

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Propagação de rumores em redes com triângulos

Larissa Oliveira Moutinho da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Larissa Oliveira Moutinho da Silva

Propagação de rumores em redes com triângulos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Thomas Kauê Dal'Maso Peron

USP – São Carlos
Maio de 2025

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586p Silva, Larissa Oliveira Moutinho da
Propagação de Rumores em Redes com Triângulos /
Larissa Oliveira Moutinho da Silva; orientador
Thomas Kauê Dal'Maso Peron. -- São Carlos, 2025.
70 p.

Dissertação (Mestrado - Programa
Interinstitucional de Pós-graduação em Estatística) --
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
Universidade de São Paulo, 2025.

1. Redes com Triângulos. 2. Modelo
Configuracional. 3. Modelo Maki Thompson. 4.
Propagação de Rumores. I. Peron, Thomas Kauê
Dal'Maso , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Larissa Oliveira Moutinho da Silva

Rumor Propagation in Networks with Triangles

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Interagency Program Graduate in Statistics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Thomas Kauê Dal'Maso Peron

USP – São Carlos
May 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Larissa Oliveira Moutinho da Silva, realizada em 21/05/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Thomas Kauê Dal'Maso Peron (USP)

Prof. Dr. Zhao Liang (FFCLRP/USP)

Prof. Dr. Henrique Ferraz de Arruda (GMU)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar saúde, força e perseverança para superar os desafios ao longo deste percurso.

Ao meu orientador, Thomas Kauê Dal'Maso Peron pela paciência, dedicação e pelas valiosas orientações que tanto contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Sua confiança em meu potencial foi essencial para que eu alcançasse este objetivo.

Ao Guilherme Ferraz de Arruda, pelos esclarecimentos fundamentais que contribuíram significativamente para a implementação da propagação de rumores.

À minha família pelo apoio incondicional, pelo amor e por sempre acreditarem em mim, mesmo nos momentos mais difíceis. Vocês foram minha base e motivação constante.

Aos colegas e amigos do programa, em especial à Luiza Lober de Souza Piva pelos debates enriquecedores e pela troca de ideias que ajudaram a tornar este caminho mais leve e produtivo.

Aos meus amigos de longa data, que mesmo à distância, sempre torceram por mim e estiveram presentes de alguma forma, trazendo leveza e alegria nos momentos mais necessários.

À CAPES, pelo apoio financeiro que tornou este trabalho possível e ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística UFSCar-USP (PIPGEs), por fornecer os recursos e o ambiente para meu crescimento acadêmico e pessoal. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Cada gesto de apoio e incentivo foi fundamental para que eu chegasse até aqui.

RESUMO

SILVA, L. O. M. **Propagação de rumores em redes com triângulos**. 2025. 68 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

Este estudo investiga a influência do coeficiente de agrupamento na dinâmica de propagação de rumores em redes complexas, comparando-a com o modelo configuracional clássico. Utilizamos o modelo de Maki-Thompson como base para a simulação da disseminação de rumores e analisamos as limitações do modelo configuracional na reprodução das propriedades estruturais observadas em redes reais. Para controlar o coeficiente de agrupamento sem alterar outras métricas estruturais, adotamos a abordagem proposta independentemente por Newman e Miller. Por meio de simulações, avaliamos como a presença de agrupamentos locais — representados pela formação de triângulos — afeta a disseminação de informações. Nossos resultados indicam que redes com alto coeficiente de agrupamento tendem a restringir a propagação a comunidades locais, enquanto redes com baixo agrupamento permitem uma disseminação mais rápida e global. No entanto, observamos que a influência dessas estruturas só se torna significativa quando correlações e grau não podem mais ser negligenciados, uma vez que ambas as propriedades estão intrinsecamente relacionadas. Além disso, mostramos que, à medida que o grau médio aumenta, a influência do agrupamento na dinâmica se torna irrelevante, pois a conectividade global passa a dominar o processo. A partir da análise de métricas como a densidade de propagadores e a suscetibilidade, verificamos que a presença de agrupamento afeta significativamente a resposta do sistema a pequenas flutuações, especialmente em redes com baixo grau médio. Concluímos que a estrutura da rede pode ser manipulada para otimizar ou conter a disseminação, e sugerimos investigações futuras para explorar modelos que incorporem de forma mais realista a influência de subestruturas locais na dinâmica das redes.

Palavras-chave: Redes Complexas, Estrutura de Triângulos, Modelo Configuracional, Modelo de Maki-Thompson, Propagação de Rumores.

ABSTRACT

SILVA, L. O. M. **Rumor Propagation in Networks with Triangles**. 2025. 68 p. Dissertação (Mestrado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

This study investigates the influence of the clustering coefficient on the dynamics of rumor propagation in complex networks, comparing it with the classical configurational model. We use the Maki-Thompson model as a basis for simulating rumor dissemination and analyze the limitations of the configurational model in reproducing the structural properties of real networks. To control the clustering coefficient without altering other structural metrics, we adopt the approach independently proposed by Newman and Miller. Through simulations, we evaluate how local clustering affects information dissemination, highlighting its impact on rumor propagation. Our results indicate that networks with a high clustering coefficient tend to restrict propagation to local communities, while networks with low clustering allow faster and more global dissemination. However, we observe that the influence of clustering on network dynamics only becomes significant when degree-degree correlations can no longer be neglected, as both properties are intrinsically related. Furthermore, we show that as the average degree increases, the influence of clustering becomes negligible, as global connectivity starts to dominate the process. By analyzing metrics such as propagator density and susceptibility, we find that clustering significantly affects the system's response to small fluctuations, especially in networks with a low average degree. We conclude that network structure can be manipulated to either optimize or contain the spread and suggest future research to explore models that more realistically incorporate the influence of local substructures on network dynamics.

Keywords: Complex Networks, Triangle Structure, Configurational Model, Maki-Thompson Model, Rumor Propagation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O Modelo de Configuração	28
Figura 2 – Rede Aleatória x Rede Real	34
Figura 3 – Exemplo de atribuição de arestas simples e triângulos	35
Figura 4 – O Modelo Maki Thompson	37
Figura 5 – Correlação grau-grau como função do coeficiente de agrupamento	45
Figura 6 – Menor Caminho Médio em função do Clustering Coefficient.	46
Figura 7 – Modelo de Propagação de Rumores de Maki Thompson	48
Figura 8 – Dependência de ρ_x em função de λ	50
Figura 9 – Suscetibilidade χ em função de λ	53
Figura 10 – Diferença entre as áreas sob as curvas de densidade	56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivos	20
2	CONCEITOS BÁSICOS	21
2.1	Medidas de Caracterização de Redes	21
2.1.1	<i>Grau (Degree)</i>	21
2.1.2	<i>Centralidade de Intermediação (Betweenness Centrality)</i>	22
2.1.3	<i>Centralidade de Proximidade (Closeness Centrality)</i>	22
2.1.4	<i>Centralidade de Autovetor (Eigenvector Centrality)</i>	23
2.1.5	<i>Coeficiente de Aglomeração (Clustering Coefficient)</i>	23
2.1.6	<i>Coeficiente de Agrupamento Global (Global Clustering Coefficient)</i>	23
2.1.7	<i>Diâmetro (Diameter)</i>	24
2.1.8	<i>Distribuição de Grau (Degree Distribution)</i>	24
2.1.9	<i>Assortatividade (Assortativity)</i>	25
2.2	Propagação de Rumores	25
2.3	Modelos de Geração de Redes	27
2.3.1	<i>Modelo Configuracional</i>	27
2.3.2	<i>Probabilidade do Modelo Configuracional</i>	30
2.3.3	<i>Coeficiente de Agrupamento (Clustering Coefficient)</i>	31
2.3.4	<i>Limitações do Modelo Configuracional</i>	33
2.4	O Modelo Newman-Miller	35
2.4.1	<i>Distribuição de Grau</i>	36
2.4.2	<i>Transitividade</i>	36
2.5	Modelo Maki-Thompson	37
2.5.1	<i>Relevância do Modelo Maki Thompson</i>	39
2.6	Investigações Anteriores sobre o Impacto de Triângulos na Dinâmica	40
3	RESULTADOS	43
3.1	Implementação	43
3.1.1	<i>Investigando Propriedades das Redes em Função do Clustering</i>	44
3.1.2	<i>Dinâmica de Propagação de Rumores no Modelo de Maki-Thompson em Tempo Contínuo</i>	47
3.1.3	<i>Diagramas de fase de redes com triângulos</i>	50

3.1.4	<i>Visualização da suscetibilidade χ em função de λ</i>	52
3.1.5	<i>Influência de subgrafos de ordem superior</i>	54
4	CONCLUSÕES	57
	REFERÊNCIAS	61
	APÊNDICES	65
	Demonstração detalhada da fórmula da correlação grau-grau ρ_D	65

INTRODUÇÃO

O estudo das redes complexas emergiu como um campo de pesquisa de destaque nas últimas décadas, sendo impulsionado de maneira significativa pelo avanço rápido das tecnologias de comunicação e pela crescente capacidade de análise de dados. Embora suas raízes possam ser rastreadas até os estudos sobre grafos realizados no século XIX, foi o advento da era digital que permitiu aos pesquisadores adentrarem em detalhes nas intrincadas redes do mundo real. Essa convergência de tecnologia e interesse acadêmico deu origem a uma abordagem multidisciplinar para compreender a complexidade das interconexões presentes em diversos sistemas. [Barabási and Albert, 1999, Newman, 2003].

De maneira geral, pode-se definir uma rede como qualquer sistema que possa ser descrito de forma abstrata por meio de um grafo, onde os vértices (ou nós) correspondem aos elementos do sistema e as arestas indicam as relações ou interações entre esses elementos. [Newman, 2018] Dessa forma, as redes oferecem uma base teórica que possibilita representar de forma eficaz as interações em sistemas complexos, nos quais a análise envolve mapear as relações entre múltiplos elementos e/ou indivíduos. O estudo das redes tem uma longa história, com raízes na teoria dos grafos na matemática discreta, sendo posteriormente ampliado para áreas como sociologia e comunicação. Mais recentemente, tornou-se uma ferramenta central em disciplinas como física, biologia e ciência de dados, permitindo análises profundas de sistemas complexos e interconectados [Newman, 2018, Barabási, 2016]. Embora cada campo tenha sua linguagem específica, a terminologia técnica para abordar as redes é amplamente compartilhada entre as disciplinas. Além disso, a pesquisa de redes em larga escala levou à criação de novas métricas e métodos estatísticos (que serão apresentados nesse trabalho no tópico 3.1) especialmente voltados para o estudo de sistemas complexos [Barrat et al., 2008].

Foi somente no final do século XX que o estudo das redes complexas ganhou uma visibilidade mais ampla. Especialmente nos trabalhos de Albert-László Barabási e Duncan Watts, onde suas pesquisas pioneiras não apenas desvelaram novos paradigmas de análise, mas também

abriram portas para uma abordagem interdisciplinar dentro do contexto de sistemas complexos. O trabalho de Albert-László Barabási, notavelmente seu modelo de ligação preferencial, [Barabási and Albert, 1999] e as contribuições de Duncan Watts, como o modelo de mundo pequeno [Watts; Strogatz, 1998], foram marcos fundamentais na disseminação do conhecimento sobre redes complexas. Suas pesquisas lançaram as bases para a colaboração entre campos tradicionalmente desconexos, impulsionando a exploração das redes complexas em contextos tão diversos quanto as interações sociais, o funcionamento do cérebro, a disseminação de doenças e a estrutura da internet.

Conforme apontado anteriormente, as redes complexas abrangem uma ampla gama de categorias, cada uma apresentando características singulares e aplicações diversificadas. Podemos citar alguns exemplos de aplicação como as redes sociais, em que podemos analisar as conexões entre indivíduos, comunidades e organizações, e através dessas análises, é possível verificar padrões de amizade, colaboração profissional e a disseminação de informações [Barabási, 2016]. Nesse sentido, o estudo das conexões desses tipos de redes desempenha um papel importante na compreensão de dinâmicas sociais. No contexto biológico, a abordagem de redes busca desvendar a complexidade dos sistemas biológicos, podendo representar as interações entre moléculas, genes, proteínas e outros elementos em organismos vivos, proporcionando uma visão profunda sobre processos fisiológicos e patológicos [Barabási and Oltvai, 2004]. Assim como as redes sociais, as redes tecnológicas abrangem infraestruturas essenciais na sociedade moderna como a internet e os sistemas de distribuição de energia [Albert, Jeong and Barabási, 2000]. Ao analisar suas estruturas, é possível identificar meios para otimizar a eficiência operacional e aprimorar a segurança dessas redes.

Além das redes de contextos físicos e sociais, é possível verificar as relações e conexões no ambiente acadêmico. O estudo dessas redes permite identificar padrões de pesquisa, a intersecção entre disciplinas e a influência de determinados temas ou tópicos no desenvolvimento de pesquisas e análises no cenário acadêmico [Benatti et al., 2021, Martin et al., 2013]. Por fim, podemos citar as redes no contexto de transporte, onde a análise pode ser utilizada para otimizar a mobilidade e planejar o desenvolvimento urbano de maneira eficaz [Barabási, 2016].

Dessa forma, fica evidente que as redes complexas estão presentes em vários âmbitos da sociedade contemporânea, desempenhando um papel crucial no funcionamento de diversas esferas. O estudo de redes oferece uma visão aprofundada das interações entre seus componentes, permitindo a identificação de padrões e estruturas subjacentes que podem ser aplicadas para otimizar processos, aumentar a segurança e melhorar a eficiência nessas diferentes esferas.

Neste contexto, o modelo clássico de configuração de redes, que será abordado com mais detalhes em capítulos subsequentes, surge como uma ferramenta fundamental para a análise e compreensão das estruturas de redes complexas [Newman, 2010]. Esse modelo é utilizado para modelar a arquitetura de diferentes tipos de redes baseando-se na construção de grafos aleatórios que preservam algumas características topológicas das redes reais. No entanto, apesar

de suas inúmeras vantagens e aplicabilidades, o modelo possui limitações, especialmente no que diz respeito à ausência de correlações entre vértices, o que leva à criação de redes que nem sempre refletem as propriedades observadas em redes reais. Particularmente relevante para esta pesquisa é a medida de agrupamento (ou *clustering*), que se refere à tendência de conjuntos de três vértices formarem um subgrafo totalmente conectado, ou seja, a formação de triângulos. A falta dessa característica nos modelos clássicos tem gerado questionamentos importantes sobre sua capacidade de capturar a influência de estruturas observadas em redes reais nas dinâmicas de redes. [Stegehuis and Peron, 2021].

Para mitigar essas disparidades entre redes aleatórias e estruturas do mundo real, várias formulações de modelos de rede têm sido propostas, com o intuito de gerar redes aleatórias que emulem as propriedades observadas em topologias reais. Assim, dado que o modelo de configuração padrão gera redes com configurações semelhantes a árvores (ou seja, sem ciclos), a presença de triângulos se tornou um aspecto pertinente para a modelagem de redes reais [Bianconi and Rahmede, 2017]. Apesar de vários estudos sobre processos dinâmicos em redes com agrupamento, algumas questões permanecem abertas. Especificamente, diversos estudos indicam que a existência de triângulos exerce um impacto considerável na sincronização de redes, atenuando a interação coletiva entre osciladores [Rodrigues, 2016]. Por outro lado, certas abordagens sugerem o oposto: que os modelos desenvolvidos para redes com configurações semelhantes a árvores descrevem adequadamente o estágio inicial de sincronização em topologias com agrupamento [Melnik et al., 2011].

Para compreender as conclusões discrepantes sobre o mesmo tópico, é essencial analisar os modelos de rede empregados. Uma estratégia frequente em estudos iniciais consistia na religação estocástica que cria triângulos, mantendo a distribuição de grau inalterada [McGraw e Menzinger, 2005]. No entanto, mesmo ao manter inalterada a distribuição dos graus dos vértices, outras características da rede se modificam à medida que o número de triângulos muda, incluindo a formação de estruturas de comunidade e correlações nos graus dos vértices [Newman, 2003]. Dessa forma, enquanto os algoritmos de reorganização estocástica sinalizam que um aumento no número de triângulos pode afetar a dinâmica da rede, outras características também sofrem modificações durante a criação das redes, o que mantém o efeito exclusivo dos triângulos como uma questão em aberto.

