

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DF

# ÍNDICE DE REFRAÇÃO EM AMOSTRAS DENSAS DE ÁTOMOS FRIOS

Felipe Carvalho Brambila

São Carlos  
2025

FELIPE CARVALHO BRAMBILA

# ÍNDICE DE REFRAÇÃO EM AMOSTRAS DENSAS DE ÁTOMOS FRIOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Física pela Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: prof. Dr. Raul C. Teixeira.

São Carlos

2025

*Àqueles por quem senti a dura saudade nos dias mais felizes e as mais alegres  
lembranças nos dias tristes,  
minha família.*

*A Ele, que sempre esteve comigo,  
Jesus Cristo.*

# Agradecimentos

Início este trabalho agradecendo:

A Deus, cujo amor e proteção me guardaram nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos, em especial: Diego Crnkowise, Marcella Colchesqui, Eron Trindade, Giovanni Palotta, Maria Verônica Bomfim, Isadora Fenerich. Nunca me esquecerei dos momentos que vivemos juntos, pelas risadas e amizade construída. Espero levá-los para a vida. Ao meu companheiro de casa Diego Esteves. Ao meu grande amigo Eric Prado, que mesmo longe, nunca deixou de me apoiar. Thales Martins e Daniel Coelho, Vocês foram cruciais na minha vida acadêmica e pessoal. Sou muito feliz por compartilharmos laboratório, casa; pelos jogos de futebol que tantas vezes assistimos, pelas brincadeiras e pela parceria.

Aos docentes: Dr. Maycon Motta e Dr. Adenilson José Chiquito, pelo bom exemplo profissional e pelos conhecimentos transmitidos.

Aos colegas de laboratório: Dalila, Pablo, Pedro, Ana, Gustavo, Claudio, Matheus, Marcia e prof. Philippe. É muito divertido fazer ciência com vocês.

Ao professor Dr. Raul Celistrino Teixeira, pela paciência, pelos ensinamentos e por acreditar em mim.

À minha companheira, Julia Beatriz Estevan. Você me amparou nos momentos de tristeza, me fez sorrir e me auxiliou em toda essa trajetória. É um prazer te ter em minha vida.

À minha família. Às minhas avós Ana Bueno Carvalho e Maria Batichoti Brambila. Gostaria que você estivesse aqui, vô Nelson, para ver seu neto se formar. Tenho certeza que você está contente aí no céu.

Aos meus pais: Ana Paula Carvalho Brambila e Rogério Rodrigo Brambila. Vocês são a razão do meu ser. Tão fundamentais que tornam esse agradecimento fácil de sentir e difícil de escrever. Agradeço a vocês pela sabedoria, pelo zelo e amor. Pelos puxões de orelha e por me incentivarem, desde sempre, a estudar. Saibam que vocês sempre serão minhas maiores inspirações.

Ao meu irmão Davi, cujos abraços apertados me deram força para continuar.

*"Para ser grande, sê inteiro: nada  
teu exagera ou exclui.  
sê todo em cada coisa. Põe quanto és  
no mínimo que fazes."*

*Fernando Pessoa*

*"Digo: o real não está na saída nem na chegada: ele se dispõe para a gente é no meio da  
travessia."*

*Guimarães Rosa*

## RESUMO

Considerando o estudo da interação entre radiação e matéria, um fenômeno de interesse é a refração. Isto porque na maioria dos materiais ópticos encontra-se experimentalmente um índice de refração da ordem da unidade, enquanto as teorias tradicionais predizem índices extremamente altos. Recentemente, um estudo (ANDREOLI et al., 2021) mostrou que a saturação do índice de refração, não prevista na interação linear de campo médio entre a matéria e a luz, se situa na forte correlação da emissão luminosa de um meio atômico denso. No entanto esta saturação não possui, ainda, evidências experimentais.

O grupo experimental do qual o estudante faz parte dispõe de um aparato capaz de produzir nuvens atômicas frias de Estrôncio bosônico, chegando a densidades tais que possibilitam a medição deste limite para o índice. Dado que o espaço de parâmetros é grande, faz-se necessário um guia numérico que permita identificar o efeito desejado para diferentes dessintonias e densidades da amostra. Neste contexto que se insere o presente projeto; sendo seu principal objetivo a obtenção, por meio de simulações numéricas, do índice de refração em função da densidade espacial de uma nuvem atômica.

**Palavras-chave:** Átomos Frios, Índice de Refração, Modelo de Dipolos Acoplados.

## ABSTRACT

Considering the study of the interaction between radiation and matter, an interesting phenomenon is refraction. This is because in most optical materials a refractive index of the order of unity is experimentally found, while classical and semi-classical theories predict extremely high indices. Recently, a study showed that the saturation of the refractive index, not predicted in the linear mean-field interaction between matter and light, lies in the strong correlation of the light emission of a dense atomic medium. However, this saturation does not have experimental evidence yet.

The experimental group of which the student is part has an apparatus capable of producing cold atomic clouds of bosonic Strontium, reaching such densities that make it possible to measure this limit for the index. Given that the parameter's space is large, a numerical guide is necessary to identify the desired effect for different mismatches and sample densities. This project is part of this context; its main objective being to obtain, through simulations, the refractive index as a function of the spatial density of an atomic cloud.

**Key-words:** Cold Atoms, Refractive Index, Coupled Dipole Model.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>9</b>
2.1	Modelos tradicionais de interação luz-matéria . . . . .	9
2.1.1	Modelo de Maxwell-Bloch . . . . .	10
2.1.2	Modelo de Clausius-Mossotti . . . . .	12
2.2	Modelo de Dipolos Acoplados . . . . .	14
2.3	Índice de Refração . . . . .	16
2.4	Feixe Gaussiano . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>23</b>
3.1	Limites da medida de transmissão . . . . .	23
3.2	Índice de Refração . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>29</b>

# 1. INTRODUÇÃO

A propagação de luz em meios desordenados é um fenômeno físico que compõe diversos recortes do cotidiano: a transparência do vidro, a reflexão da luz sob a superfície de um lago, a formação de arco-íris, dentre outros. Em todos estes casos o espalhamento da luz e sua refração estão presentes. A combinação destes efeitos em diferentes materiais produz também diferentes respostas ópticas, a depender das características físicas do meio em que a luz se propaga.

Uma das formas de estudar o comportamento luminoso nos materiais é por meio do índice de refração. Em materiais comuns e sistemas de estado sólido, verifica-se um índice de refração da ordem da unidade. Isto independe da composição do material ou do seu estado, e discorda fortemente das estimativas que podem ser feitas a partir de modelos lineares, como o modelo de Lorentz que são comumente apresentados em cursos de eletromagnetismo. Esse fato não possuía fundamentação teórica até recentemente, quando novas propostas surgiram através do trabalho de (ANDREOLI et al., 2021), que demonstrou uma limitação no índice de aproximadamente  $n \sim 1.7$ , condizente com o que é de fato encontrado em materiais.

Neste sentido, buscamos reproduzir este estudo teórico por meio de simulações envolvendo nuvens de átomos frios. Foram calculadas curvas de transmissão da nuvem e valores das partes real e imaginária do índice de refração contrapondo o modelo semiclássico de Maxwell-Bloch e o Modelo de Dipolos Acoplados. Estes resultados irão guiar a busca por parâmetros experimentais que nos permitam verificar o fenômeno em nosso experimento de átomos frios.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A propagação de luz por um meio material pode ser modelada de diversas formas. Como se trata de um problema de muitos corpos, a complexidade do problema cresce rapidamente e aproximações devem ser feitas para que se chegue a um resultado satisfatório.

