



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



KIMBERLY DA SILVA ROCHA

ENTRE RELAÇÕES DE ORDEM E DE EQUIVALÊNCIA: UMA VISÃO MATEMÁTICA  
PARA A PSICOLOGIA

SÃO CARLOS – SP  
2025

KIMBERLY DA SILVA ROCHA

ENTRE RELAÇÕES DE ORDEM E DE EQUIVALÊNCIA: UMA VISÃO MATEMÁTICA  
PARA A PSICOLOGIA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Nery de Oliveira

SÃO CARLOS – SP  
2025

Rocha, Kimberly da Silva

Entre relações de ordem e de equivalência: uma visão matemática para a psicologia / Kimberly da Silva Rocha -  
- 2025.  
64f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,  
campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Leandro Nery de Oliveira

Banca Examinadora: Leandro Nery de Oliveira, Renato  
José de Moura, Julio Cesar Coelho de Rose

Bibliografia

1. Relações de equivalência e de ordem. 2. Equivalência  
de estímulos. 3. Psicologia comportamental. I. Rocha,  
Kimberly da Silva. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática  
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180



**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

**COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET**  
 Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905  
 Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 3/2025/CCM/CCET

**Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso**

**Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)**

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**KIMBERLY DA SILVA ROCHA**

**ENTRE RELAÇÕES DE ORDEM E DE EQUIVALÊNCIA: UMA VISÃO MATEMÁTICA PARA A PSICOLOGIA**

**Trabalho de Conclusão de Curso**

**Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos**

São Carlos, 20 de fevereiro de 2025

**ASSINATURAS E CIÊNCIAS**

<b>Cargo/Função</b>	<b>Nome Completo</b>
Orientador	Leandro Nery de Oliveira
Membro da Banca 1	Renato José de Moura
Membro da Banca 2	Julio Cesar Coelho de Rose



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Nery de Oliveira, Professor(a) do Ensino Superior**, em 02/04/2025, às 16:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renato Jose de Moura, Professor(a) do Ensino Superior**, em 05/04/2025, às 08:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Julio Cesar Coelho de Rose, Docente**, em 14/04/2025, às 18:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1781418** e o código CRC **19D60F35**.

**Referência:** Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo n° 23112.007438/2025-13

SEI nº 1781418

*Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019*

*Dedico este trabalho a minha avó, dona Benê, que só estudou até a segunda série e sempre me incentivou a conquistar o mundo.*

## AGRADECIMENTOS

"Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes". Com essas palavras ditas por Isaac Newton, inicio meus agradecimentos, pois ela descreve bem a minha jornada até aqui. Cada conquista, cada descoberta, cada novo desafio superado, não seria possível sem aqueles que vieram antes de mim, e que me levaram além do que eu poderia imaginar.

A Deus, que sempre esteve ao meu lado, meu agradecimento mais profundo. Agradeço, à minha família, aquela que não foi escolhida por mim, para que fosse minha, mas que me escolheram para que eu fosse deles. Aos meus pais, Gabriela e Emerson, que me guiaram e me apoiaram em cada decisão e conquista durante toda a minha vida. Ao meu quase pai, Júlio, cujo os esforços não medidos foram fundamentais para minha formação. Aos meus irmãos, Richard, Robert e Júlio Filho que sempre estiveram ao meu lado, compartilhando risos e desafios, vocês tornaram tudo mais leve. À minha avó, dona Benê, que me ensinou tanto sobre a vida. Aos tios, primos e agregados, que compõem esta grande família. Cada um de vocês teve e tem um papel especial nesta trajetória, e sou profundamente grata por tudo.

Sou a primeira pessoa de nossa família a realizar uma graduação em uma Universidade Federal. Este feito não é apenas meu, mas de todos que, sonharam este sonho junto comigo. Minha conquista é o reflexo de todo o sacrifício, apoio e confiança que vocês, minha família.

Ao longo de minha graduação, minha mãe sempre me dizia que o mais difícil na universidade seria enfrentar os momentos de solidão, quando as pessoas que sempre estiveram ao meu lado estariam longe. E, de fato, houve momentos em que a saudade apertou, em que a distância da família se fez sentir de maneira profunda. Mas foi aqui, no meio desse caminho, que encontrei uma nova família — vocês, meus amigos.

Emilly, Raquel, Beatriz, Débora, Wellington, Giovanna, Lívia, Victorio, Sato, Rebeca, Grytz, Lucas, todos os meus amigos de outros cursos, e os demais ao quais não os nomeei, mas que vocês sabem da importância e o espaço que ocupam em minha vida, vocês foram mais do que colegas; foram a família que a vida me deu. Nos momentos de alegria, celebraram comigo como se cada conquista minha fosse também de vocês, nos momentos de dificuldade, estiveram ao meu lado, me ouvindo, me encorajando, me fazendo rir quando eu mais precisava. Vocês preencheram o vazio que a distância da família de sangue poderia ter deixado, e nunca permitiram que eu me sentisse verdadeiramente sozinha.

Se consegui seguir em frente, superar os desafios e continuar acreditando em mim mesma, foi porque tive vocês ao meu lado, me lembrando que a caminhada, por mais difícil que fosse, seria sempre mais leve com a amizade e o apoio de vocês. Vocês se tornaram minha nova família, e por isso, sou profundamente grata. Sem vocês, esta jornada teria sido muito mais difícil, e certamente menos iluminada, feliz, divertida e leve.

Ao meu noivo, Carlos, e às nossas filhas de quatro patas, Amora e Ameixa, minha gratidão é imensa. Carlos, você esteve ao meu lado em cada passo desta caminhada, oferecendo amor, paciência e apoio. Sua presença foi um porto seguro nos momentos de tempestade, e

sou eternamente grata por isso. Amora e Ameixa, minhas doces e terríveis cachorrinhas, vocês trouxeram alegria e leveza aos meus dias. O carinho e a companhia de vocês fizeram com que os momentos difíceis fossem mais suportáveis e os dias bons ainda mais felizes. Este triunfo é também nosso, porque vocês, com suas travessuras imensuráveis e afeto infinito, tornaram tudo mais especial. Obrigada por estarem sempre ao meu lado, me lembrando do que é o verdadeiro amor.

Aos meus professores, que ao longo dos anos me ensinaram muito mais do que as disciplinas curriculares, me ensinaram a pensar, a questionar e a ver o mundo com olhos críticos e curiosos. Cada um de vocês contribuiu de maneira única para minha formação, e por isso, sou profundamente grata. Ao meu orientador, Leandro Nery, cujo conhecimento, paciência e dedicação foram fundamentais para a realização deste trabalho, minha mais sincera gratidão. Suas orientações, sempre sábias e encorajadoras, me guiaram por caminhos que, muitas vezes, pareciam impossíveis. Obrigada por acreditar tanto no meu potencial e as vezes acreditando mais do que eu mesma acreditava, e por estar ao meu lado em cada etapa desta jornada.

Como agora me formo em Licenciatura em Matemática, sinto-me inspirada a seguir a profissão de vocês, levando adiante os valores e conhecimentos que me transmitiram. Espero poder impactar a vida de futuros alunos e contribuir para a educação com a mesma paixão e dedicação que sempre me foram ensinadas.

E por fim, agradeço a todas as mulheres que vieram antes de mim e que, enfrentando desafios e barreiras, lutaram com coragem e determinação por um espaço na academia e na ciência, meu profundo respeito e agradecimento. Vocês enfrentaram adversidades que muitas vezes pareciam insuperáveis, abrindo caminho para que outras, como eu, pudessem ter oportunidades que antes pareciam inalcançáveis.

Sua luta e resiliência não apenas pavimentaram o caminho para a minha presença aqui, mas também serviram de inspiração e força para que eu seguisse em frente. Este trabalho e esta conquista são, em grande parte, um tributo a vocês, as pioneiras que, com suas batalhas e conquistas, transformaram o cenário para futuras gerações. Graças a vocês, hoje tenho a oportunidade de realizar meus sonhos e contribuir para o campo da educação e da matemática. O meu sucesso é também o resultado do seu legado e da sua luta incansável por igualdade e reconhecimento.

Se vi mais longe foi por estar sobre ombros de gigantes, vocês, cada um de vocês, foram os gigantes que me sustentaram e me inspiraram, meu mais profundo agradecimento. Amo muito todos vocês!

*“Minha mãe era como areia. Do tipo que te aquece na praia quando você sai tremendo da água fria. O tipo que se agarra ao seu corpo, deixando sua impressão na pele para lembrá-lo de onde você esteve e de onde você veio. O tipo que você continua encontrando em seus sapatos e bolsos muito depois de sair da praia.*

*Ela também era como a areia que os arqueólogos cavam. Camadas e camadas de areia que mantiveram os ossos de dinossauros juntos por milhões de anos. E por mais quente, empoeirada e plana que essa areia possa ser, esses arqueólogos são gratos por ela, porque sem ela para manter os ossos no lugar, tudo se espalharia. Tudo iria desmoronar.” (Vanderpool, 2016)*

## RESUMO

Este trabalho explora o papel das Relações de Equivalência, Classes de Equivalência e Relações de Ordem, enfatizando suas aplicações matemáticas e psicológicas. As Relações de Equivalência são conjuntos formados por elementos que compartilham relações reflexivas, simétricas e transitivas, agrupando-os de acordo com semelhanças específicas. Em contrapartida, as Relações de Ordem organizam os elementos de um conjunto em hierarquias ou sequências lógicas, com base em propriedades de reflexividade, antissimetria e transitividade. A pesquisa analisa essas estruturas matemáticas e destaca sua relevância na análise de dados e no entendimento de fenômenos comportamentais. Os conceitos são conectados às investigações de Murray Sidman sobre equivalências de estímulos, especialmente sua contribuição para a compreensão das relações entre estímulos auditivos e visuais na leitura e na aprendizagem. Além de se conectar a “Teoria das Molduras Relacionais”. Aplicações práticas são discutidas, com ênfase na educação, onde tais conceitos oferecem ferramentas para melhorar a aquisição de habilidades de leitura e linguagem. Ao unir os conceitos de equivalência e ordem, o estudo sugere que essas abordagens complementares oferecem uma base sólida para a análise e organização de dados complexos, contribuindo para avanços em contextos matemáticos e psicológicos.

**Palavras-chave:** Relações de Equivalência. Relações de Ordem. Relações de Estímulos. Teoria das molduras relacionais. Psicologia Comportamental.

## ABSTRACT

This work explores the role of Equivalence Relations, Equivalence Classes, and Order Relations, emphasizing their mathematical and psychological applications. Equivalence Relations are sets formed by elements that share reflexive, symmetric, and transitive relations, grouping them according to specific similarities. In contrast, Order Relations organize the elements of a set into hierarchies or logical sequences based on the properties of reflexivity, antisymmetry, and transitivity. The research analyzes these mathematical structures and highlights their relevance in data analysis and understanding behavioral phenomena. The concepts are connected to Murray Sidman's investigations into stimulus equivalences, particularly his contributions to understanding the relationships between auditory and visual stimuli in reading and learning. Practical applications are discussed, with an emphasis on education, where such concepts provide tools to enhance the acquisition of reading and language skills. By uniting the concepts of equivalence and order, the study suggests that these complementary approaches offer a solid foundation for analyzing and organizing complex data, contributing to advances in both mathematical and psychological contexts.

**Keywords:** Equivalence Classes. Order Relations. Stimulus Relations. Relational frame theory. Behavioral Psychology.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafo que representa as propriedades das Relações de Equivalência, onde a reflexividade é representada pelos laços pontilhados, a simetria pelas setas contínuas duplas e a transitividade pelas setas tracejadas duplas, pois a transitividade ocorre para qualquer ordem dos objetos existentes. Fonte: Elaborado pela autora. ....	11
Figura 2 – Diagrama desenvolvido por Sidman (1971), para o melhor entendimento das Relações de Estímulos. ....	12
Figura 3 – Esquema criado por Sidman (1971), para o melhor entendimento das Relações de Estímulos. ....	29
Figura 4 – Tabela das relações de equivalência esquematizadas por Sidman e Tailby (2006). ....	33
Figura 5 – Relações formadas no experimento realizado por Sidman e Tailby (2006). ...	34
Figura 6 – Esquema desenvolvido por Sidman e Tailby (2006) para explicar o experimento quando se adiciona mais um estímulo. ....	35
Figura 7 – “Representação esquemática da matriz estímulo-resposta, ilustrando um modelo do Conjunto B (janela do centro) e as três comparações do Conjunto C (janelas externas). As posições dos estímulos e das janelas em branco variavam de tentativa para tentativa, mas os estímulos nunca apareciam nas três janelas superiores”. (Sidman; Tailby, 2006).....	38
Figura 8 – Retrato de Murray Sidman disponibilizado pela ABAI (s.d.). ....	40
Figura 9 – Retrato de Steven C. Hayes disponibilizado por Hayes (n.d.).....	51
Figura 10 – Retrato de Dermot Barnes-Holmes disponibilizado por Haslbeck (2015).....	52
Figura 11 – Retrato de Bryan Roche disponibilizado por Roche (n.d.). ....	53

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Comparação entre as propriedades da Relação de Equivalência e as propriedades da Equivalência de Estímulos. Fonte: Elaborado pela autora. .... 47
- Tabela 2 – Comparação entre as propriedades das diferentes Relações de Ordem e a Teoria de Molduras Relacionais (RFT). A tabela destaca como determinadas propriedades se aplicam ou não a cada tipo de relação. Em alguns casos, em vez das expressões “Se aplica” ou “Não se aplica”, são mencionadas outras propriedades, evidenciando equivalências conceituais entre diferentes teorias. Fonte: Elaborado pela autora. .... 57

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>RELAÇÕES MATEMÁTICAS</b> .....	<b>15</b>
2.1	RELAÇÕES BINÁRIAS.....	15
2.2	RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA .....	17
2.3	CLASSES DE EQUIVALÊNCIA .....	19
2.4	RELAÇÃO DE ORDEM.....	23
2.4.1	Relações de Ordem Parcial .....	23
2.4.2	Relações de Ordem Parcial Estrita .....	24
2.5	RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL .....	25
<b>3</b>	<b>EQUIVALÊNCIA DE ESTÍMULOS</b> .....	<b>27</b>
3.1	MURRAY SIDMAN .....	39
<b>4</b>	<b>AS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA E AS RELAÇÕES DE ESTÍMULOS SEGUNDO SAUNDERS E GREEN (1992)</b> .....	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>TEORIA DAS MOLDURAS RELACIONAIS</b> .....	<b>48</b>
5.1	SOBRE OS DESENVOLVEDORES DA TEORIA.....	50
5.1.1	Steven C. Hayes .....	50
5.1.2	Dermot Barnes - Holmes.....	52
5.1.3	Bryan Roche.....	52
<b>6</b>	<b>TEORIA DAS MOLDURAS RELACIONAIS DE STEVEN C. HAYES E AS RELAÇÕES DE ORDEM</b> .....	<b>54</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>63</b>

# 1 INTRODUÇÃO

As classes de equivalência desempenham um papel fundamental na matemática, elas são ferramentas poderosas para agrupar elementos de um conjunto que possuem uma relação específica entre si, permitindo-nos entender melhor as propriedades e as estruturas subjacentes. Uma classe de equivalência é um conjunto de elementos que são considerados “semelhantes” de acordo com relações predefinidas, chamadas de relações reflexivas, simétricas e transitivas.

A primeira propriedade, a reflexividade, assegura que cada elemento do conjunto está relacionado a si. Em termos matemáticos, para qualquer elemento  $x$  pertencente a um conjunto, devemos ter  $xRx$ , o que indica que  $x$  é equivalente a si. Essa propriedade estabelece a base para a formação de classes de equivalência, em que cada classe inclui pelo menos um elemento — o próprio elemento. A simetria é a segunda propriedade fundamental; ela estabelece que, se dois elementos  $x$  e  $y$  estão relacionados pela relação de equivalência, então  $y$  também está relacionado a  $x$ , garantindo uma relação bidirecional. Finalmente, a transitividade assegura que, se  $x$  e  $y$  estão relacionados, e  $y$  e  $z$  também estão, então  $x$  e  $z$  devem estar relacionados. A transitividade é crucial para garantir a consistência da relação de equivalência e a definição de classes bem delimitadas.

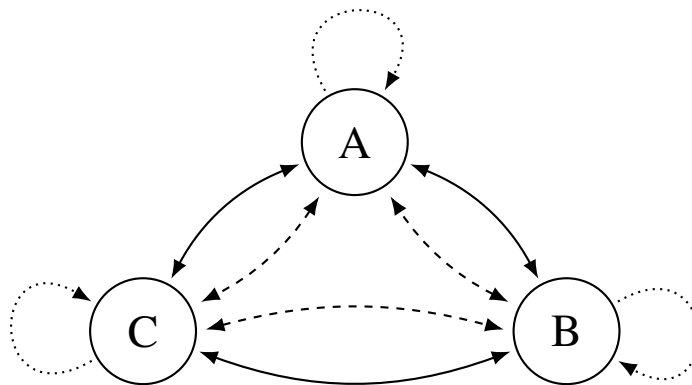
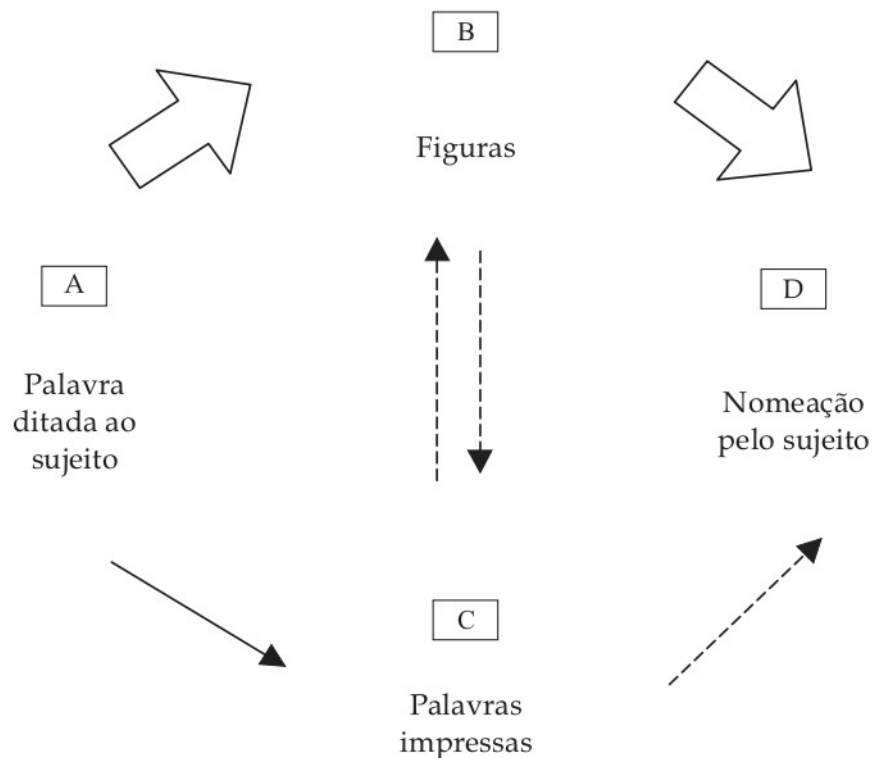


Figura 1 – Grafo que representa as propriedades das Relações de Equivalência, onde a reflexividade é representada pelos laços pontilhados, a simetria pelas setas contínuas duplas e a transitividade pelas setas tracejadas duplas, pois a transitividade ocorre para qualquer ordem dos objetos existentes. Fonte: Elaborado pela autora.

Ao examinarmos detalhadamente o grafo em questão, podemos estabelecer uma notável correspondência com o diagrama criado por Murray Sidman em 1971, em suas investigações sobre as Equivalências de Estímulos. Murray Sidman, um psicólogo comportamental, elaborou esse diagrama para proporcionar uma representação gráfica que visualiza as múltiplas maneiras pelas quais estímulos podem estar interconectados e influenciar o comportamento.