Neste trabalho, exploramos as limitações do modelo configuracional tradicional como ferramenta para a compreensão de rumores em redes complexas. Identificamos uma inadequação fundamental nesse modelo e, como resposta, propomos uma abordagem alternativa. A nossa contribuição essencial reside na investigação do efeito isolado de triângulos na propagação de rumores em redes. Para isso, focamos especialmente no modelo que foi proposto de forma independente por Newman e Miller em [Newman, 2009, Miller, 2009].

1.1 Objetivos

A análise de redes complexas desempenha um papel fundamental na compreensão de sistemas interconectados em uma ampla variedade de domínios. Tradicionalmente, o modelo configuracional tem sido amplamente utilizado para descrever a estrutura dessas redes, focando na distribuição de graus dos vértices. No entanto, à medida que a compreensão das redes complexas se aprofundou, tornou-se evidente que esse modelo pode negligenciar aspectos cruciais da dinâmica e conectividade das redes reais. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo geral investigar como características estruturais locais, em especial a presença de triângulos (ou o coeficiente de agrupamento), influenciam a dinâmica de propagação de informações em redes complexas.

De forma mais específica, propomos:

- Verificar a adequação do modelo configuracional na representação de redes reais, destacando suas limitações;
- Apresentar uma abordagem alternativa que priorize a consideração dos triângulos como elementos-chave nas redes;
- Analisar o impacto dos triângulos nas dinâmicas das redes, procurando entender como sua presença influencia aspectos diversos, como a disseminação de informações, a estabilidade e a robustez da rede;
- Identificar o efeito isolado de triângulos na propagação de rumores.

CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo oferece uma introdução ao estudo das redes, focando nas interações temporais entre os nós e como essas interações moldam o comportamento global das redes complexas. A dinâmica dessas redes envolve a análise de como as conexões entre os nós evoluem ao longo do tempo. Utilizando modelos matemáticos e ferramentas analíticas, é possível descrever essas interações e compreender como as redes respondem a diferentes dinâmicas.

A estrutura das redes desempenha um papel crucial na compreensão de sua dinâmica. Redes complexas podem ser representadas por grafos, onde os nós correspondem aos elementos do sistema e as arestas representam as conexões entre eles. Características estruturais, como a formação de grupos de nós densamente conectados, o número de conexões de cada nó e a presença de subestruturas, como triângulos, são fundamentais para determinar como os processos dinâmicos se desenvolvem e se propagam dentro da rede.

Neste capítulo, apresentamos também os conceitos fundamentais para caracterizar a estrutura das redes complexas, além de introduzirmos os processos dinâmicos que investigaremos.

2.1 Medidas de Caracterização de Redes

Uma das abordagens fundamentais para compreender redes complexas envolve a aplicação de métricas que descrevem suas propriedades topológicas e dinâmicas. Essas métricas são ferramentas essenciais para analisar a estrutura, a conectividade e os processos que ocorrem nas redes complexas.

2.1.1 *Grau (Degree)*

O grau revela a quantidade de conexões diretas que um nó possui, o que pode ser interpretado como sua importância ou centralidade na rede. Nós com graus elevados tendem a desempenhar papéis de destaque, atuando como hubs. Além disso, o grau está intrinsecamente

ligado a muitas propriedades e fenômenos em redes, como a disseminação de informações, a propagação de doenças, a estabilidade da rede e até mesmo a identificação de comunidades. Assim, definimos:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}, \quad (2.1)$$

onde k_i é o grau do nó i , N é o número de nós da rede e A_{ij} é o elemento da matriz de adjacência indicando a conexão entre os nós i e j . Isto é, $A_{ij} = 1$ se i está conectado a j e $A_{ij} = 0$ caso contrário.

2.1.2 Centralidade de Intermediação (Betweenness Centrality)

A centralidade de intermediação (Betweenness Centrality) é uma métrica crucial na análise de redes, pois destaca os nós que atuam como pontes ou intermediários cruciais na comunicação e no fluxo de informações dentro da rede [Freeman, 1977]. Ela mensura a frequência com que um determinado nó age como ponto de passagem nos caminhos mais curtos entre pares de outros nós. Nós com alta centralidade de intermediação desempenham um papel fundamental na manutenção da conectividade e eficiência da rede, pois têm a capacidade de controlar ou facilitar o fluxo de informações. Essa centralidade é expressa como:

$$C_B(i) = \sum_{j,k} \frac{\sigma_{jk}(i)}{\sigma_{jk}}, \quad (2.2)$$

onde σ_{jk} é o número total de caminhos mais curtos entre j e k , e $\sigma_{jk}(i)$ é o número de caminhos mais curtos entre j e k que passam pelo nó i .

2.1.3 Centralidade de Proximidade (Closeness Centrality)

A centralidade de proximidade (closeness Centrality) é uma medida fundamental que avalia o quão próximo um nó está de todos os outros nós na rede. Essa centralidade é baseada na ideia de que um nó central deve possuir menor distância média para os demais. A distância entre dois nós i e j é definida como o número de arestas no caminho mais curto que os conecta. Assim, um nó com alta centralidade de proximidade está estrategicamente posicionado para acessar rapidamente outros nós da rede [Rodrigues, 2019]. De forma matemática:

$$K_i = \frac{N}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N d_{ij}} \quad (2.3)$$

onde d_{ij} representa o comprimento do caminho mais curto entre os nós i e j , enquanto N é o número total de nós na rede.

2.1.4 Centralidade de Autovetor (Eigenvector Centrality)

A centralidade de autovalor é uma métrica que atribui importância a um nó com base não apenas em suas conexões diretas, mas também na importância dos nós aos quais está conectado. Ela é calculada iterativamente, onde a centralidade de um nó é proporcional à soma das centralidades de seus nós vizinhos e ponderada pelo maior autovalor (λ) da matriz de adjacência (A) [Rodrigues, 2019]. Nessa medida, um nó é considerado central não apenas se tiver muitas conexões diretas, mas também se estiver conectado a outros nós que, por sua vez, são importantes na rede. Essa métrica destaca a ideia de que a importância de um nó não depende apenas de suas conexões diretas, mas também de sua posição na rede e das conexões de seus vizinhos. Assim, definimos:

$$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_j A_{ij} x_j \quad (2.4)$$

onde x_i é a centralidade do nó i , λ é o maior autovalor da matriz de adjacência A e x_j é a centralidade do nó j .

2.1.5 Coeficiente de Aglomeração (Clustering Coefficient)

Esta é uma medida que quantifica a tendência de formação de triângulos em uma rede e é usada para avaliar o grau de agrupamento ou a densidade de conexões locais em uma rede complexa. O coeficiente de clustering de um nó específico em uma rede mede a probabilidade de que os vizinhos desse nó estejam também conectados entre si [Watts; Strogatz, 1998]. Se o coeficiente de clustering for alto, isso sugere uma alta proporção na formação de triângulos na vizinhança do nó, indicando uma rede mais densamente conectada localmente. Por outro lado, um coeficiente de clustering baixo sugere uma rede com menos triângulos e, portanto, menor agrupamento local. Assim, definimos:

$$C_i = \frac{2n_i}{k_i(k_i - 1)} \quad (2.5)$$

onde n_i é o número de arestas entre os vizinhos do nó i e k_i é o grau do nó i .

2.1.6 Coeficiente de Agrupamento Global (Global Clustering Coefficient)

O Coeficiente de Agrupamento Global (ou transitividade) quantifica a probabilidade de três nós aleatórios na rede formarem um triângulo, quantificando a densidade de triângulos em toda a rede. Por outro lado, o Coeficiente de Agrupamento Local concentra-se em nós

individuais, medindo a fração de conexões entre os vizinhos de um nó que realmente existem. Mais precisamente, C é definido como [Newman, 2010]:

$$C = \frac{3 \times \text{número de triângulos}}{\text{número de tríades conectadas}} \quad (2.6)$$

No entanto, conforme discutido por [Estrada, 2016], é importante notar que valores elevados para a média global dos coeficientes de agrupamento locais (C_i) não necessariamente indicam um alto valor para o coeficiente de agrupamento global (C). É possível construir redes em que a média dos C_i seja próxima de 1, enquanto o C seja próximo de 0. Isso ocorre porque o coeficiente de agrupamento global é calculado como a média dos coeficientes de agrupamento locais ponderada pelo grau dos nós, o que significa que nós de alto grau têm maior influência no valor global. Portanto, mesmo que a maioria dos nós tenha um alto C_i , se os nós de alto grau tiverem C_i baixos, o C global pode ser baixo.

2.1.7 Diâmetro (Diameter)

O diâmetro de uma rede é uma medida que representa a maior distância geodésica, ou seja, a maior quantidade de arestas que precisam ser percorridas para se deslocar entre quaisquer dois nós da rede. Em outras palavras, o diâmetro indica a distância máxima entre os pares de nós na rede, mostrando o quão distantes podem estar os extremos mais afastados da rede em termos de conexões diretas [Barabási, 2016].

Essa medida é importante na análise de redes, pois fornece informações sobre a acessibilidade e a eficiência da rede em termos de comunicação e alcance. Um diâmetro pequeno indica que a rede é altamente conectada e que os nós estão próximos uns dos outros em termos de conexões diretas. Por outro lado, um diâmetro grande sugere que a rede pode ser menos eficiente em termos de alcançar outros nós e que pode haver maior dispersão entre os elementos da rede [Newman, 2003].

2.1.8 Distribuição de Grau (Degree Distribution)

A distribuição de probabilidade $P(k)$ representa a frequência com que diferentes graus de nós aparecem na rede e mede a probabilidade de um nó selecionado aleatoriamente ter grau k [Newman, 2003]. Além disso, o n -ésimo momento da distribuição de graus é definido como:

$$\langle k^n \rangle = \frac{1}{N} \sum_k k^n P(k) \quad (2.7)$$

onde $\langle k^n \rangle$ é o n -ésimo momento da distribuição de graus, N é o número total de nós na rede, k é o grau dos nós e $P(k)$ é a probabilidade de encontrar um nó com grau k .

2.1.9 Assortatividade (Assortativity)

A assortatividade em uma rede representa a tendência dos nós com características semelhantes a se conectarem entre si. Em termos simples, isso significa que nós que compartilham atributos ou propriedades comuns, como grau, idade, popularidade, ou qualquer outra medida relevante, têm maior probabilidade de estabelecer conexões entre si [Newman, 2002].

Em [Newman, 2002], o autor define matematicamente a assortatividade em uma rede utilizando o coeficiente de assortatividade r , que quantifica a tendência de nós com características semelhantes (tipicamente o grau) se conectarem. O coeficiente de assortatividade tal como definido em [Newman, 2002] é dado por:

$$r = \frac{\sum_{i,j} A_{ij} (k_i - \langle k \rangle) (k_j - \langle k \rangle)}{\sum_{i,j} A_{ij} (k_i^2 + k_j^2 - 2\langle k \rangle k_i - 2\langle k \rangle k_j + \langle k^2 \rangle)} \quad (2.8)$$

onde A_{ij} é a matriz de adjacência da rede (1 se houver uma aresta entre os nós i e j , 0 caso contrário), k_i e k_j são os graus dos nós i e j , $\langle k \rangle$ é a média dos graus da rede e $\langle k^2 \rangle$ é o segundo momento da distribuição de grau.

O coeficiente r é um valor entre -1 e 1, ou seja, $r > 0$ indica uma rede assortativa, onde nós de grau semelhante têm maior probabilidade de se conectarem; $r < 0$ indica uma rede dissortativa, onde nós com graus diferentes têm maior probabilidade de se conectarem; $r = 0$ sugere que não há nenhuma preferência em relação à assortatividade dos nós. A equação 2.8 quantifica a medida como uma combinação de pares de nós conectados pela rede, levando em consideração as diferenças de grau entre eles [Newman, 2002].

2.2 Propagação de Rumores

A modelagem da propagação de rumores em redes complexas e a modelagem da propagação de doenças compartilham várias semelhanças matemáticas, apesar de terem propósitos distintos. Ambos os campos buscam entender como informações (no caso dos rumores) ou agentes infecciosos (no caso das doenças) se espalham em uma população interconectada [Vega Oliveros, 2017, Arruda, Rodrigues e Moreno, 2018].

Uma das semelhanças mais evidentes entre os modelos de propagação de rumores e os modelos epidemiológicos é a descrição das transições de estado. Nos modelos epidemiológicos, como o modelo SIR (Susceptível, Infectado, Recuperado), a dinâmica segue uma evolução de um estado para outro, como a transmissão da doença entre indivíduos suscetíveis e infectados. Similarmente, no modelo de rumores, os indivíduos transitam entre os estados de "ignorante", "propagador" e "repressor" conforme o rumor se espalha. No entanto, uma diferença importante está nos mecanismos de remoção entre esses dois tipos de modelos. Nos modelos epidemiológicos, a remoção de indivíduos ocorre de forma espontânea, ou seja, um indivíduo se

recupera ou falece após ser infectado. Em contraste, nos modelos de rumor, a remoção depende do comportamento dos indivíduos que conhecem o rumor. Os "repressores" não compartilham mais a informação, interrompendo a propagação, o que caracteriza uma diferença crucial no processo dinâmico.

O modelo pioneiro de propagação de rumores, proposto em 1964 por Daley e Kendall, marca um marco significativo na compreensão desse fenômeno social [Daley and Kendall, 1964]. Este modelo, inicialmente desenvolvido em um contexto de conectividade homogênea, categoriza os indivíduos em três estados distintos: ignorantes (aqueles que desconhecem a informação), propagadores (aqueles que têm conhecimento do rumor e estão dispostos a propagá-lo) e repressores (aqueles que têm conhecimento do rumor, mas optam por não propagá-lo). Esta abordagem inicial forneceu uma base sólida para a análise da disseminação de informações e boatos em uma população.

Posteriormente, em 1973, Maki e Thompson introduziram uma modificação crucial no mecanismo de repressão do modelo. Esta modificação incorporou a ideia de contatos direcionados, levando em consideração a dinâmica complexa das interações entre os indivíduos. Essa evolução no modelo permitiu uma representação mais realista da propagação de rumores, considerando como as conexões direcionadas entre as pessoas podem afetar a disseminação de informações [Maki and Thompson, 1973].

Em conjunto, esses desenvolvimentos pioneiros estabeleceram as bases para a compreensão da dinâmica da propagação de rumores, uma área de estudo essencial na compreensão das interações sociais e da disseminação de informações em uma variedade de contextos. Desde então, diversos outros modelos e abordagens foram desenvolvidos para aprofundar nossa compreensão desse fenômeno intrincado e sua aplicação em redes complexas [Arruda, Rodrigues e Moreno, 2018].

O processo de propagação de rumores começa com a iniciação [Vega Oliveros, 2017, Arruda, Rodrigues e Moreno, 2018]. Geralmente, um rumor tem sua origem quando uma pessoa ou um pequeno grupo de indivíduos é exposto a uma informação nova e intrigante. Isso pode acontecer por meio de diversas fontes, como mídias sociais, conversas pessoais ou notícias. É nesse momento que o rumor ganha vida e se torna parte do ambiente comunicativo. A segunda etapa é a propagação inicial, na qual a pessoa que recebeu a informação compartilha-a com seus contatos imediatos, como amigos, colegas de trabalho ou familiares. Isso cria o primeiro nível de propagação e geralmente ocorre em um ambiente mais restrito. Em seguida, ocorre a expansão do rumor. Aqueles que receberam a informação inicialmente podem optar por compartilhá-la com seus próprios contatos, desencadeando uma expansão exponencial na propagação. Nesse ponto, o rumor começa a se mover através de múltiplos canais e caminhos na rede complexa, atingindo uma audiência mais ampla.

É importante notar que em redes complexas, alguns indivíduos têm mais conexões do que outros. Esses "influenciadores" ou "hubs" desempenham um papel crucial na disseminação

do rumor, pois têm o potencial de alcançar um grande número de pessoas em um curto período de tempo. Eles se tornam peças-chave na propagação do rumor. Assim, conforme o rumor se espalha, ele passa por um processo de diversificação.

Durante o processo de propagação, as pessoas podem decidir acreditar ou duvidar do rumor. Essa decisão é influenciada por diversos fatores, como a confiabilidade da fonte, a consistência com suas crenças pré-existentes e a natureza sensacionalista do rumor. Eventualmente, o rumor atinge um ponto de saturação, no qual muitas pessoas já o ouviram e decidiram acreditar ou não nele. A partir desse ponto, o rumor pode começar a declinar, perdendo o interesse ou relevância. Em alguns casos, a propagação de rumores pode desencadear um efeito cascata, no qual a informação se torna tão difundida que influencia decisões, comportamentos e até mesmo políticas.

