

O ensino de cálculo de áreas na Educação Básica

Autor: *Vitor Franco Armbruster*

Orientador: *Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Adriana Ramos
Luciene Bertoncello Nogueira
Luis Antonio Carvalho dos Santos

O ensino de cálculo de áreas na Educação Básica

Autor: *Vitor Franco Armbruster*

Orientador: *Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Adriana Ramos
Luciene Bertoncello Nogueira
Luis Antonio Carvalho dos Santos

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 13 de abril de 2023.

Vitor Franco Armbruster

Prof. Dr. Adilson Eduardo Presoto



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA -
CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP
13565-905

Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 13/2023/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso
Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

VITOR DE FRANCO ARMBRUSTER

O ENSINO DE CÁLCULO DE ÁREAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos - Campus São Carlos

São Carlos, 03 de abril de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Adilson Eduardo Presoto
Membro da Banca 1	Rafael Fernando Barostichi
Membro da Banca 2	Leandro Nery de Oliveira



Documento assinado eletronicamente por **Adilson Eduardo Presoto**,
Professor(a) do Ensino Superior, em 16/06/2023, às 11:15, conforme
horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº](#)
[8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Fernando Barostichi**,
Professor(a) do Ensino Superior, em 16/06/2023, às 14:11, conforme
horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº](#)
[8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Nery de Oliveira**,
Professor(a) do Ensino Superior, em 20/06/2023, às 14:25, conforme
horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº](#)
[8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site



<https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1024150** e o código CRC **BCC2804C**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.013484/2023-90

SEI nº 1024150

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Resumo

Abordaremos o ensino de cálculo de áreas e de volumes, usando uma abordagem axiomática e elementar. Também estudar-los-emos via o Método de Fatiamento e o Princípio de Cavalieri, dados pela Teoria de Integração.

Esse trabalho poderá servir como material de apoio para o ensino de geometria na Educação Básica, pois abordaremos o ensino de áreas de cálculo de área tanto no seu aspecto elementar como nos seus fundamentos.

Abstract

We address the teaching of area and volume calculations, employing axiomatic and elementary approaches. Furthermore, we study them through the Method of Slicing and the Principle of Cavalieri, as derived from Integration Theory.

This work may serve as supplementary material for the teaching of geometry in Basic Education, as we cover the teaching of area calculations both from an elementary aspect and from their foundational principles.

Sumário

1	Introdução	1
2	Áreas de figuras planas	3
2.1	Definição de área	3
2.2	Figuras planas	4
2.2.1	Teorema de Bolay-Gerwien	6
2.2.2	Disco	7
2.3	Integral de Riemman	10
2.3.1	Teorema Fundamental do Cálculo	10
2.3.2	Retângulo	11
2.3.3	Triângulo retângulo	12
2.3.4	Elipse	12
2.3.5	Disco	12
2.4	Princípio de Cavalieri para áreas	13
2.4.1	Elipse	14
3	Volume de sólidos	15
3.1	Método da exaustão	16
3.2	Método de fatiamento	18
3.2.1	Elipsoide via integração	19
3.3	Princípio de Cavalieri para volumes	19
3.3.1	Elipsóide	20
3.3.2	Cone	20
3.3.3	Esfera	21
4	Aplicações	23
4.1	Princípio de Cavalieri no Geogebra	23
4.2	Geometria das abelhas-aula	23
4.2.1	Introdução	23
4.2.2	Objetivos	24
4.2.3	Desenvolvimento	24
4.2.4	Mosaicos	25

4.2.5	A geometria das abelhas	28
4.3	Referências Bibliográficas	31

Lista de Figuras

2.1	Quadrado de lado a .	4
2.2	Paralelogramo e retângulo equidecomponíveis.	5
2.3	Equidecomponibilidade de um triângulo.	5
2.4	Equidecomponibilidade de dois retângulos de áreas iguais.	6
2.5	Triângulos com arestas ED e CF .	8
2.6	Polígonos inscrito e circunscrito.	8
2.7	Circunferências concêntricas.	9
2.8	Circunferências com plígono inscrito.	9
2.9	Soma de Riemman.	10
2.10	Retângulo.	11
2.11	Triângulo retângulo.	12
2.12	Um quarto da elipse.	13
2.13	Um quarto do disco.	13
2.14	Seções do disco e da elipse.	14
3.1	Paralelepípedo oblíquo.	15
3.2	Prisma oblíquo.	16
3.3	Seção triangular.	21
3.4	Esfera e um cilindro contendo um cone.	21
4.1	Prisma hexagonal	24
4.2	Prisma triangular	25
4.3	Prisma quadrangular	25
4.4	Mosaico de cilindros	26
4.5	Mosaico de cilindros e prismas	27
4.6	Mosaico de prismas hexagonais	28
4.7	alvéolo das colméias, de [2].	28
4.8	1/4 do alvéolo	29
4.9	Face trapezoidal	30

Capítulo 1

Introdução

No Egito antigo, surgiram os primórdios de geometria, usados tanto no Egito quanto na Babilônia, principalmente para dimensionar áreas agricultáveis.

Na Grécia Antiga, o que prevalecia era a axiomática, um exemplo disso é o método de exaustão de Arquimedes, o qual se inscreve uma sequência de polígonos numa figura até a soma da área convergir para a área da figura, e diz que a área de um segmento parabólico é $b^3/3$, ou seja, um terço da área do retângulo de base b e altura b^2 e maior que a área dos retângulos interiores, mas menor do que a dos exteriores ao gráfico. Tales de Mileto ganhou fama após medir uma pirâmide com um pedaço de madeira, formando triângulos semelhantes e observou que os raios de sol que incidiam eram paralelos entre si, formando assim o Teorema de Tales, pelo qual temos que dadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal, a razão entre as medidas é proporcional.

No Renascimento, a Matemática era ligada à arte, com a leitura de textos teóricos, por exemplo, os textos da Grécia Antiga e análise de quadros. Vários cientistas da época negavam por exemplo, a existência dos números negativos, apesar de terem sido descobertos. A Matemática Elementar foi estudada por alguns matemáticos renascentistas. O período foi de retomada de alguns trabalhos da antiguidade, tanto na Matemática, quanto na arte e na literatura.

Atualmente, há uma maneira precisa de definir a área de regiões do plano, expandindo as ideias do Método de Arquimedes, que é a integral, o qual foi desenvolvido por Newton e Leibniz no século XVII.

Integral é um conceito que vemos em cálculo, que representa o limite da Soma de Rieman. Definido o conceito de integral, podemos usá-lo para calcular áreas e volumes.

Cavalieri foi um matemático italiano, que também foi padre. Ele desenvolveu um princípio no qual seccionamos dois sólidos, sejam R e S dois planos, obtemos que se o comprimento é proporcional a área também é proporcional, e para os volumes, temos em duas secções de sólidos se a área é proporcional, o volume é proporcional.

Esse trabalho servirá como potencial material de apoio para os professores da Educação Básica para o ensino de Geometria. Principalmente pelo Princípio de Cavalieri, pois esse

é essencial para o cálculo de áreas e volumes, por exemplo para o cálculo da área da elipse e o volume do elipsóide, e também o volume da esfera usando o volume do cone e do cilindro.

Uma observação importante é que o Cálculo não tem foco na Educação Básica, diferente da parte de Geometria Plana e Espacial. Nesse foi descoberta a Integral de Riemann, a qual é calculada a área através da variação de uma função no intervalo da variável.

Foram utilizados diversos materiais como bibliografia para a realização desse trabalho, como materiais relacionados ao Cálculo, a Análise e alguns artigos. Esse trabalho envolve interdisciplinaridade dentro da Matemática, pois abordaremos a Análise, o Cálculo e a Geometria.

Nesse trabalho, vamos abordar alguns assuntos como área de figuras planas, volume de sólidos, além de introduzir o conceito de integral e o Teorema Fundamental do Cálculo, com objetivo de compreender as fórmulas para área e volume de objetos geométricos, sendo um exemplo o Princípio de Cavalieri. Como exemplos, calcularemos as áreas do triângulo, paralelogramo, elipse e também o volume da esfera, do cone, do prisma e da pirâmide.

Capítulo 2

Áreas de figuras planas

2.1 Definição de área

Vamos utilizar alguns axiomas, com referência no livro [10], com os quais poderemos calcular áreas de figuras planas.

Axioma 2.1.1. *A área de uma região poligonal é dada por um único número maior do que 0.*

Axioma 2.1.2. *A área de duas regiões triangulares congruentes é igual.*

Axioma 2.1.3. *A área de uma região A que está contida na região B , é menor do que a da região B .*

Axioma 2.1.4. *Se a intersecção de duas regiões é vazia, a área da soma das duas regiões é igual a soma das áreas.*

Axioma 2.1.5. *A área de um retângulo de lados a e b , corresponde ao produto dos lados.*

Um modelo que satisfaz os axiomas acima pode ser construído usando integral. Seja a área de uma região R dada por $\int_R 1 \, dx$, provemos que satisfaz os 5 axiomas acima.

- 1) Pelo fato de 1 ser um número positivo, então $\int_R 1 \, dx$ também é positiva.
- 2) Se T é um movimento rígido e uma região R uma região integrável do plano, temos que pelo Teorema de Mudança de Variáveis,

$$A(R_2) = \int_{R_2} 1 \, dx = \int_{T(R_1)} dx = \int_{R_1} 1 |\det T| \, dx = \int_{R_1} 1 \, dx = A(R_1).$$

- 3) Se $A \subset B$, então $\chi_A \leq \chi_B$. Logo,

$$A(A) = \int_A dx = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \chi_B \, dx = \int_B dx = A(B).$$

4) Se S e T são regiões disjuntas,

$$A(S \cup T) = \int_{S \cup T} 1 \, dx = \int_S 1 \, dx + \int_T 1 \, dx = A(S) + A(T).$$

5) Note que $\int_a^b 1 \, dx = b - a$ e $\int_c^d (b - a) \, dy = (b - a)(d - c)$. Logo, pelo Teorema de Fubini,

$$A([a, b] \times [c, d]) = \int_{[a, b] \times [c, d]} 1 \, dx \, dy = \int_c^d \int_a^b 1 \, dx \, dy = \int_c^d (b - a) \, dy = (b - a)(d - c).$$

Definição 2.1.1. Um quadrado é um retângulo cujos lados têm a mesma medida.

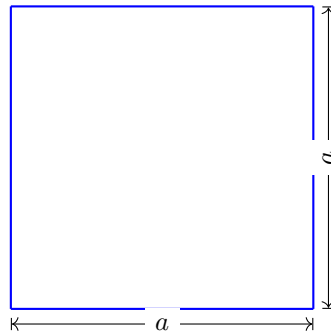


Figura 2.1 – Quadrado de lado a .

Corolário 2.1.2. A área do quadrado é dada pelo quadrado do lado.

Demonstração. Pela Definição 2.1.1 todo quadrado é um retângulo, como a área do retângulo corresponde ao produto dos lados, pelo Axioma 5, temos que a área do retângulo é definida pelo produto dos lados, e com isso, a área do quadrado é o quadrado do lado. \square

2.2 Figuras planas

Definição 2.2.1. Dois polígonos são equidecomponíveis se P é a união de polígonos P_i 's e Q é a união de Q_i 's, com $1 \leq i \leq n$, tais que P_i e Q_i são congruentes para cada i . Além disso supõe-se que P_i e Q_i tenham dois a dois interiores disjuntos.

Teorema 2.2.2. (Transitividade) Se P e Q são equidecomponíveis e Q e R são equidecomponíveis, então P e R são equidecomponíveis.

Demonstração. Se reescrevermos P, Q e R como uniões de P_i 's, de Q_i 's e de R_i 's, respectivamente, com P_i congruente a Q_i e Q_i a R_i . Pela transitividade da congruência, cada P_i é congruente a R_i , logo a área de cada P_i é igual a área do polígono R_i . Portanto, P e R são equidecomponíveis. \square

Teorema 2.2.3. *Dois paralelogramos que possuem a mesma base e área iguais são equidecomponíveis.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um paralelogramo e $EFGH$ um retângulo que possuem base e altura de mesmo tamanho. Sobre a base AB sobrepõe-se o lado do retângulo de comprimento igual a AB . Mostremos agora que as áreas dos triângulos ADH e BCG são

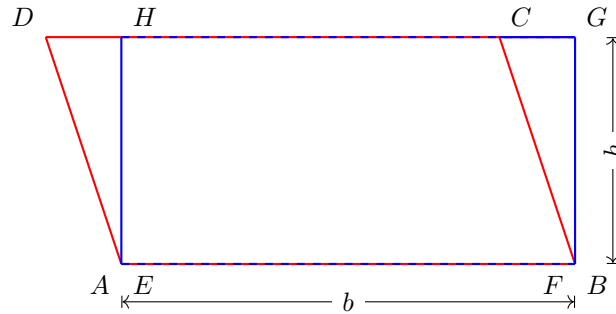


Figura 2.2 – Paralelogramo e retângulo equidecomponíveis.

iguais. Como $ABCD$ é um paralelogramo, temos que AD e BC são congruentes, e por $EFGH$ ser um retângulo, todos os ângulos são retos e EH e FG são congruentes. Logo, por serem triângulos retângulos e a hipotenusa e os catetos EH e HG congruentes, os triângulos ADH e BCG são congruentes. Portanto, $ABCD$ e $EFGH$ são equidecomponíveis. Assim dois paralelogramos quaisquer são equidecomponíveis a um retângulo que possui a base e altura coincidentes aos dos paralelogramos, e por transitividade são equidecomponíveis. \square

Teorema 2.2.4. *Todo triângulo é equidecomponível em um retângulo.*

Demonstração. Em um triângulo ABC , a medida do ângulo $\hat{A}BC$ é maior do que as medidas dos ângulos $\hat{A}CB$ e $\hat{B}AC$. Considere r como sendo a reta paralela ao lado AC que intersecta a altura do vértice relativa ao lado AC no ponto médio O . Sejam E e G as interseções de r com os lados BC e AB , respectivamente. Temos dois triângulos retângulos, EOB e FOB , que juntos formam um retângulo. Portanto,

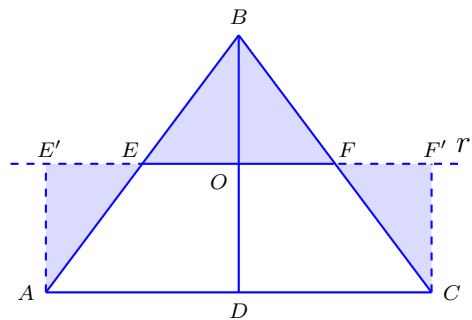


Figura 2.3 – Equidecomponibilidade de um triângulo.

o triângulo ABC é equidecomponível ao retângulo $AE'F'A$.

Corolário 2.2.5. *A área do triângulo é a metade da base multiplicada pela altura.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC , conforme a prova do Teorema 2.2.4, decompõe-se um retângulo com altura e base dadas respectivamente pela metade da altura e igual à base, do triângulo, em um triângulo congruente a ABC . Sendo a área do retângulo o produto dos lados, de acordo com o Axioma 2.1.5, temos que a área do triângulo é metade da área do retângulo, ou seja, base multiplicada pela metade da altura. \square

Teorema 2.2.6. *Dois retângulos de áreas iguais são equidecomponíveis.*

Demonstração. Considere os retângulos $ABCD$ e $EFGH$ de mesma área e seja AB o segmento de maior medida entre AB, BC, EF e FG . Seja o ponto I da reta GH com I à esquerda de H ,

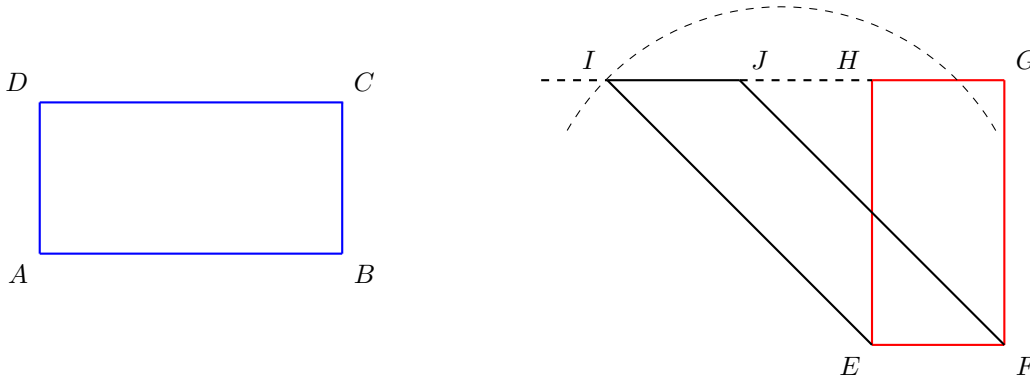


Figura 2.4 – Equidecomponibilidade de dois retângulos de áreas iguais.

Seja ainda AB o raio de uma circunferência de centro E . Como AB é o maior segmento, $AB > EH$, logo temos dois pontos de intersecção dessa circunferência com a reta GH . Suponha que J seja o ponto sob a reta \overrightarrow{GH} mais próximo de H de forma que IJ e HG sejam segmentos de mesma medida. Com isso, temos que o paralelogramo $EFIJ$ e o retângulo $EFGH$ têm mesma área e a base EF em comum, pelo Teorema 2.2.3 são equidecomponíveis. Mas $ABCD$ e $EFIJ$ também têm mesma área e mesma base, logo, por transitividade, $ABCD$ e $EFGH$ são equidecomponíveis. \square

Teorema 2.2.7. *Todo polígono é equidecomponível a um retângulo.*

Demonstração. Um polígono pode ser dividido em um número finito de triângulos. Se o polígono é convexo, fixamos um vértice e traçamos segmentos que unem esse aos não adjacentes a esse. Dividimos o polígono não convexo em vários convexos. Porém, por todo triângulo ser decomponível num retângulo, e dois retângulos de áreas iguais são equidecomponíveis, de acordo com o Teorema 2.2.6, obtemos o resultado por transitividade. \square

2.2.1 Teorema de Bolay-Gerwien

Teorema 2.2.8. *(Teorema de Bolay-Gerwien) Dois polígonos de áreas iguais são equidecomponíveis.*

Demonstração. Podemos decompor os polígonos P_1 e P_2 de áreas iguais em triângulos, que são equidecomponíveis em retângulo, conforme Teorema 2.2.7. Sendo pelo Teorema 2.2.6 cada retângulo equidecomponível em um retângulo de mesma base b , obtém-se retângulos R_1 e R_2 equidecomponíveis aos polígonos P_1) e P_2 . Como R_1 e R_2 têm áreas iguais, pelo Teorema 2.2.6 são equidecomponíveis. Em suma, P_1 e P_2 são equidecomponíveis

a R_1 e R_2 , respectivamente, e R_1 a R_2 , pela transitividade concluí-se que P_1 e P_2 são equidecomponíveis. \square

2.2.2 Disco

Arquimedes desenvolveu um método de aproximação do número π aproximando a área do disco por áreas de polígonos inscritos e circunscritos na circunferência, denominado método de exaustão. Esse método, primeiramente desenhava uma circunferência, depois um polígono inscrito nessa, em seguida, o circunscrito. O inscrito é formado por dois pontos, a partir da sexta parte de circunferência, formando um triângulo. Também pelo mesmo método, pode ser formado os polígonos de 4 a 96 lados. O circunscrito pode ser formado pela intersecção das retas tangentes, e as 3 figuras, formando uma sequência que cada vez se aproxima do π quando o raio é 1.

Definição 2.2.9. π é a razão do comprimento pelo diâmetro de uma circunferência qualquer, e tem o nome de constante de Arquimedes.

Na Grécia antiga, tentaram fazer a quadratura de um círculo, isso é, a transformação de um círculo em um quadrado de mesma área, no entanto, Carl Lindemann, em 1822, demonstrou que precisaria de uma quantidade infinita de operações, que segundo Pierre Wantzel, precisam de soluções de certas equações algébricas com coeficientes inteiros, o que torna impossível com régua e compasso.

Um desses gregos, foi Arquimedes, temos que a área da região delimitada por esse polígono é menor que a área do polígono do dobro de lados, e menor que o polígono do quádruplo do quadrado de lados. Numa primeira comparação, utilizou-se triângulos equiláteros inscrito e circunscrito. Isso foi obtido pois á medida que se aumenta o número de lados do polígono mais se aproxima do comprimento da razão do comprimento da circunferência pelo diâmetro.

Definição 2.2.10. Uma sequência com valores em \mathbb{R} é uma função de um subconjunto de \mathbb{N} em \mathbb{R} .

Teorema 2.2.11. Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Lema 2.2.12. No triângulo ABC sejam D e E pontos de AB e AC , respectivamente, tais que $AD = AE$. Então $BC \leq DE$.

Demonstração. Se $AB = AC$, temos que a razão entre DE e BC é a mesma entre AD e AB e é menor do que ou igual a 1. Logo, $BC \leq DE$. Suponha agora que $AC < AB$. Tome F como sendo um ponto sobre AB de forma que $AF = AC$. Note que $DE \leq FC$, logo basta mostrar que $FC \leq BC$. Sejam ainda $\alpha = \angle BFC$, $\beta = \angle FCA$, γ o ângulo externo ao triângulo ADE relativo ao lado DE e $\delta = \angle FBC$. Logo $\alpha > \beta$, pois α é externo ao triângulo ACF . De forma análoga, $\gamma > \delta$. Por ABF ser um triângulo isósceles, $\beta = \gamma$. Logo, $\alpha > \delta$. Mas no triângulo BFC , α se opõe a BC e δ a CF , de onde $CF < BC$. \square

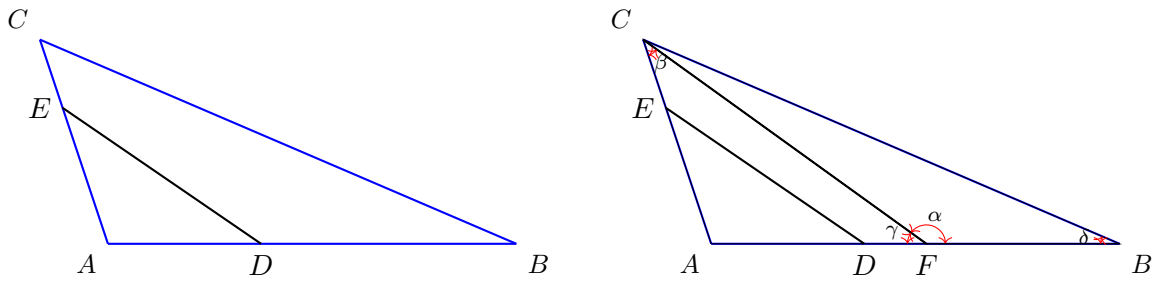


Figura 2.5 – Triângulos com arestas ED e CF .

Lema 2.2.13. *Seja uma circunferência de centro C e raio r , a sequência dos perímetros dos polígonos de n lados é limitada superiormente.*

Demonstração. De acordo com a figura ao lado, o perímetro do quadrado circunscrito é menor ou igual a oito vezes o raio.

Vamos agora mostrar que para qualquer polígono de 3 lados ou mais, inscrito na circunferência, o perímetro é menor ou igual a $8r$. Sejam O o centro da circunferência e A um polígono inscrito de k lados inscrito na circunferência. Considere os 4 vértices do quadrado B_1, B_2, B_3 e B_4 , e os k vértices do polígono A, A_1, A_2, \dots, A_k . Assim, tem-se um conjunto de $m = k+2$ pontos A_1, A_2, \dots, A_m .

Portanto, se A_j, A_{j+1}, \dots, A_J são vértices consecutivos de A tais que a semirreta OA_j intersecta o quadrado $B_1B_2B_3B_4$ em dois pontos consecutivos B_lB_{l+1} , tem-se

$$\overline{A_jA_{j+1}} + \overline{A_{j+1}A_{j+2}} + \dots + \overline{A_{J-1}A_J} \leq \overline{B_lB_{l+1}}.$$

Portanto, o perímetro de A é menor do que o de $B_1B_2B_3B_4$, ou seja, $8r$. \square

Lema 2.2.14. *O perímetro de um polígono de n lados, é menor que o perímetro do polígono de $2n$ lados, inscritos numa circunferência.*

Demonstração. Esse lema é demonstrado fazendo uso da desigualdade triangular. Sejam P_n um polígono de n lados, $A_1A_3 \dots A_{2n-1}$, e P_{2n} de $2n$ lados, $A_1A_2 \dots A_{2n}$. Pela Desigualdade Triangular,

$$\begin{aligned} A_1A_3 &< A_1A_2 + A_2A_3, \\ A_3A_5 &< A_3A_4 + A_4A_5, \\ &\vdots \\ A_{2n-1}A_1 &< A_{2n-1}A_{2n} + A_{2n}A_1. \end{aligned}$$

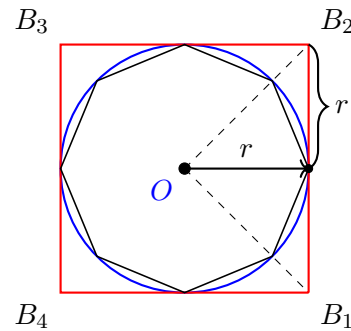


Figura 2.6 – Polígonos inscrito e circunscrito.

Portanto, $p_n < p_{2n}$. □

Definição 2.2.15. *O comprimento da circunferência é*

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{2^n}.$$

Note que sendo a sequência (p_{2^n}) uma sequência monótona crescente limitada por P_4 , pelo Teorema 2.2.11 é convergente, isto é, o limite existe. Através dessa definição, combinando com a Definição 2.2.9, temos que $c = 2\pi r$.

Teorema 2.2.16. *É constante a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro.*

Demonstração. Consideramos duas circunferências concêntricas com raios e comprimentos diferentes.

Suponha que cada uma das circunferências tenha um polígono inscrito de n lados. Na figura ao lado, os triângulos OAB e $OA'B'$ são semelhantes, pois são triângulos isósceles e têm o ângulo $\hat{AOB} = (360/n)^\circ$ em comum. Portanto, a razão entre o lado AB e o raio da circunferência que circunscreve é a mesma razão do lado $A'B'$ pelo raio da circunferência circunscrita, assim $\frac{A'B'}{r'} = \frac{AB}{r}$. Multiplicando a igualdade anterior por n e dividindo por 2, obtemos que $\frac{p'_n}{d'} = \frac{p_n}{d}$.

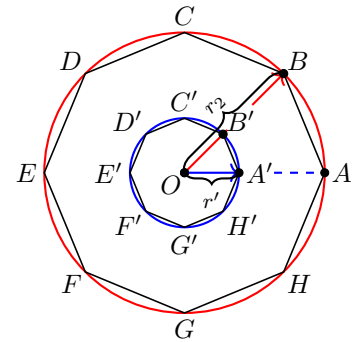


Figura 2.7 – Circunferências concêntricas.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2^n} = c$,

$$\frac{c'}{d'} = \frac{p'_n}{d'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p'_n}{d'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{d} = \frac{c}{d}.$$

□

Em razão desse resultado, o comprimento da circunferência poderia ser definido como o produto do diâmetro pelo π , ou seja, $2\pi r$.

Definição 2.2.17. *A área de um disco de raio r é o limite da sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sendo A_n a área do polígono regular inscrito na circunferência que contém o disco.*

Teorema 2.2.18. *A área de um disco de raio r é πr^2 .*

Demonstração. Sejam uma circunferência de raio r e centro O e p_n um polígono regular inscrito de n lados na circunferência.

A área da região delimitada pelo triângulo AOB é igual a metade de a_n multiplicada pelo lado l_n , sendo n o número de lados e l_n o tamanho do lado do polígono p_n . Logo, se A_n é a área de p_n ,

$$A_n = \frac{1}{2} l_n a_n = \frac{1}{2} p_n a_n$$

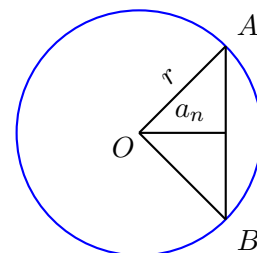


Figura 2.8 – Circunferências com polígono inscrito.

Mas,

$$a_n = \sqrt{r^2 - \frac{l_n}{2}},$$

sendo r o raio do disco. O limite de l_n quando n tende ao infinito é 0, e a partir da Definição 2.2.15, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2^n} = 2\pi r$. Então

$$\lim A_{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} P_n a_n = \pi r^2. \quad \square$$

2.3 Integral de Riemann

Seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, uma partição do intervalo $[a, b]$, dois termos consecutivos determinam um subintervalo da partição. Seja $f(x) \geq 0$, aproxima-se a área sob o gráfico de $f(x)$, pela soma das áreas dos retângulos de base $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e altura $f(c_k)$, onde c_k pertence ao sub intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

A Soma de Riemann, isto é, área formada pelos retângulos que aproxima a área sob a função, é expressa pelo somatório

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

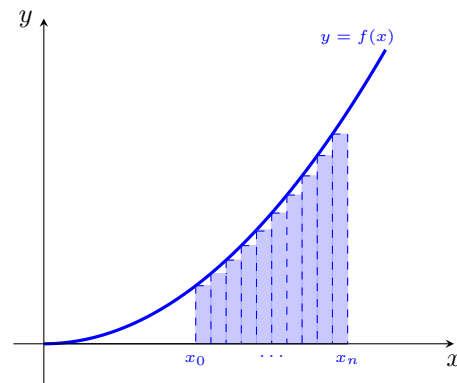


Figura 2.9 – Soma de Riemann.

O limite das somas parciais

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

é por definição integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

2.3.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 2.3.1. (Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por então

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

então F é derivável em $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Note que

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Dessa forma, aplicando o teorema do valor médio

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \epsilon dt \right| = \epsilon, \end{aligned}$$

desde que pela continuidade de f existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ para todo t tal que $|t - x| < \delta$. Portanto, se $|h| < \delta$ então

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \epsilon.$$

o que demonstra que $F'(x) = f(x)$. □

Teorema 2.3.2. (*Teorema Fundamental do Cálculo - Parte II*) Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a, b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Se $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, então pela Parte I, $G'(x) = f(x)$. Logo, $(G - F)'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ e, conseqüentemente, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + C$. Portanto, concluí-se que

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) = G(b) - G(a) = F(b) - F(a). \quad \square$$

2.3.2 Retângulo

Para determinar a área de um retângulo qualquer, considere $f(x)$ como sendo a função constante igual a c , onde c é a altura do retângulo. A área do retângulo de lados $b - a$ e c pode ser calculada por

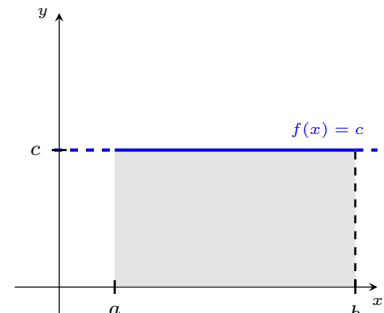


Figura 2.10 – Retângulo.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b - a).$$

Exemplo 2.3.3. O retângulo compreendido pela função 5 entre os pontos $x = 1$ e $x = 2$ é dada por

$$\int_1^2 5 \, dx = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 10 - 5 = 5.$$

2.3.3 Triângulo retângulo

O método é parecido com o do retângulo, porém com uma diferença, a função inicial depende de x .

Para determinar a área de um triângulo retângulo qualquer considere a função $f(x) = cx$. A área de um triângulo retângulo de altura h e base b deve ser então calculada por

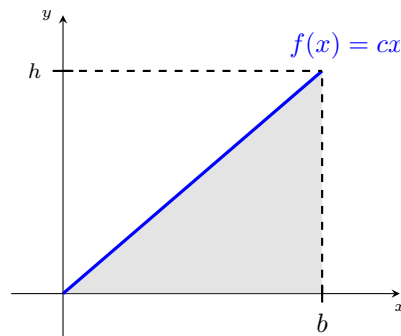


Figura 2.11 – Triângulo retângulo.

$$\int_0^b f(x) \, dx = \int_0^b cx \, dx = \left[\frac{cx^2}{2} \right]_0^b = \frac{cb^2}{2} = \frac{bh}{2},$$

pois $cb = h$, uma vez que $c = h/b$.

2.3.4 Elipse

A equação canônica da elipse é expressa por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \, a \cos \theta \, d\theta = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos(2\theta)] \, d\theta = 2ab \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

2.3.5 Disco

A equação do disco é a da elipse de semieixos medindo r . Com isso, temos:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Determinando y em função de x , $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. A elipse tem 4 pedaços iguais, então temos que a área da elipse é $4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Fazendo substituição trigonométrica

$$\begin{aligned}x &= a \operatorname{sen} \theta, \\dx &= a \cos \theta d\theta,\end{aligned}$$

tem-se que

Ao escrever y em função de x , tem-se que $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, porém a função é par, então temos que a área do disco é $4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$, que é positivo. Fazendo a substituição trigonométrica

$$\begin{aligned}x &= r \operatorname{sen} \theta, \\dx &= r \cos \theta d\theta,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}A &= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} r \cos \theta d\theta \\&= 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 4r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\&= 2r^2 \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} d\theta \right] \Big|_0^{\pi/2} = \pi r^2.\end{aligned}$$

2.4 Princípio de Cavalieri para áreas

Sejam $f_1(y)$, $f_2(y)$, $g_1(y)$ e $g_2(y)$ funções tais que $f_1(y) \leq f_2(y)$ e $g_1(y) \leq g_2(y)$, para $0 \leq y \leq b$. Sejam R e S são as regiões delimitadas por f_1 e f_2 e g_1 e g_2 , entre as retas $y = a$ e $y = b$, respectivamente. Supondo que existe $K > 0$, tal que $f_2(y) - f_1(y) = k[g_2(y) - g_1(y)]$, então a razão entre as áreas de \mathcal{R} e \mathcal{S} é essa mesma constante.

Precisamente, considere em um plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy , e sejam

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(y) \leq x \leq f_2(y) \text{ e } 0 \leq y \leq b\}$$

e

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \text{ e } 0 \leq y \leq b\}.$$

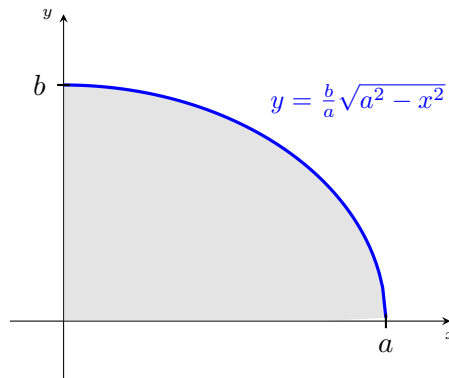


Figura 2.12 – Um quarto da elipse.

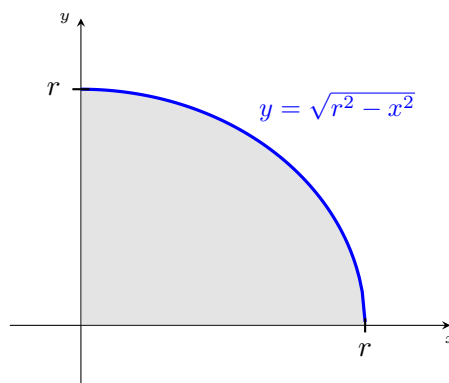


Figura 2.13 – Um quarto do disco.

Suponha que exista $k > 0$ tal que $f_2(y) - f_1(y) = k [g_2(y) - g_1(y)]$ para $0 \leq y \leq b$. Então $a(\mathcal{R}) = ka(\mathcal{S})$. De fato, pela Teoria de Integração,

$$\begin{aligned} a(\mathcal{R}) &= \iint_{\mathcal{R}} dx dy = \int_0^b \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} dx \right] dy = \int_0^b [f_2(y) - f_1(y)] dy \\ &= \int_0^b k [g_2(y) - g_1(y)] dy = k \int_0^b \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx \right] \\ &= k \iint_{\mathcal{S}} dx dy = ka(\mathcal{S}). \end{aligned}$$

2.4.1 Elipse

Teorema 2.4.1. *A área da elipse de semieixos a e b é πab .*

Demonstração. Temos que a equação da elipse que contém a região elíptica é $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Resolvendo em y ,

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

e temos que f_1 é a função negativa e f_2 a função positiva. Fazendo a diferença entre f_2 e f_1 , obtemos,

$$2a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = 2a/b \sqrt{b^2 - y^2} = \frac{2a}{b} g_2(y) - g_1(y).$$

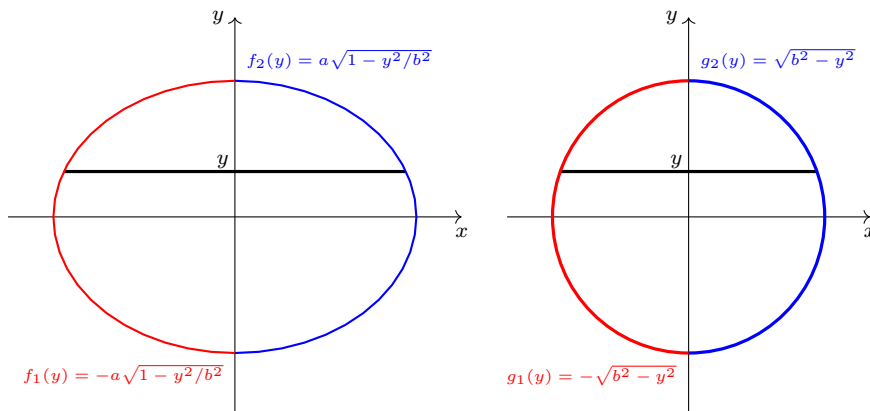


Figura 2.14 – Seções do disco e da elipse.

Aplicando o Princípio de Cavalieri para áreas para $k = a/b$, obtemos que a área da região semi-elíptica é a/b vezes a área da semicircunferência de raio b , que dá $\pi ab/2$, multiplicando por 2, segue o resultado. \square

Capítulo 3

Volume de sólidos

Axioma 3.0.1. *Todo sólido tem volume positivo.*

Axioma 3.0.2. *O volume de uma região A que está contida na região B , é menor do que o da região B .*

Axioma 3.0.3. *Se a intersecção de duas regiões é vazia, o volume da soma das duas regiões é igual a soma dos volumes.*

Axioma 3.0.4. *O volume de um paralelepípedo retângulo de lados a, b e c é o produto abc .*

Proposição 3.0.1. *O volume do paralelepípedo oblíquo é o produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Seja $ABCDHGFE$ um paralelepípedo cujas bases e topos são formados pelos retângulos $ABCD$ e $EFGH$, respectivamente. Seja AE uma das arestas de menor medida. Trace um plano que contém a reta BC e perpendicular à base $ABCD$. Dois sólidos de bases triangulares são formados, $AA'D'DHE$ e $BB'C'CGF$, onde os pontos B' e C' , os pontos de intersecção do plano que passa por FG que é perpendicular à base $ABCD$.

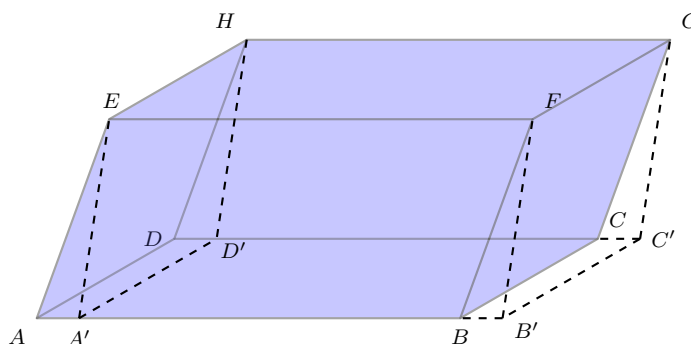


Figura 3.1 – Paralelepípedo oblíquo.

Agora observe que o volume do prisma $BB'C'CGF$ é igual ao de $AA'D'DHE$, o qual preserva a altura e as outras duas dimensões em relação ao paralelepípedo original. Assim,

o volume do paralelepípedo oblíquo $ABCDHGFE$ coincide com o do paralelepípedo $AB'C'D'HGFE$, que pelo Axioma 3.0.4 é dado pelo produto de suas dimensões. \square

Proposição 3.0.2. *O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela altura.*

Demonstração. Seja $P_n = A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ um prisma com base um polígono de n lados, com altura h . Subdividindo-o em prismas de base triangulares, forma-se $n - 2$ prismas $A_1A_2A_3B_1B_2B_3, \dots, A_1A_nA_{n-1}B_1B_nB_{n-1}$. Assim,

$$V = V_{A_1A_2A_3} + V_{A_1A_3A_4} + \dots + V_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} + V_{A_1A_{n-1}A_1}.$$

Como cada prisma triangular pode ser dobrado em um paralelepípedo, o volume é dado por $V_{A_1A_jA_{j+1}} = A_{A_1A_jA_{j+1}}h$, para $j = 3, \dots, n - 2$. e também $V_{A_1A_{n-1}A_1} = A_{A_1A_{n-1}A_1}h$.

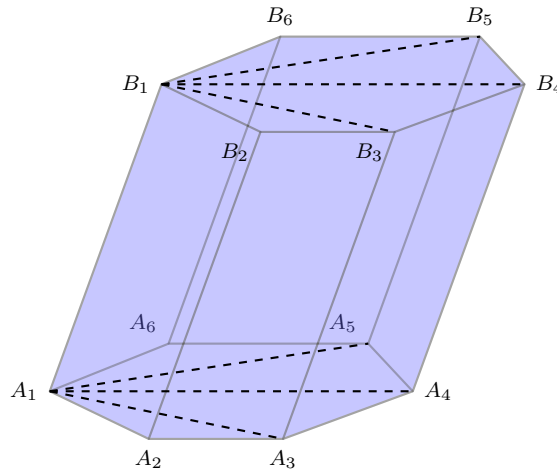


Figura 3.2 – Prisma oblíquo.

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= V_{A_1A_2A_3} + V_{A_1A_3A_4} + \dots + V_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} + V_{A_1A_{n-1}A_1} \\ &= A_{A_1A_2A_3} \cdot h + A_{A_1A_3A_4} \cdot h + \dots + A_{A_1A_{n-2}A_{n-1}} \cdot h + A_{A_1A_{n-1}A_1} \cdot h \\ &= A \cdot h, \end{aligned}$$

concluindo que o volume do prisma é a área da base vezes a altura. \square

3.1 Método da exaustão

Proposição 3.1.1. *A soma dos primeiros inteiros positivos é $n(n + 1)/2$.*

Demonstração. Seja $S = 1 + 2 + \dots + n$. Temos que $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, $n^2 = (n - 1)^2 + 2(n - 1) + 1$, $(n - 1)^2 = (n - 2)^2 + 2(n - 2) + 1$ e $2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$, subtraindo

e cancelando, obtemos:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= 1 + [2n + 2(n-1) + 2(n-2) + 2 \cdot 1] + [1 + 1 + \dots + 1] \\ &= 2[n + (n+1) + (n-2) + 2 + 1] = 1 + 2S_1 + n.\end{aligned}$$

Então, $2S_1 = (n+1)^2 - (n+1)$, logo $S_1 = n(n+1)/2$. □

Proposição 3.1.2. *A soma dos primeiros números ao quadrado é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*

Demonstração. Seja $S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Note que

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1, \\ n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1, \\ (n-1)^3 &= (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1, \\ (n-2)^3 &= (n-3)^3 + 3(n-3)^2 + 3(n-3) + 1, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ 2^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= 1 + 3[n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2] + 3[n + (n-1) + \dots + 2 + 1] + [1 + 1 + \dots + 1] \\ &= -1^3 + 3S_2 + 3S_1 + n = 1 + 3S_2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n.\end{aligned}$$

Portanto,

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] - (n+1),$$

de onde,

$$3S_2 = (n+1) \left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1 \right] = n(n+1) \frac{(2n+1)}{2}.$$

Dividindo ambos os lados por 3, concluí-se que

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad \square$$

Teorema 3.1.3. *O volume de uma pirâmide é um terço da área da base multiplicada pela altura.*

Demonstração. Particiona-se a pirâmides por troncos P_k , obtidos por interseções de planos paralelos equidistantes. Tomamos um tronco de pirâmide com altura H/n . Para n suficientemente grande, sendo n o número de faces paralelas à base. Cada tronco se aproxima de um prisma de base b e altura H/n , mas não igual, cujo volume é a área da base vezes H/n . Também temos que a base do tronco está para a base da pirâmide, assim como a altura do tronco ao quadrado está para a altura da pirâmide ao quadrado,

logo $A_{P_k} = \frac{A_b}{n^2}$, onde A_b é a área da base da pirâmide inicial. Logo, o volume do tronco é aproximado por

$$\frac{A_b H}{n^2 n} = \frac{A_b H}{n^3}.$$

Temos que somar as áreas de todos os troncos, para isso basta multiplicar a área da base pela altura pela soma de todos os k^2 , e para isso, basta aplicar a Proposição 3.1.2. Com isso temos:

$$V_P \approx \sum_{k=1}^n V_{P_k} = \frac{A_b H}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Fazendo n suficientemente grande, $1/n$ tende a zero. Portanto,

$$V_P = A_b H \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{A_b H}{3}. \quad \square$$

Teorema 3.1.4. *O volume de uma esfera é $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

Demonstração. Dividimos a semiesfera de raio R em n partes iguais. Para obter o volume da esfera toda basta multiplicamos o volume por 2. Para n suficientemente grande, cada parte tem o volume próximo ao de um cilindro de raio R_k e altura R/n . Em cada plano de altura $y = \frac{Rk}{n}$, $R_k^2 = R^2 - ((R/n)k)^2$. Com isso temos que $R_k^2 = R^2(1 - (k^2/n^2))$. Com isso, temos que o volume do cilindro é $\pi R^2(1 - k^2/n^2)R/n$, ou seja $\pi R^3(1/n - k^2/n^3)$. Portanto, a semiesfera tem volume aproximado de

$$V \approx \sum_{k=1}^n \pi R^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3} \right) = \pi R^3 - \pi R^3 \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \pi R^3 - \pi R^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Fazendo o limite, obtém-se

$$V = \pi R^3 - \pi R^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \pi R^3 - \frac{2R^3}{6} = \frac{2R^3}{3}.$$

Multiplicando por 2, obtemos a fórmula para o volume da esfera. □

3.2 Método de fatiamento

O método de fatiamento consiste em dividir o sólido em fatias finas infinitesimais, aproximando-as por cilindros, para calcular o somatório de todos esses, para obtermos a soma de Riemann e a Integral, e, por fim, faz-se o limite das somas dos volumes dos sólidos, ou seja, temos

$$V = \int_a^b A(x) dx,$$

sendo $A(x)$ é a área da seção transversal do sólido em x .

3.2.1 Elipsoide via integração

Teorema 3.2.1. *O volume do elipsoide de semieixos a, b e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.*

Demonstração. Consideremos a região de um semielipsóide de equação, ou seja, o sólido delimitado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

A área da interseção do plano $z = t$, para cada t entre $-c$ a c , é a da região elíptica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{t^2}{c^2}.$$

Para determinar essa área, fazendo a mudança de variável, $x = a\sqrt{1 - \frac{t^2}{c^2}} \operatorname{sen} \theta$,

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{-a\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}} 2b\sqrt{1 - \frac{t^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4b \int_0^{a\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}} \sqrt{1 - \frac{t^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}} dx \\ &= 4ab \left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 4ab \left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right) \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab \left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-c}^c A(t) dt = 2 \int_0^c A(t) dt = 2\pi ab \int_0^c \left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right) dt = 2\pi ab \left(t - \frac{t^3}{3c^2}\right) \Big|_0^c \\ &= 2\pi ab \left(c - \frac{c^3}{3c^2}\right) = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned} \quad \square$$

Usando que a esfera é uma elipsoide de semieixos iguais a r , deduz-se

Corolário 3.2.2. *O volume da esfera de raio r é dado por $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

3.3 Princípio de Cavalieri para volumes

Seja \mathcal{P} um sólido com z variando de 0 até c , $y = f(x, z)$ e $x = h(y, z)$, temos que t varia de 0 até c , e temos a interseção com o plano $z = t$, chamada \mathcal{P}_t , e também temos o sólido \mathcal{Q} com as mesmas propriedades. Então, temos que se uma constante k vezes a área de \mathcal{Q}_t , $a(\mathcal{Q}_t)$, é igual a área de \mathcal{P}_t , $a(\mathcal{P}_t)$, o mesmo vale para o volume.

Considere um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e sejam

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(y, z) \leq x \leq f_2(y, z), h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z) \text{ e } 0 \leq z \leq c\},$$

$$\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z), k_1(x, z) \leq y \leq k_2(x, z) \text{ e } 0 \leq z \leq c\}.$$

Para cada $0 \leq t \leq c$, sejam $\mathcal{P}_t = \mathcal{P} \cap \{z = t\}$ e $\mathcal{Q}_t = \mathcal{Q} \cap \{z = t\}$. Suponha que exista

$k > 0$ tal que $a(\mathcal{P}_t) = ka(\mathcal{Q}_t)$ para todo t . Então $v(\mathcal{P}) = kv(\mathcal{Q})$,

$$\begin{aligned} v(\mathcal{P}) &= \iiint_{\mathcal{P}} dx dy dz = \int_0^c \left[\iint_{\mathcal{P}_z} dx dy \right] dz = \int_0^c a(\mathcal{P}_z) dz \\ &= \int_0^c ka(\mathcal{Q}_z) dz = k \int_0^c a(\mathcal{Q}_z) dz = \int_0^c k \left[\iint_{\mathcal{Q}_z} dx dy \right] dz \\ &= k \iiint_{\mathcal{Q}} dx dy dz = kv(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

3.3.1 Elipsóide

Teorema 3.3.1. *O volume do elipsóide de semieixos a, b e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.*

Demonstração. Consideremos a região de um semielipsóide \mathcal{E} de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$ delimitada pelos planos $z = 0$ e $z = c$. Para cada t entre 0 e c , a interseção \mathcal{E}_t do plano $z = t$ com \mathcal{E} é descrito pela equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 + t^2/c^2 \leq 1$. Então $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 - t^2/c^2$, ou seja, $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq c^2 - t^2/c^2$. Seja $d = \sqrt{1 - t^2/c^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - t^2}$. Então o plano \mathcal{P}_t é dado por $x^2/a^2d^2 + y^2/b^2d^2 \leq 1$ e como consequência da área da elipse, temos que a área da seção transversal é dada por $\pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \pi ab(c^2 - t^2)/c^2$. Considere agora a semisfera \mathcal{S} de raio c e a interseção da semisfera com o plano $z = t$, \mathcal{S}_t , então tem-se $x^2 + y^2 + t^2 \leq c^2$. Temos $x^2 + y^2 \leq c^2 - t^2$ e $c^2 - t^2 = r^2$ e sua área é $\pi(c^2 - t^2)$. Para cada t variando de 0 até c ,

$$a(\mathcal{E}_t) = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2) = \frac{ab}{c^2}a(\mathcal{S}_t).$$

Aplicando o princípio de Cavalieri para volume para $k = ab/c^2$, tem-se

$$v(\mathcal{E}) = \frac{4k}{3}v(\mathcal{S}) = \frac{4k}{3} \frac{1}{2}\pi c^3 = \frac{4\pi abc}{6},$$

multiplicando por 2, tem-se que o volume do elipsóide é $\frac{4}{3}\pi abc$. □

3.3.2 Cone

Lema 3.3.2. *A razão entre as áreas da seção transversal paralela à base, e da base do cone é o quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.*

Demonstração. Considere um cone de base circular de raio r e altura h . Então tomamos um plano paralelo à base, e a partir dele montamos outro cone de raio, base e altura diferentes. Temos uma semelhança de triângulos, a partir dos triângulos formados pelos centros de cada cone, com isso, a razão das alturas é igual à razão dos raios. Elevando ao quadrado ambos os lados e multiplicando o raio por π , obtemos que a razão entre as alturas ao quadrado é a mesma que a razão das áreas da base, o que conclui o resultado. □

Teorema 3.3.3. *O volume do cone é igual a um terço da área da base vezes a altura.*

Demonstração. Devemos comparar o cone com a pirâmide de mesma área da base, alturas e áreas das seções diferentes, porém com distâncias das seções até o topo iguais. Como consequência do Princípio de Cavalieri e do Lema 3.3.2, obtemos que as áreas são proporcionais, e também são proporcionais ao quadrado do raio. E com isso, temos que os dois sólidos possuem o mesmo volume por consequência do Princípio de Cavalieri. \square

3.3.3 Esfera

Teorema 3.3.4. *O volume da esfera é igual ao volume do cilindro menos o do cone.*

Demonstração. Sejam uma esfera de raio R , um cone e um cilindro com bases tendo raios também R .

Cortamos a esfera, o cilindro e o cone por um plano perpendicular ao eixo y . A área da seção transversal da esfera é πx^2 , sendo $x^2 = r^2 - y^2$ pelo Teorema de Pitágoras, a área da seção transversal do cilindro πr^2 e a área da seção transversal do cone πx^2 . Note que no plano $z = 0$, tem-se triângulos isósceles de catetos R e y , e medindo x e t , respectivamente, conforme a figura ao lado.

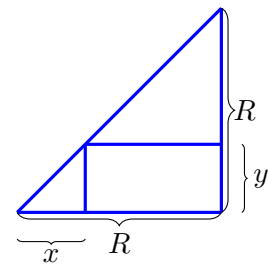


Figura 3.3 – Seção triangular.

Obtemos um segundo triângulo retângulo com um dos catetos medindo y paralelo à base maior. Observa-se que pelo caso AAA os triângulos formados são semelhantes. Logo, $1 = \frac{r-y}{r-y} = \frac{y}{x}$, com isso temos $y = x$, conseqüentemente

$$a(\mathcal{P}) = \pi x^2 = \pi(r^2 - y^2) = \pi(r^2 - x^2) = a(\mathcal{Q}),$$

onde $a(\mathcal{P})$ e $a(\mathcal{Q})$ são as áreas das seções transversais da esfera e do cilindro menos do cone, respectivamente. Pelo Princípio de Cavalieri temos que volumes são iguais. \square

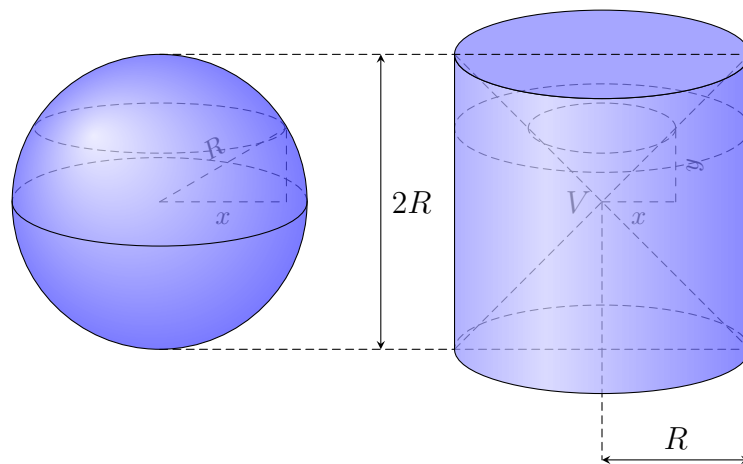


Figura 3.4 – Esfera e um cilindro contendo um cone.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Princípio de Cavalieri no Geogebra

Foi feita uma aplicação no geogebra do Princípio de Cavalieri, numa simulação dinâmica através do controle deslizante, a qual se desloca um plano um plano $z = k$ seccionando um cilindro com um cone inscrito nele, obtendo três anéis e um disco, os quais a medida em que o raio interno diminuí-se, mas mantém-se a mesma área, obtém-se a área do disco formado pela intersecção do plano com a esfera. Todos esses objetos contidos na seção planar.

No experimento, observou-se que a área da intersecção do plano com o cilindro menos a área da intersecção do plano com o cone é igual a área da intersecção do plano com a esfera, e como a altura do cilindro é igual ao dobro do raio do cilindro, que é igual ao raio da esfera. Obtendo assim pelo Princípio de Cavalieri que o volume do cilindro menos o do cone é igual ao da esfera.

O objetivo do experimento é aplicar e visualizar o Princípio de Cavalieri no geogebra, mostrando que as áreas das seções transversais do cilindro menos a do cone é igual ao da área da seção intersectionada da esfera, e concluindo pelo Princípio de Cavalieri que os volumes são iguais.

O link para o programa no geogebra é <https://www.geogebra.org/m/cqsf9cws>.

4.2 Geometria das abelhas-aula

4.2.1 Introdução

Foi planejada uma aula sobre a geometria das abelhas, tendo como tema o armazenamento do mel nas colméias das abelhas. A idéia é mostrar que as abelhas armazenam o mel num depósito de formato hexagonal, o qual é ótimo e mostrar que as abelhas em quanto maior o volume do recipiente, maior a capacidade de armazenamento de mel. A aula foi planejada seguindo as ideias de [7].

4.2.2 Objetivos

O objetivo da aula é mostrar qual é a capacidade de armazenamento de mel das abelhas nas colméias, aplicando alguns conceitos de volume, e maximizando a capacidade de armazenamento. Para assim, concluir que o formato ideal para as abelhas armazenarem o mel é o prisma hexagonal.

Metodologia

A metodologia utilizada foi resolução de problemas com o uso de materiais concretos. Dividindo uma sala de aula em dois grupos, sendo que cada grupo ficava com uma cartolina e alguns sólidos. O primeiro grupo ficaria com uma cartolina, um prisma quadrangular e um prisma hexagonal e o outro ficaria com uma cartolina, um prisma triangular e um prisma hexagonal. Cada grupo mediria os lados das faces laterais dos prismas, os lados da base do prisma e recortaria na cartolina cada um deles e depois calculariam as áreas da base, e as alturas dos prismas, para calcular os volumes, e concluir que o volume do prisma hexagonal é maior. Depois, por meio de alguns problemas envolvendo a geometria das abelhas e o volume dos sólidos, fixar-se-á os conceitos.

4.2.3 Desenvolvimento

O professor iniciaria a aula perguntando qual a utilidade da matemática no cotidiano, e os alunos provavelmente responderiam as horas, outras medidas usadas, uso de objetos nas formas geométricas, entre outras respostas. Mas a resposta procurada seria as formas geométricas.

Em seguida, o professor perguntaria para a turma, qual a forma geométrica ideal para as abelhas alocarem o mel. Seriam empilhados alguns sólidos como o cilindro, o prisma triangular, o prisma quadrangular, o prisma pentagonal e o prisma hexagonal. Do experimento, concluiria-se que cilindros e prismas pentagonais não se justapõem, com isso, temos três opções: o prisma triangular, o prisma quadrangular e o prisma hexagonal. Antes do experimento, o professor lembraria que o volume do cilindro é $\pi \times \text{raio} \times \text{altura}$.

O professor dividiria a turma, em dois grupos. Em comum, os dois grupos ficariam com um prisma hexagonal e cartolinas. Um dos grupos ficaria com o prisma quadrangular, e o outro grupo, com o prisma triangular. Seriam medidos os lados das bases e das faces laterais de cada prisma, o professor lembraria que o volume do prisma é igual a área da base vezes a altura.

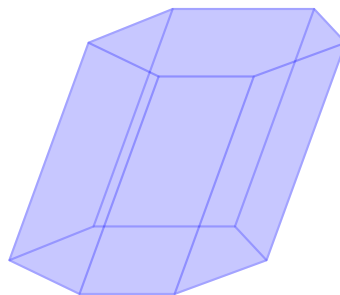


Figura 4.1 – Prisma hexagonal

Após medir os lados das bases e das faces, as faces e as bases seriam recortadas na cartolina, em formato de sólidos, e depois, conhecida as medidas, seriam calculados os

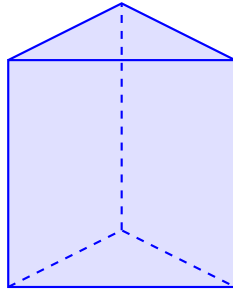


Figura 4.2 – Prisma triangular

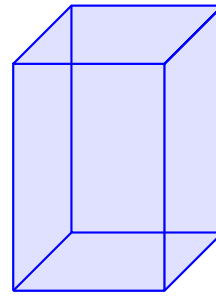


Figura 4.3 – Prisma quadrangular

volumes e comparados os volumes, e ainda os grupos para tirar a prova, encheriam os prismas de água, e aferiria o de maior capacidade de armazenamento de água, ou seja, o de maior volume.

Do experimento, concluir-se-ia que se as áreas laterais forem iguais, o prisma hexagonal têm maior volume, com isso, a forma ideal para armazenar o mel em um único prisma seria o prisma hexagonal. Depois, o professor colocaria para a turma alguns problemas para a assimilação dos conceitos como o proposto abaixo.

Problema 1: Supondo que a área da base hexagonal seja definida por 76 cm^2 e a altura por 10 cm . Temos que a área do prisma é de 760 cm^3 , e suponha que a colmeia armazena 38 cm^3 de mel por dia, então em 20 dias a colmeia enche o prisma. Agora imaginamos duas colmeias com a mesmo armazenamento de mel por dia, essas duas colmeias enchem o prisma em 10 dias.

4.2.4 Mosaicos

Cilindros

Empilhando vários cilindros em uma região medindo 1 m^3 , calcularíamos o volume máximo em função do raio. Primeiro, calcula-se o número de cilindros em função do raio. Sendo n o número de cilindros de raio r na horizontal, tem-se que $2nr = 1$, pois o diâmetro vezes o número de cilindros na horizontal é igual a 1, então $n = \frac{1}{2r}$. Portanto, o volume dos cilindros que cabem no cubo com volume de 1 m^3 é dada por

$$V = n\pi r^2 h = \frac{1}{4r^2} \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} h = \frac{\pi}{4}.$$

Prismas triangulares

Enfileirando prismas triangulares com bases formadas por triângulos equiláteros, teríamos n fileiras contendo n triângulos equiláteros de lados l em cada uma. Como n vezes l igual a 1, então $n = \frac{1}{l}$, e o volume total formado pela soma dos volumes dos

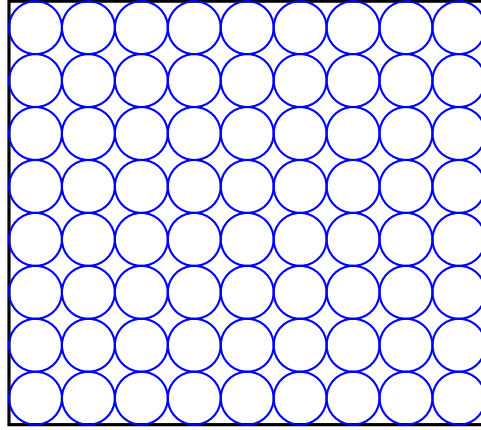


Figura 4.4 – Mosaico de cilindros

prismas seria

$$V = n^2 l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} h = \frac{1}{l^2} l^2 \frac{\sqrt{3}}{2} h = \frac{\sqrt{3}}{4} h.$$

A altura do cubo sendo 1, segue que o volume de capacidade é $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Cilindros e Prismas triangulares

Agora se combinarmos cilindros e prismas triangulares, o volume máximo quando os cilindros e os prismas se tangenciarem num ponto. Observa-se inicialmente que o raio do cilindro a metade da altura do triângulo equilátero da base do prisma. Construindo um sistema referencial em que a base do triângulo estaria sobre o eixo x e a circunferência da base do cilindro teria centro em $(0, r)$, reta tangente formaria um ângulo de 60° graus com o eixo x , dado que se trata de um triângulo isósceles. Logo a equação da reta tangente, que parte constitui o lado do triângulo, tem a expressão $y = \sqrt{3}(x - x_0)$. Para determinar x_0 , resolve-se a interseção das equações da circunferência com a reta tangente

$$\begin{cases} x^2 + (y - r)^2 = r^2 \\ y = \sqrt{3}(x - x_0), \end{cases}$$

de forma que x_0 seja único, Substituindo y na primeira equação,

$$3x_0^2 + (-6 + 2\sqrt{3}r)x_0 + (4x^2 - 2\sqrt{3}xr) = 0.$$

Impondo que o discriminante da equação seja nulo,

$$(-6 + 2\sqrt{3}r)^2 - 12(4x^2 - 2\sqrt{3}xr) = 12(r^2 + 2\sqrt{3}r(x + 1) - 4x^2 + 3) = 0.$$

Logo sendo x_0 positivo, é dado por

$$x_0 = \frac{-\sqrt{3}r + \sqrt{3r^2 + 4(r^2 + 3 + 2\sqrt{3}r)}}{4}.$$

Dessa forma, o agrupamento de um círculo e um triângulo ocuparia um espaço de medida $2_0 + l$, isto é

$$r + \frac{-\sqrt{3}r + \sqrt{3r^2 + 4(r^2 + 3 + 2\sqrt{3}r)}}{2}.$$

Portanto, para alocar quantidade de n prismas e n cilindros tangenciando numa fileira num cubo de 1 m^2 , o raio do cilindro seria determinado por

$$n \left(r + \frac{-\sqrt{3}r + \sqrt{3r^2 + 4(r^2 + 3 + 2\sqrt{3}r)}}{2} \right) = 1.$$

Dessa forma o volume de capacidade seria

$$V = n \left(\pi r^2 + \frac{bh}{2} \right) = n \left(\pi r^2 + \frac{4r\sqrt{3}r}{6} \right) = n \left(\pi r^2 + \frac{4r^2\sqrt{3}}{3} \right).$$

Para maximizar a capacidade na estrutura formada por primas triangulares e cilindros, bastaria derivar em relação a r e determinar o valor que a função assume o maior volume.

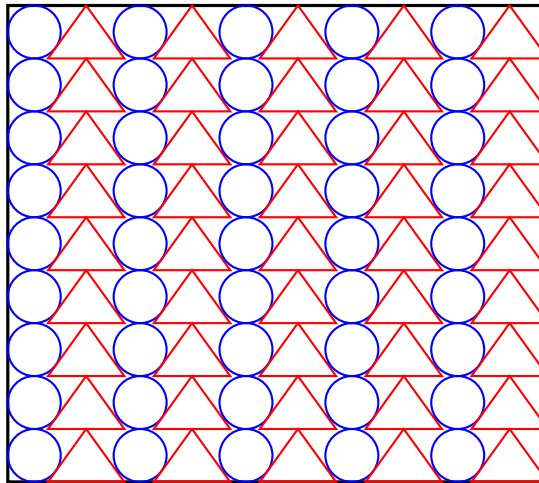


Figura 4.5 – Mosaico de cilindros e prismas

Prismas hexagonais

Por fim, enfileira-se prismas hexagonais. Se a região que delimita o mosaico é o cubo de 1 m^2 , o número de hexágonos multiplicado pela medida do diâmetro do hexágono deve igualar a 1, i.e. $nd = 1$. Por relações trigonométricas, $\tan 30^\circ = \frac{d/2}{l/2}$, onde l representa a

medida do lado do hexágono, logo, $l = \frac{d\sqrt{3}}{3}$. Portanto,

$$V = n^2 3 \frac{\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{d^2} \frac{d^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

o qual é maior que os volumes obtidos pelos outros mosaicos. Assim, o volume formado pelos prismas hexagonais empilhados é maior que armazena a maior capacidade de volume.

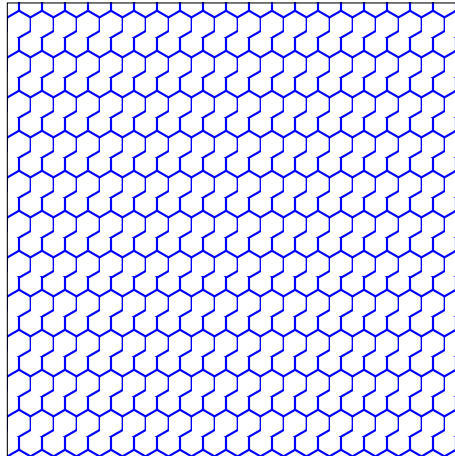


Figura 4.6 – Mosaico de prismas hexagonais

4.2.5 A geometria das abelhas

Ao presenciar favos de mel, observa-se que têm formatos similares, com alvéolos no formato de primas hexagonais e topos constituídos de três losangos iguais colocados inclinadamente.

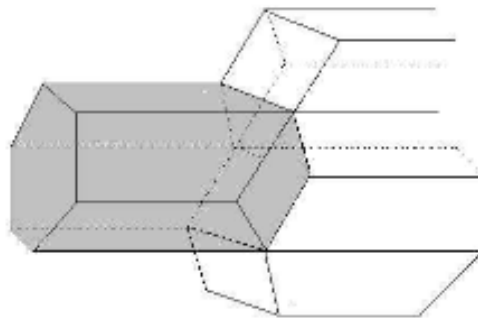


Figura 4.7 – alvéolo das colméias, de [2].

O físico Réaumur, segundo [1], observou que os ângulos do losango de fechamento, inclinados em relação ao eixo radial dos alvéolos não variavam, efetuando medições com alvéolos de várias partes do mundo e encontrando sempre 70 graus e 32 minutos. Propôs então seu amigo Koing, matemático alemão, que resolvesse o problema o qual pedia o

ângulo em que os losangos podem formar para fechar um prisma de base hexagonal em uma das extremidades com 3 losangos iguais. Ao saber do problema, Colin Maclauri refez as contas e obteve o ângulo de 70 graus e 34, o que implicaria que as abelhas estavam desperdiçando esforço, mas Colin Maclaurin resolveu o problema corretamente e encontrou o ângulo de 70 graus e 32 minutos, pois havia usado uma tabela de logaritmos errada.

Essa parte do trabalho foi inspirada no material exposto em [2], pois proporciona um modelo da geometria das abelhas através de modelagem, construindo favos com prismas no formato losangular.

As abelhas usam cera para construir favos de mel procurando economizar o material para obter o mesmo volume. Se o alvéolo é a união de três prismas de base losangular com ângulos internos de 60 e 120 graus, podemos determinar o ângulo ideal θ de elevação da face losangular, para um mesmo volume, se gaste uma menor quantidade possível de cera, ou seja, minimizando a área superficial do prisma. A minimização da quantidade de cera se reduz ao problema matemático de se encontrar o valor do ângulo $\theta = \angle OVB$ de modo que a soma das áreas das figuras $AB'BA$, $B'C'CB$ e $ABCV$ seja a menor possível.

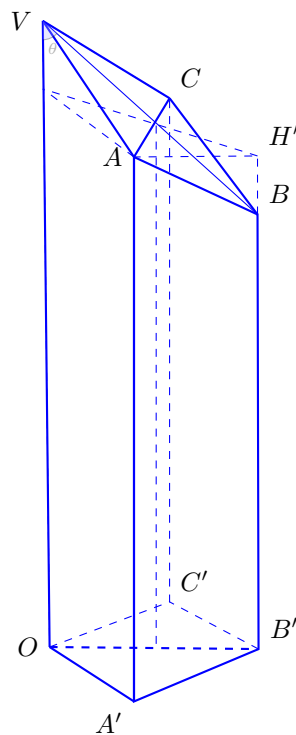


Figura 4.8 – 1/4 do alvéolo

Devido à simetria existente num alvéolo em relação à BB' , os trapézios $A'B'BA$ e $C'B'BC$ possuem a mesma área. Vamos encontrar um modelo que relacione as áreas das figuras $A'B'BA$ e $ABCV$ com θ .

Vamos calcular a área do trapézio $A'B'BA$ como

$$A_{trap} = \frac{A'B'(A'A + B'B)}{2},$$

onde $OB' = l$ e $A'A = h$. Seja H' o ponto de $B'B$, que está a mesma altura h do ponto B' , $h = B'H' = B'B + BH'$. Se D é o ponto médio de OB , os triângulos VHD e $BH'D$ são semelhantes pelo caso ALA, de onde $BH' = VH$. Assim, a cotangente de θ no triângulo VHD ,

$$\cotan \theta = \frac{VH}{HD}.$$

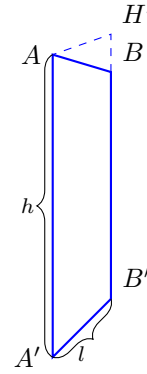


Figura 4.9 – Face trapezoidal

Como $HD = \frac{OB}{2} = \frac{l}{2}$, pois $HH' = OB'$ e D é ponto médio de HH'' . Logo $BH' = VH = HD \cotan \theta = \frac{l}{2} \cotan \theta$. Então

$$A_{trap} = \frac{l}{2} \left[h + \left(h - \frac{l}{2} \cotan \theta \right) \right] = lh - \frac{l^2}{4} \cotan \theta.$$

Agora, vamos calcular a área do losango $ABCV$. CD é a altura do triângulo de lado l , logo $CD = l \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainda, de VHD tem-se que $\sin \theta = HD/VD$, ou seja, $VD = \frac{l}{2 \sin \theta}$. A área do triângulo VCD é, portanto,

$$A_{ABCV} = 4 \frac{VD \cdot CD}{2} = 4 \frac{1}{2} \frac{l}{2 \sin \theta} \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3} l^2}{2} \operatorname{cosec} \theta.$$

Logo a área lateral total do alvéolo vale

$$\begin{aligned} A(\theta) &= 6A_{trap} + 3A_{losan} = 6lh - \frac{3l^2}{2} \cotan \theta + \frac{3\sqrt{3}l^2}{2} \operatorname{cosec} \theta \\ &= 6lh - \frac{3\sqrt{3}l^2}{2} \left(\cotan \theta - \sqrt{3} \operatorname{cosec} \theta \right). \end{aligned}$$

Usando derivação, área $A(\theta)$ assumirá o menor valor quando θ satisfazer

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= -\frac{3\sqrt{3}l^2}{2} \left(\frac{d}{d\theta} \cotan \theta - \sqrt{3} \frac{d}{d\theta} \operatorname{cosec} \theta \right) \\ &= -\frac{3\sqrt{3}l^2}{2} \left(\sqrt{3} \operatorname{cosec} \theta \cotan \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta \right), \end{aligned}$$

igualando a 0, deve-se ter

$$\sqrt{3} \cotan \theta = \operatorname{cosec} \theta$$

Então $1 = \sqrt{3} \cos \theta$, ou seja, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, que ocorre quando $\theta = 54.7356^\circ$ graus.

4.3 Referências Bibliográficas

- [1] BARCO, L., *A geometria instintiva das abelhas*. Revista Super Interessante, 2016.
- [2] BASSANEZI, R. C., *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.
- [3] GUIDORIZZI, H., *Cálculo*, vol. 1. 5ª ed.. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [4] BARBOSA, MAGNO A. M., *Proposta de ensino de Integrais de funções no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede - PROFMAT). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, págs. 68, 2016.
- [5] MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna** Tradução Renata G. Watanabe. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1971. 2 v.
- [6] DA COSTA, JÉSU M. A. *Introdução ao cálculo diferencial e integral como ferramenta para cálculo de áreas planas no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede - PROFMAT). Universidade Federal do Amapá. Macapá, pag. 69, 2016.
- [7] LIMA. D. M. DE; ANGELO, C. L., *A matemática das abelhas*. 9º SIEPE Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão: O conhecimento vai além das fronteiras. Anais do 9º SIEPE, Universidade Federal do Pampa - Santana do Livramento, 21-23 nov 2017
- [8] LIMA. ELON L. **Análise real**: funções de uma variável. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Matemática universitária).
- [9] LIMA, FRANCISCO DO N. *Estudo sobre o cálculo de áreas e volumes utilizando o método de exaustão e o Princípio de Cavalieri*. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede - PROFMAT). Departamento de Matemática, Centro de Ciências e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, págs. 66, 2013.
- [10] PATERLINI R. R. *Aritmética dos números reais*. São Carlos, [s.n], 2008. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/>. Acesso em: 18/05/17.
- [11] STEWART, J., *Cálculo*, vol. 1. 7ª ed.. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [12] RUDIN, WALTER. **Princípio de análise matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.