**Figura 1 - Onde:**

- os quadrados indicam a natureza do conjunto de estímulos apresentados
- as flechas duplas (⇔) indicam as relações condicionais já apresentadas pelo sujeito
- a flecha contínua (→) indica a relação treinada
- as flechas descontínuas (-->) indicam as relações testadas.

Figura 2 – Diagrama desenvolvido por Sidman (1971), para o melhor entendimento das Relações de Estímulos.

Em 1971, o psicólogo comportamental Murray Sidman publicou um artigo intitulado “Reading and Auditory-Visual Equivalences” (Sidman, 1971) no *Journal of Speech and Hearing Research*. Neste estudo, Sidman investigou as relações entre estímulos auditivos e visuais, com foco nas relações de equivalência e na identificação do “igual” em várias formas de representação. O artigo enfatizou a relevância fundamental das conexões entre palavras faladas e suas representações visuais na aquisição da habilidade de leitura. Sidman ressaltou que a leitura envolve a formação de associações significativas entre estímulos verbais e visuais correspondentes, permitindo a compreensão de palavras faladas quando apresentadas em formato escrito e vice-versa, facilitando a comunicação efetiva.

Além disso, as implicações educacionais do estudo foram notáveis, oferecendo perspectivas valiosas para aprimorar o ensino da leitura e o desenvolvimento das habilidades de linguagem em crianças e adultos. O entendimento das equivalências entre estímulos auditivos e visuais pôde ser aplicado de forma prática no ensino de habilidades acadêmicas, especialmente em indivíduos que enfrentam dificuldades de leitura e linguagem. O trabalho de Sidman reflete sua sólida compreensão da análise do comportamento e sua habilidade em aplicar princípios

comportamentais para entender a aquisição da linguagem e a leitura, contribuindo para o avanço da educação e do tratamento de dificuldades nessas áreas. Podemos encontrar mais sobre isso em: *Teaching reading and spelling: Exclusion and stimulus equivalence* (Rose; Souza; Hanna, 1996), *Controle de estímulos e relações de equivalência* (Hübner, 2006), *Maintenance of Stimulus Equivalence Classes: A Bibliographic* (Regaço et al., 2023), *Equivalence relations and the reinforcement contingency* (Sidman, 2000), *Conditional discrimination vs. matching to sample: An expansion of the testing paradigm* (Sidman; Tailby, 1982).

Ao lado das classes de equivalência, as relações de ordem desempenham um papel complementar importante ao estabelecer hierarquias ou arranjos específicos entre elementos de um conjunto. Essas relações de ordem são caracterizadas pelas propriedades de reflexividade, antissimetria e transitividade, além de poderem ser classificadas em diferentes tipos, como relação de ordem parcial, relação de ordem estrita e relação de ordem total.

A reflexividade implica que qualquer elemento está em relação consigo mesmo, ou seja, para todo  $x$  em um conjunto  $A$ , vale que  $x \leq x$ . A antissimetria assegura que, se um elemento  $x$  está em relação com um elemento  $y$  e vice-versa, então  $x$  e  $y$  devem ser iguais ( $x = y$ ), evitando que elementos distintos possam estar em uma relação mútua. A transitividade garante que, se um elemento  $x$  está relacionado com  $y$  e este, por sua vez, está relacionado com  $z$ , então  $x$  também deve estar relacionado com  $z$ , ou seja, se  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , então  $x \leq z$ .

Com base nessas propriedades, distinguem-se os tipos de relações de ordem. A relação de ordem parcial satisfaz as propriedades de reflexividade, antissimetria e transitividade, mas nem todos os elementos do conjunto precisam ser comparáveis entre si.

A relação de ordem estrita é aquela que satisfaz as propriedades de antissimetria e transitividade, mas não a reflexividade. Nesse caso, se  $x < y$  e  $y < z$ , então  $x < z$ . Como a reflexividade não é satisfeita, não se tem  $x < x$  para nenhum elemento do conjunto. Muitas vezes, essa relação é representada pelo operador " $<$ ", como na ordem usual dos números reais.

A relação de ordem total, ou linear, é uma ordem parcial que se torna total quando todos os elementos do conjunto são comparáveis entre si. Ou seja, para quaisquer elementos  $x$  e  $y$  em um conjunto  $A$ , sempre vale  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ .

Aplicações das relações de ordem são vastas e fundamentais, abrangendo desde a organização de números em uma linha numérica até o uso em algoritmos de ordenação e hierarquias em sistemas de dados. Em psicologia, as relações de ordem também se conectam à ideia de sequência de estímulos e respostas, o que pode ser observado em teorias de aprendizagem que propõem que a aquisição de habilidades segue uma ordem de complexidade crescente. Além disso, modelos de hierarquia cognitiva frequentemente empregam relações de ordem parcial para descrever como diferentes conceitos ou competências se estruturam no desenvolvimento do conhecimento.

A Teoria das Molduras Relacionais (RFT - Relational Frame Theory) é uma abordagem behaviorista à linguagem e cognição humana desenvolvida por Steven C. Hayes e seus colegas. Ela propõe que a base da linguagem e do pensamento humano está na capacidade de aprender

relações entre estímulos de maneira arbitrária e contextual. Diferente do behaviorismo tradicional, que foca no condicionamento direto, a RFT sugere que os humanos aprendem a relacionar palavras e conceitos de forma flexível, sem necessidade de reforços diretos.

Steven C. Hayes, psicólogo norte-americano, desenvolveu a RFT como parte de uma abordagem mais ampla do behaviorismo radical. Ele também é um dos criadores da Terapia de Aceitação e Compromisso (ACT - Acceptance and Commitment Therapy), que aplica princípios da RFT para promover flexibilidade psicológica e bem-estar.

Esta pesquisa visa, portanto, explorar como as classes de equivalência e as relações de ordem podem interagir para proporcionar uma estrutura matemática útil na análise de dados e fenômenos, especialmente quando aplicados à psicologia comportamental. As equivalências de estímulos, como descritas no trabalho de Sidman, oferecem um ponto de partida para entender como estímulos podem ser agrupados, enquanto as relações de ordem permitem estabelecer uma hierarquia ou progressão entre eles, sugerindo padrões de resposta e aprendizagem. Concluímos que as classes de equivalência e as relações de ordem oferecem diferentes abordagens para a organização e análise de conjuntos, tanto no campo matemático quanto no psicológico. Enquanto as classes de equivalência agrupam elementos por semelhança, as relações de ordem impõem um nível de estrutura sequencial, permitindo que identifiquemos padrões mais amplos e progressões lógicas. Esta dualidade entre equivalência e ordenamento é essencial para a compreensão e manipulação de dados complexos, sendo uma base sólida tanto para o estudo matemático quanto para a investigação de comportamentos e aprendizagem.

## 2 RELAÇÕES MATEMÁTICAS

As relações matemáticas são formas de descrever como diferentes conjuntos numéricos, ou de variáveis, estão interligados. Elas são fundamentais, matematicamente falando, pois ajudam a entender e prever padrões e comportamentos em diferentes contextos. A relação matemática mais conhecida são as funções, ela associa cada elemento de um conjunto  $A$  a exatamente um elemento de um outro conjunto  $B$ .

Além das funções temos as equações, que estabelecem uma relação de igualdade entre duas expressões matemáticas. Quando resolvemos uma equação, significa que estamos encontrando os valores das variáveis que tornam a nossa igualdade verdadeira. Outra forma de relação que temos é a inequação, que utiliza sinais de desigualdade para descrever como uma expressão se compara com outra. As proporções também são relações que mostram a igualdade entre duas razões, nos ajudando a entender a relação de escalas e quantidades em diversos contextos.

Uma categoria importante é a das relações de equivalência, elas definem quando dois elementos são considerados equivalentes, seguindo três propriedades: reflexividade, simetria e transitividade. Por fim, as relações de ordem comparam números ou variáveis para determinar qual é maior, menor ou igual a outro. Essas relações são úteis para classificar e organizar informações de maneira lógica.

Relações matemáticas têm diversas aplicações práticas. Na ciência e engenharia elas são usadas para modelar fenômenos e resolver problemas complexos. Em economia e finanças ajudam a entender como diferentes variáveis afetam o lucro, os custos e os investimentos. Na tecnologia e computação, algoritmos e programas dependem de relações matemáticas para processar dados e executar tarefas de maneira eficiente. Em resumo, as relações matemáticas são a base para compreender e manipular quantidades e variáveis em vários campos do conhecimento. Elas nos permitem fazer previsões, resolver problemas e obter uma visão mais precisa do mundo ao nosso redor.

As referências utilizadas como base neste capítulo foram (Santos Fajardo, 2024), (Gonçalves, 1979) e (Hygino; Gelson, 2003), além de complementações próprias.

### 2.1 RELAÇÕES BINÁRIAS

Começaremos estabelecendo os elementos necessários para definir uma relação binária.

**Definição 2.1.** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , definimos o produto cartesiano<sup>1</sup> entre  $A$  e  $B$ , que denotaremos por  $A \times B$ , como o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$  tais que  $a$  está em  $A$  e  $b$  está em  $B$ , isto é,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

<sup>1</sup> Plano cartesiano é um objeto matemático formado por uma malha quadriculada. Cada ponto dessa malha é associado a dois números reais que determinam a localização desse ponto. Esses números são as coordenadas do ponto e indicam sua posição em relação a duas retas perpendiculares chamadas de eixos.

**Simplificando.** Imagine que você tem dois conjuntos de coisas diferentes e quer formar todas as combinações possíveis entre eles. Suponha que você tenha:

- Um conjunto de camisetas: {vermelha, azul};
- Um conjunto de calças: {jeans, preta}.

Se nosso objetivo é combinar cada uma das camisetas disponíveis com cada uma das calças, temos:

$$\text{Camisetas} \times \text{Calças} = \{(\text{vermelha, jeans}), (\text{vermelha, preta}), (\text{azul, jeans}), (\text{azul, preta})\}.$$

Em formas simples isto é um produto cartesiano, pegar um elemento de um grupo e combiná-lo com todos os elementos do outro grupo. É simplesmente uma maneira de organizar todas as combinações possíveis entre dois conjuntos de coisas diferentes.

Com isso, temos que uma relação binária é definida como:

**Definição 2.2.** Dizemos que  $R$  é uma relação (ou relação binária) entre  $A$  e  $B$  se é um subconjunto de  $A \times B$ . Quando  $R$  é uma relação, utilizamos a notação  $xRy$  como abreviatura de  $(x, y) \in R$ .

**Observação 2.1.** Também podemos denotar uma relação binária por  $a \sim b$ .

**Simplificando.** Uma relação binária é uma maneira de conectar elementos de dois conjuntos. Imagine um grupo de pessoas e um grupo de cores favoritas:

- Conjunto de pessoas ( $A$ ): {Ana, João}
- Conjunto de cores ( $B$ ): {Azul, Vermelha}

O Produto Cartesiano nos daria todas as combinações possíveis entre as pessoas e as cores. Mas uma Relação Binária escolhe apenas algumas dessas combinações, dependendo de um critério definido. Por exemplo, se quisermos representar a relação “gosta da cor”, podemos ter:

$$R = \{(Ana, Azul), (João, Vermelha)\}$$

Isso significa que Ana gosta de azul e João gosta de vermelho. Se um par  $(x, y)$  pertence a essa relação, escrevemos  $xRy$ , ou seja:

- Ana  $R$  Azul: Ana está relacionada a cor Azul;
- João  $R$  Vermelha: João está relacionado a cor Vermelha.

**Observação 2.2.** A partir de uma relação binária, podemos definir diversos tipos de relações, dentre elas: relação de equivalência, relação de ordem parcial, relação de ordem total, dentre outras.

## 2.2 RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

A primeira relação que veremos é a de equivalência, a qual definimos da seguinte maneira.

**Definição 2.3.** Dados um conjunto  $X$  e uma relação binária  $\sim: X \times X \rightarrow X$ , dizemos que  $\sim$  é uma relação de equivalência se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $a \sim a$  para todo  $a \in X$  (Reflexividade)
- (ii) Se  $a \sim b$ , então  $b \sim a$  para todos  $a, b \in X$  (Simetria)
- (iii) Se  $a \sim b$  e  $b \sim c$ , então  $a \sim c$  para todos  $a, b, c \in X$  (Transitividade)

Para exemplificar o conceito que acabamos de definir, vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 2.1.** a) Considere o conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  e dado  $n \in \mathbb{N}$  com  $n \geq 2$ , defina a seguinte relação:

$$a \equiv_n b \iff n \mid (b - a).$$

**Observação 2.3.** A expressão matemática acima é lida da seguinte maneira: “ $a$  é congruente a  $b$  módulo  $n$  se, e somente se,  $n$  divide  $b - a$ ”.

Então,  $\equiv_n$  é uma relação de equivalência em  $\mathbb{Z}$ , chamada congruência módulo  $n$ . Vamos verificar essa afirmação, isto é, mostrar que  $\equiv_n$  é reflexiva, simétrica e transitiva:

- (i)  $a \equiv_n a$  para todo  $a \in \mathbb{Z}$  pois  $n \mid (a - a) = 0$ .
- (ii) Se  $a \equiv_n b$ , então  $n \mid (b - a)$ . Logo,  $n \mid -(b - a) = (a - b)$ , ou seja,  $b \equiv_n a$  para todos  $a, b \in \mathbb{Z}$ .
- (iii) Se  $a \equiv_n b$  e  $b \equiv_n c$ , então

$$\begin{cases} n \mid (b - a) \\ n \mid (c - b). \end{cases}$$

Com isso, temos que  $n \mid (c - b) + (b - a) = (c - a)$  e, portanto,  $a \equiv_n c$ , para todos  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

Isso prova que  $\equiv_n$  é uma relação de equivalência.

b) Dado o conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ , defina a relação

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Então,  $R$  é uma relação de equivalência em  $X$ .

c) Seja  $A$  o conjunto de todas as palavras. Defina em  $A$  a relação

$$a \sim b \iff a \text{ e } b \text{ possuem a mesma quantidade de letras.}$$

Então,  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $A$  pois

- (i) É claro que toda palavra possui a mesma quantidade de letras que ela própria, logo  $\sim$  é reflexiva.
- (ii) Se  $a \sim b$  então a palavra  $a$  possui a mesma quantidade de letras que a palavra  $b$ . Mas é claro que a palavra  $b$  possui a mesma quantidade de letras que a palavra  $a$ , logo  $b \sim a$  para todas  $a, b \in A$ .
- (iii) Se uma palavra  $a$  possui a mesma quantidade de letras que uma palavra  $b$  e esta, por sua vez, possui a mesma quantidade de letras que uma palavra  $c$ , então,  $a$  possui a mesma quantidade de letras que a palavra  $c$ . Logo,  $\sim$  é transitiva.

Portanto,  $\sim$  é relação de equivalência.

**Simplificando.** Uma Relação de Equivalência é um tipo de Relação Binária, que agrupa elementos considerados “equivalentes” de acordo com determinadas propriedades.

Imagine que queremos definir quando as pessoas possuem as mesmas cores de olhos em um grupo de amigos. Para que essa relação faça sentido como uma Relação de Equivalência, ela deve seguir três propriedades:

- (i) **Reflexividade:** Ana tem a mesma cor dos olhos dela.

$$\text{Ana} \sim \text{Ana}, \quad \text{para todo Ana} \in \text{Grupo de amigos}$$

- (ii) **Simetria:** Se Ana tem os olhos da mesma cor de João, então João também tem a mesma cor de olho de Ana.

$$\text{Ana} \sim \text{João} \Rightarrow \text{João} \sim \text{Ana}, \quad \text{para todos Ana e João} \in \text{Grupo de amigos}$$

- (iii) **Transitividade:** Se Ana tem a mesma cor dos olhos de João e João tem a mesma cor dos olhos de Carlos, então Ana também tem a mesma cor dos olhos de Carlos.

$$\text{Ana} \sim \text{João e João} \sim \text{Carlos} \Rightarrow \text{Ana} \sim \text{Carlos},$$

para todos Ana, João e Carlos  $\in$  Grupo de amigos

Se uma relação satisfaz essas três propriedades, podemos dizer que ela é uma relação de equivalência. Na prática, isso significa que o conjunto pode ser dividido em grupos de elementos equivalentes entre si.

## 2.3 CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

Toda relação de equivalência  $\sim$  agrupa objetos que estão relacionados entre si em um mesmo conjunto, o qual chamamos de classe de equivalência. Para tratar desses objetos, precisamos entender a noção de partição de um conjunto.

**Definição 2.4.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. O conjunto formado por todos os subconjuntos de  $X$  é chamado conjunto das partes de  $X$  (ou conjunto potência de  $X$ ) e é denotado por  $\mathcal{P}(X)$ . Isto é,

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

**Simplificando.** Imagine que você tem um grupo de objetos, por exemplo:

$$X = \{\text{maçã, banana, laranja}\}$$

O Conjunto das Partes é o conjunto de todas as combinações possíveis que você pode formar com esses objetos, incluindo o conjunto vazio e o grupo completo. Por exemplo, se tivermos um conjunto

$$X = \{\text{maçã, banana, laranja}\},$$

então seu conjunto potência será dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) = \{ & \emptyset, \{\text{maçã}\}, \{\text{banana}\}, \{\text{laranja}\}, \{\text{maçã, banana}\}, \\ & \{\text{maçã, laranja}\}, \{\text{banana, laranja}\}, \{\text{maçã, banana, laranja}\} \} \end{aligned}$$

Ou seja, listamos todas as formas possíveis de escolher elementos do conjunto original. Se um conjunto tem  $n$  elementos, o total de subconjuntos possíveis é dado por:

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n$$

Por exemplo, se temos 3 elementos em  $X$ , então o número total de subconjuntos será:

$$2^3 = 8.$$

Isso nos ajuda a entender todas as formas possíveis de agrupar elementos de um conjunto.

A partir do conjunto das partes, podemos definir coleções de subconjuntos de  $X$  que formam uma partição de  $X$ .

**Definição 2.5.** Seja  $X$  um conjunto não vazio. Dizemos que uma coleção  $T \subset \mathcal{P}(X)$  é uma partição de  $X$  se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i)  $\emptyset \notin T$ , em que o símbolo  $\emptyset$  representa o conjunto vazio;

- (ii)  $A \cap B = \emptyset$  para todos  $A, B \in T$ , em que  $\cap$  representa a interseção entre  $A$  e  $B$ , ou seja, os elementos que estão em  $A$  e  $B$ , simultaneamente;
- (iii)  $\bigcup_{A \in T} A = X$ , isto é, a união de todos os conjuntos  $A$  resulta em  $X$ .

**Simplificando.** Uma Partição de um conjunto  $X$  é uma forma de dividir  $X$  em grupos que não se sobrepõem e que, juntos, formam todo o conjunto  $X$ . Esses grupos são subconjuntos de  $X$  e obedecem a três regras. Imagine que temos um conjunto de pessoas

$$X = \{\text{Ana, João, Carlos, Maria}\},$$

e queremos dividir esse conjunto em grupos de forma que:

- (i) Cada pessoa pertença a exatamente um grupo.
- (ii) Nenhum grupo esteja vazio.
- (iii) A união de todos os grupos forme novamente o conjunto original  $X$ .

Uma possível partição poderia ser:

$$T = \{\{\text{Ana, João}\}, \{\text{Carlos, Maria}\}\}$$

Agora falando sobre a definição formal de forma mais simples, temos que uma partição  $T$  do conjunto  $X$  deve obedecer às seguintes propriedades:

- (i) O conjunto vazio não pode estar na partição;
- (ii) Os subconjuntos não podem ter elementos em comum, ou seja, a interseção entre quaisquer dois subconjuntos da partição deve ser vazia;
- (iii) A união de todos os subconjuntos deve resultar no conjunto original.

