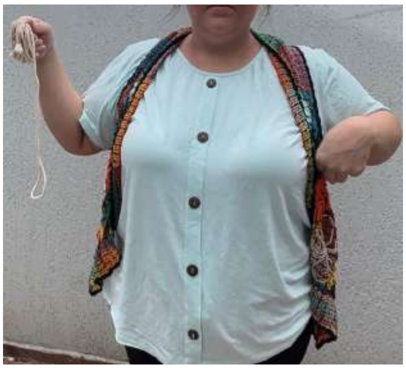
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.134 – Desenlaçar o colete: Puxando



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.135 – Desenlaçar o colete: Final



Fonte: Elaborado pela autora

Essa manipulação do barbante e do corpo demonstra como a ordem e a maneira como o barbante é movido são essenciais para criar uma situação que parece presa, mas pode ser liberada seguindo os passos corretos. É um truque que ilustra como a posição e a manipulação estratégica do barbante podem criar a ilusão de um enlace seguro quando na verdade é possível se libertar sem soltar a mão inicialmente presa.

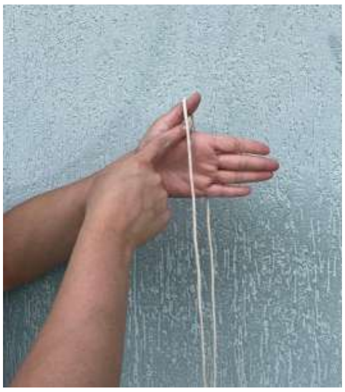
3.2.13 Tricô de dedo

Nesta mágica, você precisará de um pedaço de barbante. Comece colocando o barbante sobre o polegar e prepare-se para um movimento que parece uma "costura" com o dedo indicador. Passe o barbante por baixo, entre os espaços entre os dedos, pegue a ponta que está atrás, traga-a para frente, dê uma torcida e acomode no próximo dedo. Repita esse movimento com a parte do barbante que está no dedo anterior, torcendo, trazendo para a frente e passando para o dedo seguinte, até chegar ao dedo mínimo. Depois disso, solte o polegar, simplesmente puxe a parte do barbante que está na palma da mão e tudo se soltará.

Figura 3.136 – Tricô de dedo: Início

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.137 – Tricô de dedo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.138 – Tricô de dedo: Puxe

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.139 – Tricô de dedo: Torça

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.140 – Tricô de dedo: Dedo indicador

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.141 – Tricô de dedo: Por baixo

Fonte: Elaborado pela autora

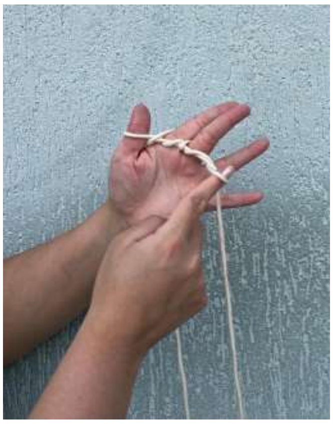
Figura 3.142 – Tricô de dedo: Puxando

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.143 – Tricô de dedo: Dedo médio

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.144 – Tricô de dedo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.145 – Tricô de dedo: Dedo anelar

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.146 – Tricô de dedo: Todos os dedos

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.147 – Tricô de dedo: Solte o polegar

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.148 – Tricô de dedo: Puxe o barbante da frente

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.149 – Tricô de dedo: Final

Fonte: Elaborado pela autora

Esse truque com o barbante é uma representação visualmente de como a manipulação cuidadosa do barbante entre os dedos pode criar uma ilusão de entrelaçamento complexo que, na verdade, é facilmente desfeito.

Ao passar o barbante entre os espaços entre os dedos e torcê-lo, cria-se a ilusão de um entrelaçamento. Cada movimento parece adicionar mais um nível de complexidade.

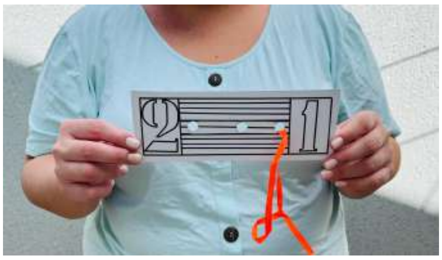
No entanto, ao soltar o polegar e simplesmente puxar a parte do barbante que está na palma da mão, toda a estrutura que parece entrelaçada se desfaz magicamente.

3.2.14 Mágica do enlaçamento

Esta é uma mágica simples, utilize um material flexível e escreva os números 1 e 2 em ambos os lados, de modo que atrás do 1 haja um 2 e vice-versa. No centro, com outro pedaço do material utilizado, faça quatro buracos, mas na hora de colar, esconda um deles, deixando espaço para essa parte se movimentar.

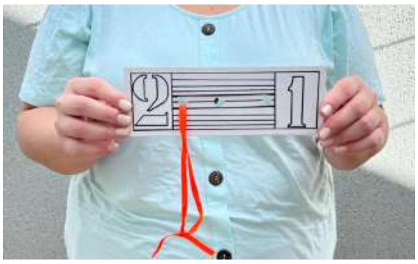
O truque é exibir o material com o barbante no 1 ou 2. Quando passar por trás do corpo, vire o material. Se o barbante estava no 1, agora estará no 2 e vice-versa. Ao perguntar à plateia o que foi feito, a resposta esperada é que apenas virou o material. No momento em que passar novamente por trás do corpo, puxe o barbante para que o quarto buraco seja revelado e o barbante fique no buraco do meio, surpreendendo os espectadores.

Figura 3.150 – Mágica: Possível início



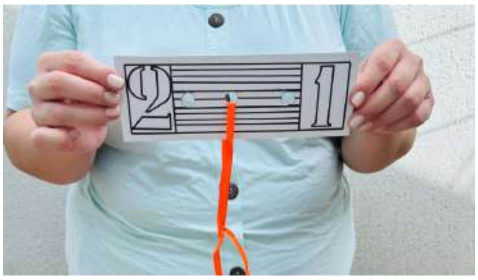
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.151 – Mágica: Após passar por trás



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.152 – Mágica: Final



Fonte: Elaborado pela autora

3.2.15 Nó encantado

Nesta construção, apresentada pelo SESC Rio Preto (2020), você vai precisar de um pedaço de barbante. Comece unindo as duas pontas com um nó.

Segure o barbante com o dedo indicador e dê uma volta com a mão direita ao redor da mão esquerda, enrolando-o. Com o dedinho da mão direita, enganche na parte que está presa ao dedo indicador da outra mão e puxe. Repita o processo com o dedinho da mão esquerda (de fora para dentro) e puxe.

Com o polegar e indicador da mão direita, segure o ponto onde o barbante está no pulso, coloque-o no meio, solte e puxe. Em seguida, peça a alguém para assoprar. No momento em que a pessoa fizer isso, bata palmas e, nesse instante, solte os dedos mínimos; quando voltar, o barbante estará de volta à posição inicial.

Figura 3.153 – Nó encantado: Início

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.154 – Nó encantado: Dando a volta

Fonte: Elaborado pela autora

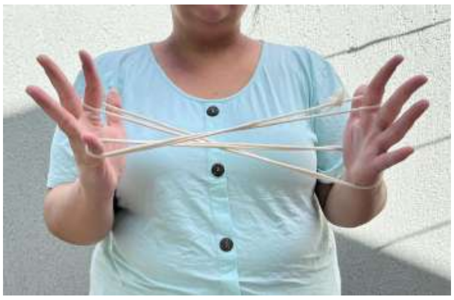
Figura 3.155 – Nó encantado: Estique

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.156 – Nó encantado: Puxe com o dedo mínimo

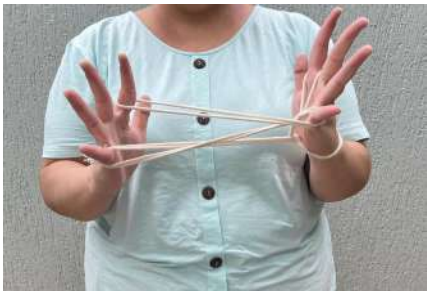
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.157 – Nó encantado: Estique



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.159 – Nó encantado: Puxe



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.161 – Nó encantado: Solte no meio

Fonte: Elaborado pela autora

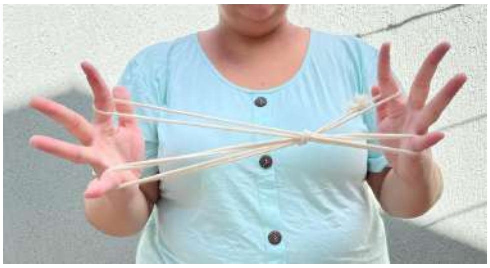
Figura 3.158 – Nó encantado: Repetindo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.160 – Nó encantado: Puxe a parte do puslso

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.162 – Nó encantado: Estique



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.163 – Nó encantado: Bata palma

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.164 – Nó encantado: Solte os dedinhos

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 3.165 – Nó encantado: Final

Fonte: Elaborado pela autora

Esse truque não apenas demonstra habilidades práticas de manipulação do barbante, mas também oferece uma metáfora visual para os conceitos da teoria dos nós, destacando como a estrutura, a conexão e a ilusão podem ser fundamentais na criação e no desmanche de nós aparentemente complexos.

4 EXPLORANDO A EDUCAÇÃO BÁSICA: BRINCADEIRAS E MAGIAS COM BARBANTES E SUA RELEVÂNCIA CURRICULAR

Neste capítulo, exploraremos demais desenvolvimentos proporcionados pelas brincadeiras e mágicas com barbantes. Além disso, apresentaremos uma perspectiva embasada no Parâmetro Curricular Nacional (PCN), na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nas Diretrizes Curriculares Nacionais, que abrangem nossa temática. Por fim, apresentaremos questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Concurso Canguru de Matemática que envolvam a utilização de barbante em seu contexto, ampliando ainda mais nossa compreensão.

4.1 MAGIA DOS BARBANTES: DESENVOLVIMENTO ATRAVÉS DE MÁGICAS E BRINCADEIRAS

As brincadeiras e mágicas apresentadas no capítulo 3 têm uma estreita relação com o desenvolvimento das habilidades motoras, coordenação motora fina e percepção espacial nas crianças. Essas práticas envolvem a manipulação física do barbante, a execução de nós entre os dedos e movimentos precisos para criar e desfazer diversas configurações. Ao executar os movimentos das brincadeiras, as crianças aprimoram a coordenação motora fina e a destreza manual. Isso é evidente nas mágicas, onde movimentos rápidos e precisos são necessários para criar as ilusões desejadas. Tanto nas brincadeiras quanto nas mágicas, os jovens precisam compreender e visualizar a posição das mãos e do barbante no espaço tridimensional para alcançar os resultados desejados. O que colabora no desenvolvimento do raciocínio espacial e da percepção visuo-motora.

De acordo com as considerações de Gallahue e Ozmun (2001) sobre as habilidades motoras fundamentais, a maioria das crianças apresenta um potencial de desenvolvimento que as conduz ao estágio maduro dessas habilidades por volta dos 6 anos de idade. No entanto, estudos conduzidos por Pellegrini *et al.* (2005) afirmam que a aquisição real das habilidades motoras depende da interação entre os fatores tarefa, indivíduo e ambiente ao longo do período de prática.

Em relação às habilidades motoras finas, Pellegrini *et al.* (2005) destacam que essas habilidades exigem alta precisão e envolvimento predominante dos membros superiores, especialmente das mãos. Durante a execução dessas habilidades, um número significativo de músculos relativamente pequenos é ativado. As atividades que envolvem habilidades motoras finas incluem escrever, digitar, fazer crochê e consertar relógios.

> A aquisição de um grande número de habilidades motoras ocorre no lar, no ambiente familiar, mas um bom número delas é adquirido na escola, nos primeiros anos de escolarização da criança. O contexto de aprendizagem é muito importante para que a aquisição dessas habilidades ocorra (Pellegrini *et al*, 2005, p. 4).