A propagação de rumores em redes complexas é influenciada por uma série de fatores, incluindo a topologia da rede, dinâmicas sociais, características individuais e a própria natureza do rumor. Para compreender melhor esse fenômeno, pesquisadores utilizam modelos matemáticos e simulações computacionais, visando desenvolver estratégias para controlar a disseminação de informações falsas ou enganosas [Vega Oliveros, 2017, Arruda, Rodrigues e Moreno, 2018].

2.3 Modelos de Geração de Redes

As redes complexas observadas em sistemas reais frequentemente exibem padrões estruturais específicos. Para estudar essas características de forma controlada, diversos modelos de geração de redes foram propostos ao longo dos anos e cada modelo visa reproduzir aspectos particulares da estrutura topológica das redes reais. A seguir, apresentamos alguns desses modelos.

2.3.1 Modelo Configuracional

A equação para calcular o total de arestas E em um grafo, tendo em conta a distribuição de graus $P(k)$, em que k representa o grau do vértice, é expressa pela seguinte relação:

$$\sum_{i=1}^N k_i = \langle k \rangle N = \frac{1}{2} m, \quad (2.9)$$

aqui, cada vértice com grau k contribui com k arestas para o total de arestas da rede e m é o número total de arestas na rede;

O modelo de configuração é um modelo de geração de redes aleatórias a partir de sequências de grau fixas. Por exemplo, suponha que desejamos especificar o grau k_i que cada vértice $i = 1, 2, 3, \dots, n$ na rede deve ter. Podemos criar uma rede aleatória com esses graus da seguinte maneira:

- Atribuímos a cada vértice i um total de k_i *stubs* que representam as arestas que ele deve ter. O número total de *stubs* é igual a $\sum_i k_i = 2m$.
- Escolhemos aleatoriamente dois *stubs* uniformemente e criamos uma aresta conectando esses dois nós;
- Repetimos o passo anterior, escolhendo aleatoriamente outro par de *stubs* dos $2m - 2$ restantes e criamos uma aresta conectando esses nós. Continuamos esse processo até que todos os *stubs* tenham sido usados.
- Como resultado, geramos uma rede na qual cada vértice possui exatamente o grau desejado, conforme especificado previamente.

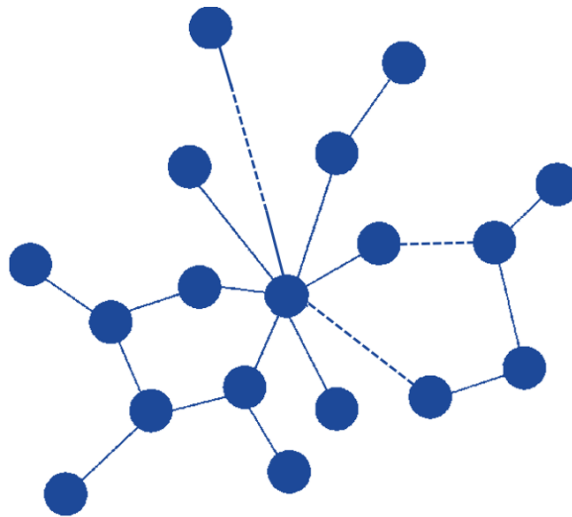


Figura 1 – **O Modelo de Configuração:** Cada vértice recebe um número de *stubs* de acordo com o seu grau desejado. Em seguida, pares de *stubs* são selecionados aleatoriamente e conectados para formar as arestas da rede. Essas conexões, representadas por linhas tracejadas, ilustram o processo de emparelhamento aleatório dos *stubs*. Ao final, o modelo garante que os graus dos vértices correspondam exatamente aos valores desejados, resultando em uma rede com a distribuição de graus especificada

O resultado final consiste em um conjunto específico de pares de *stubs* conectados entre si, conforme ilustrado na figura 1. O processo anterior gera todas as possíveis correspondências entre os *stubs* com igual probabilidade. Tecnicamente, o modelo de configuração é definido como o conjunto no qual cada correspondência com a sequência de graus escolhida aparece com a mesma probabilidade (enquanto aquelas com qualquer outra sequência de graus têm probabilidade zero). Além disso, o processo acima representa um método para criar redes a partir do conjunto do modelo de configuração [Newman, 2010].

Existem algumas questões a serem consideradas no processo de geração de redes conforme descrito anteriormente. Em primeiro lugar, é crucial que haja um número par de *stubs* no total, a fim de criar uma rede consistente composta apenas de vértices e arestas, sem *stubs*

pendentes. Isso implica que a soma dos graus $\sum_i k_i$ deve resultar em um número par. Partimos do pressuposto de que os graus escolhidos atendem a essa condição, pois, caso contrário, não seria possível criar um grafo com a sequência de graus dada. Um segundo desafio é que a rede resultante pode conter autoloops (arestas que conectam um vértice a si mesmo) ou múltiplas arestas entre os mesmos vértices. O processo de geração de rede descrito não impede a criação dessas estruturas. Uma rede gerada dessa forma já não segue uma distribuição uniforme a partir do conjunto de todas as combinações possíveis, o que significa que suas propriedades não podem ser calculadas analiticamente, pelo menos com os métodos atualmente conhecidos. Além disso, esse problema pode causar a interrupção completa do processo de geração da rede. Por exemplo, ao chegar ao final do processo, quando restam apenas dois *stubs* para serem conectados, descobrimos que ambos pertencem ao mesmo vértice, resultando na criação de um autoloop. Nesse caso, é necessário decidir entre criar o autoloop ou considerar o processo de geração de rede como falho.

Embora algumas redes do mundo real contenham autoloops ou múltiplas arestas, a maioria não possui essas características, o que, em certa medida, torna o modelo de configuração menos satisfatório como modelo de rede. No entanto, à medida que o tamanho da rede aumenta, o número médio de autoloops e múltiplas arestas permanece constante, o que implica que a densidade dessas estruturas tende a zero para redes suficientemente grandes. Isso significa que, para todos os fins práticos, podemos negligenciar autoloops e múltiplas arestas no limite de tamanho grande.

Em um grafo construído pelo método de configuração, a distribuição de grau é um parâmetro, isto é, uma escolha. Dessa forma, a rede pode ter a distribuição que desejamos. A distribuição de grau desempenha um papel fundamental na caracterização das propriedades estruturais de uma rede. Ao ajustar a distribuição de grau em um grafo configuracional, podemos moldar a topologia da rede de acordo com nossos objetivos. Redes com distribuições de grau heterogêneas, por exemplo, tendem a exibir hubs, nós altamente conectados que desempenham um papel importante na disseminação de informações. Por outro lado, redes com distribuições de grau homogêneas podem ser mais resilientes a falhas, mas podem apresentar menos eficiência na disseminação de informações [Albert e Barabási, 2002].

Apesar de suas vantagens na geração de redes com distribuições de graus específicas, o modelo configuracional tradicional carece das correlações entre vértices [Newman, 2003]. Essa limitação resulta na criação de redes que nem sempre espelham as propriedades observadas em redes reais, como a formação de agrupamentos e triângulos. Como resultado, para capturar de maneira mais fiel essas características intrínsecas das redes reais, torna-se necessário considerar um modelo alternativo que leve em consideração a presença de triângulos.

2.3.2 Probabilidade do Modelo Configuracional

Uma propriedade central do modelo configuracional é a probabilidade p_{ij} da ocorrência de uma aresta entre dois vértices especificados, i e j . Obviamente, se o vértice i ou o vértice j tiver grau zero, então a probabilidade p_{ij} é zero.

Vamos supor que k_i e $k_j > 0$. Agora considere qualquer um dos *stubs* que emerge do vértice i . Existem $2m$ *stubs* no total, ou $2m - 1$ excluindo aquele conectado ao i que estamos analisando atualmente. Desses $2m - 1$, exatamente k_j deles estão anexados ao vértice j . Então, dado que qualquer *stub* na rede tem a mesma probabilidade de estar conectado a qualquer outro, a probabilidade de que nosso *stub* específico esteja conectado a qualquer um daqueles ao redor do vértice j é $\frac{k_j}{(2m-1)}$. Mas existem k_i *stubs* em torno do vértice i , então a probabilidade total de uma conexão entre i e j é

$$p_{ij} = \frac{k_i k_j}{2m - 1}. \quad (2.10)$$

Do ponto de vista técnico, ao somarmos as probabilidades de eventos independentes, estamos calculando a média do número de arestas entre i e j , em vez da probabilidade de que haja alguma aresta entre eles. Entretanto, à medida que m aumenta, esse número se torna pequeno (para valores específicos de k_i e k_j), e a média do número de arestas se aproxima da probabilidade de que haja pelo menos uma aresta. Além disso, no limite de m grande, podemos negligenciar o termo -1 no denominador, e assim podemos escrever:

$$p_{ij} = \frac{k_i k_j}{2m}. \quad (2.11)$$

Assim, o modelo configuracional oferece uma maneira de calcular a probabilidade de existência de uma aresta entre dois vértices específicos, levando em consideração seus graus e a distribuição dos *stubs* na rede. Embora tecnicamente estejamos calculando a média do número de arestas entre esses vértices, à medida que o tamanho da rede (m) aumenta, essa média se aproxima da probabilidade de que pelo menos uma aresta exista entre eles [Newman, 2010]. A distribuição de graus, representada por $P(k)$, descreve a probabilidade de um vértice em nossa rede ter um certo número de conexões, ou grau.

Uma questão importante que surge ao trabalhar com o modelo configuracional é calcular a probabilidade de que, ao seguir uma das arestas de um vértice, cheguemos a um vértice com um grau específico, k . Inicialmente, pode parecer que essa probabilidade seria simplesmente igual a $P(k)$, mas essa suposição está incorreta. A razão para isso é que existem casos em que a probabilidade é zero. Por exemplo, se começarmos em um vértice que não possui nenhuma aresta (um grau zero), não há como seguir uma aresta e encontrar um vértice com grau k . Portanto, a probabilidade de encontrar um vértice de grau zero seguindo uma aresta é zero, e não p_0 , como poderíamos inicialmente pensar.

A expressão correta para calcular essa probabilidade é $\frac{k}{2m}$, onde k é o grau do vértice inicial e $2m$ é o número total de *stubs* de arestas na rede. Isso significa que a probabilidade de chegar a um vértice com grau k ao seguir uma aresta é diretamente proporcional ao grau do vértice de partida, k , e inversamente proporcional ao número total de *stubs* de arestas na rede, $2m$. Dado que $P(k)$ é a fração total de vértices na rede com grau k , o número total de tais vértices é $NP(k)$, e, portanto, a probabilidade de nossa aresta se conectar a qualquer vértice com grau k é:

$$\frac{k}{2m}NP(k) = \frac{kP(k)}{\langle k \rangle}. \quad (2.12)$$

Todavia, essa equação apresenta algumas consequências contra-intuitivas. Como exemplo, considere um vértice escolhido aleatoriamente no modelo configuracional e vamos calcular o grau médio de um vizinho desse vértice, este número é a média da distribuição na Eq. (2.12):

$$\sum_k k \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}. \quad (2.13)$$

Note que o grau médio de um vizinho é, portanto, diferente do grau médio k de um vértice típico da rede.

Nesse sentido, o número de arestas conectadas a um vértice, excluindo a aresta pela qual chegamos a ele, é conhecido como grau de excesso do vértice e é simplesmente um a menos do que o grau total do vértice. Dado que todo vértice no final de uma aresta tem pelo menos um grau (devido a essa aresta), o valor mínimo para o grau de excesso é zero. Podemos calcular a distribuição de probabilidade do grau de excesso a partir da Equação (2.12). A probabilidade q_k de ter um grau de excesso igual a k é simplesmente a probabilidade de ter um grau total igual a $k + 1$. Para fazer isso, basta substituir k por $k + 1$ na Equação (2.12), obtendo assim [Newman, 2010]:

$$q_k = \frac{(k+1)P(k+1)}{\langle k \rangle}. \quad (2.14)$$

A distribuição $q(k)$ é a distribuição de grau excessivo *excess degree distribution*. Em outras palavras, quando escolhemos aleatoriamente uma aresta e seguimos para um vértice adjacente, $q(k)$ representa o número de outras arestas conectadas a esse vértice, excluindo a aresta que escolhemos e, portanto, excluindo o vértice de origem.

2.3.3 Coeficiente de Agrupamento (Clustering Coefficient)

Considere um vértice v que possui pelo menos dois vizinhos, que denotaremos como i e j . Uma vez que i e j são vizinhos de v , ambos estão nas extremidades das arestas que conectam a v , e, portanto, o número de outras arestas conectadas a eles, k_i e k_j , segue a distribuição de graus em excesso.

A probabilidade de existir uma aresta entre i e j é então $\frac{k_i k_j}{2m}$ (conforme a Eq. 2.13). Calculando a média de k_i e k_j sobre a distribuição q_k , obtemos uma expressão para o coeficiente de agrupamento da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{k_i k_j=0}^{\infty} q_{k_i} q_{k_j} \frac{k_i k_j}{2m} \\
 &= \frac{1}{2m} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k q_k \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2m \langle k \rangle^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) p_{k+1} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2m \langle k \rangle^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k-1) k p_k \right]^2 \\
 &= \frac{1}{N} \frac{[\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle]^2}{\langle k \rangle^3}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

O coeficiente de agrupamento mede o grau de agrupamento de vértices na rede, ou seja, quantifica quão provável é que os vizinhos de um vértice também sejam vizinhos entre si. Em redes com distribuições de graus fixas, onde todos os vértices têm aproximadamente o mesmo grau, essa expressão tende a zero à medida que o tamanho da rede (N) aumenta. Isso significa que, em redes muito grandes com distribuições de graus fixas, o coeficiente de agrupamento previsto pelo modelo configuracional se aproxima de zero, o que não reflete adequadamente as características das redes do mundo real que frequentemente apresentam alto grau de agrupamento [Newman, 2010].

Por outro lado, em redes com distribuições de graus que seguem uma lei de potência (*power-law*), o segundo momento da distribuição de graus pode ser significativo. Isso pode levar a valores surpreendentemente altos para o coeficiente de agrupamento (C_i) no modelo configuracional. Em outras palavras, em redes com distribuições de graus altamente variáveis, o coeficiente de agrupamento previsto pelo modelo configuracional pode ser consideravelmente maior do que o esperado. No entanto, é importante destacar que esse aumento do coeficiente de agrupamento em redes de lei de potência está relacionado ao segundo momento da distribuição de graus e não necessariamente reflete um maior grau de agrupamento real na rede.

A presença de um alto coeficiente de clustering nas redes reais destaca uma limitação significativa dos modelos configuracionais. Os modelos configuracionais são frequentemente utilizados para criar redes sintéticas que preservem certas propriedades, como a distribuição de graus, mas eles geralmente não conseguem capturar adequadamente o alto coeficiente de clustering observado nas redes reais. Analisemos o caso das redes reais listados na tabela 1.

Rede	$\langle k \rangle$	N	C	r
Advogato	7.82	6.541	0.11	-0.05
Budapest Connectome	141.09	1.015	0.56	0.03
Dutch School	3.50	26	0.51	0.35

Tabela 1 – Rede Advogato: Uma rede de relações de confiança entre usuários do Advogato, uma comunidade online de desenvolvedores de software de código aberto;

Rede Budapest Connectome: Um grafo de conexões cerebrais, derivado de conectomas de pessoas calculados a partir de conjuntos de dados de ressonância magnética do Projeto Conectoma Humano;

Rede Dutch School: Uma série de laços de amizades entre calouros de uma escola secundária na Holanda.

Observamos que todas as três redes têm um coeficiente de clustering (C) relativamente alto, com valores de 0.11, 0.56 e 0.51, respectivamente. Isso indica que em cada uma dessas redes, os nós tendem a estar agrupados e conectados entre si. Esse alto coeficiente de clustering é uma característica proeminente das redes reais [Watts; Strogatz, 1998].

2.3.4 Limitações do Modelo Configuracional

Uma das principais limitações do modelo configuracional de redes é sua incapacidade de incorporar correlações entre os graus dos vértices. Em redes reais, é frequentemente observado que nós com alto grau de conectividade tendem a se conectar a outros nós que também apresentam alta conectividade. Esse fenômeno gera agrupamentos naturais e exerce influência sobre a dinâmica da rede [Newman, 2003]. No entanto, o modelo configuracional falha em capturar essa característica, resultando em limitações que não refletem de maneira fidedigna a estrutura complexa das redes reais. Por exemplo, em uma rede social, onde indivíduos com muitos amigos tendem a se conectar com outros indivíduos igualmente conectados, o modelo configuracional não consegue reproduzir essa tendência, comprometendo a validade das redes geradas. Além disso, em um grafo configuracional, a distribuição de grau é tratada como um parâmetro, ou seja, uma escolha, o que permite moldar a rede com base na distribuição desejada.