Sendo assim a partição de um conjunto cria grupos separados que, juntos, representam todo o conjunto original.

Podemos notar que o conjunto das partes de  $X$  não é uma partição de  $X$ , já que  $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ . Vejamos alguns exemplo de partições:

**Exemplo 2.2.** a) Seja  $A \subsetneq X$  não vazio (isto é,  $A$  está contido em  $X$  mas é diferente de  $X$ , e não vazio). Então, a coleção  $T = \{A, X - A\}$  é uma partição de  $X$ .

- b) Considere o conjunto  $X = \{1, 2, 3\}$ . Podemos obter 5 partições de  $X$  distintas, sendo elas:

$$T_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\},$$

$$T_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

$$T_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\},$$

$$T_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}\},$$

$$T_5 = \{X\}.$$

Note que para todo  $i = 1, \dots, 5$ ,  $\emptyset \notin T_i$ , todos os conjuntos em  $T_i$  possuem interseção vazia entre si e a união é igual a  $X$ .

- c) Dado o conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ , temos que a seguinte coleção é uma partição de  $\mathbb{Z}$ :

$$T = \{\mathbb{N}, \{0\}, -\mathbb{N}\},$$

sendo  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  e  $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Dentre tantos exemplos de partições de um dado conjunto  $X$ , o foco está nas partições que surgem através de uma relação de equivalência  $\sim$  em  $X$ . Para obter esta partição, será preciso definir o conceito de classe de equivalência

**Definição 2.6.** Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$ . Dado  $a \in X$ , definimos a classe de equivalência de  $a$  por

$$[a] = \{b \in X \mid b \sim a\}.$$

Denotamos por  $X/\sim$  o conjunto de todas as classes de equivalência dadas pela relação  $\sim$ .

**Simplificando.** Uma Classe de Equivalência é um grupo de elementos que são considerados iguais de acordo com alguma regra. Se dois elementos pertencem à mesma classe de equivalência, dizemos que eles estão relacionados. Imagine um grupo de pessoas que desejamos agrupar de acordo com o mês de nascimento:

$$X = \{\text{Ana, João, Carlos, Maria, Pedro}\}$$

Se considerarmos a relação “nascer no mesmo mês”, podemos formar as seguintes classes:

$$[\text{Nasceu em Março}] = \{\text{Ana, João, Maria}\}, \quad [\text{Nasceu em Abril}] = \{\text{Carlos, Pedro}\}$$

Ou seja, cada pessoa pertence a um grupo com outras que nasceram no mesmo mês.

Podemos então provar que o conjunto de todas as classes de equivalências de uma relação  $\sim$  definida em  $X \neq \emptyset$ , formam uma partição de  $X$ , como visto no seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** *Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$ . Então, a coleção*

$$X/\sim = \{[a] \mid a \in X\},$$

*de todas as classes de equivalência de elementos de  $X$ , é uma partição de  $X$ .*

**Simplificando.** Imagine que temos um grupo de pessoas e queremos organizá-las em equipes, sendo cada equipe formada por pessoas que compartilham alguma característica em comum, como, por exemplo, a mesma cor favorita.

Se dividirmos corretamente essas pessoas, cada uma pertencerá a exatamente uma equipe, e todas as equipes juntas incluirão todas as pessoas do grupo.

Isso é exatamente o que acontece com as classes de equivalência, elas organizam os elementos de um conjunto em grupos distintos que cobrem todo o conjunto sem sobreposição, ou seja, sem que exista uma pessoa pertencente a duas diferentes equipes.

Antes de demonstrar esse resultado, necessitamos do seguinte lema

**Lema 2.1.** *Suponha que  $\sim$  é uma relação de equivalência definida em  $A \neq \emptyset$ . Então, para todos  $a, b \in A$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $a \sim b$ ;

(ii)  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ;

(iii)  $[a] = [b]$ .

*Demonstração.* De fato,

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Suponha que  $a \sim b$ . Então, temos que  $b \in [a]$ . Como  $b \in [b]$ , por definição, segue que  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Suponha que existe  $y \in [a] \cap [b]$ , isto é,  $y \sim a$  e  $y \sim b$ . Queremos mostrar que  $[a] = [b]$ . Se  $x \in [a]$ , então  $x \sim a \sim y \sim b$  e, portanto, segue da transitividade que  $x \in [b]$ . Por outro lado, se  $z \in [b]$ , então  $z \sim b \sim y \sim a$  e, novamente, a transitividade fornece que  $z \in [a]$ . Logo,  $[a] \subset [b]$  e  $[b] \subset [a]$ , isto é,  $[a] = [b]$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i): Por fim, se  $[a] = [b]$ , como  $b \in [b] = [a]$ , temos que  $b \sim a$ .

□

**Simplificando.** Agora, como sabemos se duas pessoas pertencem à mesma equipe? Podemos verificar isso de três formas equivalentes:

(i) Se a primeira pessoa e a segunda têm a mesma cor favorita, então elas pertencem à mesma equipe;

- (ii) Se as equipes das duas pessoas têm pelo menos um membro em comum, então, na verdade, essas equipes são a mesma;
- (iii) Se as equipes das duas pessoas forem exatamente iguais, isso confirma que elas estão na mesma equipe.

Ou seja, se duas classes de equivalência compartilham pelo menos um elemento, então elas são a mesma classe. Isso garante que não há confusão na divisão dos grupos.

Agora, usando esse resultado podemos demonstrar o teorema anterior:

*Demonstração.* (Teorema 2.1): Basta verificar que a coleção de todas as classes de equivalência satisfaz as propriedades da definição de partição. De fato, podemos notar que  $[a] \neq \emptyset$  para todo  $a \in X$  pois, em particular,  $a \in [a]$ . Além disso, temos que

$$X = \bigcup_{a \in X} [a],$$

pois  $a \in [a]$  para todo  $a \in X$  e, além disso, segue do Lema anterior que se  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ , então  $[a] = [b]$ , isto é, as classes de equivalência são disjuntas. Portanto, a classe  $X/\sim$  é uma partição de  $X$ .  $\square$

Vejamos um exemplo:

**Exemplo 2.3.** Dado  $X = \mathbb{Z}$ , temos que  $\mathbb{Z}_n = \{[1], [2], \dots, [n]\}$ , sendo frequentemente denotado por  $\mathbb{Z}_n$ . Note que, por exemplo,  $[2] = [2n]$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 2.4 RELAÇÃO DE ORDEM

As relações de ordem são um outro tipo especial de relação binária, as quais são utilizadas em diversos contextos. Começaremos definindo o primeiro tipo de relação de ordem, chamadas de parciais.

### 2.4.1 Relações de Ordem Parcial

**Definição 2.7.** Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $\preceq: X \times X \rightarrow X$  uma relação binária em  $X$ . Dizemos que  $\preceq$  é uma relação de ordem parcial em  $X$  se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i)  $x \preceq x$  para todo  $x \in X$ , (Reflexividade)
- (ii) Se  $x \preceq y$  e  $y \preceq x$ , então  $x = y$ , para todos  $x, y \in X$ , (Antissimetria)
- (iii) Se  $x \preceq y$  e  $y \preceq z$ , então  $x \preceq z$ , para todos  $x, y, z \in X$ . (Transitividade)

O conjunto  $X$  com a ordem parcial  $\preceq$  é chamado conjunto parcialmente ordenado.

**Simplificando.** Imagine que você tem uma lista de tarefas para fazer, mas algumas delas não precisam ser feitas em uma ordem específica. Por exemplo, antes de sair de casa, você precisa colocar os sapatos depois de colocar as meias, mas escovar os dentes pode ser feito antes ou depois de se vestir.

Uma Ordem Parcial é exatamente isso, essa organização de elementos de um conjunto, sendo que não necessariamente todos precisam seguir uma ordem estrita. Porém esta organização deve satisfazer três regras:

- (i) Cada tarefa pode ser considerada “equivalente” a si mesma, ou seja, sempre faz sentido dizer que algo vem antes ou ao mesmo tempo que ele mesmo, (Reflexividade)
- (ii) Se uma tarefa A precisa ser feita antes de B e ao mesmo tempo B antes de A, então, na verdade, A e B são a mesma coisa, (Antissimetria)
- (iii) Se uma tarefa A precisa ser feita antes de B, e B antes de C, então A também precisa ser feita antes de C. (Transitividade)

Isso permite organizar elementos de forma estruturada, mas sem a necessidade de uma hierarquia rígida, como acontece em uma lista totalmente ordenada.

**Exemplo 2.4.** a) Os conjuntos dos números naturais  $\mathbb{N}$ , inteiros  $\mathbb{Z}$ , racionais  $\mathbb{Q}$  e reais  $\mathbb{R}$  são todos conjuntos parcialmente ordenados.

b) Dado um conjunto  $X$  não vazio, o conjunto  $\mathcal{P}(X)$  (partes de  $X$ ) com a relação  $\subseteq$  de inclusão de conjuntos é um conjunto parcialmente ordenado.

## 2.4.2 Relações de Ordem Parcial Estrita

A relação de ordem parcial estrita é um caso especial da relação de ordem parcial, sendo a principal diferença entre elas o fato de que uma é reflexiva enquanto a outra é irreflexiva. Isto é,

**Definição 2.8.** Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $\prec: X \times X \rightarrow X$  uma relação binária em  $X$ . Dizemos que  $\prec$  é uma relação de ordem parcial estrita em  $X$  se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i)  $x \not\prec x$  para todo  $x \in X$ , isto é,  $x$  não se relaciona com si próprio, (Irreflexividade)
- (ii) Se  $x \prec y$ , então  $y \not\prec x$ , para todos  $x, y \in X$ , (Assimetria)
- (iii) Se  $x \prec y$  e  $y \prec z$ , então  $x \prec z$ , para todos  $x, y, z \in X$ . (Transitividade)

O conjunto  $X$  com a ordem parcial estrita  $\prec$  é chamado conjunto parcialmente estritamente ordenado.

**Simplificando.** Imagine que você tem uma competição, como uma corrida. Cada competidor pode ser comparado com os outros, mas ninguém pode competir consigo mesmo. Esse tipo de organização segue algumas regras:

- (i) Ninguém pode estar “na frente de si mesmo”, ou seja, um elemento nunca está antes dele mesmo, (Irreflexividade)
- (ii) Se uma pessoa A chegou antes de B, então B não pode ter chegado antes de A, (Assimetria)
- (iii) Se A chegou antes de B e B antes de C, então A chegou antes de C. (Transitividade)

Dessa forma, uma Ordem Parcial Estrita ajuda a organizar elementos sem permitir empates ou relações circulares, garantindo que sempre exista um sentido claro de hierarquia ou sequência.

**Exemplo 2.5.** a) O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a relação binária  $<$  (menor que) é um conjunto parcialmente estritamente ordenado.

b) Dado um conjunto  $X$  não vazio, a relação  $\subsetneq$  dada por:

$$A \subsetneq B \iff A \subset B \text{ e } A \neq B,$$

é uma relação de ordem parcial estrita em  $\mathcal{P}(X)$ .

## 2.5 RELAÇÃO DE ORDEM TOTAL

A última das relações de ordem que vamos definir é a relação de ordem total, que difere da relação de ordem parcial apenas por uma propriedade extra:

**Definição 2.9.** Sejam  $X$  um conjunto não vazio e  $\leq$  uma relação binária definida em  $X$ . Dizemos que  $\leq$  é uma relação de ordem total em  $X$  se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $x \leq x$  para todo  $x \in X$ , (Reflexividade)
- (ii) Se  $x \leq y$  e  $y \leq x$ , então  $x = y$ , para todos  $x, y \in X$ , (Antissimetria)
- (iii) Se  $x \leq y$  e  $y \leq z$ , então  $x \leq z$ , para todos  $x, y, z \in X$ , (Transitividade)
- (iv) Para todos  $x, y \in X$  temos que  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ , isto é, quaisquer dois elementos sempre estão relacionados. (Totalidade)

O conjunto  $X$  com a relação  $\leq$  é chamado conjunto totalmente ordenado.

**Simplificando.** Imagine que você tem uma fila organizada, como uma lista de classificação de um campeonato. Cada participante sempre pode ser comparado com qualquer outro, sem exceção.

Uma Ordem Total é exatamente isso, essa organização de elementos de um conjunto, onde todos precisam seguir uma ordem estrita. Esta organização segue algumas regras:

- (i) Todo mundo está, no mínimo, no mesmo nível que ele mesmo, (Reflexividade)
- (ii) Se uma pessoa A está na mesma posição ou antes de B, e B também está na mesma posição ou antes de A, então A e B são a mesma pessoa, (Antissimetria)
- (iii) Se A está antes de B, e B antes de C, então A está antes de C; (Transitividade)
- (iv) Para qualquer duas pessoas, uma sempre estará antes ou na mesma posição que a outra. (Totalidade)

Diferente da Ordem Parcial, onde alguns elementos podem não ter comparação direta, na Ordem Total todos os elementos são ordenados entre si, garantindo uma sequência clara e sem ambiguidades.

Vejamos alguns exemplos de Relações de Ordem Total:

**Exemplo 2.6.** a) O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  com a relação  $\leq$  (menor ou igual a) é um conjunto totalmente ordenado;

b) Seja  $A$  o conjunto definido por

$$A = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid \text{mmc}(m, n) = 1\},$$

e defina a relação  $\preceq$  em  $A$  da seguinte maneira:

$$(m, n) \preceq (p, q) \iff mq \leq np,$$

sendo  $\leq$  a ordem “menor ou igual a” sobre os naturais  $\mathbb{N}$ . Então,  $A$  é totalmente ordenado. Isso se deve ao fato de  $\leq$  ser uma ordem total sobre  $\mathbb{N}$ .

**Observação 2.4.** Denotamos por  $\text{mmc}(m, n)$  o mínimo múltiplo comum entre  $m$  e  $n$ , isto é, o menor número inteiro que pode ser dividido por  $m$  e  $n$ , simultaneamente.

### 3 EQUIVALÊNCIA DE ESTÍMULOS

Para a Psicologia Comportamental, quando estamos nos referindo a Equivalência de Estímulos, temos um conceito que irá descrever a habilidade de um organismo tratar diferentes estímulos como se fossem equivalentes, com base em experiências de aprendizado passada. Essa percepção ocorre quando um organismo aprende a associar ou a relacionar estímulos considerados distintos como estímulos semelhantes, mesmo que estes se apresentem fisicamente de formas diferentes, mas sem uma mudança em sua topografia.

Esse processo, de Equivalência de Estímulos, envolve a formação de relações através de treinamentos e experiências quando submetido a estímulos distintos. Por exemplo, quando treinamos um ser vivo para responder a um estímulo em específico, ele pode, *a posteriori*, expandir esta resposta a outros estímulos que foram associados ao original. Dessa forma, quando esse processo ocorre para todas as respostas esperadas, a associação por semelhança se manifesta na presença de um estímulo-modelo e de estímulos de comparação. Isso resulta na generalização de respostas, refletindo a capacidade do organismo de aplicar o que aprendeu a novas situações ou estímulos — não ensinados previamente — que compartilham características semelhantes.

Outrossim, essa teoria é fundamental para compreender como o comportamento é moldado e como a percepção de estímulos é influenciada pelo aprendizado. Além disso, oferece uma perspectiva de como os seres vivos utilizam o conhecimento adquirido para responder a diferentes estímulos e, assim, lidar de maneira eficaz com diversas situações nas quais possam ser inseridos.

“Equivalência de estímulos é definida como sendo o responder relacional emergente que apresenta as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade. Para que se considere que a relação entre estímulos arbitrários exerce controle sobre o comportamento, um determinado estímulo de comparação deve ser sistematicamente escolhido diante de um determinado estímulo-modelo pertencente à mesma classe de estímulos potencial. Além disso, aquele estímulo de comparação nunca deve ser escolhido na presença de estímulos-modelo que façam parte de outras classes. Exemplos de discriminação de estímulos, generalização de estímulos, discriminação condicional e de equivalência de estímulos são apresentados. Finalmente, a importância dos estudos sobre formação de classes de equivalência.” (Haydu, 2003)

A história de Murray Sidman com os estudos de Equivalência de Estímulos para o desenvolvimento de habilidades se iniciou em 1971, com o artigo *Reading and auditory-visual equivalences* (Sidman, 1971). Neste estudo, ele realizou testes de percepção das equivalências com um adolescente de 17 anos, possuindo uma deficiência intelectual.

O artigo (Sidman, 1971) é um marco na análise comportamental, principalmente quando falamos da formação de relações de equivalência e suas implicações para o comportamento verbal. Pois este estudo vem abordar como os estímulos podem se tornar equivalentes e formarem classes de equivalência através dos processos de aprendizagem e generalização, mesmo quando essas relações não são ensinadas de forma direta a algum indivíduo.

O conceito de equivalência de estímulos, que refere-se à formação de relações entre estímulos ou entre estímulos e respostas, que foram diretamente ensinadas, assim como de outras relações que emergem de forma espontânea, sem ensino direto, após o aprendizado de pelo menos duas relações condicionais que compartilham um elemento comum (Sidman, 2000), é um tópico central neste trabalho. Resumidamente, a equivalência, refere-se à capacidade de um indivíduo tratar diferentes estímulos como se fossem “a mesma coisa”. Por exemplo, ao aprender que o estímulo A está relacionado ao estímulo B, e que o estímulo B está relacionado ao estímulo C, o indivíduo pode, espontaneamente, deduzir que A e C também estão relacionados, formando uma relação de equivalência. Essa capacidade de generalização e abstração tem implicações profundas para o desenvolvimento da linguagem e de habilidades cognitivas complexas.

Enquanto abordagens tradicionais de aprendizagem enfatizam principalmente associações diretas e imediatas entre estímulos e respostas — o que não contempla plenamente a complexidade do comportamento e do desenvolvimento humano (Pozo, 2002) — a perspectiva proposta por Sidman (1971) amplia esse entendimento. Segundo o autor, as classes de equivalência oferecem um modelo mais profundo para compreender a flexibilidade e a sofisticação do comportamento verbal. Essas classes correspondem a conjuntos de estímulos que, embora distintos entre si, passam a ser tratados como equivalentes devido às relações estabelecidas durante o aprendizado. Essa estrutura possibilita que o indivíduo generalize e aplique conhecimentos adquiridos em diferentes contextos, favorecendo a adaptação a novas situações e a resolução de problemas.

De acordo com a abordagem de resolução de problemas, proposta por Pólya (1995), a identificação de padrões e estruturas subjacentes é essencial para encontrar soluções eficazes. As classes de equivalência ilustram esse princípio, pois referem-se a conjuntos de estímulos que, embora distintos à primeira vista, são percebidos como equivalentes devido às relações estabelecidas entre eles. Essa organização estrutural permite que um indivíduo generalize e aplique conhecimentos adquiridos em contextos diferentes, facilitando a adaptação a novas situações e a resolução de problemas.

“Resolver um problema significa encontrar um caminho a partir do que se sabe para o que se busca.” (Pólya, 1995)

Sidman (1971) argumenta que, ao compreender como as classes de equivalência funcionam, podemos capturar melhor a capacidade do comportamento verbal de se adaptar e se desenvolver. Ele sugere que, em vez de ver o aprendizado como um processo de formação de associações simples, devemos considerar a forma como as informações são organizadas e utilizadas para gerar novas inferências e comportamentos, refletindo uma compreensão mais sofisticada e flexível da aprendizagem e da cognição humana.

Dito isso, o experimento realizado por Sidman (1971) buscava verificar se pareamentos condicionais áudio-visuais — isto é, a relação entre palavras ditas ao sujeito e palavras impressas apresentadas a ele — seriam suficientes para o desenvolvimento da leitura e da compreensão.