Desse modo, percebemos que a aprendizagem de habilidades motoras finas, que envolvem alta precisão e coordenação predominante dos membros superiores, acontece em diversos contextos, incluindo o ambiente familiar e escolar. Assim, tanto o lar quanto a escola desempenham papéis cruciais no desenvolvimento completo dessas habilidades importantes para a vida das crianças.

Segundo Marcones e Gimenez (2010) as habilidades motoras seriadas são compostas por ações distintas, mas que se conectam em uma sequência, onde a ordem das ações influencia diretamente no resultado, ou seja, na performance. Assim como nas construções descritas no capítulo 3, onde todas são formadas por uma série de passos interdependentes que influenciam diretamente no resultado final, ou seja, cada passo da construção é fundamental para o próximo, e a ordem em que são realizados é crucial para alcançar o objetivo.

Tais atividades possuem também o potencial de fomentar o trabalho em grupo, a interação e a cooperação entre as crianças, uma vez que, algumas das brincadeiras envolvem a participação de mais de uma pessoa para a criação de padrões e resolução de desafios de forma conjunta para então alcançar os objetivos propostos. Tais práticas podem ser compartilhadas entre amigos e familiares, proporcionando momentos de interação social e fortalecendo os laços afetivos.

Freitas (2020), a partir das ideias de Gauthier *et al* (2014) e Cohen e Lotan (2017), afirma que, no momento em que o professor sugere uma tarefa em grupo, concedendo-lhes a oportunidade de se esforçarem independentemente e de cometerem erros, ele está fomentando o desenvolvimento da autonomia dos participantes. Essa abordagem proporciona aos alunos a responsabilidade por partes específicas do trabalho, permitindo-lhes a liberdade de realizar as tarefas de acordo com seu próprio entendimento e experiência, tomando decisões com base no que considerarem mais apropriado. Desse modo, estaremos criando um ambiente de aprendizado completo e efetivo, no qual as crianças aprendem a trabalhar em equipe, a se comunicar de forma eficaz e a tomar decisões autônomas. Essas habilidades são essenciais não apenas para o contexto escolar, mas também para a vida em sociedade, preparando os jovens para serem cidadãos ativos e colaborativos.

Moreira (2019) alega que o desenvolvimento da capacidade intelectual está profundamente entrelaçado com a Matemática. É fundamental envolver os alunos em atividades que promovam a construção do conhecimento de maneira significativa, colocando-os como protagonistas no processo educativo. Eles devem atuar de forma ativa, participando com suas opiniões, propondo novas abordagens e soluções para os desafios que lhes são apresentados.

Com base nos estudos de Santaló (1996), Ferreira e Cunha (2012) afirmam que o ensino da matemática tem o propósito de incentivar a criatividade, demonstrando que essa disciplina é semelhante a uma construção em andamento, sempre demandando ajustes e adaptações.

> O trabalho com a Matemática deve proporcionar ao aluno autonomia, pensamento reflexivo, crítico, argumentativo e instrumentalizar o educando na Resolução de Problemas. Os problemas cotidianos que envolvem a Matemática exigem muito mais habilidades do que fazer cálculos e a própria ciência não se resume somente a essa habilidade. Identificar variáveis de vida, estabelecer critérios e metas, articular informações, desenvolver processos de pensamento, ou seja, é muito mais "do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos" (Moreira, 2019, p. 26).

Em uma aula convencional, o professor compartilha conhecimentos ao escrever no quadro aquilo que considera importante. Os alunos, por sua vez, copiam em seus cadernos e tentam seguir os modelos e regras fornecidos pelos professores ao resolver os problemas propostos. No entanto, muitas vezes o aluno não consegue estabelecer uma conexão entre o problema e uma situação real, levando-o a questionar constantemente onde irá utilizar tal conteúdo em sua vida. Ao realizar as atividades lúdicas, as crianças podem desenvolver sua criatividade e imaginação. Elas têm a oportunidade de experimentar diferentes variações e combinações de movimentos, o que estimula a criatividade e a busca por soluções inovadoras.

O estudo da matemática vai além da mera memorização de fórmulas e regras. Ele requer a capacidade de interpretar textos, desenvolver raciocínio lógico e analisar situações do mundo real, estabelecendo assim uma rede de conhecimentos interdisciplinares.

De acordo com Marquez (2011), ao longo da história, é possível perceber a relevância da brincadeira no contexto da infância. Em determinados momentos, ela se restringe ao ambiente familiar, enquanto em outros se estende para abranger a vida cultural de toda uma sociedade. Na Antiguidade, as crianças e os adultos participavam dos mesmos jogos, divertimentos, festas e brincadeiras. Além do mais, a brincadeira também desempenha um papel significativo no ambiente escolar, atuando como um elemento essencial para a aprendizagem e o desenvolvimento das crianças.

Conforme mencionado por Ariés (1981 *apud* Marquez, 2011), os jogos desempenhavam um papel fundamental como um dos principais meios utilizados pela sociedade para fortalecer seus laços coletivos e promover a coesão social. Nesse contexto, as crianças participavam ativamente da vida adulta, envolvendo-se em brincadeiras tanto com os adultos quanto em conjunto com eles, compartilhando brinquedos que eram utilizados por ambas as faixas etárias. Da mesma forma, os adultos também participavam de brincadeiras e jogos que atualmente são mais comumente associados às crianças.

> Platão comenta a importância do aprender brincando em contraposição à utilização da violência e da repressão. Para Aristóteles o jogo possibilita a educação de crianças pequenas preparando-as para a vida futura, através de jogos que imitem ocupações adultas e atividades sérias (Marquez, 2011, p. 3).

De acordo com Moura (1991) o jogo - no nosso caso atividades lúdicas - deve possuir um propósito claro, ou seja, o educador precisa atribuir uma intenção específica ao jogo. Essa intenção deve ter como enfoque proporcionar a aprendizagem. O jogo deve auxiliar no ensino dos conceitos matemáticos, permitindo que os estudantes adquiram habilidades nessa área, facilitando o desenvolvimento das operações matemáticas e levando-os do conhecimento inicial ao conhecimento mais elaborado.

O autor apresenta também aproximações entre a utilização de jogos e a solução de problemas, dividindo os problemas em dois grupos: problemas desencadeadores da aprendizagem e problemas de aplicação. O primeiro consiste em problemas que não permitem uma solução imediata, exigindo do aluno a criação de um plano de ação. Isso envolve a busca de conhecimentos anteriores, comparando situações semelhantes ou sintetizando conhecimentos prévios, a fim de romper com o conhecimento anterior e chegar a uma solução. Já o segundo grupo compreende problemas que requerem o uso de definições e algoritmos discutidos em sala de aula. São problemas de aplicação direta, onde o aluno pode recorrer a referências anteriores, como anotações de aula, para resolvê-los.

A brincadeira "enlaçando uma dupla" é um exemplo do primeiro grupo, onde requer uma abordagem cuidadosa e estratégica, uma vez que não existe uma solução óbvia e rápida para a tarefa, estimulando as crianças a pensarem criticamente e a desenvolverem um plano de ação para alcançar o objetivo.

Como mencionado anteriormente, as brincadeiras e mágicas podem também ser interpretadas como formas lúdicas de explorar conceitos fundamentais da Teoria dos Nós. De maneira sucinta, na manipulação do barbante, ao criar diferentes configurações, as crianças podem experimentar como as mudanças nas amarrações afetam a configuração global, proporcionando uma introdução intuitiva à Teoria dos Nós. Adicionalmente, tais atividades estimulam o pensamento lógico e abstrato, permitindo a exploração de diversas manipulações, a investigação de padrões e sequências, o pensamento crítico e o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas.

Ademais, tais atividades lúdicas com o uso de barbante podem despertar a curiosidade das crianças acerca de conceitos matemáticos mais avançados, como topologia, propriedades dos nós e a aplicação prática da Teoria dos Nós em diferentes áreas do conhecimento, como biologia e química. Esse estímulo pode contribuir para despertar o interesse pela matemática e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos científicos envolvidos. Nesse contexto, ao proporcionar a exploração de conceitos sem a pressão do ensino formal, o processo de aprendizagem torna-se mais leve e prazeroso. Como resultado, espera-se que o aluno possa construir conceitos matemáticos de maneira lúdica e descontraída, aproveitando a experiência enquanto se diverte.

4.2 CONTEXTUALIZAÇÃO NORMATIVA E DIRETRIZES EDUCACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para as Séries de 5ª a 8ª, estabelecidos em 1998, delineiam diversos objetivos fundamentais para o Ensino Fundamental. Entre esses objetivos, destaca-se a exploração de variadas fontes de informação e o uso de recursos tecnológicos como meio de adquirir e construir conhecimentos. Ademais, o desenvolvimento do pensamento lógico, da criatividade, da intuição e da capacidade de análise crítica são estimulados como meios para formular questões sobre a realidade e buscar soluções para problemas, sendo primordial a habilidade de selecionar procedimentos e verificar sua adequação.

O PCN (1998) apresenta os jogos como uma forma interessante de apresentar problemas de maneira atrativa, estimulando a criatividade na busca por soluções, os quais permitem a simulação de situações-problema que exigem ação imediata e vivas, incentivando o planejamento estratégico. Além disso, os jogos ajudam a construir uma atitude positiva em relação aos erros, uma vez que permitem correções naturais durante a ação, sem consequências negativas duradouras. Eles podem também contribuir para o desenvolvimento de atitudes como enfrentar desafios, buscar soluções, desenvolver o pensamento crítico, a intuição e a criação de estratégias, além da capacidade de alterá-las quando os resultados não são satisfatórios.

Segundo o PCN (1998), o uso de jogos como recurso nas atividades escolares proporciona aos professores uma oportunidade para analisar e avaliar diversos aspectos dos alunos. Essas atividades permitem que se observe a compreensão dos estudantes em relação ao conteúdo, a facilidade com que constroem estratégias vencedoras, sua habilidade em descrever e comunicar os procedimentos utilizados, bem como a capacidade de realizar comparações entre resultados obtidos e previsões ou hipóteses feitas anteriormente.

> A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para o estudante e um estímulo para o desenvolvimento de sua competência matemática. [...] o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos “supõe um fazer sem obrigação externa e imposta” (Brasil, 1998, p. 47).

O documento ainda apresenta objetivos e finalidades do ensino de Matemática no Ensino Fundamental, cuja finalidade é construir a cidadania do aluno, destacamos os seguintes tópicos:

> – Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
>
> – Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
>
> – Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 1998, p. 48).

Evidencia-se a relevância das possíveis conexões existentes entre a disciplina da Matemática e outras áreas do conhecimento, bem como suas relações com o cotidiano e com os Temas Transversais. Por outro lado, o documento também afirma que apesar de situações do cotidiano serem fundamentais para dar significado aos conteúdos estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Uma vez que, caso contrário muitos conteúdos importantes seriam descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata.

Durante o período de 1980 a 1995, foram elaboradas propostas pedagógicas que buscavam enfatizar a resolução de problemas e a exploração da Matemática a partir de situações do cotidiano e interligadas com outras disciplinas escolares. Essas abordagens foram incorporadas aos princípios norteadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, permanecendo atualmente como diretrizes fundamentais para o ensino dessa matéria.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil (DCNEI), para alcançar os objetivos, as propostas pedagógicas das instituições de Educação Infantil devem incluir diretrizes que além de promover o trabalho em equipe, incentivem a criação de ambientes e horários adequados. Dentre as apresentadas, iremos destacar as seguintes:

> – A indivisibilidade das dimensões expressivo motora, afetiva, cognitiva, linguística, ética, estética e sociocultural da criança;
>
> – A participação, o diálogo e a escuta cotidiana das famílias, o respeito e a valorização de suas formas de organização;
>
> – O reconhecimento das especificidades etárias, das singularidades individuais e coletivas das crianças, promovendo interações entre crianças de mesma idade e crianças de diferentes idades (Brasil, 2010, p. 21).