Historicamente, foram desenvolvidos modelos clássicos que tratam a amostra de interesse como um meio contínuo e suave, de modo que os átomos responderiam todos de uma mesma forma à luz que incide sob o material, independentemente da proximidade de um deles com relação aos seus vizinhos. Quando a densidade espacial dos átomos no material é baixa, essa aproximação permite calcular observáveis físicos que correspondem, com boa precisão, aos dados experimentais. No entanto, com o aumento da densidade, o grande número de centros espalhadores promove processos de múltiplo espalhamento da luz. Neste caso, um fóton quase-ressonante que incide sob um átomo pode ser reemitido para átomos vizinhos e este efeito se prolonga sobre os outros átomos da amostra. Neste regime, a aproximação de meio contínuo falha e é necessário utilizar uma nova abordagem - em que a luz é emitida de forma intrinsecamente coletiva.

Nesta seção, descrevemos os modelos utilizados tradicionalmente para tratar deste problema. Em seguida, introduzimos o modelo que recentemente fora utilizado para, além de descrever as interações entre luz e átomos pela abordagem citada, obter a limitação do índice de refração e oferecer uma resposta para a questão. Ao final, descrevemos a forma do feixe de luz que foi utilizado neste trabalho.

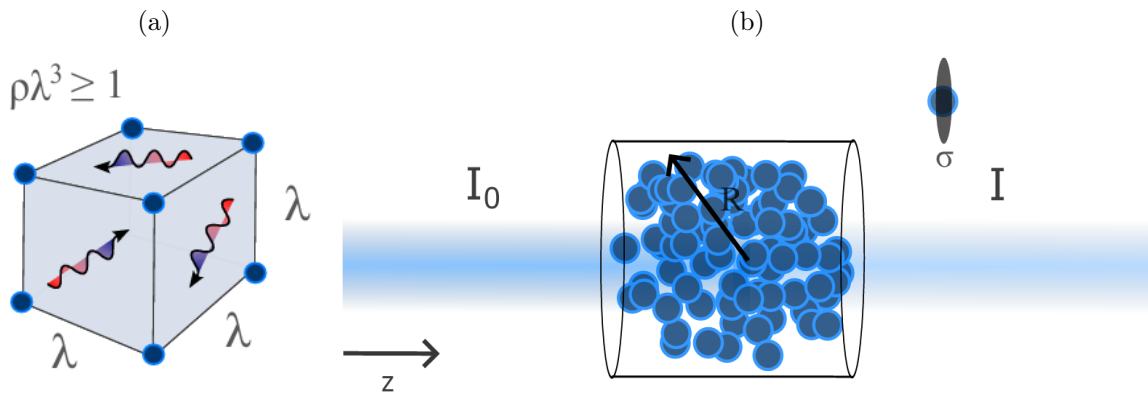
### 2.1. MODELOS TRADICIONAIS DE INTERAÇÃO LUZ-MATÉRIA

Uma forma de detectar efeitos de densidade de uma amostra atômica é considerar a transmissão de luz coerente por uma luz de baixa intensidade quase-ressonante. Uma vez que a luz coerente é dada pela projeção do campo elétrico total (incidente + emitido) sobre o mesmo modo do campo incidente, sua medição representa essencialmente uma medida da atenuação e do deslocamento de fase impostos pelo meio material na luz propagante. A partir desta medição, será possível obter o índice de refração da amostra segundo diversos modelos.

### 2.1.1. MODELO DE MAXWELL-BLOCH

Considere uma nuvem de  $N$  átomos de frequência de ressonância natural  $\omega_0$  e taxa natural de decaimento  $\Gamma$ , sujeitos ao campo elétrico de amplitude  $\mathbf{E}_L$  e frequência  $\omega_L$  de uma luz monocromática de baixa intensidade e comprimento de onda  $\lambda$ , que se propaga na direção  $\hat{z}$ . A nuvem está contida em um cilindro de raio  $R$ , comprimento  $l$ . A densidade espacial é  $\rho$ . Definimos então a chamada **densidade espacial reduzida** da nuvem  $\rho\lambda^3$ , que se trata de uma medida do quão próximos os átomos estão em unidades do comprimento de onda da transição atômica (Figura 1.a).

Figura 1: a) Cubo de tamanho  $\lambda$  e densidade  $\rho$ . No regime denso, há mais de um átomo localizado dentro do cubo. As ondas na face do cubo representam a luz que é emitida e reemitida pelos átomos do cubo; b) Luz de intensidade inicial  $I_0$  enviada em direção a uma nuvem atômica cilíndrica de raio  $R$  e cujos átomos possuem seção de choque  $\sigma$ . Após a interação, luz de intensidade  $I$  é transmitida através da amostra. Fonte: autor.



Fonte: Elaboração própria.

O dipolo elétrico médio de cada átomo da nuvem, induzido pela luz incidente, é:

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}; \quad \alpha = i \frac{6\pi c^3}{\omega_0^3} \frac{1}{1 - 2i\Delta/\Gamma}, \quad (1)$$

com  $\alpha$  a polarizabilidade atômica,  $\mathbf{E}$  o campo elétrico total e  $\Delta = \omega_L - \omega_0$  a dessintonia da luz, isto é, o quão longe da ressonância natural dos átomos a luz monocromática se situa (para a dedução da expressão para a polarizabilidade, ver [1]). A parte real de  $\alpha$ ,  $\Re(\alpha)$ , está associada à fase adquirida pela luz após a interação com o átomo, e seu valor máximo ocorre quando  $\Delta = \pm\Gamma/2$ . Já a parte imaginária  $\Im(\alpha)$  está relacionada ao espalhamento da luz pelos átomos. O dipolo elétrico médio induzido provoca um campo de polarização dado por

$$\mathbf{P} = \rho \langle \mathbf{d} \rangle = \rho \alpha \mathbf{E} . \quad (2)$$

Considerando o limite diluído, onde os átomos interagem de forma independente com a luz, isto é, que o efeito dos átomos na luz não sejam coletivos e ocorram independentemente da presença de átomos vizinhos, podemos escrever o vetor **deslocamento elétrico**:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (3)$$

Dessa forma, substituindo a equação (2), temos:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \rho\alpha/\epsilon_0) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (4)$$

sendo  $\epsilon_r$  a permissividade elétrica relativa, que consiste na razão entre a permissividade elétrica do meio  $\epsilon$  e a permissividade elétrica do vácuo  $\epsilon_0$ :  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ . A partir desta relação (4) é possível escrever a equação de onda e extrair o **índice de refração** [2], que é definido como a razão entre a velocidade da luz no vácuo  $c$  e a velocidade da luz  $v$  no meio de interesse:

$$n \equiv c/v = \sqrt{\epsilon_r} . \quad (5)$$

Assim, obtemos o índice de refração neste modelo, denominado **Modelo de Maxwell-Bloch** (MB):

$$n_{\text{MB}} = \sqrt{1 + \rho\alpha/\epsilon_0} = \sqrt{1 + \frac{3i\rho\lambda^3}{4\pi^2(1 - 2i\Delta/\Gamma)}} , \quad (6)$$

com  $\rho$  a densidade atômica e  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo. É possível ver que neste modelo de átomos independentes o índice de refração depende da densidade de forma proporcional ao parâmetro adimensional  $\rho\lambda^3$ , o qual será utilizado amplamente neste trabalho.

Uma crítica historicamente feita a este modelo é o fato de que, no campo elétrico total ao qual um átomo individual está sujeito, é incluído o campo elétrico reemitido pelo mesmo átomo. Um modelo que em princípio refina o modelo anterior, corrigindo

este problema, é o chamado modelo de Clausius-Mossotti (ou Lorentz-Lorenz), que é comumente encontrado em livros de eletromagnetismo e é apresentado no que se segue.