Nesse contexto, o autor investigou também o pareamento entre uma figura mostrada ao sujeito e a palavra impressa correspondente, bem como a leitura oral dessa palavra, tudo isso sem a realização de um treino prévio específico para essas relações.

Sidman (1971), convidou um jovem de 17 anos com uma deficiência intelectual, para a aplicação do modelo de discriminação condicional, mas as relações que exigiam o pareamento entre o nome da figura dita a ele e a figura correspondente, já eram apresentadas. Esta relação condicional foi definida como *AB*. Ele também demonstrava outra relação condicional: ao ser apresentada uma figura, ele dizia o nome correspondente, sendo este pareamento definido como *DB*.

Pensando em seu objetivo, Sidman (1971), por meio de reforçamento diferencial <sup>2</sup>, e munido do modelo experimental “*matching-to-sample*” <sup>3</sup>, solicitou que o participante realizasse o pareamento auditivo-visual e, junto disso, testou a emergência do pareamento entre a palavra impressa e a figura que o sujeito já identificava diante do nome oralmente apresentado. Para um melhor entendimento, temos aqui o seguinte esquema desenvolvido por ele:

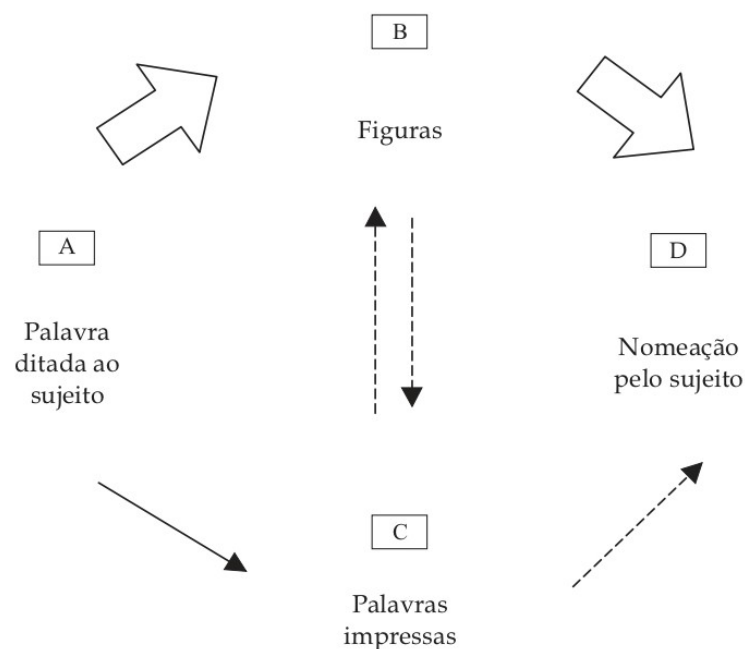


Figura 1 - Onde:

- os quadrados indicam a natureza do conjunto de estímulos apresentados
- as flechas duplas (⇔) indicam as relações condicionais já apresentadas pelo sujeito
- a flecha contínua (→) indica a relação treinada
- as flechas descontínuas (-->) indicam as relações testadas.

Figura 3 – Esquema criado por Sidman (1971), para o melhor entendimento das Relações de Estímulos.

<sup>2</sup> O reforçamento diferencial é um tipo de ensino, caracterizado por esquemas nos quais algumas respostas são reforçadas e outras são extintas durante as intervenções. Quando falamos de resposta, estamos falando do que a pessoa faz, já o comportamento, é a relação entre a resposta e suas consequências.

<sup>3</sup> “Pesquisas em equivalência de estímulos utilizam tarefas de *matching-to-sample* (MTS) para produzir relações condicionais entre estímulos e estudos derivados as utilizam para o ensino de comportamento verbal, leitura e outras habilidades acadêmicas, com resultados bastante promissores” (Oliveira; Penariol; Goyos, 2013).

Ao analisarmos a Figura 3, notamos que Sidman obteve como resultado as emergências das relações  $BC$ ,  $CB$  e  $CD$ , a partir da realização de seu experimento. Esses resultados tornaram evidentes a capacidade de um sujeito em estabelecer novas relações, que não foram ensinadas de forma direta, quando colocado diante de estímulos. Demonstrava, dessa forma, a flexibilidade e a complexidade do processo de aprendizagem baseado em relações de estímulos.

Em 1982, M. Sidman juntamente de W. Tailby publicaram um artigo intitulado “*Conditional Discrimination VS. Matching To Sample: An Expansion Of The Testing Paradigm*”<sup>4</sup> (Sidman; Tailby, 1982), o qual trouxe informações sobre o desempenho de um indivíduo no procedimento necessário para a discriminação condicional<sup>5</sup> e definição de relações condicionais entre os estímulos, sendo dita como “Se  $A_1$ , então  $B_1$ , se  $A_2$ , então  $B_2$ ”.

“Dados dois estímulos discriminativos<sup>6</sup>,  $B_1$  e  $B_2$ , um sujeito seleciona  $B_1$  se o estímulo condicional<sup>7</sup>  $A_1$  está presente, e seleciona  $B_2$  se o estímulo condicional é  $A_2$ . Esta discriminação condicional fornece uma definição de relações condicionais entre estímulos em termos de procedimento. Em sua forma mais simples, as relações condicionais são: Se  $A_1$ , então  $B_1$ ; se  $A_2$ , então  $B_2$ .” (Sidman; Tailby, 2006)

Segundo Sidman e Tailby (1982), a realização de testes para fazermos a verificação da existência de uma relação condicional, não requer modificações no procedimento estabelecido. Em outras palavras, o processo para testarmos a existência de uma relação condicional pode ser feita mantendo o procedimento inicial sem alterações, pois ele não pede a necessidade de modificações no protocolo utilizado para definir essa relação. O processo comentado anteriormente, envolve, inicialmente, o estabelecimento de uma regra condicional, como “se  $A$ , então  $B$ ”, e a definição de um modelo experimental para testarmos essa relação em um ambiente controlado. Além disso, o procedimento definido é seguido rigorosamente, sem alterações, sendo replicado com diferentes amostras, e evitando assim um enviesamento.

Supomos, frequentemente, que uma discriminação condicional, quando bem estabelecida, nos transparecerá não apenas uma relação condicional entre estímulos, mas também nos indicará a presença de relações de equivalência. Além da relação condicional “se ..., então...”, assumimos que os estímulos  $A_1$  e  $B_1$  são equivalentes e, por conseguinte, supomos que os estímulos  $A_2$  e  $B_2$  estão relacionados por equivalência e por condicionalidade. Os estímulos  $B_1$  e  $B_2$  se apresentam como estímulos de comparação, que devem ser comparados com os estímulos modelos  $A_1$  e  $A_2$  e prontamente serem adequadamente emparelhados. (Sidman; Tailby, 1982)

<sup>4</sup> Traduzido como: “Discriminação Condicional VS Emparelhamento com o Modelo: Uma Expansão do Paradigma de Teste”(Sidman; Tailby, 2006)

<sup>5</sup> Discriminações condicionais possibilitam que o ensino de alguns comportamentos derive em outros sem que tenham de ser diretamente ensinados. Apesar da suposta economia de ensino, dificuldades têm sido relatadas no estabelecimento do controle adequado de estímulos nestas discriminações.

<sup>6</sup> Este é o estímulo que sinaliza a disponibilidade de reforço e estabelece a ocasião para a ocorrência de respostas que produzam reforçadores.

<sup>7</sup> O estímulo condicional, conhecido também como estímulo modelo, é um estímulo que, após ser emparelhado com um estímulo que causa uma resposta específica, passa a apresentar a mesma resposta que o estímulo ao qual se emparelhou, isso mesmo quando o estímulo original está ausente.

“Quando todos os estímulos modelo e de comparação são fisicamente diferentes, a equivalência é sugerida denominando-se o desempenho de emparelhamento de “não-identidade”, emparelhamento “arbitrário”, ou igualação “simbólica”. ” (Sidman; Tailby, 2006)

De forma distinta da condicionalidade, a equivalência não é algo perceptível apenas com base nas interações de um sujeito com o procedimento que foi estabelecido. Para conseguirmos determinar se o desempenho do indivíduo vai além das relações condicionais estabelecidas entre o estímulo modelo e os de comparação, são necessários testes adicionais. (Sidman; Tailby, 1982)

“Suponha, por exemplo, uma relação,  $R$ , entre os estímulos  $a$  e  $b$ , que satisfaz as exigências de procedimento para a condicionalidade, ou “se  $a$ , então  $b$ ”. A relação entre  $a$  e  $b$ , também é uma relação de equivalência? O desempenho do sujeito não dá qualquer pista. Contudo, testes apropriados podem ser derivados a partir de três propriedades que os textos de matemática elementar moderna especificam como a definição da relação de equivalência: reflexividade, simetria e transitividade.” (Sidman; Tailby, 2006)

Baseando-se nos textos da matemática elementar moderna, Sidman e Tailby (Sidman; Tailby, 1982) definiram as relações condicionais como sendo reflexivas, simétricas e transitivas. Portanto, para que uma relação condicional  $R$  seja definida como reflexiva, deve-se mostrar que cada estímulo apresentado mantém relação com ele mesmo, ou seja,  $aRa$  (se  $a$ , então  $a$ ) e  $bRb$  (se  $b$ , então  $b$ ) devem, necessariamente, ser verdadeiras. Em vista disso, a propriedade denominada de reflexividade pode ser testada por um procedimento chamado de emparelhamento por identidade, que requer que o indivíduo emparelhe o estímulo apresentado com ele mesmo, e o estímulo  $b$  com ele mesmo.

“Não será suficiente ensinar as relações condicionais,  $aRa$  e  $bRb$ .” (Sidman; Tailby, 2006)

Não está claro se um indivíduo, ao qual foi ensinado as relações, está emparelhando cada estímulo a ele mesmo (isso se o emparelhamento está ocorrendo) ou se está sendo controlado por uma característica do modelo e uma outra característica do estímulo de comparação adequado. Por exemplo, o indivíduo poderia combinar “vermelho” com “claro” e “verde” com “escuro”, em vez de combinar “vermelho” com “vermelho” e “verde” com “verde”. Somente quando o sujeito combina cada um dos novos estímulos com ele mesmo, sem reforçamento diferencial ou outras instruções, podemos confiar que a identidade é a base para o seu desempenho. O emparelhamento de identidade generalizado é uma prova de reflexividade, porque o sujeito está familiarizado com os estímulos e procedimentos.

Posteriormente, Sidman e Tailby (1982) deixam explicitado que para demonstrarmos a reflexividade de uma relação  $R$ , devemos mostrar que  $aRb$  e  $bRa$  são situações verdadeiras. Temos também que se um indivíduo emparelha o modelo  $a$  com a comparação  $b$  deve, então, sem um treinamento adicional, conseguir emparelhar o modelo  $b$  com o estímulo de comparação  $a$ , ou seja, o indivíduo deve conseguir realizar tanto a relação “se  $a$ , então  $b$ ” como a relação

“se  $b$  então  $a$ ”. Segundo Sidman, Rauzin *et al.* (1982), em “*A search for symmetry in the conditional discriminations of rhesus monkeys, baboons, and children*”, quando temos um indivíduo familiarizado com cada um dos estímulos disponibilizados separadamente, como modelo e como comparação, a prova de simetria da relação  $aRb$  é a reversibilidade funcional<sup>8</sup> entre o modelo e a comparação.

Por fim, Sidman e Tailby (1982) nos diz que para determinarmos a transitividade em  $R$ , é necessário termos um terceiro estímulo,  $c$ , pois uma vez que as relações “se  $a$ , então  $b$ ” e “se  $b$ , então  $c$ ” tenham sido definidas, a transitividade irá requerer que a relação “se  $a$ , então  $c$ ” ocorra sem reforçamento diferencial ou sem outras instruções adicionais. Então quando estamos diante de um indivíduo que aprendeu duas relações condicionais, aqui definidas como  $aRb$  e  $bRc$ , com o nosso estímulo de comparação atuando como modelo, a prova para a transitividade é a emergência de uma terceira relação condicional,  $aRc$ , em que o indivíduo, consiga emparelhar o modelo da primeira relação definida, com o estímulo de comparação da nossa segunda relação estabelecida.

“Denominar uma relação condicional de “emparelhamento com o modelo”, então, requer a prova de que a relação possui as três propriedades de uma relação de equivalência.” (Sidman; Tailby, 2006)

Em termos gerais, para termos uma relação condicional de “emparelhamento com o modelo”, necessariamente devemos provar que essa relação, a qual estamos analisando, possui as três propriedades fundamentais de uma relação de equivalência: reflexividade, simetria e transitividade. Primeiramente, para mostrarmos a reflexividade usamos o emparelhamento generalizado, que irá nos garantir que cada estímulo está corretamente emparelhado com ele mesmo. Após isso, para mostrarmos que a simetria acontece, utilizamos a reversibilidade amostra-comparação, conforme descrito por Lazar (1977). Esse método nos permite verificar que, se um estímulo  $A$  está emparelhado com um estímulo  $B$ , então  $B$  também está emparelhado com  $A$ , garantindo assim que a relação é bidirecional. E por último, Sidman e Tailby (1982) descrevem que para que seja possível demonstrarmos a transitividade pela emergência de uma terceira relação, o sujeito deverá emparelhar o modelo de uma das duas relações, já pré-estabelecidas, com a comparação da outra, provando que, se  $A$  está emparelhado com  $B$  e  $B$  está emparelhado com  $C$ , então  $A$  deve estar emparelhado com  $C$ . Assim, a transitividade é confirmada ao observar a consistência da relação entre três estímulos inter-relacionados.

Dessa forma, o emparelhamento com o modelo pode ser considerado uma relação de equivalência quando satisfaz essas três propriedades. Podemos observar melhor essas relações através da tabela a seguir:

<sup>8</sup> A capacidade de reverter ou inverter um comportamento ou relação aprendido, revelando uma simetria disfarçada, é conhecida como reversibilidade funcional. Isso pode ser observado na psicologia e na análise do comportamento quando um sujeito aprende uma relação condicional (como “ $A$  segue  $B$ ”) e também mostra que entende a relação inversa (como “ $B$  precede  $A$ ”). Este conceito é usado para estudar como as relações entre estímulos são entendidas e como podem ser usados em diferentes situações.

### Relações de Equivalência

---

*As relações de equivalência devem ser:*

1. Reflexivas:  $aRa$
2. Simétricas: Se  $aRb$ , então  $bRa$
3. Transitivas: Se  $aRb$  e  $bRa$ , então  $aRc$

---

*Os testes combinados de simetria e transitividade são:*

- A. Ensinar  $aRb$  e  $aRc$ . Testar  $bRc$  e  $cRb$
- B. Ensinar  $bRa$  e  $cRa$ . Testar  $bRc$  e  $cRb$

---

Figura 4 – Tabela das relações de equivalência esquematizadas por Sidman e Tailby (2006).

Segundo (Sidman; Tailby, 1982), a simetria e a transitividade são relações que podem ser analisadas de forma simultânea. Em um teste combinado (A, descrito na parte inferior da Figura 4), o procedimento começa com o ensino para o indivíduo, de duas relações:  $aRb$  e  $aRc$ , as quais compartilham de um mesmo modelo. Em seguida, verifica se surgem relações condicionais,  $bRc$  e  $cRb$ . Se a relação  $R$  se mostrar simétrica, ou seja, se  $aRb$  e  $bRa$  forem relações verdadeiras, então a transitividade irá nos garantir que, pela combinação de  $bRa$  e  $aRc$ , obteremos  $bRc$ . Da mesma forma, se  $aRc$  e  $cRa$  forem verdadeiras por consequência da simetria, então a combinação de  $cRa$  e  $aRb$  resultará em  $cRb$ , também por transitividade. Para que as novas relações condicionais  $bRc$  e  $cRb$  apareçam, é necessário que as relações estabelecidas  $aRb$  e  $aRc$  sejam simultaneamente simétricas e transitivas.

Durante as primeiras experiências, que utilizaram esses testes para avaliar se procedimentos de discriminação condicional com o objetivo de que se resultassem um emparelhamento com o modelo (Sidman; Tailby, 1982; Sidman; Rauzin *et al.*, 1982), jovens com deficiência intelectual demonstraram-se capazes de realizar o emparelhamento de identidade generalizado, atingindo assim o critério de reflexividade. Além disso, eles aprenderam a selecionar os estímulos de comparação, entre 20 figuras disponibilizadas e a corresponder esses estímulos aos nomes correspondentes às 20 figuras quando ditas a ele, identificando corretamente os estímulos modelo. Tudo fica mais claro, quando analisamos a figura a seguir:

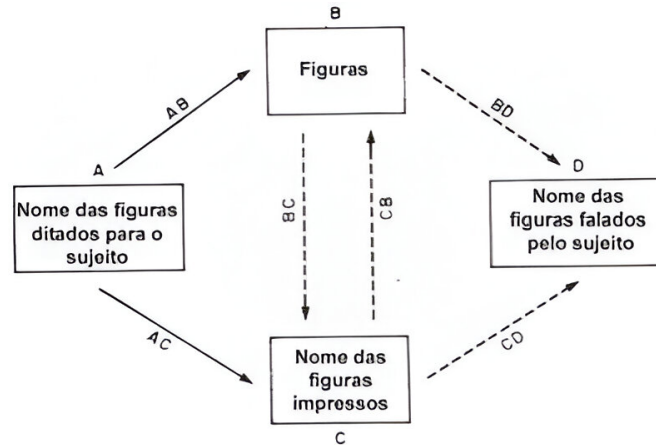


Figura 5 – Relações formadas no experimento realizado por Sidman e Tailby (2006).

Para exemplificar a Figura 5, a qual representa o Paradigma Básico de Equivalência, temos:

- Nesta figura temos quatro retângulos, denominados por *A*, *B*, *C* e *D*, em que *A*, *B* e *C*, representam os estímulos, enquanto o retângulo *D*, representa as respostas de nomeação oral;
- As setas existentes em nossa figura, nomeadas de *AB*, *AC*, *BC* e *CB*, indicam as relações condicionais existentes entre os estímulos modelos e os estímulos de comparação, ou seja, as setas partem dos estímulos modelos e chegam aos estímulos de comparação;
- Já as setas denominadas por *BD* e *CD*, representam as relações entre os estímulos e as respostas de nomeação oral, ou seja, elas partem dos estímulos e chegam as respostas de nomeação (retângulo *D*);
- Além disso, as setas contínuas, correspondem às relações condicionais que são ensinadas de forma direta aos indivíduos;
- Já as setas tracejadas são as relações condicionais ou as relações de nomeação oral emergentes, mas que só ocorrem após outras relações já terem sido ensinadas anteriormente.

Portanto, ao aplicarmos o teste combinado de simetria e transitividade (*A*, na Tabela 1), foi possível, então, verificar se as relações *AB* e *AC* eram de fato relações de equivalência. Para demonstrar a equivalência existente, os sujeitos tiveram que escolher de forma condicional uma palavra impressa que fosse apropriada para a figura modelo, *BC*, e uma palavra impressa apropriada para uma figura, *CB*. Embora os sujeitos com deficiência intelectual não tenham sido treinados de forma direta a relacionar corretamente as figuras e os nomes impressos, eles demonstraram nos pré-testes que não conseguiram fazê-lo antes de aprender as discriminações condicionais *AB* e *AC*. Porém, munidos das relações condicionais, conseguiram atingir

os critérios de reflexividade, simetria e transitividade, e os resultados foram referidos como "emparelhamento com o modelo".