Conforme estabelecido pelo Documento Curricular Nacional da Educação Infantil (DCNEI) de 2010, os pilares fundamentais das abordagens pedagógicas nessa fase compreendem as interações e as brincadeiras, visando proporcionar vivências que fortaleçam a confiança e a participação das crianças tanto em atividades individuais quanto em grupo. Ademais, busca-se estimular a curiosidade, a exploração, o encanto, o questionamento e o desenvolvimento do conhecimento das crianças em relação ao mundo físico, social, temporal e natural. De igual modo, é essencial fomentar o envolvimento e a interação das crianças com diversas manifestações artísticas, tais como música, artes plásticas e visuais, cinema, fotografia, dança, teatro, poesia e literatura.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o ato de brincar faz parte dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento na Educação Infantil.

> Brincar cotidianamente de diversas formas, em diferentes espaços e tempos, com diferentes parceiros (crianças e adultos), ampliando e diversificando seu acesso a produções culturais, seus conhecimentos, sua imaginação, sua criatividade, suas experiências emocionais, corporais, sensoriais, expressivas, cognitivas, sociais e relacionais (Brasil, 2018, p. 38).

A BNCC ainda afirma que uma das responsabilidades do educador consiste em refletir, selecionar, organizar, planejar, mediar e monitorar o conjunto de práticas e interações, assegurando a diversidade de situações que estimulem o desenvolvimento integral das crianças.

Tabela 4.1 – Habilidades da BNCC que abordam a cooperação ou brincadeiras no Ensino Infantil

Faixa etária	**Campo**	**Habilidade**
Crianças pequenas (4 anos a 5 anos e 11 meses)	"O eu, o outro e o nós”	**(EI03EO03)** Ampliar as relações interpessoais, desenvolvendo atitudes de participação e cooperação.
Crianças pequenas (4 anos a 5 anos e 11 meses)	“Corpo, gestos e movimentos"	**(EI03CG02)** Demonstrar controle e adequação do uso de seu corpo em brincadeiras e jogos, escuta e reconto de histórias, atividades artísticas, entre outras possibilidades.

Fonte: Elaborado pela autora (dados retirados da BNCC)

Com isso, torna-se evidente a importância do brincar, do trabalho em grupo e da interação e cooperação entre as crianças desde o ensino infantil, pois contribui também no desenvolvimento de habilidades sociais e emocionais. Inclusive, podemos destacar também a utilização de jogos, pois como elucidado pelo PCN (1998), os jogos são uma forma interessante de apresentar problemas de maneira atrativa; são uma forma de estímulo à coordenação motora. Tais brincadeiras envolvem atividades físicas, como manipulação de peças, movimentação corporal e coordenação motora fina, que são essenciais para o desenvolvimento motor das crianças.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ressalta a importância de estabelecer uma conexão entre as experiências adquiridas na Educação Infantil e o início do Ensino Fundamental - Anos Iniciais (1º ao 5º ano). Essa articulação visa proporcionar aos alunos o desenvolvimento de novas maneiras de se relacionar com o mundo, bem como a capacidade de ler e formular hipóteses sobre fenômenos, testá-las, refutá-las e chegar a conclusões, tudo isso em uma postura ativa de construção do conhecimento.

As Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica destacam a importância do lúdico na vida escolar ao longo do Ensino Fundamental, e ele não deve se restringir apenas à Arte e à Educação Física.

As seguintes habilidades da BNCC estão inseridas na unidade temática denominada “Brincadeiras e Jogos”, elas são encontradas no Componente Curricular de Educação Física. Tais habilidades são abordadas desde o 1º ao 5º do Ensino Fundamental. A partir do 6º esta unidade temática tem como objetivo de conhecimento os jogos eletrônicos.

Tabela 4.2 – Habilidades referente à unidade temática "Brincadeiras e Jogos" de Educação Física

Ano do Ensino Fundamental	**Habilidade**
1º e 2º	**(EF12EF01)** Experimentar, fruir e recriar diferentes brincadeiras e jogos da cultura popular presentes no contexto comunitário e regional, reconhecendo e respeitando as diferenças individuais de desempenho dos colegas.
1º e 2º	**(EF12EF03)** Planejar e utilizar estratégias para resolver desafios de brincadeiras e jogos populares do contexto comunitário e regional, com base no reconhecimento das características dessas práticas.
3º ao 5º	**(EF35EF01)** Experimentar e fruir brincadeiras e jogos populares do Brasil e do mundo, incluindo aqueles de matriz indígena e africana, e recriá-los, valorizando a importância desse patrimônio histórico cultural.
3º ao 5º	**(EF35EF02)** Planejar e utilizar estratégias para possibilitar a participação segura de todos os alunos em brincadeiras e jogos populares do Brasil e de matriz indígena e africana.
3º ao 5º	**(EF35EF04)** Recriar, individual e coletivamente, e experimentar, na escola e fora dela, brincadeiras e jogos populares do Brasil e do mundo, incluindo aqueles de matriz indígena e africana, e demais práticas corporais tematizadas na escola, adequando-as aos espaços públicos disponíveis.

Fonte: Elaborado pela autora (dados retirados da BNCC)

A BNCC (2018), apresentam as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, destacamos as seguintes:

> – Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
>
> – Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
>
> – Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar

> aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (Brasil, 2018, p. 267).

Amarrar sapatos, por exemplo, é uma atividade diária na qual se utiliza nós para prender os cadarços. Podemos relacionar essa ação ao uso de processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas cotidianos.

Ao amarrar os sapatos, estamos aplicando conceitos matemáticos, como geometria e topologia, para criar e manipular os nós de forma eficiente. Pois existem diferentes maneiras de amarrar os cadarços, como o nó simples, o nó duplo e o nó de laço. Cada um desses nós tem suas propriedades específicas e podem ser escolhidos de acordo com a necessidade. Podemos encontrar também, conceitos de representação visual, como diagramas ou animações digitais, que ilustram passo a passo para uma amarração correta, ajudando em uma melhor compreensão do processo.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018, p. 266).

Um dos itinerários contemplados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2018) abrange a área do conhecimento da matemática e suas tecnologias, cujo objetivo é aprofundar os conhecimentos estruturantes para aplicar diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho. Adicionalmente, visa organizar arranjos curriculares que possibilitem estudos em resolução de problemas e análises complexas, incluindo abordagens funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia. Esse itinerário também abrange temáticas modernas e relevantes, como robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais e sistemas dinâmicos, dentre outras. A proposta é considerar o contexto local de cada instituição educacional e as possibilidades de oferta disponíveis pelos sistemas de ensino.

Ao explorar a Teoria dos Nós por meio das brincadeiras e mágicas com barbantes, podemos vivenciar conceitos matemáticos de forma concreta e lúdica. A manipulação dos barbantes e a criação de nós proporcionam uma oportunidade para compreender princípios geométricos, como a topologia, e desenvolver habilidades de raciocínio espacial. Elas podem ser trabalhadas também no âmbito da resolução de problemas, uma vez que é necessário encontrar soluções para criar e desfazer os nós, aplicando assim estratégias de resolução de problemas.

Quanto ao Ensino Médio, a BNCC afirma que é essencial que os estudantes adquiram habilidades relacionadas aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas. Para isso, eles devem empregar seu próprio modo de raciocínio, representação, comunicação e argumentação. Por meio de discussões e validações colaborativas, os alunos têm a oportunidade de aprender conceitos, bem como desenvolver representações e procedimentos cada vez mais avançados.

> Para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática (Brasil, 2018, p. 529).

Apesar do termo “raciocínio” aparecer diversas vezes ao longo da BNCC, o documento não apresenta nenhuma habilidade específica na área da Matemática, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, que desenvolvam essa temática.

No que se refere à "resolução de problemas", as habilidades englobam o desenvolvimento das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, além de conceitos como razão, fração, mediatriz, bissetriz e progressão aritmética e geométrica. Essas habilidades são, portanto, aplicadas na resolução de problemas; no entanto, a abordagem não inclui a resolução de questões presentes no cotidiano.

4.3 OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Uma Olimpíada de Matemática é um evento que envolve uma série de desafios matemáticos, compostos por problemas intrigantes que exigem o uso da matemática para encontrar soluções. Na maioria das provas realizadas em várias competições desse tipo, os problemas não exigem um conhecimento matemático avançado, mas sim a capacidade de interpretar, criar e improvisar soluções rapidamente. Como é comum em competições esportivas, os participantes que se destacam recebem prêmios, como medalhas, menções honrosas e, em alguns casos, bolsas de estudo. No entanto, para muitos competidores, o verdadeiro prêmio está no simples prazer de competir e interagir com outros estudantes.

> Entre os objetivos pela realização das olimpíadas de matemática, destacam-se:
>
> – Descobrir e estimular talentos para o estudo da Matemática.
> – Contribuir na melhoria do ensino da Matemática em todos os níveis.
> – Aumentar a integração entre as universidades e as escolas.
> – Favorecer o aumento das relações entre alunos e professores, em escala nacional e internacional (Bagatini, 2010, p. 13).

4.3.1 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional que teve início em 2005 com o objetivo de incentivar o estudo da matemática e descobrir talentos nessa área. Inicialmente voltada apenas para escolas públicas no Brasil, a OBMEP passou a incluir escolas privadas a partir de 2017. A realização da OBMEP é responsabilidade do

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), e conta com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC).

A competição da OBMEP é destinada aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, bem como aos alunos do Ensino Médio de escolas públicas e privadas, em âmbito municipal, estadual e federal. Ela é organizada em três níveis: nível 1 (alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental), nível 2 (alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental) e nível 3 (alunos da 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio). Cada nível consiste em duas fases de prova. A primeira fase é composta por 20 questões de múltipla escolha, enquanto a segunda fase contém 6 questões discursivas.

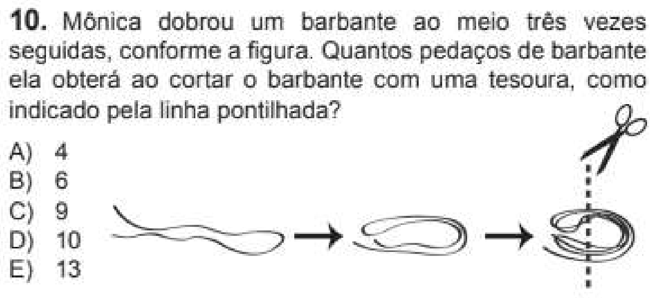
Os anos de 2018, 2019, 2021 e 2022 apresentaram alterações na estrutura. Como a adição do nível A (alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental) à primeira fase nas provas de 2018 e 2019. Em 2021, houve a Olimpíada Carioca, na qual a fase 1 contava com 4 níveis. Nas provas de 2022 foram incluídas as Olimpíadas Mirim, onde encontramos o Mirim 1 (alunos do 2º e 3º ano do Ensino Fundamental) e Mirim 2 (alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental). Em 2023 as provas voltaram a ser destinadas apenas aos alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, retomando o formato original.

De acordo com o regulamento da 18ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), esse projeto nacional tem os seguintes objetivos: estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil; contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; promover a difusão da cultura matemática; identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas; incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas e privadas, contribuindo com a sua valorização profissional; contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; e promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

A OBMEP busca contribuir para a melhoria da qualidade do ensino de matemática, tanto para os estudantes quanto para os professores. São disponibilizados gratuitamente diversos materiais na internet, na qual os professores podem utilizar em suas aulas, como banco de questões, provas de edições anteriores, videoaulas e simulados. No entanto, de acordo com Azevedo, Alves e Oliveiro (2018), todos esses recursos disponibilizados pelo site da OBMEP precisam ser acompanhados por uma metodologia de ensino mais específica para a resolução de problemas, para obter então melhores resultados e atrair um público maior de estudantes.

Iremos apresentar algumas situações problemas encontradas em provas da OBMEP, que abordam a utilização de barbante no desenvolvimento. A solução apresentada para as questões são provenientes do site da OBMEP.