### 2.1.2. MODELO DE CLAUSIUS-MOSSOTTI

Podemos nos perguntar: o que ocorre microscopicamente na amostra quando o feixe de luz incide nos átomos? Vamos considerar neste modelo que o vetor polarização elétrica é descrito por  $\mathbf{P} = \rho\langle\mathbf{d}\rangle$ . Conforme a nuvem atômica se aproxima do regime denso, a diminuição da distância interatômica faz surgir um **campo elétrico interno**  $\mathbf{E}_P$  devido ao empacotamento de átomos vizinhos. Para contabilizar de forma correta o campo devido à proximidade interatômica, o campo elétrico total será reescrito, neste modelo, como a diferença entre o **campo elétrico total**  $\mathbf{E}$  e o campo  $\mathbf{E}_P$ , que é contribuição dos átomos tratados pela aproximação de meio contínuo, descritos por uma polarização  $P$ :

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} - \mathbf{E}_P. \quad (7)$$

Em suma, neste ponto o modelo trata de reconhecer a contribuição específica dos átomos vizinhos retirando a contribuição aproximada.

A fim de calcular  $\mathbf{E}_P$ , consideramos uma esfera de raio  $R$  que contenha diversos átomos, mas que seja pequena o suficiente de forma que a polarização seja praticamente uniforme ao longo de seu volume. O momento de dipolo total no volume da esfera é:

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{P}; \quad (8)$$

e o campo elétrico médio dentro da esfera, que coincide com  $\mathbf{E}_P$  é dado por [2]:

$$\mathbf{E}_P = \left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)^{-1} \int_{r < R} \mathbf{E} d^3\mathbf{x} = -\mathbf{P}/3\epsilon_0. \quad (9)$$

Relacionamos o campo elétrico total com o momento de dipolo médio induzido por meio da polarizabilidade atômica:

$$\langle\mathbf{d}\rangle = \epsilon_0\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{P}/3\epsilon_0). \quad (10)$$

Note que a diferença entre este modelo e o anterior reside exatamente nesta equação. Antes, o campo elétrico aqui era o campo elétrico total. Agora, trata-se do campo total somado ao campo emitido pelo próprio átomo. A polarização então se torna (2):

$$\mathbf{P} = \rho\varepsilon_0\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{P}/3\varepsilon_0). \quad (11)$$

Simplificando a expressão e substituindo a polarização novamente, obtemos:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \rho\alpha/(3\varepsilon_0). \quad (12)$$

Utilizando a equação (5):

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \rho\alpha/(3\varepsilon_0). \quad (13)$$

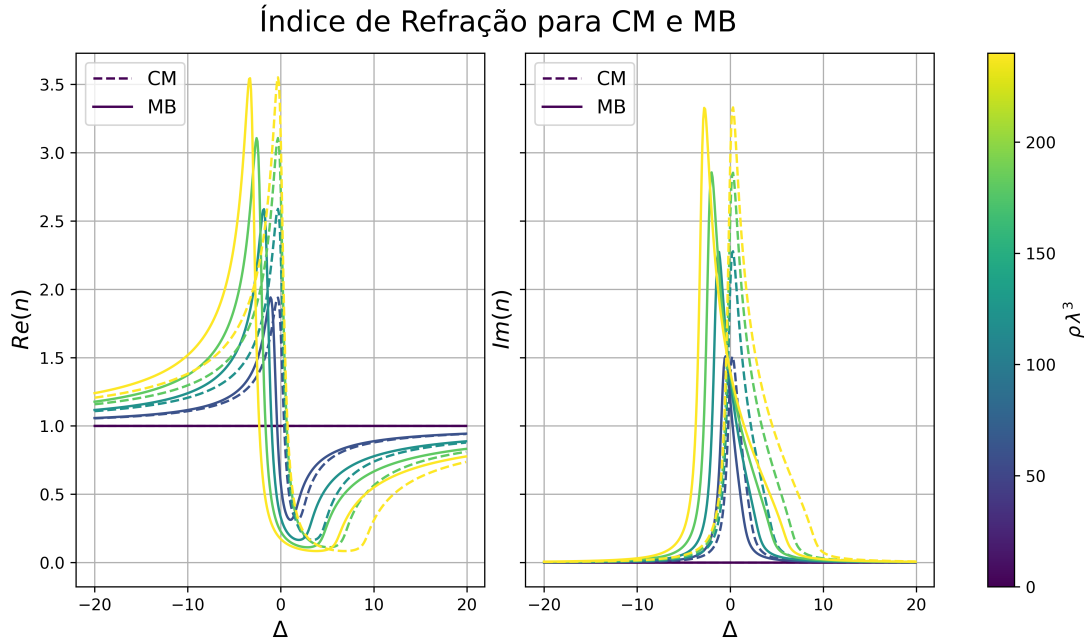
Desse modo, o índice de refração no modelo de Clausius-Mossotti (CM) é dado por:

$$n = \sqrt{\frac{1 + (2\rho\alpha/3\varepsilon_0)}{1 - (\rho\alpha/3\varepsilon_0)}}. \quad (14)$$

Em 1879, Clausius demonstrou que, para qualquer substância, o termo  $\rho\alpha/\varepsilon_0$  é proporcional à densidade da amostra. Especialmente, esta relação serve melhor para gases diluídos do que para sólidos ou líquidos, onde é aproximadamente válida caso a constante dielétrica seja grande [2].

Ou seja, assim como no modelo apresentado na seção anterior, a expressão para o índice de refração de Clausius-Mossotti é proporcional à raiz da densidade atômica (ver Figura 2).

Figura 2: Comparação das partes real e imaginária do índice de refração para os modelos de Clausius-Mossotti e Maxwell-Bloch.



Fonte: Elaboração própria.

Se utilizarmos o modelo acima, e calcularmos o máximo índice de refração esperado para a densidade típica de sólidos e líquidos,  $\rho \sim 10^{22}$ , obtemos  $\Re(n) \sim 10^4$ . Porém, nenhum meio material, seja ele natural ou artificial, apresenta índice de refração superior a 5 no espectro visível.

Recentemente, diversos resultados experimentais e teóricos apontam fortemente para a emergência de efeitos coletivos na interação entre átomos e luz para densidades adimensionais  $\rho\lambda^3 \geq 1$  [3,4,5]. Como solução deste problema surge a utilização do **Modelo de Dipolos Acoplados**, explicado a seguir.

## 2.2. MODELO DE DIPOLOS ACOPLADOS

O problema que estamos tratando segue sendo o mesmo: um conjunto de  $N$  átomos dispostos em posições aleatórias  $\mathbf{r}_j$ , constantes ao longo do tempo, interagem com o campo elétrico de frequência  $\Delta$  quase-ressonante e polarização linear  $\hat{e}$  de uma luz monocromática de baixa intensidade incidente. Neste caso, porém, os átomos são considerados sistemas de dois níveis não degenerados.