“Uma consequência necessária do estabelecimento de classes de estímulos equivalentes foi a habilidade dos sujeitos de emparelhar os membros de uma classe entre si mesmo sem nunca terem feito isto antes. O próprio processo de teste pode, portanto, gerar a emergência de novos desempenhos de emparelhamento com o modelo sem que eles tenham sido explicitamente ensinados.” (Sidman; Tailby, 2006)

Um dos objetivos do experimento em questão, foi o de se adicionar um novo estímulo a cada classe, para assim, ser testado o poder das relações de equivalência ao se criar uma rede mais ampla de estímulos intercambiáveis. Para garantir que os sujeitos não pudessem inicialmente realizar o emparelhamento crítico e a nomeação, este experimento utilizou letras gregas e os nomes das letras para eliminar tanto o tempo necessário para os pré-testes quanto os problemas causados pela exposição a tarefas que as crianças não poderiam fazer, pois eles supuseram que essas palavras e representações não seria de conhecimento das crianças, e assim, evitaria o pré-teste. Isso também evitou o dilema metodológico de reforçar ou não as respostas corretas durante os pré-testes. Os estímulos e a base lógica do experimento são mostrados na Figura 7, que pode ser encontrada logo abaixo.

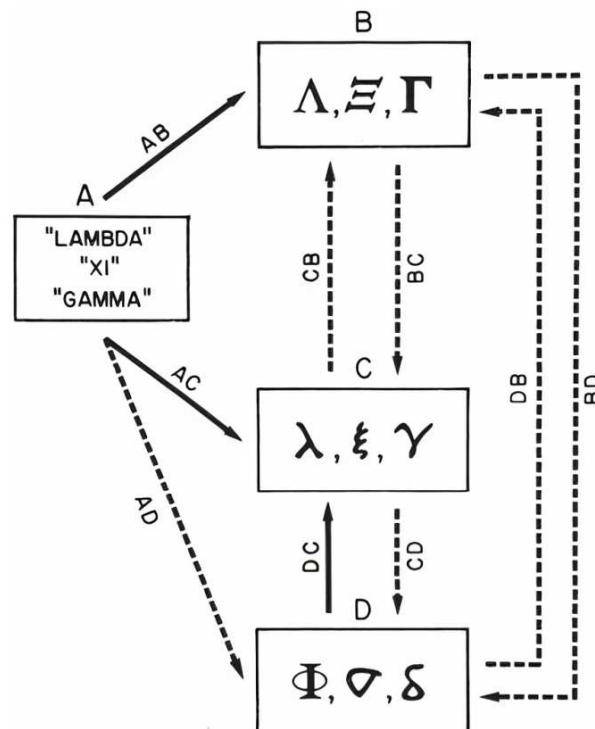


Figura 6 – Esquema desenvolvido por Sidman e Tailby (2006) para explicar o experimento quando se adiciona mais um estímulo.

Para exemplificar a Figura 7, a qual representa o Paradigma Básico de Equivalência presente no experimento em questão, temos:

- Nesta estrutura, os estímulos consistem em um conjunto de nomes ditados de letras gregas, representados pelo Conjunto *A*, além de três conjuntos de letras gregas impressas, que são os Conjuntos *B*, *C* e *D*, com três letras em cada;
- As setas na figura partem dos estímulos-modelo e indicam a relação entre eles e os estímulos de comparação. Apenas um estímulo-modelo é apresentado de cada vez;
- As setas contínuas, nomeadas como *AB*, *AC* e *DC*, representam as relações condicionais que foram ensinadas explicitamente aos participantes do experimento;
- Já as setas tracejadas, denominadas *CB*, *BC*, *AD*, *CD*, *BD* e *DB*, indicam as relações condicionais que são testadas após o aprendizado das relações explicitamente ensinadas.

O grafo representado na parte superior por *ABC*, ilustrado na Figura 7, constitui uma versão simplificada dos experimentos realizados com o grafo *ABC* apresentado na Figura 6. Nesses experimentos, os sujeitos aprenderam a relacionar as letras dos conjuntos *B* e *C* com os nomes ditados (*A*). O Teste *A*, mostrado na Tabela 1, avalia a habilidade dos participantes em emparelhar as letras dos conjuntos *B* e *C* entre si (*BC* e *CB*). Esse desempenho é esperado caso as relações condicionais *AB* e *AC* também funcionem como relações de equivalência. Assim, devem emergir três classes de estímulos, cada uma composta por três elementos: uma letra do conjunto *A*, uma letra do conjunto *B* e uma letra do conjunto *C*.

“O primeiro objetivo do presente experimento foi realizar estes testes para verificar a emergência das classes de estímulos com quatro membros, ABCD.” (Sidman; Tailby, 2006)

Além disso, os sujeitos serão instruídos a condicionalmente escolher as letras de comparação do Conjunto *C* em relação aos modelos do Conjunto *D*. Eis que nos deparamos com o seguinte questionamento: as novas relações *DC* podem expandir as classes *ABC*? Ao fazermos esta nova relação, cada classe com três membros receberá um quarto membro do Conjunto *D*: o “*phi*” ( $\Phi$ ) maiúsculo será membro da classe “*lambda*” ( $\lambda$ ), o “*sigma*” ( $\sigma$ ) minúsculo será membro da classe “*xi*” ( $\xi$ ) e o “*delta*” ( $\delta$ ) minúsculo será membro da classe “*gamma*” ( $\gamma$ ). Os sujeitos podem combinar cada estímulo com outro de sua classe. Como eles foram instruídos apenas com as relações *AB*, *AC* e *DC*, eles poderiam emparelhar os modelos do Conjunto *B* com comparações do Conjunto *D* (*BD*) ou modelos do Conjunto *D* com comparações do Conjunto *B* (*DB*).

O método utilizado por Sidman e Tailby (1982) foi o de *matching-to-sample*, e as pessoas que participaram do experimento foram oito crianças neurotípicas, sendo sete do sexo masculino e uma do sexo feminino, com idades variando entre 5 anos até os 7 anos e 5 meses. Quatro, dessas oito crianças, frequentavam o jardim de infância e as outras quatro, estavam na primeira série. Todas as crianças que participaram do experimento tinham pais que haviam completado o nível

médio. A quantidade de sessões variavam por conta da quantidade de treinamento necessário para aprender a manter as discriminações condicionais de “*baseline*”<sup>9</sup>.

Nota-se que as crianças participantes da pesquisa de Sidman e Tailby (1982) possuíam idades, em anos e meses, diferentes, e isso pode influenciar nos resultados e no processo realizado, pois segundo Piaget (1971), algumas coisas só se desenvolvem em certos momento da vida da criança. Percebemos que no “Estágio Pré-Operacional”, o qual ocorre quando as crianças estão com uma idade entre 2 a 7 anos, elas irão começar a dominar e entender a linguagem e os símbolos utilizados na comunicação. Nesta etapa as crianças imitam, representam, imaginam e classificam, além disso, ainda visualizam o mundo pela sua própria perspectiva, não pensando muito bem em como suas ações atingirão as outras pessoas. Fora isso, ocorre frequentemente a confusão entre a realidade e a fantasia, e a noção do que é certo e o que é errado ainda está se desenvolvendo. Já no “Estágio Operatório - Concreto”, onde as crianças estão com 7 a 11/12 anos, começam a entender melhor o ponto de vista das outras pessoas e o que é certo ou errado. Neste momento, a criança já está com a sua capacidade de pensar em soluções mentais para problemas reais mais bem desenvolvida e as informações, quando recebidas, começam a se unir com um raciocínio lógico, permitindo que a criança consiga agrupar objetos ou símbolos por semelhança ou por diferenças. Além disso, passam a compreender conceitos de espaço e volume, e as operações matemáticas tornam-se mais complexas. As crianças começam a realizar cálculos com números maiores sem a necessidade de recorrer a objetos concretos.

“O desenvolvimento da inteligência passa por uma sucessão de estágios que não podem ser transpostos em sua ordem natural, pois cada um tem sua própria estrutura, que se integra à estrutura do estágio seguinte.” (Piaget, 1971)

Todo esse estudo e testes realizados por Sidman e Tailby (1982), envolviam crianças de diferentes idades, interagindo com um dispositivo que apresentava nove janelas translúcidas, alocadas em um círculo, com uma das 9 janelas sendo apresentada no centro, e as outras dispostas ao redor. Os estímulos modelos eram projetados no centro, e ao redor eram exibidos os estímulos de comparações. Os estímulos de comparação existentes, eram exibidos nas janelas externas, mas não nas três janelas representadas superiormente. A disposição dos estímulos, nas janelas externas, fora do centro variavam de forma aleatória a cada tentativa que se iniciava.

<sup>9</sup> Na psicologia, a “*baseline*” é a condição inicial ou o ponto de referência utilizado para medir mudanças após uma intervenção. Ele ajuda a avaliar a eficácia de tratamentos ou experimentos, comparando o comportamento ou condição antes e depois da intervenção.

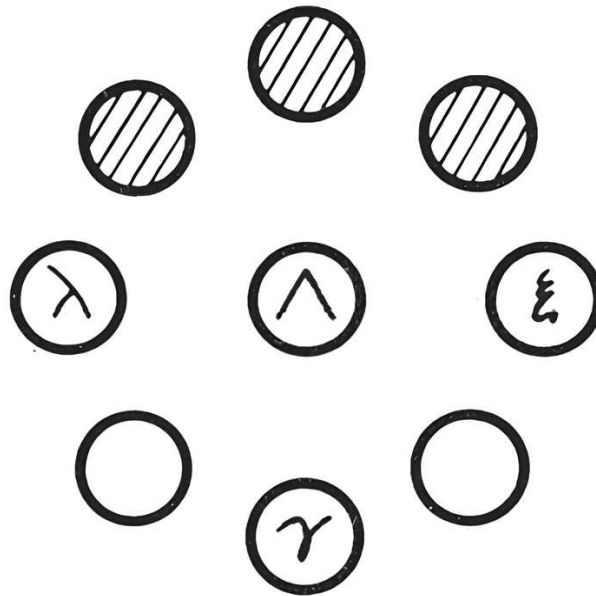


Figura 7 – “Representação esquemática da matriz estímulo-resposta, ilustrando um modelo do Conjunto B (janela do centro) e as três comparações do Conjunto C (janelas externas). As posições dos estímulos e das janelas em branco variavam de tentativa para tentativa, mas os estímulos nunca apareciam nas três janelas superiores”. (Sidman; Tailby, 2006).

Durante todo o momento em que o experimento estava sendo realizado, a criança interagia com os estímulos visuais ou os estímulos auditivos, sempre representados por letras gregas. Toda vez que surgia um estímulo na janela central, a criança necessariamente deveria pressionar a janela onde ele estava sendo apresentada para que os modelos de comparação pudessem aparecer nas janelas ao redor. Mas quando os estímulos eram disponibilizados de maneira auditiva, a criança aguardava pela reprodução completa antes de responder. Sempre que a escolha da criança resultasse em uma resposta correta, era recompensada por um som e uma moeda, e quando resultasse em uma resposta incorreta, não se recebia nenhum reforço. E quando a criança respondia de forma verbal a pergunta “O que você vê?”, não se recebia nenhum reforço nem mesmo sonoro ou monetário.

Segundo Sidman e Tailby (1982) uma consequência esperada e natural quando ocorre o estabelecimento de classes de estímulos equivalentes é que as pessoas conseguem relacionar elementos semelhantes, que estejam em uma mesma classe, mesmo que essa associação nunca tenha sido feita antes. O próprio processo para testar esse estabelecimento de relações gera novas associações que não foram, de forma direta, ensinadas.

O fato de sermos capazes de formarmos relações de equivalência, torna o processo de ensino e aprendizagem muito mais rápido e eficaz. Um exemplo disso pode ser observado no ensino da tabuada, pois quando uma criança aprende que “ $5 \times 4 = 20$ ”, ela pode rapidamente generalizar esse conhecimento para compreender que “ $4 \times 5 = 20$ ” sem precisar aprender uma nova relação de forma isolada. Essa capacidade de estabelecer relações de equivalência entre as operações torna o aprendizado mais rápido e eficaz, reduzindo a necessidade de decorar todas as combinações possíveis, pois com ela não se necessita de instruções sendo passadas de

formas repetitivas, permitindo que o indivíduo consiga notar novas relações por conta própria, aprendendo a fazer conexões que não foram demonstradas anteriormente.

Além de tornar o processo de ensino e aprendizagem muito mais rápido, ele também explora e exercita a capacidade de generalização e exploração de um indivíduo quando inserido em uma situação inédita, pois traz para essa situação coisas que já ocorreram antes, ajudando assim na assimilação e entendimento daquilo que é novo. Podemos observar este comportamento quando acompanhamos as crianças no momento em que iniciam a exploração da alimentação. Nesse período, notamos que ao aprenderem a comer uma fruta, como a maçã, que pode ser consumida com casca, elas podem generalizar essa experiência e tentar comer outras frutas da mesma forma, como uma banana ou uma laranja, que são frutas popularmente consumidas sem suas cascas. Esse processo demonstra como a formação das relações de equivalência facilita o aprendizado inicial, tornando-o mais rápido e intuitivo. Além disso, estimula a capacidade de generalização e exploração da criança, permitindo que ela teste hipóteses e ajuste seu comportamento ao lidar com novas situações, como por exemplo, ao morderem uma laranja com casca perceberão o sabor amargo e desagradável que a casca possuía, e ela entenderá que tem algo errado com aquilo em que esta tentando comer, passando a tomar mais cuidado nas próximas tentativas. Além disso, auxilia a compreensão de diferentes estímulos através de um padrão percebido.

Essa descoberta não apenas transforma a forma como vemos o aprendizado, mas também como entendemos a mente humana. O ato de aprender se torna, então, um processo de criação e descoberta em que o indivíduo, com base no que já sabe, constrói novos entendimentos. É nesse processo contínuo de revelação que o verdadeiro poder da aprendizagem se manifesta.

### 3.1 MURRAY SIDMAN

Murray Sidman nasceu na cidade de Boston, localizada no estado de Massachusetts no dia 29 de abril de 1923. Durante a Segunda Guerra Mundial, esteve envolvido com o Serviço Militar. Sobre sua formação acadêmica temos que no ano de 1952, sob supervisão e orientação de Fred Keller <sup>10</sup> e William (Nat) Schoenfeld <sup>11</sup>, recebeu seu título de doutorado pela Universidade de Columbia (ABAI, s.d.).

<sup>10</sup> Foi um psicólogo norte-americano, pioneiro na área de Psicologia Experimental, Praticante da Análise do Comportamento, foi também um dos principais responsáveis pela introdução dessa abordagem psicológica no Brasil, responsável pelo desenvolvimento do Personalised System of Instruction (PSI), ou Keller Plan.

<sup>11</sup> Um psicólogo norte-americano, com pesquisas voltadas para o estudo da psicologia experimental e defendeu o behaviorismo, que visa entender o comportamento em função de histórias ambientais de sofrer consequências, em um conjunto cuidadosamente concebido de experimentos em 1953, liderou uma equipe de psicólogos da Universidade de Columbia na descoberta de que a ansiedade fazia com que a frequência cardíaca humana diminuísse em vez de acelerar sob certo tempo de estímulos.



Figura 8 – Retrato de Murray Sidman disponibilizado pela [ABAI](#) (s.d.).

Murray Sidman trabalhou em renomadas instituições de pesquisa, dentre as quais podemos citar: a Walter Reed Army Institute of Research juntamente de Joseph V. Brady <sup>12</sup>, Neurology Department of the Massachusetts General Hospital e o E. K. Shriver Center for Mental Retardation and Developmental Disabilities, sendo que nesta instituição em questão, possuiu o cargo de Diretor Emérito do Behavioral Sciences Department. Além disso, lecionou em inúmeras universidades podendo citar a Columbia University, University of Virginia Medical School, University of Nevada, e Johns Hopkins School of Medicine. Atuou ativamente por mais de 10 anos no corpo docente de Harvard Medical School e na Northeastern University. No ano de 1984 se aposentou da academia como Professor Emérito em Northeastern. Entre os anos de 1987 a 2002, atuou como Pesquisador Associado Sênior no The New England Center for Children (NECC), onde conduzia e supervisionava pesquisas de controle de estímulos, realizando semanalmente reuniões laboratoriais ([ABAI](#), s.d.).

Durante toda a sua vida Sidman recebeu inúmeros prêmios, dentre os quais podemos destacar: o Award for International Dissemination of Behavior Analysis (Prêmio de Disseminação Internacional da Análise do Comportamento), Distinguished Service to Behavior Analysis (Prêmio de Serviço Distinto à Análise do Comportamento) e o Impact of Service on Application from the Society for the Advancement of Behavior Analysis (Prêmio de Impacto do Serviço na Aplicação da Sociedade para o Avanço da Análise do Comportamento), todos dados pela Association of Behavior Analysis International (ABAI). Já da Experimental Analysis of Human Behavior Special Interest Group, recebeu o Distinguished Career Award (Prêmio de Carreira Distinta). Agora, da American Psychological Association, foi premiado com Dole Award (Prêmio Dole) e o Ernest R. Hilgard Lifetime Achievement Award (Prêmio Ernest R. Hilgard de Conquistas ao Longo da Vida). E por fim, fez a recepção do primeiro Murray Sidman Award da

<sup>12</sup> Um psicólogo americano, neurocientista e pioneiro da farmacologia comportamental. Além de sua posição de fundador da farmacologia comportamental, ele fez contribuições significativas nas áreas de abuso e tratamento de drogas, exploração espacial e ética em pesquisa humana.

Enduring Contributions to Behavior Analysis (Prêmio anual Murray Sidman por Contribuições Duradouras à Análise do Comportamento) promovido pela Berkshire Association of Behavior Analysis and Therapy (ABAI, s.d.).

No ano de 2019, Murray Sidman faleceu no dia 18 de maio, aos 96 anos, após uma longa e memorável carreira de imensas contribuições para o campo da análise do comportamento. As contribuições deixadas por Sidman para a ciência do comportamento são muito abrangentes, incluindo metodologia de sujeito único, comportamento de esquiva, coerção e seus efeitos, controle de estímulos, aprendizagem sem erros, aprendizagem programada e equivalência de estímulos. Em sua vida toda reuniu um extenso corpo de trabalho publicado que continuam a influenciar pesquisas voltadas para a análise do comportamento e em outras áreas (ABAI, s.d.).

Quando perguntado sobre a inspiração que teve ao fazer a escrita de seus livros <sup>13</sup>, Sidman, em uma entrevista dada ao canal do YouTube “Behavior Analysis History” (BEHAVIOR... 2014), respondeu que tinha algo a dizer que outras pessoas poderiam achar interessante. Seus livros, capítulos de livros e mais de 100 publicações revisadas por pares, são verdadeiros tesouros que ele nos deixou, proporcionando um legado duradouro de conhecimento e inspiração para futuras gerações.

“Na nossa escrita científica sobre comportamento, nós falhamos em transmitir o êxtase do fazer pesquisa. Nós raramente descrevemos a emoção de descobrir coisas que ninguém sabia antes. Apesar de que a concepção pública prevalente é de que os cientistas são frios, criaturas lógicas, é fácil de demonstrar que os cientistas são também amantes dos prazeres do mundo. Eles são frequentemente, por exemplo, apreciadores um tanto sofisticados e ainda são participantes dos mundos da música, da literatura e das humanidades em geral. O que os cientistas parecem relutantes em reconhecer, no entanto, é a poesia naquilo que eles mesmos fazem, a poesia que é intrínseca ao processo de descoberta.” (Sidman, 2007)

---

<sup>13</sup> “Tactics of Scientific Research: Evaluating Experimental Data in Psychology” (Sidman, 1960), “Neuroanatomy: A Programmed Text” (Sidman; Sidman, s.d.), “Coercion and Its Fallout” (Sidman, 1989), “Equivalence Relations: A Research Story” (Sidman, 1994).

## 4 AS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA E AS RELAÇÕES DE ESTÍMULOS SEGUNDO SAUNDERS E GREEN (1992)

Após os estudos bibliográficos, conseguimos entender o momento em que as coisas se intersectam, onde a matemática e a psicologia podem se encontrar. Murray Sidman e seus colegas ((Sidman, 1971) e (Sidman; Tailby, 1982)), investigaram os treinamentos de discriminações condicionais utilizando o pareamento por modelo. Para isso, foram desenvolvidos testes comportamentais específicos com o objetivo de verificar se as relações entre estímulos apresentavam as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, características que tornam essas relações, denominadas de Relações de Estímulos, análogas a uma estrutura matemática, as Relações de Equivalência.

Por Saunders e Green (1992), para a realização das discriminações condicionais, os sujeitos serão ensinados a responder aos estímulos de comparação de acordo com o estímulo modelo apresentado. Quando as comparações propostas pelo experimentador são idênticas, em algumas características físicas das amostras, o procedimento é chamado de *matching-to-sample* de identidade. Em seu estudo sobre o desenvolvimento da leitura e de sua compreensão de leitura, Sidman (1971) utilizou os procedimentos de *matching-to-sample* para ensinar várias discriminações condicionais com estímulos que não eram tão semelhantes. Ele ensinou um adolescente com deficiência intelectual a relacionar as imagens de objetos à forma como nos referimos a eles oralmente, e a associar às palavras escritas as palavras faladas a eles. E assim o adolescente relacionou as palavras escritas às imagens correspondentes e sua inversa,

As palavras escritas e as imagens estavam relacionadas apenas por suas relações treinadas com estímulos comuns, as palavras ditadas. Sidman (1971) caracterizou o desempenho emergente como “equivalência” entre os estímulos, porque os estímulos foram “relacionados” apesar de suas diferenças físicas.

A abordagem matemática, tem sido útil para definir os testes de comportamento que auxiliam na formação das classes de equivalência. Fields, Verhave e Fath (1984) disseram que Sidman e Tailby (1982), propuseram que os estímulos, necessariamente, devem ser reflexivos, simétricos e transitivos. Além disso, Fields e Verhave (1987) sugeriram que o desempenho emergente entre as pessoas, que realizam os testes, serão determinados pelas relações reflexivas, simétricas e transitivas, e que isso dependerá do tipo de teste realizado. Além disso, os resultados em testes simultâneos de transitividade e simetria irão indicar que o desempenho será controlado pelas relações de equivalência. A problemática disso, segundo Saunders e Green (1992), é que usados estes termos, cria-se uma falsa impressão de que uma classe de equivalência é composta por cinco tipos diferentes de relações condicionais: relações treinadas, reflexivas, simétricas, transitivas e relações de equivalência.

Sidman e Tailby (1982) explicam que os testes realizados possuem o objetivo de verificar se as relações formadas demonstraram as três propriedades fundamentais de uma relação de equivalência, isto é, reflexividade, simetria e transitividade. Quando os testes possuem resultados

positivos, é permitido concluir que as relações (quando treinadas) não apenas apresentam essas propriedades, mas também formam classes de estímulos equivalentes, unindo diferentes estímulos em um grafo interconectado, como visto nas figuras 3 e 5. Isso também nos garante que os estímulos sejam tratados de forma equivalente, mesmo quando as relações entre eles não foram, de forma direta, treinadas.

Saunders e Green (1992), em seu estudo denominado “*The nonequivalence of behavioral and mathematical equivalence*”, pontuam algumas diferenças entre os modelos matemáticos e os modelos comportamentais de equivalência. Um destes apontamentos é dado pela análise das relações entre estímulos, conforme discutido por eles, utilizamos um modelo matemático que avalia essas relações de maneira individual e direta, considerando apenas dois elementos por vez e ignorando quaisquer outros pares de variáveis/estímulos, existentes. Para determinar se essa relação entre duas variáveis pode ser classificada como uma relação de equivalência, é necessário verificar se ela apresenta as seguintes propriedades:

- **Reflexividade:** cada elemento está relacionado a si mesmo (Exemplo: “A é igual a A”);
- **Simetria:** se o elemento A está relacionado a B, então B também está relacionado a A (Exemplo: se “ $A = B$ ”, então “ $B = A$ ”);
- **Transitividade:** se o elemento A está relacionado a B, e B está relacionado a C, então A está relacionado a C (Exemplo: se “ $A = B$ ” e “ $B = C$ ”, então “ $A = C$ ”).

Essas propriedades são essenciais para determinar se a relação entre os estímulos pode ser considerada de equivalência. No entanto, o modelo matemático avalia exclusivamente as relações entre pares de elementos isolados, sem levar em conta possíveis interações ou influências de outros estímulos. Um exemplo disso pode ser encontrado na definição de relação de equivalência. Como vista a seguir:

**Exemplo 4.1.** Suponha que temos um conjunto  $S$  e uma relação de equivalência  $R$  definida sobre  $S$ . Essa relação irá avaliar apenas os pares de elementos  $(a, b)$  de forma isolada, verificando as propriedades de uma relação de equivalência, dadas por: propriedade reflexiva ( $aRa$ ), simétrica ( $aRb \Rightarrow bRa$ ) e transitiva ( $aRb$  e  $bRc \Rightarrow aRc$ ).

No entanto, não será levado em consideração influências externas ou interações indiretas que possam existir no conjunto. Por exemplo, se tivermos uma relação de equivalência entre números inteiros baseada na congruência módulo  $n$  (ou seja,  $a \equiv b \pmod{n}$ ), o modelo avaliará cada par  $(a, b)$  de forma independente, não considerando, por exemplo, se há outras estruturas algébricas no conjunto que possam influenciar as relações, como a multiplicatividade em congruências ou padrões que surgem ao analisar subconjuntos específicos. Isso mostra como o modelo matemático, ao focar em pares isolados, pode não capturar completamente todas as interações existentes dentro do sistema.

[Saunders e Green \(1992\)](#) argumentam que, quando a análise é realizada sob o modelo comportamental, ela se torna mais complexa e abrangente, pois considera as relações dentro de um contexto mais amplo, em vez de avaliá-las isoladamente. Nesse modelo, reconhece-se que o comportamento do indivíduo pode ser influenciado por diversos estímulos e pelas condições às quais ele está submetido durante o treinamento. A resposta a um estímulo de comparação pode ser determinada não apenas pela relação direta com o estímulo modelo, mas também pela interação com outros estímulos apresentados, incluindo aqueles que não são a escolha correta no momento.

Por [Saunders e Green \(1992\)](#), ao falarmos de Relações Condicionais e Testes de Equivalência, temos que a análise dessas relações, podem ser feitas, tanto através do olhar voltado para a matemática quanto para o olhar da psicologia. Eles evidenciam, que quando analisamos pelo olhar da matemática, vemos as relações de equivalência de forma estrita, e quando falamos de reflexividade, da simetria e da transitividade, temos um resultado esperado: se essas propriedades forem satisfeitas, então temos uma relação de equivalência. E uma vez que observamos estes padrões, podemos estendê-lo por todo o conjunto em questão. Porém, pela análise comportamental, segundo eles, quando se é obtido uma resposta correta pelo indivíduo testado, sugere uma relação de equivalência entre os estímulos testados, contudo, nem sempre que uma resposta ocorrer ela irá indicar que o indivíduo está, de fato, respondendo a ela pela razão ou motivação que se espera. Em algumas situações, o indivíduo pode estar estabelecendo uma relação condicional alternativa, a qual envolve os estímulos incorretos. Este controle de estímulos mostra que a resposta pode ser fruto de um padrão em que a diferença entre os estímulos, e não a sua similaridade, irá guiar o comportamento e as reações do sujeito.

O conceito de relações de equivalência e as partições, tem diferentes abordagens. [Saunders e Green \(1992\)](#) nos diz que a formação de relações de equivalência em uma análise matemática será definida através da divisão de um conjunto de elementos, em subconjuntos, onde serão agrupados elementos que compartilhem características. Já o processo de partição será quando cada elemento do conjunto pertença a um único subconjunto, sem que haja uma intersecção entre eles. Segundo eles, o modelo comportamental irá nomear as relações de equivalência por classes de equivalência, e para elas, em um experimento de análise comportamental, será esperado que o participante forme múltiplas destas classes a partir dos estímulos apresentados. Porém, essa formação das classes de equivalência pode ser influenciada por inúmeros fatores, como por exemplo os padrões de treinamentos utilizados ou até mesmo a maneira como o indivíduo irá processar e interpretar as relações formadas pelos estímulos. Neste momento, o indivíduo pode tratar os estímulos como parte de uma única classe de equivalência, o que diferirá da estrutura bem definida do conceito matemático, destacando a complexidade e a variabilidade existente no processo de aprendizagem e formação de percepções dos seres vivos.

A relação entre as amostras e os estímulos incorretos, denominados por  $S^-$ , no contexto matemático, por [Saunders e Green \(1992\)](#), a análise no contexto problemático, de relações entre os elementos em testes de equivalência, foca apenas nos elementos corretos e nas relações diretas

entre eles, não levando em conta a existência de elementos incorretos, o  $S^-$ , pois o objetivo é a verificação das relações entre os estímulos que dividem características específicas. Neste contexto, não há elementos equivalentes ao  $S^-$ . O foco está inteiramente na avaliação das propriedades analisadas para a formação dos estímulos corretos, ignorando qualquer estímulo que não se encaixe diretamente nas relações testadas. Já no modelo comportamental, [Saunders e Green \(1992\)](#) evidencia a importância de se analisar a relação entre o estímulo de amostra e o estímulo incorreto  $S^-$  para podermos compreender o comportamento do sujeito. Nas situações de aprendizado ou de escolha, o indivíduo pode não estar respondendo pela associação direta entre a amostra e o estímulo correto ( $S^+$ ), mas pode ser influenciada pela presença do  $S^-$  e pela forma desenvolvida de evitar este estímulo. Neste caso, o sujeito aprende a fazer a escolha correta não só pela identificação do  $S^+$ , mas também pela exclusão do  $S^-$ . Isso adiciona uma nova análise ao comportamento, já que a resposta correta pode ser derivada de uma interação entre a amostra, o estímulo correto ( $S^+$ ) e o estímulo incorreto ( $S^-$ ).

A emergência gradual de equivalência é mais uma das situações onde as abordagens matemática e comportamental diferem no momento da compreensão de relações de equivalência. Por [Saunders e Green \(1992\)](#) a matemática terá as relações de equivalência fixas e invariáveis, pois ao ser estabelecida, ela permanecerá constante, ou seja, quando dois elementos são considerados equivalentes dentro de um determinado conjunto, essa equivalência será imediata e absoluta. Não há um processo de transição ou um desenvolvimento gradual, a relação de equivalência é estabelecida de maneira definitiva desde o início.

Já na análise comportamental, [Saunders e Green \(1992\)](#) diz que essas relações serão formadas gradualmente, onde a equivalência não tem a necessidade de se emergir imediatamente após o treinamento inicial. Isso porque o indivíduo será submetido a diferentes testes repetitivos, e com isso as relações irão surgindo. Em outras palavras, as relações equivalentes podem emergir ao longo do tempo, através de tentativas sucessivas e repetidas no treinamento. Esse processo gradual reflete-se no desenvolvimento do comportamento humano. Nele, a aprendizagem e a generalização de conceitos não ocorrem de imediato, mas se consolidam progressivamente, conforme o sujeito adquire experiência e exposição ao ambiente.

Os problemas com testes de reflexividade, por [Saunders e Green \(1992\)](#), podem ser entendidos através de duas perspectivas: a matemática e a comportamental. No contexto matemático, a reflexividade é uma propriedade fundamental, se não a mais importante, já que ela garante que cada elemento esteja relacionado a ele mesmo.

Ao considerarmos um conjunto com apenas um único elemento, no qual se tem uma relação reflexiva, garantimos que as outras relações, de simetria e de transitividade, também ocorrerão, formando assim, uma relação de equivalência e neste caso o nosso único elemento é sua própria classe de equivalência.

Porém no âmbito comportamental, segundo [Saunders e Green \(1992\)](#) os testes de reflexividade se tornam mais complexos. Neste contexto, a reflexividade refere-se à capacidade de um indivíduo reconhecer um estímulo como relacionado a si mesmo. No entanto, essa identificação

nem sempre é simples, especialmente quando os estímulos envolvidos não são perceptivelmente semelhantes.

Um dos desafios nesse contexto, é que o sujeito pode responder reflexivamente com base em características físicas dos estímulos, mesmo quando estas não são, de fato, relevantes para a tarefa. Por exemplo, quando dois estímulos compartilham uma semelhança física evidente, o sujeito pode de forma errada considerá-los como equivalentes, levando a uma falsa percepção da reflexividade. Respostas como essas podem distorcer os resultados e levar a interpretações equivocadas sobre a equivalência de estímulos. Além disso, os testes de reflexividade, na análise do comportamento podem não ser tão precisos ou consistentes quanto os testes de outras propriedades, como simetria e transitividade. Enquanto a simetria envolve a capacidade de um sujeito reconhecer que se  $A$  está relacionado a  $B$ , então  $B$  deve estar relacionado a  $A$ , e a transitividade envolve reconhecer que se  $A$  está relacionado a  $B$  e  $B$  está relacionado a  $C$ , então  $A$  deve estar relacionado a  $C$ , a reflexividade é mais vulnerável a interferências perceptuais. Embora seja uma propriedade relativamente simples no modelo matemático e essencial para podermos estabelecer uma relação de equivalência, sua aplicação e interpretação no campo comportamental requer uma análise muito cuidadosa. Testes de reflexividade, se não forem conduzidos com cuidado, podem não capturar com precisão as mesmas relações observadas nos testes de simetria e transitividade, resultando em conclusões que não refletem com exatidão a verdadeira natureza das relações entre os estímulos.

Segundo [Saunders e Green \(1992\)](#), quando as classes de equivalência não surgem como esperado, é importante entender que essa questão pode ser abordada tanto do ponto de vista matemático quanto comportamental, e cada um desses campos lida com o problema de maneiras diferentes. Se uma relação não atende a uma dessas propriedades, ela não pode ser considerada uma relação de equivalência, e, conseqüentemente, as classes de equivalência não se formam.

Por outro lado, [Saunders e Green \(1992\)](#) no campo comportamental, dizem que a ausência imediata de classes de equivalência é interpretada de maneira mais complexa. Quando os sujeitos de um experimento comportamental não apresentam classes de equivalência de forma espontânea, isso não significa necessariamente que as relações treinadas não podem evoluir para se tornarem equivalências. É comum notarmos uma mudança gradual no desempenho dos sujeitos ao longo da realização dos testes propostos. Essa mudança pode indicar que as relações que estão sendo treinadas formam-se lentamente, ou que os sujeitos estão aprendendo a transformar o seu comportamento com base nas contingências do experimento. Em outras palavras temos que, quando um indivíduo não apresenta as classes de equivalência de forma imediata, ele pode, à medida que passa por mais testes, começar a demonstrar uma mudança de comportamento para que seja adequado aos testes realizados. Esse processo pode refletir uma forma de aprendizado emergente, onde o sujeito irá desenvolver uma compreensão das relações equivalentes ao longo do tempo, em vez de apresentá-las de forma imediata.

As diferenças entre os modelos matemático e comportamental de equivalência evidenciam divergências significativas em suas abordagens, implicações e resultados. O modelo matemático,

com sua abordagem lógica e sistemática, trata as relações de equivalência de maneira previsível e estruturada, sendo fundamental para fornecer uma base rigorosa e objetiva para a análise de equivalências. Sua importância reside na capacidade de oferecer uma estrutura teórica e metodológica clara que facilita a compreensão e a aplicação dos princípios de equivalência em diversos contextos.

Portanto, o modelo comportamental lida com a equivalência de uma forma mais dinâmica e contextual, considerando inúmeras variáveis, como o histórico de reforçamento, o controle de estímulos e a interação entre múltiplos estímulos. Esses fatores irão introduzir uma complexidade a mais, tornando a equivalência comportamental um fenômeno menos previsível e mais suscetível a certas influências.

Por conta do aspecto flexível que a equivalência comportamental carrega, podem aparecer resultados inesperados, os quais não se alinham com as previsões baseadas apenas em modelos matemáticos e por conta disso, a análise da equivalência comportamental requer uma abordagem cuidadosa e multifacetada para evitar interpretações incorretas sobre o controle de estímulos e a formação de classes de equivalência. A compreensão desses aspectos é essencial para uma avaliação precisa e para a aplicação eficaz dos princípios da teoria comportamental. Um exemplo prático pode ser observado em uma situação em que uma criança está aprendendo a identificar números em uma atividade escolar. Após ser ensinada a identificar corretamente o número “3, 7 e 8”, ela começa a acertar os outros números, não porque reconhece os certos, mas porque consegue identificar os errados, e assim eliminá-los. Ou seja, a criança não sabe o número correto, mas sabe que aquele número está errado e, com base nisso, escolhe a opção certa, o que demonstra como o comportamento de eliminação pode ser transferido de forma inesperada para o reconhecimento correto.

Esta comparação, entre a Relação de Equivalência e a Equivalência de Estímulos pode ser resumida através de uma tabela comparativa entre as propriedades de cada uma das teorias, e podemos observá-la a seguir:

<b>Propriedade</b>	<b>Relação de Equivalência</b>	<b>Equivalência de Estímulos</b>
<b>Reflexividade</b>	Se aplica	Se aplica
<b>Simetria</b>	Se aplica	Se aplica
<b>Transitividade</b>	Se aplica	Se aplica

Tabela 1 – Comparação entre as propriedades da Relação de Equivalência e as propriedades da Equivalência de Estímulos. Fonte: Elaborado pela autora.

## 5 TEORIA DAS MOLDURAS RELACIONAIS

A Teoria das Molduras Relacionais, conhecida por RFT - *Relational Frame Theory*, é uma abordagem analítica-comportamental, ou seja, uma abordagem que busca entender a relação do indivíduo com o meio que o cerca, pois os problemas que apresenta são oriundos dessas relações, que buscam trazer uma explicação de como os seres humanos desenvolvem e utilizam a linguagem e a cognição. Proposta por Hayes, Barnes-Holmes e Roche (2001), a RFT sugere que a habilidade de uma pessoa em criar relações arbitrárias entre estímulos, é arbitrária no sentido de que os estímulos não são relacionados apenas por propriedades físicas, mas também por propriedades “simbólicas” estabelecidas pela comunidade verbal, sendo fundamental para a compreensão do comportamento verbal e cognitivo. Além de que a Teoria das Molduras Relacionais representa um avanço na análise do comportamento verbal, já que nos oferece uma explicação baseada em princípios comportamentais para os fenômenos envolvendo a linguagem e a cognição (Hayes; Barnes-Holmes; Roche, 2001).

Fundamentada no Contextualismo Funcional<sup>14</sup>, a RFT, busca descrever e prever o comportamento humano por meio do ato de responder, classificado por “Responder Relacional Arbitrariamente Aplicável” (RRAA), um operante generalizado que permite que estímulos adquiram funções indiretamente, sem a necessidade de exposição direta às contingências operantes ou respondentes (Perez *et al.*, 2013)

Um dos conceitos centrais da RFT é o de Respostas Relacionais Arbitrariamente Aplicadas (RRAA), ao qual refere-se à capacidade de uma pessoa relacionar diferentes estímulos de maneira arbitrária, ou seja, a capacidade de uma pessoa em relacionar estímulos independentemente de suas propriedades físicas diretas (Hayes; Barnes-Holmes; Roche, 2001). Podemos analisar este conceito através de um exemplo, ao aprendermos uma nova palavra, no nosso caso a palavra maçã, temos que ela se refere a uma fruta específica, com uma aparência e sabor próprio. Ao buscarmos relacionar o som da palavra ao objeto físico, estamos aplicando este conceito. Essa habilidade de relacionar coisas nos permite a formação de redes complexas de significados, os quais são essenciais em alguns processos importantes para a comunicação, como por exemplo, entendimento de analogias, metáforas e inferências (Torneke, 2010).

Dentre as propriedades fundamentais do RRAA, temos duas implicações importantes – a implicação mútua e a implicação mútua combinatória – e uma transformação de função. A implicação mútua, refere-se ao fato de que se um indivíduo aprende que *A* está relacionado com *B*, ele infere de forma quase automática que *B* está relacionado a *A*. A implicação combinatória, ocorre quando relações aprendidas entre diferentes pares de estímulos, são combinadas para formarem novas relações que derivam dessas já aprendidas. Já a transformação de função vem para descrever como as propriedades comportamentais de um estímulo podem se modificar com

<sup>14</sup> Uma filosofia subjacente à Teoria das Molduras Relacionais (RFT), que entende o comportamento humano a partir das interações entre o organismo e seu contexto. Em vez de buscar significados fixos, essa abordagem foca na função que um comportamento tem em determinado contexto, permitindo prever e influenciar a aprendizagem e a linguagem de forma dinâmica e flexível.

base nas relações das quais ele participa, sendo essencial para compreender como os símbolos e as palavras adquirem significados (Barnes-Holmes; Hussey *et al.*, 2016).

Porém, para que ocorra a aquisição do RRAA, os autores da RFT deixam enfatizado que o estabelecimento desse importante operante inicia-se com o aprendizado do Responder Relacional não Arbitrário, ou seja, responder a uma relação entre estímulos com base em suas propriedades físicas. Hayes, Barnes-Holmes e Roche (2001) apontam que relacionar é “responder a um evento nos termos de outro” (p. 25) e que “a maioria dos organismos, dado um treino apropriado, é capaz de responder a relação entre propriedades físicas de dois ou mais estímulos” (p. 24). Além de afirmarem que as pessoas recebem esse treino apropriado desde muito cedo, e que essas contingências necessárias são dispostas pela comunidade verbal.

A RFT identifica diferentes tipos de moldes relacionais, como equivalência, oposição, comparação, hierarquia, entre outras. Podemos tomar como exemplo para a moldura de comparação, uma pessoa poder compreender que “maior que” e “menor que” são relações que comparam dois estímulos, em termos de quantidade ou tamanho (Barnes-Holmes; Barnes-Holmes; Cullinan, 2005). Essas molduras são aprendidas pelo ser humano através de interações sociais e culturais, desempenhando um papel crucial na forma como eles irão interpretar e responder ao mundo que existe em seu redor.

A Teoria das Molduras Relacionais tem aplicações práticas, sendo um dos pilares da ACT - Terapia de Aceitação e Compromisso<sup>15</sup>, que visa ajudar os indivíduos a desenvolver flexibilidade psicológica ao modificar as relações que estabelecem entre pensamentos, emoções e comportamentos (Hayes; Strosahl; Wilson, 2012), uma abordagem clínica que procura promover a flexibilidade psicológica ao modificar a maneira como os indivíduos interagem com seus próprios pensamentos e emoções. A ACT, sugere que o sofrimento psicológico decorre, em parte, do controle excessivo do comportamento por funções dos estímulos derivados, o que nos leva a padrões severos de esquiva experiencial. Além disso, técnicas como a defusão cognitiva são desenvolvidas com base na RFT para ajudar os indivíduos a responderem de maneira mais flexível e seus eventos internos, reduzindo a influência de pensamentos disfuncionais sobre o comportamento (Mello; Almeida, 2021).

Além deste campo de atuação, campo clínico, a RFT contribui para a educação e o desenvolvimento de habilidades linguísticas. O ensino sistemático de relações derivadas pode facilitar a aprendizagem de conceitos complexos, permitindo a transferência de funções entre os estímulos de maneiras mais eficientes. Essa abordagem tem sido explorada em programas educacionais com um olhar para o desenvolvimento da linguagem e da leitura, o que utiliza estratégias baseadas no fortalecimento de molduras relacionais específicas (Perez *et al.*, 2013).

<sup>15</sup> A Terapia de Aceitação e Compromisso (Acceptance and Commitment Therapy - ACT) é uma abordagem da psicoterapia que visa desenvolver a flexibilidade psicológica, ajudando as pessoas a aceitarem pensamentos e emoções difíceis sem serem dominadas por eles, em vez de tentar eliminar o sofrimento, a ACT incentiva a aceitação, a atenção plena e a ação comprometida com valores pessoais. Seus seis pilares incluem aceitação, defusão cognitiva, presença no momento, eu como contexto, valores e ação comprometida. É eficaz no tratamento da ansiedade, depressão, dor crônica e outros transtornos, promovendo uma vida mais significativa.

Por fim, temos que a RFT incorpora-se ao movimento das Ciências Comportamentais Contextuais (CBS), que propõe um modelo estruturado para a sintetização do conhecimento. Embora a RFT tenha avançado consideravelmente na compreensão do comportamento verbal, desafios ainda permanecem, especialmente no refinamento conceitual de termos intermediários utilizados na ACT e na validação experimental de alguns de seus pressupostos (Barnes-Holmes; Hussey *et al.*, 2016).

Dessa forma, a Teoria das Molduras Relacionais, se apresenta como um marco no estudo da cognição e da linguagem, oferecendo um modelo estruturado e empiricamente fundamentado para auxiliar na compreensão de como os seres humanos constroem significados e interagem com o mundo através da linguagem e da cognição, destacando a importância das relações arbitrárias e contextuais no comportamento humano.

## 5.1 SOBRE OS DESENVOLVEDORES DA TEORIA

Steven C. Hayes, Dermot Barnes-Holmes e Bryan Roche são os pioneiros da Teoria das Molduras Relacionais (RFT), uma abordagem que revoluciona a forma como entendemos a linguagem e a cognição humanas. A RFT sugere que a linguagem humana não é apenas um meio de troca de informações, mas um sistema complexo de relações simbólicas que molda a forma como as pessoas percebem e interagem com o mundo ao seu redor. Hayes, em colaboração com Barnes-Holmes e Roche, formulou e refinou os princípios da teoria, propondo que a capacidade de relacionar palavras e outros estímulos de maneira flexível é central para o funcionamento cognitivo e comportamental, enfatizando o papel das relações simbólicas, conferindo significado às experiências individuais.

Além de seus impactos teóricos, Hayes, Barnes-Holmes e Roche foram fundamentais na aplicação da RFT a contextos terapêuticos, contribuindo para o desenvolvimento da Terapia de Aceitação e Compromisso (ACT), uma intervenção psicológica baseada em evidências que utiliza conceitos da RFT para ajudar os indivíduos a lidarem com questões como ansiedade, depressão e outros distúrbios emocionais. Essa terapia foca na aceitação de pensamentos e sentimentos difíceis, ao invés de uma luta contra eles, e promove uma mudança de comportamento por meio da conscientização das relações entre esses pensamentos e as ações dos indivíduos. Combinando a teoria com práticas terapêuticas inovadoras, esses pesquisadores transformaram não apenas a compreensão da cognição humana, mas também a forma como abordamos o tratamento de distúrbios psicológicos, oferecendo novas perspectivas para a promoção do bem-estar e da saúde mental.

### 5.1.1 Steven C. Hayes

Steven C. Hayes nasceu em 12 de agosto de 1948. É um psicólogo clínico americano e professor emérito da Universidade de Nevada, Reno, no Departamento de Psicologia, tendo integrado

o programa de Análise do Comportamento. Hayes é amplamente reconhecido por desenvolver a Teoria das Molduras Relacionais (*Relational Frame Theory* - RFT), uma abordagem inovadora para compreender a linguagem e a cognição humanas. Além disso, ele é co-desenvolvedor da Terapia de Aceitação e Compromisso (*Acceptance and Commitment Therapy* - ACT), uma forma de psicoterapia baseada em evidências que utiliza métodos de *mindfulness*<sup>16</sup>, aceitação e valores pessoais.



Figura 9 – Retrato de Steven C. Hayes disponibilizado por Hayes (n.d.).

Hayes obteve seu Bacharelado em Psicologia pela *Loyola Marymount University* em Los Angeles e, posteriormente, seu Mestrado e Doutorado em Psicologia Clínica pela *West Virginia University*. Após concluir seu estágio clínico sob a supervisão de David Barlow<sup>17</sup> na Escola de Medicina da Universidade Brown, ele iniciou sua carreira acadêmica na Universidade da Carolina do Norte em Greensboro. Em 1986, tornou-se professor no Departamento de Psicologia da Universidade de Nevada, Reno.

Ao longo de sua carreira, Hayes publicou 47 livros e aproximadamente 700 artigos científicos. Seu trabalho tem sido amplamente reconhecido, e ele está classificado entre os

<sup>16</sup> O método de *mindfulness* (ou atenção plena) é uma prática psicológica que envolve prestar atenção de maneira intencional e sem julgamentos ao momento presente. A ideia central é estar totalmente ciente das sensações, pensamentos e emoções que surgem, aceitando-os sem tentar modificá-los ou evitá-los. A prática de *mindfulness* tem raízes na tradição budista, mas foi adaptada para a psicologia moderna e é usada como ferramenta terapêutica em diversas abordagens, como a Terapia Cognitiva Baseada em *Mindfulness* (MBCT) e a Terapia de Aceitação e Compromisso (ACT). Em contextos terapêuticos, *mindfulness* ajuda a reduzir o estresse, a ansiedade e a depressão, promovendo maior autoconsciência, regulação emocional e foco. Ela pode ser praticada por meio de meditação formal, onde a pessoa foca a atenção na respiração ou em outras sensações físicas, ou de maneira informal, ao integrar a atenção plena nas atividades diárias.

<sup>17</sup> David Barlow é um psicólogo que se destacou por seu trabalho na área da Psicologia Comportamental, com foco especial na Terapia de Aceitação e Compromisso (ACT). Ele tem uma longa trajetória na psicologia, sendo uma figura importante no desenvolvimento de abordagens terapêuticas que visam ajudar os indivíduos a lidarem com suas emoções, pensamentos e comportamentos de maneira mais flexível e adaptativa. Barlow é conhecido por suas pesquisas sobre como melhorar o bem-estar psicológico por meio de técnicas de aceitação e mudança de comportamentos, ajudando as pessoas a se engajarem em ações que estejam alinhadas com seus valores pessoais, mesmo diante de dificuldades emocionais.

psicólogos mais citados no mundo. Hayes também ocupou posições de liderança em diversas organizações científicas e profissionais, incluindo a presidência da *Association for Behavioral and Cognitive Therapies* e da *Association for Contextual Behavioral Science*. Seus esforços foram reconhecidos com vários prêmios, como o *Lifetime Achievement Award* da *Association for Behavioral and Cognitive Therapies* e o *Impact of Science on Application Award* da *Society for the Advancement of Behavior Analysis*.

### 5.1.2 Dermot Barnes - Holmes

Dermot Barnes-Holmes é um psicólogo irlandês nascido em 1963. Atualmente, é professor na Escola de Psicologia da *Ulster University* e foi Professor Fundador no Departamento de Psicologia da *National University of Ireland, Maynooth*. Ele é conhecido por sua análise da linguagem e cognição humanas através do desenvolvimento da Teoria das Molduras Relacionais (RFT), em colaboração com Steven C. Hayes e Bryan Roche.



Figura 10 – Retrato de Dermot Barnes-Holmes disponibilizado por [Haslbeck \(2015\)](#).

Barnes-Holmes foi o autor mais prolífico na análise experimental do comportamento humano entre 1980 e 1999. Em 2015, ele aceitou uma posição de professor sênior vitalício na Universidade de Ghent, na Bélgica. Além disso, ele originalmente concebeu e programou o Procedimento de Avaliação Relacional Implícita (*Implicit Relational Assessment Procedure - IRAP*), uma medida implícita que avalia relações específicas entre estímulos, diferenciando-se de medidas como o Teste de Associação Implícita (IAT).

### 5.1.3 Bryan Roche

Bryan Roche é um psicólogo que obteve seu doutorado em 1995. Antes de ingressar na *Maynooth University* em 2000, ele ocupou cargos acadêmicos na *University of Bath*, no Reino Unido, e na *University College Cork*, na Irlanda. Roche é autor de mais de 100 artigos e capítulos de livros revisados por pares, com foco na Teoria das Molduras Relacionais (RFT) e em suas aplicações. Ele coeditou o primeiro texto sobre essa teoria em 2001, que tem sido amplamente

citado na literatura acadêmica.



Figura 11 – Retrato de Bryan Roche disponibilizado por [Roche \(n.d.\)](#).

Além de seu trabalho teórico, Roche desenvolveu uma intervenção de treinamento cognitivo online chamada SMART (*Strengthening Mental Abilities with Relational Training*), baseada na RFT, que demonstrou aumentar o quociente de inteligência (QI) de forma significativa em diversos estudos. Ele também conduz pesquisas sobre medo e esquiva, e desenvolveu um novo teste implícito chamado FAST (*Function Acquisition Speed Test*) para avaliar vieses comportamentais em pesquisas sociais.

## 6 TEORIA DAS MOLDURAS RELACIONAIS DE STEVEN C. HAYES E AS RELAÇÕES DE ORDEM

A Teoria das Molduras Relacionais busca explicar como os seres humanos desenvolvem a linguagem e a cognição por meio da aprendizagem relacional. A teoria parte do pressuposto de que os seres humanos possuem uma habilidade única de relacionar estímulos de maneira arbitrária e contextual, sem a necessidade de reforços diretos ou experiência concreta. Esse fenômeno, chamado de aprendizagem relacional derivada, permite que os indivíduos estabeleçam conexões entre palavras, símbolos e conceitos de forma flexível, resultando em redes altamente complexas de significado. Ela propõe que a linguagem não se baseia apenas em emparelhamentos diretos entre estímulos, mas sim na formação de molduras relacionais que podem seguir diferentes padrões, como equivalência, oposição, comparação e hierarquia. Essa capacidade relacional é essencial para o desenvolvimento da linguagem, do pensamento abstrato, da resolução de problemas e até mesmo de processos emocionais e sociais. A RFT também tem aplicações práticas significativas, sendo a base teórica para abordagens terapêuticas como a Terapia de Aceitação e Compromisso (ACT) e outras intervenções comportamentais voltadas para a flexibilidade psicológica e regulação emocional. Em resumo, a Teoria das Molduras Relacionais representa uma inovação no estudo da linguagem e da cognição, explicando como os humanos criam significados a partir de relações arbitrárias entre estímulos e como esse processo impacta o comportamento e a experiência subjetiva.

A RFT possui três propriedades que a definem: implicação mútua, implicação combinatória e transformação de função. A primeira delas, a implicação mútua, refere-se a relações que possuem uma bidirecionalidade (se  $A - B$ , então  $B - A$ ). A segunda, implicação mútua combinatória, refere-se à derivação de uma relação oriunda de duas relações anteriores que compartilham um de seus termos (se  $A - B$  e  $B - C$ , então  $A - C$ ). A última propriedade, transformação de função, estabelece que um estímulo pode mudar de função de acordo com um outro estímulo ao qual está relacionado pelas implicações mútua ou combinatória. Por exemplo, quando uma fruta  $A$  é relacionada à outra fruta qualquer  $B$  como melhor ou pior.

“O RRAA<sup>18</sup> possui três propriedades que são definidoras: (a) Implicação Mútua (b) Implicação Mútua Combinatória (c) Transformação de Função. Elas são definidoras no sentido em que a observação de qualquer uma delas já é evidência suficiente para considerar uma ocorrência do RRAA. A Implicação Mútua (IM) descreve uma relação entre dois eventos que envolve responder a um evento em termos do outro e vice-versa em um contexto. Se  $A$  está relacionado a  $B$ , então  $B$  está relacionado a  $A$ . As relações específicas envolvidas podem variar. Se a primeira relação é especificada, a segunda é implicada. Por exemplo, se  $A$  for maior que  $B$ , então  $B$  é menor que  $A$ . A Implicação Mútua Combinatória (IC), refere-se a uma relação de estímulo derivado em que duas ou mais relações de estímulo (treinadas ou derivadas) se combinam mutuamente. Ela se aplica quando, em um determinado contexto, se  $A$  está relacionado a  $B$  e  $B$  está relacionado a  $C$ , então, como resultado,  $A$  e  $C$  estão mutuamente relacionados nesse contexto. É provável que a IC, em geral, surja um pouco mais tarde no treinamento de linguagem do que a IM, devido à sua complexidade e histórico de treinamento.

<sup>18</sup> Responder Relacional Arbitrariamente Aplicável, uma unidade da RFT.

As propriedades de IM e IC destacam as relações arbitrárias estabelecidas, mas a resposta relacional é importante porque pode selecionar outras formas de resposta. Assim, a Transformação de Função é compreendida quando um determinado estímulo em uma rede relacional tem certas funções psicológicas, e as funções de outros eventos nessa rede podem ser modificadas de acordo com a relação derivada subjacente. Dadas relações de estímulo arbitrariamente aplicáveis entre A, B e C, e dado um contexto que atualiza a transformação de uma dada função de A, as funções de B e C serão modificadas em termos das relações subjacentes entre A, B e C. Assim, a Transformação de Função de estímulo deve estar sob controle contextual. De acordo com Hayes e colaboradores (2001) as dicas contextuais não apenas estabelecem e indicam as condições particulares sob as quais a atividade relacional ocorre, elas também especificam quais funções devem ser transformadas ou transferidas.” (Bim; Almeida, 2020)

Sendo assim, o Termo Moldura Relacional, foi estabelecido para denominar padrões particulares de respostas relacionais. Segundo Hayes, Barnes-Holmes e Roche (2001) uma moldura relacional é utilizada para denotar uma classe específica de RRAA que mostra as qualidades controladas por suas propriedades Implicação Mútua, Implicação Mútua Combinatória e Transformação de Funções, estabelecidas a partir de resposta a dicas contextuais envolvidas. A palavra Moldura, em seu nome, não é relacionada a uma estrutura, entidade mental ou processo cerebral, e sim representa uma metáfora que se refere a um recurso característico de algumas classes de resposta puramente funcionais (Hayes; Barnes-Holmes; Roche, 2001).

“Assim como um porta-retratos pode conter muitas imagens, uma moldura relacional de respostas pode incluir diferentes características formais e, ao mesmo tempo, ser uma instância definível de um padrão geral. As principais molduras descritas na literatura são: coordenação (semelhança), distinção (diferença), comparação, oposição, hierarquia, temporalidade e tomada de perspectiva/dêitica<sup>19</sup>.” (Bim; Almeida, 2020)

As Relações de Ordem, em suas diversas formas, são estruturas matemáticas que estabelecem uma hierarquia entre elementos de um conjunto, conforme propriedades específicas (Santos Fajardo (2024), Gonçalves (1979) e Hygino e Gelson (2003)). Por outro lado, a Teoria das Molduras Relacionais, um modelo psicológico do comportamento humano baseado na aprendizagem relacional, explica como os indivíduos criam e manipulam relações simbólicas de maneira flexível, indo além de associações diretas para estabelecer padrões complexos de equivalência, oposição e comparação (Hayes; Barnes-Holmes; Roche, 2001).

Apesar de pertencerem a distintas áreas de estudo, ambas compartilham características estruturais. As Relações de Ordem descrevem formalmente hierarquias fixas entre elementos, enquanto a RFT investiga como os humanos desenvolvem relações arbitrárias e contextualmente controladas, demonstrando maior flexibilidade na construção de significado.

Para realizarmos uma comparação entre as Relações de Ordem com a Teoria das Molduras Relacionais, podemos analisar de forma simplificada e resumida as relações de ordem, com suas definições e suas propriedades, e assim temos:

#### (i) Relação de Ordem Parcial

<sup>19</sup> Na expressão “tomada de perspectiva dêitica”, o termo “dêitica” refere-se à dependência do contexto na mudança de perspectiva, como quando alguém se coloca no lugar do outro para compreender sua visão.

- **Definição:** Se  $aRb$ , então pode ocorrer que nem sempre  $bRa$ ;
- **Propriedades:** Reflexiva, Antissimétrica, Transitiva;
- **Exemplo:** A inclusão de subconjuntos, em que  $A \subset B$ .

(ii) **Relação de Ordem Parcial Estrita**

- **Definição:** Se  $aRb$ , então **nunca**  $bRa$  e nunca  $aRa$ ;
- **Propriedades:** Irreflexiva, Assimétrica, Transitiva;
- **Exemplo:** A relação “é menor que” ( $<$ ) entre números. Se  $3 < 5$ , então nunca temos  $5 < 3$  e nunca  $3 < 3$ .

(iii) **Relação de Ordem Total**

- **Definição:** Para quaisquer dois elementos  $a, b$ , sempre temos **ou**  $aRb$  ou  $bRa$ ;
- **Propriedades:** Reflexiva, Antissimétrica, Transitiva, Totalidade;
- **Exemplo:** A ordenação numérica dos números reais. Sempre podemos dizer que  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ .

Agora, analisando a Teoria de Molduras Relacionais, de forma simplificada e resumida, com suas definições e suas propriedades, temos:

(i) **Teoria das Molduras Relacionais (RFT)**

- **Definição:** A RFT é uma teoria do comportamento humano que explica como os indivíduos aprendem e manipulam relações entre estímulos de maneira arbitrária e simbólica, indo além da simples associação direta;
- **Propriedades:** Implicação Mútua, Implicação Mútua Combinatória, Transformação de Função;
- **Exemplo:** Se uma criança aprende que “A é maior que B” e “B é maior que C”, ela pode inferir, sem treinamento direto, que “A é maior que C”. Esse tipo de relação derivada é um exemplo de aprendizado relacional explicado pela RFT.

Comparando as propriedades de nossas diferentes Relações de Ordem e de nossa Teoria de Molduras Relacionais (RFT), temos:

<b>Propriedade</b>	<b>Ordem Parcial</b>	<b>Ordem Parcial Estrita</b>	<b>Ordem Total</b>	<b>Teoria de Molduras Relacionais</b>
<b>Reflexividade</b>	Se aplica	Não se aplica	Se aplica	Não obrigatória
<b>Irreflexividade</b>	Não se aplica	Se aplica	Não se aplica	Não se aplica
<b>Antissimetria</b>	Se aplica	Não se aplica	Se aplica	Não se aplica
<b>Assimetria</b>	Não se aplica	Se aplica	Não se aplica	Implicação Mútua
<b>Transitividade</b>	Se aplica	Se aplica	Se aplica	Implicação Mútua Combinatória
<b>Totalidade</b>	Não se aplica	Não se aplica	Se aplica	Não se aplica
<b>Implicação Mútua</b>	Não se aplica	Assimetria	Não se aplica	Se aplica
<b>Implicação Mútua Combinatória</b>	Transitividade	Transitividade	Transitividade	Se aplica
<b>Transformação de Função</b>	Não se aplica	Não se aplica	Não se aplica	Se aplica

Tabela 2 – Comparação entre as propriedades das diferentes Relações de Ordem e a Teoria de Molduras Relacionais (RFT). A tabela destaca como determinadas propriedades se aplicam ou não a cada tipo de relação. Em alguns casos, em vez das expressões “Se aplica” ou “Não se aplica”, são mencionadas outras propriedades, evidenciando equivalências conceituais entre diferentes teorias. Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, enquanto as relações de ordem fornecem um modelo formal e axiomático para estruturar elementos em um espaço matemático, a Teoria das Molduras Relacionais explica como os humanos formam e modificam essas relações em um nível psicológico e linguístico. A RFT, ao flexibilizar a transitividade e rejeitar a antissimetria, permite uma compreensão mais ampla da cognição humana, demonstrando que as relações entre elementos não são apenas fixas e formais, mas também dinâmicas e influenciadas pelo contexto.

As Relações de Ordem e a Teoria das Molduras Relacionais (RFT) compartilham certas características estruturais, mas pertencem a domínios distintos: a matemática e a psicologia. Enquanto as relações de ordem são amplamente estudadas na lógica e na teoria dos conjuntos para estabelecer estruturas hierárquicas entre elementos, a RFT busca compreender como os

seres humanos formam e manipulam relações simbólicas no pensamento e na linguagem.

Uma relação de ordem é definida matematicamente como um conjunto de pares ordenados que satisfazem propriedades específicas, como reflexividade, transitividade e, em alguns casos, antissimetria. Em uma ordem parcial, nem todos os elementos são comparáveis, enquanto em uma ordem total, qualquer par de elementos pode ser relacionado. Essas propriedades garantem que as relações de ordem sejam bem estruturadas e previsíveis, permitindo sua aplicação em diversas áreas da matemática, como a teoria dos números e a álgebra abstrata. Por outro lado, a Teoria das Molduras Relacionais propõe que os seres humanos aprendem a estabelecer relações entre estímulos de maneira arbitrária, independentemente de experiências diretas. Um dos princípios fundamentais da RFT é a mutualidade ou bidirecionalidade, que implica que, se um indivíduo aprende que “A está para B”, ele automaticamente infere que “B está para A”. Além disso, a implicação mútua combinatória permite que, ao estabelecer uma relação entre “A e B” e outra entre “B e C”, o indivíduo conclua que “A está para C”. Essa estrutura lembra a transitividade das relações de ordem, mas na RFT a aplicação é flexível e baseada na cognição e no aprendizado verbal. Outra característica importante da teoria é a transformação da função do estímulo, que explica como a relação entre elementos pode alterar a percepção e o comportamento de um indivíduo.

Apesar dessas semelhanças estruturais, há diferenças significativas entre as duas abordagens. As relações de ordem são rigidamente definidas e seguem regras lógicas precisas, como a antissimetria, que impede que dois elementos distintos estejam simultaneamente em relação um com o outro. Já a RFT opera em um nível mais abstrato e adaptativo, permitindo que as relações entre estímulos sejam modificadas conforme o contexto e a experiência individual. Enquanto a matemática busca a formalização e a previsibilidade, a RFT enfatiza a flexibilidade cognitiva e a capacidade humana de construir significados simbólicos. Dessa forma, embora as relações de ordem e a Teoria das Molduras Relacionais compartilhem conceitos como transitividade e a ideia de relações entre elementos, seus objetivos e aplicações são fundamentalmente diferentes. A matemática oferece uma base estrutural rígida para descrever relações, enquanto a RFT explica como os humanos estabelecem e modificam essas relações em contextos variados, demonstrando que a cognição opera de maneira dinâmica e sensível ao significado simbólico.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este estudo, buscamos um maior aprofundamento e compreensão das Relações de Equivalência e das Relações de Ordem de diferentes formas, no âmbito matemático, buscamos também, a criação de uma ponte com alguns conceitos psicológicos, entre eles o Modelo de Equivalência de Estímulos e a Teoria das Molduras Relacionais (RFT). A análise comparativa dessas abordagens nos revelou algumas semelhanças estruturais, mas diferenças conceituais também.

Iniciamos com a comparação entre as Relações de Estímulos e as Relações de Equivalência, e aqui pudemos observar que ambas as abordagens envolvem a formação de associações entre diferentes elementos. No entanto, a Relação de Equivalência, no sentido matemático, possui uma rigorosidade definida pelas propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, resultando na organização sistemática dos elementos em classes bem delimitadas, além de que quando alguma de suas propriedades não ocorre, não temos a nossa Relação de Equivalência. Em contrapartida, no Modelo de Equivalência de Estímulos, a equivalência emerge como um fenômeno comportamental, mediado por contingências de reforçamento e pela história de aprendizagem do indivíduo, sem que haja uma estrutura formal predefinida, além de possuir as mesmas propriedades que uma Relação de Equivalência. Sendo assim, enquanto a equivalência matemática se manifesta de forma determinística e independe da experiência individual, a equivalência de estímulos decorre de processos interacionais e leva o contexto histórico do sujeito em consideração.

Uma diferença que nos chamou especialmente a atenção foi o tratamento dado à propriedade de reflexividade nos testes de match-to-sample (MTS). Atualmente, essa propriedade não é testada diretamente nesses procedimentos; ela é simplesmente considerada válida como um pressuposto teórico. No entanto, em avaliações voltadas para indivíduos com transtornos de aprendizagem e desenvolvimento, a reflexividade pode ser testada para verificar possíveis déficits na formação de relações de equivalência.

Além disso, nos testes de match-to-sample, as relações de simetria e transitividade são verificadas dentro de um conjunto finito de estímulos, organizados em classes de equivalência bem definidas. A estrutura e a ordem dos testes seguem uma estrutura organizacional rigorosa, garantindo que as relações emergentes possam ser observadas de maneira sistemática. Dessa forma, o planejamento e a definição dos comportamentos a serem analisados são cuidadosamente estabelecidos.

A razão pela qual a reflexividade não é diretamente aferida nos testes match-to-sample decorre de sua natureza axiomática. Por ser considerada uma propriedade fundamental da equivalência de estímulos, assume-se que ela já esteja presente sem necessidade de comprovação experimental. No entanto, Sidman (1971) realizou testes específicos para avaliar a identidade generalizada, um conceito relacionado, investigando se os participantes eram capazes de responder corretamente a relações de identidade mesmo diante de novos estímulos.

A comparação entre as Relações de Ordem e a RFT, por sua vez, evidenciou uma diferença

essencial entre sistemas hierárquicos fixos e padrões relacionais dinâmicos. As relações de ordem estabelecem uma estrutura formal baseada em reflexividade, antissimetria e transitividade, garantindo uma organização sequencial rígida dos elementos. Já a RFT, ao postular que os indivíduos formam relações arbitrárias entre estímulos, possibilita um modelo mais flexível, no qual as relações não são necessariamente fixas ou hierárquicas, mas moduladas pelo contexto e pela história de reforçamento. Dessa forma, enquanto as Relações de Ordem fornecem um arcabouço matemático para estruturar relações entre elementos, a RFT permite explicar como os indivíduos estabelecem e modificam essas relações de maneira adaptativa, muitas vezes desconsiderando restrições formais.

Além disso, nas relações de equivalência, há um processo de transferência de funções entre estímulos, no qual uma propriedade previamente associada a um estímulo é estendida a outra com base em relações aprendidas. Já na Teoria das Molduras Relacionais (RFT), ocorre uma transformação das funções dos estímulos, ou seja, as propriedades atribuídas a um estímulo podem ser modificadas de acordo com o contexto e a rede de relações estabelecida, indo além da simples transferência.

Por fim, a comparação entre a RFT e a relação de equivalência demonstrou que, embora ambas tratem da formação de relações entre estímulos, a RFT apresenta um escopo ampliado. Enquanto a relação de equivalência tradicionalmente se restringe às propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, a RFT incorpora relações mais complexas, como hierarquia, oposição e comparação, permitindo a modelagem de processos cognitivos sofisticados, incluindo analogias, inferências e transformação funcional de estímulos.

Dessa forma, os resultados deste estudo evidenciam que, apesar das similaridades estruturais entre os conceitos matemáticos e psicológicos analisados, seus propósitos e aplicações diferem substancialmente. Enquanto a matemática busca estabelecer formalizações abstratas e universais para as relações entre elementos, a psicologia comportamental, por meio da RFT e do Modelo de Equivalência de Estímulos, investiga a construção dessas relações no nível individual, levando em consideração variáveis contextuais e históricas. A articulação entre essas perspectivas não apenas amplia a compreensão dos fenômenos estudados, mas também abre caminhos para investigações interdisciplinares que podem contribuir tanto para a modelagem teórica quanto para aplicações práticas nos campos da educação, da psicologia e das ciências cognitivas.

## REFERÊNCIAS

- ABAI. **Fellows of ABAI – Murray Sidman**. [S. l.: s. n.].  
<https://www.abainternational.org/constituents/bios/murraysidman.aspx>.  
 Accessed: 2024-06-05. Citado nas pp. 39–41.
- BARNES-HOLMES, D.; HUSSEY, I. *et al.* Relational Frame Theory and its application in behavioral science. **Behavior Analysis Journal**, v. 49, n. 3, p. 201–220, 2016. Citado nas pp. 49, 50.
- BARNES-HOLMES, Dermot; BARNES-HOLMES, Yvonne; CULLINAN, Vincent. Relational Frame Theory: Some implications for understanding and treating human psychopathology. **International Journal of Psychology and Psychological Therapy**, v. 5, n. 2, p. 355–374, 2005. Citado na p. 49.
- BEHAVIOR Analysis History. An Interview with Murray Sidman. [S. l.: s. n.], nov. 2014. YouTube. Accessed: 2024-06-03. Disponível em:  
<https://www.youtube.com/watch?v=LPH95Z9qUHQ>. Citado na p. 41.
- BIM, N. R.; ALMEIDA, J. H. de. Como a Teoria das Molduras Relacionais (RFT) Transforma a Clínica Comportamental – Estratégias Recentes para Aplicação. **Perspectivas Em Análise Do Comportamento**, v. 10, n. 2, p. 294–304, 2020. DOI: 10.18761/PAC.2019.v10.n2.08. Citado na p. 55.
- FIELDS, L.; VERHAVE, T. The structure of equivalence classes. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, v. 48, p. 317–332, 1987. Citado na p. 42.
- FIELDS, L.; VERHAVE, T.; FATH, S. Stimulus equivalence and transitive associations: A methodological analysis. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, v. 42, p. 143–158, 1984. Citado na p. 42.
- GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Citado nas pp. 15, 55.
- HASLBECK, Jonas. **Interview with Prof. Barnes-Holmes**. [S. l.: s. n.], 2015.  
<https://blog.efpsa.org/2015/04/06/interview-with-prof-barnes-holmes/>.  
 Acesso em: 12 fev. 2025. Citado na p. 52.
- HAYDU, Verônica Bender. O que é equivalência de estímulos? *In*: COSTA, Carlos Eduardo; LUZIA, Josiane Cecília; SANT’ANNA, Heloísa Helena Nunes (ed.). **Primeiros Passos em Análise do Comportamento e Cognição**. [S. l.]: Santo André, 2003. v. 1. p. 55–64. Citado na p. 27.
- HAYES, Steven C. **About**. [S. l.: s. n.], n.d. <https://stevenchayes.com/about/>. Acesso em: 12 fev. 2025. Citado na p. 51.

HAYES, Steven C.; BARNES-HOLMES, Dermot; ROCHE, Bryan. **Relational Frame Theory: A Post-Skinnerian Account of Human Language and Cognition**. [S. l.]: Springer Science e Business Media, 2001. Citado nas pp. 48, 49, 55.

HAYES, Steven C.; STROSAHL, Kirk D.; WILSON, Kelly G. **Acceptance and Commitment Therapy: The Process and Practice of Mindful Change**. [S. l.]: Guilford Press, 2012. Citado na p. 49.

HÜBNER, Maria Martha Costa. Controle de estímulos e relações de equivalência. **Revista Brasileira de Terapia Comportamental e Cognitiva**, v. 8, n. 1, p. 95–102, 2006. Citado na p. 13.

HYGINO, D.; GELSON, I. **Álgebra moderna**. São Paulo: Editora Atual, 2003. Citado nas pp. 15, 55.

LAZAR, Richard. Extending sequence-class membership with matching to sample. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, v. 27, p. 381–392, 1977. Citado na p. 32.

MELLO, M. H. S.; ALMEIDA, P. E. M. Cognitive defusion in Acceptance and Commitment Therapy. **Journal of Contextual Behavioral Science**, v. 15, p. 45–60, 2021. Citado na p. 49.

OLIVEIRA, Marileide Antunes de; PENARIOL, Camila Politti; GOYOS, Celso. Ensino da aplicação de tarefas de matching-to-sample computadorizadas para ensino de leitura. **Acta Comportamental**, v. 21, n. 1, p. 53–67, 2013. ISSN 0188-8145. Disponível em: <https://www.actacomportamental.com.br>. Citado na p. 29.

PEREZ, W. F. *et al.* Experimental findings in Relational Frame Theory. **Perspectivas Journal**, v. 4, n. 1, p. 32–50, 2013. Citado nas pp. 48, 49.

PIAGET, Jean. **A Epistemologia Genética**. São Paulo: Martins Fontes, 1971. Citado na p. 37.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Citado na p. 28.

POZO, Juan Ignacio. **Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2002. Citado na p. 28.

REGAÇO, Alceu *et al.* Maintenance of Stimulus Equivalence Classes: A Bibliographic Review. **The Psychological Record**, v. 73, n. 1, p. 1–11, 2023. Citado na p. 13.

ROCHE, Bryan. **Bryan Roche - Maynooth University**. [S. l.: s. n.], n.d. <https://www.maynoothuniversity.ie/people/bryan-roche>. Acesso em: 12 fev. 2025. Citado na p. 53.

ROSE, Julio C. De; SOUZA, Deisy G. De; HANNA, Elenice S. Teaching reading and spelling: Exclusion and stimulus equivalence. **Journal of Applied Behavior Analysis**, v. 29, n. 4, p. 451–469, 1996. Citado na p. 13.

SANTOS FAJARDO, Rogério Augusto dos. **A teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática**. [S. l.]: EDUSP, 2024. Citado nas pp. 15, 55.

SAUNDERS, R. R.; GREEN, G. The nonequivalence of behavioral and mathematical equivalence. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, v. 57, n. 2, p. 227–241, 1992. DOI: [10.1901/jeab.1992.57-227](https://doi.org/10.1901/jeab.1992.57-227). Citado nas pp. 42–46.

SIDMAN, Murray. **Coercion and its Fallout**. [S. l.]: Authors Cooperative, 1989. Citado na p. 41.

SIDMAN, Murray. **Equivalence Relations and Behavior: A Research Story**. [S. l.]: Authors Cooperative, 1994. Citado na p. 41.

SIDMAN, Murray. Equivalence relations and the reinforcement contingency. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, v. 74, n. 1, p. 127–146, 2000. Citado nas pp. 13, 28.

SIDMAN, Murray. Reading and auditory-visual equivalences. **Journal of Speech and Hearing Research**, v. 14, n. 1, p. 5–13, 1971. Citado nas pp. 12, 27–29, 42.

SIDMAN, Murray. **Tactics of Scientific Research: Evaluating Experimental Data in Psychology**. [S. l.]: Basic Books, 1960. Citado na p. 41.

SIDMAN, Murray. The analysis of behavior: what's in it for us? **Journal of Experimental Analysis of Behavior**, v. 87, n. 2, p. 309–316, 2007. DOI: [10.1901/jeab.2007.82-06](https://doi.org/10.1901/jeab.2007.82-06). Citado na p. 41.

SIDMAN, Murray; RAUZIN, Richard *et al.* A search for symmetry in the conditional discriminations of rhesus monkeys, baboons, and children. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, v. 37, n. 1, p. 23–44, 1982. Citado nas pp. 32, 33.

SIDMAN, Murray; TAILBY, William. Conditional discrimination vs. matching to sample: An expansion of the testing paradigm. **Journal of the Experimental Analysis of Behavior**, v. 37, n. 1, p. 5–22, 1982. Citado nas pp. 13, 30–33, 36–38, 42.

SIDMAN, Murray; TAILBY, William. Discriminação condicional vs emparelhamento com o modelo: Uma expansão do paradigma de teste. **Revista Brasileira de Análise do Comportamento**, v. 2, n. 1, p. 1–20, 2006. Citado nas pp. 30–36, 38.

SIDMAN, Richard L.; SIDMAN, Murray. **Neuroanatomy: A Programmed Text**. Boston: Little Brown. v. 1. NF. Citado na p. 41.

TORNEKE, Niklas. **Learning RFT: An Introduction to Relational Frame Theory and Its Clinical Application**. [S. l.]: Context Press, 2010. Citado na p. 48.

VANDERPOOL, Clare. **Em Algum Lugar nas Estrelas**. Rio de Janeiro: DarkSide Books, 2016. Citado na p. 5.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como  
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