Figura 4.1 – Questão 10: Nível 1 - Fase 1 (2012)



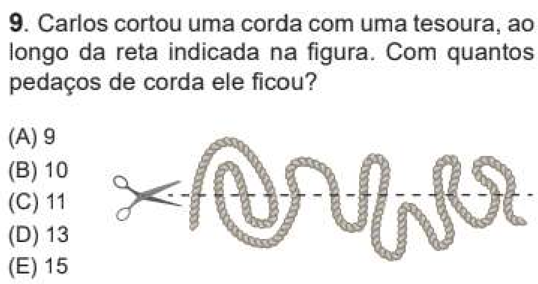
Fonte: Página OBMEP - Provas e Soluções

A **solução** disponibilizada pelo site da OBMEP diz:

> O corte pela linha indicada corta o barbante em oito pontos diferentes, produzindo assim nove pedaços de barbante. Em geral, ao se fazer qualquer número de cortes em um pedaço de barbante, o número de pedaços é um a mais que o número de cortes (OBMEP, 2012).

Nessa questão, a ideia de cortar um barbante e a relação entre o número de cortes e o número de pedaços de barbante estão relacionadas à teoria dos nós, porque, ao fazer um corte em um pedaço de barbante, estamos criando pontos de intersecção que dividem o barbante em múltiplos pedaços.

Figura 4.2 – Questão 9: Nível 1 - Fase 1 (2021)



Fonte: Página OBMEP - Provas e Soluções

Solução: Cada novo corte acrescenta um pedaço, exceto o último que acrescenta dois pedaços. Seguindo a figura, vemos que o número de cortes é 12, logo, o número de pedaços é 12 + 1 = 13.

Novamente, temos o conceito de cortes em um barbante, adicionando um novo pedaço para cada corte realizado. O último corte, no entanto, adiciona dois pedaços (devido à interseção entre o barbante e a linha do corte).

Figura 4.3 – Questão 10: Mirim 1 - Fase 1 (2022)

Fonte: Página OBMEP - Provas e Soluções

Solução:

Das alternativas apresentadas, a única em que a miçanga redonda, na forma de esfera, não está entre as outras duas, é a alternativa E, segundo a ordem de percurso da linha que forma o colar.

Figura 4.4 – Solução

Fonte: OBMEP - Soluções

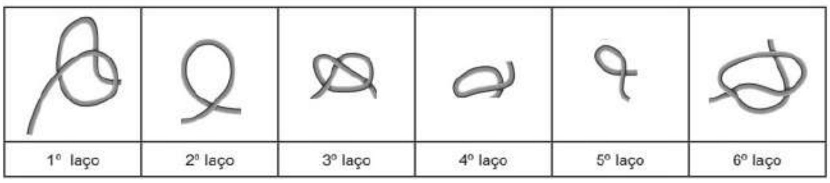
Figura 4.5 – Questão 12: Mirim 1 - Fase 1 (2022)

Fonte: Página OBMEP - Provas e Soluções

Solução:

Da esquerda para a direita, vemos que o barbante possui seis laços.

Figura 4.6 – Solução



Fonte: OBMEP - Soluções

No primeiro laço o barbante passa por trás sem fazer nó.

No segundo laço o barbante não passa por dentro e não faz nó.

No terceiro laço o barbante passa por dentro e faz nó.

No quarto laço o barbante não passa por dentro e não faz nó.

No quinto laço o barbante não passa por dentro e não faz nó.

No sexto laço o barbante passa por trás sem fazer nó.

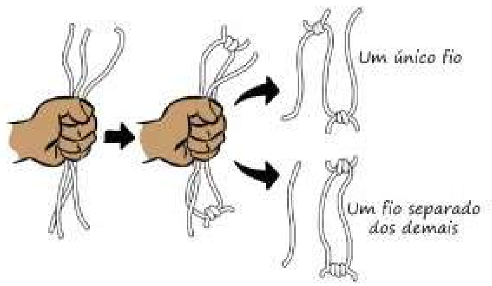
Assim, ao puxar as pontas do barbante, irá aparecer somente 1 nó.

Nesta questão em particular, ao examinar cada um dos laços presentes ao longo do barbante, podemos estabelecer uma conexão significativa com o conceito de diagramas de nós. Por meio do estudo da Figura 4.6, evidencia-se de forma clara e concisa quais partes do barbante se situam abaixo de outras em cada iteração. Essa visualização clara e informativa desempenha um papel colaborativo na resolução do exercício.

Os barbantes, juntamente com o simples ato de dar um nó, podem servir como uma ferramenta interessante para explorarmos diversos conceitos, nas duas questões seguintes, por exemplo, trabalhamos com a probabilidade.

Figura 4.7 – Questão 5: Nível 3 - Fase 2 (2013)

5. Homero segura um número ímpar de barbantes idênticos e pede para Sofia amarrar pares de pontas ao acaso, de cada lado de sua mão, até que sobre somente uma ponta de cada lado. A figura ilustra o procedimento para três barbantes.



a) Com três barbantes, qual é a probabilidade de que todos os barbantes fiquem unidos em um único fio?

b) Com cinco barbantes, qual é a probabilidade de que um dos pedaços originais de barbante fique separado dos demais?

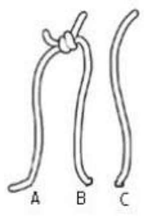
c) Com cinco barbantes, qual é a probabilidade de que os barbantes fiquem unidos em um único fio?

Fonte: Página OBMEP - Provas e Soluções

Solução:

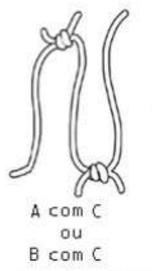
a) Ao amarrar dois barbantes na parte superior da mão, ocorre a situação ilustrada na figura 4.8. Os resultados possíveis ao amarrar as duas pontas do outro lado da mão são mostrados nas figuras 4.9 e 4.10. Existem 2 possibilidades para o caso da figura 4.9 (os barbantes se unem em um único fio) e 1 possibilidade para o caso da figura 4.10, totalizando 3 possibilidades. Portanto, a probabilidade de formar um único fio é de $\frac{2}{3}$. Podemos expressar esse raciocínio afirmando que, ao dar um nó na parte superior da mão, a ponta correspondente na parte inferior possui 3 opções: permanecer sozinha ou se unir a uma das outras duas pontas. Em 2 dessas opções (unir-se a uma das outras duas), é formado um único fio. Assim, a probabilidade de formar um único fio é de $\frac{2}{3}$.

Figura 4.8 – Solução



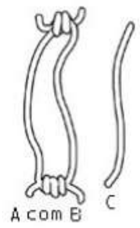
Fonte: OBMEP - Soluções

Figura 4.9 – Solução



Fonte: OBMEP - Soluções

Figura 4.10 – Solução



Fonte: OBMEP - Soluções

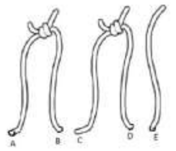
b) Como na solução do item a), após dar dois nós de um dos lados da mão, a outra ponta do barbante não usado tem 5 escolhas, sendo que em apenas 1 delas ele ficará solto; logo, a probabilidade de que um dos pedaços fique isolado $\frac{1}{5}$.

c) Na solução do item b), após dar dois nós em um dos lados da mão, a ponta não utilizada do barbante tem cinco opções: permanecer solta ou unir-se a uma das outras quatro pontas. Para que forme um único fio, ela deve ser unida a outra ponta, o que ocorre com uma probabilidade de $\frac{4}{5}$. Feito isso, a outra ponta do fio ao qual a ponta solta foi unida tem três possibilidades: permanecer solta ou unir-se a uma das outras duas pontas. Para formar um único fio, ela deve ser unida a outra ponta, o que ocorre com uma probabilidade de $\frac{2}{3}$. Portanto, a probabilidade de os barbantes formarem um único fio é

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

Para ilustrar esse raciocínio, observamos na figura abaixo que a ponta E pode ser unida às pontas A, B, C e D. Por exemplo, se ela for unida à ponta A, para que os barbantes formem um único fio, é necessário que a ponta B seja unida a uma das pontas C ou D.

Figura 4.11 – Solução



Fonte: Página OBMEP - Provas e Soluções

Nesta questão, a análise envolve o estudo dos nós, pois, ao dar um nó, as pontas correspondentes possuem opções de se unirem ou permanecerem soltas, gerando diferentes configurações.

Figura 4.12 – Questão 5: Nível 3 - Fase 2 (2018)

5. Em uma caixa há 6 barbantes idênticos. Em cada etapa, duas extremidades de barbantes são escolhidas ao acaso e amarradas com um nó. O processo é repetido até que não haja mais extremidades livres.

a) Quantos nós são feitos até o final do processo?

b) Qual é a probabilidade de que, na primeira etapa, sejam amarradas as duas pontas de um mesmo barbante?

c) Qual é a probabilidade de que, na última etapa, sejam amarradas as duas pontas de um dos barbantes originais?

d) Qual é a probabilidade de que, ao final do processo, os barbantes estejam todos amarrados em um único laço?

Fonte: Página OBMEP - Provas e Soluções

Diferente da questão anterior apresentaremos somente o raciocínio para chegar a resposta do item a, pois nos é pertinente, entretanto o desevolvimento e raciocínio das demais questões são encontradas no do site da OBMEP.

Solução:

a) No início do processo há 12 pontas livres. Cada vez que um nó é dado, duas dessas pontas são amarradas, reduzindo em duas unidades o número de pontas livres. Portanto, são dados exatamente seis nós.

b) $\dfrac{1}{11}$

c) $\frac{1}{11}$

d) $\frac{256}{693}$

Diante disso, torna-se evidente que a teoria dos nós se manifesta de maneira recorrente, mesmo que implicitamente, nas questões da OBMEP. Além disso, constatamos que é viável abordar conceitos específicos dessa teoria, como exemplificado nas questões 12 de 2022 e 5 de 2018, que se revelaram como oportunidades para explorar o tema de forma mais direta.

Contudo, percebemos que os benefícios vão além da teoria dos nós, pois a incorporação de barbantes nas últimas questões dissertativas mostrou-se uma proposta eficaz para abordar essa ferramenta simples e explorar outros conteúdos pedagógicos.

Consequentemente, a presença da teoria dos nós na OBMEP, assim como a exploração de outras temáticas através do uso de barbantes, coloca em destaque a importância de diversificar as metodologias de ensino, estimulando uma aprendizagem mais significativa e enriquecedora para os alunos. Ao trabalharmos com abordagens inovadoras, não apenas fomentamos o interesse pela matemática, mas também incentivamos a resolução de problemas de maneira criativa e original.

4.3.2 Concurso Canguru de Matemática

O Canguru sem Fronteiras é um concurso internacional de Matemática que teve origem na Austrália nos anos 80, quando o professor Peter O'Halloran criou uma prova digital que era resolvida por milhares de alunos simultaneamente. Em 1991, dois professores franceses, André Deledicq e Jean Pierre Boudine, decidiram iniciar o concurso na França e deram a ele o nome de "Kangourou" em homenagem ao colega australiano.

A partir daí, surgiu o concurso Kangourou sans Frontières, que atualmente está presente em mais de 95 países, incluindo o Brasil. A cada ano, um grupo seleto de professores se reúne para discutir o ensino da Matemática e preparar as provas que serão aplicadas nos países participantes.

A Associação Canguru sem Fronteiras tem como objetivo promover a divulgação da Matemática por meio de várias iniciativas, sendo a realização do concurso uma das principais. O concurso envolve e motiva milhares de alunos pelo mundo, estimulando o interesse e a participação ativa na disciplina.

O Canguru sem Fronteiras é uma competição na qual estudantes de escolas públicas e privadas, do 3° ano do Ensino Fundamental ao 3° ano do Ensino Médio, têm a oportunidade de participar. O evento é dividido em seis diferentes níveis de provas, cada um adaptado para as respectivas séries dos alunos.

Os participantes enfrentam de 24 a 30 testes de múltipla escolha, que abrangem uma variedade de temas matemáticos. Os seis níveis de provas são os seguintes:

I. **Nível P:** Destinado a alunos do 3° e 4° anos do Ensino Fundamental.

II. **Nível E:** Projetado para alunos do 5° e 6° anos do Ensino Fundamental.

III. **Nível B:** Direcionado a alunos do 7° e 8° anos do Ensino Fundamental.

IV. **Nível C:** Voltado para alunos do 9° ano do Ensino Fundamental.

V. **Nível J:** Elaborado para alunos da 1ª e 2ª séries do Ensino Médio.

VI. **Nível S:** Criado para alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Essa estrutura permite que os estudantes participem de acordo com o seu nível escolar, garantindo que as provas sejam adequadas ao seu conhecimento e habilidades matemáticas específicas.