Seja  $\sigma_j = |g\rangle\langle e|$  o operador levantamento e  $\sigma_j^\dagger$  o operador abaixamento da transição

atômica;  $\hbar$  a constante de Planck reduzida,  $\Omega(\mathbf{r}_j) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_L(\mathbf{r}_j)/\hbar$  a frequência de Rabi. A interação entre os átomos  $j$  e  $j' \neq j$  a uma distância  $r_{jj'} = |r_j - r_{j'}|$  faz surgir um potencial que, em primeira ordem, é dado por  $V_{jj'} = e^{-ik_0 r_{jj'}}/ik_0 r_{jj'}$ . Após uma série de sucessivas aproximações, como a de onda rotativa (*Rotating Wave Approximation*) e cadeias de Markov [6, 7, 8], o hamiltoniano efetivo do sistema pode ser escrito como [9]:

$$\mathcal{H} = -\hbar\Delta \sum_j \sigma_j^\dagger \sigma_j + \frac{\hbar}{2} \sum_j [\Omega(\mathbf{r}_j) \cdot \sigma_j e^{-i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_j - \Delta t)} + \text{c.c.}] - (\hbar\Gamma/2) \sum_{j \neq j'} V_{jj'} \sigma_j^\dagger \sigma_{j'}. \quad (15)$$

O primeiro termo do hamiltoniano provém do átomo livre (ausência de campo elétrico externo); o segundo termo da interação entre os átomos e o campo elétrico incidente, e o último termo corresponde ao acoplamento entre um átomo  $j$  e todos os outros  $j'$ . De fato, o principal sentido físico por trás deste modelo reside neste acoplamento. Fundamentalmente, os átomos são tratados como **dipolos acoplados via campo elétrico**. Isto significa que um fóton que é absorvido por um átomo pode ser reemitido e absorvido pelo seu vizinho; que, por sua vez, pode dar continuidade ao processo. Estes múltiplos eventos de emissão e absorção são o cerne deste modelo, conhecido como **Modelo de Dipolos Acoplados**. O principal efeito dos processos descritos é o surgimento de modos coletivos de emissão luminosa e espalhamento [10].

Em específico, da interação entre o campo elétrico incidente e os átomos de transição  $J = 0 \leftrightarrow J = 1$  da nuvem atômica, surge um acoplamento entre o momento de dipolo elétrico  $\hat{\beta}_j^\gamma$  do átomo  $j$  na direção  $\gamma(x, y, z)$  com o momento de dipolo  $\beta_{j'}^\eta$  do átomo  $m$  na direção  $\eta(x, y, z)$ . Considerando que nos situamos no regime linear (ou seja, a resposta do sistema ao campo elétrico é linear), a dinâmica dos dipolos é regida pelo seguinte conjunto de  $3N$  equações [13], [8], [11]:

$$\frac{d\beta_j^\gamma(t)}{dt} = \left( i\Delta - \frac{\Gamma_0}{2} \right) \beta_j^\gamma(t) + i\frac{\Omega_j^\gamma}{2} - \frac{\Gamma_0}{2} \sum_{\substack{j' \neq j \\ \gamma=x,y,z}} G_{\gamma,\eta}(\mathbf{r}_{jj'}) \beta_{j'}^\eta(t) \quad (16)$$

onde  $\Gamma_0 = d^2\omega_0^3/3\pi\epsilon_0\hbar c^3$  é a expressão para a taxa de decaimento natural definida anteriormente e  $G_{\gamma,\eta}(\mathbf{r}_{jj'})$  o tensor de Green que caracteriza a interação efetiva entre os dipolos, mediados pelos modos do vácuo da radiação eletromagnética:

$$G_{\gamma,\eta} = \frac{3}{2} \frac{e^{ik_0 r_{jj'}}}{ik_0 r_{jj'}} \left\{ (\delta_{\gamma,\eta} - \hat{r}_\gamma \hat{r}_\eta^*) + (\delta_{\gamma,\eta} - 3\hat{r}_\gamma \hat{r}_\eta^*) \left[ \frac{i}{k_0 r_{jj'}} - \frac{1}{(k_0 r_{jj'})^2} \right] \right\} \quad (17)$$

Na equação acima,  $\hat{\mathbf{r}}_{jj'}$  é o versor unitário que aponta de  $j$  para  $j'$ . É possível notar que, no caso de uma interação próxima - situação em que  $k_0 r_{jm} < 1$  - os termos curto alcance ( $1/r^2, 1/r^3$ ) se tornam relevantes, e é justamente essa dinâmica a responsável por modificar o comportamento do espalhamento e emissão de luz por um átomo independente.

De forma parecida com o hamiltoniano do sistema (equação (15)), o primeiro termo da equação (16) corresponde ao decaimento de um único átomo, enquanto o segundo representa a interação dos dipolos com o campo elétrico do laser incidente e o terceiro o acoplamento entre os diferentes dipolos atômicos da nuvem. Este acoplamento possui via tensor de Green (17) as assinaturas de densidade da amostra, uma vez que contém os potenciais interatômicos de curto e longo alcance e faz surgir dessa forma a cooperatividade da emissão e espalhamento de luz pelos átomos.

É interessante notar que o modelo aqui desenvolvido é análogo ao problema de  $N$  **osciladores clássicos** sob a ação de um **campo elétrico externo**, como predito pela óptica linear clássica. Um tratamento quântico para o caso de emissão de fóton único de um sistema fracamente excitado leva aos mesmos resultados para a radiação emitida obtida classicamente [6].

### 2.3. ÍNDICE DE REFRAÇÃO

Ao passar pelos átomos, o campo elétrico entre  $z$  e  $z + dz$  adquire uma fase e diminui seu módulo, de forma que  $\mathbf{E}(z + dz) = \mathbf{E}(z)e^{iknz}$ , com  $n$  o índice de refração do meio. Logo após passar pela amostra de tamanho  $l$  o campo elétrico da luz é dado por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i e^{ik[n-1]l} \quad (18)$$

Se escrevermos o índice de refração como contendo uma parte real e uma imaginária  $n = n_{\text{re}} + in_{\text{im}}$  então:

$$\mathbf{E} = e^{-kn_{\text{im}}l} e^{ik[n_{\text{re}}-1]l} \mathbf{E}_i \quad (19)$$

De onde definimos o **coeficiente de transmissão**  $t$  e a **transmissão coerente**  $T_c$ :

$$t = \frac{\langle \mathbf{E} \rangle}{\mathbf{E}_i} = e^{-kn_{\text{im}}l} e^{ik[n_{\text{re}}-1]l}, \quad T_c = |t|^2 \quad (20)$$

E escrevendo  $t = te^{i\varphi}$ , relembramos que a parte real do índice de refração é responsável pela **fase** adquirida pela luz - neste caso,  $\varphi$ . Então,  $\varphi = \arctan(t_{\text{im}}/t_{\text{re}}) = k[n_{\text{re}} - 1]l$ . Logo:

$$n_{\text{re}} = \frac{\varphi}{kl} + 1 \quad . \quad (21)$$

É possível obter os valores de máximo e mínimo das curvas de fase no regime diluído considerando que, da equação ([?]):

$$\varphi = (n_{\text{re}} - 1) \frac{2\pi l}{\lambda} \quad . \quad (22)$$

adicionalmente, no regime diluído onde  $\rho \ll 1$ , podemos escrever a partir da equação ([?]):

$$n \sim 1 + \frac{i3\pi\rho}{k^3} \frac{1}{1 - 2i\Delta/\Gamma} \quad (23)$$

Multiplicando e dividindo a equação acima pelo complexo conjugado de seu denominador, resulta:

$$n \sim \left[ 1 + \frac{6\pi\rho}{k^3} \frac{\Delta/\Gamma}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2} \right] + i \left[ \frac{3\pi\rho}{k^3} \frac{1}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2} \right] \quad (24)$$

obtemos a expressão aproximada para o índice de refração no regime diluído, com a primeira parcela representando a parte real e a segunda parcela a parte imaginária. Assim, substituindo na equação (22) obtemos:

$$\varphi = \frac{6\pi\rho l}{k^2} \frac{\Delta/\Gamma}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2}, \quad \rho \ll k^3 \quad (25)$$

que é a expressão para a fase associada à passagem da luz pelos átomos no regime diluído. Para além da obtenção da fase, definimos aqui a **seção de choque** de um único átomo (Figura 1(b)):

$$\sigma(\Delta) = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + 4\Delta^2/\Gamma_0^2} \quad (26)$$

além da **profundidade óptica ressonante** da nuvem:

$$b_0 = \frac{6\pi}{k^2} \rho l \quad (27)$$

Em particular, no limite de baixa densidade é possível calcular a intensidade transmitida pela amostra por meio da **Lei de Beer-Lambert**, que relaciona a intensidade de luz  $I$  transmitida e  $I_0$  enviada pelo laser (que são dadas a partir de  $T_c = I/I_0$ ) à profundidade óptica  $b(\Delta)$  da nuvem:

$$I = I_0 e^{-b(\Delta)}, \quad b(\Delta) = \sigma(\Delta) \int \rho dz \ ; \quad (28)$$

Analisando a expressão, vemos que a intensidade transmitida depende da densidade espacial somente na direção  $\hat{z}$ , sendo a **profundidade óptica** o único parâmetro relevante neste regime. Já quando a nuvem se torna densa, surgem também efeitos dependentes da densidade espacial  $\rho$ , o que acarreta modificações na emissão e transmissão de luz da amostra [13].

