UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DOUGLAS SUZUKI TOKUDA

PRÁTICAS DE DESAFIOS MATEMÁTICOS COMO INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

SÃO CARLOS
2023

DOUGLAS SUZUKI TOKUDA

PRÁTICAS DE DESAFIOS MATEMÁTICOS COMO INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador

SÃO CARLOS
2023

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Marlene e Roberto, pelo apoio incondicional que sempre me forneceram ao longo desta jornada acadêmica e pela confiança no meu progresso que foi a âncora que me sustentou nos momentos desafiadores

Ao meu irmão, Tiago, expresso minha gratidão por ser uma fonte constante de inspiração, pelo compartilhamento de seus conhecimentos e por seu incentivo para explorar este vasto universo da matemática.

À minha avó, Maria, por ter sido a primeira a me introduzir ao fascinante mundo da Matemática, sua influência plantou as sementes da minha paixão por este campo.

Ao meu orientador, José Antonio Salvador, pela paciência e dedicação durante o processo de elaboração desta monografia. Suas orientações e vasto conhecimento foram pilares essenciais para o resultado final deste trabalho

Aos meus amigos do curso, que compartilharam comigo essa jornada acadêmica, superando juntos os variados desafios que encontramos durante todo o percurso acadêmico.

Também quero expressar minha sincera gratidão à Universidade Federal de São Carlos, bem como a todo o seu corpo docente e funcionários. O comprometimento com a qualidade do ensino demonstrado por esta instituição foi um fator essencial para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

RESUMO

Esse trabalho teve como objetivo ampliar e desenvolver métodos para o ensino aprendizagem de Matemática, em particular, buscando possibilidades para introdução de probabilidades para a Educação Básica por meio do uso de desafios matemáticos e suas práticas. Primeiramente, são apresentados os conteúdos preliminares baseando nos livros de Dantas e Morgado, a fim de formalizar os conteúdos utilizados. Ademais, é apresentada as indicações de habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os desafios matemáticos foram divididos em dois momentos, o primeiro apresentando brincadeiras analógicas e digitais. Já no segundo é apresentado alguns enigmas matemáticos. Os dados dessa pesquisa bibliográfica possuem caráter mais quantitativo, baseando-se em livros e artigos para respaldar essa possibilidade do uso dos desafios matemáticos para explorar o ensino de probabilidade na sala de aula. Especificamente, será apresentada a experiência com a aplicação de um desafio matemático para o Ensino Médio.

Palavras-chave: Desafios matemáticos. Enigmas. Ensino-aprendizagem. Probabilidade. Práticas didáticas.

ABSTRACT

This work aimed to expand and develop methods for teaching and learning of Mathematics, in particular, seeking possibilities for introducing probabilities for Basic Education through the use of mathematical challenges and their practices. Firstly, the preliminary contents are presented based on the books by Dantas and Morgado, in order to formalize the contents used. Furthermore, the indications of skills present in the National Common Curricular Base (BNCC) are presented. The mathematical challenges were divided into two moments, the first presenting analog and digital games. In the second, some mathematical puzzles are presented. The data from this bibliographical research is more quantitative in nature, based on books and articles to support this possibility of using mathematical challenges to explore the teaching of probability in the classroom. Specifically, the experience with application of a mathematical challenge for high school will be presented.

Keywords: Mathematical challenges. Puzzles. Teaching-learning. Probability. Teaching practices.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagramas da união, interseção e complementar de eventos. 12

Figura 4.1 – Foto do dreidel 23
Figura 4.2 – Construção do dreidel 24
Figura 4.3 – Origem do jogo Cobras e Escadas(Gyanbazi) 25
Figura 4.4 – Foto do jogo "Chutes and Ladders". 26
Figura 4.5 – Faixa tabuleiro Cobras e Escadas. 27
Figura 4.6 – Imagem do jogo "Minesweeper"de 1990. 30
Figura 4.7 – Imagem do jogo "Mined-Out". 31
Figura 4.8 – Exemplo de célula Campo Minado. 32
Figura 4.9 – Possibilidade de células Campo Minado. 32
Figura 4.10 – Marcações de números no Campo Minado. 33
Figura 4.11 – Marcações bandeiras no Campo Minado. 35
Figura 4.12 – Ilustração das três portas. 36
Figura 4.13 – Diagrama do problema de Monty Hall 38
Figura 4.14 – Relação entre os triângulos de Pascal e Sierpinski. 43
Figura 4.15 – Figura da região B contida na região A 45
Figura 4.16 – Figura do segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski. 46
Figura 4.17 – Ponto inicial no Jogo do Caos 47
Figura 4.18 – Algoritmo inicial do Jogo do caos. 48
Figura 4.19 – Resultado do programa. 50
Figura 4.20 – Resultado do programa. 51

Figura 5.1 – Organização da sala de aula 67
Figura 5.2 – Foto da apresentação da parte histórica 68
Figura 5.3 – Foto da apresentação do conteúdo 68
Figura 5.4 – Foto do exemplo de probabilidade no campo minado 69
Figura 5.5 – Foto da explicação das estrategias no campo minado 69
Figura 5.6 – Foto da atividade Time to Climb 70
Figura 5.7 – Foto da realização da atividade 70
Figura 5.8 – Foto dos estudantes participando da atividade 71
Figura 5.9 – Atividade com mais acertos 72
Figura 5.10 – Atividade com menos acertos 73

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Habilidades indicadas na BNCC 20

Tabela 4.1 – Quadro de eventos C, com dois lançamentos do dado. 28
Tabela 4.2 – Tabela do Problema do aniversário. 42

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8

2 CONTEÚDOS PRELIMINARES 10

3 AS HABILIDADES INTRODUZIDAS 19

4 OS DESAFIOS MATEMÁTICOS DE PROBABILIDADE 21
4.1 DESAFIOS UTILIZANDO BRINCADEIRAS ANALÓGICAS E DIGITAIS 22
4.1.1 O pião judaico 22
4.1.2 Cobras e Escadas 25
4.1.3 O campo minado 30
4.2 DESAFIOS UTILIZANDO ENIGMAS MATEMÁTICOS 36
4.2.1 Problema de Monty Hall 36
4.2.2 Problema do aniversário 40
4.2.3 O Triângulo de Sierpinski 43

5 PRÁTICA DOS DESAFIOS MATEMÁTICOS 53
5.1 PLANEJAMENTO DA AULA 53
5.2 A PLATAFORMA NEARPOD 64
5.3 A EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA 66
5.4 RESULTADOS DA PRÁTICA 72

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 77

REFERÊNCIAS 80

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho de graduação tem como tema de estudo os desafios matemáticos como meio para introduzir a probabilidade na Educação Básica, dos quais utilizamos desafios matemáticos, sendo eles clássicos e/ou analógicos, mas também jogos digitais, visando nesse sentido exemplificar as teorias dadas em probabilidade. Ademais, teve como objetivo ampliar e desenvolver métodos para o ensino aprendizagem de Matemática, especificamente do conteúdo de probabilidade, a partir do uso de desafios matemáticos. Esse enfoque utilizado com as atividades de desafios e jogos lúdicos possibilitaram uma melhor visualização de alguns conceitos de probabilidade, área na qual fora menos trabalhada durante a realização do curso de licenciatura em matemática, visando a complementação de minha formação acadêmica.

A monografia consistiu do tipo complementar a pesquisa bibliográfica, sendo assim, foram pesquisados livros e artigos sobre a utilização de desafios matemáticos como métodos de ensino aprendizagem, mais especificamente seu uso para o ensino de probabilidade. Além disso, elaboramos atividades e desafios envolvendo probabilidade, sejam eles lúdicos ou digitais.

Tendo isso em vista, observamos primeiramente que um “desafio matemático”, pode ser de vários tipos, como por exemplo, uma atividade, um problema, um enigma ou até mesmo um jogo. Ademais, é necessário que essas atividades que utilizam os conhecimentos matemáticos do indivíduo, que podem envolver diversas áreas da Matemática, tais quais a geometria, a álgebra, a aritmética possam contribuir com a criatividade e o desenvolvimento intelectual do estudante.

Em particular, as noções de probabilidades constituíram o principal objeto de estudo desse trabalho. Além disso, esses desafios são frequentemente utilizados para estimular o pensamento crítico e também para a resolução de problemas, ajudando os estudantes a melhorarem suas habilidades matemáticas e desenvolverem capacidade de pensar de forma lógica e criativa. Alguns desafios matemáticos são mais simples e fáceis, enquanto outros são complexos e desafiadores, mas todos eles são uma forma divertida e interessante para aprender e descobrir a Matemática.

De forma geral, esse trabalho está dividido em quatro partes: primeiramente, no capítulo 2 apresenta os conteúdos preliminares de probabilidades, visando formalizar os conteúdos introduzidos e trabalhados pelos desafios matemáticos presentes no capítulo 4, sendo que essa formalização foi baseada nos livros básicos de Dantas (DANTAS, 2008) e Morgado (MORGADO et al., 2013). Em seguida, no capítulo 3 apresenta as propostas e indicações presentes na Base Nacional Comum Curricular(BNCC), juntamente com a indicação das habilidades relacionadas com o estudo de probabilidade presentes ao trabalhar com os desafios matemáticos. No capítulo 4 propriamente dito, são apresentadas as possibilidades do uso dos desafios matemáticos, sendo dividida em dois momentos: o primeiro momento trabalhando com o uso de brincadeiras analógicas e digitais, tais como, a brincadeira utilizando o dreidel (pião judaico); o jogo de tabuleiro "Cobras e Escadas"e o jogo digital, campo minado. Já no segundo, são trabalhadas utilizando os enigmas matemáticos, como, por exemplo, o problema de Monty Hall; o problema dos aniversários e o triângulo de Sierpinski.

Finalmente, no último capítulo serão apresentados as práticas com os desafios matemáticos, sendo dividida em 4 etapas principais, na primeira etapa trata-se do planejamento da aula, na segunda será apresenta a plataforma utilizada, na terceira serão apresentadas e comentadas as experiências com a aplicação da aula e por fim na última etapa serão indicadas os resultados obtidos com a prática.

2 CONTEÚDOS PRELIMINARES

Neste capítulo será apresentado os conteúdos que serão trabalhados direta ou indiretamente a partir dos desafios matemáticos abordados no capítulo 4, sobre os Desafios Matemáticos. Para isso, os conteúdos preliminares se basearam em explanações anteriores, como as realizadas por Dantas (DANTAS, 2008), Morgado (MORGADO et al., 2013) e outros, ademais faremos devidas referências aos resultados aqui mostrados.

Primeiramente, necessitaremos de algumas noções básicas sobre probabilidade, e para isso será utilizado como base o livro Probabilidade: Um Curso Introdutório (DANTAS, 2008).

Definição 2.1. Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado são denominados experimentos aleatórios.

Exemplo 2.1. Se lançarmos um dado sobre uma superfície plana e observarmos o número que aparece na face superior, não poderemos determinar a priori qual será esse número.

Exemplo 2.2. Se escolhermos uma lâmpada do processo de fabricação e observarmos o seu tempo de duração, verificaremos que esse tempo varia de lâmpada para lâmpada.

Definição 2.2. Os experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições conduzem ao mesmo resultado são denominados determinísticos.

Definição 2.3. Denominaremos espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis.

Segundo Morgado (MORGADO et al., 2013), espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representaremos o espaço amostral por S e só vamos considerar aqui o caso de S ser finito ou infinito enumerável. Os subconjuntos de S serão chamados de eventos. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento.

Exemplo 2.3. No exemplo 2.1, que corresponde ao lançamento de um dado, O espaço amostral é o conjunto:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Exemplo 2.4. Uma moeda é lançada duas vezes sobre uma superfície plana. Em cada um dos dois lançamentos pode ocorrer cara (C) ou coroa ($\overline{C}$). O espaço amostral é o conjunto:

$$S = \{C\,C, C\,\overline{C}, \overline{C}C, \overline{C}\,\overline{C}\}.$$

Exemplo 2.5. Três peças são retiradas de uma linha de produção. Cada peça é classificada em boa (B) ou defeituosa (D). O espaço amostral associado a esse experimento é:

$$S = \{BBB, BBD, BDB, BDD, DBB, DBD, DDB, DDD\}.$$

Observação 2.1. Nos exemplos anteriores o espaço amostral dado é finito. A seguir sera apresentado alguns de experimentos aleatórios, cujos espaços amostrais não são finitos.

Exemplo 2.6. Uma moeda é lançada sucessivamente até que apareça cara pela primeira vez. Se ocorrer cara no primeiro lançamento o experimento termina. Se ocorrer coroa no primeiro lançamento, faz-se um segundo lançamento e se então ocorrer cara o experimento termina. Se não ocorrer cara nos dois primeiros lançamentos, faz-se um terceiro lançamento e caso não ocorra cara, faz-se um quarto lançamento e assim por diante até que ocorra a primeira cara, quando o experimento termina. O espaço amostral é o conjunto:

$$S = (C, \overline{C}\,C, \overline{C}\,\overline{C}\,C, \dots).$$

Note que os pontos desse espaço amostral podem ser postos em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais e, portanto, ele é infinito, porém enumerável.

Exemplo 2.7. Considere à situação do exemplo 2.2 em que observamos o tempo de vida de uma lâmpada. O espaço amostral é, o conjunto dos números reais não negativos. Ou seja:

$$S = \{x : x\,\text{real}, x > 0\}.$$

Observação 2.2. No exemplo 2.6 o espaço amostral é infinito, porém enumerável, isto é, pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais. Já o exemplo 2.7 o espaço amostral é infinito não enumerável.

Definição 2.4. Denominaremos de evento a todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento, os eventos serão representados por subconjuntos do espaço amostral. Os eventos representados por um conjunto unitário, isto é, contendo somente um ponto do espaço amostral são denominados eventos simples. Diremos que o evento A ocorre quando o resultado do experimento é um evento simples pertencente a A.

Exemplo 2.8. No exemplo 2.5 consideremos o evento A: duas peças são boas. Logo, temos:

$$A = \{BBD, BDB, DBB\}.$$

Então, A ocorre se ocorrer um dos três eventos simples BBD, BDB, ou DBB.

Exemplo 2.9. No exemplo 2.6 consideramos o evento A: a primeira cara ocorre em um lançamento que é um múltiplo de 3. Logo, temos que:

$$A = \{\overline{C}\,\overline{C}C, \overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}\,C, \dots\}.$$

Os eventos simples de A têm $3n - 1$ coroas que precedem a ocorrência da primeira cara na posição $3n$, para $n = 1, 2, \dots$

Definição 2.5. A reunião de dois eventos, A e B, denotada $A \cup B$, é o evento que ocorre sé pelo menos um deles ocorre.

Definição 2.6. A interseção de dois eventos, A e B, denotada $A \cap B$, é o evento que ocorre se ambos ocorrem.

Definição 2.7. O complementar do evento A, denotado como A^c, é o evento que ocorre quando A não ocorre.

Como os eventos são subconjuntos do espaço amostral, podemos representar a reunião, a interseção de dois eventos e o complementar de um evento pelos diagramas utilizados para representar subconjuntos de um dado conjunto. Segue a representação nos diagramas na figura 2.1.

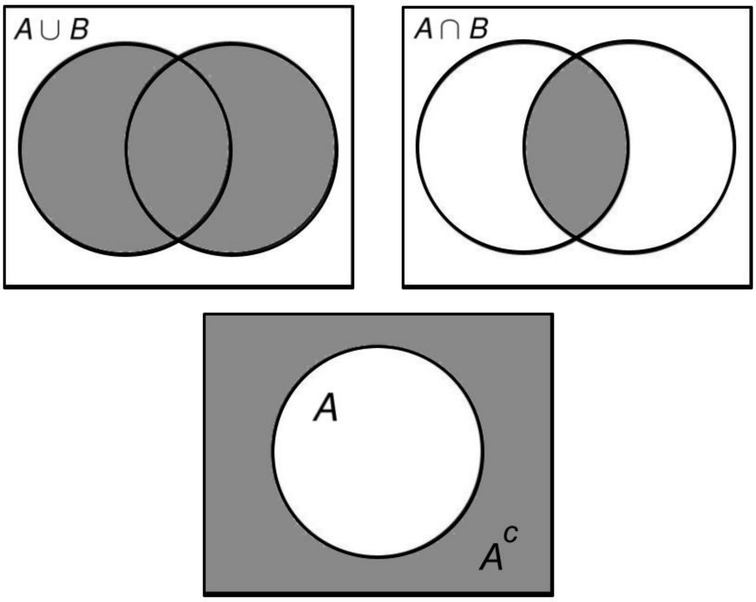


Figura 2.1 – Diagramas da união, interseção e complementar de eventos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 2.10. Uma urna contém bolas numeradas de um a quinze. Uma bola é retirada da urna e seu número anotado. Sejam A e B os seguintes eventos: A: o número da bola retirada é par, B: o número da bola retirada é múltiplo de 3. Determinemos os eventos $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c.

O espaço amostral S associado a esse experimento é o conjunto:

$$S = \{1, 2, \dots, 15\},$$

Para A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c temos:
$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$;
$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$;
$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$;
$A \cap B = \{6, 12\}$;
$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.

Dizemos que o evento A implica o evento B, que denotamos $A \subset B$, se para todo $\omega \in A$ tivermos $\omega \in B$. Isto corresponde à situação em que a ocorrência de A garante inevitavelmente a ocorrência de B. Os eventos A e B são iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$. Os eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos, se eles não podem ocorrer simultaneamente. Isto equivale a $A \cap B = \emptyset$.

Apresentamos no próximo lema algumas propriedades dessas operações entre eventos.

Lema 2.1. *Sejam* A, B *e* C *eventos do espaço amostral* S*, temos:*

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$*;*

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$*;*

c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$*;*

d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$*.*

Demonstração. Ver (DANTAS, 2008). □

Definição 2.8. O evento $\cup_{i=1}^{\infty}$ A é O evento que ocorre quando pelo menos um dos eventos A_i, para $i = 1, 2, \dots$, ocorre.

Definição 2.9. O evento $\cap_{i=1}^{\infty}$, A é o evento que ocorre quando todos os eventos A_i, $i = 1, 2, \dots$, ocorrerem.

Definição 2.10. Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto por m eventos simples. A probabilidade de A, que denotaremos P(A), é definida por:

$$P(A) = \frac{m}{N}. \tag{2.1}$$

Observação 2.3. Basicamente, a probabilidade para um determinado evento ocorrer é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número total dos casos possíveis.

Observação 2.4. Note que, assim definida, a probabilidade é uma função definida na classe dos eventos ou, o que é equivalente, na classe dos subconjuntos do espaço amostral e satisfaz às propriedades estabelecidas no seguinte lema:

Lema 2.2. *Seja* S *um espaço amostral finito satisfazendo as condições da definição 2.10. A probabilidade definida por (2.1) satisfaz:*

a) $P(A) \geq 0$*, para todo* $A \subset S$*;*

b) Se A *e* B *são eventos mutuamente exclusivos, então:*
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*;*

c) $P(S) = 1$*.*

Demonstração. a) Como $N > O$ e $m \geq O$ segue que $P(A) \geq 0$. Considerando que A tem m_2 eventos simples e que B tem m_2 eventos simples. Uma vez que, A e B são mutuamente exclusivos, segue-se que eles não têm eventos simples comuns, portando o número de eventos simples de $A \cup B$ é $m_1 + m_2$. Daí utilizando a definição obtemos b). Contudo, como o número de eventos simples de S é N, segue novamente pela definição que $P(S) = 1$. □

Exemplo 2.11. No experimento que consiste em lançar-se um dado, considerando-o justo, pode-se atribuir probabilidade $\frac{1}{6}$ a cada um dos eventos simples $1, 2, 3, 4, 5, 6$. A partir do qual, o evento "o número obtido quando se lança o dado é par" tem probabilidade $\frac{3}{6}$, isto é, uma probabilidade de $\frac{1}{2} = 0,5$.

Observação 2.5. Seja S o espaço amostral associado a um experimento aleatório. Considerando-se n repetições desse experimento nas mesmas condições, observemos que a frequência relativa está definida na classe dos eventos de S e suas propriedades são dadas no seguinte lema:

Lema 2.3. *A frequência relativa* $f_{n,a}$ *definida na classe dos eventos do espaço amostral* S *satisfaz os seguintes condições:*

a) Para todo evento A*,* $0 \leq f_{n,A} \leq 1$*;*

b) Se A *e* B *são dois eventos de* S *mutuamente exclusivos, temos:*
$f_{n,A \cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$*;*

c) $f_{n,S} = 1$*.*

Demonstração. Ver (DANTAS, 2008). □

Definição 2.11. Probabilidade é uma função definida numa classe $\mathcal{F}$ de eventos de S que satisfaz as seguintes condições:

a) P(A) ≥ 0 para todo A $\in \mathcal{F}$;

b) Se $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F}$, que são mutuamente exclusivos, então:

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

c) P(S) = 1;

Definição 2.12. Seja S um espaço amostral enumerável e seja A um subconjunto de S. A probabilidade de A é definida da seguinte maneira:

$$P(A) = \sum_{n:\, \omega_n \in A} P(\omega_n). \tag{2.2}$$

Observação 2.6. A definição clássica atribuiu a um evento A, composto de M eventos simples, probabilidade $\frac{N}{M}$, onde N é o número de eventos simples do espaço amostral, para calcularmos a probabilidade de um evento qualquer precisamos, portanto, contar o número de eventos simples desse evento.

Definição 2.13. Uma amostra de tamanho n de um conjunto C que tem N elementos é um subconjunto de n elementos retirados de C.

Observação 2.7. Essas amostras podem ser retiradas de um conjunto de duas maneiras: com reposição ou sem reposição. Nas amostras retiradas com reposição, cada elemento selecionado é reposto no conjunto antes da próxima retirada. No caso de amostras sem reposição, como o nome sugere, os elementos não são repostos após cada retirada. Ademais, os elementos da amostra poderão ser ordenados ou não.

Definição 2.14. Uma amostra é dita ordenada se os seus elementos forem ordenados, isto é, se duas amostras com os mesmos elementos, porém em ordens distintas, forem consideradas diferentes.

Exemplo 2.12. Considere uma classe com 20 estudantes. O concelho de classe é formado por 3 estudantes: um presidente, um secretário e um tesoureiro. Ao escolhermos uma amostra de 3 estudantes para formarem o conselho, deveremos considerar as amostras ordenadas, pois ainda que duas amostras sejam formadas pelas mesmas pessoas, uma vez que elas executam tarefas distintas, devem ser consideradas concelhos distintos.

Observação 2.8. As amostras não ordenadas sem reposição, de tamanho n de um conjunto com N elementos, são denominadas na maioria dos textos elementares de probabilidade ou de combinatória de combinações de N elementos tomados n a n. Quando não for estabelecida nenhuma qualificação, estaremos admitindo que os elementos são todos distintos e que a amostra é não ordenada. As amostras ordenadas sem reposição são denominadas arranjos.

Definição 2.15. (Princípio Fundamental da Contagem (PFC)) De acordo com Morgado (MORGADO et al., 2013), O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, ha y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x \cdot y$.

Lema 2.4. *O número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho* n*, de um conjunto com* N *elementos, que será, denotado por* $(N)_n$*, é dado por:*

$$(N)_n = N(N-1)\dots(N-n+1). \tag{2.3}$$

Demonstração. As amostras são retiradas sem reposição, portanto o primeiro elemento da amostra pode ser retirado de N maneiras, o segundo de $(N-1)$ maneiras, e assim por diante até o n-ésimo que pode ser retirado de $(N-(n-1))$ maneiras. Pelo princípio fundamental da contagem, o número de maneiras de retirar uma amostra de tamanho n é dado pelo produto desses números. □

Exemplo 2.13. No exemplo 2.12 o número de maneiras que o conselho de classe pode ser formado é igual ao número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho 3 de um conjunto com 20 elementos. Pelo lema 2.4 temos:

$(20)_3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$

Exemplo 2.14. Considere o conjunto das quatro primeiras letras do alfabeto $\{a, b, c, d\}$. O número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho 3 é igual a $(4)_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Para referência futura aproveitamos para listar essas 24 amostras:

abc abd acd bcd
acb adb adc bdc
bac bad cad cbd
bca bda cda cdb
cab dab dac dbc
cba dba dca dcb.

Lema 2.5. *O número de amostras ordenadas com reposição de tamanho* n*, de um conjunto com* N *elementos é igual a* N^n*.*

Demonstração. De fato, como após cada retirada o elemento retirado é reposto, então em cada uma das n retiradas temos N escolhas possíveis. Pelo princípio fundamental da contagem 2.15, o número dessas amostras é N^n, □

Observação 2.9. No capítulo 4 sobre os desafios matemáticos apresentaremos o problema do aniversário que se utilizará dessas notações dadas nos lemas.

Observação 2.10. A seguir retomemos a definição 2.11 de probabilidade dada por Dantas (DANTAS, 2008), porém nesse caso basearemos no livro de Morgado (MORGADO et al., 2013).

Observação 2.11. Se A e B são eventos em um mesmo espaço amostral S,

– $A \cup B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A ou ocorre o evento B;

– $A \cap B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorrem ambos os eventos A e B;

– $A \setminus B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A, mas não ocorre o evento B;

– A^c chamado de evento oposto ou complementar de A, é o evento que ocorre se. e somente se, o evento A não ocorre;

– Denotaremos por $\emptyset$ o evento impossível, ou seja, $P(\emptyset) = 0$.

Definição 2.16. Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número P(A) de forma que:

a) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;

b) $P(S) = 1$;

c) Se A e B são eventos mutualmente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente (isto é, $A \cap B = \emptyset$) então.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Teorema 2.1. *Se A e B são eventos, então:*

a) $P(A^c) = 1 - P(A)$*;*

b) $P(\emptyset) = 0$*;*

c) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$*;*

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*;*

e) Se $A \supset B$ *então* $P(A) \geq P(B)$*.*

Demonstração.

a) $1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$.
Daí, $P(A^c) = 1 - P(A)$;

b) $P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$ pois, S e $\emptyset$ são mutualmente excludentes.
Daí, $P(\emptyset) = 0$;

c) $P(A) = P[(A \setminus B) \cup (A \cap B)] = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ pois, $A \setminus B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes.
Daí, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$;

d) $P(A \cup B) = P[(A \setminus B) \cup B] = P(A \setminus B) + P(B)$ pois, $A \setminus B$ e B são mutuamente excludentes.
Como, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$, resulta $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

e) Como $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cup B)$, se $A \subset B$ resulta $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A \setminus B) \geq 0$, temos $P(A) \geq P(B)$.

□

Observação 2.12. Denotaremos por $\emptyset$ o evento impossível. E denotaremos por A^c sendo o evento complementar de A.

Definição 2.17. O valor esperado de um resultado aleatório numérico é definido como sendo a média ponderada seus possíveis valores em que os pesos são as respectivas probabilidades. isto é, se os possíveis para o resultado são $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, seu valor esperado é $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ (note que a soma de todos os pesos é igual a 1).

Definição 2.18. Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral e supondo que $P(A) > 0$, a probabilidade condicional de B dado A é definida por:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Lema 2.6. *Seja* B *um evento e* A_1 *e* A_2 *uma partição do espaço amostral* S*, isto é* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ *e* $A_1 \cup A_2 = S$*. Seja* P *uma probabilidade definida nos eventos de* S*. Temos para* $i = 1, 2$*:*

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

Demonstração. Ver (DANTAS, 2008). □

3 AS HABILIDADES INTRODUZIDAS

Nessa sessão serão indicadas aquilo que está previsto para o ensino e aprendizagem de Probabilidade na Educação Básica, juntamente com habilidades que se relacionam com os desafios matemáticos apresentados na próxima sessão, fundamentando-se principalmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018). Primeiramente, com relação à etapa do Ensino Fundamental, a BNCC comenta que,

> No tocante à Probabilidade, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (BRASIL, 2018, p. 528)

Além disso, com relação ao Ensino Médio, a BNCC comenta sobre a conclusão dos debates refentes a essa etapa do ensino,

> Concluída após amplos debates com a sociedade e os educadores do Brasil, o texto referente ao Ensino Médio possibilitará dar sequência ao trabalho de adequação dos currículos regionais e das propostas pedagógicas das escolas públicas e particulares brasileiras iniciado quando da homologação da etapa até o 9º ano do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018, p. 5)

Nesse sentido, embora a BNCC não indique diretamente sobre a probabilidade para o Ensino Médio, fica evidente que essa etapa possui a função principal de aprofundar e de consolidar os conceitos estudados anteriormente pelos estudantes.

Posto isso, na tabela 3.1 serão indicadas as habilidades da BNCC relacionadas com o ensino da probabilidade e que se relacionam com os Desafios Matemáticos apresentados no capítulo 4.

Tabela 3.1 – Habilidades indicadas na BNCC
Fonte: Elaborado pelo autor.

Nivel	Documento	Anos	Habilidade
EF	BNCC	5° ano	**(EF05MA23)** Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis). (BRASIL, 2018, p. 297)
EF	BNCC	6° ano	**(EF06MA30)** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. (BRASIL, 2018, p. 305)
EF	BNCC	8° ano	**(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1. (BRASIL, 2018, p. 315)
EF	BNCC	9° ano	**(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos. (BRASIL, 2018, p. 319)
EM	BNCC	1° ao 3° ano	**(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. (BRASIL, 2018, p. 537)
EM	BNCC	1° ao 3° ano	**(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. (BRASIL, 2018, p. 537)
EM	BNCC	1° ao 3° ano	**(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (BRASIL, 2018, p. 537)
EM	BNCC	1° ao 3° ano	**(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (BRASIL, 2018, p. 539)

4 OS DESAFIOS MATEMÁTICOS DE PROBABILIDADE

Primeiramente, sobre a probabilidade, de acordo com BATANERO (2006; apud (LOPES et al., 2013))

> A Probabilidade é o ramo da Matemática que estuda os fenômenos aleatórios e deve ser apresentada aos alunos desde seus diferentes enfoques, que estão relacionados e aportam as diversas partes necessárias para a compreensão global do conceito. Um enfoque puramente experimental do ensino de probabilidade não é suficiente. Um conhecimento genuíno de probabilidade só se alcança com o estudo de alguma probabilidade formal, ainda que este estudo deva ser gradual e apoiado na experiência estocástica dos estudantes (BATANERO, 2006).

Dessa forma, a probabilidade é uma parte importante da Matemática que envolve estimar a chance de um evento ocorrer, ademais ela pode ser apresentada em alguns desafios matemáticos, esses desafios podem ser de vários tipos, como por exemplo, uma atividade, um problema, um enigma ou até mesmo um jogo. Ademais, é necessário que essas atividades utilizem os conhecimentos matemáticos do indivíduo, que podem envolver diversas áreas da Matemática, tais quais a geometria, a álgebra, a arimética.

No caso da probabilidade, podemos encontrar desafios matemáticos que envolvem eventos aleatórios, tais como jogar uma moeda ou um dado, sortear um número ou escolher uma carta de um baralho. Nestes desafios, os participantes precisam usar conceitos de probabilidade para estimar as chances de certos resultados acontecerem e, em seguida, tomar decisões com base nessas estimativas.

Além disso, muitos desafios matemáticos envolvem análise de probabilidade para encontrar soluções mais eficientes ou otimizar o resultado. Tendo isso em vista, será apresentado algumas possibilidades do uso desses desafios matemáticos como uma introdução da probabilidade. Ademais, será utilizada as teorias de resolução de problemas, dadas por Polya (PóLYA, 1995), na qual temos, as quatro principais etapas a serem seguidas pelos estudantes para a resolução de um problema, sendo ela da seguinte maneira:

1. **Compreender o problema**, temos de perceber claramente o que é necessário, visando compreender o problema até encontrar a incógnita com precisão;

2. **Elaboração de um plano**, temos que ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para estabelecermos um plano;

3. **Executar o plano**, pondo em prática tudo que se foi planejado na fase anterior;

4. **Fazer um retrospecto**, sobre a resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

4.1 DESAFIOS UTILIZANDO BRINCADEIRAS ANALÓGICAS E DIGITAIS

Uma primeira possibilidade de desafio matemático são utilizando os jogos, dos quais podem ser clássicos e analógicos, como jogos de tabuleiro, jogos com cartas e dados. Ou até mesmo jogos digitais utilizando-se das novas tecnologias. Segundo Grando (GRANDO, 2000), em seu artigo, os jogos podem ser caracterizados como instrumentos lúdicos, que apresentam elementos favoráveis a sua aplicação educacional. Ademais, ela apresenta o jogo de tabuleiro contig60 como um exemplo funcional dessa definição, visto que nele se desenvolve a habilidade de cálculo mental. Esse exemplo demonstra as possibilidades que surgem ao entrar no âmbito eletrônico dos jogos, em que um único aparelho, como um celular, é capaz de gerar esse e vários outros jogos, que poderão ajudar o indivíduo nas mais diversas áreas da Matemática.

Ainda no artigo de Grando (GRANDO, 2000), são apresentadas algumas das contribuições dos jogos, sendo algumas delas, a fixação do conteúdo, o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas, a conscientização de trabalho em grupo e a motivação, que já possibilitam uma melhora no engajamento geral dos alunos em relação a participar nas atividades em sala de aula, implicando um possível aumento no desempenho desses.

4.1.1 O pião judaico

Uma primeira possibilidade de jogo analógico é utilizando a brincadeira com um dreidel, pião judaico, que segundo Zaslasvsky (ZASLASVSKY, 2000),

> Durante o Hannukah, a Festa judaica das Luzes, que geralmente ocorre em dezembro, as crianças adoram girar o dreidel, um pião de quatro lados. Eles celebram o milagre que aconteceu há mais de 2 mil anos no ano 165 A.E.C. (antes da Era Comum), quando os corajosos Macabeus reconquistaram o templo de Jerusalém estava sob domínio dos assirios. Embora mal houvesse óleo o suficiente óleo para manter as lâmpadas acesas por uma noite, o óleo durou por oito dias. (ZASLASVSKY, 2000, p.66)

O jogo consiste em, primeiramente, definir uma quantidade de rodada e fichas, na qual os jogadores reúnem-se ao redor da mesa. Cada jogador coloca duas fichas no bolo (pot) que fica no centro. Em seguida o primeiro jogador roda o pião e observa qual das letras está para cima quando o dreidel parar. A partir disso, o jogador contabiliza os pontos seguindo algumas regras, representadas pelas letras em português ou hebraico.

- G ou nun: o jogador não ganha nada;
- M ou gimel: o jogador pega todo o bolo;
- A ou hay: o jogador pega metade do bolo;
- T ou shin: o jogador deposita uma ficha no bolo.

Segue na figura 4.1 uma foto do pião judaico.

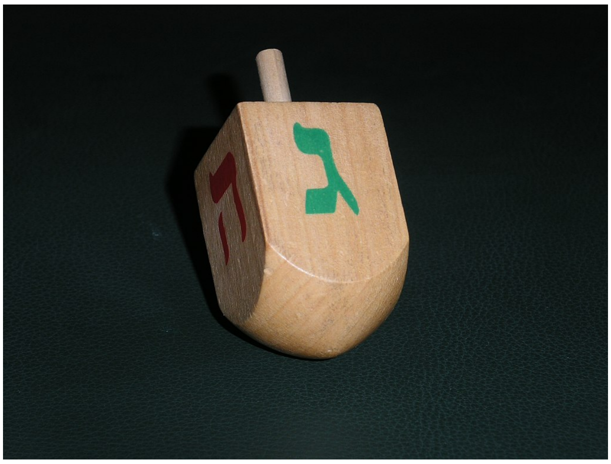


Figura 4.1 – Foto do dreidel

Fonte: Foto de Roland Scheicher(2006)[1].

A partir disso, o jogo segue para o próximo jogador que repete os passos, isso continua até o final das rodadas, na qual o jogador com mais peças é o vencedor. Caso algum jogador fique sem peças, ele é eliminado do jogo, a depender da escolha dos outros jogadores.

Ainda segundo Zaslavsky (ZASLAVSKY, 2000), uma maneira de construir esse pião é da seguinte maneira, primeiramente, recortar um pedaço quadrado de papelão e sobre ele desenhar cada uma das letras G, M, H, e T em cada lado desse quadrado. Para localizar o centro do quadrado de papelão, deve-se desenhar as duas diagonais do quadrado, a partir da qual as linhas interceptam no centro. Onde as duas linhas se cruzam, marque um ponto. Em seguida, adicionar e colar uma haste no centro.

1 <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dreidel_001.jpg>. Acesso em: 5 mar. 2023.

A seguir na figura 4.2 temos a representação dessa construção,

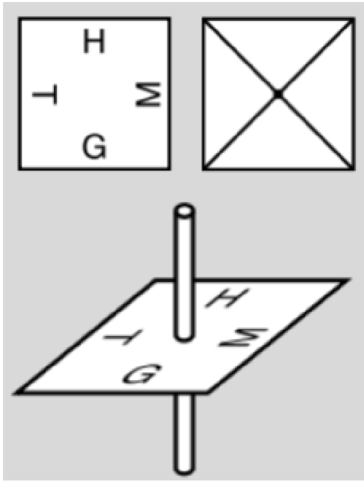


Figura 4.2 – Construção do dreidel

Fonte: Imagem adaptdado do livro de (ZASLASVSKY, 2000).

Posto isso, para utilizarmos esse jogo para o ensino de probabilidade, primeiramente podemos após a realização de uma partida, indicar alguns questionamentos aos estudantes, como por exemplo: "Será que o pião cai mais vezes para um lado do que para outro?", "Supondo que um lado do pião seja maior que os outros, ou que uma quantidade maior de massa foi colocada em um dos lados. Como isso afetaria os resultados obtidos?".

Além disso, é possível comentar com os estudantes as probabilidades inerentes ao jogo utilizando o dreidel padrão, por exemplo,

De forma geral, a probabilidade de que uma letra aparecer cada vez que o pião é girado, é feita considerando o espaço amostral de todas as letras possíveis, denotemos como,

$$D = \{G, M, A, T\},$$

E considerando os eventos, que podem ser definidos como qualquer subconjunto do espaço amostral, no caso podemos considerar o evento definido em termos das letras específicas.

Exemplificando, para sabermos a probabilidade do aluno receber todas as fichas do jogo, seguindo a regra base do jogo, deve cair o lado M(gimel), sendo assim para o evento consideremos o caso de cair a letra $\{M\}$, logo, pela definição 2.10 temos que a probabilidade será dada seguinte maneira, note que o espaço amostral das letras D, possui 4 eventos simples, nesse caso com o pião justo, todas letras igualmente prováveis. Daí consideremos o caso de cair M, denotemos como o evento: $L = \{M\}$.

Logo, a probabilidade de L, que denotaremos P(L) é dada por: $\frac{1}{4}$, isto é, a chace de cair algum dos lados do pião justo é de 25%.

Com isso, a brincadeira com dreidel introduz algumas das habilidades indicadas na BNCC, das quais, as relacionadas com o estudo de probabilidades são: (EF05MA23) e (EM13MAT311). Descritas na tabela 3.1.

4.1.2 Cobras e Escadas

Outra possibilidade de jogo analógico é utilizando o jogo de tabuleiro “snakes and ladders” traduzido para o português como Jogos de Cobras e Escadas. Segundo Arneson (ARNESON, 2019), este jogo de tabuleiro, que se acredita ter origem na Índia no século II a.C. A versão histórica era uma alegoria da jornada da vida, onde você ascende devido ao destino ou karma, representado pelas escadas, mas é impedido por kama, que refere-se a uma das metas da vida mundanas, tri-varga (kama, artha e dharma), no caso está é o desejo, representado no jogo por cobras. Nota-se que havia mais cobras do que escadas, dificultando alcançar o Moksha - a libertação espiritual. Os britânicos adotaram o jogo e os vitorianos o adaptaram à sua visão de mundo sobre os efeitos de boas e más ações. As virtudes correspondem às escadas e os vícios correspondem às cobras. O número de cobras e escadas foi igualado. Na figura 4.3 temos, uma imagem do antigo jogo de tabuleiro Cobras e Escadas (Gyanbazi).

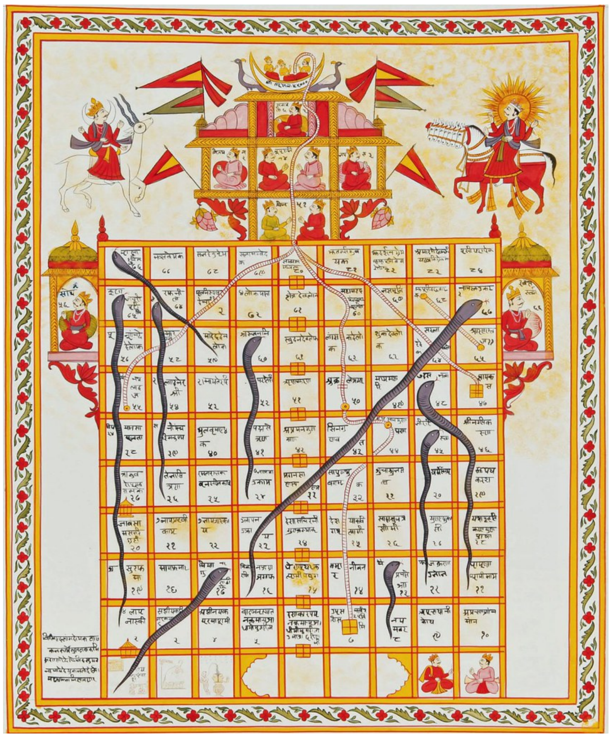


Figura 4.3 – Origem do jogo Cobras e Escadas(Gyanbazi)

Fonte: HereNow4U[2].

[2] <https://www.herenow4u.net/index.php?id=72922>. Acesso em: 5 mar. 2023.

Quando o jogo foi publicado nos Estados Unidos pela Milton Bradley em 1943, eles o redesenharam para eliminar as cobras assustadoras e, em vez disso, adaptá-lo ao ambiente escolar. No tabuleiro, as crianças sobem escadas e descem escorregadores. Ele mantém um pouco das lições morais originais. Na base de cada escada, uma criança está realizando uma boa ação. No topo de um escorregador, a criança está fazendo algo travesso. Na figura 4.4 temos uma foto dessa outra versão do jogo, intitulado como "Chutes and Ladders", na qual troca-se as cobras por escorregadores.

Figura 4.4 – Foto do jogo "Chutes and Ladders".

Fonte: Edição da foto de Brandi Jordan[3].

3 <https://www.thesprucecrafts.com/chutes-and-ladders-snakes-and-ladders-411609>. Acesso em: 5 mar. 2023.

De acordo com, Althoen (ALTHOEN et al., 1993) o Cobras e Escadas normalmente consiste em, ser jogado em um tabuleiro de dez por dez com quadrados numerados de 1 até 100. Consideremos também que, o jogo pode ter de 2 a 4 participantes. A partir disso, a partida inicia fora do tabuleiro (na casa 0), os jogadores se revezam rolando um dado de 6 faces ou usando uma roleta para determinar quantos quadrados irão avançar. Duas ou mais fichas, essas que representam os jogadores, podem ocupar o mesmo quadrado simultaneamente.

O jogador que chegar primeiro ao quadrado 100 vence.

Se um jogador cair em um quadrado contendo a parte inferior de uma escada, ele é imediatamente movido para o quadrado no topo da escada. Da mesma forma, se o jogador cair no quadrado no topo de uma cobra, ele é imediatamente movido para o quadrado na parte inferior da cobra. A quantidade de cobras e escadas variam, mas normalmente o jogo contém 10 cobras e 9 escadas.

Agora, com relação às possibilidades para o ensino da probabilidade, podemos primeiramente considerar uma parte do tabuleiro, no caso uma faixa com 7 casas, uma casa inicial e 6 casas que representaram as possibilidades do dado de 6 faces. Por exemplo, consideremos o caso da faixa entre as casas 53 e 59, dais quais, a casa 55 possui uma cobra e casa 57 possui uma escada.

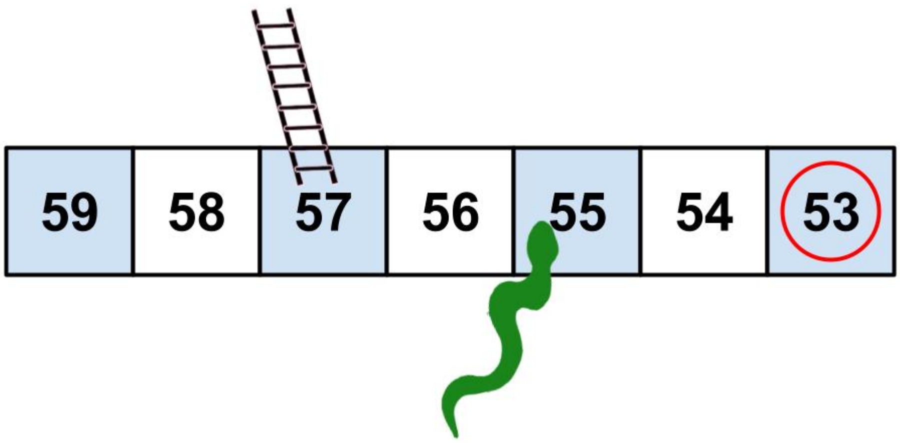


Figura 4.5 – Faixa tabuleiro Cobras e Escadas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que, podemos calcular as probabilidades nesse caso, por exemplo, consideremos o espaço amostral das possíveis casas de cair a partir da rolagem de um dado de 6 lados, dado por,

$$C = \{54, 55c, 56, 57e, 58, 59\}.$$

Tendo isso, em vista podemos considerar os seguintes eventos possíveis, no caso, o evento da probabilidade de cair na cobra dada por $C = \{55c\}$; da probabilidade de cair na escada, dada por $E = \{57e\}$; e da probabilidade de cair nas outras casas, dada por $N = \{54, 56, 58, 59\}$. Segue pela definição 2.10 que,

a) $P(C) = \frac{1}{6} \approx 0,167 = 16,7\%$

b) $P(E) = \frac{1}{6} \approx 0,167 = 16,7\%$

c) $P(N) = \frac{4}{6} \approx 0,667 = 66,7\%$

Perceba que, como os eventos de parar na cobra, C, e de parar na escada, E, são independentes podemos considerar que, a probabilidade de cair na cobra ou na escada somada com a probabilidade de não cair nelas, resulta em 1, permitindo a explicação das probabilidades complementares, definida em 2.1.

Ademais, podemos considerar um caso diferente, no qual o jogador rola um dado duas vezes consecutivas, visando descobrir a probabilidade de cair na casa com a cobra, note que, nesse caso, pode-se cair na casa da cobra no primeiro lançamento do dado ou no segundo lançamento do dado, possibilitando ao aluno verificar como se modificam essas probabilidades quando se troca o amostral em estudo, nesse caso com dois lançamentos de um único dado, por exemplo, podemos descrever esses lançamentos em uma tabela, da seguinte maneira.

Tabela 4.1 – Quadro de eventos C, com dois lançamentos do dado.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Evento	**Vazia**	**Cobra**
1 + 1		x
1 + 2	x	
1 + 3		
1 + 4	x	
1 + 5	x	
2		x
3	x	
4		
5	x	
6	x	

De forma geral, utilizando a definição 2.3, sabemos que o espaço amostral do lançamento de dois dados de 6 faces em sequência é definido da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
S = \{ & \{1,1\}\ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \\
& \{2,1\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \\
& \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \\
& \{4,1\}, \{4,2\}, \{4,3\}, \{4,4\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \\
& \{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\}, \{5,5\}, \{5,6\}, \\
& \{6,1\}, \{6,2\}, \{6,3\}, \{6,4\}, \{6,5\}, \{6,6\}, \}
\end{aligned}
$$

Agora, note que, estamos considerando o caso de que o dado será lançado pelo menos duas vezes fazendo o jogador cair na casa com a cobra, para isso, podemos considerar dois casos, no primeiro caso, considerando que no lançamento inicial obteve-se 1 no dado, para chegar na casa com a cobra o jogador deve tirar novamente 1 na segunda jogada, isto é, a probabilidade de obter um 1 seguido de um 1 no lançamento seguido do dado é $\frac{1}{36}$. Isso ocorre porque há apenas uma maneira de obter um 1 seguido de 1, mas há 36 resultados possíveis no lançamento duplo.

O outro caso possível de cair na casa da cobra, é obtendo diretamente no primeiro lançamento um 2 no dado, logo temos uma probabilidade de $\frac{1}{6}$.

Portanto, calculando deve haver $\frac{1}{36}$ de probabilidade do primeiro caso mais a probabilidade de $\frac{1}{6}$ no segundo caso, temos,

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

Logo, a probabilidade de cair na casa com cobra considerando que o dado será lançado pelo menos duas vezes é $\frac{7}{36}$.

Com isso, podemos indicar algumas das habilidades dadas pela BNCC induzidas por esse jogo de tabuleiro, sendo elas: (EF06MA30), (EF08MA22) e (EM13MAT311). Descritas na tabela 3.1.

4.1.3 O campo minado

As duas atividades anteriores eram jogos mais clássicos e analógicos, sendo assim, com relação às possibilidades com os jogos digitais podemos utilizar o jogo campo minado. A origem do “campo minado” é desconhecida. Segundo (COBBETT, 2009) no TechRadar. A primeira versão do jogo foi o Microsoft “Minesweeper” de 1990, lançado como parte do Windows Entertainment Pack, antes de ser promovido a um recurso padrão no Windows 3.1 em diante. Na figura 4.6 temos uma imagem do jogo "Minesweeper".

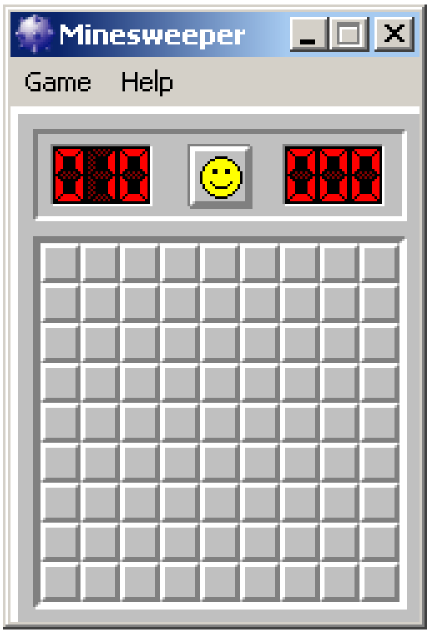


Figura 4.6 – Imagem do jogo "Minesweeper"de 1990.

Fonte: The Cutting Room Floor[4]

Entretanto, segundo (GRILIOPOULOS, 2014) no Eurogamer diz que o jogo Mined-Out criado por Ian Andrew em 1983 para o antigo computador doméstico "Sinclair ZX81" sendo o primeiro jogo do tipo campo minado. Ademais, Griliopoulos comenta que Curt Johnson, o criador do Microsoft Minesweeper, reconhece que o design do seu jogo foi emprestado de outro, mas não era o “Mined-Out” e ele não se lembra qual era esse jogo. A figura 4.7 mostra o antigo jogo "Mined-Out".

[4] <https://tcrf.net/File:Mines93-FIN_TitleScr.png>. Acesso em: 10 mar. 2023.

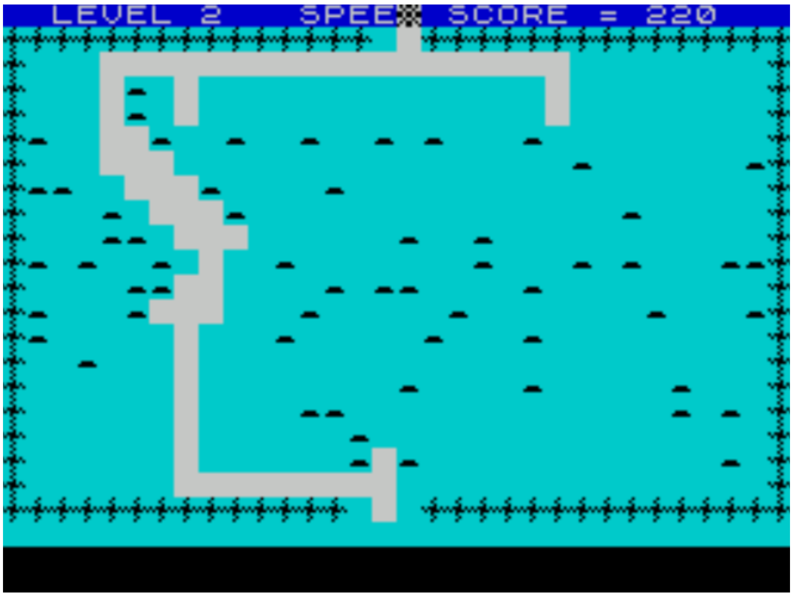


Figura 4.7 – Imagem do jogo "Mined-Out".

Fonte: WIZWORDS[5] (Adaptado).

Agora, com relação às possibilidades de uso do Campo Minado para introduzir probabilidades, podemos, por exemplo, trabalhar e relacionar o estudo das porcentagens, uma vez que cada célula no tabuleiro tem uma chance de possuir uma mina ou não possuir uma mina.

Consideremos o caso, de existir um total de 100 células no tabuleiro, na qual 10 delas contêm minas, então podemos dizer que a probabilidade de uma célula conter uma mina é de $\frac{10}{100}$. Isto é, a possibilidade de acertar uma mina ao acaso pode ser expressa como uma porcentagem, no caso 10%. Seguindo as definições de (DANTAS, 2008), o espaço amostral nesse caso são todas as células no tabuleiro e o evento estudado é o subconjunto das células que contem um mina.

Além desse caso geral, de considerar todas as 100 células, podemos também utilizar as informações disponíveis no tabuleiro para calcular as probabilidades de existir uma mina em determinada célula.

Por exemplo, considerando o caso figura 4.8 no qual uma célula tem o número “3” impresso nela, isso significa que há três minas nas células adjacentes, uma vez que há um total de 8 células adjacentes, podemos calcular a probabilidade de que exista uma mina ao redor dessa célula em questão, sendo ela de $\frac{3}{8}$, ou 37,5%.

[5] <http://www.wizwords.net/the-making-of-mined-out>. Acesso em: 10 mar. 2023.

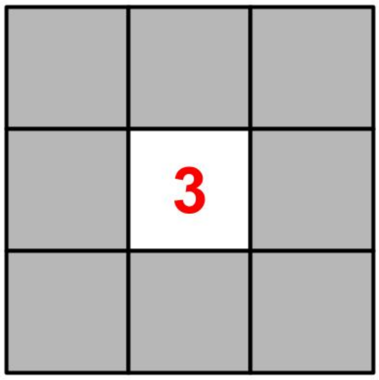


Figura 4.8 – Exemplo de célula Campo Minado.

Fonte: Elaborado pelo autor

Uma possível visualização dessa informação dadas pelo campo minado está representada na figura 4.9, considerando esse caso mostrado, a célula 1: possui apenas uma mina adjacente, a célula 2: possui duas minas adjacentes e a célula 3: possui 3 minas adjacentes.

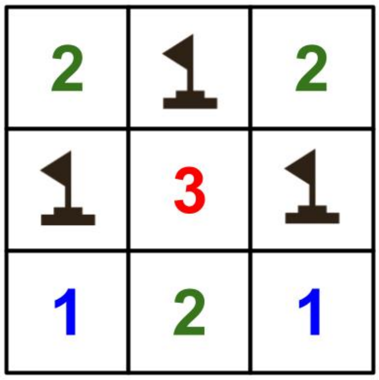


Figura 4.9 – Possibilidade de células Campo Minado.

Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, é esperado que consideremos agora um caso misto, baseando nas atividades elaboradas por (LEOCáDIO, 2021): primeiramente, utilizemos um campo de 10 por 10, no qual as linhas são representadas por letras maiúsculas (A, B, . . . , J), as colunas são representadas por letras minusculas (a, b, . . . , j) e as posições das células são representadas pelos pares de coordenadas, dadas por (letra maiúscula, letra minuscula).

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
A							1	1		
B								2	1	
C			4						1	
D									3	2
E										
F										
G				2						
H							3			
I										
J	1									2

Figura 4.10 – Marcações de números no Campo Minado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, seguindo a figura 4.10, inicialmente, verificando as células isoladas, temos que, os números 4, 3 e 2, respectivamente das coordenadas (C, c), (H, g) e (G, d), são análogos ao raciocínio realizado no exemplo da figura 4.8, logo as probabilidades de ter uma mina adjacente é dado por,

- $(\mathrm{C}, \mathrm{c}) = \frac{4}{8} = 50\%$
- $(\mathrm{H}, \mathrm{g}) = \frac{3}{8} = 37,5\%$
- $(\mathrm{G}, \mathrm{d}) = \frac{2}{8} = 25\%$

Em seguida, verifiquemos as células com 1 e 2 nos cantos inferiores do campo, respectivamente, coordenadas (J, a) e (J, j). Nesse caso, note que o espaço amostral se difere, uma vez que, possuímos nesses casos um total de 3 células adjacentes que podem conter uma mina, logo temos,

- $(\mathrm{J}, \mathrm{a}) = \frac{1}{3} \approx 33,3\%$
- $(\mathrm{J}, \mathrm{j}) = \frac{2}{3} \approx 66,6\%$

Agora, analisemos o canto superior direito do campo, novamente de acordo com (LEOCÁDIO, 2021), para isso verifiquemos alguns casos:

1. O número 1 de posição (B, i): indica que existe uma mina na posição (C, h), visto que as outras 7 células ao seu redor, ou possuem um indicar com o número: (A, h), (B, h), (C, i) ou estão vazias: (A, i), (A, j), (B, j), (C, j);

2. O número 1 da posição (A, h): indica que existe uma mina na posição (B, g), visto que as outras 4 células ao ser redor, ou possuem um indicador com número: (A, g), (B, h), (B, i) ou esta vazia: (A, i);

3. O número 2 de posição (B, h) revela que há duas minas adjacentes a ele, porem sabemos pelos números 1's que essas minas estarão nas posições (B, g) e (C, h);

4. O número 2 de posição (D, j) O número 2 de posição (B, h) revela que há duas minas adjacentes a ele, porém note que, as únicas possibilidades de células com minas, são as posições (E, i) e (E, j), pois as outras 3 células são de números ou vazia;

5. A partir das considerações (1) e (4), as minas do número 3 de posição (D, i), devem estar nas células das posições (C, h), (E, i) e (E, j).

Para melhor entendimento denotaremos por uma bandeira o local onde as minas estão escondidas e por "A" as posições seguras onde não há minas, como ilustrado na Figura 4.11. Dessa maneira, como as minas foram encontras nas posições: (B, g), (C, h), (E, i) e (E, j), logo como sabemos as posições das minas, e pelo fato do número indicado representar a quantidade de minas adjacentes, os locais seguros onde teremos 100% de chance de não encontrar uma mina são: (A, f), (B, f), (C, g), (D, h) e (E, h).

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
A						A	1	1		
B						A		2	1	
C			4				A		1	
D								A	3	2
E								A		
F										
G				2						
H							3			
I										
J	1									2

Figura 4.11 – Marcações bandeiras no Campo Minado.

Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, o jogo Campo Minado pode ser uma ferramenta útil para ensinar conceitos de probabilidade e porcentagens, uma vez que cada célula no tabuleiro representa um evento aleatório com uma certa probabilidade de ocorrência.

Observamos que de acordo com BNCC, essas possibilidades utilizando o Campo Minado induzem as seguintes habilidades: (EF05MA23), (EF06MA30), (EF09MA20) e (EM13MAT311). Descritas na tabela 3.1.

4.2 DESAFIOS UTILIZANDO ENIGMAS MATEMÁTICOS

4.2.1 Problema de Monty Hall

O Problema de Monty Hall é um enigma, na forma de um desafio de probabilidade, vagamente baseado no programa de televisão americano “Let’s Make a Deal” e nomeado referenciando seu apresentador (host) original, Monty Hall. Originalmente o problema foi colocado em uma carta de (SELVIN et al., 1975) para a revista científica “The American Statistician”.

O Enigma de Monty Hall considera que existem três portas, atrás de uma existe um prêmio e, atrás das outras duas, não existe nada. Na primeira etapa uma pessoa escolhe uma porta (esta ainda não é aberta), após isso uma outra porta (que não foi a escolhida) é aberta sendo revelado que não contém nada. Neste momento, se têm 2 duas portas fechadas (uma porta contem o prêmio e a outra porta contem nada).

Então, após esta etapa temos duas portas fechadas e a pessoa tem a possibilidade de manter a sua escolha inicial ou pode optar em trocar sua porta escolhida. Então, o questionamento a ser feito é: Qual a melhor opção possível, ficar com a porta inicialmente escolhida ou trocar para a porta que sobrou? Na figura 4.12 temos uma ilustração desse problema, na qual a cabra representar perder o prêmio.

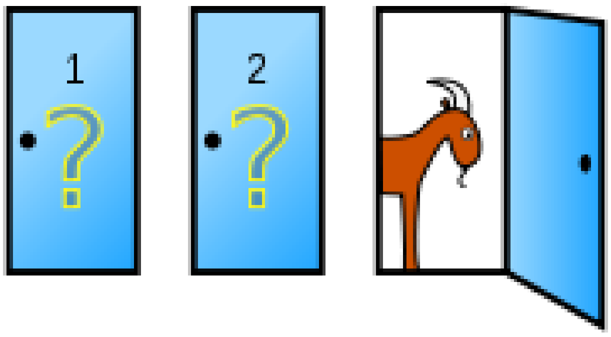


Figura 4.12 – Ilustração das três portas.

Fonte: Ilustração de Cepheus (2006)[6].

Com isso, podemos calcular da seguinte maneira, primeiramente, seguindo a definição 2.10 de (DANTAS, 2008) temos que,

P(A): Probabilidade de ocorrência do evento A;
n(A): Número de casos favoráveis de A;
N: Número de casos possíveis;

Daí, a fórmula da probabilidade P(A) é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}.$$

6 <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Monty_open_door.svg>. Acesso em: 20 mar. 2023.

Em sequência, dividimos esse problema em duas possibilidades:

- **Possibilidade 1:** Não trocar a porta;
- **Possibilidade 2:** Trocar a porta

Dessa forma, na primeira possibilidade temos ao escolher uma das três portas e não trocando após uma delas ser aberta:

$$P(\text{ganhar}) = \frac{1}{3}.$$

Daí, pelo teorema 2.1 sabemos que o complementar de P(ganhar) é dado por,

$$P(\text{não-ganhar}) = 1 - P(\text{ganhar}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Logo, temos $\frac{1}{3} = 33,3\ldots\%$ de chances de ganhar o prêmio e $\frac{2}{3} = 66,6\ldots\%$ chances de não ganhar o prêmio.

Já no segundo caso, ao escolher uma das três portas e trocar após uma delas ser aberta, temos:

$$P(\text{ganhar}) = \frac{2}{3}.$$

Daí, novamente pelo teorema 2.1 temos que o complementar de P(ganhar) é dado por,

$$P(\text{não-ganhar}) = 1 - P(\text{ganhar}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, temos $\frac{2}{3} = 66,6\ldots\%$ de chances de ganhar o prêmio e $\frac{1}{3} = 33,3\ldots\%$ chances de não ganhar o prêmio. Isto é, nesse segundo caso a probabilidade de ganhar o prêmio dobra.

Uma visualização desse problema é por meio de um diagrama, como na figura 4.13 a baixo.

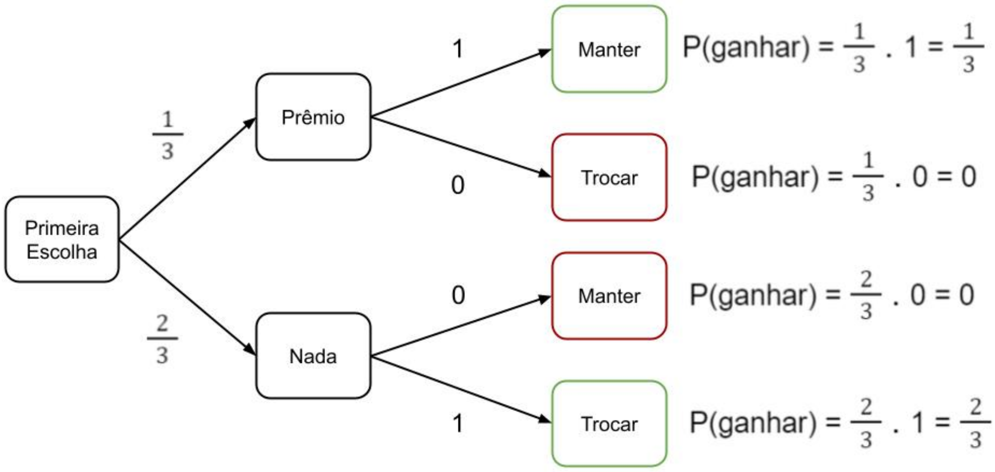


Figura 4.13 – Diagrama do problema de Monty Hall

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além disso, outra maneira de solucionar esse enigma, é por meio do uso de probabilidades condicionais, primeiramente, assumiremos que escolhemos a primeira porta, sendo análogo para as outras primeiras escolhas de porta. a partir disso, consideremos os seguintes eventos, dois a dois disjuntos.

– A_1: o prêmio está na porta 1;

– A_2: o prêmio está na porta 2;

– A_3: o prêmio está na porta 3.

Em seguida, abre-se uma das outras portas que não tenha o prêmio, considerando sem perda de generalidade, que a terceira porta foi aberta, denotemos esse evento de abrir a porta 3 como B.

Note que, no começo, o prêmio poderia estar atrás de qualquer porta, logo,
$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{3}$
Então, após abrir a porta 3, temos os seguintes casos,

– $P(B \mid A_1) = \frac{1}{2}$: como prêmio está na porta 1, pode-se abrir as portas 2 e 3;

– $P(B \mid A_2) = 1$: como prêmio está na porta 2, pode-se abrir apenas a porta 3;

– $P(B \mid A_3) = 0$: como prêmio está na porta 3, não é possível abri-la, pois revela o prêmio.

Como escolhemos a primeira porta e abrimos a terceira porta, a probabilidade de ganharmos o prêmio com a troca é dada pela probabilidade condicional, $P(A_2 \mid B)$.

Daí, utilizando o lema 2.6 temos,

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{6} + \frac{2}{6}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de ganharmos o prêmio é $P(A_2 \mid B) = \frac{2}{3}$.

Perceba que, esse enigma matemático sobre o problema de Monty Hall possibilita as seguintes habilidades descritas na BNCC: (EF06MA30), (EF09MA20), (EM13MAT310) e (EM13MAT312). Descritas na tabela 3.1.

4.2.2 Problema do aniversário

Esse problema tambem é conhecido como o paradoxo do aniversário. Essa denominação ocorre devido ao estudo de (QUINE, 1966) no qual são classificados os tipos de paradoxos, sendo que o Problema do aniversário é classificado como um "paradoxo verídico", uma vez que, ele produz um resultado que parece absurdo embora seja demonstravelmente verdadeiro.

O problema do aniversário consiste no cálculo da probabilidade de que em uma sala com $n \geq 1$ indivíduos, têm-se que pelo menos dois deles possuam o aniversário no mesmo dia do ano, na qual se desconsideram variações na distribuição, como por exemplo, os anos bissextos, variações sazonais ou semanais e caso com gêmeos. Ademais, é assumido que 365 possíveis aniversários são igualmente prováveis.

Note que, a primeira pessoa dentre as 365 datas do ano, pode ter qualquer dia para ser sua data de aniversário, logo $\frac{365}{365}$. Mas, para a segunda pessoa, o ano tem 365 dias, só que ela pode escolher 364 dias, visto que uma data já é aniversario da primeira pessoa, logo $\frac{364}{365}$, e assim por diante, evidentemente temos um caso de probabilidades dependentes.

Tendo isso em vista, seguindo a notação de (DANTAS, 2008), primeiramente, denotemos esse evento por A. O número de conjuntos de n dias em que nasceram as n pessoas é igual ao número de amostras ordenadas com reposição de tamanho n de um conjunto com 365 elementos, que é igual a 365^n. Datas distintas de nascimento das n pessoas correspondem às amostras ordenadas sem reposição de tamanho n de um conjunto com 365 elementos, cujo número é $(365)_n$, utilizando os lemas 2.4 e 2.5 temos,

$$
\begin{aligned}
P(A) = \frac{(365)_n}{365^n} &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \\
&= \frac{365}{365} \cdot \left(\frac{365-1}{365}\right) \cdot \left(\frac{365-2}{365}\right) \ldots \left(\frac{365-(n-1)}{365}\right) \\
&= \frac{365 \cdot 364 \ldots (365-n+1)}{365^n} \\
&= \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}
\end{aligned}
$$

Daí, o evento de pelo menos duas pessoas entre as n terem o mesmo dia de aniversário é o complementar da probabilidade de todos n serem distintas, segue pelo teorema 2.1 que sua probabilidade $P(A^c)$ é dada por,

$P(A^c) = 1 - P(A)$

Podemos então, calcular para o caso mais clássico desse enigma matemático, no qual existe 23 indivíduos temos,

$$P(A) = \frac{(365)_{23}}{365^{23}} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) ... \left(1 - \frac{23-1}{365}\right)$$

$$= \frac{365}{365} \cdot \left(\frac{365-1}{365}\right) \cdot \left(\frac{365-2}{365}\right) ... \left(\frac{365-22}{365}\right)$$

$$= \frac{365 \cdot 364 ... 343}{365^{23}}$$

$$= \frac{365!}{365^{23}\,(343)!} \approx 0,4927$$

Logo, a probabilidade para 2 indivíduos dentre 23 fazerem aniversario no mesmo dia é dado por,

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0,4927 \\ &= 0,5073 \end{aligned}$$

Logo, $P(A^c) \approx 50,73\%$

Note que, a partir desse caso com 23 indivíduos se evidencia a denominação de Paradoxo do aniversário, pois a primeira vista parece um absurdo imaginar que apenas 23 pessoas distribuídas nos 365 dias do ano considerado, possui uma chance maior que 50% de que 2 deles façam aniversario no mesmo dia do ano. Porem, como visto pelo cálculo acima, é possível verificá-lo como verdadeiro, e portanto, de acordo com (QUINE, 1966) um paradoxo verídico.

Com isso, na tabela 4.2 a seguir mostraremos as probabilidades para alguns valores de n.

Tabela 4.2 – Tabela do Problema do aniversário.
Fonte: Elaborado pelo autor.

n	**P(n)**
1	0%
2	0,27%
3	0,87%
5	2,71%
7	5,62%
10	11,69%
15	25,29%
20	41,14%
23	50,73%
50	97,04%
≥ 366	100%

Note que, esse enigma matemático sobre o problema do aniversário, possibilita a introdução das seguintes habilidades descritas na BNCC: (EF05MA23), (EF06MA30), (EF08MA22), (EF09MA20) e (EM13MAT312). Descritas na tabela 3.1.

4.2.3 O Triângulo de Sierpinski

O último enigma interessante que podemos abordar é o Triângulo de Sierpinski, também conhecido como Junta de Sierpinski ou peneira de Sierpinski, sendo ele uma figura geométrica obtida por meio de um processo recursivo. No qual, usualmente com a forma geral de um triângulo equilátero, subdividido recursivamente em triângulos equilaterais menores. A origem desse fractal, de acordo com Lopes surge,

> [. . .] Nos trabalhos Sur une courbe dont tout point est un point de ramification e Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue detoute courbe donnée de W. Sierpinski (1882 – 1969), publicados em 1915 e 1916, aparece o famoso triângulo que leva seu nome [. . .] (LOPES et al., 2013)

Esse fractal aparece em diversas áreas da Matemática, dentre elas temos, por exemplo, uma relação bem interessante indicada por (STEWART, 2006), na qual se tomarmos o triângulo de Pascal com 2^n linhas e colorir os números pares de branco e os números ímpares de preto, o resultado é uma aproximação do triângulo de Sierpinski. A seguir, na figura 4.14, temos a representação dessa relação.

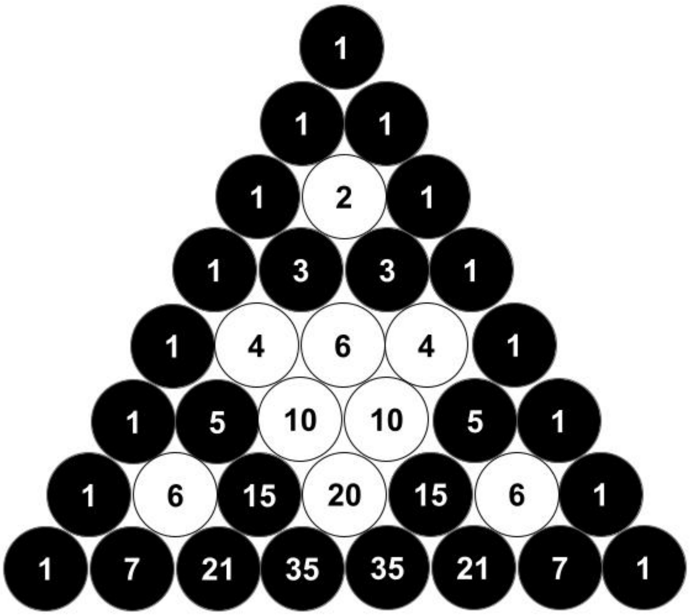


Figura 4.14 – Relação entre os triângulos de Pascal e Sierpinski.

Fonte: De autoria própria

O Triângulo de Sierpinski e a probabilidade geométrica

Agora, com relação ao estudo de probabilidades de acordo com texto de Lopes (LOPES et al., 2013), temos a possibilidade de utilização desse triângulo para o ensino de probabilidade, no caso é apresentado uma proposta didático-pedagogia para ensinar o conceito de probabilidades geométricas por meio do uso de fractais. A ideia é utilizar problemas envolvendo fractais, cujas resoluções levem os alunos a construir ou reconstruir o conceito de Probabilidade Geométrica. A proposta referencia a abordagem de Van de Walle (2009), que defende que os alunos devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Ademais, destaca três características básicas que um problema voltado para a aprendizagem matemática deve ter: começar onde os alunos estão, estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender e requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos.

Sendo assim, considerando o primeiro problema apresentado no texto,

> Problema 1. Considere um triângulo equilátero. Determine os pontos médios de cada um de seus lados. Construa um novo triângulo equilátero unindo esses pontos. Esse novo triângulo central, interno ao triângulo original é chamado de buraco. Escolhendo-se ao acaso um ponto no triângulo equilátero original qual a chance desse ponto “cair” no buraco? Justificar sua resposta. (LOPES et al., 2013)

Então, no caso como problema aborda a construção de um novo triângulo a partir do triângulo original e encontrar a probabilidade de um certo ponto escolhido aleatoriamente cair dentro desse novo triângulo central, chamado de buraco. A resposta envolve calcular a razão da área do buraco pela área do triângulo original, que é igual a $\frac{1}{4}$. Evidentemente, o espaço amostral é o triângulo original e o evento que estamos interessados em calcular é dado pela probabilidade do ponto escolhido "cair"no buraco central. Segundo Wagner (1997; apud (LOPES et al., 2013)), se tivermos uma região B do plano, contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionando ao acaso um ponto de A, a probabilidade p de que ele pertença a B será:

$$P = \frac{\text{Área de B}}{\text{Área de A}}$$

A seguir, na figura 4.15, temos a representação da região B contida na região A.

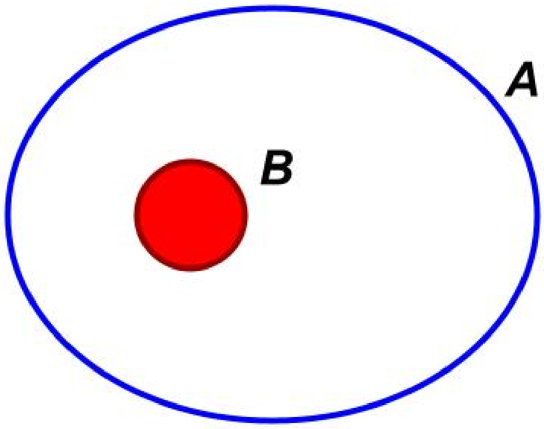


Figura 4.15 – Figura da região B contida na região A

Fonte: Elaborado pelo autor.

Segundo Edgar (2000; apud (LOPES et al., 2013)), a construção do Triângulo de Sierpinski pode ser feita da seguinte forma: começamos com um triângulo equilátero de lado medindo 1 unidade; o triângulo e sua região interior será chamado de S_0. Esse triângulo será subdividido em 4 triângulos equiláteros menores de lados medindo $\frac{1}{2}$ unidade, por meio dos pontos médios dos lados. A região a ser removida é o interior do triângulo central (seus lados e vértices permanecem). Após esta remoção, o conjunto remanescente é chamado de S_1 , o qual é um subconjunto de S_0. Agora, cada um dos 3 triângulos restantes é dividido em triângulos ainda menores com lado medindo $\frac{1}{4}$ unidade, e os 3 triângulos centrais são removidos. O resultado é S_2 , um subconjunto de S_1 . Continuamos dessa forma, obtendo uma sequência S_k de conjuntos. O Triângulo de Sierpinski é definido como o limite S , desta sequência de conjuntos, quando $k \to \infty$.

Tendo isso em vista, seguindo a atividade indicada por (LOPES et al., 2013), trabalharemos com o desafio de escolher ao acaso um ponto de S_0 e calcular a probabilidade desse ponto pertencer a S_2.

Para isso, podemos utilizar como base o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski, representada na figura 4.16.

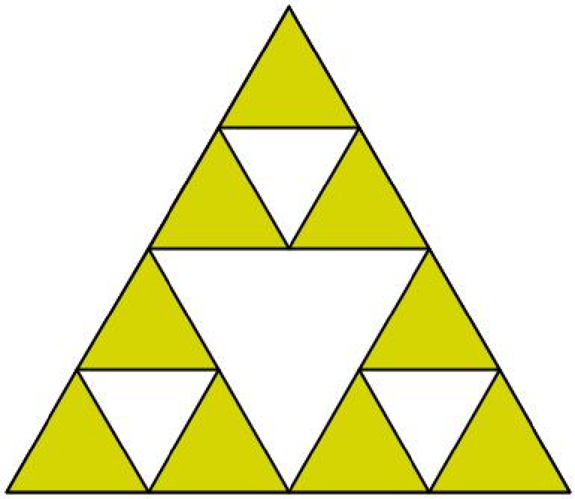


Figura 4.16 – Figura do segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, primeiramente, no segundo passo da construção do triangulo de Sierpinski, cada um dos 3 triângulos equiláteros restantes serão novamente divididos em 4 novos triângulos equiláteros menores de mesma área, dessa forma ficamos com 12 novos triângulos com medida de lado igual a $\frac{1}{4} = 2^{-2}$.

Como os triângulos interiores são removidos, restaram $9 = 3^2$ triângulos menores. Portanto, a probabilidade de escolhermos um ponto ao acaso e ele cair no triângulo de Sierpinski é dado por,

$$P = \frac{\text{Área do Triângulo de Sierpinski}}{\text{Área de } S_0}$$

$$= \frac{3^2 \cdot (2^{-2})^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{9}{16}$$

Logo, a probabilidade de escolhermos um ponto ao acaso e cair no triângulo de Sierpinski é $P = \frac{9}{16} = 56,25\%$

O Jogo do caos

O Jogo do Caos é um algoritmo para criação de um fractal descrito por Barnsley (BARNSLEY, 1988), no qual utilizando um polígono qualquer e um ponto inicial selecionado aleatoriamente dentro dele. A partir disso, esse fractal é gerado criando uma iteração de pontos, começando do ponto inicial aleatório, daí cada ponto da sequência será determinado por uma fração da distância entre o ponto anterior e um dos vértices desse polígono escolhido, normalmente, o vértice é escolhido aleatoriamente em cada iteração.

Com isso, ao repetir esse processo iterativo uma grande quantidade de vezes, selecionando um vértice aleatoriamente em cada iteração e eliminando os primeiros pontos da sequência, muitas vezes produzirá uma forma de um fractal.

Em particular, utilizar um triângulo equilátero como polígono, juntamente com a fração da distância entre o ponto inicial com vértice igual a $\frac{1}{2}$, no caso pode ser representada pelo ponto médio, isso resultará no triângulo de Sierpinski. Segundo Feldman (FELDMAN, 2012), um algoritmo para a representação desse fractal é dado da seguinte forma,

Para exemplificar, considere o triângulo (i) mostrado na figura 4.17. Escolha um ponto em algum lugar no meio do triângulo. No caso da figura 4.17, o ponto 1 foi escolhido. Agora, decidimos aleatoriamente mover-nos em direção ao vértice A, B ou C. Para isso, pode-se lançar um dado comum de seis lados, no qual escolhe-se o vértice A caso obtiver 1 ou 2, em direção ao B para 3 e 4, e em direção ao C caso contrário.

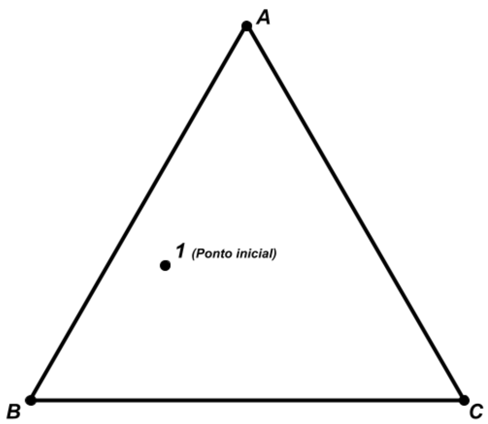


Figura 4.17 – Ponto inicial no Jogo do Caos

Fonte: De autoria própria

Com isso, seguindo os passos da figura 4.18, no passo (i) delimitamos os vértices do triângulo regular pelos pelos pontos A, B e C, em seguida escolhemos aleatoriamente um ponto dentro desse triângulo. No passo (ii) aleatoriamente escolhe-se um dos vértices, no caso da figura, caiu A, em seguida marcamos o ponto médio entre o vértice e o ponto inicial, por fim retira-se o ponto inicial (1). Em seguida no passo (iii) novamente sorteamos um vértice, nesse caso o vértice C, daí marca-se o ponto médio (3) entre o ponto anterior (2) e o vértice C. A partir disso, repetimos o passo (iii), por exemplo em (iv) utilizamos o ponto anterior (3) e o vértice aleatório C.

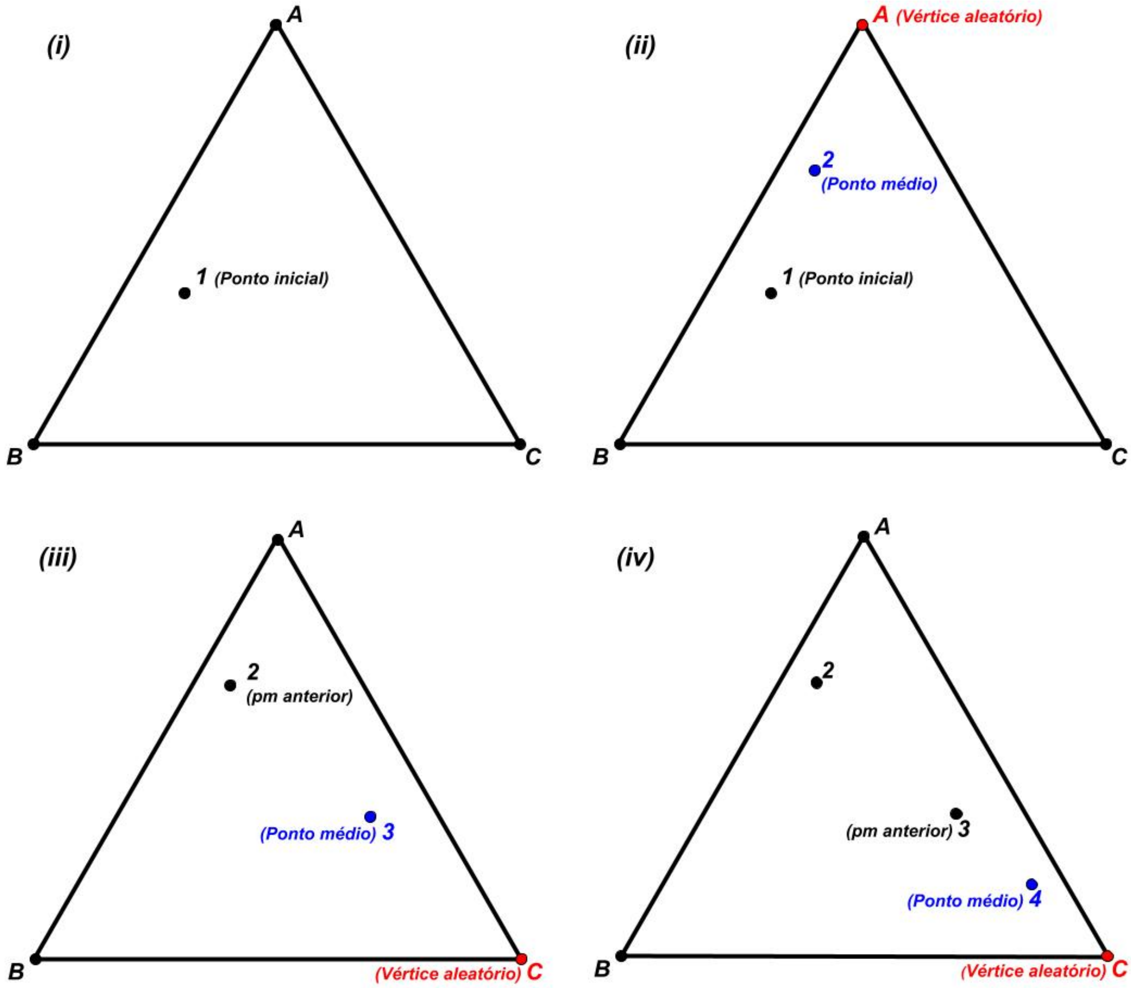


Figura 4.18 – Algoritmo inicial do Jogo do caos.

Fonte: De autoria própria

Tendo isso em vista, é possível elaborar alguns desafios matemáticos, dentre eles podemos citar o texto de Adami (ADAMI, 2013), no qual é trabalhado a construção do jogo do caos utilizando lápis e papel como também pela ferramenta GeoGebra.

Entretanto, neste trabalho indicarei uma outra possibilidade, essa que está cada vez mais presente no cotidiano do estudante, no caso, podemos utilizar a programação com python para apresentar esse método, essa atividade está sugerida para o ensino médio, se possível para alunos com conhecimentos prévios.

Primeiramente, serão utilizadas as bibliotecas numpy e matplotlib, no caso a primeira, nos permitirá armazenar as coordenadas dos pontos em um array, além de facilitar alguns cálculos nesse grande conjunto de dados, já a segunda, será utilizada para a visualização do programa. Ademais, para a programação serão utilizados os compiladores online, tais quais, o Google Colab e o Jupyter, ambos permitem escrever um código interativo em Python ou outras linguagens.

A partir disso, podemos realizar o seguinte código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def ponto_medio(p1,p2):
  mid = (p1+p2)/2
  return mid

V1 = np.array([0,0]) #vertice da esquerda
V2 = np.array([2,0]) #vertice da direita
V3 = np.array([1, np.sqrt(3)]) #vertice superior

N = 2000

pi = np.array([0,0]) #ponto inicial
pm = 0 #ponto medio

for i in range(N): #Escolhe aleatoriamente um dos vertices
  rn = np.random.randint(1,4) #Sorteia os numeros de 1 a 3

  if (rn==1):
  pm = ponto_medio(pi, V1)
  elif (rn==2):
  pm = ponto_medio(pi, V2)
  else:
  pm = ponto_medio(pi, V3)
  pi = pm

  plt.scatter(pi[0], pi[1], s=2, color='blue') #desenha os pontos

plt.show()
```

Código 4.1 – Código Jogo do Caos

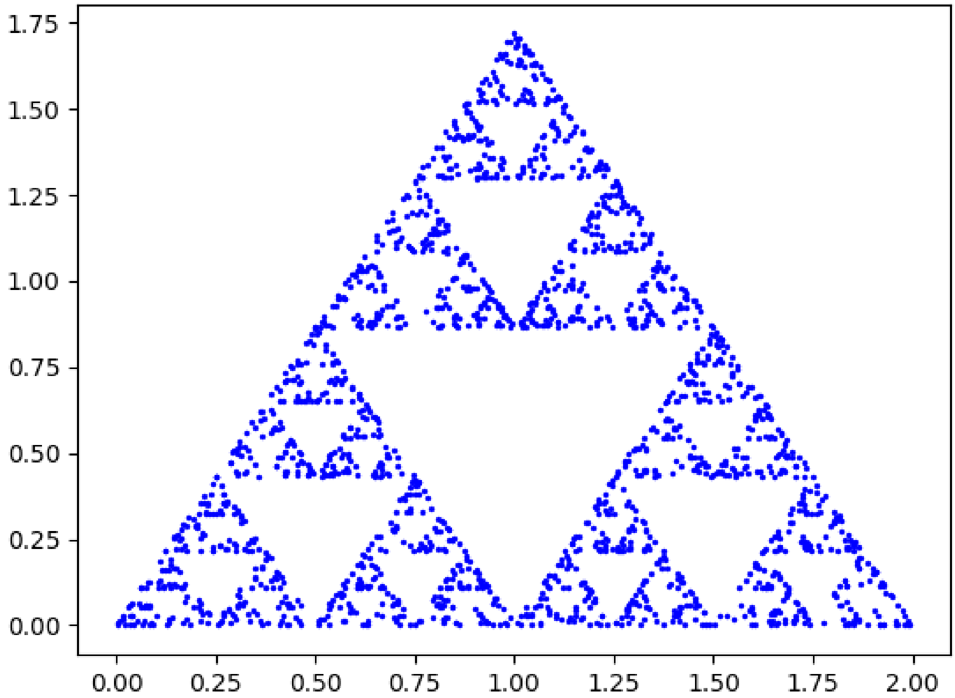


Figura 4.19 – Resultado do programa.

Fonte: De autoria própria

Para complementar, podemos seguir a ideia de Cook (COOK, 2017) e adicionar pesos nos vértices, no caso ao invés de cada vértice possuir a mesma chance de sair, deixaremos por exemplo o vértice superior com uma probabilidade maior.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def ponto_medio(p1, p2):
  mid = (p1 + p2) / 2
  return mid

V1 = np.array([0,0]) #Vertice da esquerda
V2 = np.array([2,0]) #Vertice da direita
V3 = np.array([1, np.sqrt(3)]) #Vertice superior

N = 2000

pi = np.array([0, 0])  # Ponto inicial
pm = 0 #ponto medio
peso = [1, 1, 2]  # Pesos para os vertices [esquerda, direita,
superior]

for i in range(N): # Escolha aleatoria dada o peso normalizado
```

```
    rn = np.random.choice(range(3), p=peso/np.sum(peso))
    #sorteia um numero de 0 a 2 dado o peso

    if (rn==0):
    pm = ponto_medio(pi, V1)
    elif (rn==1):
    pm = ponto_medio(pi, V2)
    else:
    pm = ponto_medio(pi, V3)

    pi = pm
    plt.scatter(pi[0], pi[1], s=2, color='blue')

plt.show()
```

Código 4.2 – Código Jogo do Caos

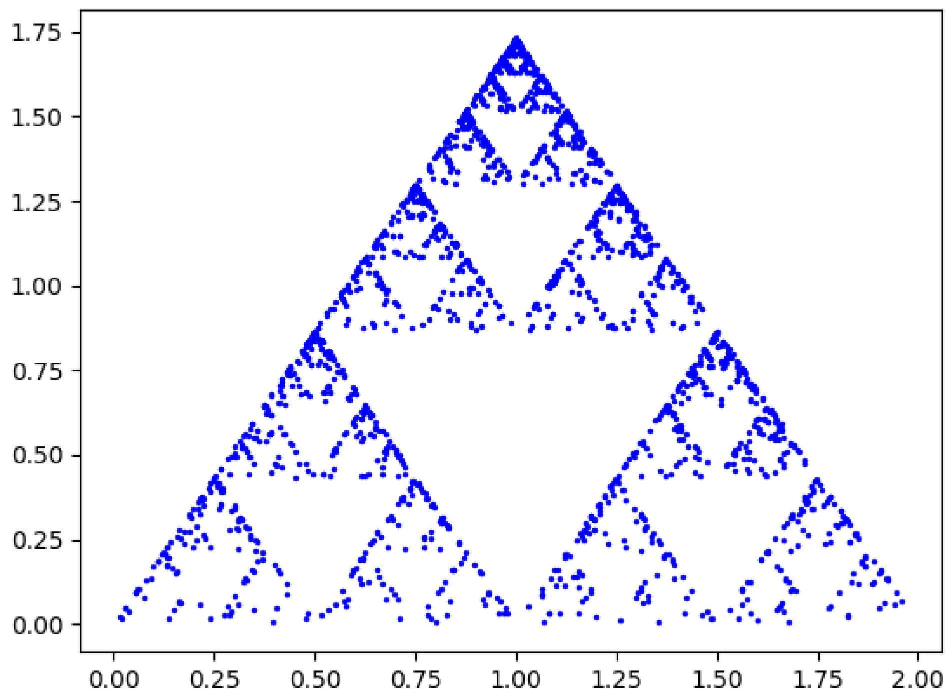


Figura 4.20 – Resultado do programa.

Fonte: De autoria própria

Como descrito anteriormente, para a formulação deste código inicialmente é necessário utilizar um compilador, no caso utilizei a ferramenta gratuita, Google Colab [7].

[7] Disponivel em <https://colab.research.google.com/>

Em seguida é necessário instalar as bibliotecas no python para adicionar funcionalidades extras no código, no caso do Colab a instalação das bibliotecas ocorre automaticamente ao escrever as linhas de códigos “import numpy as np” e “import matplotlib.pyplot as plt”, ademais podemos abreviar as bibliotecas, no caso “np” e “plt” isso facilitará seus usos durante o codigo.

Após isso, cria-se a função “ponto_medio”, que calcula o ponto médio entre dois pontos: p1 e p2. Além disso, definimos os vértices de um triângulo equilátero que será usado para gerar o fractal de Sierpinski: V1, V2 e V3. respectivamente nas coordenadas arbitrárias (0,0), (2,0) e $(1, \sqrt{3})$. Definimos também, o número de iterações do código, no caso o número de pontos no jogo do caos: N = 2000 pontos.

Seguindo é necessário definir a Inicialização dos Pontos, no caso, “pi”: Ponto inicial (inicializado em (0,0)) e “pm”: Variável temporária para armazenar o ponto médio.

Agora temos a diferença entre as versões dos códigos, basicamente ambas utilizam uma ferramenta da função np.random para realizar um loop de iteração N vezes, no primeiro código utilizamos a função np.random.randint, no qual, rn é um número aleatório inteiro entre 1 e 3 representando a escolha aleatória de um dos três vértices. Note que, a função randint(a, b) do NumPy gera números inteiros aleatórios entre “a” e “b”, com “a” incluído e “b” excluído, basicamente um intervalo [a, b).

Já no segundo código colocaremos pesos nas probabilidades dos vértices, para isso, primeiramente define pesos para cada vértice: pesos=[esquerda, direita, superior]

Em seguida utilizamos a função np.random.choice, que possibilita utilizar pesos para as escolhas, para isso o range(3) cria uma sequência de números de 0 a 2, que correspondem aos índices dos vértices do triângulo (0 para V1, 1 para V2 e 2 para V3). A partir disso adicionamos p=peso/np.sum(peso) para normalizar os pesos, por exemplo [1, 1, 2] se torna $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]$ requisito para função choice.

Com isso, ambos códigos seguem da mesma forma.

Na iteração do loop realiza o processo de iteração N vezes, onde dependendo do valor de rn, o código escolhe um dos três vértices e calcula o ponto médio entre pi e o vértice escolhido.

Por fim, Atualiza o ponto atual (pi) para ser o ponto médio calculado (pi = pm) e desenha o ponto no gráfico de dispersão usando plt.scatter. Com isso, basta usar o plt.show() fora da iteração para exibir o gráfico de dispersão contendo os pontos gerados no processo.

Com isso, fica evidente que esse desafio matemático pode ser utilizado como uma ponte entre os conteúdos de geometria e probabilidade, permitindo aos estudantes trabalhar tanto com os estudos de áreas de figuras geométricas, em particular de triângulos, juntamente com a possibilidade de uma visualização diferente das relações vistas na probabilidade, como, por exemplo, o espaço amostral nesse caso representa a área do primeiro triangulo S_0 e o evento analisado são as áreas formadas pelo Triângulo de Sierpinski. Assim como na escolha aleatória no jogo do caos. Tendo isso em vista, seguindo a BNCC temos introduzidas as seguintes habilidades: (EF06MA30) e (EM13MAT311) e (EM13MAT405). Descritas na tabela 3.1.

5 PRÁTICA DOS DESAFIOS MATEMÁTICOS

Nesta sessão será apresentada minha experiência com a realização da prática do TCC2, na qual será divida em planejamento da aula, ferramenta e plataforma utilizada, aplicação em sala de aula e resultados.

5.1 PLANEJAMENTO DA AULA

Primeiramente, para a aplicação dos desafios matemáticos na Educação Básica, foi escolhido o Campo Minado como o foco dessa aplicação em aula, visto que nesse período a professora do 3° ano do Ensino Médio estava realizando a revisão dos conteúdos de probabilidade, no qual ela pretendia focar nos conteúdos mais fundamentais, uma vez que o material didático dos professores passava superficialmente nos conteúdos de probabilidade, nesse caso o campo minado seria um ótimo desafio para melhorar a visualização dos alunos. Além disso, possibilitou verificar alguns referenciais teóricos utilizados, em particular o trabalho do Leocadio (LEOCáDIO, 2021).

Durante o semestre de 2023/2 aproveitei a disciplina obrigatória da licenciatura em matemática, Estágio Supervisionado de Educação Básica 4, para realizar a aplicação do TCC2 como uma regência para os estudantes do 3° ano do Ensino Médio em uma Escola Estadual de Ensino PEI (Programa de Ensino Integral).

Ademais, a aplicação dessa regência ocorreu no dia 7 de novembro de 2023, realizada durante as primeiras aulas do dia, sendo dividida em duas partes, a primeira consiste na exposição teórica, englobando a parte histórica e os conteúdos preliminares necessários para a realização da atividade dada em sequência na segunda parte na qual foi utilizada uma plataforma digital para maior interação dos alunos, no caso foi utilizado o Nearpod.

Tendo isso em vista, inicialmente foi elaborado um plano de aula para a regência que seria realizada da seguinte maneira.

Plano de aula - Campo Minado

Tema: O estudo de probabilidade utilizando o campo minado.

Nível de ensino: Ensino Médio - 3° ano

Componente curricular: Matemática

Habilidades (BNCC): (EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Conteúdos: Espaço amostral e eventos; eventos dependentes e independentes e eventos complementares.

Tempo de Duração: 2 aulas (45 minutos cada).

Materiais: Lousa, celular ou computador com internet, projetor, caderno.

Objetivos Gerais: Reconhecer o espaço amostral e os eventos associados, identificando os casos dos eventos dependentes e independentes. Associar as probabilidades com eventos complementares.

Objetivos Específicos: Retomar os conceitos de espaço amostral e eventos, em particular motivar o estudo de probabilidades; relacionar os conteúdos de probabilidade com a atividade realizada; desenvolver o pensamento probabilístico; desenvolver o raciocínio lógico.

Metodologia: A introdução é feita em sala de aula, é primeiramente pergunta-se aos estudantes se algum deles conhece o jogo campo minado, regras ou estratégias utilizadas nele. Em seguida, apresenta-se a história sobre o campo minado, possíveis origens, e o aprofundando sobre o mais conhecido.

Nesse primeiro momento, o objetivo é colher dos alunos suas percepções sobre a probabilidade nesse caso indicado.

Com isso, será realizado uma retoma dos conteúdos:

Conceitos de espaço amostral e evento

As probabilidades são calculadas dividindo-se o número de resultados favoráveis pelo número de resultados possíveis, isto é.

Considere um evento A de um espaço amostral S finito e equiprovável.

A razão entre a quantidade de elementos do evento A (indicada por n(A)) e a quantidade de elementos do espaço amostral S (indicada por n(S)) é a Probabilidade P(A) de o evento A ocorrer

$$\text{P(A)} = \frac{\text{Número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } S} = \frac{\text{n(A)}}{\text{n(S)}}$$

Definição: probabilidade a área da Matemática que estuda a chance de um determinado evento acontecer. O valor da probabilidade é sempre um número entre 0 e 1 ou uma porcentagem entre 0%e100%.

Exemplos clássicos: Moeda e o Dado.

Bibliografia:

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

LEOCÁDIO, L. A. L. Uma proposta de ensino de probabilidade por meio do jogo campo minado em dispositivos móveis. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: [s.n.], 2021. 66 p.

MORGADO, Augusto César e CARVALHO, Paulo Cezar Pinto: Matemática Discreta. SBM, Rio de janeiro, 2015

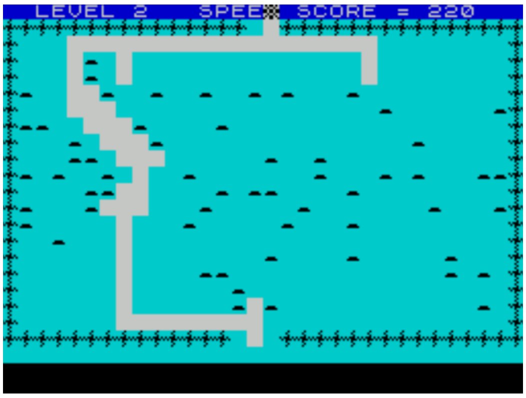
A partir do plano de aula feito, elaborei uma ficha de atividade que seria aplicada para os estudantes, a priori planejada para ser feita no papel de forma tradicional. Nesta ficha de atividade contém a parte histórica e as regras clássicas do campo minado, que pode ser apresentada ou entregue para os estudantes.

Alem disso, nas atividade apresentadas ao final da lista são possíveis de modificações, por exemplo a maioria dos exercícios podem ser aplicados para resoluções escritas ao invés de questões objetivas.

Ficha de atividade.

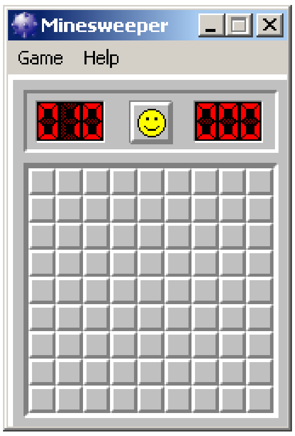
História do campo minado:

A origem do “campo minado” é desconhecida. Segundo Griliopoulos (2014) no Eurogamer diz que o jogo Mined-Out criado por Ian Andrew em 1983 para o antigo computador doméstico "Sinclair ZX81"foi o primeiro jogo do tipo campo minado. Ademais, Griliopoulos comenta que Curt Johnson, o criador do Microsoft Minesweeper, reconhece que o design do seu jogo foi emprestado de outro, mas não era o “Mined-Out” e ele não se lembra qual era esse jogo. A figura a seguir mostra esse jogo.



Fonte: WIZWORDS[1] (Adaptado).

Entretanto, segundo Cobett (2009) no TechRadar. A primeira versão do jogo foi o de fato o Microsoft “Minesweeper” de 1990, lançado como parte do Windows Entertainment Pack, antes de ser promovido a um recurso padrão no Windows 3.1 em diante. Na figura a seguir, temos uma imagem do jogo "Minesweeper".



Fonte: The Cutting Room Floor[2]

Regra e estratégias:

Normalmente no Campo Minado, as minas escondidas estão espalhadas por um tabuleiro dividido em células. As células têm vários estados possíveis:

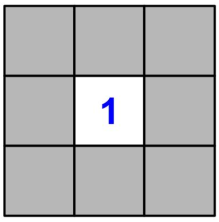
- Ladrilhos não abertos (cobrem o tabuleiro no início do jogo)
- Ladrilhos numerados (podem mostrar os números de 1 a 8)
- Ladrilhos em branco (não há minas adjacentes ao ladrilho)
- Blocos sinalizados [bandeira] (clicando com o botão direito em um ladrilho não aberto)

Uma célula não aberta fica em branco e clicável, enquanto uma célula aberta fica exposta. Células sinalizadas são células fechadas marcadas pelo jogador para indicar uma possível localização de mina.

Um jogador seleciona uma célula para abri-la. Se um jogador abrir uma célula contendo uma mina, o jogo termina em derrota. Caso contrário, a célula aberta exibe um número, indicando o número de minas adjacentes a ela, ou um ladrilho em branco, e todas as células adjacentes serão abertas automaticamente. Isto pode causar uma reação em cadeia; quaisquer peças em branco abertas por outras peças em branco também abrem as peças ao redor. Os jogadores também podem sinalizar uma célula, visualizada por uma bandeira colocada na peça, para indicar que acreditam que existe uma mina naquele local.

Exemplos:

1. Considere o seguinte caso, uma célula com o número "1" nela, indica que há uma bomba nas células adjacentes.



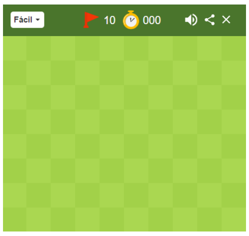
Note que, há um total de 8 células adjacentes, calculando a probabilidade: $\frac{1}{8}$, ou $12,5\%$.

2. Considere o seguinte caso, uma célula com o número “2” nela, indica que há duas bombas nas células adjacentes.

		2

Nesse caso, a célula numerada tem três células adjacentes, logo, $\frac{2}{3}$, ou $66,66\ldots\%$.

3. Considere um campo minado fechado, de 10x8 com 10 minas no total.



Fonte: Campo minado do Google

Tendo em vista, podemos calcular a chance de encontrar uma bomba ao clicar em célula. $\frac{10}{80}$, ou $12,5\%$.

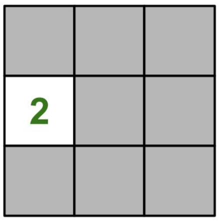
4. Considere o seguinte jogo,

	1	A	B
	1	1	1

Nesse caso, temos duas possibilidades para clicar, uma célula “A” e outra “B”. Perceba que, a célula da 2° linha com a 2° coluna, possui apenas uma possibilidade de ter uma bomba, no caso em “A”, uma vez que as células adjacentes ou são números ou estão em branco. Logo, sabemos com certeza que o evento “A” é um evento certo (100%), no caso possui uma bomba. Em contrapartida, o evento “B” é um impossível (0%), sendo assim seguro para abrir.

Atividades:

1) Na situação a seguir, qual das alternativas indicadas representa a chance de NÃO aparecer uma mina ao clicar em uma das células adjacentes ao número 2.



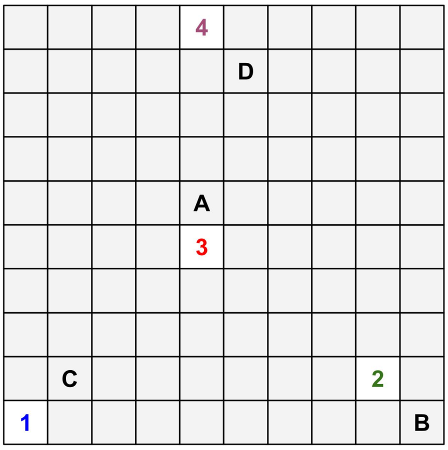
(a) 1/5

(b) 2/5

(c) 2/6

(d) 3/5

2) Análise o caso a seguir e escolha a célula (A, B, C ou D) com a menor probabilidade de possuir uma bomba ao clicar sobre.



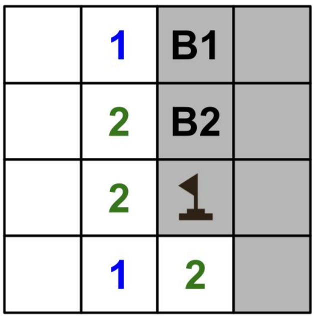
(a) 3/8

(b) 2/8

(c) 1/3

(d) 4/5

3) Analise o jogo a seguir e indique as probabilidades de encontrar uma bomba ao clicar nas células B1 e B2.



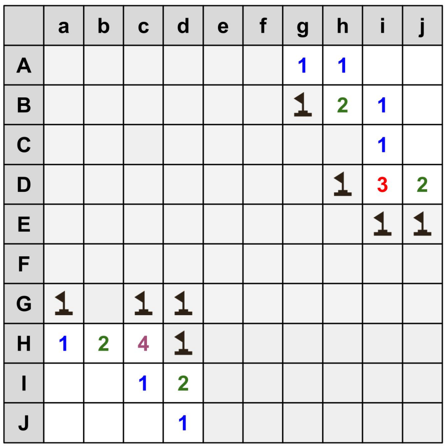
(a) 100% em ambas.

(b) 0% em ambas.

(c) 100% em B1 e 0% em B2.

(d) 0% em B1 e 100% em B2.

4) Na figura a seguir, está representado um campo minado em jogo, no qual as linhas são descritas por letras maiúsculas (A, B, . . . , J) e as colunas representadas por letras minúsculas (a, b, . . . , j). Assinale a alternativa verdadeira.



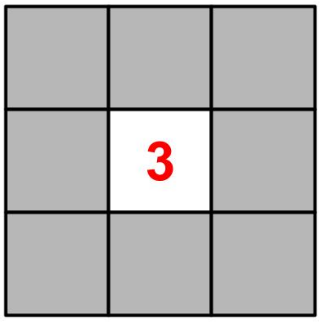
(a) A bandeira (G, a) está marcando uma bomba.

(b) A bandeira (B, g) não está marcando uma bomba.

(c) A bandeira (H, d) está marcando uma bomba.

(d) A bandeira (E, j) não está marcando uma bomba.

5) Na situação a seguir, qual das alternativas indicadas representa a chance de aparecer uma bomba ao clicar em uma das células adjacentes ao número 3.



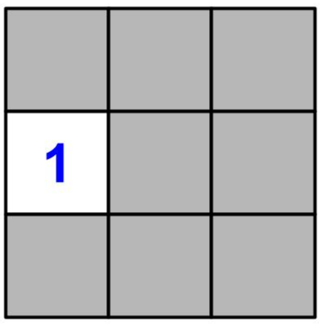
(a) 3/8

(b) 5/8

(c) 5/9

(d) 3/9

6) Na situação a seguir qual das alternativas indicadas representa a chance de NÃO aparecer uma mina ao clicar em uma das células adjacentes ao número 1.



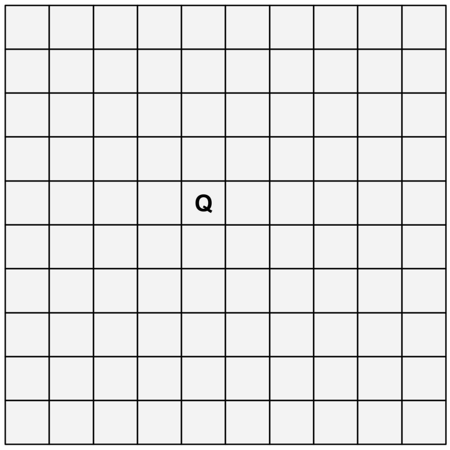
(a) 25%

(b) 12,5%

(c) 1/5

(d) 4/5

7) Na situação a seguir temos um campo minado 10x10 contendo 20 minas no total. Tendo isso em vista qual a probabilidade de sair uma bomba na célula indicada pela letra Q.



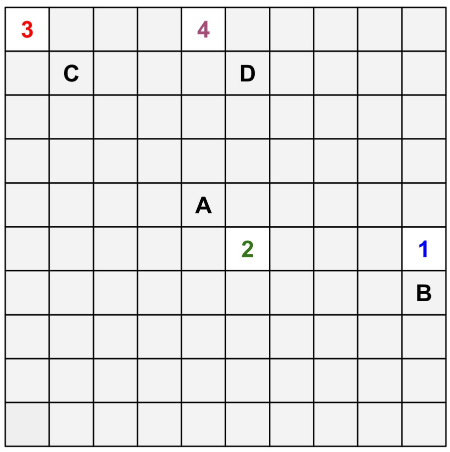
(a) 1/9

(b) 1%

(c) 20/100

(d) 1/100

8) Analise o caso a seguir e escolha a célula com a MENOR probabilidade de possuir uma bomba ao clicar sobre.



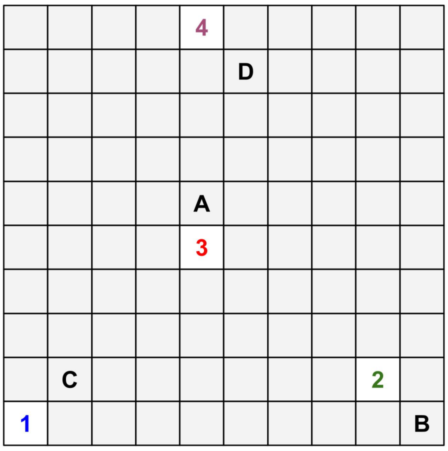
(a) Posição A

(b) Posição B

(c) Posição C

(d) Posição D

9) Analise o caso a seguir e escolha a célula com a MAIOR probabilidade de possuir uma bomba ao clicar sobre.



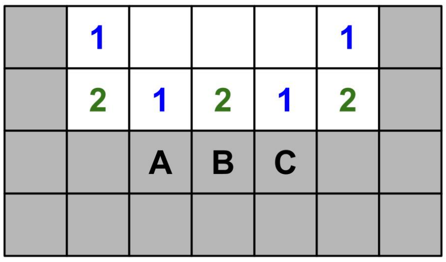
(a) Posição A

(b) Posição B

(c) Posição C

(d) Posição D

10) Analise o jogo a seguir e indique as probabilidades de encontrar uma bomba ao clicar nas células A, B e C.



(a) Todas possuem 100% de chance.

(b) Todas possuem 0% de chance

(c) A e C possuem 100% e B possui 0%.

(d) A e B possuem 100% e C possui 0%.

5.2 A PLATAFORMA NEARPOD

Para a aplicação da ficha de atividade preferi realizá-la por um meio diferente do tradicional papel e lápis, nesse caso utilizei uma plataforma digital criada em 2012, o Nearpod [3]. Mas antes de comentar sobre a plataforma em si, é necessário descrever o contexto em que ela pode ser incluída.

Primeiramente, comumente são utilizadas o termo TIC, Tecnologias da Informação e Comunicação para se referir a um conjunto de tecnologias usadas para manipular e comunicar informações. Essas que desempenham um papel crucial na sociedade moderna, afetando várias áreas, como comunicação, educação, negócios, entretenimento. Segundo Costa (COSTA, 2016) a origem da expressão foi com Stevenson em 1997:

> O termo TIC foi usado pela primeira vez por Dennis Stevenson, em sua obra Information and Communications Technology in UK Schools – an independent inquiry (1997), para antecipar uma política do governo britânico que deveria intensificar o uso das TIC nas escolas públicas do Reino Unido, sob o risco de colocar, em um futuro muito próximo, uma geração de crianças em enorme desvantagem em relação às demandas do mundo globalizado. (COSTA, 2016)

Além disso, a BNCC referência uma versão mais moderna desse termo no caso a TDIC, Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, nesse contexto, a Base Nacional Comum Curricular enfoca o aprimoramento de competências e habilidades relacionadas ao uso crítico e responsável dessas tecnologias digitais, com destaque para a competência geral 5:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018)

A escolha do nearpod se deu principalmente pela recomendação de meus colegas de estágio, os quais por várias vezes aplicaram suas regências e atividades com essa plataforma. Tendo isso, em vista o que é essa plataforma e quais são suas ferramentas oferecidas.

O nearpod é um aplicativo que auxilia os educadores a elaborarem lições interativas, seja na sala de aula presencial ou virtualmente. Essa ferramenta é gratuita, sendo que os estudantes podem acessá-la pelo site ou aplicativo no celular, onde podem acompanhar o conteúdo apresentado pelo docente. Em particular, alguns dos recursos disponibilizados no nearpod são os questionários, enquetes, perguntas abertas e quadros colaborativos.

Dentro da plataforma os estudantes podem acessar a aula através de um código gerado pelo professor anteriormente ou na hora da atividade. No qual devem colocá-lo na aba “Students”, os estudantes podem participar com nome ou de forma anônima.

No meu caso, eu utilizei as ferramentas mais comuns no caso a apresentação de slides, os testes quiz e por fim a atividade mais interessante, no caso o “Time to climb” trata-se um

[3] Acesso para a plataforma pelo navegador, disponível em <https://nearpod.com/>

jogo dentro da plataforma na qual os estudantes participam devem responder às questões estabelecidas pelo professor previamente para competirem quem sobe primeiro na montanha que representa os pontos.

Ademais, segundo Rabelo e Souza (2019; apud (RABELO, 2022)), a plataforma Nearpod despontou como ferramenta de apoio na aprendizagem do professor-aluno, com uso da tecnologia móvel e computadores no contexto educacional para efetivação da multiplataforma na sala de aula. Isso traz na vida do educador alguns métodos e recursos digitais para ensinar de forma inovadora e dinâmica, pois a realidade educacional exige organização no espaço-tempo de trabalho para desenvolver atividades escolares de maneira transformadora na aprendizagem dos educandos em formação.

5.3 A EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

Como descrito, um dos objetivos deste trabalho tratou-se da prática em sala de aula utilizando os desafios matemáticos, em particular, o desafio escolhido para aplicar em sala de aula foi o campo minado. A ideia para a aplicação utilizando o campo minado foi possível pelos conteúdos de probabilidade que estavam sendo revisados para as turmas do 3° ano do Ensino Médio, no caso, a professora preferiu dar enfoque para a parte mais básica e fundamental, uma vez que os conteúdos de probabilidade estavam descritos de forma mais superficial e resumido no material didático dos professores.

A partir disso, apenas foi preciso realizar a adequação desses conteúdos para relacionarem com o campo minado, nesse sentido esse desafio matemático se mostrou adequado para a visualização das probabilidades.

Primeiramente, na semana anterior da aplicação, solicitei para a professora da turma que seria realizada a regência para agendar a sala de informática ou pelo menos notebooks, porém devido ao grande número de provas realizadas nesse período do ano a maioria delas realizadas digitalmente, apenas foi possível agendar os notebooks para os estudantes.

Seguindo para o dia da aplicação, pouco antes do início da aula, a diretora da escola me perguntou se seria possível realizar uma aula especial para o ENEM, com as duas turmas do 3° ano, respondi que seria possível, mas teríamos que verificar se a quantidade de notebook seria o suficiente. No caso, a distribuição dos notebooks ocorreu bem, mas percebo que uma parte dos estudantes de ambas turmas faltaram, provavelmente devido à primeira parte da prova do ENEM que foi realizada na semana anterior.

Ademais, ocorreu outra adversidade para iniciar minha aula, no caso, tivemos um problema com a internet na sala onde originalmente seria dada essa regência, sendo necessário mudar para a sala da outra turma do 3°ano. Com isso, percebo que o tempo estabelecido inicialmente no planejamento da aula foi muito abaixo do esperado, provavelmente necessitando de uma aula a mais para uma realização mais efetiva e tranquila da atividade proposta.

Figura 5.1 – Organização da sala de aula

Fonte: Elaborado pelo autor.

Agora, com relação a aula propriamente dita, a aula foi estruturada em dois momentos principais, o primeiro trata-se das parte expositiva da aula, apresentando a parte histórica e seus conteúdos utilizados, assim como alguns exemplos. Já no segundo momento, trata-se da aplicação da ficha de atividade, no caso foi optado por realizá-lo de uma maneira mais interativa e diferenciada utilizando a plataforma Nearpod.

Tendo isso em vista, inicialmente, perguntei para os alunos se algum deles conhecia o Campo minado, a maioria concordaram que conheciam, entretanto vários deles comentaram que não sabiam como funcionava o jogo.

Em seguida, durante a parte teórica e expositiva da aula, expliquei sobre a origem do campo minado e suas regras, juntamente com a apresentação dos conteúdos preliminares e alguns exemplos relacionando esses conteúdos com algum caso no jogo, conforme o planejamento e combinado com a professora foquei nos conteúdos mais essenciais, tais como, o estudo do espaço amostral e evento, assim como a forma de se realizar o cálculo das probabilidades. Nesse momento, percebi que alguns dos estudantes começaram a perder o foco da teoria apresentada.

Figura 5.2 – Foto da apresentação da parte histórica

Fonte: Elaborado pelo autor.

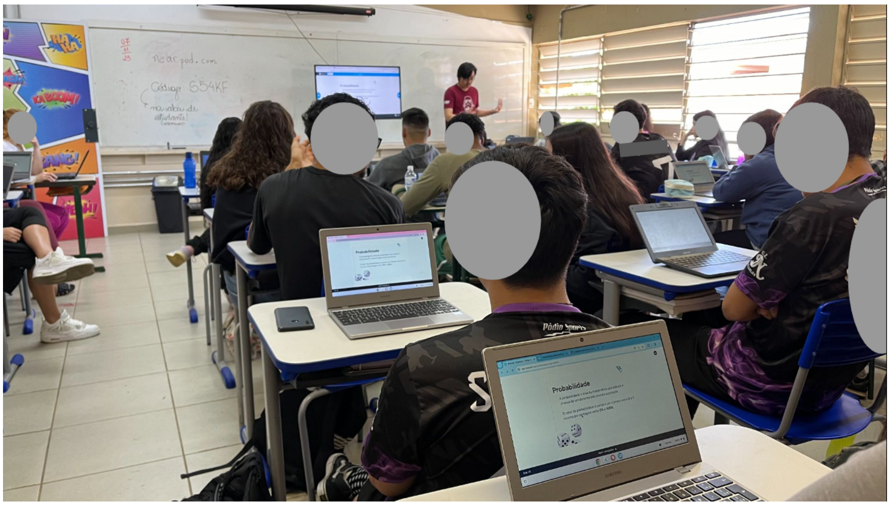


Figura 5.3 – Foto da apresentação do conteúdo

Fonte: Elaborado pelo autor.

Mesmo assim, continuei a aula apresentando os exemplos de casos no campo minado e intercalando a apresentação dos slides com as escritas na lousa para explicar esse exemplos, indicando sugestões para os cálculos das probabilidades.

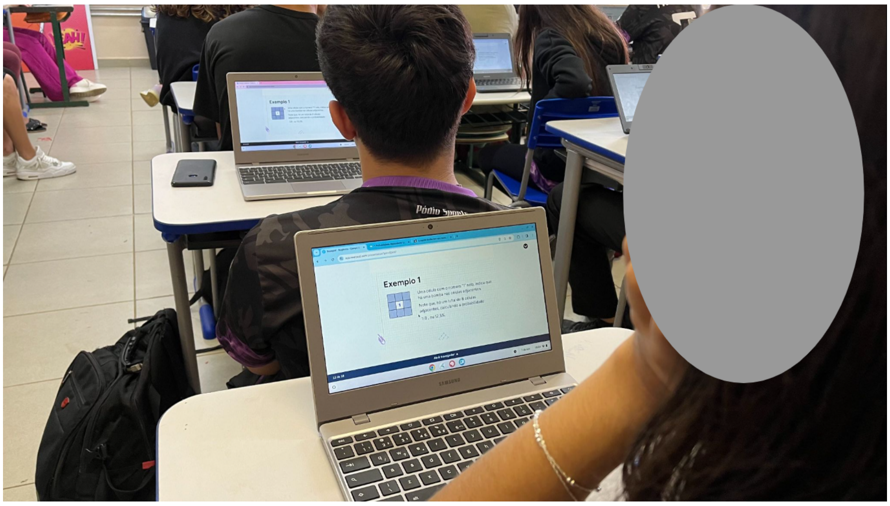


Figura 5.4 – Foto do exemplo de probabilidade no campo minado

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir disso, seguindo para a segunda parte, no caso seria a aplicação da atividade propriamente dita, no caso decide por fazer de forma digital utilizando a plataforma Nearpod, pois possibilitaria que cada estudante visualizasse o progresso do restante da classe. Essa atividade foi dividida em duas partes a primeira utilizaria a ferramenta de quiz do Nearpod, no qual estabeleci na ferramenta para cada questão durar em média 2 minutos, ao final do tempo seria revelada a alternativa correta e em sequência eu justificava a resposta na lousa, apresentando um cálculo possível.

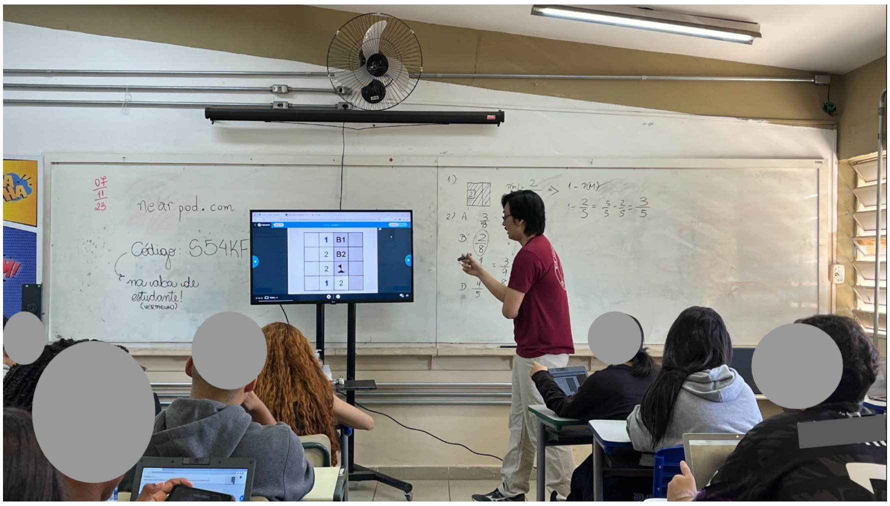


Figura 5.5 – Foto da explicação das estratégias no campo minado

Fonte: Elaborado pelo autor.

Diferentemente da primeira parte, percebi que nesse final da aula, praticamente todos os estudantes estavam participando e se divertindo, essa segunda parte da atividade que utilizou outra ferramenta do nearpod, no caso o “time to climb”, basicamente um quiz mais gamificado, no qual os estudantes recebem mais ou menos pontos dependendo se a resposta está correta e seu tempo necessário para respondê-la, note que no jogo a pontuação é representada na tela pelos avatares dos estudantes subindo em uma montanha, quanto mais alto maior a pontuação. Tecnicamente, essa atividade pode ser adaptada com uma avaliação, visto que nesse caso os estudantes estariam fazendo atividades sozinhos.

Figura 5.6 – Foto da atividade Time to Climb

Fonte: Elaborado pelo autor.

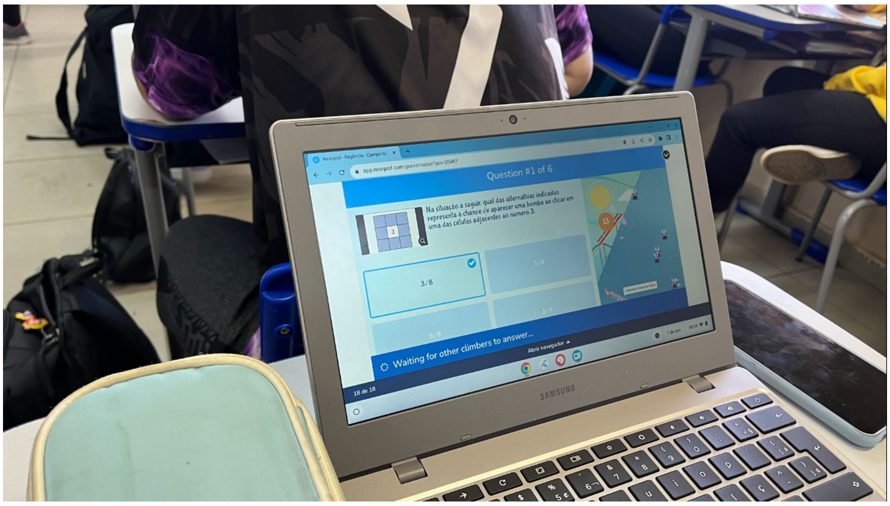


Figura 5.7 – Foto da realização da atividade

Fonte: Elaborado pelo autor.

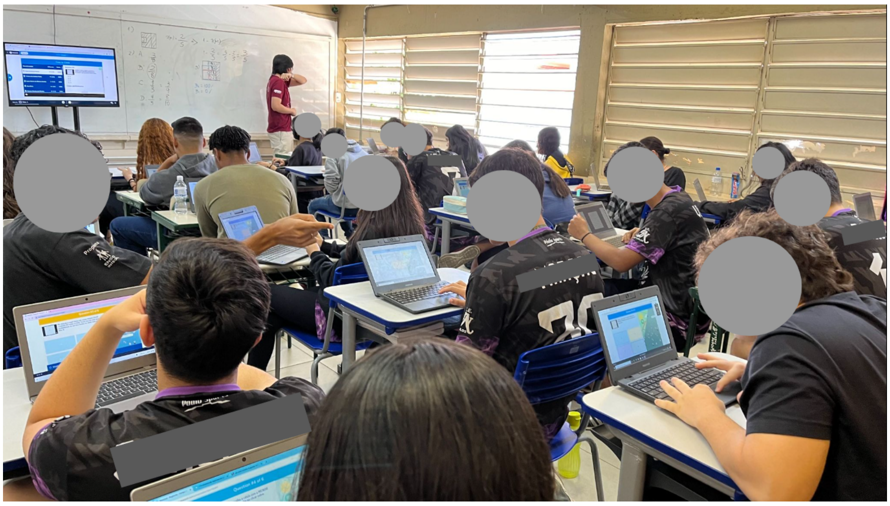


Figura 5.8 – Foto dos estudantes participando da atividade

Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma geral, a aplicação desse desafio matemático em sala de aula foi muito interessante, visto que embora tivesse o planejamento já bem estabelecido e os preparativos para aula verificadas ainda tive algumas dificuldades para a aplicação tranquila da regência.

Com isso, percebo a validade do uso dessas novas tecnologias de forma mais interessante para os estudantes, que segundo Oliveira (OLIVEIRA, 2020), o uso de aplicativos como jogos de smartphones tem um histórico eficiente nos últimos anos devido ao fato de crianças e adolescentes estarem sempre conectados e usando a rede como forma de se comunicar e buscar conhecimento.

5.4 RESULTADOS DA PRÁTICA

Analise do rendimento dos estudantes

Primeiramente, como a atividade foi realizada na plataforma digital, é possível acessar o relatório com os dados da atividade realizada, no caso do total de 32 alunos na atividade teve cerca de 94% de participação dos estudantes. A partir disso, analisamos as questões com maior e menor taxa de acertos na atividade "Time to Climb" no qual os alunos estavam competindo entre si.

A questão com a maior taxa de acerto foi a primeira questão aplicada no jogo do nearpod, trata-se da atividade 5 da ficha com 70% de acerto, essa que é justificável o grande número de acertos, já que foi trabalhado questões parecidas nos exemplos e no quiz.

Na situação a seguir, qual das alternativas indicadas representa a chance de aparecer uma bomba ao clicar em uma das células adjacentes ao número 3.

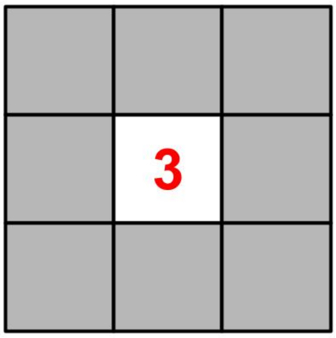


Figura 5.9 – Atividade com mais acertos

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nela a distribuição de respostas ficou da seguinte maneira:

(A) 3/8, [70%, 23 alunos]
(B) 5/8, [18%, 6 alunos]
(C) 5/9, [0%]
(D) 3/9, [9%, 3 alunos]
- Sem resposta [3%, participação da professora]

Agora, a questão com menos acertos foi segunda aplicada, equivalente a atividade 7 da ficha, com um total de 36% de acertos, o resultado apresentado nessa questão é bem interessante visto que é basicamente a questão anterior porém com o destaque na probabilidade complementar.

Na situação a seguir qual das alternativas indicadas representa a chance de NÃO aparecer uma mina ao clicar em uma das células adjacentes ao número 1.

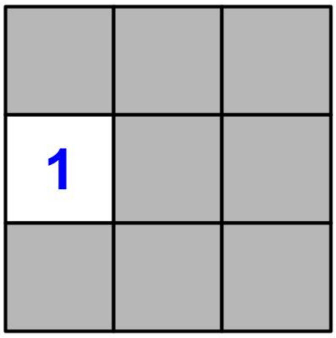


Figura 5.10 – Atividade com menos acertos

Fonte: Elaborado pelo autor.

(A) 25%, [6%, 2 aluno]

(B) 12,5%, [12%, 4 aluno]

(C) 1/5, [42%, 14 aluno]

(D) 4/5, [36%, 12 aluno]

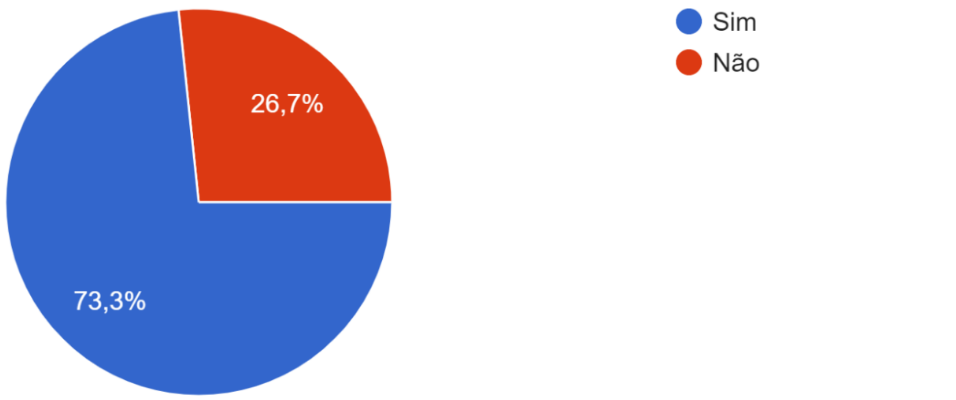
- Sem resposta [3%, participação da professora]

Esse resultado é muito interessante pois as questões são tecnicamente a mesmo porém uma é necessária uma leitura mais cuidadosa, uma vez que trata-se do cálculo da probabilidade complementar da anterior. De fato, essa situação é muito comum nas grandes provas, onde normalmente uma boa interpretação facilita a realização tranquila das questões.

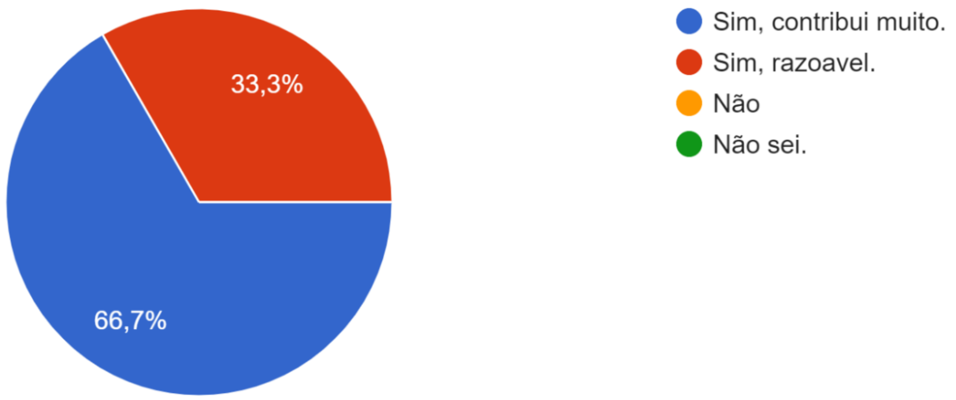
Questionário dos estudantes

Para verificar se a utilização dos desafios matemáticos em sala de aula como introdução a probabilidade foi de fato eficaz foi proposto ao final da atividade para que os estudantes respondessem de forma anônima um questionário avaliando sua experiência com a regência, essas questões foram objetivas, tendo um total de 15 respostas aproximadamente metade da classe, na qual obtivemos as seguintes respostas.

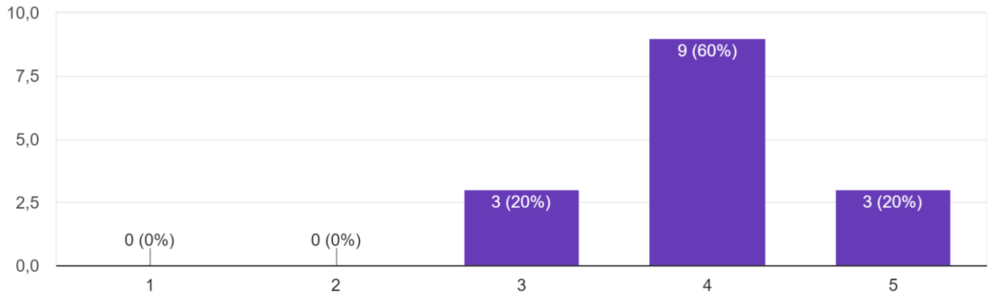
1) Você conhecia o Campo Minado antes?



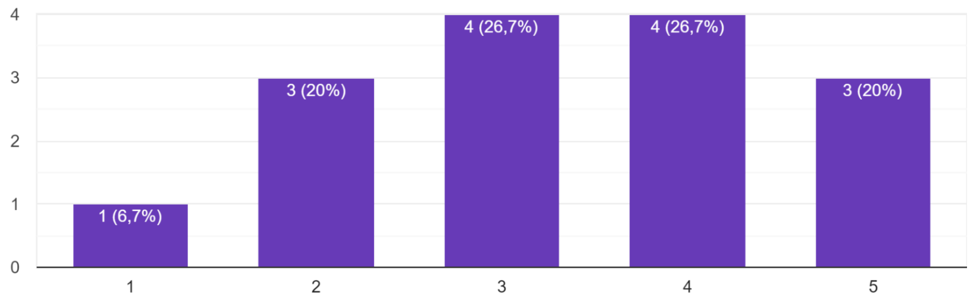
2) Você acha que utilizar o campo minado pode contribuir para sua visualização, assim como sua aprendizagem em probabilidade?



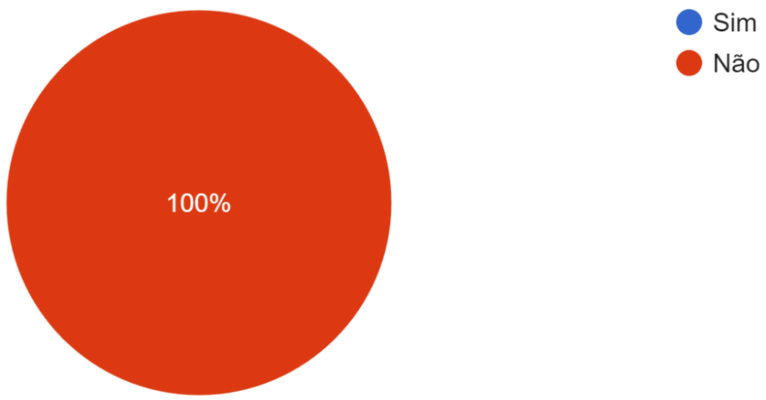
3) Atribuindo uma nota de 1 a 5, sendo 1 para pouco e 5 para muito, o quanto você considera que aprendeu de probabilidade utilizando o Campo Minado?



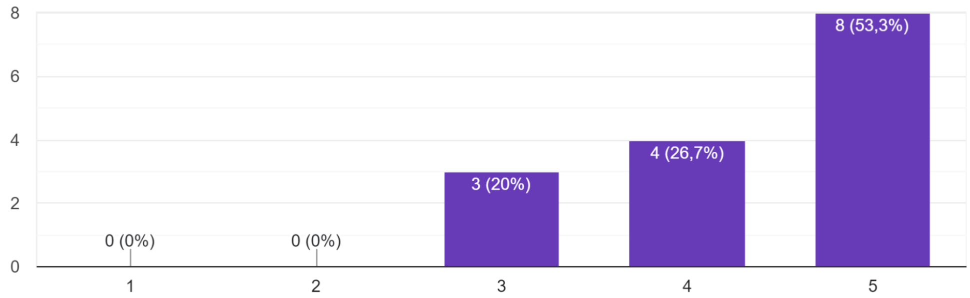
4) Atribuindo um valor de 1 a 5 sendo 1 para fácil e 5 para difícil, qual a dificuldade que você achou do Campo Minado?



5) Você conhecia o Nearpod antes?



6) Atribuindo uma nota de 1 a 5, sendo 1 para pouco e 5 para muito, o quanto você acha que o Nearpod deveria ser utilizado em sala de aula?



6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta deste trabalho foi apresentar sobre os desafios matemáticos, como possibilidade para o ensino de matemática, em particular como uma possível forma para a introdução dos conteúdos de probabilidade, tendo como principal foco a Educação Básica, seguindo a BNCC para o Ensino Fundamental e Médio.

Para a elaboração dessa proposta, foi realizado uma pesquisa bibliográfica para respaldar essa possibilidade de aplicação dos desafios matemáticos, além disso, fora utilizada os livros teóricos de Dantas e Morgado para realizar as definições formais das atividades citadas no capítulo 4, assim como a correspondência dos conteúdos trabalhados com as habilidades indicadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

O capítulo sobre os Desafios Matemáticos que envolve o conteúdo de probabilidade é dividido em dois momentos principais: o primeiro é a utilização dos Jogos analógicos e digitais; e o segundo é a utilização dos enigmas matemáticos. Sendo que, a partir deles se mostraram viáveis algumas possibilidades de exploração de conteúdos através dos desafios matemáticos, entre esses, o estudo de espaço amostral e eventos; o cálculo da probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por um número racional (forma fracionária, decimal e percentual); o reconhecimento que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1, e consequentemente a noção de probabilidade complementar.

Assim como, a interdisciplinaridade com outras áreas, como por exemplo com a programação, utilizando o Jogo do Caos no Triângulo de Sierpinski, evidente que essa área possui um grande aumento de interesse dos estudantes, na qual também devido ao novo ensino médio, no caso do Estado de São Paulo gerou parcerias com aplicativos e plataformas de ensino de tecnologia.

Com isso, realizou-se a prática da monografia, no caso uma aplicação em sala de aula, devido ao cronograma da escola na qual realizava o estágio foi possível aplicar apenas um desafio matemático, para tal foi escolhido o campo minado, motivado pelos conteúdos abordados no material disponibilizado pelo Estado que foi utilizado pela professora, como também pelo referencial teórico sobre esse jogo. De forma geral, a experiência da aplicação desse desafio matemático em sala de aula foi muito gratificante e interessante, visto que embora tivesse o planejamento já bem estabelecido e os preparativos para aula verificadas ainda tive algumas dificuldades para a aplicação tranquila da regência.

Mas mesmo assim, os resultados dos estudantes foram positivos, nas atividades eles conseguiram adquirir e utilizar algumas habilidades e estratégias que serão úteis para eles na realização das atividades realizadas posteriormente. No caso, a maioria dos estudantes conheciam o campo minado e o consideraram em níveis médio e alto com um desafio matemático viável para a aprendizagem, ademais evidenciaram no questionário a dificuldade mais elevada desse desafio embora a priori parecesse mais simples. Ademais, a plataforma do nearpod se mostrou muito interessante, visto que dos alunos que responderam o questionário, nenhum deles conhecia a plataforma, mas a maioria considerou valido a sua utilização mais frequente.

Dessa forma, percebo que a realização da prática da monografia com a aplicação em sala de aula me proporcionou grandes contribuições para meu desenvolvimento como futuro professor de matemática. De fato, esta experiência com o planejamento e aplicação da regência para as turmas do 3° ano do ensino médio possibilitou não apenas testar a consolidação de meus conhecimentos obtidos ao longo do curso, como também possibilitou uma noção sobre as dinâmicas no ensino e aprendizagem assim como as dificuldades do ambiente escolar na prática.

Essas adversidades na execução e adaptação da regência em sala de aula motivou o aprimoramento de minhas habilidades nos planejamentos de aula, assim como na gestão do tempo e estratégias para o ensino. Ademais, a introdução com os desafios matemáticos, tal como o campo minado, proporcionou uma aplicação prática dos conceitos teóricos abordados na monografia, juntamente com a melhora no engajamento dos alunos, assim possibilitou-se uma compreensão mais profunda dos temas de probabilidade abordados na prática para eles.

Noto que, essa abordagem mais diferenciada me permitiu explorar estratégias para tornar o aprendizado de matemática mais acessível, interessante e relevante para os estudantes. Além disso, a reflexão sobre minha prática, apoiada por teorias pedagógicas e referências bibliográficas, enriqueceu minha bagagem acadêmica e pedagógica. Nesse sentido, de fato essa experiência da prática desempenhou um papel fundamental no meu crescimento profissional me preparando para os desafios e responsabilidades inerentes à carreira de educador.

Desse modo, temos corroborado as propostas indicadas pela BNCC aos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Além disso, através da prática ficou evidente a aplicabilidade dos Desafios Matemáticos como introdução à probabilidade na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ADAMI, P. S. **FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2013. Citado na página 48.

ALTHOEN, S. C. et al. How long is a game of snakes and ladders? **The Mathematical Gazette**, The Mathematical Association, v. 77, n. 479, p. 71–76, 1993. Citado na página 27.

ARNESON, E. **Chutes and Ladders - Snakes and Ladders: Classic Children‘s Board Game Based on Ancient Indian Game.** [S.l.]: Thesprucecrafts, 2019. Disponivel em: https://www.thesprucecrafts.com/chutes-and-ladders-snakes-and-ladders-411609. Acesso em: 5 mar. 2023. Citado na página 25.

BARNSLEY, M. F. **Fractals Everywhere**. 2. ed. [S.l.]: Morgan Kaufmann, 1988. 552 p. Citado na página 47.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 64.

COBBETT, R. **The most successful game ever: a history of Minesweeper**. [S.l.]: techradar, 2009. Disponivel em: https://www.techradar.com/news/gaming/the-most-successful-game-ever-a-history-of-minesweeper-596504. Acesso em: 5 mar. 2023. Citado na página 30.

COOK, J. D. **The chaos game and the Sierpinski triangle**. [S.l.]: John D. Cook Consulting, 2017. Disponível em: https://www.johndcook.com/blog/2017/07/08/the-chaos-game-and-the-sierpinski-triangle/. Acesso em: 20 dez. 2023. Citado na página 50.

COSTA, L. A. L. D. **As tecnologias digitais em práticas de ensino e de aprendizagem – cultivando nativos digitais na escola pública do século XXI**. Dissertação. Fortaleza-Ceará: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ, 2016. Citado na página 64.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório**. 3. ed. [S.l.]: Edusp, 2008. (Coleção Acadêmica). Citado 9 vezes nas páginas 8, 10, 13, 14, 16, 18, 31, 36 e 40.

FELDMAN, D. P. **Chaos And Fractals An Elementary Introduction**. [S.l.]: Oxford University Press, 2012. 178-180 p. Citado na página 47.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 224 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2000. Citado na página 22.

GRILIOPOULOS, D. **Every step you take: The story of Minesweeper**. [S.l.]: Eurogamer, 2014. Disponivel em: https://www.eurogamer.net/every-step-you-take-the-story-of-minesweeper. Acesso em: 5 mar. 2023. Citado na página 30.

LEOCáDIO, L. A. L. **Uma proposta de ensino de probabilidade por meio do jogo campo minado em dispositivos móveis**. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto: [s.n.], 2021. 66 p. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 53.

LOPES, J. M. et al. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 7, n. 3, p. 47–62, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 21, 43, 44 e 45.

MORGADO, A. C. et al. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013. 204 p. (Coleção PROFMAT). Citado 3 vezes nas páginas 8, 10 e 16.

OLIVEIRA, A. W. B. B. de. **O uso do aplicativo euclidea no ensino de geometria na educação básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)). Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2020. Citado na página 71.

PóLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Traduzido por Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Citado na página 21.

QUINE, W. van O. **The Ways of Paradox and Other Essays**. [S.l.]: Harvard University Press, 1966. 364 p. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

RABELO, W. R. **O USO DO APLICATIVO NEARPOD COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM: estudo de caso em curso profissionalizante.** Trabalho de Conclusão de Curso (Pós-Graduação em Informática na Educação). Macapá, AP: Instituto Federal do Amapá, 2022. Citado na página 65.

SELVIN, S. et al. **Letters to the Editor**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1975. 67–71 p. Disponivel em: http://www.jstor.org/stable/2683689. Acesso em: 26 fev. 2023. Citado na página 36.

STEWART, I. **How to Cut a Cake: And other mathematical conundrums**. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. 145 p. Citado na página 43.

ZASLASVSKY, C. **Jogos e Atividades Matemáticas do Mundo Inteiro: Diversão Multicultural para idades de 8 a 12 anos**. Traduzido por Theobald. Porto Alegre: ARTMED, 2000. 160 p. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.