No Brasil, o número de escolas participantes tem crescido de forma expressiva desde o início do concurso em 2009. Através dessa competição, o Canguru sem Fronteiras contribui para a valorização e o desenvolvimento do ensino de Matemática no país.

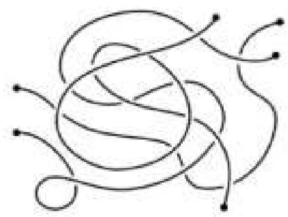
Dentre os objetivos do projeto estão: ampliar e incentivar o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos; contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis da Educação Básica; favorecer o estudo de maneira interessante e contextualizada, aproximando os alunos do universo da Matemática; estimular a capacidade dos alunos de obter prazer e satisfação intelectual na resolução de problemas de Matemática pura ou aplicada.

Apresentaremos a seguir algumas situações problemas encontradas em questões do Canguru que envolvem o uso de barbante no desenvolvimento dos problemas. As soluções apresentadas, são disponibizadas pelo Canguru.

Figura 4.13 – Questão 2: Nível PE - Problema de 3 pontos (2016)

2. Quantos pedaços de barbante existem no desenho ao lado?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

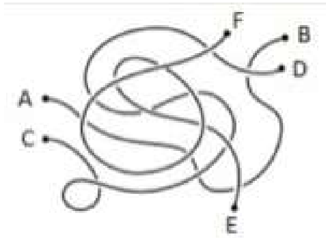


Fonte: Página Canguru - Provas Anteriores

Solução:

Existem três segmentos de barbante. Um deles inicia em A e finaliza em B. O segundo tem seu começo em C e sua extremidade em D. Por fim, o terceiro começa em E e se encerra em F, como podemos ver na figura abaixo.

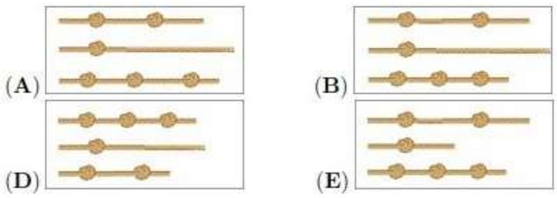
Figura 4.14 – Solução



Fonte: Página Canguru - Provas Anteriores

Figura 4.15 – Questão 16: Nível PE - Problema de 4 pontos (2018)

16. O Carlos cortou uma corda em 3 bocados iguais e depois deu alguns nós iguais em cada bocado. Que figura pode representar os três bocados de corda?



Fonte: Página Canguru - Provas Anteriores

Solução:

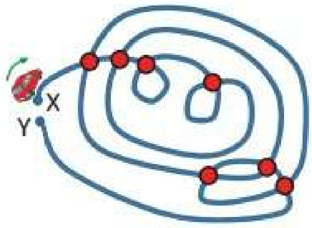
De acordo com o gabarito, a alternativa correta é a letra B.

Uma vez que Carlos dividiu a corda em três pedaços de comprimento igual, ao amarrar nós, o comprimento total da corda diminuirá. Portanto, a corda mais longa será aquela com apenas um nó, em segundo lugar estará a corda com dois nós, e por fim, a corda que parecerá ser a mais curta será aquela com três nós, exatamente como é ilustrado na alternativa B.

Figura 4.16 – Questão 8: Nível P - Problema de 3 pontos (2023)

08. SÉRGIO DIRIGE SEU CARRO DO PONTO **X** AO PONTO **Y**. EM CADA CRUZAMENTO, INDICADO POR UM CÍRCULO NA FIGURA, ELE FAZ UMA PARADA ANTES DE SEGUIR ADIANTE, SEM VIRAR. QUANTAS PARADAS ELE FAZ NO PERCURSO?

(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 14 **(E)** 15



Fonte: Página Canguru - Provas Anteriores

Solução:

Ao todo, Sérgio faz 14 paradas no percurso, portanto, a alternativa correta é a letra D.

Nesta questão, podemos abordar o conceito de cruzamento fazendo referências às "paradas" mencionadas no enunciado.

Figura 4.17 – Questão 2: Nível E - Problema de 3 pontos (2021)

2. Quantos peixes terão suas cabeças apontando para o anel quando a corda for esticada?

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

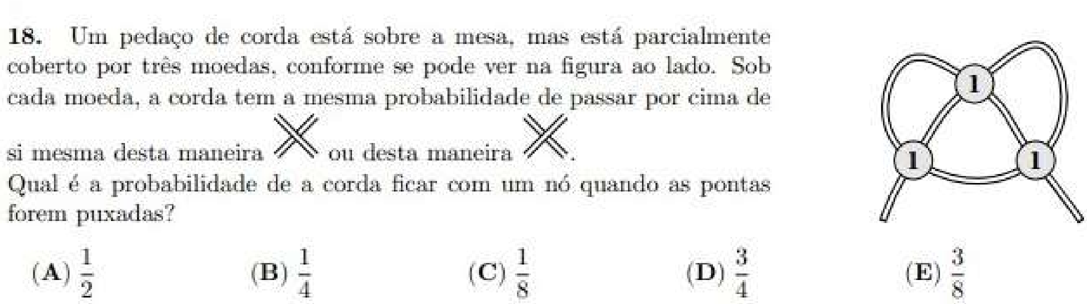
Fonte: Página Canguru - Provas Anteriores

Solução:

De acordo com o gabarito, a alternativa correta é a letra C, desse modo, 6 peixes estarão com a cabeça apontada para o anel caso a corda for esticada.

Nesta questão em particular, podemos explorar o conceito de orientação, já que, ao puxar a corda, os peixes adotarão uma determinada direção.

Figura 4.18 – Questão 18: Nível S - Problema de 4 pontos (2021)



18. Um pedaço de corda está sobre a mesa, mas está parcialmente coberto por três moedas, conforme se pode ver na figura ao lado. Sob cada moeda, a corda tem a mesma probabilidade de passar por cima de si mesma desta maneira ou desta maneira .
Qual é a probabilidade de a corda ficar com um nó quando as pontas forem puxadas?

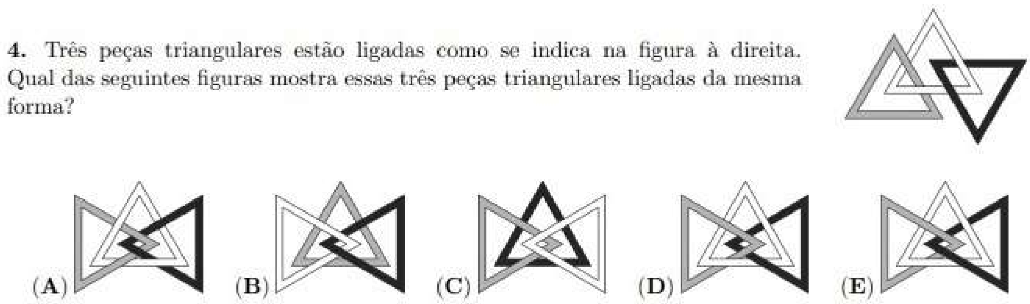
(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** $\frac{3}{4}$ **(E)** $\frac{3}{8}$

Fonte: Página Canguru - Provas Anteriores

Solução:
B) $\frac{1}{4}$

Neste cenário, ao explorar as duas maneiras de como o barbante se entrelaça consigo mesmo, podemos estabelecer uma analogia com os sinais de cruzamentos. (Figura 2.18).

Figura 4.19 – Questão 4: Nível S - Problema de 3 pontos (2019)



4. Três peças triangulares estão ligadas como se indica na figura à direita. Qual das seguintes figuras mostra essas três peças triangulares ligadas da mesma forma?

Fonte: Página Canguru - Provas Anteriores

Solução:
Alternativa D.

Essa questão aborda enlace, pois se considerarmos as peças como nós triviais poligonais, igual mencionado na figura 2.3, temos uma união de nós.

5 A MAGIA DOS NÓS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA E SUA APLICAÇÃO

Este capítulo representa a fase final que conclui o objetivo deste trabalho. Nele, será apresentada uma proposta didática, juntamente com a sua aplicação em uma Unidade Escolar Estadual, seguida pela análise dos resultados obtidos.

5.1 PROPOSTA DIDÁTICA

I. **Título da atividade:** A magia dos *nós*

II. **Disciplina:** Matemática

III. **Público-alvo:** Não há restrições de público-alvo.

IV. **Turma:** 9º ano do Ensino Fundamental

V. **Tema:** Teoria dos Nós

VI. **Conteúdos trabalhados:**

   – História dos Nós.
   – Teoria dos Nós.
   – Brincadeiras e mágicas com barbantes.

VII. **Material necessário:**

   – Barbante.
   – Clipe.
   – Fio de conduíte (opcional).
   – Fita adesiva.
   – Folha sulfite.
   – Lousa.
   – Lápis.
   – Marcador para quadro (ou giz).
   – Pirulito (opcional).
   – Projetor DataShow (opcional).
   – Tesoura.

VIII. **Objetivo geral:**

- Conhecer a história dos nós e suas aplicações.
- Compreender as definições da teoria dos nós através de atividades interativas com barbantes.

IX. **Objetivos específicos:**

- Desenvolver habilidades de trabalho em equipe por meio de atividades de grupo relacionadas aos nós.
- Aprimorar o raciocínio lógico, bem como a coordenação motora fina e seriada através da prática de construir diferentes tipos de nós.
- Construir conceitos matemáticos de forma lúdica e prática durante as brincadeiras e mágicas com barbantes.

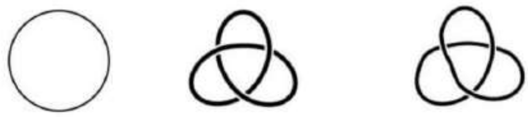
X. **Desenvolvimento:**

a) ***Introdução (30 minutos):***

- Iniciar a aula, denominada "A magia dos nós" explicando que esta será uma aula introdutória a um tema do âmbito da matemática pura, do ensino superior. Salientando que esta exposição será conduzida de forma lúdica e envolvente, para garantir que todos se sintam à vontade.
- Questionar os alunos se eles têm conhecimento sobre o conceito de nós e peça que um dos alunos se voluntarie para fornecer sua própria explicação. Em seguida, apresente a definição formal de um nó, fazendo uso de um barbante como uma ferramenta prática para ilustrar o conceito de um nó na prática.
- Perguntar aos alunos se eles têm alguma ideia sobre a origem dos nós. Em seguida, explique que os nós têm uma longa história, remontando a milhares de anos, quando as pessoas os usavam em suas vestimentas e para tarefas como a caça.
- Fale sobre a lenda do Nó Górdio.
- Questionar se os alunos têm conhecimento sobre a existência da Teoria dos Nós, um tópico da matemática pura frequentemente associado ao ensino superior. Em seguida, explique que o objetivo é introduzir conceitos e definições desse conteúdo nas aulas do Ensino Básico, esclarecendo o que vem a ser o Ensino Básico. Posteriormente, explique que irão explorar esses conceitos de uma forma lúdica, por meio de brincadeiras e truques com barbantes.
- Breve menção a algumas aplicações.

– Utilizando um material flexível, como um fio de conduíte, crie três tipos de nós: o nó trivial, o nó trifólio e uma variação do nó trivial em uma forma diferente. Apresente os nomes de cada um deles e, em seguida, indague a diferença entre eles, introduzindo assim o conceito de cruzamento.