Comparando a transmissão coerente dada pela equação (20) com a Lei de Beer-Lambert, obtemos:

$$I = e^{-2kn_{\text{im}}l} = e^{-b(\Delta)} \quad (29)$$

Invertendo a equação, encontramos a **parte imaginária do índice de refração** em função da **transmissão coerente** (ou ainda, da profundidade óptica), do tamanho longitudinal da nuvem atômica e do vetor de onda:

$$n_{\text{im}}(\Delta) = \frac{b(\Delta)}{2kl} = \frac{-\ln(I/I_0)}{2kl} \ . \quad (30)$$

É possível, ainda, comparando a equação (27) com (25), obtemos:

$$\varphi = b_0 \frac{\Delta/\Gamma}{1 + 4\Delta^2/\Gamma^2} \quad (31)$$

Derivando a expressão e igualando a zero, obtém-se:

$$\varphi_{\max/\min} = \pm \frac{b_0}{4} \quad (32)$$

que representa os valores máximo ou mínimo da fase adquirida pela luz, dependentes apenas do valor da profundidade óptica em ressonância ( $\Delta = 0$ ).

A partir destas relações e do modelo apresentado, um artigo teórico recente [12] atingiu uma saturação do índice de refração, de valor máximo 1,7 no caso de uma densidade adimensional  $\rho/k_0^3 \sim 1$ , onde  $k_0 = 2\pi/\lambda$  é o módulo do vetor de onda da luz ressonante.

Por meio das expressões (30) e (25) para o índice de refração, foram obtidos resultados numéricos que nos permitem comparar os modelos desenvolvidos utilizando diferentes parâmetros da nuvem como, por exemplo, seu raio e densidade atômica; além de parâmetros da luz laser incidente. Para um melhor entendimento de como estes últimos funcionam, a subseção seguir descreve em detalhes a forma do feixe luminoso.

## 2.4. FEIXE GAUSSIANO

A propagação de ondas eletromagnéticas respeita a famosa **equação da onda**. De forma simples, podemos utilizar uma função escalar  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$  que dependa de variáveis espaciais  $x_n$  e uma temporal  $t$ . Sendo  $\nabla^2$  o operador diferencial laplaciano e  $c$  uma constante fixa, a equação da onda para esta função é dada por:

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] u = 0. \quad (33)$$

Considerando uma onda propagante em  $\hat{z}$  dada pela expressão  $u = \psi(x, y, z)e^{-i(kz - \omega t)}$ , e inserindo na equação (33), obtemos:

$$\left[ \nabla^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] e^{-i(kz - \omega t)} = 0. \quad (34)$$

Aqui, faremos uma aproximação importante. Os argumentos apresentados se justificam à posteriori pelos seus resultados. Partiremos às hipóteses sem maiores detalhes, que fugiriam do escopo do trabalho (para dedução detalhada e discussões, ver [7]). Analisando as escalas de variação do problema, podemos argumentar que a variação da amplitude ao longo do eixo de propagação é lenta:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \quad (35)$$

e que a amplitude do feixe varia fortemente nas direções perpendiculares ao eixo óptico:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right| \quad (36)$$

Esta aproximação é chamada **aproximação paraxial**. Substituindo a expressão acima e negligenciando a segunda derivada em  $z$ :

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi = 0. \quad (37)$$

Mais do que descrever uma função ondulatória qualquer, a equação paraxial é utilizada, em especial, para o campo elétrico complexo de uma onda eletromagnética propagante  $E(x, y, z)$  no espaço livre, no caso em que seu perfil transversal tem tamanho muito maior do que o comprimento de onda da luz. Os perfis transversais de amplitude dos campos elétricos e magnéticos serão dados por uma **função de Gauss** [14]. Este grupo de funções é extremamente útil em diversas áreas da física e em especial, amplamente utilizado pela comunidade da Óptica para modelar a luz emitida por lasers convencionais. Expressamos sua forma geral como:

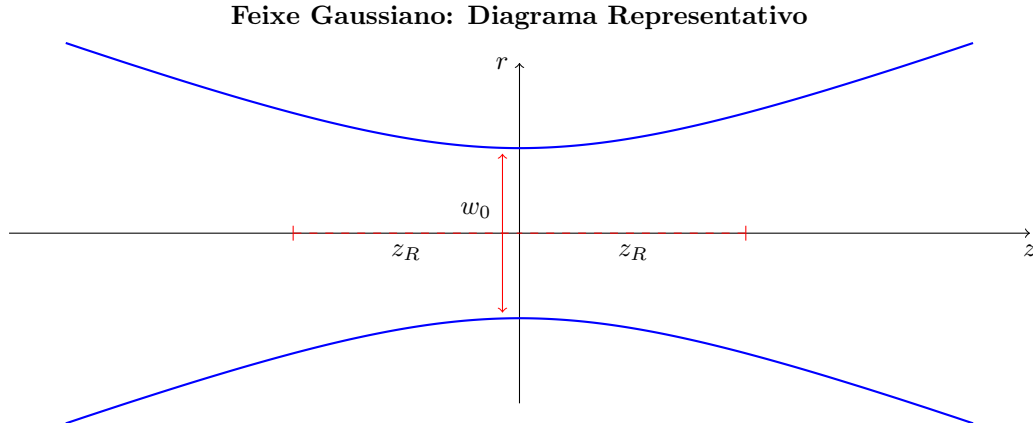
$$u(z) = A \exp\left(-\frac{(z-b)^2}{2c^2}\right) \quad (38)$$

sendo  $A$ ,  $b$  e  $c$  constantes arbitrárias reais que controlam, respectivamente, a amplitude da função, a posição de seu centro e sua largura ( $c$  é também chamado de **desvio padrão**). Funções deste tipo surgem da junção de uma função exponencial com uma função quadrática. Uma propriedade interessante é que o produto de funções gaussianas é também uma função gaussiana. Como solução da equação paraxial associada à equação da onda, surgem como soluções os modos de **Hermite-Gauss** para coordenadas cartesianas, também chamado de modos transversais eletromagnéticos  $TEM_{lm}$ ; ou, ainda, no caso de uma simetria radial em torno do eixo de propagação, modos de **Laguerre-Gauss** para o perfil do laser.

A Figura 3 apresenta um diagrama que representa o perfil do feixe gaussiano, onde as curvas azuis correspondem à borda do feixe e as retas vermelhas indicam, também de

forma qualitativa, o *waist* central do feixe e seu comprimento de Rayleigh.

Figura 3: Diagrama de um feixe gaussiano indicando o *waist* central  $w_0$ , o comprimento de Rayleigh  $z_R$ .



Fonte: Elaboração própria.

Podemos, agora, encontrar a forma para o campo elétrico do feixe de luz laser que incide na nuvem atômica. Assumindo polarização em  $\hat{x}$  e propagação em  $\hat{z}$ , a forma geral do modo  $TE_{00}$  é:

$$\mathbf{E}(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(\frac{-r^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(-i\left(kz + k\frac{r^2}{2R(z)} - \psi(z)\right)\right) \hat{\mathbf{x}} \quad (39)$$

onde  $r$  é a distância radial a partir do centro do feixe,  $z$  a distância axial do foco,  $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$  o vetor de onda,  $n$  o índice de refração do meio em que a onda eletromagnética se propaga,  $E_0$  a amplitude do campo elétrico na origem,  $R(z) = [z/(z^2 + z_R^2)]^{-1}$  o raio de curvatura da frente de onda em  $z$  do feixe;  $\psi(z) = \arctan(z/z_R)$  a fase de Gouy e  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$  é o comprimento de Rayleigh. O feixe possui a seguinte distribuição de intensidades:

$$I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 e^{-2r^2/w(z)^2}; \quad (40)$$

sendo  $I_0$  a intensidade máxima, situada na origem ( $r = 0 = z$ ) do sistema. Identificamos ainda uma largura central  $w(z)$  do feixe, denominada *waist*, que é dado por:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}. \quad (41)$$

Um outro ponto importante da aproximação paraxial realizada para chegarmos neste

resultado é que a divergência angular do feixe deve ser lenta. A partir das hipóteses realizadas, e em relação aos parâmetros da nuvem considerada nas subseções anteriores, essa aproximação significa que estamos considerando  $z_R \gg w_0 \gg \lambda$ . Ou seja, a cintura do feixe seja suficientemente maior que o comprimento de onda da luz enviada, para que a luz esteja bem comportada dentro do modelo utilizado de função gaussiana. Em nossas simulações verificamos que o modelo do feixe gaussiano é acurado apenas para feixes com  $w_0 \gtrsim 2\lambda$ , em concordância com o que é apresentado em [12] e esta informação será relevante ao tratarmos das medidas de transmissão da luz.

### 3. RESULTADOS

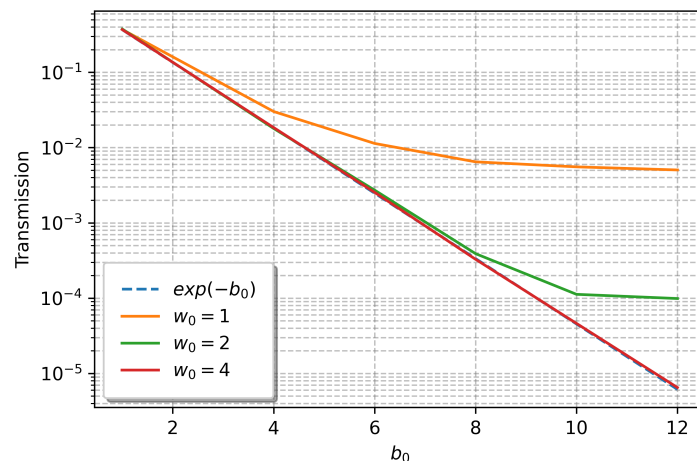
Nesta seção apresentamos os resultados numéricos obtidos por meio das simulações. De início, apresentamos as limitações que as relações entre os parâmetros do problema possuem. Em seguida, mostramos as simulações realizadas da transmissão de luz pela nuvem. Ao final, discutimos as curvas obtidas para o índice de refração.

#### 3.1. LIMITES DA MEDIDA DE TRANSMISSÃO

Ao lidar com problemas relativos a uma medida de transmissão, nota-se que os diversos parâmetros do problema possuem relações bem estabelecidas entre si, e que estas devem ser levadas em consideração para que efeitos espúrios não sejam contabilizados na futura análise dos dados obtidos.

Como visto na primeira seção, o comportamento de uma curva de transmissão em função da densidade óptica ressonante é bem estabelecido e dado pela Lei de Beer-Lambert. Ou seja, num gráfico logarítmico em  $y$  e linear em  $x$ , espera-se que a curva seja uma reta. Caso isso não aconteça, pode significar que há alguma limitação cuja origem pode ser investigada. Foram obtidas, então, curvas da transmissão em função da profundidade óptica ressonante para diferentes waists sob nuvens de baixas densidades espaciais reduzidas.

Figura 4: Simulação realizada para densidade espacial fixa  $\rho\lambda^3 = 1$ ;  $R = 3w_0$ ,  $\Delta = 0$ . Para baixos valores do *waist*, há a saturação da transmissão, o que se torna um fator necessário a ser considerado ao calcular a transmissão de luz pela amostra. O *waist* está em unidades de  $\lambda$ .



Fonte: Elaboração própria.

Analisando a Figura (4), há uma clara limitação da transmissão para baixos valores de *waist*. Conforme este parâmetro cresce, mais se aproxima da Lei de Beer-Lambert para transmissões mais baixas. Por exemplo, vemos que não seria possível obter uma transmissão  $\leq 10^{-2}$  para  $w_0 = 1\lambda$ , enquanto seria possível para  $w_0 = 4\lambda$ .

Verificamos então que a cintura do feixe é um fator limitante para medidas de transmissão, de forma que não conseguimos obter intensidades de transmissão mais baixas que um determinado valor. Assim, ao realizarmos medidas de transmissão da luz é importante verificar se, ao haver saturação da intensidade obtida, não chegamos a um limite não chegamos a um limite artificial, que é devido à falha da aproximação de feixe Gaussiano. Esta falha deve ser dependente do *waist*, pois quão menor o tamanho transversal do feixe Gaussiano, maior o erro que a aproximação paraxial comete.

A potência  $P$  de um feixe Gaussiano de *waist*  $w_0$  e intensidade  $I_0$  passando no centro do feixe através de um círculo de raio  $r$  no plano transversal na posição  $z$  é:

$$P(r, z) = P_0 [1 - e^{-2r^2/w_0^2}], \quad P_0 = \pi I_0 w_0^2 / 2 \quad (42)$$

com  $P_0$  a potência total do feixe. Para uma nuvem atômica de perfil cilíndrico, de raio transversal  $R$ , podemos calcular a potência (normalizada pela potência total) de um feixe Gaussiano incidente centrado no eixo do cilindro, que passa fora do raio  $R$  da nuvem atômica (e que passará, portanto, sem atenuação). Para isso, basta integrar a intensidade (eq. (40)) desde esta distância até o infinito (lembrando que estamos numa aproximação gaussiana):

$$\frac{P(r > R)}{P_0} = \frac{1}{P_0} \int_a^\infty 2\pi r I(r, z) dr \sim e^{-2R^2/w_0^2} \quad (43)$$

Podemos obter assim uma profundidade óptica máxima mensurável devida à transmissão das asas do feixe pela borda da nuvem, igualando a equação (43) à Lei de Beer-Lambert (28):

$$b_{0\max} \approx 2R^2/w_0^2; \quad (44)$$

de forma que se atinge um valor mínimo de transmissão que pode ser avaliado numa possível medida como função de  $b_0$ . Podemos interpretar o resultado da seguinte forma: isso ocorre porque, mesmo na borda da nuvem, ainda há uma quantidade da luz que

foi enviada. Quando a quantidade de luz atenuada que se quer medir é menor que a quantidade que passa "pelas bordas", matematicamente expressa pela razão das potências calculadas, há uma saturação da medição.

Além disso, a espessura da nuvem deve ser menor do que o comprimento de Rayleigh para que não haja divergência do feixe:

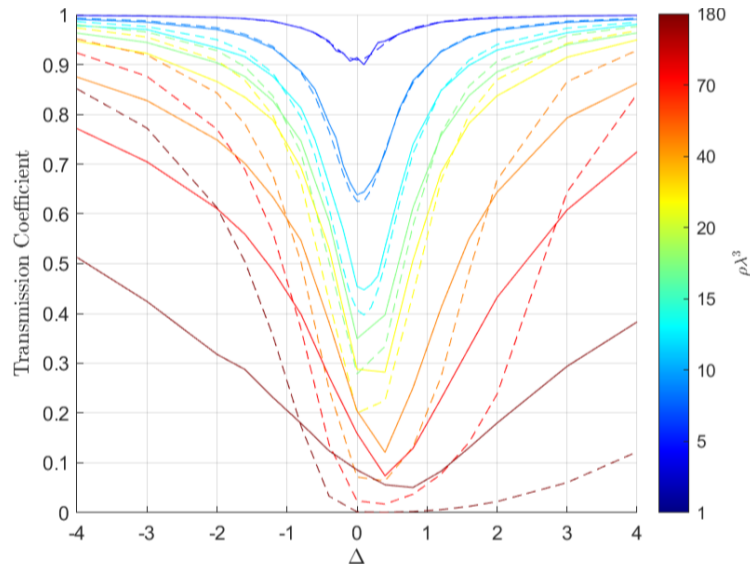
$$l < z_R = \pi w_0^2 / \lambda. \quad (45)$$

No entanto, é necessário tomar cuidado. Há um outro parâmetro que também foi alterado: o raio da nuvem cilíndrica. Como descrito, este possuiu o valor de  $3w_0[\lambda]$ , ou seja, as curvas correspondem, em ordem crescente, a raios de  $3[\lambda]$ ,  $6[\lambda]$  e  $12[\lambda]$ . Para finalizar esta análise corretamente, obtivemos as mesmas curvas mas agora para um raio  $R = 4w_0$ , onde obtivemos as mesmas transmissões de antes (Figura 4). Isso significa que o raio não desempenha um papel relevante após um certo valor mínimo. Em nossas simulações este valor foi determinado como sendo  $R = 3w_0$ , que é parecido com o valor de  $R = 2.5w_0$  utilizado por [12].

### 3.2. ÍNDICE DE REFRAÇÃO

Como forma de calibração do código, foram obtidas curvas de transmissão da nuvem atômica em função da dessintonia e da densidade óptica, que podem ser vistas na figura a seguir.

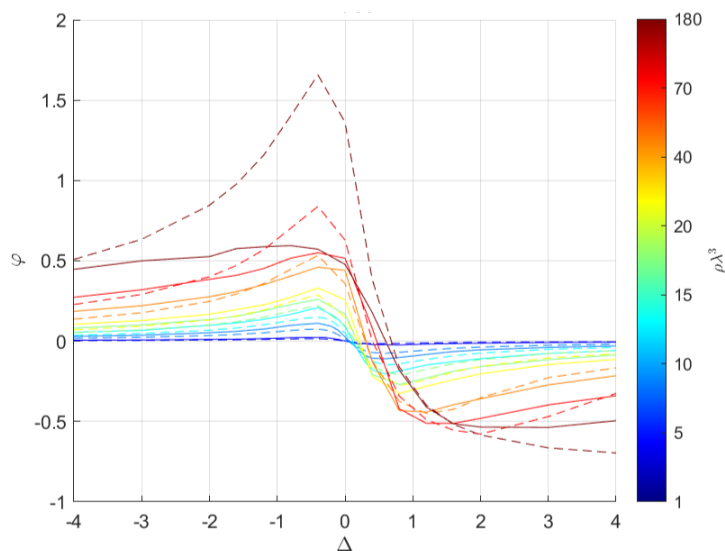
Figura 5: Transmissão em função da dessintonia para diferentes valores de densidade espacial. As linhas tracejadas representam a Lei de Beer-Lambert, enquanto as linhas contínuas representam o Modelo de Dipolos Acoplados. Foram utilizados  $l = 0.2\lambda$ ,  $R = 2.58w_0$ . Os pontos foram calculados utilizando 120 configurações diferentes.



Fonte: Elaboração própria.

No regime diluído, é possível ver a sobreposição das linhas - fato que indica a concordância dos modelos para baixa densidade espacial, onde vale a lei de Beer-Lambert. Para além da transmissão, foi calculada também a fase relativa a cada valor de dessintonia:

Figura 6: Fase do campo elétrico em função da dessintonia. A linha tracejada corresponde ao modelo de Maxwell-Bloch, enquanto a linha contínua representa o Modelo de Dipolos Acoplados. Foram utilizados os mesmos parâmetros da Figura 5.



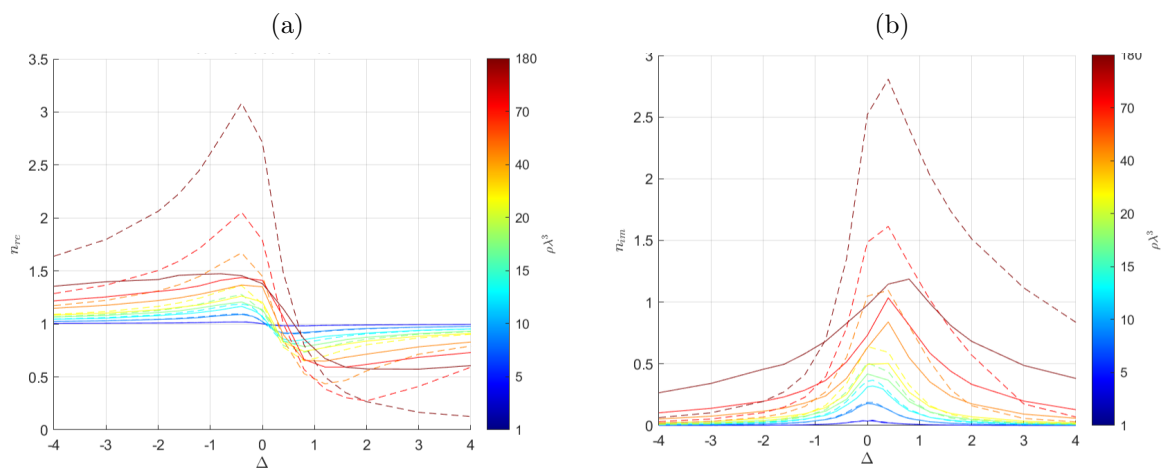
Fonte: Elaboração própria.

As curvas se sobrepõem em baixa densidade assim como na Figura 5. No entanto,

para curvas de maior densidade há visível deslocamento das curvas de diferentes modelos. Este fato se repete adiante, no cálculo do índice de refração.

Por fim, foram calculadas as partes real e imaginária do índice de refração (Figura 7). A imagem superior reflete o comportamento da fase do campo elétrico, uma vez que

Figura 7: Partes real (a) e imaginária (b) do índice de refração. As diferentes cores representam diferentes valores de densidades ópticas. Os eixos dos gráficos são logarítmicos. Os parâmetros utilizados foram os mesmos da Figura 5.



Fonte: Elaboração própria.

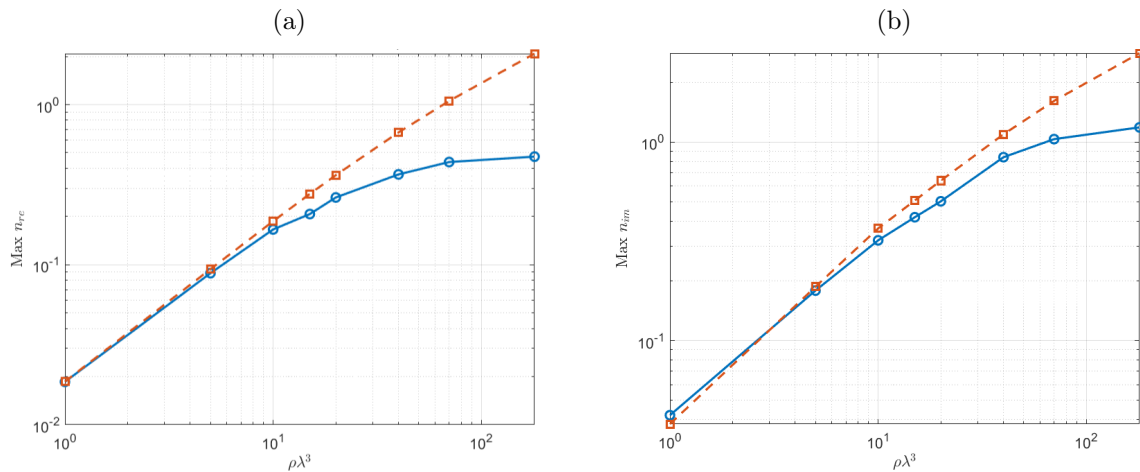
a parte real do índice se relaciona à fase a menos de uma constante, que não modifica o comportamento das curvas. Já na segunda imagem, há o deslocamento do centro das curvas, fato que é esperado teoricamente e fruto de discussões atuais na comunidade [15].

A fim de verificar a saturação do índice de refração de forma definitiva, buscamos reproduzir densidades maiores. Através da revisão da principal referência deste estudo [12], constata-se que o início da saturação ocorra aproximadamente numa densidade espacial de  $\rho\lambda^3 \sim 70$ . A partir das curvas apresentadas na Figura 7, foram extraídos os máximos das partes real e imaginária do índice de refração como função da densidade espacial:

A Figura apresenta, em eixos com escala logarítmica, uma notável diferença entre os modelos. Em Maxwell-Bloch, como demonstrado, o índice é proporcional à raiz quadrada da densidade. Já para o Modelo de Dipolos Acoplados, percebe-se a mesma proporcionalidade quando a densidade é baixa: os modelos concordam no regime diluído. No entanto, ao densificar a nuvem de átomos, vemos uma diferenciação das curvas.

Uma possível explicação para este efeito reside na cooperatividade da emissão luminosa, que surge a partir dos potenciais de interação no tensor de Green como visto na equação (17). As interações fortes esperadas em amostras densas, e que são representadas nos termos proporcionais a  $r^2$  e  $r^3$  do tensor, não aparecem nos demais modelos.

Figura 8: Valores máximos das partes real (a) e imaginária (b) do índice de refração no Modelo de Dipolos Acoplados em função da densidade espacial. Os gráficos estão dispostos em eixos logarítmicos.



Fonte: Elaboração própria.

Ainda que haja diferença entre as curvas, não é possível saber se houve de fato uma saturação no caso do índice imaginário, por exemplo. Seriam necessários pontos para densidades ainda maiores para que seja realmente verificado o comportamento da curva azul. No entanto, para tais densidades ( $\rho\lambda^3 \geq 200$ ), a dificuldade computacional cresce rapidamente.

Por fim, é interessante ver que medidas simples como a transmissão de luz coerente por uma nuvem de átomos frios pode ser modelada de diferentes formas e, com elas, resultados fundamentalmente diferentes são obtidos. Em especial, foi estudado neste trabalho o índice de refração, mas existem também outros efeitos que emergem das suposições que faz o Modelo de Dipolos Acoplados. Este pode servir, por exemplo, para tratar de fenômenos de sub- e superradiância, onde a luz emitida espontaneamente pela amostra possui taxas de decaimentos distintas daquela esperada para o caso do átomo único [11, 13].

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizando cálculos numéricos, fomos capazes de comparar diferentes modelos de interação entre luz e matéria. Em especial, o Modelo de Dipolos Acoplados, pelo qual foram explorados os limites da interação atômica quando a nuvem é espacialmente densa; os principais resultados foram representados por meio da fase do campo elétrico, que corresponde à parte real do índice de refração, e a parte imaginária do índice de refração, que depende da transmissão luminosa. Os parâmetros do problema foram cuidadosamente explorados e compreendidos, e obtivemos um resultado conclusivo acerca da saturação do índice de refração em função do aumento da densidade espacial. O desenvolvimento de novos cálculos como os realizados neste trabalho ofertará um maior entendimento entre os parâmetros e permitirá que, utilizando simulações como guias numéricos, a saturação do índice de refração seja verificada experimentalmente e a transição do regime diluído para o regime denso seja explorada. Esta verificação pode abrir caminhos para tecnologias como imageamento de tecidos biológicos [17], imageamento sub-difração e fabricação de lentes altamente eficientes [16].

## REFERÊNCIAS

- [1] GRYNBERG, G. et al. **Introduction to Quantum Optics**. Cambridge University Press, 2010.
- [2] JACKSON, J. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. [s.l.] Wiley, 1998.
- [3] JENNEWEIN, S. et al. **Coherent scattering of near-resonant light by a dense, microscopic cloud of cold two-level atoms: Experiment versus theory**. Physical review. A/Physical review, A, v. 97, n. 5, 15 maio 2018.
- [4] L CHOMAZ et al. **Absorption imaging of a quasi-two-dimensional gas: a multiple scattering analysis**. New Journal of Physics, v. 14, n. 5, p. 055001–055001, 1 maio 2012.
- [5] PELLEGRINO, J. G. et al. **Observation of Suppression of Light Scattering Induced by Dipole-Dipole Interactions in a Cold-Atom Ensemble**. Physical Review Letters, v. 113, n. 13, 26 set. 2014.
- [6] SVIDZINSKY, A. A.; CHANG, J.-T.; SCULLY, M. O. **Cooperative spontaneous emission of N atoms: Many-body eigenstates, the effect of virtual Lamb shift processes, and analogy with radiation of N classical oscillators**. Physical Review A, v. 81, n. 5, 13 maio 2010.
- [7] FOOT, C. J. **Atomic physics**. Oxford ; New York: Oxford University Press, 2005.
- [8] LEHMBERG, R. H. **Radiation from an N-Atom System. I. General Formalism**. Physical Review A, v. 2, n. 3, p. 883–888, 1 set. 1970.
- [9] T. BIENAIMÉ et al. **Cooperativity in light scattering by cold atoms**. Fortschritte der Physik, v. 61, n. 2-3, p. 377–392, 18 jun. 2012.
- [10] GUERIN, W.; M.T. ROUABAH; KAISER, R. **Light interacting with atomic ensembles: collective, cooperative and mesoscopic effects**. Journal of Modern Optics, v. 64, n. 9, p. 895–907, 15 maio 2017.
- [11] OLIVEIRA, M. **Super- and subradiance in a dilute cloud of cold atoms**. Hal.science, 11 dez. 2018.
- [12] ANDREOLI, F. et al. **Maximum Refractive Index of an Atomic Medium**. Physical Review X, v. 11, n. 1, 9 fev. 2021.

- [13] CIPRIS, A. **Long-lived collective modes of light in cold atoms: experimental and numerical studies on subradiance and Anderson localization**. Université Côte d'Azur, 2022.
- [14] YARIV, A.; YEH, P. **Optical Waves in Crystals: Propagation and Control of Laser Radiation**. Wiley, 1984.
- [15] HSU, T.; LIN, K.-T.; LIN, G.-D. **Cooperative states and shift in resonant scattering of an atomic ensemble**. *New Journal of Physics*, v. 26, n. 5, p. 053026–053026, 1 maio 2024.
- [16] LASKAR, J. M. et al. **High refractive index immersion liquid for super-resolution 3D imaging using sapphire-based aplanatic numerical aperture increasing lens optics**. *Applied Optics*, v. 55, n. 12, p. 3165, 12 abr. 2016.
- [17] JARRY, G. et al. **Coherence and polarization of light propagating through scattering media and biological tissues**. *Applied optics*, v. 37, n. 31, p. 7357–7357, 1 nov. 1998.