Nesse contexto, conforme apontado anteriormente, o modelo clássico de configuração de redes se estabelece como uma ferramenta fundamental para a análise e compreensão das estruturas de redes complexas. Todavia, apesar das suas numerosas vantagens e aplicações, o modelo apresenta limitações, principalmente no que tange à ausência de correlações entre os vértices, o que resulta na criação de redes que nem sempre refletem as propriedades observadas em redes reais. Um aspecto particularmente relevante para a presente pesquisa é a propriedade de agrupamento, que descreve a tendência de formação de triângulos.

Um dos objetivos centrais da ciência de redes é o aprimoramento de modelos para a representação de sistemas complexos reais. Para atingir esse objetivo, é essencial uma caracterização detalhada da estrutura das redes, permitindo uma compreensão mais profunda dos processos dinâmicos que ocorrem sobre elas. Embora a topologia das redes do mundo real tenha

tido amplamente mapeada e analisada por meio de diferentes conjuntos de dados, métodos e métricas estatísticas, ainda persiste uma lacuna no entendimento de como determinadas estruturas topológicas influenciam os processos dinâmicos que nelas ocorrem.

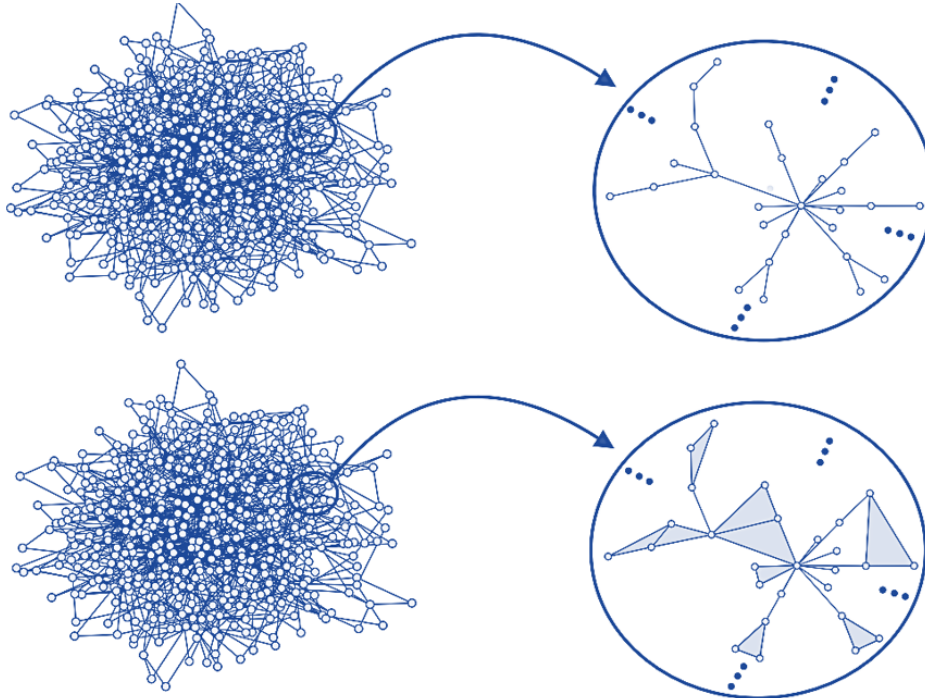


Figura 2 – **Rede Aleatória x Rede Real:** Temos na primeira imagem a ilustração de uma rede aleatória que, ao ser ampliada, revela uma estrutura semelhante a uma árvore, onde podemos discernir a disposição dos nós e das arestas de forma mais detalhada. Já na segunda imagem, temos uma ilustração de uma rede real cuja topologia local exibe a presença de triângulos na rede.

Devido às suas características, o modelo configuracional pode subestimar ou distorcer resultados em processos dinâmicos que dependem de agrupamentos e triângulos. Em cenários de propagação, onde a disseminação de informações, doenças, entre outros, é influenciada pela formação de comunidades interconectadas e triângulos, o modelo configuracional pode ser inadequado para modelar tais dinâmicas de maneira precisa. Por exemplo, ao considerar a propagação de uma epidemia em um cenário realístico, a aceleração da disseminação devido à formação de triângulos não pode ser adequadamente representada pelo modelo configuracional. Conforme ilustrado na Figura 2, a diferença entre redes aleatórias e redes reais demonstra a necessidade de abordagens mais sofisticadas para compreender processos dinâmicos em redes reais.

Devido às suas características, o modelo configuracional pode subestimar ou distorcer resultados em processos dinâmicos que dependem de agrupamentos e triângulos. Em cenários de propagação, onde a disseminação de informações, doenças, entre outros, é influenciada pela formação de comunidades interconectadas e triângulos, o modelo configuracional pode ser inadequado para modelar tais dinâmicas de maneira precisa. Por exemplo, ao considerar a propagação de uma epidemia em um cenário realístico, a aceleração da disseminação devido à

formação de triângulos não pode ser adequadamente representada pelo modelo configuracional. Isso é ilustrado na Figura 2, que mostra a diferença entre redes aleatórias e redes reais.

Dessa forma, embora o modelo configuracional seja útil na geração de redes com distribuições de graus específicas, suas limitações na reprodução de estruturas mais complexas e na captura de processos dinâmicos importantes destacam a importância de buscar alternativas mais avançadas. Para uma representação mais precisa e abrangente de redes do mundo real, é fundamental explorar modelos que possam incorporar efetivamente correlações de graus, formação de triângulos e outras estruturas complexas.

2.4 O Modelo Newman-Miller

O modelo proposto de forma independente por Newman e Miller pode ser interpretado como uma extensão do modelo de configuração padrão [Newman, 2009, Miller, 2009]. No modelo de configuração padrão, começa-se especificando a distribuição desejada dos graus, geralmente denotada como $P(k)$. A partir dessa distribuição, é gerada uma sequência de graus (k_i , onde $i = 1, \dots, N$) que determina o número de conexões atribuídas a cada nó. Posteriormente, a rede é construída combinando aleatoriamente as meias arestas para formar arestas completas.

Por sua vez, o processo de criação de rede no modelo de Newman-Miller é bastante similar. No entanto, a distinção crucial é que agora se torna necessário especificar duas sequências de graus independentes. Uma delas representa o número de arestas exclusivas (ou seja, aquelas que não participam de triângulos), enquanto a outra sequência determina quantos triângulos estão conectados a cada nó. Essa abordagem oferece uma maneira de investigar os efeitos dos triângulos e outras propriedades topológicas nas redes complexas [Miller, 2009].

Sejam s_i e $t_{\Delta i}$ o número de arestas simples e triângulos anexados ao nó i , respectivamente. Dada a sequência de graus conjuntos $\{s_i, t_{\Delta i}\}$ ($i = 1, \dots, N$), cria-se a rede unindo os "stubs" de modo que o número de arestas simples e triângulos inicialmente definido para cada nó seja satisfeito, conforme ilustrado na figura 3.

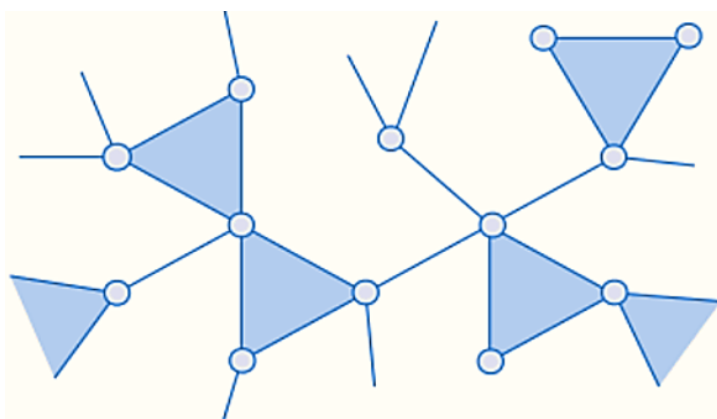


Figura 3 – Exemplo de atribuição de arestas simples e triângulos

Podemos implementar computacionalmente esse modelo com o seguinte algoritmo:

- Crie duas listas: uma lista de *stubs* de arestas simples independentes e uma lista de *stubs* de triângulos;
- Insira o rótulo do nó i na primeira lista s_i vezes e na segunda lista $t_{\Delta i}$ vezes. Após essa inserção, embaralhe as duas listas;
- As conexões de rede são então criadas juntando o par de nós nas posições 2_n e 2_{n+1} na lista de *stubs* de arestas simples e unindo os nós nas posições 3_n , 3_{n+1} e 3_{n+2} na lista de *stubs* de triângulos. Auto-loops e múltiplas arestas podem surgir usando esta abordagem, porém a probabilidade de sua ocorrência desaparece quando $N \rightarrow \infty$ [Newman, 2009].

2.4.1 Distribuição de Grau

Seja $P(s, t_{\Delta})$ a distribuição de probabilidade conjunta de nós com s arestas simples e t_{Δ} . O grau tradicional de um nó em termos de s e t_{Δ} é obtido como $k = s + 2t_{\Delta}$, pois um triângulo contribui com 2 para o grau total. Assim, a distribuição de graus tradicional $P(k)$ está relacionada a $P(s, t_{\Delta})$ por:

$$P(k) = \sum_{s, t_{\Delta}=0}^{\infty} P(s, t_{\Delta}) \delta_{k, s+2t_{\Delta}} \quad (2.16)$$

2.4.2 Transitividade

A transitividade da rede pode ser calculada diretamente usando as distribuições $P(s, t_{\Delta})$ e $P(k)$ observando que o número total de triângulos na rede é dado por

$$N_{\Delta} = \frac{1}{3} N \sum_{s, t_{\Delta}} t_{\Delta} P(s, t_{\Delta}) \quad (2.17)$$

E o número de tríades:

$$N_3 = N \sum_k \binom{k}{2} P(k) \quad (2.18)$$

Dessa forma, substituindo 2.17 e 2.18 em 2.6:

$$C = \frac{\sum_{s, t_{\Delta}} t_{\Delta} P(s, t_{\Delta})}{\sum_k \binom{k}{2} P(k)} \quad (2.19)$$

Note que C não depende de N como no modelo configuracional tradicional. Por fim, ao variar a quantidade de triângulos conectados a cada nó, é possível criar conjuntos de redes que exibem diferentes graus de transitividade.

2.5 Modelo Maki-Thompson

O "Modelo Maki-Thompson," também conhecido como "Modelo de Contágio com Esquecimento," é um modelo matemático empregado para analisar a disseminação de informações, rumores, ou até mesmo doenças em redes complexas. Este modelo foi concebido pelos físicos Makoto Maki e Michael J. Thompson [Maki and Thompson, 1985], e descreve como informações ou estados podem se propagar entre os nós de uma rede ao longo do tempo.

No Modelo Maki-Thompson, cada nó em uma rede representa um indivíduo, podendo esses indivíduos estar em um de dois estados possíveis: informados ou desinformados. A propagação ocorre à medida que os nós informados transmitem a informação para os nós desinformados através de suas conexões. Adicionalmente, o modelo incorpora um mecanismo de esquecimento, implicando que, com o passar do tempo, os nós informados podem retornar ao estado desinformado com uma taxa preestabelecida. Denotando por Y os ignorantes, indivíduos que não estão cientes de um rumor, por X os propagadores, que sabem e estão dispostos a espalhá-lo e, finalmente, Z os repressores, indivíduos que estão cientes do rumor, mas não estão dispostos a espalhá-lo (eles perderam o interesse). Além disso, temos a taxa de propagação do rumor λ e a taxa de desistência do rumor α [Maki and Thompson, 1973]. Assim, podemos definir as regras do modelo como:

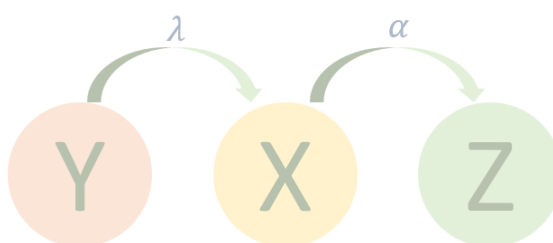


Figura 4 – **O Modelo Maki Thompson:** As setas representam uma transição espontânea e os estados dos nós são representados no centro dos círculos. Quando um propagador entra em contato com outro propagador, apenas o indivíduo que iniciou o contato se transforma em repressor.

A Figura 4 ilustra o funcionamento do modelo Maki-Thompson. As setas indicam as possíveis transições entre estados, e os círculos representam indivíduos na rede. Como destacado na legenda, quando dois propagadores interagem, apenas aquele que iniciou o contato se torna um repressor, enquanto o outro continua propagando o rumor. Esse modelo é amplamente utilizado para estudar a disseminação de informações em redes sociais e entender como boatos podem se espalhar e desaparecer ao longo do tempo.

A propagação da epidemia geralmente é intensificada pela presença de hubs. No entanto, quando se trata da disseminação de informações, os hubs têm efeitos contraditórios: eles podem, em teoria, alcançar um grande número de nós, mas também promovem muitas interações entre propagadores e repressores. Isso faz com que eles atuem como repressores antes de conseguirem informar todos os seus vizinhos [Barrat et al., 2008].

Os hubs também desempenham um papel quando são considerados como pontos de partida, ou seja, como a fonte inicial de informação. O grau do nó inicialmente informado não influencia a confiabilidade final do processo, mas um grau mais elevado resulta em um crescimento mais rápido de $r(t)$ [Barrat et al., 2008]. Essas descobertas ressaltam a importância dos hubs bem conectados na eficácia dos processos de disseminação de rumores/informações: quando o objetivo do processo é alcançar um determinado nível de confiabilidade, começar com nós bem conectados permite atingir esse nível rapidamente.

Todavia, devido às propriedades de percolação presentes em redes heterogêneas, a restrição da propagação em uma pequena porção dos hubs causará a fragmentação da rede em componentes não conectados, isolando diversos nós que, conseqüentemente, nunca receberão a informação. Simulações numéricas também possibilitam a medição da densidade final de ignorantes em cada classe de grau, revelando que ela diminui de maneira exponencial conforme o grau. Esse achado sugere que os hubs efetivamente absorvem os rumores ou informações de forma altamente eficaz: do ponto de vista dos hubs, uma alta confiabilidade é alcançada mesmo quando os valores de α são elevados.

O ponto central deste modelo é que a disseminação da informação é influenciada não somente pelas taxas de propagação, mas também pelo processo de esquecimento ao longo do tempo. Isso pode resultar em padrões dinâmicos complexos, onde a informação pode ou não se espalhar por toda a rede, dependendo das taxas e da estrutura da rede em questão. Este modelo tem sido aplicado para compreender uma variedade de fenômenos relacionados à disseminação em redes complexas, incluindo a difusão de boatos, a disseminação de informações falsas, a propagação de doenças e até mesmo a disseminação de inovações em redes sociais [Arruda, Rodrigues e Moreno, 2018].

Para implementar computacionalmente a dinâmica de disseminação de rumores, conforme descrito em [Arruda et al., 2022], consideramos as seguintes quantidades: N_x , que representa o número de indivíduos propagadores; M_x , correspondente à quantidade de arestas conectadas a esses propagadores; e N_z , que indica o número de indivíduos repressores. As

taxas que regulam a evolução do modelo são: λ , a taxa de propagação do rumor, indicando a probabilidade de um ignorante (Y) se tornar propagador (X) ao interagir com um propagador; α , a taxa de desistência do rumor, indicando a probabilidade de um propagador (X) se tornar um repressor (Z) após encontrar outro propagador ou um repressor; e δ , a taxa associada ao esquecimento do rumor pelos indivíduos repressores, permitindo que eles retornem ao estado de ignorantes.

A cada iteração, ocorre uma das duas possíveis atualizações. Com probabilidade $\frac{\delta N_z}{\delta N_z + (\lambda + \alpha) M_x}$ um indivíduo do grupo de repressores, selecionado aleatoriamente, esquece o rumor e retorna ao estado de ignorante. Por outro lado, com probabilidade $\frac{(\lambda + \alpha) M_x}{\delta N_z + (\lambda + \alpha) M_x}$ um novo contato ocorre entre os indivíduos da rede. Esse contato é implementado algoritmicamente em dois passos:

1. Um propagador i é escolhido com uma probabilidade proporcional ao seu grau na rede.
2. Um vizinho de i , denotado por j , é selecionado aleatoriamente.
 - Caso j seja um ignorante, ele se torna um propagador com probabilidade $\frac{\lambda}{\lambda + \alpha}$.
 - Se j for outro propagador ou um repressor, ele passa a ser um repressor com probabilidade $\frac{\alpha}{\lambda + \alpha}$.
 - Caso nenhuma dessas situações ocorra, o estado dos indivíduos permanece inalterado.

Após essa interação, o tempo é atualizado de acordo com $dt = \frac{1}{\delta N_z + (\lambda + \alpha) M_y}$. No caso em que $\delta > 0$, o modelo apresenta um único estado absorvente, correspondente à extinção completa do rumor. Já quando $\delta = 0$, a dinâmica depende fortemente das condições iniciais, resultando em múltiplos estados absorventes.

2.5.1 Relevância do Modelo Maki Thompson

Uma das principais razões para a adoção do modelo Maki-Thompson é sua tratabilidade analítica. A simplificação das regras de interação, proposta por Maki e Thompson em 1973, possibilitou a obtenção de resultados analíticos que seriam significativamente mais difíceis de alcançar em modelos mais complexos. Essa característica abre caminho para análises teóricas mais detalhadas e fundamenta o desenvolvimento de novas abordagens analíticas. Além disso, por uma conveniência matemática, Maki e Thompson modificaram a regra de aniquilação dos modelos de propagação de rumores, considerando apenas contatos diretos. Nesse contexto, quando um espalhador entra em contato com outro espalhador, apenas o indivíduo que iniciou o contato se torna um *stifler*. Essa mudança, inicialmente motivada por conveniência analítica, possibilitou avanços significativos na compreensão matemática da dinâmica de rumores.

Embora este trabalho enfatize abordagens experimentais e numéricas, o uso de um modelo analiticamente tratável assegura que os resultados obtidos possam ser validados e ampliados por estudos futuros. Produzir resultados para um modelo dessa natureza contribui para

o campo ao permitir que análises teóricas complementem as evidências empíricas apresentadas. Adicionalmente, o modelo Maki-Thompson, apesar de originalmente concebido para redes tradicionais sem clustering significativo, oferece uma base promissora para estudos em redes com estrutura mais sofisticada do que a gerada pelo modelo configuracional. Este trabalho explora seu comportamento em redes Poisson clusterizadas, que apresentam propriedades mais alinhadas às observadas em sistemas reais.

Contudo, essa combinação de tratabilidade analítica e exploração de redes mais realistas justifica a adoção do modelo Maki-Thompson neste estudo, destacando sua relevância tanto para o desenvolvimento teórico quanto para aplicações práticas no estudo da propagação de rumores, além de permitir que, no futuro, outros pesquisadores possam calcular analiticamente o que foi verificado experimentalmente neste estudo.

2.6 Investigações Anteriores sobre o Impacto de Triângulos na Dinâmica

A presença de triângulos desempenha um papel crucial em diversos processos dinâmicos em redes complexas, moldando não apenas a topologia das redes, mas também influenciando sua dinâmica e funcionalidade. Nesta seção, discutiremos alguns trabalhos anteriores que abordam essa questão.

Os agrupamentos intrínsecos às redes são quantificados por meio do coeficiente de aglomeração, também conhecido como fenômeno de transitividade. Considere a analogia com uma rede social. Nesse caso, pode-se dizer que se A é amigo de B e B é amigo de C, existem grandes chances de A e C também serem amigos. Em outras palavras, a transitividade indica a presença de um número elevado de triângulos na rede, ou seja, conjuntos de três vértices conectados uns aos outros [Newman, 2009].

Os triângulos têm o poder de acelerar a propagação de informações e influências em uma rede. Em redes sociais e sistemas de recomendação, a existência de triângulos facilita a disseminação rápida de conteúdo e opiniões devido às conexões diretas entre vértices. Além disso, a formação de triângulos cria rotas alternativas para a disseminação viral de informações, encurtando os caminhos entre vértices interconectados [Christakis and Fowler, 2009]. Isso não apenas molda a arquitetura das redes, mas também influencia a maneira como essas redes respondem a estímulos e perturbações.

Os triângulos também desempenham um papel significativo na propagação de epidemias. A configuração triangular aumenta a probabilidade de contágio, permitindo que doenças se espalhem mais rapidamente entre vértices interligados [Watts; Strogatz, 1998, Kiss et al., 2017]. Isso é fundamental na modelagem e previsão de surtos de doenças, ajudando a entender como a estrutura das redes afeta a propagação de infecções.

Além disso, em redes que representam sistemas dinâmicos, como osciladores acoplados, a formação de triângulos pode induzir a sincronização entre os nós. Configurações de três nós podem levar a alinhamentos de fase que resultam em sincronização coletiva [Peron, 2017].

A presença dos triângulos também contribui para a resiliência de redes complexas a falhas em cascata. Em cenários de falhas, os triângulos fornecem rotas alternativas de comunicação e transmissão de informações, mitigando os efeitos dessas falhas. Eles oferecem diversidade de rotas e aumentam a confiabilidade da rede, especialmente em situações de interrupções ou ataques [Hackett et al., 2011].

Além disso, os triângulos podem criar clusters densamente conectados, promovendo a coesão interna e a disseminação localizada de informações. No entanto, é importante observar que, em alguns casos, a predominância de triângulos pode limitar a propagação em escala global, concentrando-a em partes específicas da rede [Barrat et al., 2008]. Assim, os triângulos influenciam uma ampla gama de processos dinâmicos em redes complexas.

Contudo, vimos que o modelo configuracional gera redes que possuem estruturas similares a grafos do tipo árvore, isto é, não possuem triângulos. Vimos também que redes reais exibem valores altos para o clustering coefficient (ou seja, possuem triângulos). Disso surge a necessidade de entender como essas estruturas, os triângulos, afetam o comportamento dinâmico das redes. Esse problema foi, de fato, abordado em contextos diferentes, como nas referências citadas acima. Porém, esses estudos utilizaram modelos de religação estocástica, que, apesar de criar triângulos mantendo a distribuição de grau fixa, modifica significativamente outras propriedades topológicas, como menor caminho médio e assortatividade [McGraw e Menzinger, 2008]. Neste trabalho, investigaremos a propagação de rumores em redes criadas pelo modelo de Newman-Miller, com o qual é possível controlar o número de triângulos mantendo outras propriedades aproximadamente fixas.

RESULTADOS

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo principal deste trabalho é investigar como o subgrafo mais simples encontrado em redes reais, os triângulos, afeta a dinâmica de propagação de rumores. Vale ressaltar que os triângulos são ausentes em redes aleatórias, no limite de redes grandes ($N \rightarrow \infty$) [Newman, 2009]. Embora o contexto de propagação de rumores tenha sido amplamente explorado na literatura, a influência específica dos triângulos ainda não foi abordada de forma sistemática [Arruda, Rodrigues e Moreno, 2018], ao contrário de outras dinâmicas que já foram extensivamente estudadas [Kiss et al., 2017, Rodrigues, 2016, Stegehuis and Peron, 2021].

Conforme discutimos anteriormente, a técnica estatística conhecida como modelo configuracional desempenha um papel importante na geração de redes aleatórias com distribuições de graus predeterminadas. Nesse modelo, cada vértice é associado a um grau específico, e as conexões entre vértices são então estabelecidas de forma a alinhar-se com esses graus previamente definidos. Entretanto, o modelo configuracional, apesar de sua utilidade na geração de redes com distribuições de graus específicas, enfrenta desafios significativos que afetam sua capacidade de representar adequadamente redes complexas do mundo real.

Nesse capítulo, discutiremos a parametrização das redes com clustering que posteriormente utilizaremos no estudo da propagação de rumores.

3.1 Implementação

Nesta seção, abordaremos a implementação do modelo Newman-Miller [Newman, 2009, Miller, 2009] fornecendo uma visão geral abrangente do processo de implementação, destacando a metodologia, os recursos e as etapas cruciais envolvidas.

Para iniciarmos a implementação do modelo Newman Miller, definimos uma distribuição conjunta $P(s, t) = P(s)P(t)$, onde $P(s)$ é a probabilidade de que nós formarão outras arestas e

$P(t)$ é a probabilidade de que nós formarão triângulos. Consideramos ambos $P(s)$ e $P(t)$ como distribuições de Poisson, sendo assim uma extensão direta do grafo aleatório Erdős–Rényi para o caso de triângulos. Portanto, definimos:

$$P(s,t) = P(s) \cdot P(t) = \frac{e^{-\langle s \rangle} \cdot \langle s \rangle^s}{s!} \cdot \frac{e^{-\langle t \rangle} \cdot \langle t \rangle^t}{t!}, \quad (3.1)$$

onde $\langle s \rangle$ e $\langle t \rangle$ são os graus médios das sequências de *single edges* e triângulos respectivamente.

Em essência, para construção do grafo, geram-se as sequências de variáveis aleatórias s_1, s_2, \dots, s_n e t_1, t_2, \dots, t_n seguindo uma *Poisson* com média $\langle s \rangle$ e $\langle t \rangle$, ou seja, $s \sim \text{Poisson}(\langle s \rangle)$ e $t \sim \text{Poisson}(\langle t \rangle)$. Dessa forma, contruímos o grafo aleatório Erdős–Rényi para o caso de triângulos.

Neste contexto, definimos um grafo G em termos do tamanho da rede (N), o grau médio $\langle k \rangle$ e a constante f , definida em $f \in [0, 1]$, onde 0 indica a ausência de formação de triângulos na rede e 1 indica que a rede consiste apenas em triângulos, ou seja, $t = f \cdot k$ e $s = (1 - f) \cdot k$. Assim, gera-se uma sequência de variáveis aleatórias *Poisson* de parâmetro k de forma a obter k_1, k_2, \dots, k_n fixa e variabilidade apenas em f a fim de controlar a proporção de triângulos e *single edges* das redes geradas de forma a verificar as propriedades críticas da rede em função de f .

3.1.1 Investigando Propriedades das Redes em Função do Clustering

No paradigma do modelo configuracional, observamos uma abordagem mais controlada para a formação de triângulos em comparação com o modelo de religação estocástica. Embora isso proporcione uma estrutura mais previsível, ainda há variações na assortatividade da rede. Nesse contexto, a assortatividade segue uma trajetória parabólica, evidenciando mudanças distintas [Huang et al., 2013]. Nos pontos extremos da escala, onde não há formação de triângulos (0) ou quando todos os nós estão conectados em triângulos (1), não é observada assortatividade, resultando em um alto coeficiente de agrupamento. No entanto, à medida que aumentamos o grau médio dos nós, a curva de assortatividade tende a diminuir progressivamente, conforme será evidenciado posteriormente.

Dessa forma, concentrando nossa análise no caso extremo, podemos entender tanto o impacto significativo de um triângulo quanto a ausência de problemas relacionados à assortatividade quando comparado ao cenário de referência, no qual não há formação de triângulos.

De acordo com as análises efetuadas nos estudos de [McGraw e Menzinger, 2008], ao construir agrupamentos em uma rede, geralmente é impossível evitar a geração de correlações grau-grau. Diante disso, é apresentada uma expressão analítica da correlação de grau como função do coeficiente de agrupamento para uma rede duplamente Poisson agrupada 3.1.

Assim, a correlação grau a grau é calculada por [Huang et al., 2013]:

$$\rho_D = \frac{N_1 N_3 - N_2^2}{N_1 \sum_{i=1}^N k_i^3 N_2^2}, \quad (3.2)$$

onde N_m é o número total de caminhadas de m saltos entre todos os pares de nós possíveis (i, j) , incluindo os casos em que $i = j$. No contexto de redes, uma caminhada de m saltos é uma sequência de m arestas consecutivas que conectam dois nós, podendo incluir repetições de nós ou arestas. Por exemplo, uma caminhada de 1 salto indica que dois nós são vizinhos diretos, enquanto uma caminhada de 2 saltos envolve a passagem por um nó intermediário [Huang et al., 2013].

O número de caminhadas de três saltos (N_3) pode ser representado de diferentes maneiras: como a soma das caminhadas de dois saltos de todos os nós, onde cada caminhada é contabilizada de acordo com o grau do nó inicial; ou em termos das probabilidades P_{st} e do número total de caminhadas de dois saltos (N_2). Logo, podemos escrever ρ_D como [Huang et al., 2013], veja também o Apêndice 4:

$$\rho_D = \frac{c - c^2 - \langle k \rangle \cdot c^2}{1 - c + \langle k \rangle \cdot c - 2 \cdot \langle k \rangle \cdot c^2} \quad (3.3)$$

Esta função calcula a correlação de grau ρ_D como função do coeficiente de agrupamento c e no grau médio k de uma rede.

Essa expressão mostra que a correlação de grau (ρ_D) é uma função não linear do coeficiente de agrupamento (c) e do grau médio (k). Ela descreve como a estrutura local de agrupamento na rede influencia a correlação entre os graus dos nós. Em particular, a correlação de grau aumenta com o coeficiente de agrupamento até certo ponto, após o qual diminui novamente, refletindo a interação complexa entre o *clustering* local e global na rede.

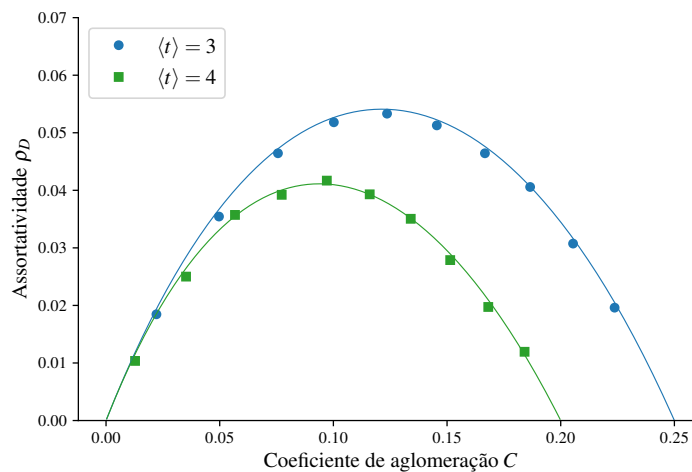


Figura 5 – Correlação grau-grau como função do coeficiente de agrupamento para uma rede de Poisson com grau médio $k = 3$ e 4 com curva teórica baseada na eq. 3.3.

A figura 5 mostra a relação entre a correlação de grau e o coeficiente de agrupamento (clustering coefficient) para dois graus médios dados $k = 3$ e $k = 4$. Notamos uma correlação positiva entre graus em toda a faixa, o que significa que o modelo é assortativo. A correlação de grau aumenta até que C atinja metade de seu máximo e depois diminui para zero quando C atinge seu máximo. Quando C é 0 ou o máximo ($\frac{1}{1+\langle k \rangle}$), os nós se conectam a todos os *single edges* ou a todos os triângulos, respectivamente. Ela indica que a rede é assortativa, o que significa que nós com graus semelhantes tendem a se conectar. Isso sugere que diferentes padrões de conexão ocorrem à medida que o coeficiente de agrupamento varia na rede.

Vejamos agora na 6 como o menor caminho médio varia em função do número de triângulos:

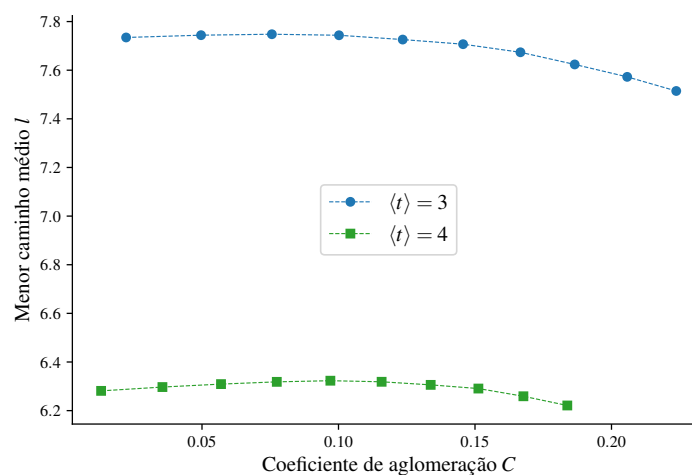


Figura 6 – Menor Caminho Médio em função do Clustering Coefficient.

Observa-se que, enquanto o coeficiente de agrupamento (*clustering*) apresentou uma variação substancial, a menor distância média entre pares de nós (*menor caminho mínimo*) permaneceu praticamente inalterada. Na rede sem *clustering* $\langle t \rangle = 3$, o menor caminho mínimo é 7,7, enquanto na rede com *clustering* é 7,5, o que corresponde a uma variação de apenas 2%. Em contraste, o coeficiente de *clustering* apresentou um aumento de 92%.

Essa discrepância sugere que as mudanças observadas na dinâmica da rede podem ser atribuídas predominantemente à variação no coeficiente de *clustering*. A variação no menor caminho mínimo indica que a distância média entre os nós permaneceu aproximadamente constante, com uma mudança inferior a uma aresta. Portanto, em termos práticos, o menor caminho mínimo se manteve essencialmente inalterado.

Esses resultados implicam que, mesmo com um aumento substancial no *clustering*, a constância no menor caminho mínimo sugere que as alterações na estrutura de conectividade local, refletidas no *clustering*, têm um impacto mais significativo na dinâmica da rede do que mudanças nas distâncias globais entre os nós. Assim, nesse modelo, podemos variar o *clustering* sem mudar as distâncias típicas da rede. Logo, podemos atribuir as mudanças na dinâmica à

variação do clustering. O caminho médio é relevante para processos dinâmicos em redes, mas neste caso, como se mantém constante, podemos excluir sua influência.

3.1.2 Dinâmica de Propagação de Rumores no Modelo de Maki-Thompson em Tempo Contínuo

Nesta seção, apresentamos a simulação da propagação de rumores em uma rede de indivíduos, utilizando o modelo de Maki-Thompson no formalismo de tempo contínuo. Esse modelo é amplamente utilizado para descrever a disseminação de informações ou rumores em redes complexas, classificando os indivíduos em três estados principais: ignorantes (ρ_Y), propagadores (ρ_X) e repressores (ρ_Z) 3.4. A dinâmica da propagação é influenciada por diversos parâmetros, os quais definem a rapidez de propagação, a resistência à saturação, a dificuldade de transmissão e o impacto acumulativo do rumor.

Para a simulação, definimos os seguintes parâmetros: o número de nós (N) e o grau médio (k_m) da rede, além dos parâmetros globais que controlam o comportamento dos indivíduos no processo de disseminação. A taxa de recuperação ($\eta = 0.5$) determina a velocidade com que os indivíduos deixam de propagar o rumor, enquanto a resistência à saturação ($\delta = 1.0$) controla a resposta dos indivíduos à saturação do rumor. A dificuldade de propagação ($\nu = 0.5$) modula a facilidade com que o rumor se espalha entre os indivíduos, e o impacto da acumulação ($\alpha = 5.0$) amplifica o efeito cumulativo do rumor ao longo do tempo. A simulação foi realizada com um tempo máximo de $t_{\max} = 100$ e uma fração inicial de rumores de $y_0 = 0.01$, indicando que 1% dos indivíduos iniciam como propagadores.

Para capturar o comportamento estacionário do sistema calculamos a média:

$$\rho_x = \left\langle \frac{\sum_{i=1}^N X_i(t \rightarrow \infty)}{N} \right\rangle \quad (3.4)$$

A grandeza ρ_x representa a fração média de nós que se encontram em um determinado estado X no limite de tempo $t \rightarrow \infty$. Esta expressão, denota a média da fração de nós que atingiram o estado X ao final da dinâmica. Aqui, $X_i(t \rightarrow \infty)$ indica o estado final do nó i , assumindo um valor binário (por exemplo, 1 para propagador ou 0 para ignorante). A soma no numerador percorre todos os N nós da rede, contando quantos deles estão no estado X após a estabilização do sistema. A normalização pelo número total de nós, N , fornece a fração de nós no estado X , e a média $\langle \cdot \rangle$ indica que essa quantidade é obtida considerando diferentes realizações do processo estocástico, garantindo uma medida representativa do comportamento do sistema.

Os resultados da simulação foram armazenados ao longo do tempo, com a contagem dos indivíduos nos estados de propagadores, ignorantes e repressores. Para facilitar a análise, calculamos a média dos resultados em diferentes momentos e os graficamos para observar a tendência geral da propagação do rumor.

A figura 7 ilustra a dinâmica da propagação do rumor na rede, com as curvas representando a evolução temporal das proporções de ignorantes (ρ_Y) e propagadores (ρ_X). A curva verde refere-se à fração de ignorantes, enquanto a curva azul mostra a fração de propagadores. As simulações foram repetidas diversas vezes para capturar a variabilidade estocástica do processo e fornecer uma visão mais abrangente sobre a dinâmica de disseminação de rumores em redes complexas.

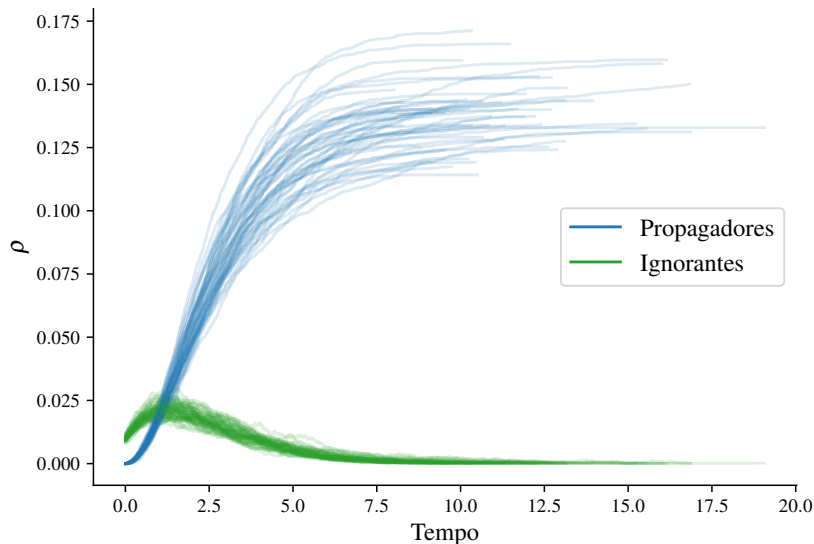


Figura 7 – Evolução temporal das frações de ignorantes (ρ_Y) e propagadores (ρ_X) no modelo de propagação de rumores de Maki-Thompson. O eixo x representa o tempo, enquanto o eixo y indica a fração de indivíduos em cada estado. Cada curva representa uma realização da dinâmica, no total de 50 realizações.

Inicialmente, quase todos os indivíduos estão no estado de ignorantes, com exceção de uma pequena fração inicial (γ) de propagadores. À medida que o tempo avança, os propagadores interagem com os ignorantes, promovendo a transição destes para o estado de propagação do rumor. Esse fenômeno resulta em um crescimento rápido da densidade de propagadores (ρ_Z), evidenciado pelo aumento inicial acentuado das curvas azuis. Entretanto, a disseminação do rumor não é ilimitada. O modelo considera dois mecanismos que atuam na redução do número de propagadores ao longo do tempo: a taxa de recuperação (η), que representa a transição dos propagadores para o estado de repressores, e a resistência à saturação (δ), que reduz a probabilidade de novas conversões à medida que a disseminação evolui. Esses fatores fazem com que, após atingir um pico, a densidade de propagadores diminua gradualmente, refletindo o declínio da transmissão do rumor.

Simultaneamente, a fração de ignorantes (ρ_Y) apresenta um comportamento complementar. Inicialmente, ela diminui rapidamente à medida que indivíduos passam para o estado de propagadores. Contudo, à medida que a propagação do rumor desacelera, a taxa de conversão de ignorantes diminui, resultando na estabilização de sua densidade em um valor assintótico. Esse valor final indica a fração residual de indivíduos que nunca foram expostos ao rumor ou

que não tiveram contato suficiente para adotá-lo. O modelo de Maki-Thompson é fortemente influenciado pelo coeficiente de transmissão λ , que determina a taxa com que os ignorantes são convertidos em propagadores após o contato com um propagador ativo. Os valores de λ foram analisados em uma escala logarítmica, permitindo capturar diferentes regimes de propagação. Para cada valor de λ , foram realizadas 50 simulações independentes, resultando nas variações observadas nas curvas. Essa abordagem possibilita visualizar como a estocasticidade do processo influencia a propagação do rumor e como diferentes valores de λ afetam a taxa de disseminação e a estabilização das proporções de cada estado.

O comportamento observado no gráfico segue um padrão típico de processos de disseminação de informações: um crescimento inicial exponencial na fração de propagadores, seguido por um declínio à medida que a saturação do sistema é alcançada. A estabilização das densidades de ignorantes e propagadores reflete um equilíbrio dinâmico entre a propagação e a recuperação/resistência ao rumor, sendo esse equilíbrio fortemente dependente dos parâmetros do modelo. A análise sugere que, para valores baixos de λ , a disseminação do rumor é limitada, enquanto para valores elevados, a propagação ocorre de forma ampla, mas com uma posterior redução rápida devido à conversão de propagadores em repressores.

3.1.3 Diagramas de fase de redes com triângulos

A proporção de indivíduos num determinado (ρ) estado é comumente utilizada na modelagem de processos de propagação, como epidemias ou rumores, para avaliar a prevalência final da informação ou da infecção em uma rede complexa. Essa abordagem é fundamental porque muitos sistemas dinâmicos apresentam comportamentos transientes antes de atingir um estado estacionário. Os valores calculados de ρ são utilizados para estabelecer uma relação funcional com o parâmetro λ , sendo visualizados em um gráfico log-log, uma escolha típica para identificar leis de potência ou comportamentos de escala.

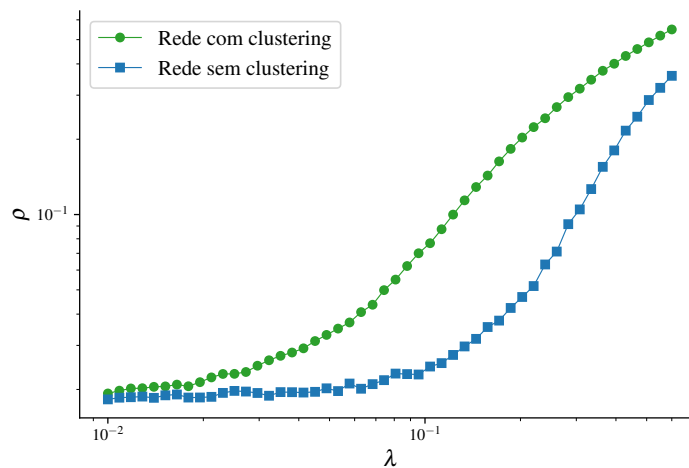


Figura 8 – Dependência de ρ_x em função de $\lambda \in (0.01, 0.6)$ para diferentes topologias de rede com $N = 10000$ e $\langle k \rangle = 6$.

A propagação de rumores em redes complexas é fortemente influenciada pela estrutura topológica da rede subjacente [Arruda, Rodrigues e Moreno, 2018]. Na figura 8 temos a densidade de propagadores de redes com e sem *clustering*. A principal diferença entre as curvas analisadas nos gráficos abaixo decorre dessas características estruturais. A curva verde representa uma rede com um alto coeficiente de clustering, o que implica que os indivíduos tendem a formar grupos interconectados. Esse alto nível de interconexão dentro dos grupos facilita a propagação do rumor localmente, mas pode dificultar sua disseminação para outras partes da rede. Como consequência, a informação tende a permanecer confinada dentro das comunidades por mais tempo.

Por outro lado, a curva azul corresponde a uma rede onde as conexões estão distribuídas de maneira mais homogênea, sem a formação de grupos de triângulos. Nessa configuração, o rumor se propaga de forma mais eficiente para diferentes partes da rede, uma vez que não há barreiras estruturais significativas. No entanto, essa mesma característica também pode levar a uma dissipação mais rápida da informação, já que não há reforço local suficiente para manter a propagação do rumor ao longo do tempo.

À medida que a taxa de transmissão aumenta, observa-se um ponto crítico onde a disseminação do rumor se torna significativamente mais ampla. Nas redes de conexões aleatórias,

como a rede Erdős–Rényi, essa transição em um limiar mais baixo, pois a ausência de clustering permite que o rumor alcance diferentes partes da rede rapidamente. Já nas redes com alto clustering, essa transição ocorre de maneira mais gradual, pois o rumor precisa primeiro se consolidar dentro dos grupos antes de se espalhar para a rede como um todo.

A curva correspondente à rede com clustering atinge valores mais elevados de ρ , indicando que um maior número de indivíduos continua espalhando o rumor por um período prolongado. Isso ocorre porque a estrutura altamente conectada dos grupos favorece a permanência da informação internamente, evitando que ela desapareça rapidamente. Em contrapartida, na rede ER, o rumor se espalha rapidamente, mas também pode ser esquecido com maior velocidade, uma vez que a ausência de reforço local reduz a sua persistência ao longo do tempo.

A estrutura da rede tem um impacto direto na maneira como rumores se propagam e persistem ao longo do tempo. Se o objetivo for maximizar a velocidade de disseminação de um rumor, redes com baixa estruturação de clustering, como as redes ER, são mais eficientes, pois permitem uma propagação rápida e ampla da informação. No entanto, se o objetivo for manter um rumor circulando por mais tempo, redes altamente clusterizadas são mais eficazes, pois os grupos interconectados reforçam a propagação interna, evitando a dissipação rápida do rumor.

Ao estender λ até valores superiores a propagação do rumor pode atingir um novo regime. Para $\lambda > 0.6$, espera-se que praticamente toda a rede já tenha sido exposta ao rumor. A diferença principal é a saturação da disseminação: a fração de indivíduos que continuam espalhando o rumor, ρ , pode atingir um limite máximo ou continuar crescendo.

Na região de alto começam a surgir diferenças importantes. Na rede ER, o rumor já se espalhou por toda a rede. O crescimento de ρ pode se estabilizar ou até diminuir levemente, caso as pessoas parem de espalhar o rumor após certo tempo. A rede atinge saturação rapidamente, pois a informação se dispersa de forma veloz. Por outro lado, na rede com clustering, o rumor continua sendo reforçado dentro das comunidades fechadas, o que permite que ρ continue crescendo mesmo para valores mais altos de λ . Isso significa que, enquanto na rede ER o rumor pode perder força, na rede com clustering ele pode se fortalecer dentro dos grupos altamente conectados.

3.1.4 Visualização da suscetibilidade χ em função de λ

A suscetibilidade é uma medida importante em sistemas complexos e dinâmicos, frequentemente associada ao estudo de transições de fase e pontos críticos [Mata e Ferreira, 2015]. Este tópico aborda a teoria subjacente ao cálculo e à visualização da suscetibilidade em função do parâmetro λ , que governa a dinâmica do sistema.

Assim, χ é uma medida da resposta do sistema a pequenas perturbações. Em sistemas dinâmicos, χ é calculada como a flutuação relativa de uma quantidade normalizada ρ , que representa a densidade do estado Z no tempo final da simulação, onde:

$$\rho_z = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i(t \rightarrow \infty) \right\rangle \quad (3.5)$$

Para um conjunto de amostras independentes, χ é definida como [Mata e Ferreira, 2015]:

$$\chi = N \frac{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2}{\langle \rho \rangle}, \quad (3.6)$$

onde N é o número total de vértices no sistema, $\langle \rho \rangle$ é o valor médio da densidade de vértices infectados (ρ) no sistema calculado sobre realizações independentes da dinâmica; $\langle \rho^2 \rangle$ é o valor médio do quadrado da densidade, refletindo as flutuações dessa densidade; a diferença $\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2$ é a variância da densidade, que quantifica a dispersão nas flutuações da densidade ao longo das simulações.

Essa definição reflete a sensibilidade do sistema a flutuações estocásticas. Sistemas dinâmicos podem exibir transições de fase, caracterizadas por mudanças abruptas no comportamento macroscópico devido à variação de um parâmetro de controle, como λ . Perto do ponto crítico, a suscetibilidade χ tende a apresentar um pico, indicando maior sensibilidade às flutuações. Em sistemas próximos ao ponto crítico, a suscetibilidade tende a aumentar e pode se tornar muito grande (ou até divergir) à medida que o sistema passa de um estado com poucos vértices ocupados para um estado em que a ocupação se espalha rapidamente.

O pico observado na curva de suscetibilidade χ em função do parâmetro λ na dinâmica de Maki-Thompson é um fenômeno significativo, relacionado a uma transição possível de fase no sistema. A suscetibilidade, como medida da resposta do sistema a pequenas perturbações, reflete a sensibilidade do sistema às flutuações em sua dinâmica. Quando o sistema está perto de um ponto crítico, como no modelo de Maki-Thompson, ele se torna muito sensível a mudanças em λ , o que resulta em flutuações grandes na propagação do rumor. Esse comportamento é refletido pelo pico na curva de suscetibilidade, onde pequenas variações em λ podem causar grandes mudanças no comportamento global do sistema. O ponto onde o pico ocorre é o valor crítico de λ que separa dois regimes distintos de propagação [Arruda *et al.*, 2023].

A transição de fase ocorre quando o sistema muda de um regime em que o rumor não se propaga de forma significativa (abaixo do ponto crítico) para um regime onde a propagação do rumor se torna sustentada e eficiente (acima do ponto crítico). Em valores de λ inferiores ao ponto crítico, a propagação do rumor é limitada: ele morre rapidamente ou não atinge uma grande parte da população. Já quando λ ultrapassa o ponto crítico, o rumor se espalha amplamente e de forma mais eficaz. Este comportamento é análogo a transições de fase em sistemas físicos, como no caso de modelos epidêmicos, onde existe um valor limiar para a taxa de transmissão (ou parâmetro de controle) abaixo do qual a doença (ou rumor) desaparece e acima do qual ela se espalha de maneira sustentada [Arruda, Rodrigues e Moreno, 2018, Albert e Barabási, 2002]. No caso do modelo de Maki-Thompson, o valor crítico de λ representa a taxa mínima necessária para que o rumor se torne persistente e continue se espalhando na população.

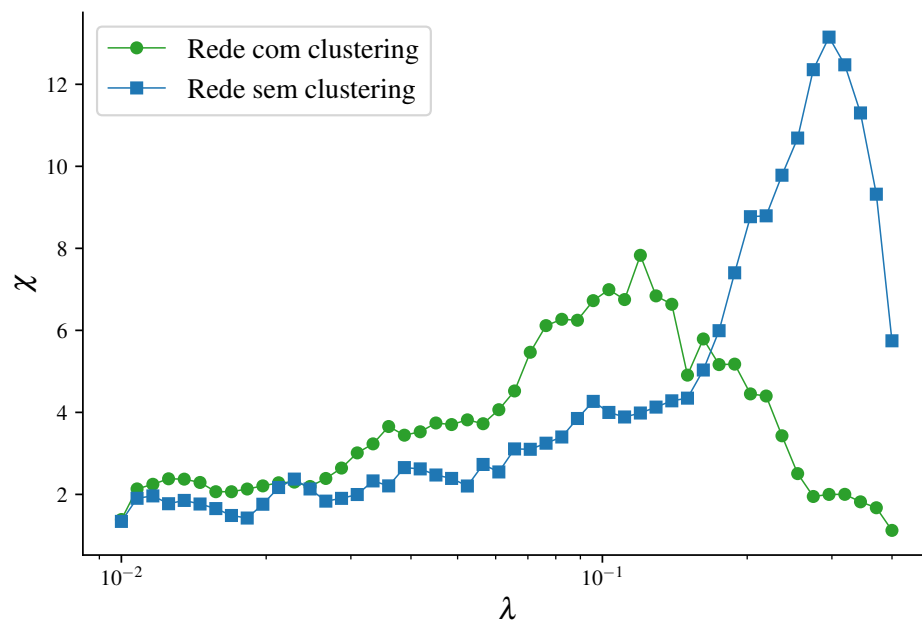


Figura 9 – **Suscetibilidade χ em função do parâmetro λ** : Redes com e sem clustering na dinâmica de Maki-Thompson, com $\langle k \rangle = 6$ e $N = 10000$. O pico da curva indica o ponto crítico da transição de fase, onde a suscetibilidade atinge seu valor máximo. A presença de clustering influencia a altura e a posição do pico, sugerindo um impacto significativo na propagação do rumor.

Na Figura 9 comparamos a detecção do ponto crítico nas redes com e sem clustering. A suscetibilidade χ em função do parâmetro λ , comparando redes com e sem clustering dentro da dinâmica de Maki-Thompson. A análise das curvas fornece informações relevantes sobre a transição de fase do sistema e sobre o papel que o clustering desempenha na propagação do rumor.

Observa-se que, em ambas as redes, a suscetibilidade χ aumenta conforme λ cresce, atingindo um pico, seguido por uma diminuição. Esse pico marca o ponto crítico da transição de fase, no qual o sistema exhibe a maior sensibilidade a pequenas perturbações. A presença de clustering na rede modifica não apenas a posição do pico de χ , mas também sua intensidade,

impactando diretamente a dinâmica da propagação do rumor.

Na rede com clustering, o pico ocorre em um valor de λ ligeiramente diferente em relação à rede sem clustering. Além disso, a altura do pico é maior para a rede com clustering, indicando que as correlações locais entre os vértices amplificam as flutuações do sistema. Isso sugere que, em redes com clustering, a propagação do rumor é facilitada dentro de grupos fortemente conectados, embora possa encontrar resistência ao tentar se espalhar para outras partes da rede. Para valores de λ abaixo do ponto crítico, a propagação do rumor é limitada, com o rumor rapidamente desaparecendo. Por outro lado, acima desse ponto crítico, o rumor se espalha de forma mais eficiente e sustentada. O pico na suscetibilidade reflete essa transição entre os dois regimes, funcionando como um indicador crucial do limiar de propagação. Como esperado em sistemas dinâmicos, a presença do clustering altera esse limiar, impactando a maneira como a transição ocorre e, conseqüentemente, influenciando a eficácia da disseminação do rumor.

O comportamento das curvas reforça a importância do clustering na propagação do rumor. Redes com clustering apresentam um aumento na suscetibilidade em torno do ponto crítico, sugerindo que as conexões locais fortalecem a disseminação dentro de pequenos grupos antes de alcançar o restante da rede.

3.1.5 Influência de subgrafos de ordem superior

A influência do agrupamento em redes complexas tem sido um tema recorrente na literatura sobre teoria de grafos e dinâmica de redes. Em particular, um dos aspectos centrais de estudos recentes é a relação entre o grau médio das redes e a importância do agrupamento na determinação das propriedades dinâmicas da rede. No contexto de modelos de redes aleatórias com agrupamento, como aqueles baseados na extensão do modelo de configuração, percebe-se que a presença de subgrafos estruturados altera as propriedades locais da rede, diferenciando-a de modelos clássicos sem agrupamento. No entanto, análises teóricas e simulações mostram que essa influência tende a desaparecer conforme o grau médio da rede aumenta [Stegehuis and Peron, 2021].

O fenômeno pode ser entendido a partir da transição de percolação, que descreve o surgimento de um componente gigante na rede conforme a densidade de conexões cresce. A introdução de agrupamento pode alterar esse limiar crítico, pois afeta a conectividade local, tornando-a mais redundante. Entretanto, quando o grau médio cresce, a rede se torna mais conectada globalmente, e a redundância imposta pelo agrupamento se dilui na estrutura global da rede. Como resultado, os pontos críticos da percolação em redes com e sem agrupamento convergem para valores similares [Stegehuis and Peron, 2021].

Matematicamente, o tamanho do componente gigante S pode ser aproximado por:

$$S \approx 1 - g((1 - \pi)^{k-1}) - \frac{\langle s \rangle g_p((1 - \pi)^{k-1})^2 (k-1)(1 - \pi)^{2(k-2)} \pi}{1 - g'_p((1 - \pi)^{k-1})(k-1)\pi(1 - \pi)^{2(k-2)}} \quad (3.7)$$

onde π é a probabilidade de percolação, $g(x)$ e $g_p(x)$ são funções geradoras associadas à distribuição de graus e $\langle s \rangle$ é o número médio de cliques a que um vértice pertence.

Nesse sentido, o valor crítico de percolação π_c , que define o ponto em que surge um componente gigante na rede, é dado por:

$$\pi_c \approx \frac{1}{\frac{\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle}{\langle s \rangle} (k - 1)}. \quad (3.8)$$

Esse resultado mostra que, para redes de grau médio elevado, o agrupamento se torna irrelevante para a determinação do limiar crítico.

A propagação de rumores pode ser modelada de forma semelhante à percolação, pois ambos descrevem a disseminação de uma informação ou estado em uma rede. Quando o grau médio da rede é pequeno, a estrutura local, incluindo o agrupamento, pode afetar significativamente a propagação de rumores, aumentando a probabilidade de ciclos curtos e reduzindo a eficiência da disseminação. No entanto, conforme o grau médio cresce, o efeito do agrupamento se torna marginal, pois a informação encontra múltiplos caminhos para se espalhar, semelhante ao que ocorre na percolação [Steghuis and Peron, 2021]. Assim como na percolação, espera-se que a propagação de rumores em redes com alto grau médio seja dominada pela distribuição de grau e não pelo agrupamento. Dessa forma, a taxa de propagação e o tamanho final da população informada dependerão principalmente do grau médio.

É importante notar que redes reais podem conter cliques sobrepostos ou subgrafos agrupados que não são necessariamente cliques completos. No entanto, os resultados indicam que a independência do agrupamento se estende a modelos mais complexos que incorporam essas estruturas. Estudos futuros podem investigar a extensão dessas conclusões para redes com diferentes tipos de agrupamento e determinar um limite superior para o tamanho dos cliques em relação ao grau médio da rede, além do qual o efeito do agrupamento se tornaria relevante. Essa investigação poderia fornecer uma caracterização mais precisa das condições sob as quais o agrupamento influencia os processos dinâmicos em redes complexas.

Vamos agora investigar o efeito do grau médio por comparação das dinâmicas de redes com e sem clustering. Nas simulações realizadas, para cada valor de $\langle k \rangle$, foram geradas redes tanto com agrupamento quanto sem agrupamento. Para cada rede, foram executadas dinâmicas considerando um intervalo de valores de λ pertencentes ao intervalo $[0, 0.4]$. Para cada configuração, os dados de $\rho(\lambda)$ foram extraídos de arquivos específicos de cada rede. Em seguida, as médias de $\rho(\lambda)$ foram calculadas para as redes com e sem agrupamento, e a diferença absoluta entre as curvas foi computada. Para cada valor de $\langle k \rangle$, foi calculada a área sob a curva de diferença dada pela fórmula:

$$A(\langle k \rangle) = \int \rho_{\Delta}(\lambda) - \rho_{ER}(\lambda) d\lambda. \quad (3.9)$$

Os resultados foram visualizados em gráficos log-log, onde a diferença entre as áreas das redes com e sem agrupamento foi observada.

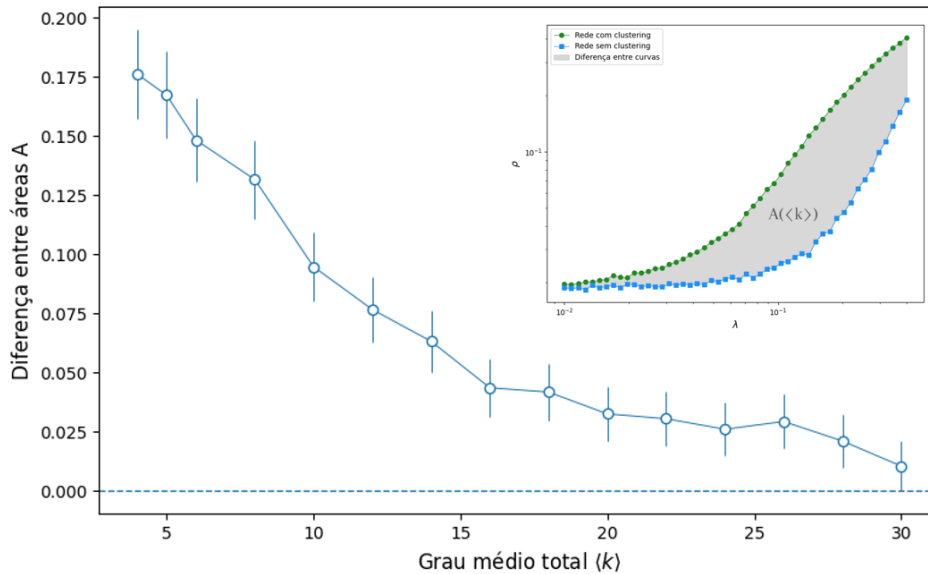


Figura 10 – **Diferença entre as áreas sob as curvas de densidade para redes com e sem agrupamento:** A diferença entre as áreas das curvas é plotada em função do grau médio $\langle k \rangle$ para uma rede com $N = 10000$. Observa-se uma tendência decrescente, sugerindo que, para valores altos de $\langle k \rangle$, a influência do agrupamento na propagação do rumor se torna insignificante.

A Figura 10 apresenta a diferença entre as áreas sob as curvas de densidade para redes com e sem agrupamento, em função do grau médio $\langle k \rangle$. Observa-se uma tendência de redução dessa diferença à medida que $\langle k \rangle$ aumenta, indicando que o impacto do agrupamento na propagação do rumor se torna menos relevante em redes mais densas.

Para valores baixos de $\langle k \rangle$, a presença de agrupamento pode influenciar significativamente a disseminação, pois a redundância nas conexões locais tende a criar ciclos curtos que limitam a eficiência da propagação. No entanto, conforme o grau médio cresce, a conectividade global da rede passa a dominar a dinâmica, oferecendo múltiplos caminhos para a difusão da informação. Como consequência, as diferenças entre as redes com e sem agrupamento se tornam progressivamente menores, sugerindo que, no limite $\langle k \rangle \rightarrow \infty$, ambas apresentam comportamentos equivalentes.

Esse resultado está em concordância com análises teóricas anteriores [Steghuis and Peron, 2021], que demonstram que o efeito do agrupamento em redes complexas tende a desaparecer quando a densidade de conexões é elevada. Em redes mais conectadas, a influência da estrutura local se torna marginal diante da conectividade global, tornando a redundância imposta pelo agrupamento menos significativa para a dinâmica de propagação.

CONCLUSÕES

Após revisarmos brevemente a evolução da ciência de redes e introduzirmos os principais conceitos relacionados às medidas de caracterização das redes, discutimos as limitações do modelo configuracional na reprodução das características topológicas observadas em redes do mundo real. Apontamos que, embora esse modelo capture várias características relevantes para o estudo da topologia das redes, ele negligencia muitas outras que são essenciais em redes reais. Entre as propriedades ignoradas está a presença de triângulos, que são subgrafos simples, mas fundamentais, prevalentes na topologia das redes reais, mas ausentes em modelos de redes aleatórias. Portanto, apontamos em nossa discussão que qualquer tentativa de compreender completamente a dinâmica de sistemas físicos que exibem topologias realistas não será bem sucedida, uma vez que um elemento crucial da sua estrutura é frequentemente negligenciado.

Observamos também que, apesar da falta de uma maneira sistemática de controlar a ocorrência de características de ordem superior na topologia das redes, abordagens alternativas, como algoritmos de reconfiguração estocástica, têm sido empregadas na literatura para quantificar como os triângulos afetam o comportamento coletivo de redes. A criação de triângulos sempre leva a mudanças dramáticas em outras propriedades da rede, como a formação de estruturas de comunidade e o surgimento de correlações de grau. Nesse contexto, o impacto único dos ciclos de ordem três na dinâmica é potencialmente obscurecido pelos efeitos colaterais do mecanismo gerador das redes.

Para avaliar a influência dos triângulos em redes reais, consideramos a generalização do modelo de configuração proposto independentemente por Newman e Miller [Newman, 2009, Miller, 2009], que permite a variação dos níveis de transitividade enquanto outras métricas são mantidas constantes. No entanto, as redes geradas por esse esquema são limitadas ao regime de baixo agrupamento, devido à falta de consideração de triângulos sobrepostos no processo de construção. Embora isso abra espaço para estudos adicionais com modelos de estrutura topológica mais sofisticada, podemos concluir que, pelo menos no regime de baixo agrupamento,

redes agrupadas se comportam dinamicamente como redes não agrupadas.

Conforme apontado no capítulo 3, é possível concluir que os triângulos desempenham um papel significativo na dinâmica da rede apenas quando as correlações de grau não podem mais ser negligenciadas. Portanto, é possível discernir a influência de uma propriedade sem considerar as contribuições da outra, já que ambas estão intrinsecamente relacionadas. Assim, investigações futuras devem desenvolver teorias de campo que considerem simultaneamente diferentes propriedades de redes de ordem superior.

A conclusão deste trabalho se baseia nos resultados das simulações e das análises realizadas, oferecendo uma visão abrangente das dinâmicas de propagação de rumores em redes complexas, utilizando o modelo de Maki-Thompson. A partir de diferentes topologias de redes, foi possível explorar como as propriedades estruturais das redes influenciam a disseminação de informações e como diferentes parâmetros, como a taxa de transmissão (λ), afetam a propagação ao longo do tempo. Este trabalho não só examina o comportamento de sistemas dinâmicos no contexto da propagação de rumores, mas também contribui para a compreensão dos efeitos da topologia da rede e das flutuações estocásticas nas simulações.

A análise das simulações permitiu observar que a estrutura da rede desempenha um papel crucial na dinâmica da propagação do rumor. Redes com clustering tendem a mostrar uma propagação mais contida, restrita a pequenos grupos interconectados. Esse fenômeno pode ser explicado pela forte interconectividade local entre os nós, o que facilita a disseminação do rumor dentro dos grupos, mas dificulta sua propagação para outras partes da rede. Como resultado, o rumor permanece por mais tempo dentro das comunidades, mas sua expansão para a rede como um todo é limitada.

Em contraste, redes com uma distribuição de conexões seguindo o modelo de Erdős-Rényi exibem uma propagação mais ampla e rápida. Isso ocorre porque, na ausência de clusters, o rumor tem maior liberdade para se espalhar por toda a rede, atingindo rapidamente um maior número de indivíduos. No entanto, essa mesma característica pode levar a uma dissipação mais rápida do rumor, uma vez que a falta de reforço local nas comunidades reduz a persistência do rumor ao longo do tempo.

O cálculo de ρ , que representa a densidade ou a fração média de indivíduos em determinado estado, foi uma das métricas centrais do estudo. A análise da dependência de ρ com o parâmetro λ forneceu insights sobre como a taxa de transmissão afeta o comportamento da propagação. Para valores baixos de λ , a propagação do rumor foi limitada, com a curva de propagadores (ρ_x) atingindo um *plateau* rápido e estabilizando-se em um valor baixo, refletindo a resistência à disseminação do rumor. Já para valores mais elevados de λ , a propagação se intensificou, levando a uma maior disseminação do rumor.

A influência do agrupamento em redes complexas tem sido um tema recorrente na literatura sobre teoria de grafos e dinâmica de redes. Em particular, um dos aspectos centrais de

estudos recentes é a relação entre o grau médio das redes e a importância do agrupamento na determinação das propriedades dinâmicas da rede. No contexto de modelos de redes aleatórias com agrupamento, como aqueles baseados na extensão do modelo de configuração, percebe-se que a presença de subgráficos estruturados altera as propriedades locais da rede, diferenciando-a de modelos clássicos sem agrupamento. No entanto, análises teóricas e simulações mostram que essa influência tende a desaparecer conforme o grau médio da rede aumenta. Assim, esse resultado indica uma diminuição dessa diferença conforme o grau médio cresce, sugerindo que, para $\langle k \rangle \rightarrow \infty$, a dinâmica das redes com e sem clustering se torna idêntica. Além disso, observa-se uma tendência de queda nessa diferença entre as áreas, o que sugere que a dinâmica de redes com clustering e sem clustering se aproximam na medida que o grau médio cresce.

REFERÊNCIAS

ARRUDA, G. F.; PETRI, G.; RODRIGUEZ, P. M.; MORENO, Y. Multistability, intermittency, and hybrid transitions in social contagion models on hypergraphs. *Nature Communications*, v. 14, n. 1, p. 1375, 2023. Citado na página 52.

ARRUDA, G. F.; RODRIGUES, F. A.; MORENO, Y. Fundamentals of spreading processes in single and multilayer complex networks. *Physics Reports*, v. 756, p. 1-59, 2018. Citado nas páginas 25, 26, 27, 38, 43, 50 e 53.

ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L. *Error and attack tolerance of complex networks*. *Nature*, v. 406, p. 378–382, 2000. Citado na página 18.

BARABÁSI, A. L.; ALBERT, R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, v. 286, n. 5439, p. 509-512, 1999. Citado nas páginas 17 e 18.

BARABÁSI, A.-L.; OLTVAI, Z. N. *Network biology: Understanding the cell's functional organization*. *Nature Reviews Genetics*, v. 5, n. 2, p. 101–113, 2004. Citado na página 18.

BARABÁSI, A.-L. *Network science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. Citado nas páginas 17, 18 e 24.

ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, v. 74, n. 1, p. 47–97, 2002. Citado nas páginas 29 e 53.

ARRUDA, G.; JEUB, L. G. S.; MATA, A. S.; RODRIGUES, F. A.; MORENO, Y. From subcritical behavior to a correlation-induced transition in rumor models. *Nature Communications*, v. 13, n. 3049, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41467-022-30740-7>>. Citado na página 38.

BARRAT, A.; BARTHELEMY, M.; VESPIGNANI, A. *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Citado nas páginas 17, 38 e 41.

BENATTI, A.; DE ARRUDA, H. F.; SILVA, F. N.; COMIN, C. H.; COSTA, L. F. *On the stability of citation networks*. arXiv preprint arXiv:2105.01693, 2021. Citado na página 18.

BIANCONI, G.; RAHMEDE, C. Network geometry with flavor: From complexity to quantum geometry. *Physical Review E*, v. 96, n. 6, p. 062310, 2017. Citado na página 19.

CHRISTAKIS, N. A.; FOWLER, J. H. *Connected: The surprising power of our social networks and how they shape our lives*. Hachette Digital, Inc., 2009. Citado na página 40.

- DALEY, D. J.; KENDALL, D. G. *Stochastic rumours*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), v. 26, p. 1-15, 1964. Citado na página 26.
- ESTRADA, E. *When local and global clustering of networks diverge*. Linear Algebra and its Applications, v. 488, p. 249–263, 2016. Citado na página 24.
- FREEMAN, L. C. A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, v. 40, n. 1, p. 35–41, 1977. doi: 10.2307/3033543. Citado na página 22.
- HACKETT, A. W.; MELNIK, S.; GLEESON, J. Cascades on a class of clustered random networks. *University of Limerick, Journal contribution*, 2011. Citado na página 41.
- HUANG, X.; SHAO, S.; WANG, H.; BULDYREV, S. V.; STANLEY, H. E.; HAVLIN, S. The robustness of interdependent clustered networks. *EPL (Europhysics Letters)*, v. 101, p. 18002, 2013. DOI: 10.1209/0295-5075/101/18002. Citado nas páginas 44, 45, 65 e 66.
- KISS, I. Z.; MILLER, J. C.; SIMON, P. L. *Mathematics of epidemics on networks*. Springer, 2017. Citado nas páginas 40 e 43.
- MCGRAW, P. N.; MENZINGER, M. Laplacian spectra as a diagnostic tool for network structure and dynamics. *Physical Review E*, v. 77, n. 3, p. 031102, 2008. Citado nas páginas 41 e 44.
- MAKI, D.; THOMPSON, M. J. Stochastic Processes: A Study of Contagion and Growth. *Journal of Applied Probability*, v. 22, n. 3, p. 658-665, 1985. Citado na página 37.
- MAKI, D. P.; THOMPSON, M. A. *Stochastic process models of some epidemic and rumor processes*. Advances in Applied Probability, v. 5, n. 1, p. 1-22, 1973. Citado nas páginas 26 e 37.
- MARTIN, T.; BALL, B.; KARRER, B.; NEWMAN, M. E. J. Coauthorship and citation patterns in the Physical Review. *Physical Review E*, v. 88, n. 1, p. 012814, 2013. Citado na página 18.
- MATA, A. S.; FERREIRA, S. C. Multiple transitions of the susceptible-infected-susceptible epidemic model on complex networks. *Physical Review E*, v. 91, n. 1, p. 012816, 2015. DOI: 10.1103/PhysRevE.91.012816. Citado na página 52.
- MCGRAW, P. N.; MENZINGER, M. Clustering and the Synchronization of Oscillator Networks. *Physical Review E*, v. 72, n. 1, p. 015101, 2005. Citado na página 19.
- MELNIK, S.; HACKETT, A.; PORTER, M. A.; MUCHA, P. J.; GLEESON, J. P. The unreasonable effectiveness of tree-based theory for networks with clustering. *Physical Review E*, v. 83, n. 3, p. 036112, 2011. Citado na página 19.
- MILLER, J. C. *Percolation and epidemics in random clustered networks*. Physical Review E, v. 80, n. 2, p. 020901, 2009. Citado nas páginas 19, 35, 43 e 57.

- NEWMAN, M. E. J. Assortative mixing in networks. *Physical Review Letters*, v. 89, n. 20, p. 208701, 2002. doi: 10.1103/PhysRevLett.89.208701. Citado na página 25.
- NEWMAN, M. E. J.; WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Random graph models of social networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 99, supl. 1, p. 2566-2572, 2003. Citado nas páginas 17, 19, 24, 29 e 33.
- NEWMAN, M. E. J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003. Citado nas páginas 17, 19, 24, 29 e 33.
- NEWMAN, M. E. Random graphs with clustering. *Physical Review Letters*, v. 103, n. 5, p. 058701, 2009. Citado nas páginas 19, 35, 36, 40, 43 e 57.
- NEWMAN, M. E. J. *Networks: An introduction*. Oxford University Press, 2010. Citado nas páginas 18, 24, 28, 30, 31 e 32.
- NEWMAN, M. E. J. *Networks: an introduction*. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2018. Citado na página 17.
- PERON, T. K. D. M. *Dynamics of Kuramoto oscillators in complex networks*. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2017. Citado na página 41.
- RODRIGUES, F. A.; PERON, T. K. DM.; JI, P.; KURTHS, J. The Kuramoto model in complex networks. *Physics Reports*, v. 610, p. 1–98, 2016. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008. Citado nas páginas 19 e 43.
- RODRIGUES, F. A. Network centrality: an introduction. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, Campus de São Carlos. arXiv:1901.07901v1 [physics.soc-ph], 22 Jan 2019. Citado nas páginas 22 e 23.
- STEGEHUIS, C.; PERON, T. Network processes on clique-networks with high average degree: the limited effect of higher-order structure. *Journal of Physics: Complexity*, v. 2, p. 045011, 2021. doi: 10.1088/2632-072X/ac1b08. Citado nas páginas 19, 43, 54, 55 e 56.
- VEGA OLIVEROS, D. A. *Dinâmicas de propagação de informações e rumores em redes sociais*. Tese de Doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, São Carlos, 2017. Orientador: Prof. Dr. Francisco Aparecido Rodrigues. Citado nas páginas 25, 26 e 27.
- WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, v. 393, n. 6684, p. 440-442, 1998. DOI: 10.1038/30918. Citado nas páginas 18, 23, 33 e 40.

Demonstração da expressão para a correlação de grau ρ_D

(3.3)

Nesta seção vamos escrever a assortatividade ρ_D em função do coeficiente de aglomeração C no modelo Newman Miller:

$$\rho_D = \frac{c - c^2 - \langle k \rangle c^2}{1 - c + \langle k \rangle c - 2 \langle k \rangle c^2}$$

Para entender a equação, precisamos definir algumas quantidades fundamentais:

- N : Número total de nós na rede.
- N_m : número total de caminhos de m passos entre todos os pares de nós (i, j) , incluindo casos onde $i = j$.
- N_1 : total de arestas, ou seja, o número total de caminhos de 1 passo.
- N_2 : número total de caminhos de 2 passos.
- N_3 : número total de caminhos de 3 passos.
- c é o coeficiente de agrupamento (clustering coefficient).
- k_i : grau do nó i , ou seja, o número de conexões que ele possui.
- $\langle k \rangle$: grau médio da rede, ou seja, a média dos graus de todos os nós.

A correlação de grau ρ_D mede a dependência entre os graus dos nós conectados. Ela é definida por [Huang et al., 2013]:

$$\rho_D = \frac{N_1 N_3 - N_2^2}{N_1 \sum_{i=1}^N k_i^3 - N_2^2}$$

Essa fórmula envolve a contagem de caminhos de diferentes comprimentos na rede, o que está diretamente relacionado à estrutura de conexões entre os nós. Para simplificar a contagem de arestas e triângulos, utilizamos funções geradoras, que são ferramentas matemáticas poderosas para descrever distribuições de variáveis discretas:

- $G_0(x, y) = \sum_{s,t} P_{s,t} x^s y^{2t}$ — função geradora que descreve a distribuição conjunta de nós com s arestas simples e t triângulos.
- $G_q(x, y) = \frac{1}{\langle s \rangle} \frac{\partial G_0}{\partial x} x$ — função geradora para vizinhos alcançados através de uma aresta simples.
- $G_r(x, y) = \frac{1}{\langle t \rangle} \frac{\partial G_0}{\partial y} y$ — função geradora para vizinhos alcançados através de uma aresta que faz parte de um triângulo.

No caso de distribuições de Poisson para s e t (número de arestas simples e triângulos), temos:

$$G_0(x, y) = e^{\langle s \rangle (x-1)} e^{\langle t \rangle (y-1)}$$

onde:

- $\langle s \rangle$ é a média de arestas simples.
- $\langle t \rangle$ é a média de triângulos.

A contagem de caminhos de diferentes comprimentos é essencial para descrever a conectividade da rede. Agora, vamos detalhar as expressões para os diferentes tipos de caminhos:

Caminhos de 1 passo (arestas): O número N_1 representa o total de arestas ou caminhos de 1 passo na rede. Cada aresta conecta dois nós diretamente. A expressão para N_1 é dada por [Huang et al., 2013]:

$$N_1 = N \langle k \rangle$$

Note que uma aresta é contada duas vezes (uma para cada nó da aresta). Portanto, o número real de arestas é $N_1/2$.

Caminhos de 2 passos: Um caminho de 2 passos é formado por dois nós que estão conectados através de um nó intermediário. A expressão para N_2 é:

$$N_2 = N [\langle k \rangle^2 (1 - c) + \langle k \rangle]$$

A expressão $\langle k \rangle^2 (1 - c)$ representa os caminhos que não fecham triângulos, enquanto $\langle k \rangle$ representa os que participam de triângulos.

Caminhos de 3 passos: Um caminho de 3 passos envolve três nós conectados sequencialmente. A expressão para N_3 é dada por [Huang et al., 2013]:

$$N_3 = N [\langle k \rangle^3 + 2\langle k \rangle^2 + 4\langle t \rangle \langle k \rangle + \langle k \rangle + 6\langle t \rangle]$$

Agora, substituindo N_1 , N_2 e N_3 na expressão de ρ_D :

Para o numerador:

$$N_1 N_3 - N_2^2 = (N\langle k \rangle) (N(\langle k \rangle^3 + 2\langle k \rangle^2 + 4\langle t \rangle \langle k \rangle + \langle k \rangle + 6\langle t \rangle)) - (N(\langle k \rangle^2(1-c) + \langle k \rangle))^2$$

Expandindo:

$$N_1 N_3 = N^2 \langle k \rangle (\langle k \rangle^3 + 2\langle k \rangle^2 + 4\langle t \rangle \langle k \rangle + \langle k \rangle + 6\langle t \rangle)$$

$$N_2^2 = N^2 (\langle k \rangle^2(1-c) + \langle k \rangle)^2$$

Portanto:

$$N_1 N_3 - N_2^2 = N^2 (\langle k \rangle^4 + 2\langle k \rangle^3 + 4\langle t \rangle \langle k \rangle^2 + \langle k \rangle^2 + 6\langle t \rangle \langle k \rangle) - N^2 (\langle k \rangle^2(1-c) + \langle k \rangle)^2$$

Para o denominador:

$$N_1 \sum_{i=1}^N k_i^3 - N_2^2 \approx N\langle k \rangle \times N\langle k^3 \rangle - N^2 (\langle k \rangle^2(1-c) + \langle k \rangle)^2$$

Simplificando para grandes redes (N grande), onde $\langle k^3 \rangle \approx \langle k \rangle^3$ e desconsiderando termos menores:

$$\rho_D \approx \frac{\langle k \rangle^2 (\langle k \rangle^2 - (1-c)^2)}{N^2 \langle k \rangle^3 (1-c)^2}$$

Cancelando $\langle k \rangle^2$:

$$\rho_D \approx \frac{\langle k \rangle^2 - (1-c)^2}{N^2 \langle k \rangle^3 (1-c)^2}$$

Para redes grandes, onde o grau médio $\langle k \rangle$ é relativamente grande e c é pequeno, podemos simplificar ainda mais, levando em conta que $\langle k^3 \rangle \approx k^3$ (aproximando $\langle k^3 \rangle$ pelo valor do cubo do grau médio), e $(1-c)$ se aproxima de 1. Assim, obtemos a fórmula final:

$$\rho_D \approx \frac{c - c^2 - \langle k \rangle c^2}{1 - c + \langle k \rangle c - 2\langle k \rangle c^2}$$

Esta é a expressão final da correlação de grau ρ_D para redes com grau Poisson e coeficiente de agrupamento c .