Figura 5.1 – Nós



Fonte: Santos (2021, p. 55, p. 97)

– Convidar um dos alunos a acender a lanterna do celular e posicioná-la sobre esses nós. Isso nos ajudará a introduzir o conceito de projeção.
– Na lousa, desenhe os três nós mencionados na etapa anterior (o nó trivial, o nó trifólio e a variação do nó trivial). Em seguida, pergunte aos alunos qual desses nós pode ser transformado no nó trivial e, então, explique a distinção entre projeção e diagrama.
– Pedir a um aluno que venha e demonstre como transformar o nó específico no nó trivial. Em seguida, mencione que essa transformação foi realizada utilizando os Movimentos de Reidemeister e explique que esses movimentos são usados para classificar e estudar nós.
– Por último, fornecer uma breve explicação sobre a tabulação dos nós.

b) ***Brincadeiras e mágicas com barbantes (45 minutos):***

– Perguntar aos alunos quais brincadeiras com barbantes eles já conhecem. Em seguida, informar que durante a aula, serão exploradas 5 diferentes brincadeiras com barbantes (todas elas estão detalhadas no Capítulo 3). Lembrando que é totalmente opcional a ordem e a escolha das brincadeiras. O docente pode decidir a ordem e quais brincadeiras deseja explorar.
– Começar com a brincadeira "Enlaçando uma dupla", convidando dois alunos voluntários para participar. Enquanto eles tentam se soltar, explicar como essa brincadeira se relaciona com a Teoria dos Nós.
– Em seguida, introduzir a brincadeira "Cama de gato". Caso nenhum aluno conheça essa brincadeira, convidar um aluno e guiá-lo nos movimentos corretos. Após a demonstração, destaque os conceitos que podem ser extraídos dessa brincadeira.

- Para a atividade da "Estrela de mão" ou "Estrela Pitagórica", forneça aproximadamente 1 metro de barbante para cada aluno e construa essa estrela junto com eles. Enquanto circula pela sala auxiliando na construção, destaque os benefícios que essa brincadeira nos proporciona, conforme especificado no capítulo 4, seção 4.1.
- Agora, com a mágica dos “Clipes enlaçados”, distribua um para cada um dos alunos (já posicionados), advertindo para eles não mexerem enquanto faz a entrega, após isso, pergunte aos alunos o que eles acham que irá acontecer, e portanto peça para eles puxarem as pontas do papel rápido. Posteriormente explique o porquê dessa brincadeira também fazer alusão à Teoria dos Nós.
- Para encerrar, com a atividade "O jogo do enlaçamento", convide 5 alunos para participar e fazerem suas apostas. Explique que se o dedo prender o barbante, eles ganham (podendo negociar um pequeno prêmio como recompensa).

c) ***Apresentação de questões da OBMEP e questionário (15 minutos):***

- Por meio de uma apresentação de slides, ou escrevendo na lousa, destaque algumas das questões da OBMEP encontradas no Capítulo 4, subseção 4.3.1, que envolvem nós ou o uso de barbantes em sua resolução. Não iremos resolver essas questões, o objetivo é demonstrar que, mesmo implicitamente, elas abordam conceitos normalmente associados ao ensino superior.
- Para encerrar, será distribuído um questionário aos alunos para que possam avaliar a aula.

XI. **Avaliação:**

Após a etapa anterior de desenvolvimento, será distribuído um questionário com o propósito de permitir que os alunos avaliem a aula e sua metodologia. Além disso, queremos saber se as atividades com o barbante contribuíram positivamente para o processo de aprendizado. O questionário incluirá as seguintes perguntas:

- Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?
- Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?
- As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?
- Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

Figura 5.2 – Material necessário

Fonte: Elaborado pela autora

5.2 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

A proposta elaborada na etapa anterior foi aplicada em uma escola estadual situada na cidade de São Carlos, interior de São Paulo.

Em 2021, a escola em questão adotou o Programa de Ensino Integral (PEI), começando com uma jornada de 7 horas. A partir de 2022, a escola expandiu essa carga horária, se tornando uma PEI de 9 horas, o que significa que os alunos permanecem nas instalações escolares das 7h30 às 16h30. Além das disciplinas convencionais, os alunos participam de atividades adicionais, tais como o Projeto de Vida, Itinerários Formativos e Clube Juvenil. Além disso, eles têm a oportunidade de frequentar aulas denominadas Eletivas, Orientações de Estudo e Práticas Experimentais.

No ano de 2023, a escola contava com 248 alunos matriculados no Ensino Fundamental e 106 alunos no Ensino Médio, totalizando 354 estudantes no seu quadro acadêmico. A instituição oferece ensino abrangendo do 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. Adicionalmente, a escola disponibiliza o programa de Educação de Jovens e Adultos (EJA) no período noturno, com um total de 38 alunos matriculados nessa modalidade.

A proposta foi aplicada em duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental. A turma 9º ano A é composta por 29 alunos, enquanto a turma 9º ano B conta com 32 alunos. Embora tenha sido feita uma tentativa de seguir o mesmo roteiro de aula em ambas as turmas, cada uma delas apresentou seu próprio ritmo e particularidades.

A primeira aplicação ocorreu na sala do 9º ano A durante a aula de Práticas Experimentais. O objetivo dessas aulas é promover a utilização de atividades investigativas que estimulem o desenvolvimento de estratégias de aprendizagem ativa, aprofundem a compreensão de conceitos e incentivem a participação ativa dos alunos na construção de seus conhecimentos. Isso os capacita a assumir o papel de aprendizes autônomos de maneira eficaz, adquirindo competências essenciais que lhes permitam analisar, explorar, comparar e relacionar informações e eventos de forma apropriada.

No início, nenhum dos alunos estava familiarizado com a Teoria dos Nós, mas todos conseguiram expressar em suas próprias palavras o conceito de um nó. Eles demonstraram interesse quando a lenda do Nó Górdio foi apresentada. Quando lhes foram mostrados três tipos de nós (trivial, trifólio e outra representação do trivial), eles demonstraram interesse, e um dos alunos se voluntariou para transformar o nó trivial na outra representação que havíamos demonstrado.

Quanto às brincadeiras, os alunos tinham conhecimento da "Cama de Gato"e alguns da "Enlaçando uma dupla". Começamos com a atividade de "Clipes enlaçados". Em seguida, distribuímos um pedaço de barbante para cada aluno, permitindo que eles brincassem de "Cama de Gato". Eles se divertiram com essa atividade. Posteriormente, usando o mesmo pedaço de barbante, construímos a "Estrela Pitagórica". Alguns alunos tiveram dificuldades iniciais em manusear o barbante, mas, com paciência, todos conseguiram.

A próxima brincadeira foi "Enlaçando uma dupla". Alguns alunos se recordaram dos passos necessários para se soltar, enquanto outros ficaram ainda mais enlaçados. Alguns mencionaram a lenda do Nó Górdio, que havia sido discutida anteriormente, como justificativa para simplesmente soltarem seus pulsos.

Por fim, a atividade "O jogo do enlaçamento" despertou o interesse dos alunos, que quiseram participar. Sempre que achavam que haviam descoberto o espaço certo, modificávamos a configuração para que não prendesse nenhum dedo. No final, os alunos foram recompensados com um pirulito.

Figura 5.3 – 3 Nós

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.4 – Introduzindo

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.5 – Manipulando o nó

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.6 – Cama de Gato

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.7 – Cama de Gato

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.8 – Cama de Gato

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.9 – Cama de Gato

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.10 – Cama de Gato

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.11 – Passo a passo Estrela Pitagórica

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.12 – Passo a passo Estrela Pitagórica

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.13 – Estrela Pitagórica

Fonte: Elaborado pela autora

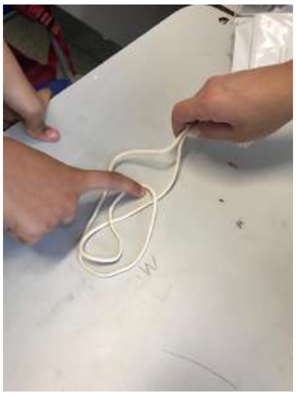
Figura 5.14 – Enlaçando uma dupla

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.15 – Enlaçando uma dupla

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.16 – O jogo do enlaçamento

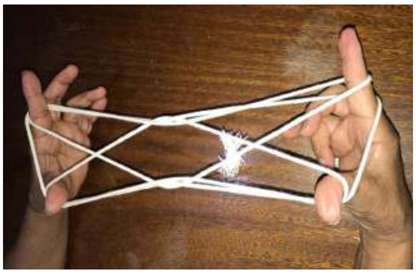


Fonte: Elaborado pela autora

A atividade no 9º ano B ocorreu durante uma aula regular. Mais uma vez, os alunos não tinham conhecimento prévio sobre a Teoria dos Nós ou a lenda do nó Górdio. Quando lhes pedimos para definir o que era um nó, cada um ofereceu sua própria interpretação. Ao introduzirmos o conceito de projeção, eles perceberam que não conseguiam distinguir claramente quais partes do nó passavam por cima ou por baixo das outras, o que tornou mais fácil para eles entender o conceito de diagrama.

Quanto às brincadeiras, a única que eles já conheciam era "Cama de Gato". Quando distribuímos barbante para que brincassem, além das configurações mencionadas na seção anterior, eles apresentaram uma configuração adicional que não conhecíamos, à qual deram o nome de "bandeira", como mostrado na figura abaixo:

Figura 5.17 – "Bandeira"

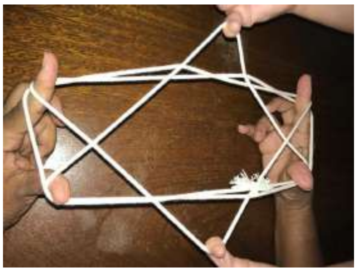


Fonte: Elaborado pela autora

Para alcançar essa configuração, em vez de puxar internamente a partir da configuração número 4 (Figura 3.19), puxe externamente e passe por cima.

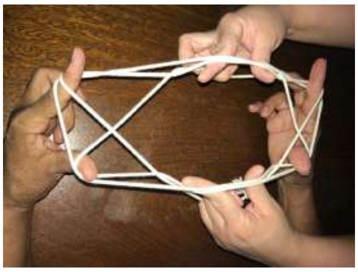
A seguir, apresenta-se a continuação da brincadeira, a partir do momento em que se chega na "bandeira":

Figura 5.18 – Puxando as pontas da "bandeira" com os dedinhos



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.19 – Passando por baixo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.20 – Configuração número 4 (3.19)

Fonte: Elaborado pela autora

Em seguida, propusemos a construção da "Estrela Pitagórica". Alguns alunos tiveram dificuldades, mas, em geral, todos conseguiram fazê-la rapidamente; após a construção, foi questionado o número de cruzamentos dessa estrela, os alunos souberam responder corretamente. Nessa turma, devido ao tempo disponível, conseguimos também ensinar a "Estrela de mão", que despertou o interesse de todos os alunos. Embora alguns tenham enfrentado dificuldades para manusear o barbante, o resultado foi satisfatório. Inclusive, uma das outras professoras de matemática da escola se interessou pela construção das estrelas e quis participar da aula.

Em seguida, distribuímos o material para "Clipes enlaçados" e, por fim, a atividade "Enlaçando uma Dupla". Alguns alunos já conheciam o procedimento e ajudaram os colegas que não estavam familiarizados com a atividade. Devido ao tempo limitado, não pudemos realizar a atividade "O jogo do enlaçamento". No entanto, todos os alunos receberam um pirulito como recompensa.

Figura 5.21 – Introdução

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.22 – Construindo Cama de Gato

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.23 – Cama de Gato

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.24 – Passo a passo Estrela Pitagórica

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.25 – Estrela Pitagórica

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.26 – Estrela Pitagórica

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.27 – Construindo Estrela de mão

Fonte: Elaborado pela autora

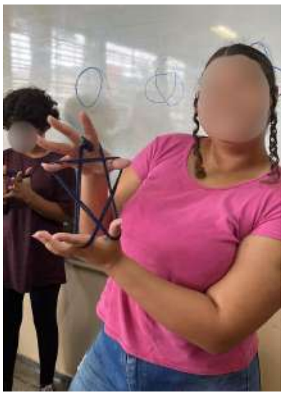
Figura 5.28 – Estrela de mão

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.29 – Ajudando na cosntrução

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.30 – Estrela de mão



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.31 – Estrela de mão

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.32 – Clipes enlaçados

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.33 – Enlaçando uma dupla

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.34 – Enlaçando uma dupla

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.35 – Enlaçando uma dupla

Fonte: Elaborado pela autora

5.3 DEVOLUTIVA DOS QUESTIONÁRIOS

A prática revelou resultados positivos; o propósito central da atividade era introduzir de maneira intuitiva os conceitos da Teoria dos Nós, apresentando-os de forma lúdica e envolvente. Além disso, antecipava-se outros desenvolvimentos, como descrito na seção 4.1. Oliveira, Solé, Fortuna (2010) afirmam que a importância do jogo no desenvolvimento humano é tão significativa que mesmo durante conflitos, ele pode contribuir para o crescimento e a aprendizagem.

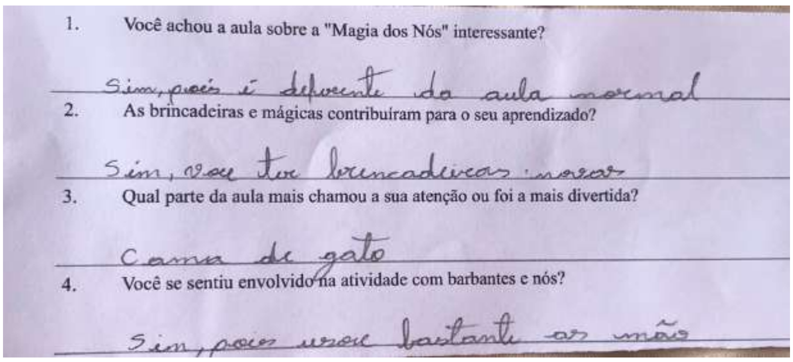
Cabe ao professor, o importante papel de atribuir o conhecimento à brincadeira

> Portanto, é importante o papel dos professores para aplicar o conhecimento do valor do brincar, agindo na prática, com as crianças. Brincando, a criança representa a relação do corpo e movimento, traduzido e o expressa através de gestos, e este por sua vez, relaciona-se com a apresentação , a compreensão e a percepção do mundo que a criança possui. A sociabilidade das brincadeiras e jogos permitem que se crie laços emocionais, integração produtiva e unidade do grupo. (Serrão, 1999, p. 99 *apud* Mendes, 2014, p. 12).

Um ponto de observação relevante foi evidenciado durante a construção da "Estrela de mão"na turma 9ºB. Nessa atividade, que exigia uma maior destreza nos movimentos das mãos, notou-se que as mãos dos alunos tremiam devido ao esforço e à dificuldade em manipular o barbante, destacando a relevância de considerar com esse tipo de recurso em sala de aula, não apenas para abordar conceitos matemáticos, mas também para promover o desenvolvimento da coordenação motora.

Os resultados obtidos confirmam essa conclusão, como ilustrado nas figuras a seguir. É importante destacar que "Estrela 1" se relaciona com a brincadeira da "Estrela Pitagórica", enquanto "Estrela 2" representa a "Estrela de mão".

Figura 5.36 – Devolutiva 9ºA


1. Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?

Sim, pois é diferente da aula normal

2. As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?

Sim, você tem brincadeiras novas

3. Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?

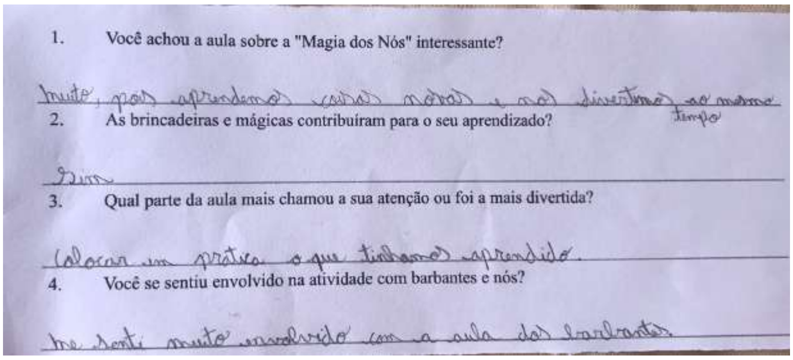
Cama de gato

4. Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

Sim, pois usou bastante as mãos

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.37 – Devolutiva 9ºA


1. Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?

muito, pois aprendemos coisas novas e nos divertimos ao mesmo tempo

2. As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?

Sim

3. Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?

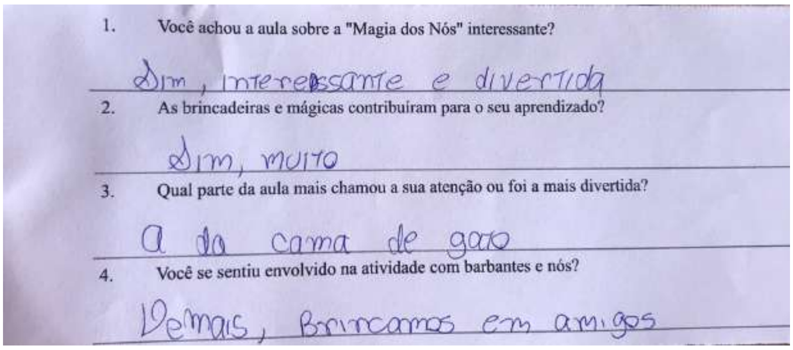
Colocar em prática o que tínhamos aprendido.

4. Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

me senti muito envolvido com a aula dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.38 – Devolutiva 9ºA


1. Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?

Sim, interessante e divertida

2. As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?

Sim, muito

3. Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?

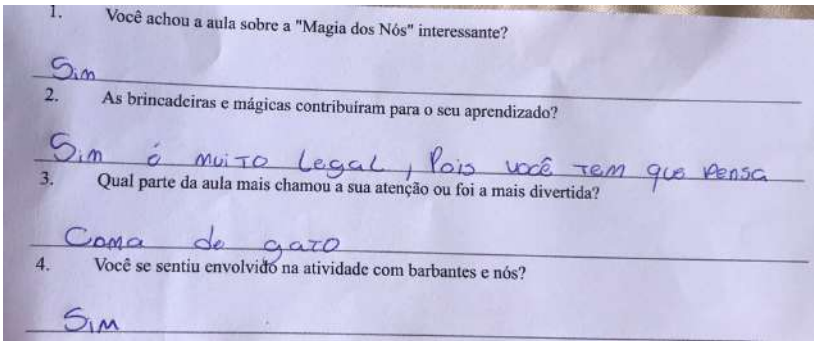
a da cama de gato

4. Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

Demais, Brincamos em amigos

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.39 – Devolutiva 9ºA


1. Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?

Sim

2. As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?

Sim é muito legal, Pois você tem que pensa

3. Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?

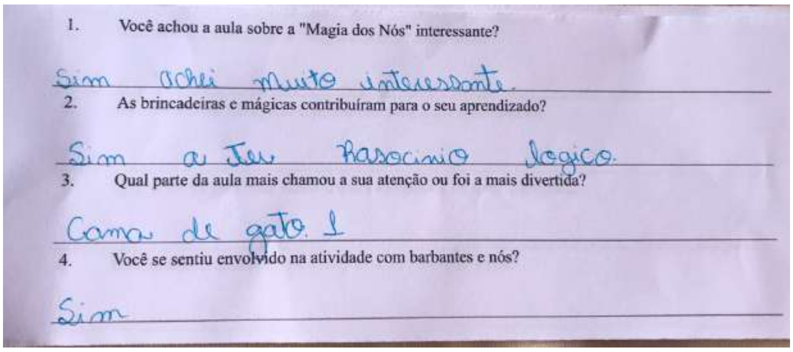
Cama de gato

4. Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

Sim

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.40 – Devolutiva 9ºB



1. Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?

Sim achei muito interessante.

2. As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?

Sim a Jeu Rasocinio logico.

3. Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?

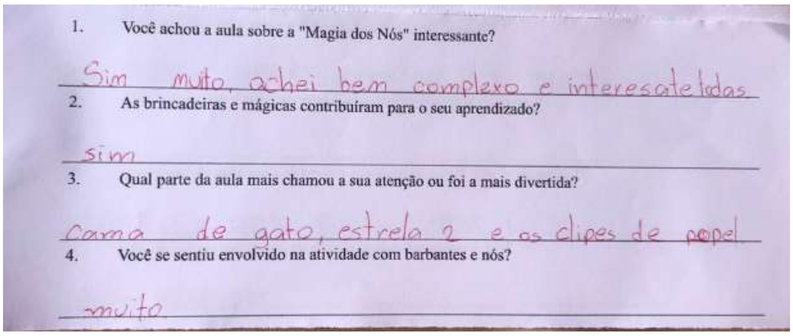
Cama de gato. 1

4. Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

Sim

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.41 – Devolutiva 9ºB



1. Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?

Sim muito, achei bem complexo e interesate todas

2. As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?

sim

3. Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?

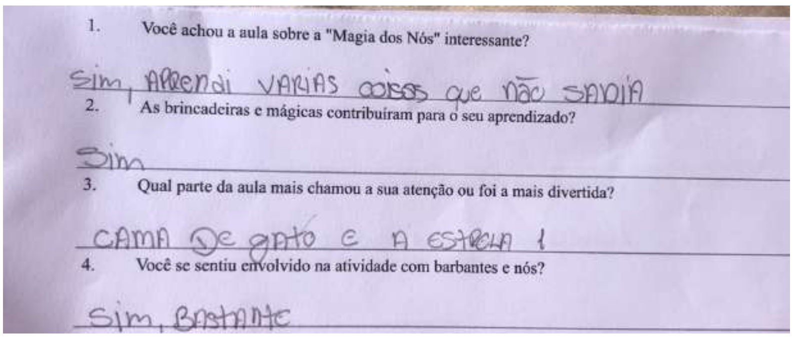
cama de gato, estrela 2 e os clipes de papel

4. Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

muito

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.42 – Devolutiva 9ºB



1. Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?

Sim, APRENDi VARIAS coisas que não SABIA

2. As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?

Sim

3. Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?

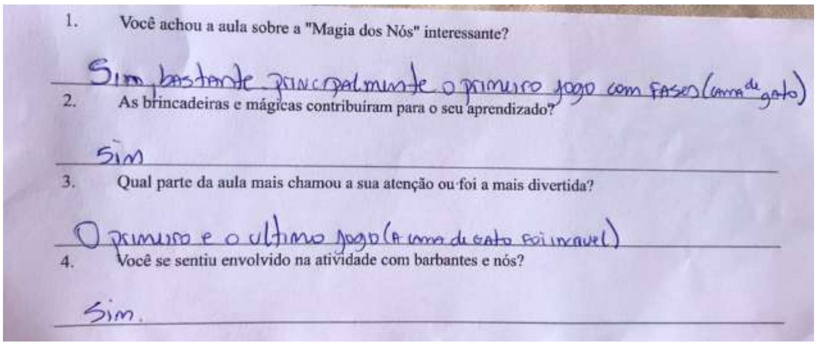
CAMA De gato e A ESTRELA 1

4. Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

Sim, BASTANTE

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5.43 – Devolutiva 9ºB



1. Você achou a aula sobre a "Magia dos Nós" interessante?

Sim, bastante principalmente o primeiro jogo com fases (cama de gato)

2. As brincadeiras e mágicas contribuíram para o seu aprendizado?

Sim

3. Qual parte da aula mais chamou a sua atenção ou foi a mais divertida?

O primeiro e o ultimo jogo (A cama de gato foi incrivel)

4. Você se sentiu envolvido na atividade com barbantes e nós?

Sim.

Fonte: Elaborado pela autora

Dessa forma, podemos perceber que é possível introduzir um conteúdo do Ensino Superior na Educação Básica de forma divertida e descontraída, pois assim os alunos podem aprender enquanto se divertem. A matemática também pode ser algo divertido e há a possiblidade de sair do tradicional e aprender brincando.

6 OFICINA ALICE NO PAÍS DOS BARBANTES

Como mencionado no capítulo anterior, o intervalo de almoço dos alunos é das 12h15 às 13h20. Por conseguinte, foi aplicada uma oficina de barbantes. Elaboramos um desenho em uma cartolina com o propósito de cativar a atenção dos alunos. Optamos pelo título "Alice no País dos Barbantes" (Figura 6.1). Posteriormente, fixamos a cartolina em uma parede e organizamos uma mesa para dispor os barbantes.

Dentre as atividades exploradas durante o tempo disponível, incluímos "Enlaçando uma dupla", "Cama de gato"e "Estrela Pitagórica". A distribuição de pirulitos ao término das brincadeiras atraiu a atenção dos alunos, resultando em um aumento progressivo de crianças interessadas em participar. Destas atividades, a mais apreciada foi "Enlaçando uma dupla". Alguns participantes se envolviam ao redor de seus colegas, enquanto outros se arriscavam a subir nas cadeiras para tentar se soltar.

Figura 6.1 – Alice no País dos Barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.2 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.3 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.4 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.5 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.6 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.7 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.8 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.9 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.10 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.11 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.12 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6.13 – Oficina dos barbantes

Fonte: Elaborado pela autora

Ao explorar a confecção de figuras com barbantes e integrar atividades como "Enlaçando uma dupla", "Cama de gato" e "Estrela Pitagórica", a proposta não apenas envolve a matemática e a coordenação motora, mas também sugere conexões com elementos literários, como a referência a *Alice no País das Maravilhas*, obra do romancista Lewis Carroll.

Ademais, essa abordagem estimula a criatividade e a imaginação dos alunos. Ao mesclar a história de *Alice* com atividades práticas, como o enlaçar de barbantes, há uma oportunidade de integrar literatura, artes e matemática, estimulando assim uma visão integrada do conhecimento.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de ensino da Teoria dos Nós por meio de mágicas e brincadeiras com barbante é uma abordagem inovadora e eficaz para introduzir conceitos matemáticos de forma lúdica e interativa na Educação Básica. A utilização do barbante como ferramenta pedagógica proporciona aos alunos a oportunidade de explorar os nós de maneira prática, estimulando a manipulação e visualização dos conceitos estudados. Adicionalmente, tais práticas oferecem benefícios adicionais para o desenvolvimento das habilidades motoras, raciocínio lógico e capacidade de resolução de problemas dos estudantes, tornando o processo de aprendizagem mais envolvente e significativo.

É perceptível a relevância da iniciativa no contexto educacional, tendo em vista a contextualização com as diretrizes curriculares nacionais, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) o que nos mostra como ela pode contribuir para o alcance dos objetivos educacionais propostos pelo sistema de ensino.

A apresentação de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), tais como do Concurso Canguru de Matemática, que abordam o uso de barbante em seus enunciados evidencia a aplicabilidade prática dos conhecimentos adquiridos por meio das mágicas e brincadeiras com nós, consolidando a importância desses conceitos no contexto matemático mais amplo.

A participação dos alunos nas atividades propostas, mesmo diante de desafios iniciais, como a falta de familiaridade com a Teoria dos Nós, demonstra a capacidade de envolver os estudantes em experiências de aprendizado variadas e dinâmicas. O sucesso da abordagem, evidenciado pela receptividade dos alunos e pelo aumento do interesse ao longo das atividades, ressalta a relevância de estratégias pedagógicas inovadoras para promover um aprendizado mais envolvente e significativo.

A implementação bem-sucedida da proposta "Alice no País dos Barbantes"nas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, revelou-se como uma estratégia pedagógica diferente e eficaz. A experiência proporcionou uma abordagem interdisciplinar, integrando conceitos matemáticos, coordenação motora e literatura de maneira lúdica e participativa.

Desse modo, ao unir a história dos nós, a Teoria dos Nós, e as atividades práticas com barbante, esta proposta se mostra uma abordagem incentivadora para a educação matemática, permitindo que os alunos desenvolvam habilidades cognitivas e motoras, bem como ampliar sua compreensão dos conceitos matemáticos, tornando o processo de aprendizagem mais prazeroso e efetivo.

REFERÊNCIAS

ADAMS, C. C. **The knot book**. American Mathematical Soc., 1994.

ADAMS, C. C. **Why knot?**: An introduction to the mathematical theory of knots. Springer Science e Business Media, 2004.

ASCHER, M.; ASCHER, R. **Mathematics of the Incas**: Code of the Quipu. New York: Dover Publications, 1981.

ATZINGEN, M. C. V. **A história do brinquedo**: para as crianças conhecerem e os adultos se lembrarem. São Paulo: Alegro, 2001. 223 p.

AZEVEDO, I. F.; ALVES, F. R. V. OLIVEIRO, J. C. **Obmep e teoria das situações didáticas:** uma proposta para o professor de matemática. Educação Matemática em Revista-RS, v. 12, n. 19, p. 82-92, 2018. Disponível em: <https://www.academia.edu/download/58043559/ITA-PB.pdf>. Acesso em: 10 de jul de 2023.

BAGATINI, A. **Olimpíadas de Matemática, altas habilidades e resolução de problemas**. Orientadora: Marilaine de Fraga Sant'Ana. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. UFRGS. 2010. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/29144>. Acesso em: 06 de out. de 2023.

BAULENAS. A. O quipu, código secreto dos incas. **National Geographic**. Portugal, 2022. Disponível em: National Geographic - O quipu, código secreto dos incas. Acesso em: 27 de mar. de 2023.

BERLEKAMP, E. R.; CONWAY, J. H.; GUY, R. K. **Winning Ways for Your Mathematical Plays**, Volume 4. 2 ed. A K Peters, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 25 de maio de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica**. Brasília, DF: MEC/SEB, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/diretrizescurriculares_2012.pdf>. Acesso em: 14 de jul. de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil**. Brasília, DF: MEC/SEB, 2010. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/diretrizescurriculares_2012.pdf>. Acesso em: 14 de jul. de 2023.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática – Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 14 de jul. de 2023.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. **Parecer nº 3, de 8 de novembro de 2018**. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observadas as alterações introduzidas na LDB pela Lei nº 13.415/2017. Diário Oficial da União, Brasília, 21 de novembro de 2018, Seção 1, p. 49. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file>. Acesso em: 14 de jul. de 2023.

CANGURU DE MATEMÁTICA. **Quem somos**. Disponível em: Canguru de Matemática - Quem somos. Acesso em 13 de set. de 2023.

CANGURU DE MATEMÁTICA. **Provas anteriores**. Disponível em: Canguru de Matemática - Provas anteriores. Acesso em 13 de set. de 2023.

CHANDRASEKARAN, L. How one physicist is unraveling the mathematics of knitting. **Science News**. 2021. Disponível em: Science News - How one physicist is unraveling the mathematics of knitting. Acesso em: 11 de maio de 2023.

COARACY, J. **A história do nó de Górdio**. Extra Globo. 2008. Disponível em: Extra Globo - A história do nó de Górdio. Acesso em: 27 de mar. de 2023.

COHEN, E. LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**. Porto Alegre: Penso, 2017.

COLLI, E. **Introdução à Teoria dos Nós**. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~colli/cursos/LabMat-2004/Nos.pdf>. Acesso em 02 de abr. de 2023.

DIAS, S. M. M. **Introdução à Teoria de Nós**. Orientadora: Lúcia Fernández-Suaréz. Tese de Doutorado - Universidade do Minho. 2004. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/2998>. Acesso em: 02 de abr. de 2023.

FERREIRA, D. A.; CUNHA, M. M. A formação do pedagogo e a Matemática na prática docente. **Revista Eventos Pedagógicos**. v. 3, n.2, p.73 – 82, Maio – Jul. 2012. Disponível em: <https://periodicos.unemat.br/index.php/reps/article/view/9230>. Acesso em: 18 de jul. de 2023.

FREITAS, G. M. **Trabalhos em grupos como estratégia pedagógica da prática docente na educação infantil**. Orientador: Nair Aparecida Rodrigues Pires. Dissertação de Mestrado Profissional Educação e Docência. Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG. Belo Horizonte - MG. 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/35590>. Acesso em: 18 de jul. de 2023.

GALLAHUE, D.L.; OZMUZ, J. C. **Compreendendo o Desenvolvimento Motor**: bebês, crianças e adolescentes e adultos. São Paulo, Ed. Phorte, 2001.

GAUTHIER, C. *et al*. **Ensino Explícito e Desempenho dos alunos**: a gestão dos aprendizados. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

LAURO, M. M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Exacta**, São Paulo, v.3, p. 35-48, 2005. <https://www.redalyc.org/pdf/810/81000304.pdf>. Acesso em: 10 de jun. de 2023.

LIVINGSTON, C. **Knot Theory**. Washington: The Mathematical Association of America, 1993.

MALAGUTTI, P. L. A.; SAMPAIO, J. C. V. Mágicas, Matemática e outros mistérios. São Carlos: **EduFSCar**, 2008.

MALAGUTTI, P. L. A.; SAMPAIO, J. C. V. Mágicas com papel, geometria e outros mistérios. São Carlos: **EduFSCar**, 2013.

MARCONDES, S. A, GIMENEZ R. **Aquisição de habilidades motoras seriadas**: influência da experiência prévia no desempenho da dança. Rev. bras. ci. e mov. v.18, n. 3, pág. 5-11. 2010. Disponível em: <https://portalrevistas.ucb.br/index.php/rbcm/article/view/1152/1698>. Acesso em: 20 de jul. de 2023.

MARQUEZ, C. G. Aprender brincando. **IV EDIPE - Encontro Estadual de Didática e Prática de Ensino**, 2011. Disponível em: <http://cepedgoias.com.br/edipe/ivedipe/pdfs/didatica/co/436-1103-1-SM.pdf>. Acesso em: 18 de jul. de 2023.

MENDES, F. M. S. **Brincar e aprender:** a importância do lúdico para as crianças. Orientadora: Liliane Hellmann. Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR. 2014. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20798/2/MD_EDUMTE_2014_2_37.pdf>. Acesso em: 09 de nov. de 2023.

MOREIRA, C. F. N. **Formação de professores dos anos iniciais do ensino fundamental**: preparação para olimpíadas de matemática. Orientador: Krerley Irraciel Martins Oliveira. 2019. 149 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019. Disponível em: <https://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/5428>. Acesso em 16 de jul. de 2023.

MOURA, M. O. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. O jogo e a construção do conhecimento na pré-escola. Série Idéias – FDE, São Paulo, v.10, p. 45-53, 1991. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf>. Acesso em: 20 de jul. de 2023.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP). **Provas e Soluções**. *In*: IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 12 jul. 2023.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP). **Regulamento**. Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/docs/2023/18a_OBMEP_REGULAMENTO.pdf>. Acesso em: 13 de jul.de 2013.

OLIVEIRA, H. S. **Teoria dos Nós**. Orientador: Gabriel Ponce. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. UNICAMP - Campinas, 2018. Disponível em: <www.ime.unicamp.br/~gaponce/wp-content/uploads/2019/03/Teoria-dos-NÃ§s-Final1.pdf>. Acesso em: 10 de abr. de 2023.

OLIVEIRA, V.B.; BORJA SOLÉ, M.; FORTUNA, T.R. **Brincar com o outro caminho de saúde e bem-estar**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

PELLEGRINI, A. M. *et al.* Desenvolvendo a coordenação motora no ensino fundamental. **São Paulo: UNESP**, 2005.

RODRIGUES, W. **Nó celta:** qual o significado desse símbolo milenar? Edublin. Disponível em: <https://www.edublin.com.br/no-celta/>. Acesso em: 06 de out. de 2023.

SANTOS, J. E. Uma Breve Introdução à Teoria dos Nós com Sugestões para o Ensino Básico. 1° ed. Aracaju: **Editora SEDUC**, 2021. v.1. 120 p. Disponível em: <https://siae.seduc.se.gov.br/siae.servicefile/api/File/Downloads/e0d25580-88fe-472f-b9fa-bb1c10cca6a0>. Acesso em: 02 de abr. de 2023.

SESC RIO PRETO. **Brincadeiras com Barbantes**. Youtube. 2020. 1 vídeo (6 min). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=RkWbxlrz44M>. Acesso em: 15 de dez. de 2023.

SOSSINSKY, A. B. **Knots:** mathematics with a twist. Cambridge: Harvard University Press, 2002.

TERRITÓRIO DO BRINCAR. **Figuras de Barbante- Nível Intermediário- Estrela de Mão**. Youtube. 2020. 1 vídeo (1 min). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=m5j_y3tn4KY>. Acesso em: 19 de jun. de 2023.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil