

# MODELOS ESTATÍSTICOS PARA LGD: UMA VISÃO CLÁSSICA e BAYESIANA

Maria Clara Mecatte Varga

Universidade Federal de São Carlos  
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Departamento de Estatística

# MODELOS ESTATÍSTICOS PARA LGD: UMA VISÃO CLÁSSICA e BAYESIANA

Maria Clara Mecatte Varga

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz

Qualificação de mestrado apresentada ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de São Carlos - DEs/UFSCar, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Estatística.

UFSCar - São Carlos

Abril/2011

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

V297me

Varga, Maria Clara Mecatte.

Modelos estatísticos para LGD : uma visão clássica e bayesiana / Maria Clara Mecatte Varga. -- São Carlos : UFSCar, 2011.

90 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Estatística. 2. Modelos estatísticos. 3. Capital econômico. 4. Regressão Beta. I. Título.

CDD: 519.5 (20ª)

**Maria Clara Mecatte Varga**

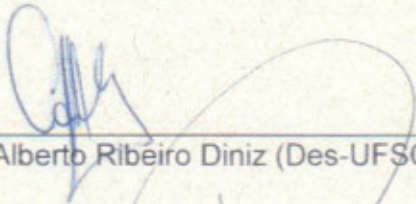
**MODELOS ESTATÍSTICOS PARA LGD: UMA VISÃO CLÁSSICA E BAYESIANA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Estatística.

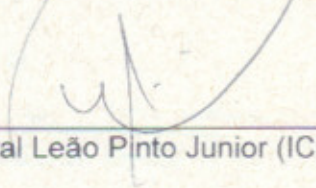
Aprovada em 28 de março de 2011.

**BANCA EXAMINADORA**

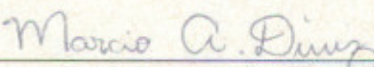
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz (Des-UFSCar/Orientador)

1º Examinador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Dorival Leão Pinto Junior (ICMC-USP)

2º Examinador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Márcio Alves Diniz (Des-UFSCar)

# Agradecimentos

Agradeço,

Primeiramente à minha mãe, Maria Elisabete, e ao meu pai, Estevam, por todo o incentivo que sempre me deram, sem o qual eu não teria conseguido esta etapa tão importante.

Aos meus familiares, que mesmo à distância sempre me incentivaram.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto Ribeiro Diniz, pela orientação, pela amizade e disponibilidade em me ajudar nos momentos oportunos.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. José Galvão Leite, pelos esforços e sugestões oferecidas para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Estatística da UFSCar, por suas contribuições para minha formação.

A todos meus amigos do mestrado, pela paciência e contribuições no desenvolvimento de programas computacionais.

A todas as minhas amigas e ao meu namorado pelo constante apoio nas horas mais difíceis.

A CAPES pelo incentivo financeiro desde o início do trabalho.

Finalmente aos participantes da banca examinadora por suas valiosas contribuições.

# Resumo

No dia-a-dia de uma instituição financeira é comum a existência de clientes que não conseguem honrar seus compromissos. Quando isso ocorre dizemos que o indivíduo entrou em *default*. Em uma eventual desaceleração econômica a carteira pode sofrer perdas devido ao excesso de cliente em *default* e às altas taxas de perdas. Neste momento é fundamental que as instituições financeiras tenham um capital em reserva para absorver esta possível perda. Tal reserva é conhecida como capital econômico. Neste trabalho analisamos quatro diferentes modelos, Normal, Log-Normal, Logit-Normal e Regressão Beta, utilizados para determinar a taxa individual de perda, dado que o cliente está em *default*, também conhecida como LGD (*Loss Given Default*). Tais modelos são utilizados na determinação do capital econômico. Nos modelos, ambos o *default* e a LGD dependem de um fator de risco sistemático simples, o qual descreve o estado da economia. Ou seja, considera-se que o evento de *default* e a LGD estão correlacionados. Descrevemos detalhadamente, para os quatro modelos, duas formas de calcular o capital econômico, utilizando a aproximação assintótica da distribuição da taxa de perda e a aproximação normal. Através de um estudo de simulação, comparamos as estimativas dos diferentes capitais econômicos. Uma abordagem bayesiana para o modelo de Regressão Beta é desenvolvida modelando conjuntamente a média e o parâmetro de dispersão.

# Abstract

Every day in financial institution is common to find customers who are unable to honor their commitments. When this occurs we say that the individual is in *default*. In a possible economic downturn the portfolio could suffer losses due to excessive *default* clients and high loss rates. At this stage it is essential that financial institutions have a capital reserve to absorb this potential loss. This reserve is known as economic capital. We examined four different models, Normal, Log-Normal, Logit-Normal and Beta Regression, used to determine the individual loss rate, since the client is in *default*, also known as LGD (*Loss Given Default*). Such models are used to determine the economic capital. In the models, both the *default* and LGD depend on a single systematic risk factor, which describes the state of the economy. This means that we considered that the event of *default* and LGD are correlated. We describe in detail for the four models, two ways of calculating economic capital, using the asymptotic approximation of the distribution of loss rate and the normal approximation. Through a simulation study, we compared the different estimates of economic capital. A bayesian approach to the Beta Regression model is developed modeling mean and dispersion parameter jointly.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelos Para LGD</b>	<b>5</b>
2.1	Os Modelos	5
2.2	Modelo Normal	8
2.3	Modelo Log-Normal	9
2.4	Modelo Logit-Normal	10
<b>3</b>	<b>Estimação dos Parâmetros <math>p</math> e <math>PD</math> do Valor ativo</b>	<b>11</b>
3.1	Dados	11
3.2	Estimação supondo $PD$ constante	12
3.3	Estimação supondo diferentes $PD$	14
<b>4</b>	<b>Estimação dos parâmetros da LGD</b>	<b>16</b>
4.1	Dados	16
4.2	Estimação dos parâmetros para o modelo Logit-Normal	17
4.2.1	Estimador da Esperança e Variância Condicional	20
4.3	Estimação dos parâmetros para o modelo Normal	20
4.3.1	Estimador da Esperança e Variância Condicional	22
4.4	Estimação dos parâmetros para o modelo Log-Normal	22



4.4.1	Estimador da Esperança e Variância Condicional . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Regressão Beta . . . . .</b>	<b>24</b>
5.1	Reparametrização da Distribuição Beta . . . . .	25
5.2	Modelo de Regressão Beta . . . . .	26
5.3	Função de Verossimilhança . . . . .	28
5.4	Variável LGD . . . . .	29
5.4.1	Máxima Verossimilhança . . . . .	30
5.4.2	Estimador da Esperança e da Variância Condicional . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Modelo de Regressão Beta sobre Enfoque Bayesiano . . . . .</b>	<b>32</b>
6.1	Abordagem Bayesiana do Modelo . . . . .	32
6.2	Posteriori . . . . .	33
6.3	Variável LGD . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Capital econômico . . . . .</b>	<b>36</b>
7.1	Definição da Taxa Perda . . . . .	36
7.2	Aproximação Assintótica para Distribuição da Taxa de Perda . . . . .	37
7.2.1	Capital Econômico usando Aproximação Assintótica . . . . .	40
7.3	Aproximação Normal para Distribuição da Taxa de Perda . . . . .	42
7.3.1	Capital Econômico usando Aproximação Normal . . . . .	44
<b>8</b>	<b>Estudo de Simulação . . . . .</b>	<b>48</b>
8.1	Simulações . . . . .	49
8.2	Estimativas de $p$ e $PD$ . . . . .	50
8.3	Inferência Clássica para Dados Provenientes do Modelo Normal . . . . .	51
8.4	Inferência Clássica para Dados Provenientes do Modelo Log-Normal . . . . .	54

8.5	Inferência Clássica para Dados Provenientes do Modelo Logit-Normal	55
8.6	Inferência Clássica para Dados Provenientes do Modelo RB . . . . .	57
8.7	Métricas AIC e BIC . . . . .	58
8.8	Análise Clássica dos Modelos . . . . .	62
8.9	Estimação dos Parâmetros do Modelo RB via Método Bayesiano	62
8.9.1	Análise da Simulação . . . . .	64
8.9.2	Estimativa Bayesiana . . . . .	65
8.9.3	Análise Bayesiana . . . . .	66
<b>9</b>	<b>Estimativas do Capital Econômico . . . . .</b>	<b>68</b>
9.1	Estimativas do CE-1 . . . . .	69
9.1.1	Análise de Resultados do CE-1 . . . . .	72
9.2	Estimativas do CE-2 . . . . .	73
9.2.1	Análise de Resultados do CE-2 . . . . .	76
9.3	Análise Geral . . . . .	76
<b>10</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Função Escore e Matriz de Informação de Fisher . . . . .</b>	<b>82</b>
A.1	Modelo Valor Ativo . . . . .	82
A.2	Modelo RB . . . . .	83
<b>B</b>	<b>Lemas . . . . .</b>	<b>87</b>
<b>C</b>	<b>Gráficos . . . . .</b>	<b>88</b>
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>1</b>

# Capítulo 1

## Introdução

No processo de empréstimos bancários é comum a existência de clientes que não conseguem honrar seus compromissos. Quando isso ocorre dizemos que o indivíduo entrou em *default*. Em um período de recessão econômica o infortúnio para os bancos é duplo: aumenta a taxa de *default* entre os tomadores e diminui a taxa de recuperação dos empréstimos. Quando tais eventos ocorrem, a carteira pode sofrer perdas. Neste momento é fundamental que as instituições financeiras tenham em reserva um determinado capital para absorver a possível perda de uma eventual desaceleração econômica. Tal reserva é conhecida como capital econômico.

Cada vez mais os bancos controlam seu capital por meio de modelos de créditos. Entretanto, muitos desses modelos, em uma recessão econômica, consideram apenas o aumento da taxa de *default*, não levando em conta uma possível queda da recuperação. Ou seja, tratam o evento de *default* independentemente da recuperação. Muitos estudos mostram uma correlação significativa entre as taxas anuais de *default* e a recuperação: anos ruins não só trazem uma alta taxa de *default*, como também uma baixa taxa de recuperação. Não considerar essa relação nos modelos pode acarretar uma subestimação do risco. Os bancos que dependem de tais modelos poderão entrar em uma recessão com capital reserva muito abaixo do necessário.

No contexto de perda de crédito nos portfólios, a quantidade LGD, *Loss*

*Given Default*, é a proporção do total exposto que será perdido se o *default* ocorrer. Note que a LGD pode ser diretamente transformada na taxa de recuperação,  $R$ , pela relação  $R = 1 - LGD$ . A incerteza sobre a real LGD (ou a real recuperação) constitui um recurso de risco de crédito nos portfólios além do risco de *default*.

Diferentes tipos de modelos já foram utilizados para descrever a LGD. Examinaremos quatro diferentes modelos utilizados na literatura. Esses possuem a mesma estrutura, mas diferem na distribuição utilizada para cálculo de recuperação. Nestes modelos foi considerada a taxa de recuperação dependente do fator de risco sistemático, ou seja, considerou-se uma correlação não nula entre o *default* e a recuperação.

Primeiramente examinaremos o modelo proposto por Frye (2000) onde é assumido que a recuperação segue uma distribuição Normal. Embora tal modelo tenha uma simples interpretação para os parâmetros, ele possui a desvantagem de não ser limitado inferiormente e superiormente, ou seja, pode-se obter valores negativos para a recuperação, o que não é de nosso interesse. Um segundo modelo foi proposto por Pykhtin (2003), que assumiu uma distribuição Log-Normal para as recuperações. Tal modelo possui a vantagem sobre o modelo Normal de garantir valores não negativos para as recuperações. Já a distribuição Logit-Normal, que pode ser considerada a mais adequada das três, uma vez que nos fornece um valor restrito ao intervalo unitário, foi utilizada por Dullmann *et al.* (2004).

O quarto modelo, proposto por Huang & Oosterlee (2008), sugere a Regressão Beta para variável LGD. Este modelo é útil em situações onde o fenômeno em estudo é contínuo, restrito ao intervalo (0,1) e o interesse está na análise do seu comportamento, considerando a inclusão de covariáveis que contribuam para explicar o processo.

Nossa contribuição nessa dissertação foi descrever uma abordagem bayesiana da extensão do modelo de Regressão Beta no qual modelamos a média e a dispersão conjuntamente, ao invés de considerar a dispersão como um parâmetro perturbador ou fixo. Analisamos o modelo bayesiano da Regressão Beta via

métodos MCMC. Fornecemos a expressão do capital econômico para os quatro modelos examinados utilizando a aproximação proposta por Vasicek (2002) e Vasicek (1991) e a aproximação normal. Através de um estudo de simulação, gerou-se um conjunto de dados para avaliar as estimativas clássicas dos parâmetros referentes a cada modelo da LGD e comparamos os modelos ajustados através dos critérios AIC e BIC. Para a análise bayesiana do modelo Regressão Beta, descrevemos as prioris, procedimentos utilizados e examinamos as simulações para ajuste de saltos e critérios de convergências. Finalmente comparamos as estimativas do capital econômico calculado das duas diferentes formas para os quatro modelos discutidos. Contribuições consistentes de alguns resultados são apresentadas.

Este trabalho está dividido em dez capítulos.

No segundo capítulo descrevemos a estrutura semelhante a todos os modelos. Introduziremos os modelos Normal, Log-Normal e Logit-Normal já analisados na literatura.

No terceiro e no quarto capítulo descrevemos o procedimento de estimação dos parâmetros. Iniciamos com duas diferentes formas de estimar os parâmetros do valor ativo, comum a todos os modelos, e seguimos com a estimação específica referente às distribuições Normal, Log-Normal e Logit-Normal.

No quarto capítulo descrevemos o modelo de Regressão Beta para o caso geral e também para o caso específico da variável LGD.

Seguindo com o modelo de Regressão Beta, no quinto capítulo estudamos sua abordagem bayesiana.

O capítulo seis é referente ao capital econômico. Começamos com a definição de perda no portfólio e seguimos com a descrição do capital econômico. Duas diferentes formas de aproximar a distribuição da taxa de perda serão descritas nesse capítulo: a aproximação assintótica e a aproximação normal.

O estudo de simulação é discutido no capítulo oito, no qual é descrita a metodologia utilizada e os valores estabelecidos para geração de dados referente a cada modelo. Seguindo com o estudo de simulação, apresentamos as estimativas

---

clássicas de cada modelo referentes a cada forma de geração dos dados. Exibimos e analisamos os valores dos critérios AIC e BIC para seleção de modelos. Também neste capítulo apresentamos e discutimos as estimativas bayesianas do modelo RB.

As estimativas do capital econômico, calculadas das duas maneiras para os quatro modelos, são apresentadas no capítulo nove, assim como as análises dos resultados.

A conclusão dos resultados é apresentada no capítulo dez.

# Capítulo 2

## Modelos Para LGD

### 2.1 Os Modelos

Uma das grandes questões nas indústrias bancárias é o capital de risco mínimo necessário. Muita discussão surge em torno da questão de como quantificar a perda em função do *default* (LGD ou 1-R) necessária para calcular capital econômico. As perdas causados por *default* variam a cada ano, dependendo do número e gravidade de cada caso. As instituições financeiras nunca sabem com antecedência as perdas que podem sofrer em um determinado ano, mas podem, no entanto, ter uma previsão da perda esperada.

Para descrever tais eventos utilizamos os modelos sugeridos por Gordy (2000) e Finger (1999). Esses modelos são guiados por um fator de risco sistemático simples ao invés de vários parâmetros de correlação. Obviamente esta simplificação carece de alguns detalhes, mas é apropriada para estudar influências gerais como recessão econômica.

Embora um número significativo de artigos sugira que o risco sistemático nas taxas de *default* é uma fonte potencialmente importante para perdas de crédito, apenas uma parte das pesquisas propõem uma maneira de incorporar os efeitos do risco sistemático sobre as taxas de recuperação diretamente na LGD estimada. Modelos que não levam em consideração essa correlação podem estar subestimando seu risco real. Nos modelos descritos a seguir temos que

a recuperação (ou LGD), assim como o *default* dependem de tal fator de risco sistemático.

Três diferentes modelos são inicialmente discutidos: Normal, Log-Normal e Logit-Normal. Posteriormente analisamos o modelo de Regressão Beta em detalhes.

Os quatro diferentes modelos possuem uma estrutura comum que depende do evento de *default* (presença ou ausência) e da probabilidade de *default*. Esta estrutura é descrita a seguir.

O principal elemento a se considerar é o fator de risco sistemático no ano  $t$ ,  $X_t$ , que afeta o patrimônio de cada indivíduo e a quantia de cada recuperação. Por exemplo, se  $X_t$  toma um valor baixo é esperado que haja um aumento na média de *default* e uma diminuição na média de recuperação naquele específico ano  $t$ . A variável  $X_t$  é interpretada neste trabalho como o estado da economia no ano  $t$ .

Dado um devedor  $j$ , dois fatores afetam o modelo. Primeiro o nível  $X_t$ , que afeta todos os outros indivíduos, em segundo o nível do fator independente  $\xi_j$ , que afeta somente o devedor  $j$ . Nos modelos,  $\xi_j$  é uma variável latente. Esses dois fatores combinados determinam o valor ativo, ou valor de bem líquido, do devedor  $j$ . Denotamos esse valor de  $A_j$  dado por

$$A_j = pX_t + \sqrt{1 - p^2}\xi_j. \quad (2.1)$$

Assumimos que  $X_t$  e  $\xi_j$  são independentes, e que  $X_t$  e  $\xi_j$  são variáveis aleatórias normalmente distribuídas com média zero e variância um. Consequentemente  $A_j$  também possui distribuição normal padrão com

$$E[A_j] = pE[X_t] + \sqrt{1 - p^2}E[\xi_j] = 0.$$

$$Var[A_j] = p^2Var[X_t] + \left(\sqrt{1 - p^2}\right)^2 Var[\xi_j] = p^2 + 1 - p^2 = 1.$$

A equação (2.1) é caso particular da relação

$$A_j = a_{j1}X_{t1} + a_{j2}X_{t2} + \dots + a_{jd}X_{td} + b_j\xi_j,$$



sendo  $a_{ji}$  fator de carga do  $j$ -ésimo indivíduo, para  $j = 1, \dots, N_t$  e  $i = 1, \dots, d$ ,  $X_{ti}$ ,  $i$ -ésimo fator de risco sistemático no ano  $t$ , seguindo distribuição  $N(0, 1)$  e  $\xi_j$  o fator de risco independente do  $j$ -ésimo devedor seguindo distribuição  $N(0, 1)$ .

Com as restrições  $0 \leq a_{j1}^2 + \dots + a_{jd}^2 \leq 1$  e  $b_j = \sqrt{1 - (a_{j1}^2 + \dots + a_{jd}^2)}$  para garantir a normalidade padrão de  $A_j$

Voltando à equação (2.1), o parâmetro  $p$  controla o quanto o fator de risco sistemático afeta os indivíduos. Se  $p$  possui um baixo valor (perto de zero), os indivíduos tem baixa ligação com o estado da economia, por outro lado, se  $p$  assume um valor alto, cada emitente estará fortemente relacionado com a economia. Uma economia com alto valor de  $p$  é fortemente cíclica, logo, em um ano onde  $X_t$  assume valor baixo, será um ano ruim para muitos clientes.

Podemos observar que, uma vez fixado o fator de risco sistemático  $X_t$ , todos os acontecimentos com os devedores são independentes, ou seja, os devedores são independentes dado o fator  $X_t$ .

No modelo, o devedor entra em *default* quando seu valor ativo ficar abaixo de um certo valor fixado  $y$ , ou seja, se  $A_j < y$ . Considere  $D_j$  como sendo o evento de *default* do indivíduo  $j$ ,

$$D_j = \begin{cases} 1, & \text{se } A_j < \Phi^{-1}(PD) \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (2.2)$$

sendo  $PD$  a probabilidade de *default* e  $\Phi^{-1}$  a inversa da acumulada da distribuição normal padrão. A probabilidade de *default*, dado o limite  $y$ , é dado por

$$PD = P[D_j = 1] = P[A_j < y] = \Phi(y),$$

ou seja

$$y = \Phi^{-1}(PD).$$

Neste trabalho consideramos um portfólio composto por um número grande,  $M \rightarrow \infty$ , de devedores.

Condicionada a certa realização de  $X_t$ , o estado da economia em um ano  $t$  dado por  $X_t = x_t$ , temos que os *defaults* individuais acontecem independentemente uns dos outros. Pode-se mostrar que, em uma carteira muito grande, a lei

dos grandes números garante que a fração de devedores que realmente entraram em *default*, ou seja, a proporção de *default* observada,  $DF_t$ , é (quase certamente) igual à probabilidade de *default* individual da condicional (Schonbucher (2000)). Desta forma

$$\begin{aligned} DF_t &= P [D_j = 1 | X_t = x_t] = E [D_j | X_t = x_t] = \\ &= P [A_j < \Phi^{-1}(PD) | X_t = x_t] = P [px_t + \sqrt{1-p^2}\xi_j < \Phi^{-1}(PD)] = \\ &= P \left[ \xi_j < \frac{\Phi^{-1}(PD) - px_t}{\sqrt{1-p^2}} \right] = \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) - px_t}{\sqrt{1-p^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tal equação será utilizada posteriormente na estimação dos parâmetros  $p$  e  $PD$ . Mostramos que com essa equação é possível encontrar a distribuição da proporção de *default*,  $DF_t$ , através de técnicas de mudança de variável e conseqüentemente é possível estimar os parâmetros  $p$  e  $PD$  por máxima verossimilhança. Embora  $X_t$  seja uma variável aleatória, com os dados das proporções anuais de *default* juntamente com as estimações de  $p$  e  $PD$  é possível prever o valor assumido por  $X_t$  a cada ano. Tais valores são utilizados nos modelos de recuperação, ficando implícito a correlação do evento de *default* e a recuperação (ou LGD).

A seguir descrevemos, em detalhes, os modelos utilizados para a LGD. Os modelos diferem-se pela distribuição imposta para cálculo de recuperação. Neste momento do trabalho utilizaremos a variável LGD ao invés da recuperação.

## 2.2 Modelo Normal

A LGD em um *default*  $j$ , no tempo  $t$  no modelo proposto por Frye (2000), segue uma distribuição Normal que depende do fator de risco sistemático  $X_t$  e também de um fator independente  $Z_j$ , que afeta somente a LGD do *default*  $j$  no tempo  $t$ . A  $L_{jt}$  é dada por

$$L_{jt} = \mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t + \sigma\sqrt{1-\omega}Z_j. \quad (2.4)$$

Neste modelo assume-se que  $Z_j$  segue distribuição  $N(0, 1)$  independente de  $X_t$  e  $\xi_j$ . Assim  $L_{jt}$  segue distribuição Normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .

Os parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\omega$  podem ser interpretados como quantidade, qualidade e sensibilidade ao fator sistemático na LGD. O parâmetro de sensibilidade,  $\omega$ , controla o quão forte é o efeito do risco sistemático na perda.

É importante ressaltar que todas as informações de um dado ano são independentes de ano para ano. Além disso, as informações de um ano são formadas por indivíduos sem nenhuma ligação com os indivíduos de outros anos.

A desvantagem desse modelo é o fato da taxa de perda não possuir nenhum limite inferior ou superior. Devido a tal fato pode-se, por exemplo, obter um valor negativo para a LGD que, em tal contexto, não possui nenhuma interpretação coerente.

## 2.3 Modelo Log-Normal

Neste modelo, descrito por Pykhtin (2003), a taxa de perda segue uma distribuição Log-Normal. Assim a LGD,  $L_{jt}$ , pode ser definida através da relação

$$L_{jt} = \exp(Y_{jt}), \quad (2.5)$$

com  $Y_{jt}$  expresso na forma da equação (2.4), ou seja

$$Y_{jt} = \mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t + \sigma\sqrt{1-\omega}Z_j.$$

Observe que, como apresentado no modelo normal, a variável  $Y_{jt}$  segue distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$  assumindo que  $Z_j$  segue distribuição  $N(0, 1)$  independente de  $X_t$  e  $\xi_j$ . Assim,  $L_{jt}$  segue distribuição Log-Normal,  $LogN(\mu, \sigma^2)$ .

A distribuição Log-Normal pode ser mais realista do que a distribuição Normal pelo fato de garantir que a LGD seja um valor não-negativo. Similarmente ao caso normal, tal modelo dificulta a interpretação da LGD em termos percentuais, uma vez que a distribuição Log-Normal não se restringe ao intervalo unitário.

## 2.4 Modelo Logit-Normal

Nesse modelo (Dullmann *et al.* (2004)) é assumido que a LGD segue uma distribuição Logit-Normal. Assim a LGD,  $L_{jt}$ , pode ser definida através da relação

$$L_{jt} = \frac{\exp(Y_{jt})}{1 + \exp(Y_{jt})}, \quad (2.6)$$

com  $Y_{jt}$  expresso na forma da equação (2.4), ou seja

$$Y_{jt} = \mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t + \sigma\sqrt{1-\omega}Z_j.$$

Similarmente aos modelos anteriores, é assumido que  $Z_j$  segue distribuição  $N(0, 1)$  independente de  $X_t$  e  $\xi_j$ . Portanto,  $Y_{jt}$  segue distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$  e conseqüentemente  $L_{jt}$  em (2.6) segue distribuição Logit-Normal,  $LN(\mu, \sigma^2)$ .

Utilizando uma distribuição Logit-Normal para calcular a LGD garantimos que tal valor esteja entre 0 e 1. Sendo assim, analisamos a perda em porcentagem do total emprestado. Note que neste caso os parâmetros não possuem interpretações triviais como no caso da distribuição Normal.

Para os três modelos, Normal, Log-Normal e Logit-Normal, no Capítulo 4 descrevemos o procedimento para uma abordagem clássica dos parâmetros. Posteriormente tais estimativas serão utilizadas para determinar o capital econômico de cada modelo.

# Capítulo 3

## Estimação dos Parâmetros $p$ e $PD$ do Valor ativo

Neste capítulo descreveremos duas diferentes formas de estimar o parâmetro  $PD$  do valor ativo. A primeira considera que o parâmetro é fixo para todo devedor e a segunda considera que  $PD$  é subdividido em classes. O modelo a ser utilizado deve ser escolhido conforme a necessidade de quem o utiliza. Nesse trabalho em específico, utilizaremos apenas o modelo que considera  $PD$  constante para todos os indivíduos.

Os parâmetros  $p$  e  $PD$  são estimados por máxima verossimilhança.

### 3.1 Dados

Embora não tenhamos acesso a dados referentes à LGD, descrevemos de maneira breve o conjunto de dados necessário para estimação dos parâmetros.

Instituições financeiras necessitam calcular seu capital econômico em um determinado ano em que se encontram e para isso utilizam dados dos anos anteriores.

Para a estimação dos parâmetros  $p$  e  $PD$  do valor ativo, é necessário obter as frequências relativas de *default*  $DF_1, \dots, DF_T$ , porcentagem dos devedores que entraram em *default* nos anos  $1, \dots, T$ . No caso de considerar  $PD$  subdividido em

classes, também é necessário calcular a proporção anual de indivíduos de cada classe e a taxa de inadimplência média a longo prazo de um ano de clientes de cada classe.

Consideramos duas diferentes formas de analisar os parâmetros do valor ativo,  $PD$  constante para todo indivíduo e  $PD$  dividido em classes. Em todos os casos consideramos  $p$  da equação (2.1) constante. Como  $p$  descreve a relação dos clientes com o estado da economia, em um portfólio grande e diversificado, faz sentido considerá-lo fixo para todos os clientes.

### 3.2 Estimação supondo $PD$ constante

Nessa sessão desenvolvemos detalhadamente, como uma contribuição ao trabalho, a forma de estimar  $PD$  constante para todos devedores, utilizando uma transformação de variável e o método Jacobiano.  $PD$  constante para todos os devedores é comum em um portfólio grande e diversificado ou quando o interesse principal é mais abrangente, como no caso de calcular capital econômico. Estimamos os parâmetros  $PD$  e  $p$  baseados em taxas de *default* nos períodos (anos)  $1, \dots, T$ . Como vimos anteriormente a frequência relativa de *default* é dada pela equação (2.3). A função densidade de probabilidade da frequência relativa de *default* é determinada utilizando o método Jacobiano.

Seja

$$DF_t = \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{p}X_t}{\sqrt{1-p}} \right] = g(X_t),$$

sendo  $g$  monótona. A inversa de  $g$  com respeito a  $X_t$  é dada por

$$X_t = \frac{\Phi^{-1}(PD) - \Phi^{-1}(DF_t) \sqrt{1-p}}{\sqrt{p}} = g^{-1}(DF_t),$$

com  $X_t$  seguindo distribuição  $N(0, 1)$ , usando o método Jacobiano, podemos encontrar a densidade de  $DF_t$

$$f(DF_t; PD, p) = \left| \frac{dg^{-1}(DF_t)}{dDF_t} \right| \frac{\exp \left\{ -\frac{(g^{-1}(DF_t))^2}{2} \right\}}{\sqrt{2\pi}},$$

com

$$\left| \frac{dg^{-1}(DF_t)}{dDF_t} \right| = \frac{1}{|g'(g^{-1}(DF_t))|} = \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{p} \phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{p}g^{-1}(DF_t)}{\sqrt{1-p}} \right]}.$$

Portanto a função densidade de  $DF_t$  é dada por

$$f(DF_t; PD, p) = \frac{\sqrt{1-p} \exp \left\{ \frac{-(g^{-1}(DF_t))^2}{2} \right\}}{(\sqrt{p2\pi}) \phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{p}g^{-1}(DF_t)}{\sqrt{1-p}} \right]}.$$

Com  $g^{-1}(DF_t) = X_t$ , temos que

$$f(DF_t; PD, p) = \frac{\sqrt{1-p} \exp \left\{ \frac{-(X_t)^2}{2} \right\}}{(\sqrt{p2\pi}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\left( \frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{p}X_t}{\sqrt{1-p}} \right)^2}{2} \right\}}. \quad (3.1)$$

Substituindo  $X_t = \frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{1-p}\Phi^{-1}(DF_t)}{\sqrt{p}}$  na equação (3.1) encontramos

$$f(DF_t; PD, p) = \sqrt{\frac{1-p}{p}} \exp \left\{ -\frac{\Phi^{-1}(PD)^2 + (1-2p)\Phi^{-1}(DF_t)^2 - 2\sqrt{1-p}\Phi^{-1}(PD)\Phi^{-1}(DF_t)}{2p} \right\}.$$

Assumindo independência de ano para ano, podemos estimar os parâmetros  $p$  e  $PD$  através do método de máxima verossimilhança, uma vez que as frequências relativas de *default* anuais  $DF_1, \dots, DF_T$  são conhecidas. Temos assim

$$l(PD, p; DF_1, \dots, DF_T) = \sum_{t=1}^T \ln(f(DF_t; PD, p))$$

Derivando com relação a  $p$  e a  $PD$  e resolvendo o sistema de equações, temos

$$\hat{p} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(DF_t)^2 - \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(DF_t) \right)^2}{1 + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(DF_t)^2 - \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(DF_t) \right)^2} \quad (3.2)$$

e

$$\widehat{PD} = \Phi \left( \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(DF_t)}{\sqrt{1 + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(DF_t)^2 - \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(DF_t) \right)^2}} \right). \quad (3.3)$$

A função escore e a matriz informação de Fisher, são apresentadas na primeira seção do Apêndice A.

Após obter as estimativas  $\hat{p}$  e  $\widehat{PD}$  e utilizando as frequências relativas de *default* anuais  $DF_1, \dots, DF_T$ , podemos prever o valor de  $X_t$  a cada ano através da equação

$$X_t = \frac{\Phi^{-1}(\widehat{PD}) - \Phi^{-1}(DF_t)\sqrt{1-\hat{p}}}{\sqrt{\hat{p}}}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Os valores obtidos de  $X_1, \dots, X_T$  são utilizados para estimar as parâmetros da equação de LGD.

### 3.3 Estimação supondo diferentes $PD$

Apenas para conhecimento, outra forma de abordar os modelos é considerar diferentes  $PD$ 's entre os devedores. A forma mais natural de diferenciar os devedores é distribuí-los em classes distintas de  $PD$ . Frye (2000), por exemplo, propôs o de 19 diferentes classes de  $PD$ 's, dadas por Aaa, Aa1, Aa2, Aa3, A1, A2, A3, Baa1, Baa2, Baa3, Ba1, Ba2, Ba3, B1, B2, B3, Caa, Ca, C, onde um devedor classificado como Aaa tem menor probabilidade de *default* do que um classificado como C. Cada probabilidade  $PD_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , é então estimada pela média da taxa de inadimplência ao longo de um ano de clientes da mesma classe.

Considerando  $K$  classes, a probabilidade de *default* dentro da classe  $k$ ,  $PD_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  é estimada pela taxa de inadimplência média dos clientes dentro da classe. então que o índice  $PD$  é subdividido em  $K$  classes,  $PD_1, \dots, PD_K$ . Usando a expressão (2.3) a taxa de *default* de uma firma classificada como  $k$  no ano  $t$  é dada por

$$DF_{t,k} = \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD_k) - \sqrt{p}X_t}{\sqrt{1-p}} \right].$$

se  $h_{t,k}$  representa a fração da classe  $r$  de *default* em um ano  $t$ , então a taxa de *default* descrita em (2.3) pode ser escrita como

$$DF_t = \sum_{k=1}^K h_{t,k} DF_{t,k} = g(X_t).$$

A função  $g$  é monótona, sendo assim, pode ser invertida numericamente com respeito a  $X_t$ . Dado que  $X_t$  tem distribuição  $N(0, 1)$ , a densidade de  $DF_t$  é determinada por

$$f(DF_t; p) = \left| \frac{dg^{-1}(DF_t)}{dDF_t} \right| \frac{\exp \left\{ -\frac{(g^{-1}(DF_t))^2}{2} \right\}}{\sqrt{2\pi}},$$



com

$$\left| \frac{dg^{-1}(DF_t)}{dDF_t} \right| = \frac{1}{|g'(g^{-1}(DF_t))|} = \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{p} \sum_{k=1}^K h_{t,k} \phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD_k) - \sqrt{p}g^{-1}(DF_t)}{\sqrt{1-p}} \right]}.$$

Portanto, a função densidade de  $DF_t$  é então dada por

$$f(DF_t; p) = \frac{\sqrt{1-p} \exp \left\{ -\frac{(g^{-1}(DF_t))^2}{2} \right\}}{(\sqrt{p2\pi}) \sum_{k=1}^K h_{t,k} \phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD_k) - \sqrt{p}g^{-1}(DF_t)}{\sqrt{1-p}} \right]}.$$

Assumindo independência de ano para ano, o log da função de verossimilhança é dado por

$$l(p; DF_1, \dots, DF_T) = \sum_{t=1}^T \ln(f(DF_t; p)).$$

Usando o log da função de verossimilhança acima podemos estimar  $p$  pelo método de máxima verossimilhança.

Com os parâmetros de  $p$  e  $PD$  estimados, o passo seguinte é determinar os estimadores dos parâmetros da distribuição das LGD. No capítulo a seguir apresentamos os ajustes por máxima verossimilhança dos três modelos discutidos em (2.4) (2.5) e (2.6).

# Capítulo 4

## Estimação dos parâmetros da LGD

Neste capítulo descrevemos os métodos de estimação dos parâmetros da LGD referente aos modelos Normal, Log-Normal e Logit-Normal. Apresentamos as expressões da esperança condicional e da variância condicional de cada modelo, uma vez que tais valores são necessários para determinar o capital econômico.

### 4.1 Dados

Conhecendo os estimadores de  $p$  e  $PD$  (ou  $PD_1, \dots, PD_K$ ) e as frequências de *default*  $DF_1, \dots, DF_T$  é possível prever  $X_1, \dots, X_T$ , ou seja, o nível de  $X_t$  a cada ano. Tais níveis de  $X_t$  combinados com os dados de LGD são utilizados para estimar os parâmetros dos modelos através de uma segunda maximização. O valor de  $X_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , pode ser considerado um efeito fixo no modelo LGD.

Os dados necessários para estimação dos parâmetros das distribuições da LGD envolvem os valores das LGD (ou recuperações) individuais, denotados por  $L_{jt}$ ,  $j = 1, \dots, N_t$  e  $t = 1, \dots, T$ , sendo  $N_t$  o número de devedores que entraram em *default* no ano  $t$  e  $T$  o número de anos considerado na análise. É importante salientar que as informações de um específico ano são independentes de outros anos. Além disso, as informações pertinentes a um ano são provenientes de

indivíduos que não têm nenhuma ligação com os indivíduos de outros anos. Assim, para reforçar a ideia, a LGD  $L_{11}$  e a LGD  $L_{12}$  não são, necessariamente, do mesmo indivíduo 1. Para o ano  $t = 1$  teremos os dados  $L_{11}, \dots, L_{N_11}$  correspondentes às LGD de  $N_1$  clientes em *default*, para o ano  $t = T$  teremos os dados  $L_{1T}, \dots, L_{N_T T}$  correspondentes às LGD de  $N_T$  clientes em *default*.

A seguir descrevemos as estimações dos parâmetros de cada modelo. Iniciamos pelo modelo Logit-Normal por ser o mais complexo. Os modelos Log-Normal e Normal são considerados casos particulares do modelo Logit-Normal.

## 4.2 Estimação dos parâmetros para o modelo Logit-Normal

Suponha que  $L_{jt}$ ,  $j = 1, \dots, N_t$  e  $t = 1, \dots, T$  seguem distribuição Logit-Normal como descrito em (2.6). Seja

$$Y_{jt} = \mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t + \sigma\sqrt{1-\omega}Z_j. \quad (4.1)$$

A  $L_{jt}$  pode ser escrita, como apresentada em (2.6)

$$L_{jt} = \frac{\exp(Y_{jt})}{1 + \exp(Y_{jt})} = h(Z_j).$$

Desta forma

$$Y_{jt} = \ln\left(\frac{L_{jt}}{1-L_{jt}}\right). \quad (4.2)$$

Usando a expressão (4.1) o erro específico,  $Z_j$ , pode ser escrito como

$$Z_j = \frac{Y_{jt} - \mu - \sigma\sqrt{\omega}X_t}{\sigma\sqrt{1-\omega}}. \quad (4.3)$$

Substituindo a expressão (4.2) em (4.3), temos

$$Z_j = \frac{\ln\left(\frac{L_{jt}}{1-L_{jt}}\right) - \mu - \sigma\sqrt{\omega}X_t}{\sigma\sqrt{1-\omega}} = h^{-1}(L_{jt}). \quad (4.4)$$

Como  $Z_j$  segue distribuição normal padrão, utilizando o método Jacobiano podemos determinar a distribuição condicional de  $L_{jt}$  dado o erro sistemático  $X_t$ . Ou seja

$$f(L_{jt}|X_t) = \left| \frac{dh^{-1}(L_{jt})}{dL_{jt}} \right| \frac{\exp\left\{-\frac{(h^{-1}(L_{jt}))^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi}},$$

como

$$\left| \frac{dh^{-1}(L_{jt})}{dL_{jt}} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{1-\omega}L_{jt}(1-L_{jt})},$$

a função de densidade de condicional de  $L_{jt}|X_t$  é escrita como

$$f(L_{jt}|X_t) = \frac{\exp\left\{-\frac{(Z_j)^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\omega)L_{jt}^2(1-L_{jt})^2}}.$$

Substituindo  $Z_t$ , como na formula (4.4), na equação acima, temos

$$f(L_{jt}|X_t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2(1-\omega)L_{jt}^2(1-L_{jt})^2}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{L_{jt}}{1-L_{jt}}\right) - \mu - \sigma\sqrt{\omega}X_t\right)^2}{2\sigma^2(1-\omega)}\right).$$

A função log-verossimilhança para  $\mu, \sigma$  e  $\omega$  condicionada a  $X_t$  é dada por

$$l_t(\mu, \sigma, \omega; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t) = \sum_{j=1}^{N_t} \ln \left( \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2(1-\omega)L_{jt}^2(1-L_{jt})^2}} \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{L_{jt}}{1-L_{jt}}\right) - \mu - \sigma\sqrt{\omega}X_t\right)^2}{2\sigma^2(1-\omega)}\right) \right).$$

Como as informações de um ano para outro são consideradas independentes, a função log-verossimilhança envolvendo todos os anos é definida como

$$l(\mu, \sigma, \omega; \mathbf{L}, N_1, \dots, N_T) = \sum_{t=1}^T l_t(\mu, \sigma, \omega; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t), \quad (4.5)$$

sendo  $\mathbf{L} = (L_{11}, \dots, L_{N_1 1}, \dots, L_{1T}, \dots, L_{N_T T})$  os dados disponíveis das LGD individuais referentes a todos os anos.

A otimização da função log-verossimilhança, em (4.5), em relação aos parâmetros  $\mu, \sigma$  e  $\omega$  é analiticamente intratável, pois o polinômio resultante é de quinta ordem ou mais (detalhes em Dullmann *et al.* (2004)). Além disso, por problemas de identificabilidade não é possível determinar numericamente o máximo. Uma alternativa encontrada por Dullmann *et al.* (2004) é reduzir a dimensionalidade do espaço paramétrico. Para isso estimamos o parâmetro  $\sigma$  pela volatilidade histórica  $\hat{\sigma}_{hist}$ . Para estimarmos  $\sigma$  pela volatilidade histórica é necessário utilizar uma transformação nos dados de LGD, uma vez que estamos utilizando o modelo Logit-Normal. Utilizando a transformação  $\ln\left(\frac{L_{jt}}{1-L_{jt}}\right)$ , temos

que a volatilidade histórica  $\hat{\sigma}_{hist}$  é dada por

$$\hat{\sigma}_{hist} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_t} \left( \ln \left( \frac{L_{jt}}{1-L_{jt}} \right) - \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_t} \ln \left( \frac{L_{jt}}{1-L_{jt}} \right)}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2}{\sum_{t=1}^T N_t - 1}}. \quad (4.6)$$

Os parâmetros  $\mu$  e  $\omega$  são então estimados condicionando a função log-verossimilhança ao parâmetro estimado  $\hat{\sigma}_{hist}$ .

A função log-verossimilhança condicionada a  $\hat{\sigma}_{hist}$ , em um específico ano  $t$ , é escrita como

$$l_t(\mu, \omega; L_{jt}, N_1, \dots, N_T, \hat{\sigma}_{hist}) = \sum_{j=1}^{N_t} \ln \left( \sqrt{\frac{1}{2\pi \hat{\sigma}_{hist}^2 (1-\omega) L_{jt}^2 (1-L_{jt})^2}} \exp \left( -\frac{\left( \ln \left( \frac{L_{jt}}{1-L_{jt}} \right) - \mu - \hat{\sigma}_{hist} \sqrt{\omega} X_t \right)^2}{2 \hat{\sigma}_{hist}^2 (1-\omega)} \right) \right).$$

A função log-verossimilhança condicionada a  $\hat{\sigma}_{hist}$  envolvendo todos os anos é definida como

$$l(\mu, \omega; \mathbf{L}, N_1, \dots, N_T, \hat{\sigma}_{hist}) = \sum_{t=1}^T l_t(\mu, \omega; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t, \hat{\sigma}_{hist}). \quad (4.7)$$

Derivando (4.7) em relação aos parâmetros  $\mu$  e  $\omega$  e resolvendo o sistema encontramos o estimador de máxima verossimilhança de  $\mu$  como

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^T \left( \sum_{j=1}^{N_t} \ln \left( \frac{L_{jt}}{1-L_{jt}} \right) - N_t \hat{\sigma}_{hist} \sqrt{\omega} X_t \right)}{\sum_{t=1}^T N_t} \quad (4.8)$$

e o estimador de máxima verossimilhança de  $\omega$  é dada pela segunda potência da solução da equação polinomial

$$z^3 - s_{x,\bar{r}} z^2 - (1 - s_x^2 - s_r^2) z = s_{x,\bar{r}}, \quad (4.9)$$

sendo  $s_{x,\bar{r}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_t} \ln \left( \frac{L_{jt}}{1-L_{jt}} \right) - N_t \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_{hist}} \right)$ ,  $s_x^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T N_t X_t^2$  e

$$s_r^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_t} \ln \left( \frac{L_{jt}}{1-L_{jt}} \right) - N_t \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_{hist}} \right)^2.$$

Substituindo o valor estimado  $\hat{\mu}$ , a equação polinomial fica somente em função do parâmetro  $\omega$ , assim através da fórmula de Cardano, por exemplo, podemos estimar  $\hat{\omega}$ .

### 4.2.1 Estimador da Esperança e Variância Condicional

Como a distribuição condicional de  $L_{jt}$  dado  $X_t$  é uma Logit-Normal com parâmetros  $\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$  e  $\sigma^2(1 - \omega)$ , tanto a esperança condicional,  $E[L_{jt}|X_t]$ , quanto a variância condicional,  $Var[L_{jt}|X_t]$ , não possuem soluções algébrica. Estas devem ser encontradas de forma numérica. Como os parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\omega$  não são conhecidos, podemos utilizar os estimadores de máxima verossimilhança para determinar o valor numérico dessa esperança condicional. Assim, o estimador da esperança condicional é encontrado resolvendo a integral

$$\hat{E}[L_{jt}|X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(z)}{1 + \exp(z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\hat{\sigma}\sqrt{1 - \hat{\omega}})} \exp\left\{-\frac{(z - \hat{\mu} - \hat{\sigma}\sqrt{\hat{\omega}}(X_t))^2}{2(\hat{\sigma}\sqrt{1 - \hat{\omega}})^2}\right\} dz. \quad (4.10)$$

Para determinar o estimador da variância  $\hat{Var}(L_j|X_t)$ , utilizamos a fórmula

$$\hat{Var}(L_{jt}|X_t) = \hat{E}[L_{jt}^2|X_t] - \hat{E}[L_{jt}|X_t]^2. \quad (4.11)$$

Como calculamos  $\hat{E}[L_j|X_t]$  acima, é suficiente determinarmos  $\hat{E}[L_j^2|X_t]$ . Tal esperança é calculada numericamente por

$$\hat{E}[L_{jt}^2|X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\exp(y)}{1 + \exp(y)}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\hat{\sigma}\sqrt{1 - \hat{\omega}})} \exp\left\{-\frac{(y - \hat{\mu} + \hat{\sigma}\sqrt{\hat{\omega}}(X_t))^2}{2(\hat{\sigma}\sqrt{1 - \hat{\omega}})^2}\right\} dy. \quad (4.12)$$

Tais estimativas da média condicional e da variância condicional são fundamentais para determinação do capital econômico descrito no Capítulo 7.

## 4.3 Estimação dos parâmetros para o modelo Normal

No modelo Normal, presente em (2.4), temos que a distribuição da LGD condicionada ao fator de risco no ano  $t$ ,  $X_t$ , segue uma distribuição normal, isto é

$$L_{jt}|X_t \sim N(\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t, \sigma^2(1 - \omega)).$$

Supondo disponível uma base de dados,  $L_{1t}, \dots, L_{N_t t}$ , para um específico ano  $t$ , a função log-verossimilhança para  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\omega$ , condicionada a  $X_t$ , é definida como

$$l_t(\mu, \sigma, \omega; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t) = \sum_{j=1}^{N_t} \ln \left( \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2(1-\omega)}} \exp \left( -\frac{(L_{jt} - \mu - \sigma\sqrt{\omega}X_t)^2}{2\sigma^2(1-\omega)} \right) \right).$$

Assumindo independência de ano para ano, a função log-verossimilhança envolvendo todos os anos é definida como

$$l(\mu, \sigma, \omega; \mathbf{L}, N_1, \dots, N_T) = \sum_{t=1}^T l_t(\mu, \sigma, \omega; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t), \quad (4.13)$$

sendo  $\mathbf{L} = (L_{11}, \dots, L_{N_1 1}, \dots, L_{1T}, \dots, L_{N_T T})$  os dados disponíveis das LGD individuais referentes a todos os anos.

Pelo fato do modelo ser não identificável, novamente determinamos  $\hat{\sigma}_{hist}$  como aproximação da volatilidade e então podemos encontrar os estimadores de máxima verossimilhança dos demais parâmetros. Por se tratar do modelo Normal,  $\hat{\sigma}_{hist}$  é calculado diretamente por

$$\hat{\sigma}_{hist} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_t} \left( L_{jt} - \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_t} L_{jt}}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2}{\sum_{t=1}^T N_t - 1}}. \quad (4.14)$$

As soluções analíticas para  $\mu$  e  $\omega$  são dadas respectivamente por (4.8) e (4.9) substituindo  $\ln \frac{L_{jt}}{1-L_{jt}}$  por  $L_{jt}$ .

Ou seja,  $\hat{\mu}$  é dado por

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^T \left( \sum_{j=1}^{N_t} L_{jt} - N_t \hat{\sigma}_{hist} \sqrt{\omega} X_t \right)}{\sum_{t=1}^T N_t},$$

e, novamente, a estimação do parâmetro  $\hat{\omega}$  é dada pela segunda potência da solução da equação polinomial

$$z^3 - s_{x,\bar{r}} z^2 - (1 - s_x^2 - s_r^2) z = s_{x,\bar{r}},$$

sendo  $s_{x,\bar{r}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_t} L_{jt} - N_t \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_{hist}} \right)$ ,  $s_x^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T N_t X_t^2$  e

$$s_r^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_t} L_{jt} - N_t \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_{hist}} \right)^2.$$

### 4.3.1 Estimador da Esperança e Variância Condicional

Como a distribuição condicional de  $L_{jt}$  dado  $X_t$  é uma Normal com parâmetros  $\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$  e  $\sigma^2(1 - \omega)$ , o estimador da esperança condicional,  $\hat{E}[L_{jt}|X_t]$ , e da variância condicional,  $\hat{Var}[L_{jt}|X_t]$ , utilizando os estimadores de máxima verossimilhança para  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\omega$ , são dados respectivamente por

$$\hat{E}[L_{jt}|X_t] = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\sqrt{\hat{\omega}}X_t. \quad (4.15)$$

e

$$\hat{Var}[L_{jt}|X_t] = \hat{\sigma}^2(1 - \hat{\omega}). \quad (4.16)$$

## 4.4 Estimação dos parâmetros para o modelo Log-Normal

Como a distribuição condicional de  $L_{jt}$  dado  $X_t$  segue distribuição Log-Normal, vimos na seção (2.3) que  $L_{jt}$ , condicionada ao fator de risco sistemático,  $X_t$ , segue  $LogN(\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t, \sigma^2(1 - \omega))$ . Analogamente ao caso da Normal, temos que a função log-verossimilhança para  $\mu$ ,  $\sigma$  e  $\omega$ , condicionada a  $X_t$  é definida como

$$\begin{aligned} l_t(\mu, \sigma, \omega; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t) = \\ = \sum_{j=1}^{N_t} \ln \left( \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2(1-\omega)L_{jt}^2}} \exp \left( -\frac{(\ln(L_{jt}) - \mu - \sigma\sqrt{\omega}X_t)^2}{2\sigma^2(1-\omega)} \right) \right). \end{aligned}$$

Assumindo independência de ano para ano, a função log-verossimilhança, envolvendo todos os anos, é definida como

$$l(\mu, \sigma, \omega; \mathbf{L}, N_1, \dots, N_T) = \sum_{t=1}^T l_t(\mu, \sigma, \omega; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t), \quad (4.17)$$

sendo  $\mathbf{L} = (L_{11}, \dots, L_{N_1 1}, \dots, L_{1T}, \dots, L_{N_T T})$  o conjunto de dados disponíveis.

Novamente determinando  $\hat{\sigma}_{hist}$  pela volatilidade histórica dos dados transformados por  $\ln(L_{jt})$ , temos

$$\hat{\sigma}_{hist} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_t} \left( \ln(L_{jt}) - \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{N_t} \ln(L_{jt})}{\sum_{t=1}^T N_t} \right)^2}{\sum_{t=1}^T N_t - 1}}. \quad (4.18)$$



Posteriormente, determinamos os estimadores de máxima verossimilhança para  $\mu$  e  $\omega$  através das expressões (4.8) e (4.9), substituindo  $\ln\left(\frac{L_{jt}}{1-L_{jt}}\right)$  por  $\ln(L_{jt})$ . Ou seja

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^T \left( \sum_{j=1}^{N_t} \ln(L_{jt}) - N_t \hat{\sigma}_{hist} \sqrt{\omega} X_t \right)}{\sum_{t=1}^T N_t},$$

e, novamente, a estimação do parâmetro  $\omega$  é dada pela segunda potência da solução da equação polinomial

$$z^3 - s_{x,\bar{r}} z^2 - (1 - s_x^2 - s_r^2) z = s_{x,\bar{r}},$$

sendo  $s_{x,\bar{r}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_t} \ln(L_{jt}) - N_t \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_{hist}} \right)$ ,  $s_x^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T N_t X_t^2$  e

$$s_r^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\sum_{j=1}^{N_t} \ln(L_{jt}) - N_t \hat{\mu}}{\hat{\sigma}_{hist}} \right)^2.$$

#### 4.4.1 Estimador da Esperança e Variância Condicional

A distribuição condicional de  $L_{jt}$  dado  $X_t$  é uma Log-Normal com parâmetros  $\mu + \sigma \sqrt{\omega} (X_t)$  e  $(\sigma \sqrt{1-w})^2$ . Novamente utilizando os estimadores de máxima verossimilhança podemos determinar o estimador dessa esperança condicional através de

$$\hat{E}[L_{jt}|X_t] = \exp\left(\hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t + \frac{(\hat{\sigma} \sqrt{1-\hat{\omega}})^2}{2}\right). \quad (4.19)$$

Sabemos que, se  $Y \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2)$  então

$$\text{Var}(Y) = \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1).$$

Deste modo, o estimador da variância condicional de  $L_{jt}$  dado  $X_t$  é

$$\hat{\text{Var}}(L_j|X_t) = \exp\left(2\left(\hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t\right) + (\hat{\sigma} \sqrt{1-\hat{\omega}})^2\right) \left(\exp\left(\left(\hat{\sigma} \sqrt{1-\hat{\omega}}\right)^2\right) - 1\right). \quad (4.20)$$

# Capítulo 5

## Regressão Beta

A incerteza sobre o valor real da LGD constitui um recurso de risco de crédito nos portfólios, além do risco de *default*. As taxas incertas de LGD, que é a perda considerando que o devedor entrou em *default*, são aqui assumidas como sendo variáveis aleatórias seguindo uma distribuição Beta.

A distribuição Beta é conhecida por ser muito flexível, modelando quantidades concentradas no intervalo  $(0,1)$  e, dependendo da escolha dos parâmetros, a função densidade de probabilidade pode ser unimodal, formato U, formato J ou uniforme.

Sabemos que a LGD está correlacionada positivamente com as taxas de *default*, ou seja, a LGD é maior quando as taxas de *default* são altas, o que nos sugere que o risco sistemático também esteja presente na LGD.

Neste capítulo utilizamos o modelo de Regressão Beta (RB) para prever LGD, com a média e o parâmetro de dispersão modelados conjuntamente. Modelar o parâmetro de dispersão pode ser interessante uma vez que fatores como o risco sistemático podem influenciar tanto nas médias de recuperação como na sua variância e, conseqüentemente, na sua dispersão.

## 5.1 Reparametrização da Distribuição Beta

Como já mostrado nos capítulos anteriores, a LGD pode ser modelada por diferentes distribuições, Normal, Log-Normal, Logit-Normal. O modelo proposto por Huang & Oosterlee (2008) baseia-se no fato que a variável resposta, LGD, é proveniente de uma distribuição Beta.

A função densidade de probabilidade da distribuição Beta com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  é definida como

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1},$$

com  $\Gamma(\alpha)$  sendo a função gama avaliada no ponto  $\alpha$ , isto é

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

A esperança e a variância de uma variável  $Y$  seguindo distribuição Beta são dadas por

$$E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$Var(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}.$$

A proposta do modelo de Regressão Beta (Ferrari & Cribari-Neto (2004)) é utilizar a distribuição Beta reparametrizada pela média e um parâmetro de dispersão. Uma das vantagens da reparametrização do modelo Beta é que nesse caso os parâmetros do modelo possuem uma simples interpretação econômica.

Considerando a reparametrização

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad e \quad \varphi = \alpha + \beta,$$

a média e a variância de  $Y$  são dadas respectivamente por

$$E(Y) = \mu$$

e

$$Var(Y) = \frac{\mu(1-\mu)}{\varphi + 1}.$$

O parâmetro  $\varphi$  pode ser interpretado como a dispersão, no sentido de, para um dado  $\mu$ , a variância é determinada pelo tamanho de  $\varphi$ . Além disso, notamos que a dispersão da distribuição, para um  $\mu$  fixo, decresce conforme  $\varphi$  cresce.

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser formulados em termos da média e da dispersão como

$$\alpha = \mu\varphi \quad e \quad \beta = (1 - \mu)\varphi.$$

A densidade de  $Y$  pode então ser reescrita da forma

$$f(y; \mu, \varphi) = \frac{\Gamma(\varphi)}{\Gamma(\mu\varphi)\Gamma((1-\mu)\varphi)} y^{\mu\varphi-1} (1-y)^{(1-\mu)\varphi-1}. \quad (5.1)$$

com  $0 < \mu < 1$  e  $\varphi > 0$ .

Em particular a distribuição beta pode ser simétrica (quando  $\mu = 1/2$ ) ou assimétrica (quando  $\mu \neq 1/2$ ).

## 5.2 Modelo de Regressão Beta

Em muitas situações práticas é comum que os parâmetros do modelo sejam funções de outros parâmetros e de covariáveis. No caso da variável explicativa  $Y$  ser a LGD, por exemplo, os parâmetros  $\mu$  e  $\varphi$  podem depender do estado da economia.

A Regressão Beta é então caracterizada, Huang & Oosterlee (2008), pelos seguintes aspectos:

1. A variável resposta, no nosso caso a LGD, é assumida ter, condicionada a algumas covariáveis, uma distribuição Beta.
2. A distribuição Beta é parametrizada pela sua média e pelo seu parâmetro de dispersão, ao invés dos parâmetros naturais. Usaremos a notação  $Beta(\mu, \varphi)$ .

O modelo básico de RB pode ser estendido de várias maneiras. A extensão mais simples é modelar a média  $\mu$  considerando o parâmetro de dispersão  $\varphi$  como um parâmetro perturbador, isto é, a dispersão é fixa ou conhecida.

Outra extensão do modelo, a qual será analisada, é modelar a média e o parâmetro de dispersão conjuntamente, ao invés de tratar o parâmetro de dispersão  $\varphi$  como um parâmetro perturbador.

Neste trabalho estendemos o modelo proposto por Ferrari & Cribari-Neto (2004), modelando a média e o parâmetro de dispersão conjuntamente. Denominaremos esse modelo, também, de Regressão Beta. Posteriormente a metodologia desenvolvida é adaptada para nosso caso específico, a LGD.

Sejam  $Y_1, \dots, Y_T$  variáveis aleatórias independentes, tal que cada  $Y_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , tenha distribuição  $Beta(\mu_t, \varphi_t)$ , como em (5.1). A média  $\mu_t$  é ligada ao preditor linear  $\eta_t$  através da função de ligação, monotônica e diferenciável  $g(\mu_t) = \eta_t$ , isto é

$$g(\mu_t) = \sum_{j=0}^p \beta_j x_{tj} = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp} = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\beta} = \eta_t,$$

sendo  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^T$  um vetor que corresponde aos coeficientes da regressão e  $\mathbf{x}'_t = (1, x_{t1}, \dots, x_{tp})$  o  $t$ -ésimo vetor de observações com as  $p$  covariáveis ( $p < n$ ). Por conveniência o primeiro elemento de  $\mathbf{x}'_t$  é 1, assim o primeiro termo de  $\boldsymbol{\beta}$  é o intercepto  $\beta_0$ .

Em particular, o inverso da função de ligação  $g^{-1}(\cdot)$  é uma função dos reais em  $(0, 1)$ , o espaço de  $\mu_t$ . Tal função de ligação pode assumir diferentes formas como, por exemplo, a ligação logit

$$\eta_t = \log \left( \frac{\mu_t}{1 - \mu_t} \right)$$

ou ligação probit

$$\eta_t = \Phi^{-1}(\mu_t).$$

Ambas as funções de ligação, logit e probit, possuem forma simétrica quando  $\mu = 1/2$ .

Nesse estudo utilizaremos a função de ligação logit. Ou seja, para  $p$  covariáveis

$$\mu_t = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}. \quad (5.2)$$

De forma similar, supomos que o parâmetro de dispersão  $\varphi_t$  pode ser ligado à um conjunto de  $q$  covariáveis, através da função de ligação monotônica e diferenciável,  $h(\varphi_t) = \tau_t$ , ou seja

$$h(\varphi_t) = \sum_{j=0}^q \alpha_j z_{tj} = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \cdots + \alpha_q z_{tq} = \mathbf{z}'_t \boldsymbol{\alpha} = \tau_t,$$

sendo  $\mathbf{z}'_t = (1, z_{t1}, \dots, z_{tq})$  um vetor de variáveis explicativas e  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)^T$  um vetor que corresponde aos coeficientes da regressão.

O inverso da função de ligação  $h^{-1}(\varphi_t)$ , nesse caso, é uma função dos reais em  $(0, \infty)$ , o qual é exatamente o espaço de  $\varphi_t$ . Uma maneira simples de garantir que  $\varphi_t > 0$  é usar a função de ligação exponencial  $h(\varphi_t)$  dada por

$$\varphi_t = e^{\tau_t}, \quad \tau_t = \log(\varphi_t),$$

isto é, para  $q$  covariáveis

$$\varphi_t = e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \cdots + \alpha_q z_{tq}}. \quad (5.3)$$

### 5.3 Função de Verossimilhança

A estimação dos coeficientes da Regressão Beta pode ser feita através do método de máxima verossimilhança, em que os estimadores são obtidos a partir da maximização da função de verossimilhança.

Sejam  $y_1, \dots, y_T$  realizações das variáveis aleatórias  $Y_1, \dots, Y_T$ , com  $Y_t$  tendo função densidade como em (5.1), com parâmetros  $\mu_t$  e  $\varphi_t$ . A função de verossimilhança para  $\mu_t$  e  $\varphi_t$ , correspondente à tal amostra, é dada por

$$L(\mu_t, \varphi_t) = \prod_{t=1}^T \frac{\Gamma(\varphi_t)}{\Gamma(\mu_t \varphi_t) \Gamma((1 - \mu_t) \varphi_t)} y_t^{\mu_t \varphi_t - 1} (1 - y_t)^{(1 - \mu_t) \varphi_t - 1}.$$

Aplicando o logaritmo natural na função obtemos

$$\begin{aligned} l(\mu_t, \varphi_t) &= \sum_{t=1}^T (\mu_t \varphi_t - 1) \log(y_t) + [(1 - \mu_t) \varphi_t - 1] \log(1 - y_t) \\ &\quad + \log \Gamma(\varphi_t) - \log \Gamma(\mu_t \varphi_t) - \log \Gamma[(1 - \mu_t) \varphi_t]. \end{aligned}$$

Substituindo as funções apresentadas em (5.2) e (5.3) no log da verossimilhança, temos

$$\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = & \sum_{t=1}^T \left( \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}} - 1 \right) \log(y_t) + \\
& + \left[ \left( 1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}} \right) e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}} - 1 \right] \log(1 - y_t) \\
& + \log \Gamma(e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}}) - \log \Gamma \left( \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}} \right) - \\
& - \log \Gamma \left[ \left( 1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}} \right) e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}} \right].
\end{aligned}$$

As equações de máxima verossimilhança são obtidas derivando  $l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$  em relação a cada parâmetro e igualando o resultado a zero. Entretanto, tais equações não possuem soluções analíticas explícitas. Neste caso, os estimadores de máxima verossimilhança são obtidos por meio de métodos numéricos de maximização. A função score e a matriz informação de Fisher são apresentadas na segunda seção do Apêndice A.

## 5.4 Variável LGD

Para o nosso caso específico, sendo a variável resposta a LGD, consideramos o vetor de covariáveis dado por  $\mathbf{x}'_t = \mathbf{z}'_t = (1, X_t)$ , com  $X_t$  representando o fator de risco sistemático, fator comum que guia a probabilidade de *default*.

Sejam  $L_{1t}, \dots, L_{N_t t}$  variáveis aleatórias independentes, tal que cada  $L_{jt}$  segue distribuição  $Beta(\mu_t, \varphi_t)$ , como em (5.1), com  $L_{jt}$  descrevendo a LGD do indivíduo  $j$  no ano  $t$ . Utilizando o modelo descrito nas seções anteriores, os parâmetros  $\mu_t$  e  $\varphi_t$  podem ser escritos como

$$\mu_t = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}, \quad (5.4)$$

e

$$\varphi_t = e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t}. \quad (5.5)$$

A seguir apresentamos brevemente a estimação dos parâmetros através do método de máxima verossimilhança

### 5.4.1 Máxima Verossimilhança

Assumindo independência entre os  $N_t$  indivíduos em um ano  $t$ , o log da função de verossimilhança é dado por

$$l_t(\mu_t, \varphi_t; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t) = \sum_{j=1}^{N_t} (\mu_t \varphi_t - 1) \log(L_{jt}) + [(1 - \mu_t) \varphi_t - 1] \log(1 - L_{jt}) \\ + \log \Gamma(\varphi_t) - \log \Gamma(\mu_t \varphi_t) - \log \Gamma[(1 - \mu_t) \varphi_t].$$

Substituindo  $\mu_t$  e  $\varphi_t$  pelas funções em (5.4) e (5.5),

$$l_t(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t) = \sum_{j=1}^{N_t} \left( \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} - 1 \right) \log(L_{jt}) + \\ + \left[ \left( 1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} \right) e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} - 1 \right] \log(1 - L_{jt}) + \log \Gamma(e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t}) - \\ - \log \Gamma \left( \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \right) - \log \Gamma \left[ \left( 1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} \right) e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \right].$$

Como mencionado anteriormente, todas as informações de um dado ano são independentes de ano para ano. Além disso, as informações de um ano são formadas por indivíduos sem nenhuma ligação com os indivíduos de outros anos.

Assumindo independência de ano para ano, a função log-verossimilhança envolvendo todos os anos é definida como

$$l(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1) = \sum_{t=1}^T l_t(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, N_t). \quad (5.6)$$

Derivando  $l(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1)$  em relação a cada parâmetro e igualando o resultado a zero obtemos as equações de máxima verossimilhança. Novamente, tais equações não possuem soluções analíticas explícitas. Neste caso, os estimadores de máxima verossimilhança são obtidos por meio de métodos numéricos de maximização como já descrito anteriormente.

Posteriormente, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros serão comparadas com as estimativas bayesianas, apresentadas no capítulo a seguir.



### 5.4.2 Estimador da Esperança e da Variância Condicional

Usando os estimadores de máxima verossimilhança de  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ , dados respectivamente por  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$ ,  $\hat{\alpha}_0$  e  $\hat{\alpha}_1$ , temos o estimador da esperança condicional dado por

$$\hat{E}[L_{jt}|X_t] = \hat{\mu}_t = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}, \quad (5.7)$$

e o estimador da variância condicional dado por

$$\hat{Var}(L_j|X_t) = \frac{\hat{\mu}_t(1 - \hat{\mu}_t)}{(1 + \hat{\varphi}_t)} = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}} \left(1 - \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}\right). \quad (5.8)$$

Tais estimativas da esperança e da variância condicional são utilizadas no Capítulo 7 para determinar capital econômico.

# Capítulo 6

## Modelo de Regressão Beta sobre Enfoque Bayesiano

### 6.1 Abordagem Bayesiana do Modelo

Neste capítulo propomos uma abordagem bayesiana para o modelo de Regressão Beta modelando a média  $\mu_t$  e o parâmetro de dispersão  $\varphi_t$  conjuntamente.

A análise bayesiana consiste de métodos inferenciais que podem melhorar a precisão das estimativas, incorporando ao modelo informações prévias a respeito dos parâmetros de interesse. Na abordagem bayesiana, os parâmetros são variáveis aleatórias, seguindo distribuições a priori que podem ser não informativas ou informativas.

Combinando tais distribuições a priori com a função de verossimilhança podemos encontrar, através da utilização do teorema de Bayes, a distribuição a posteriori para os parâmetros. Na análise bayesiana toda inferência é baseada nesta distribuição a posteriori. Em muitos casos, pode-se obter posterioris que possuem integrais intratáveis analiticamente. Nestes casos, utilizamos, métodos de aproximação, tais como, Metropolis, Metropolis-Hasting, Gibbs Sampling, Gibbs com Metropolis, entre outros. Através destes métodos podemos gerar amostras da distribuição de interesse fornecendo assim suas características.

Posteriormente descrevemos o modelo bayesiano para o caso da variável LGD.

## 6.2 Posteriori

Sejam as variáveis aleatórias  $Y_1, \dots, Y_T$  tal que cada  $Y_t$  tenha uma distribuição  $Beta(\mu_t, \varphi_t)$ ,  $\mu_t$  e  $\varphi_t$  dados pelas expressões (5.2) e (5.3) respectivamente.

A função de verossimilhança para  $\mu_1, \dots, \mu_T, \varphi_1, \dots, \varphi_T$  é dada por

$$L(\mu_1, \dots, \mu_T, \varphi_1, \dots, \varphi_T; y_1, \dots, y_T) = \prod_{t=1}^T f(\mu_t, \varphi_t; y_t)$$

com a função de densidade  $f(\mu_t, \varphi_t; y_t)$  como em (5.1). Desta forma

$$\begin{aligned} L(\mu_1, \dots, \mu_T, \varphi_1, \dots, \varphi_T; y_1, \dots, y_T) &= \prod_{t=1}^T [\Gamma(\varphi_t)] \times \left[ \prod_{t=1}^T [\Gamma(\mu_t \varphi_t)] \right]^{-1} \\ &\times \left[ \prod_{t=1}^T [\Gamma(\varphi_t (1 - \mu_t))] \right]^{-1} \times \prod_{t=1}^T [y_t^{\mu_t \varphi_t - 1}] \times \prod_{t=1}^T [(1 - y_t)^{\varphi_t (1 - \mu_t) - 1}]. \end{aligned}$$

Utilizando (5.2) e (5.3), temos

$$\begin{aligned} &L(\mu_1, \dots, \mu_T, \varphi_1, \dots, \varphi_T; y_1, \dots, y_T, \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) = \\ &= \prod_{t=1}^T [\Gamma(e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}})] \times \left[ \prod_{t=1}^T \left[ \Gamma \left( \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}} \right) \right] \right]^{-1} \\ &\times \left[ \prod_{t=1}^T \left[ \Gamma \left( e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}} \left( 1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}} \right) \right) \right] \right]^{-1} \\ &\quad \times \prod_{t=1}^T \left[ y_t^{\left( \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}} - 1 \right)} \right] \\ &\quad \times \prod_{t=1}^T \left[ (1 - y_t)^{\left[ e^{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t1} + \dots + \alpha_q z_{tq}} \left( 1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_p x_{tp}}} \right) - 1 \right]} \right], \end{aligned} \quad (6.1)$$

com  $\mathbf{x}'_t = (1, x_{t1}, \dots, x_{tp})$  e  $\mathbf{z}'_t = (1, z_{t1}, \dots, z_{tq})$ .

Sejam  $\pi(\beta_0), \pi(\beta_1), \dots, \pi(\beta_p)$  e  $\pi(\alpha_0), \pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_q)$ , as prioris dos coeficientes da regressão. Combinando essas prioris com a verossimilhança em

(6.1), a posteriori para  $\beta_0, \dots, \beta_p, \alpha_0, \dots, \alpha_q$  pode ser escrita como

$$\pi(\beta_0, \dots, \beta_p, \alpha_0, \dots, \alpha_q | y_1, \dots, y_T, \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) \propto$$

$$L(\mu_1, \dots, \mu_T, \varphi_1, \dots, \varphi_T; y_1, \dots, y_T, \mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) \pi(\beta_0) \dots \pi(\beta_p) \pi(\alpha_0) \dots \pi(\alpha_q).$$

Na maioria dos casos gerar amostras de tal distribuição não é algo simples uma vez que tal distribuição pode não pertencer a nenhuma família de distribuições conhecidas. Nessas situações utilizam procedimentos Monte Carlo em Cadeias de Markov (MCMC) como, por exemplo, o método Metropolis-Hastings. As estimativas são dadas pelas médias das cadeias geradas a partir da distribuição a posteriori de cada parâmetro do modelo, obtidas via método MCMC.

### 6.3 Variável LGD

Para a variável resposta LGD, sejam  $\mathbf{x}_t$  e  $\mathbf{z}_t$  vetores de covariáveis tais que  $\mathbf{x}'_t = \mathbf{z}'_t = (1, X_t)$ , com  $X_t$  representando o fator de risco sistemático. Sejam  $L_{1t}, \dots, L_{N_t t}$ , variáveis aleatórias independentes, correspondente as LGD dos  $N_t$  indivíduos para o específico ano  $t$ , tal que cada  $L_{jt}$  segue distribuição *Beta*  $(\mu_t, \varphi_t)$ ,  $j = 1, \dots, N_t$  e  $t = 1, 2, \dots, T$ .

A função de verossimilhança para esse específico ano  $t$  é definida como

$$L_t(\mu_t, \varphi_t; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}) = \prod_{j=1}^{N_t} \left[ [\Gamma(\varphi_t)] [\Gamma(\mu_t \varphi_t)]^{-1} \times [\Gamma(\varphi_t (1 - \mu_t))]^{-1} \times [L_{jt}^{(\mu_t \varphi_t - 1)}] \times [(1 - L_{jt})^{\varphi_t (1 - \mu_t) - 1}] \right].$$

Utilizando (5.4) e (5.5), temos

$$L_t(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, X_t) = \prod_{j=1}^{N_t} [\Gamma(e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t})] \\ \times \left[ \Gamma \left( \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \right) \right]^{-1} \times \left[ \Gamma \left( e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \left( 1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} \right) \right) \right]^{-1} \\ \times \left[ L_{jt}^{\left( \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} - 1 \right)} \right] \left[ (1 - L_{jt})^{\left[ e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \left( 1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} \right) - 1 \right]} \right].$$

Como as informações de um ano para outro são consideradas independentes, a função verossimilhança envolvendo todos os anos é definida como

$$L(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1; \mathbf{L}, X_1, \dots, X_T) = \prod_{t=1}^T L_t(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1; L_{1t}, \dots, L_{N_t t}, X_1, \dots, X_T),$$

sendo  $\mathbf{L} = (L_{11}, \dots, L_{N_1 1}, \dots, L_{1T}, \dots, L_{N_T T})$  os dados disponíveis das LGD individuais referentes a todos os anos.

Considerando as prioris  $\pi(\beta_0)$ ,  $\pi(\beta_1)$ ,  $\pi(\alpha_0)$  e  $\pi(\alpha_1)$  para os parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  respectivamente, temos que a posteriori é proporcional à

$$\pi(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1 | \mathbf{L}, X_1, \dots, X_T) \propto$$

$$L(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1; \mathbf{L}, X_1, \dots, X_T) \pi(\beta_0) \pi(\beta_1) \pi(\alpha_0) \pi(\alpha_1).$$

Tais estimativas são utilizadas posteriormente para determinação do capital econômico.

# Capítulo 7

## Capital econômico

Os empréstimos bancários estão sujeitos a dois tipos de risco: o risco específico de cada devedor, o qual pode ser controlado ou mesmo neutralizado se considerarmos um portfólio diversificado, e o risco sistemático.

O capital econômico é entendido como a quantia necessária que se deve ter reservado caso ocorra uma crise econômica e pode depender tanto do risco sistemático quanto do risco específico, dependendo do portfólio que se considere. O capital econômico é definido como o  $q$ -percentil da distribuição da perda.

A presença do risco sistemático influencia na perda por duas direções, primeiramente aumentando a frequência de *default*, e, em seguida, pelas altas taxas de perda no evento de *default*. Ambos os aspectos devem ser levados em consideração quando o capital econômico for calculado.

Neste capítulo apresentamos duas formas de calcular o capital econômico. A primeira forma, a aproximação assintótica, requer um portfólio grande e homogêneo. A segunda forma é aproximar a distribuição de perda para a distribuição normal.

### 7.1 Definição da Taxa Perda

Tipicamente, o risco de um empréstimo é descrito por dois parâmetros: a probabilidade de *default*,  $PD$ , e a esperança da LGD.

Considere um portfólio de empréstimos em um certo ano  $t$  com  $M$  devedores distintos. Suponha que cada devedor tenha um empréstimo no valor de  $w_j$ . Como queremos encontrar o capital econômico para o ano atual, usaremos a notação  $L_j$  ao invés de  $L_{jt}$  para simplificar a notação.

A perda do devedor  $j$ ,  $Loss_j$ , pode ser expressa como

$$Loss_j = w_j D_j L_j,$$

com  $D_j$  definido como em (2.2). Neste caso,  $D_j$  depende de  $X_t$  e  $\xi_j$ , e  $L_j$  depende de  $X_t$  e  $Z_j$  sendo  $\xi_j$  o risco específico do valor ativo do indivíduo  $j$  e  $Z_j$  o fator específico do indivíduo em *default*  $j$ . Assim, condicionando a certa realização de  $X_t$ , o evento de *default*,  $D_j$ , e a LGD,  $L_j$ , são independentes. Portanto

$$E [Loss_j | X_t] = w_j E [D_j | X_t] E [L_j | X_t].$$

Como vimos, a perda esperada para um empréstimo, condicionada a  $X_t$ , é dada pelo produto do valor total do empréstimo,  $w_j$ , pela esperança condicional do evento *default*, dado o estado da economia,  $E [D_j | X_t]$  e pela esperança do percentual de exposição que não será recuperado, condicionada a  $X_t$ ,  $E [L_j | X_t]$ .

Definimos o peso de cada empréstimo dentro do portfólio,  $B_j$ , como sendo a fração do empréstimo sobre o total principal do portfólio, ou seja

$$B_j = \frac{w_j}{\sum_{j=1}^M w_j}.$$

Finalmente, a taxa de perda do portfólio para o ano atual,  $Loss_M$ , pode ser escrita como a média das perdas individuais  $Loss_j$  ponderadas pelos valores dos empréstimos  $w_j$ , isto é

$$Loss_M = \sum_{j=1}^M \frac{Loss_j}{\sum_{j=1}^M w_j} = \sum_{j=1}^M B_j D_j L_j = \sum_{j=1}^M \frac{w_j}{\sum_{j=1}^M w_j} D_j L_j.$$

## 7.2 Aproximação Assintótica para Distribuição da Taxa de Perda

Infelizmente, a distribuição da taxa de perda não é analiticamente tratável para qualquer portfólio (Pykhtin (2003)). Entretanto, no caso de um grande

número  $M$  de devedores existe uma enorme simplificação na distribuição da taxa de perda se não há nenhuma exposição individual exagerada. Intuitivamente, tal portfólio é muito diversificado, o que essencialmente elimina o risco específico.

Pode-se mostrar que a distribuição da taxa de perda do portfólio tem uma forma limite quando  $M \rightarrow \infty$  (Vasicek (1991) e Vasicek (2002)). Tal limite é dado pela esperança da perda condicionada ao fator de risco sistemático, ou seja,  $Loss_M \rightarrow E[Loss_M|X_t]$  quando  $M \rightarrow \infty$ . Descrevemos a seguir, de maneira breve, as hipóteses necessárias e os teoremas utilizados para demonstrar tal fato. (para maiores informações ver Gordy (2003)).

Para que tal convergência ocorra, assumimos que

1.  $D_j L_j$  seja limitado no intervalo unitário e, condicionado ao fator sistemático  $X_t$ ,  $D_j$  e  $L_j$  são independentes entre si.
2.  $\{w_j\}$  é uma sequência de constantes positivas tal que (a)  $\sum_{j=1}^M w_j \rightarrow \infty$  e (b) existe  $\epsilon > 0$  tal que  $w_j / \sum_{j=1}^M w_j = O(M^{-(1/2+\epsilon)})$ .

O item (1) é garantido uma vez que a variável  $D_j$  é 0 ou 1 e o  $L_j$  esta no intervalo  $(0, 1)$ . Como já dissemos anteriormente, condicionando ao fator  $X_t$  os indivíduos se tornam independentes entre si.

As restrições em (2) são suficientes para garantir que a maior parte das exposições individuais convergem para zero com o aumento do número de indivíduos na carteira e, conseqüentemente do valor total de empréstimos. Na prática, tais restrições são facilmente satisfeitas por qualquer carteira de grandes instituições financeiras. Por exemplo, tal fato é satisfeito se todos os  $w_j$  forem limitados inferiormente por uma dimensão mínima e limitados superiormente por um valor máximo.

A primeira proposição é que, sob condições bastante gerais, a distribuição de  $Loss_M$  degenera para sua esperança condicional quando  $M \rightarrow \infty$ . Mais formalmente, pode-se mostrar que

**Proposição 1.** Se (1) e (2) são satisfeitos, condicionando em  $X_t$ ,

$$Loss_M \rightarrow E[Loss_M|X_t],$$



quase certamente.

**Proposição 2.** Se (1) e (2) são satisfeitos então

$$\text{Var} [Loss_M] \rightarrow \text{Var} [E [Loss_M|X_t]].$$

E o resultado mais importante, em essência, é que para qualquer  $q$  pertencente ao intervalo  $(0, 1)$ , o  $q$ -ésimo quantil,  $\alpha_q$ , da distribuição de perda incondicional se aproxima do  $q$ -ésimo quantil da distribuição de  $E [Loss_M|X_t]$  quando  $M \rightarrow \infty$ . Ou seja

**Proposição 3.** Se (1) e (2) são satisfeitos então

$$\alpha_q (Loss_M) \rightarrow \alpha_q (E [Loss_M|X_t]),$$

quando  $M \rightarrow \infty$ , com  $\alpha_q (Y) = \inf \{y : P (Y \leq y) \geq q\}$ .

Os lemas necessários para provar tais fatos, que se baseiam principalmente na lei forte dos grandes números, são apresentados no Apêndice B. As provas desses resultados podem ser vistas em Gordy (2003).

Assim, para um número  $M$  grande de devedores, obtemos a taxa limite de perda,  $Loss_\infty$ , do portfólio

$$Loss_\infty = E [Loss_M|X_t] = E \left[ \sum_{j=1}^M Loss_j|X_t \right] = \sum_{j=1}^M E [Loss_j|X_t]$$

O capital econômico (CE) para o ano de interesse é calculado como o  $q$ -ésimo quantil da distribuição de perda do portfólio daquele ano. É importante ressaltar que a variável  $Loss_M$  é a taxa de perda, ou seja, é a perda total no portfólio dividido pelo total exposto no portfólio. Assim, o capital econômico é determinado pelo produto do  $q$ -ésimo quantil da distribuição de  $Loss_M$  (o  $Loss_\infty$  como definido acima), pela soma de  $w_j$ , valor total em exposição no portfólio. Denotamos de CE-1 o capital econômico calculado pela aproximação assintótica.

Uma vez que a taxa de perda é função monótona decrescente de  $X_t$ , o capital econômico pode ser obtido considerando  $(1 - q)$ -ésimo quantil da distribuição de  $X_t$ . Por exemplo, para  $q = 0,999$  o capital econômico é estimado

por

$$\begin{aligned} CE_1 &= \hat{E} [Loss_M | X_t = \Phi^{-1}(0, 001)] = \sum_{j=1}^M \hat{E} [Loss_j | X_t = \Phi^{-1}(0, 001)] = \\ &= \sum_{j=1}^M B_j \hat{E} [D_j | X_t = \Phi^{-1}(0, 001)] \hat{E} [L_j | X_t = \Phi^{-1}(0, 001)] \end{aligned}$$

ou seja

$$CE_1 = \sum_{j=1}^M B_j \hat{P}D_{-3,09} \hat{E}[L_j | X_t = -3, 09], \quad (7.1)$$

sendo  $B_j$  o peso de cada empréstimo dentro do portfólio,  $\hat{P}D_{-3,09}$  dado por

$$\begin{aligned} \hat{P}D_{-3,09} &= \hat{E} [D_j | X_t = \Phi^{-1}(0, 001)] = P \left[ A_j < \Phi^{-1}(\hat{P}D) | X_t = -3, 09 \right] = \\ &= \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(\hat{P}D) - \sqrt{\hat{p}}(-3, 09)}{\sqrt{1 - \hat{p}}} \right], \end{aligned}$$

e  $E[L_j | X_t = -3, 09]$  determinados pelas expressões (4.10), (4.15), (4.19) e (5.7) dependendo do modelo utilizado (ver seção (7.2.1)).

O montante a ser reservado é dado pelo produto CE-1 pelo total exposto  $\sum_{j=1}^M w_j$ .

### 7.2.1 Capital Econômico usando Aproximação Assintótica

A seguir determinamos a fórmula do capital econômico referente aos quatro modelos Normal, Log-Normal, Logit-Normal e o RB utilizando a aproximação assintótica.

#### Modelo Normal

Para o modelo Normal, considerando  $q = 0,999$ , o que implica  $X_t = \Phi^{-1}(0, 001)$ , ou seja  $X_t = -3, 09$ , a esperança condicional estimada  $\hat{E}[L_j | X_t = -3, 09]$  é dada por

$$\hat{E}[L_j | X_t = -3, 09] = \hat{E} \left[ \hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t + \hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}} Z_j | X_t = -3, 09 \right] = \hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}}(-3, 09),$$

Portanto, o capital econômico é calculado como

$$CE_1 = \sum_{j=1}^M B_j \hat{P}D_{-3,09} \hat{E}[L_j | X_t]$$

$$= \sum_{j=1}^M B_j \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(\hat{P}D) - \sqrt{\hat{p}}(-3, 09)}{\sqrt{1 - \hat{p}}} \right] \left( \hat{\mu} + \hat{\sigma}\sqrt{\hat{\omega}}(-3, 09) \right).$$

### Modelo Log-Normal

Para o modelo Log-Normal, similarmente ao caso Normal, considerando  $X_t = -3, 09$ , a esperança condicional estimada  $\hat{E}[L_j | X_t = -3, 09]$  é dada por

$$\hat{E}[L_j | X_t = -3, 09] = \exp \left( \hat{\mu} + \hat{\sigma}\sqrt{\hat{\omega}}(-3, 09) + \frac{(\hat{\sigma}\sqrt{1 - \hat{\omega}})^2}{2} \right).$$

Assim, o capital econômico é dado por

$$CE_1 = \sum_{j=1}^M B_j \hat{P}D_{-3,09} \hat{E}[L_j | X_t = -3, 09] =$$

$$= \sum_{j=1}^M B_j \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(\hat{P}D) - \sqrt{\hat{p}}(-3, 09)}{\sqrt{1 - \hat{p}}} \right] \exp \left( \hat{\mu} + \hat{\sigma}\sqrt{\hat{\omega}}(-3, 09) + \frac{(\hat{\sigma}\sqrt{1 - \hat{\omega}})^2}{2} \right).$$

### Modelo Logit-Normal

Para o modelo Logit-Normal, novamente, considerando  $X_t = -3, 09$ , a esperança condicional estimada

$$\hat{E}[L_j | X_t = -3, 09] = \hat{E} \left[ \frac{\exp(Y_j)}{1 + \exp(Y_j)} | X_t = -3, 09 \right].$$

Entretanto, para esta distribuição, o estimador para esperança condicional,  $\hat{E}[L_j | X_t]$ , não tem solução algébrica. Essa esperança é determinada através da solução numérica da integral abaixo

$$\hat{E}[L_j | X_t = -3, 09] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(y)}{1 + \exp(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\hat{\sigma}\sqrt{1 - \hat{\omega}})} \exp \left\{ -\frac{(y - \hat{\mu} + \hat{\sigma}\sqrt{\hat{\omega}}(-3, 09))^2}{2(\hat{\sigma}\sqrt{1 - \hat{\omega}})^2} \right\} dy.$$

Assim, o capital econômico pode ser encontrado por

$$CE_1 = \sum_{j=1}^M B_j \hat{P}D_{-3,09} \hat{E}[L_j | X_t = -3, 09]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^M B_j \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(\hat{P}D) - \sqrt{\hat{p}}(-3,09)}{\sqrt{1-\hat{p}}} \right] \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(y)}{1 + \exp(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\hat{\sigma}\sqrt{1-\hat{\omega}})} \exp \left\{ -\frac{(y - \hat{\mu} + \hat{\sigma}\sqrt{\hat{\omega}}(3.09))^2}{2(\hat{\sigma}\sqrt{1-\hat{\omega}})^2} \right\} dy.
\end{aligned}$$

## Modelo RB

Para o modelo RB, com  $X_t = -3,09$ , o estimador da esperança condicional estimada é dado por

$$\hat{E}[L_j|X_t = -3,09] = \hat{\mu}_t = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(-3,09)}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(-3,09)}},$$

logo, o capital econômico é pode ser encontrado por

$$\begin{aligned}
CE_1 &= \sum_{j=1}^M B_j \hat{P}D_{-3,09} \hat{E}[L_j|X_t = -3,09] \\
&= \sum_{j=1}^M B_j \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(\hat{P}D) - \sqrt{\hat{p}}(-3,09)}{\sqrt{1-\hat{p}}} \right] \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(-3,09)}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(-3,09)}}.
\end{aligned}$$

## 7.3 Aproximação Normal para Distribuição da Taxa de Perda

As aproximações assintóticas de Vasicek funcionam bem para as carteiras compostas por um número muito grande de devedores com pequenas exposições. Entretanto, não são adequadas e tendem a subestimar os riscos quando as carteiras possuem poucos devedores ou quando são dominadas por um pequeno número de grandes exposições.

Apresentamos neste capítulo uma outra forma de aproximar a distribuição de perda, através da distribuição normal, proposta por Huang *et al.* (2007).

A aproximação normal é uma aplicação direta do Teorema Central do Limite. Quando a carteira não é suficientemente grande para utilizarmos lei dos grandes números ou não é homogênea o suficiente, o risco específico de cada

devedor fica mais evidente. Nestes casos devemos levar em conta a variabilidade do portfólio de perda condicionado ao fator comum  $X_t$ .

Considere um portfólio com  $M$  devedores distintos. A perda total do portfólio é definida como

$$Loss_{total} = \sum_{j=1}^M Loss_j = \sum_{j=1}^M w_j D_j L_j, \quad (7.2)$$

sendo  $w_j$  a exposição de cada indivíduo. Observe que,  $Loss_M$  definido anteriormente é a taxa de perda no portfólio, enquanto que  $Loss_{total}$  é, de fato, o montante total perdido. Nesta aproximação pode-se utilizar tanto a perda total,  $Loss_{total}$ , quanto a taxa de perda,  $Loss_M$ .

Condicionando ao fator de risco sistemático  $X_t$ , a perda total da carteira,  $Loss_{total}$ , é normalmente distribuída com média  $M(X_t)$  e variância  $V^2(X_t)$ , tal que

$$\begin{aligned} M(X_t) &= E[Loss_{total}|X_t] \\ &= \sum_{j=1}^M w_j E[D_j|X_t] E[L_j|X_t] \\ &= \sum_{j=1}^M w_j PD_{X_t} E[L_j|X_t], \end{aligned} \quad (7.3)$$

sendo  $PD_{X_t}$  dado por

$$PD_{X_t} = \Phi \left[ \frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{p}(X_t)}{\sqrt{1-p}} \right],$$

e

$$\begin{aligned} V^2(X_t) &= Var[Loss_{total}|X_t] \\ &= Var \left[ \sum_{j=1}^M Loss_j | X_t \right] \\ &= \sum_{j=1}^M Var[Loss_j | X_t] \\ &= \sum_{j=1}^M E[Loss_j^2 | X_t] - \sum_{j=1}^M E[Loss_j | X_t]^2, \end{aligned}$$

sendo

$$E[Loss_j^2 | X_t] = w_j^2 E[D_j | X_t] E[L_j^2 | X_t]$$

$$\begin{aligned}
&= w_j^2 PD_{X_t} E [L_j^2 | X_t] \\
&= w_j^2 PD_{X_t} [E[L_j | X_t]^2 + Var (L_j | X_t)].
\end{aligned}$$

Portanto

$$V^2 (X_t) = \sum_{j=1}^M w_j^2 PD_{X_t} [E[L_j | X_t]^2 + Var (L_j | X_t)] - \sum_{j=1}^M w_j^2 PD_{X_t}^2 E[L_j | X_t]^2 \quad (7.4)$$

O complemento da acumulada condicional é então dada por

$$P (Loss_{total} > y | X_t) = 1 - \Phi \left( \frac{y - M (X_t)}{V (X_t)} \right) = \Phi \left( \frac{M (X_t) - y}{V (X_t)} \right),$$

e o complemento da acumulada não condicional é

$$\begin{aligned}
P (Loss_{total} > y) &= \int \Phi \left( \frac{M (X_t) - y}{V (X_t)} \right) f_{X_t} (x_t) dx_t \\
&= E_{X_t} \left[ \Phi \left( \frac{M (X_t) - y}{V (X_t)} \right) \right].
\end{aligned} \quad (7.5)$$

Como, por definição, o capital econômico para o ano de interesse, aqui denotado por CE-2, é calculado como o q-ésimo quantil da distribuição de perda do portfólio daquele ano, usando a equação (7.5) definimos o capital econômico através do complemento da acumulada não condicional

$$P (Loss_{total} > CE_2) = E_{X_t} \left[ \Phi \left( \frac{M (X_t) - CE_2}{V (X_t)} \right) \right] = 1 - q. \quad (7.6)$$

Notemos que para o cálculo do capital econômico através da expressão (7.6) é necessária a determinação de  $M (X_t) = E [Loss_{total} | X_t]$  e  $V^2 (X_t) = \sum_{j=1}^M E [Loss_j^2 | X_t] - \sum_{j=1}^M E [Loss_j | X_t]^2$ . Na subseção 7.3.1 desenvolvemos, para os quatro modelos considerados neste trabalho, a fórmula para capital econômico usando o complemento da cumulada não condicional (7.6).

### 7.3.1 Capital Econômico usando Aproximação Normal

Nesta seção desenvolvemos a fórmula do capital econômico para os quatro modelos, Normal, Log-Normal, Logit-Normal e RB, utilizando a aproximação Normal (Huang *et al.* (2007)).

## Modelo Normal

Para o modelo Normal, os estimadores da média  $M(X_t)$  e da variância  $V^2(X_t)$ , utilizando os estimadores da esperança e da variância condicional dados respectivamente em (4.15) e (4.16), são determinados como

$$\hat{M}(X_t) = \sum_{j=1}^M w_j \hat{P}D_{X_t} (\hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t) \quad (7.7)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{V}^2(X_t) &= \sum_{j=1}^M \hat{E}[L_j^2 | X_t] - \sum_{j=1}^M \hat{E}[L_j | X_t]^2 \\ &= \sum_{j=1}^M w_j^2 \hat{P}D_{X_t} \left[ \left( \hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t \right)^2 + \left( \hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}} \right)^2 \right] \\ &\quad - \sum_{j=1}^M \left( w_j \hat{P}D_{X_t} (\hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t) \right)^2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Assim, usando as expressões (7.6) e (7.5), temos a relação

$$P(Loss_{total} > CE_2) = \int \Phi \left( \frac{M(X_t) - CE_2}{V(X_t)} \right) f_{X_t}(x_t) dx_t = q,$$

e o capital econômico é determinado substituindo as expressões (7.7) e (7.8) na equação acima. Consequentemente, o valor de CE-2 é determinado num processo iterativo, atribuindo valores ao CE-2, resolvendo a integral e comparando ao valor de  $q$  de interesse. Esse processo continua até determinar o valor preciso de CE-2 cuja solução da integral (7.5) seja mais próximo possível de  $1 - q$ .

## Modelo Log-Normal

Para o modelo Log-Normal, utilizando o estimador da esperança condicional dado por (4.19), o estimador da média,  $\hat{M}(X_t)$ , é determinado por

$$\hat{M}(X_t) = \sum_{j=1}^M w_j \hat{P}D_{X_t} \exp \left( \hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t + \frac{(\hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}})^2}{2} \right). \quad (7.9)$$

Juntamente com o estimador da esperança condicional, utilizando o estimador da variância condicional dado por (7.10), o estimador da variância  $V^2(X_t)$  é dado por

$$\hat{V}^2(X_t) = \sum_{j=1}^M w_j^2 \hat{P}D_{X_t} \exp \left( \hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t + \frac{(\hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}})^2}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^M w_j^2 \hat{P}D_{X_t} \exp \left( 2 \left( \hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t \right) + \left( \hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}} \right)^2 \right) \left( \exp \left( \left( \hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}} \right)^2 \right) - 1 \right) \\
& - \sum_{j=1}^M \left( w_j^2 \hat{P}D_{X_t} \exp \left( \hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}} X_t + \frac{\left( \hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}} \right)^2}{2} \right) \right)^2. \quad (7.10)
\end{aligned}$$

Assim, usando as expressões (7.6) e (7.5), temos a relação

$$P(Loss_{total} > CE_2) = \int \Phi \left( \frac{M(X_t) - CE_2}{V(X_t)} \right) f_{X_t}(x_t) dx_t = 1 - q,$$

e o capital econômico é determinado substituindo as expressões (7.9) e (7.10) na equação acima. O valor de CE-2 é determinado da mesma forma como no modelo Normal, usando um processo numérico para solução da integral.

## Modelo Logit-Normal

Como já descrito anteriormente, para o modelo Logit-Normal, tanto a esperança como a variância não possuem uma forma fechada, sendo necessário métodos numéricos. Utilizando a expressão de  $\hat{E}[L_j|X_t]$  dada por (4.10), o estimador da média,  $\hat{M}(X_t)$ , é determinado por

$$\begin{aligned}
\hat{M}(X_t) &= \sum_{j=1}^M w_j \hat{P}D_{X_t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(y)}{1 + \exp(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi} (\hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}})} \\
&\quad \times \exp \left\{ - \frac{\left( y - \hat{\mu} + \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\omega}}(X_t) \right)^2}{2 \left( \hat{\sigma} \sqrt{1 - \hat{\omega}} \right)^2} \right\} dy. \quad (7.11)
\end{aligned}$$

O valor da variância estimada,  $\hat{V}^2(X_t)$ , é determinada substituindo as expressões do estimador da esperança condicional, (4.10), e do estimador da variância condicional, (4.12), na equação abaixo.

$$\hat{V}^2(X_t) = \sum_{j=1}^M w_j^2 \hat{P}D_{X_t} \left[ \hat{E}[L_j|X_t]^2 + \hat{V}ar(L_j|X_t) \right] - \sum_{j=1}^M \left( w_j \hat{P}D_{X_t} \hat{E}[L_j|X_t] \right)^2. \quad (7.12)$$

O capital econômico é determinado através de um processo numérico, substituindo as expressões (7.11) e (7.12) na integral abaixo

$$P(Loss_{total} > CE_2) = \int \Phi \left( \frac{M(X_t) - CE_2}{V(X_t)} \right) f_{X_t}(x_t) dx_t = 1 - q.$$



## Modelo RB

No Modelo de Regressão Beta temos

$$\hat{E}[L_j|X_t] = \hat{\mu}_t = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}},$$

e

$$\hat{V}ar(L_j|X_t) = \frac{\hat{\mu}_t(1 - \hat{\mu}_t)}{(1 + \hat{\varphi}_t)} = \frac{\frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}} \left(1 - \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}\right)}{(1 + e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_t})}.$$

A estimativa da média,  $\hat{M}(X_t)$ , é determinada por

$$\hat{M}(X_t) = \sum_{j=1}^M w_j \hat{P}D_{X_t} \left( \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}} \right), \quad (7.13)$$

e da variância,  $\hat{V}^2(X_t)$ , por

$$\begin{aligned} \hat{V}^2(X_t) = \sum_{j=1}^M w_j^2 \hat{P}D_{X_t} & \left[ \left( \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}} \right)^2 + \frac{\frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}} \left(1 - \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}\right)}{(1 + e^{\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_t})} \right] \\ & - \sum_{j=1}^M \left( w_j \hat{P}D_{X_t} \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t}} \right)^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

O capital econômico é determinado através de um processo numérico, substituindo as expressões (7.13) e (7.14) na integral abaixo

$$P(Loss_{total} > CE_2) = \int \Phi \left( \frac{M(X_t) - CE_2}{V(X_t)} \right) f_{X_t}(x_t) dx_t = 1 - q.$$

No capítulo seguinte, através de um estudo de simulação, estimamos os parâmetros de cada modelo necessários para determinação do capital econômico. No Capítulo 9, avaliamos os capitais econômicos e comparamos suas estimativas para cada modelo e entre as duas formas de determinação.

# Capítulo 8

## Estudo de Simulação

Iniciamos com uma descrição do procedimento de simulação dos dados e em seguida com as estimativas dos parâmetros do valor ativo  $p$  e  $PD$ . Essencialmente a simulação é dividida em quatro etapas. As etapas dedicadas à LGD diferem pela distribuição utilizada na geração dos dados: Normal, Log-Normal, Logit-Normal e RB.

Para as simulações da variável LGD usamos a transformação  $LGD = 1 - R$ , sendo  $R$  a recuperação, e geramos  $R$  dos quatro diferentes modelos. Essa transformação é necessária uma vez que os modelos Normal, Log-Normal, Logit-Normal não são capazes de captar a relação negativa existente entre a LGD e o estado da economia. Mais detalhes são apresentados posteriormente.

Para cada conjunto de dados provenientes de cada uma das quatro distribuições, calculamos os estimadores de máxima verossimilhança para todos os modelos e avaliamos as estimativas bayesianas do modelo RB. Essas estimativas são utilizadas na determinação do capital econômico exibidas no Capítulo 9, no qual analisamos as consequências dos diferentes modelos ajustados.

Sob a metodologia clássica, os modelos são comparados baseando-se nos valores dos critérios AIC e BIC. Na abordagem bayesiana do modelo RB, examinamos o métodos MCMC implementado para estimação dos parâmetros.

Para facilitar o estudo, usamos as notações  $\mu$ -norm,  $\omega$ -norm e  $\sigma$ -norm para nos referir aos parâmetros do modelo Normal,  $\mu$ -log,  $\omega$ -log e  $\sigma$ -log para nos

referir aos parâmetros do modelo Log-Normal e  $\mu$ -logit,  $\omega$ -logit e  $\sigma$ -logit para os parâmetros do modelo Logit-Normal.

O objetivo desse capítulo é avaliar as estimativas dos parâmetros para que sejam utilizadas na determinação do capital econômico. Nosso principal interesse é auxiliar na escolha do modelo a ser utilizado para descrever a LGD. Para isso dispomos dos resultados dos critérios de ajuste de modelo, comparação das estimativas dos capitais econômicos e outros resultados relevantes.

## 8.1 Simulações

Neste estudo consideramos *número de anos*  $T$  igual a 24, ou seja, os dados das recuperações individuais estão disponíveis para 24 anos. Para cada ano  $t$ ,  $t = 1, \dots, 24$ , é suposto um número fixo,  $n$ , de clientes,  $n = 10000$ . O número de indivíduos no portfólio de cada ano foi mantido constante por conveniência nos cálculos. Este fato não afetará os resultados uma vez que o valor de interesse é a frequência relativa de *default*,  $DF_t$ , tornando irrelevante o número total de clientes.

Geramos o número de clientes que entraram em *default* para cada ano  $t$ ,  $t = 1, \dots, 24$ , denotado  $ND_t$ , de uma distribuição Poisson com parâmetro  $\lambda = n/50$ . Portanto, as frequências relativas de *default* anuais,  $DF_t$ , são dadas por  $DF_t = ND_t/n$ ,  $t = 1, \dots, 24$ . O valor  $n/50$  foi atribuído com a finalidade de aproximar o número de clientes simulado que entraram em *default* com os valores reais, baseado em informações de Huang & Oosterlee (2008), de indivíduos que não cumpriram com suas obrigações.

Os dados das frequências relativas de *default* simulados,  $DF_1, \dots, DF_{24}$ , são utilizados para obter as estimativas, por máxima verossimilhança, dos parâmetros  $p$  e  $PD$  do valor ativo. Com as estimativas,  $\hat{p}$  e  $\widehat{PD}$ , predizemos o valor de  $X_t$  para cada ano  $t$ ,  $t = 1, \dots, 24$ , os quais são utilizados na geração dos dados de recuperações (LGD).

Para que os dados de recuperações fossem razoavelmente parecidos en-

tre os modelos utilizados para geração, procedemos da seguinte maneira para definição dos valores reais dos parâmetros:

1º: Atribuímos valores para os parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  do modelo RB para que os dados simulados de recuperações estivessem coerentes com a realidade (baseado em informações de Huang & Oosterlee (2008)).

2º: Geramos, para cada ano  $t$ ,  $t = 1, \dots, 24$ , um conjunto de dados de  $ND_t$  recuperações individuais de uma distribuição Beta com média  $\mu_t = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}$  e parâmetro de dispersão  $\varphi_t = e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t}$ .

3º: Utilizando-se dos dados de recuperações provenientes do modelo RB, estimamos os parâmetros dos outros modelos por máxima verossimilhança.

4º: Definimos como sendo valor "real" dos parâmetros dos modelos Normal, Log-Normal e Logit-Normal tais estimativas de máxima verossimilhança.

O procedimento de geração dos dados é repetido por 1000 iterações amostrais. Para cada iteração estimamos os parâmetros de cada modelo por máxima verossimilhança, além da estimativa bayesiana do modelo RB, e definimos como estimativa final a média dessas estimações. Utilizamos os intervalos de confiança *bootstrap* com nível de confiança de  $q = 95\%$ , em que ordenamos as 1000 estimativas de cada parâmetro e definimos o limite inferior como sendo o  $1 - q$  percentil das estimativas e o limite superior como sendo o  $q$  percentil das estimativas.

## 8.2 Estimativas de $p$ e $PD$

Tendo disponibilizado os dados das frequências relativas de *default* simulados  $DF_1, \dots, DF_{24}$ , podemos obter as estimativas de  $p$  e  $PD$  pelas expressões (3.2) e (3.3) respectivamente.

Na Tabela 8.1 são apresentadas as seguintes quantidades: média das estimativas, desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, construídos com um coeficiente de confiança de 95%.

TABELA 8.1: Estimativas de Máxima Verossimilhança de  $p$  e  $PD$ 

Parâmetro	Estimativa	Desvio Padrão	IC
$p$	0,000829	0,00024	[ 0,00081 0,00084]
$PD$	0,01999	0,00029	[0,01999 0,02003]

Como esperado, as estimativas de máxima verossimilhança exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. Embora a estimativa do parâmetro  $p$  da equação (2.1) tenha sido muito pequena, para nosso conjunto de dados simulados tal estimativa significa que os indivíduos tem baixa ligação com o estado da economia, ou seja, o valor ativo está mais relacionado com o risco específico de cada devedor. A estimativa de  $PD$  significa que a probabilidade de um indivíduo entrar em *default* é de aproximadamente 2%.

Com as estimativas  $\hat{p}$  e  $\widehat{PD}$ , predizemos o valor de  $X_t$  para cada ano  $t$ ,  $t = 1, \dots, 24$ , através da equação

$$X_t = \frac{\Phi^{-1}(\widehat{PD}) - \Phi^{-1}(DF_t) \sqrt{1 - \hat{p}}}{\sqrt{\hat{p}}}, \quad t = 1, \dots, 24.$$

Os valores preditos  $X_1, \dots, X_{24}$  e os dados simulados de recuperações são utilizados para estimar os parâmetros das equações de recuperação dos modelos Normal, Log-Normal, Logit-Normal e RB.

Nas seções seguintes, utilizando as expressões (4.13), (4.17), (4.5) e (5.6) descritas no Capítulo 4, os parâmetros para cada modelo são estimados via máxima verossimilhança e na seção 8.9 utilizamos método bayesiano para estimação dos parâmetros do modelo RB.

### 8.3 Inferência Clássica para Dados Provenientes do Modelo Normal

Como mencionado anteriormente, usamos a transformação  $R = 1 - LGD$  assumindo que as recuperações individuais no ano  $t$  provêm de uma variável

aleatória  $R_t$ , de uma distribuição Normal com média  $\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$  e variância  $\sigma^2(1 - \omega)$ .

O motivo para se trabalhar com a recuperação  $R$  e não com a LGD diretamente, provém do fato dos modelos Normal, Log-Normal e Logit-Normal não serem capazes de incorporar a relação negativa entre a LGD e o estado da economia. Como descrito no Capítulo 4, no caso do modelo Normal temos que a média da LGD dado  $X_t$  é dado por  $E[LGD|X_t] = \mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$ . Como  $\sigma$  é positivo e  $\omega$  pertence ao intervalo  $(0, 1)$  não é possível obter uma relação negativa entre a média de LGD e o fator de risco sistemático  $X_t$ . Por exemplo, se em um ano  $t$  qualquer,  $X_t$  alcançou um valor positivo de 1,5, interpretado como um bom ano para a economia, é esperado que a média da LGD seja menor. Analogamente, se em um ano  $t$ ,  $X_t$  obteve um valor negativo de  $-1,9$ , indicando um ano ruim, é esperado que a média da LGD aumente. Como  $\sigma\sqrt{\omega}$  é um valor positivo, não é possível exibir essa relação negativa entre o fator de risco sistemático e a média da LGD. Por esse motivo trabalhamos com a recuperação, que possui uma relação positiva com o estado da economia. O mesmo ocorre com os modelos Log-Normal e Logit-Normal.

Utilizando os valores preditos  $X_1, \dots, X_{24}$ , geramos, para cada ano  $t$ , um número  $ND_t$  de recuperações de uma distribuição Normal com média  $\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$  e variância  $\sigma^2(1 - \omega)$ .

Os verdadeiros valores dos parâmetros utilizados na simulação do modelo Normal foram  $\mu = 0,4$ ,  $\sigma = 0,3$  e  $\omega = 0,1$ .

Na Tabela 8.2, utilizando a distribuição Normal para simular os dados de recuperações, são apresentadas as seguintes quantidades para as estimativas clássicas dos parâmetros do modelo Normal: média das estimativas, desvio padrão, módulo do vício e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, construídos com um coeficiente de confiança de 95%.

TABELA 8.2: Estimativas dos parâmetros do modelo Normal (geração Normal)

Parâmetro	Valor Real	Média	DP	Vício	IC
$\mu$ -norm	0,4	0,3974	0,0012	0,0026	[0,3949 0,4000 ]
$\omega$ -norm	0,3	0,2108	0,0062	0,0892	[0,1977 0,2222 ]
$\sigma$ -norm	0,1	0,1242	0,0014	0,0242	[0,1210 0,1268 ]

Os estimadores obtidos através do método de máxima verossimilhança apresentaram resultados próximos dos verdadeiros valores, exibindo baixo vício. Como esperado, o desvio padrão de todas as estimativas foi baixo e a amplitude dos intervalos de confiança muito pequena.

A Tabela 8.3 apresenta as médias das estimativas clássicas, desvio padrão e o intervalo de confiança para os parâmetros dos modelos Log-Normal, Logit-Normal e RB, baseadas na geração proveniente do modelo Normal.

TABELA 8.3: Estimativas para os modelos Log, Logit e RB (geração Normal)

Parâmetro	Média	DP	IC
$\mu$ -log	-0,9746	0,0051	[-0,9653 -0,9850]
$\omega$ -log	0,5003	0,0214	[0,4581 0,5394 ]
$\sigma$ -log	0,3774	0,0304	[0,3326 0,4523 ]
$\mu$ -logit	-0,4405	0,0069	[ -0,4276 -0,4538 ]
$\omega$ -logit	0,5512	0,0118	[0,5295 0,5743 ]
$\sigma$ -logit	0,5824	0,0248	[0,5467 0,6447 ]
$\beta_0$	-0,4218	0,0057	[ -0,4109 -0,4332 ]
$\beta_1$	0,4084	0,0078	[0,3946 0,4239]
$\alpha_0$	3,4904	0,0243	[3,4416 3,5351 ]
$\alpha_1$	0,1345	0,0453	[0,0475 0,2255 ]

As estimativas clássicas apresentadas nas Tabelas 8.2 e 8.3 são utilizadas no Capítulo 9 para determinar o capital econômico de cada modelo, considerando dados provenientes do modelo Normal.

## 8.4 Inferência Clássica para Dados Provenientes do Modelo Log-Normal

Nesse caso assumimos que as recuperações individuais no ano  $t$  provém de uma variável aleatória  $R_t$ , seguindo distribuição Log-Normal com parâmetros  $\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$  e  $\sigma^2(1 - \omega)$ .

Analogamente, utilizando os valores preditos  $X_1, \dots, X_{24}$  geramos, para cada ano  $t$ , um número  $ND_t$  de recuperações de uma distribuição Log-Normal com parâmetros  $\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$  e  $\sigma^2(1 - \omega)$ .

Os verdadeiros valores dos parâmetros utilizados na simulação do modelo Log-Normal foram  $\mu = -1$ ,  $\sigma = 0,55$  e  $\omega = 0,16$ .

Utilizando a distribuição Log-Normal para simular os dados de recuperações, na Tabela 8.4 pode-se verificar as médias das estimativas clássicas, desvio padrão, módulo do vício e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, construídos com um coeficiente de confiança de 95%.

TABELA 8.4: Estimativas dos parâmetros do modelo Log-Normal (geração Log-Normal)

Parâmetro	Valor Real	Média	DP	Vício	IC
$\mu$ -log	-1	-1,0010	0,0035	0,001	[-0,9942 -1,0079 ]
$\omega$ -log	0,55	0,4262	0,0108	0,1238	[0,5232 0,577 ]
$\sigma$ -log	0,16	0,3334	0,0044	0,1734	[0,1538 0,1716 ]

Os estimadores obtidos através do método de máxima verossimilhança apresentaram resultados próximos dos verdadeiros valores. No geral, o vício dos parâmetros exibiu valores pouco maiores do que para o modelo Normal. Como esperado, o desvio padrão de todas as estimativas foi baixo e a amplitude dos intervalos de confiança muito pequena.

A Tabela 8.5 apresenta as médias das estimativas clássicas, desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança para os parâmetros dos modelos Normal, Logit-Normal e RB, baseadas na geração prove-



niente do modelo Log-Normal.

TABELA 8.5: Estimativas para os modelos Normal, Logit e RB (geração Log)

Parâmetro	Média	DP	IC
$\mu$ -norm	0,3860	0,0014	[0,3832 0,3888]
$\omega$ -norm	0,4118	0,0220	[0,4008 0,4213]
$\sigma$ -norm	0,1308	0,00182	[0,1272 0,1344]
$\mu$ -logit	-0,4762	0,0068	[-0,4626 -0,4894 ]
$\omega$ -logit	0,4077	0,0164	[0,3764 0,4404 ]
$\sigma$ -logit	0,5958	0,0130	[0,5730 0,6252 ]
$\beta_0$	-0,4637	0,0063	[-0,4509 -0,4760 ]
$\beta_1$	0,3557	0,0106	[0,3341 0,3781 ]
$\alpha_0$	3,1401	0,0271	[3,0855 3,1945 ]
$\alpha_1$	-0,4049	0,0289	[-0,3529 -0,4626]

As estimativas clássicas apresentadas nas Tabelas 8.4 e 8.5 são utilizadas no Capítulo 9 para determinar o capital econômico de cada modelo, considerando dados provenientes do modelo Log-Normal.

## 8.5 Inferência Clássica para Dados Provenientes do Modelo Logit-Normal

Assumimos que as recuperações individuais no ano  $t$  provém de uma variável aleatória  $R_t$ , seguindo distribuição Logit-Normal com parâmetros  $\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$  e  $\sigma^2(1 - \omega)$ .

Portanto, utilizando os valores preditos  $X_1, \dots, X_{24}$  geramos, para cada ano  $t$ , um número  $ND_t$  de recuperações de uma distribuição Logit-Normal com parâmetros  $\mu + \sigma\sqrt{\omega}X_t$  e  $\sigma^2(1 - \omega)$ .

Os verdadeiros valores dos parâmetros utilizados na simulação do modelo Logit-Normal foram  $\mu = -0,43$ ,  $\sigma = 0,96$  e  $\omega = 0,22$ .

Analogamente, utilizando a distribuição Logit-Normal para simular os

dados de recuperações, a Tabela 8.6 apresenta as seguintes quantidades para as estimativas clássicas dos parâmetros do modelo Logit-Normal: média das estimativas, desvio padrão, módulo do vício e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, construídos com um coeficiente de confiança de 95%.

TABELA 8.6: Estimativas dos parâmetros para o modelo Logit-Normal (geração Logit-Normal)

Parâmetro	Valor Real	Média	DP	Vício	IC
$\mu$ -logit	-0,43	-0,4295	0,0148	0,0005	[-0,3990 -0,4579 ]
$\omega$ -logit	0,96	1,1214	0,0095	0,1614	[0,9428 0,9803 ]
$\sigma$ -logit	0,22	0,1609	0,0118	0,0591	[0,2172 0,2432 ]

Novamente os estimadores obtidos através do método de máxima verossimilhança apresentaram resultados próximos dos verdadeiros valores, com pequenos vícios. Como esperado, o desvio padrão de todas as estimativas foi baixo e a amplitude dos intervalos de confiança novamente muito pequena.

Abaixo, a Tabela 8.7 apresenta as médias das estimativas clássicas, desvio padrão e o intervalo de confiança para os parâmetros dos modelos Normal, Log-Normal e RB, baseadas na geração proveniente do modelo Logit-Normal.

TABELA 8.7: Estimativas para os modelos Normal, Log e RB (geração Logit)

Parâmetro	Média	DP	IC
$\mu$ -norm	0,4122	0,0029	[0,4064 0,4184 ]
$\omega$ -norm	0,1583	0,0029	[0,1245 0,1666 ]
$\sigma$ -norm	0,2201	0,0017	[0,2165 0,2236 ]
$\mu$ -log	-1,0653	0,0090	[-1,0464 -1,0825 ]
$\omega$ -log	0,1481	0,0124	[0,1256 0,1732 ]
$\sigma$ -log	0,6839	0,0096	[0,6646 0,7022 ]
$\beta_0$	-0,3475	0,0122	[-0,3230 -0,3706 ]
$\beta_1$	0,3616	0,0123	[0,3384 0,3870 ]
$\alpha_0$	1,5963	0,0183	[1,5638 1,6350 ]
$\alpha_1$	-0,0571	0,0221	[-0,0136 -0,1016 ]

As estimativas clássicas apresentadas nas Tabelas 8.6 e 8.7 são utilizadas no Capítulo 9 para determinar o capital econômico de cada modelo, considerando dados provenientes do modelo Logit-Normal.

## 8.6 Inferência Clássica para Dados Provenientes do Modelo RB

No caso do modelo RB, utilizando os valores preditos  $X_1, \dots, X_{24}$  geramos, para cada ano  $t$ , um número  $ND_t$  de recuperações de uma distribuição Beta com média  $\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}$  e parâmetro de dispersão  $e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t}$ .

Os verdadeiros valores dos parâmetros utilizados na simulação do modelo RB foram  $\beta_0 = -0,4$ ,  $\beta_1 = 0,4$ ,  $\alpha_0 = 2,0$  e  $\alpha_1 = -0,4$ .

Por fim, utilizando o modelo de Regressão Beta para simular os dados de recuperações, na Tabela 8.8 temos as médias das estimativas clássicas, o desvio padrão, módulo do vício e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, construídos com um coeficiente de confiança de 95%, para os parâmetros do modelo RB.

TABELA 8.8: Estimativas dos parâmetros para o modelo RB (geração RB)

Parâmetro	Valor Real	Média	DP	Vício	IC
$\beta_0$	-0,4	-0,4000	0,0101	0,00001	[-0,3797 -0,4201]
$\beta_1$	0,4	0,4003	0,0105	0,0003	[ 0,3795 0,4207]
$\alpha_0$	2	2,0004	0,0199	0,0004	[1,9626 2,0404 ]
$\alpha_1$	-0,4	-0,4005	0,0192	0,0005	[ -0,3629 -0,4394]

Os estimadores obtidos através do método de máxima verossimilhança apresentaram resultados muito próximos dos verdadeiros valores. O modelo RB apresentou o menor vício entre todos os modelos. Como esperado, o desvio padrão de todas as estimativas foi baixo e a amplitude dos intervalos de confiança novamente pequena.

A Tabela 8.9 seguinte apresenta as médias das estimativas clássicas,

desvio padrão e o intervalo de confiança para os parâmetros dos modelos Normal, Log-Normal e Logit-Normal, baseadas na geração proveniente do modelo RB.

TABELA 8.9: Estimativas para os modelos Normal, Log e Logit (geração RB)

Parâmetro	Média	DP	IC
$\mu$ -norm	0,4016	0,0025	[0,3967 0,4066 ]
$\omega$ -norm	0,2308	0,0121	[ 0,2059 0,2527]
$\sigma$ -norm	0,1938	0,0019	[0,1899 0,1975 ]
$\mu$ -log	-1,0412	0,0070	[-1,0270 -1,0547]
$\omega$ -log	0,1776	0,01543	[ 0,1476 0,2068]
$\sigma$ -log	0,5600	0,0085	[0,5439 0,5769]
$\mu$ -logit	-0,4400	0,01245	[-0,4144 -0,4642]
$\omega$ -logit	0,2204	0,0122	[0,1979 0,2455 ]
$\sigma$ -logit	0,9685	0,0174	[ 0,9397 1,008]

As estimativas clássicas apresentadas nas Tabelas 8.8 e 8.9 são utilizadas no Capítulo 9 para determinar o capital econômico de cada modelo, considerando dados provenientes do modelo RB.

## 8.7 Métricas AIC e BIC

As métricas AIC e BIC são medidas de qualidade do ajuste de um modelo estatístico, proporcionando um meio de comparação entre os modelos. Dado um conjunto de dados, vários candidatos à modelo podem ser classificados de acordo com suas métricas AIC e BIC, sendo o modelo com o menor AIC e BIC considerado o melhor.

No caso geral, as métricas AIC e BIC são dadas respectivamente por

$$AIC = 2k - 2\ln(L),$$

$$BIC = -2\ln(L) + k\ln(n),$$

sendo  $k$  o número de parâmetros do modelo estatístico,  $L$  o valor maximizado da função de verossimilhança para o modelo estimado e  $n$  o tamanho amostral.

Na Tabela 8.10 a primeira coluna representa o modelo utilizado na geração dos dados e a primeira linha representa o modelo ajustado. Os valores nas caselas representam o número de vezes (das 1000 iterações) em que o valor AIC do modelo ajustado foi o menor entre todos os modelos, ou seja, foi o melhor modelo.

TABELA 8.10: Tabela AIC

	<b>Normal</b>	<b>Log-Normal</b>	<b>Logit-Normal</b>	<b>RB</b>
<b>Normal</b>	1000	0	0	0
<b>Log-Normal</b>	0	1000	0	0
<b>Logit-Normal</b>	0	0	1000	0
<b>RB</b>	0	0	0	1000

Analogamente a tabela AIC acima, temos a tabela BIC a seguir.

TABELA 8.11: Tabela BIC

	<b>Normal</b>	<b>Log-Normal</b>	<b>Logit-Normal</b>	<b>RB</b>
<b>Normal</b>	1000	0	0	0
<b>Log-Normal</b>	0	1000	0	0
<b>Logit-Normal</b>	0	0	1000	0
<b>RB</b>	0	0	0	1000

Nota-se que em todos os casos, tanto na métrica AIC quanto na BIC, o modelo utilizado na geração dos dados é considerado o melhor modelo ajustado, ou seja, o modelo utilizado para geração dos dados obtém o menor valor dos critérios.

Para melhor análise dos valores AIC e BIC as tabelas seguintes apresentam as médias, os valores mínimos e máximos dos critérios AIC e BIC, considerando as quatro diferentes gerações dos dados.

A Tabela 8.12 a seguir apresenta as propriedades dos critérios AIC e BIC considerando dados provenientes do modelo Normal.

TABELA 8.12: Tabela AIC - BIC geração modelo Normal

Modelo	AIC			BIC		
	Média	Min	Max	Média	Min	Max
Normal	-10499,82	-11001,39	-10014,71	-10480,39	-10981,86	-9995,38
Log-Normal	-8601,97	-9964,86	-5652,60	-8576,06	-9938,83	-5626,69
Logit-Normal	-9945,12	-10852,43	-8544,86	-9919,22	-10826,41	-8518,96
RB	-10377,98	-10997,44	-9817,33	-10352,08	-10971,42	-9791,62

Gerando os dados de recuperação da distribuição Normal, nota-se que os critérios AIC e BIC indicam o modelo Normal como sendo o melhor modelo. É interessante ressaltar que o modelo RB apresentou valores dos critérios muito próximos aos do modelo Normal, ou seja, se não considerarmos o modelo utilizado para geração de dados, o modelo RB é considerado o mais adequado. O modelo que apresentou maiores valores nos critérios foi o modelo Log-Normal.

A Tabela 8.13 a seguir apresenta as propriedades dos critérios AIC e BIC considerando dados provenientes do modelo Log-Normal.

TABELA 8.13: Tabela AIC - BIC geração modelo Log-Normal

Modelo	AIC			BIC		
	Média	Min	Max	Média	Min	Max
Normal	-8446,79	-9038,27	-7767,41	-8427,36	-9018,79	-7748,04
Log-Normal	-9324,14	-9889,96	-8863,79	-9298,23	-9889,96	-8838,05
Logit-Normal	-8533,78	-9241,94	-7646,02	-8507,87	-9215,83	-7620,18
RB	-8948,24	-9610,82	-8361,49	-8922,33	-9584,79	-8335,69

Utilizando dados provenientes da distribuição Log-Normal, os critérios indicam o modelo Log-Normal como sendo o melhor modelo ajustado. Nota-se que o modelo RB apresentou valores próximos aos do modelo Log-Normal, ou seja, novamente, se não considerarmos o modelo utilizado para geração dos dados, o modelo RB é indicado como sendo o melhor. O modelo ajustado que apresentou maior valor tanto no critério AIC como no critério BIC, foi o modelo Normal.

A Tabela 8.14 a seguir apresenta as propriedades dos critérios AIC e BIC considerando dados provenientes do modelo Logit-Normal.

TABELA 8.14: Tabela AIC - BIC geração modelo Logit-Normal

<b>Modelo</b>	<b>AIC</b>			<b>BIC</b>		
	<b>Média</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Média</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>
Normal	-1724,84	-1949,84	-1486,38	-1705,41	-1930,39	-1467,01
Log-Normal	-1185,38	-1517,30	-831,51	-1159,47	-1491,26	-805,61
Logit-Normal	-2490,79	-2812,10	-2276,67	-2464,89	-2786,04	-2250,84
RB	-2427,31	-2750,69	-2179,61	-2401,40	-2724,62	-2153,78

Utilizando dados de recuperações provenientes da distribuição Logit-Normal, os critérios indicam o modelo Logit-Normal como sendo o melhor modelo ajustado. Novamente nota-se que o modelo RB apresentou valores bem próximos aos valores do modelo considerado o melhor. O modelo ajustado que apresentou maior valor nos critérios, novamente foi o modelo Log-Normal.

A Tabela 8.15 a seguir apresenta as propriedades dos critérios AIC e BIC considerando dados provenientes do modelo RB.

TABELA 8.15: Tabela AIC - BIC geração modelo RB

<b>Modelo</b>	<b>AIC</b>			<b>BIC</b>		
	<b>Média</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Média</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>
Normal	-3378,54	-3721,45	-3030,60	-3359,11	-3701,96	-3011,21
Log-Normal	-3022,14	-3412,27	-2603,25	-2996,23	-3386,35	-2577,38
Logit-Normal	-3644,38	-4021,60	-2751,83	-3618,47	-3995,65	-2725,95
RB	-4098,38	-4442,24	-3768,83	-4072,48	-4416,14	-3743,03

Gerando os dados do modelo RB, os critérios indicam o modelo RB como sendo o melhor modelo ajustado. Os modelos ajustados Normal, Log-Normal e Logit-Normal exibiram valores próximos entre si, mas consideravelmente maiores do que o modelo RB. Nesse caso, se não considerarmos o modelo utilizado para geração (RB), o modelo Logit-Normal é indicado como o melhor modelo. O modelo ajustado que apresentou maior valor, tanto no critério AIC como no BIC, novamente foi o modelo Log-Normal.

## 8.8 Análise Clássica dos Modelos

Nesta seção discutimos alguns comportamentos dos modelos em relação a suas estimativas clássicas e critérios AIC e BIC.

Para o estudo de simulação, os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de todos os modelos apresentam boas propriedades. Todas as estimativas clássicas exibiram baixa variância e uma amplitude nos intervalos de confiança muito pequena. O modelo RB apresentou o menor vício entre os modelos, seguido do modelo Normal. O modelo que apresentou maior vício foi o modelo Log-Normal.

É fundamental que seja feito um teste de aderência à distribuição de origem antes de utilizar qualquer modelo. Pelos critérios AIC e BIC notamos que o modelo que melhor se ajusta aos dados é sempre o modelo utilizado para geração dos mesmos. Se eliminarmos o modelo utilizado para geração de dados, uma vez que quase sempre é esperado que ele seja considerado o mais adequado para os critérios, notamos que para dados provenientes dos modelo Normal, Log-Normal e Logit-Normal, o modelo RB é sempre considerado o ‘segundo’ melhor modelo. Analisando as Tabelas 8.12, 8.13, 8.14 e 8.15, as quais apresentam as médias dos critérios AIC e BIC, podemos notar que se o modelo RB não apresenta o menor dos valores, ele apresenta um valor bem próximo do melhor modelo. Diante de tais fatos podemos concluir que para os critérios AIC e BIC o modelo RB possui uma ligeira vantagem em relação aos outros modelos.

## 8.9 Estimação dos Parâmetros do Modelo RB via Método Bayesiano

Como descrito no Capítulo 6, para o modelo RB temos quatro parâmetros a serem estimados,  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ . Utilizaremos nesse estudo prioris vagas como, por exemplo, distribuições normais com médias conhecidas e grandes variâncias.

Considere então que todos os parâmetros possuam prioris normais com



média igual a 0 e variância 100. Temos que a *posteriori* é dada por

$$\begin{aligned} & \pi(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1 | \mathbf{R}, X_1, \dots, X_{24}) \propto \\ & R_t(\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1; \mathbf{R}, X_1, \dots, X_{24}) \times \pi(\beta_0) \times \pi(\beta_1) \times \pi(\alpha_0) \times \pi(\alpha_1) \\ & = \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^{N_t} [\Gamma(e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t})] \times \left[ \Gamma\left(\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t}\right) \right]^{-1} \\ & \times \left[ \Gamma\left(e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \left(1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}\right)\right) \right]^{-1} \times \left[ R_{jt}^{\left(\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t - 1}\right)} \right] \\ & \times \left[ (1 - R_{jt})^{\left[e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \left(1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}\right) - 1\right]} \right] \times \exp\left(\frac{\beta_0^2 - \beta_1^2 - \alpha_0^2 - \alpha_1^2}{20000}\right), \end{aligned}$$

sendo  $\mathbf{R} = (R_{11}, \dots, R_{N_1 1}, \dots, R_{1T}, \dots, R_{N_T T})$  os dados simulados das recuperações individuais referentes a todos os anos.

Como gerar amostras de tal distribuição não é algo simples, uma vez que tal distribuição não pertence a nenhuma família de distribuições conhecidas, utilizamos um procedimento Monte Carlos em Cadeias de Markov (MCMC), mais precisamente utilizaremos o método Metropolis-Hasting.

As estimativas são dadas pela média das cadeias geradas a partir da distribuição a *posteriori* de cada parâmetro do modelo, obtidas via método MCMC.

Para utilização de tal procedimento, é importante obter as distribuições condicionais completas de cada parâmetro. A distribuição a *posteriori* condicional de  $\beta_0$  dados  $\beta_1, \alpha_0$  e  $\alpha_1$  é dada por

$$\begin{aligned} & \pi(\beta_0 | \beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \mathbf{R}, X_1, \dots, X_{24}) \propto \\ & = \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^{N_t} [\Gamma(e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t})] \times \left[ \Gamma\left(\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t}\right) \right]^{-1} \\ & \times \left[ \Gamma\left(e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \left(1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}\right)\right) \right]^{-1} \times \left[ R_{jt}^{\left(\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}} e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t - 1}\right)} \right] \\ & \times \left[ (1 - R_{jt})^{\left[e^{\alpha_0 + \alpha_1 X_t} \left(1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_t}}\right) - 1\right]} \right] \times \exp\left(\frac{\beta_0^2}{20000}\right). \end{aligned}$$

Para os outros parâmetros a *posteriori* condicional é feita de forma análoga.

### 8.9.1 Análise da Simulação

Iniciamos o estudo bayesiano gerando uma única amostra e examinamos as taxas de aceitação, gráficos de convergências e gráficos de correlação para ajuste de saltos. Tal análise será feita apenas considerando a geração dos dados de recuperações provenientes do modelo RB, o estudo considerando gerações de outros modelos é feita de forma análoga. Após analisarmos tais comportamentos para uma amostra gerada, o procedimento é repetido por 100 gerações amostrais, e tomaremos nossa estimativa final dos parâmetros como sendo a média dessas estimativas.

Através do método Metrópolis-Hasting, é gerada uma cadeia de 45000 valores, com os primeiros 5000 valores descartados para eliminar o efeito dos valores iniciais (burn-in), e após analisar os gráficos de correlação utilizamos saltos de 32 para evitar problemas de correlação nas cadeias. Os gráficos de convergência e de correlação dos parâmetros são apresentados no Apêndice C.

Utilizamos o teste de Geweke a fim de verificar a convergência das cadeias. Geweke (1992) propõe um diagnóstico de convergência baseado em métodos de séries temporais. É realizado um teste para igualdade de médias da primeira e última parte da cadeia de Markov (por padrão, os primeiros 10% e os últimos 50%). Se as amostras são retiradas da distribuição estacionária da cadeia, as médias dos valores no início e no final da seqüência devem ser semelhantes. O diagnóstico de convergência,  $Z$ , é dado pela diferença entre estas duas médias dividido pelo erro padrão assintótico da sua diferença. Como o comprimento da cadeia converge para infinito, a distribuição amostral de  $Z$  converge em distribuição para  $N(0, 1)$  se a cadeia convergiu. Assim, os valores de  $Z$  que caem nas caudas extremas de uma distribuição normal padrão sugerem que a cadeia não foi totalmente convergente. Mais explicitamente, concluímos que a cadeia convergiu se os valores do teste estiverem no intervalo de -1.96 a 1.96.

A Tabela 8.16 apresenta os resultado do teste Geweke.

TABELA 8.16: Tabela Teste Geweke

Parâmetros	Valor do Teste
$\beta_0$	1,8299
$\beta_1$	0,5589
$\alpha_0$	0,7308
$\alpha_1$	0,5593

Notamos que todos os valores estão no intervalo de -1.96 á 1.96, assim concluimos que houve convergência da cadeia para todos os parâmetros.

### 8.9.2 Estimativa Bayesiana

A Tabela 8.17 apresenta o valor real dos parâmetros, a média das estimativas bayesianas, o desvio padrão, o módulo do vício e a média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, construídos com um coeficiente de confiança de 95%.

TABELA 8.17: Sumário a *posteriori* (geração RB)

Parâmetro	Valor Real	Média	DP	Vício	IC
$\beta_0$	-0,4	-0,3979	0,0107	0,0020	[-0,3793 -0,4201]
$\beta_1$	0,4	0,3999	0,0110	0,000083	[0,3739 0,4179 ]
$\alpha_0$	2	1,9959	0,0215	0,0040	[1,9574 2,0399 ]
$\alpha_1$	-0,4	-0,4010	0,0188	0,0010	[-0,3691 -0,4380]

Os estimadores obtidos através do método bayesiano apresentam resultados próximos dos verdadeiros valores, exibindo baixo vício. O desvio padrão de todas as estimativas foi baixo e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena.

Utilizando o mesmo procedimento descrito acima, as Tabelas 8.18, 8.19 e 8.20 apresentam as estimativas bayesianas do modelo RB, desvio padrão e intervalo de confiança, utilizando respectivamente os modelos Normal, Log-Normal, Logit-Normal para geração dos dados de recuperações.

TABELA 8.18: Sumário a *posteriori* (geração Normal)

Parâmetro	Média	DP	IC
$\beta_0$	-0,4222	0,0055	[-0,4123 -0,4331]
$\beta_1$	0,4083	0,0083	[0,3946 0,4265]
$\alpha_0$	3,4871	0,0222	[3,4444 3,5285]
$\alpha_1$	0,1356	0,0466	[0,0538 0,2283 ]

TABELA 8.19: Sumário a *posteriori* (geração Log-Normal)

Parâmetro	Média	DP	IC
$\beta_0$	-0,4624	0,0067	[-0,4488 -0,4753]
$\beta_1$	0,3622	0,0101	[0,3468 0,3906]
$\alpha_0$	3,100	0,0810	[2,8447 3,1852]
$\alpha_1$	-0,4061	0,0287	[-0,3492 -0,4588]

TABELA 8.20: Sumário a *posteriori* (geração Logit-Normal)

Parâmetro	Média	DP	IC
$\beta_0$	-0,3497	0,0119	[-0,3267 -0,3700]
$\beta_1$	0,3619	0,0126	[0,3411 0,3830]
$\alpha_0$	1,5970	0,0158	[1,5710 1,6329]
$\alpha_1$	-0,0574	0,0214	[-0,0177 -0,0953]

Pode-se notar que para as três formas de geração as estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e amplitude dos intervalos de confiança muito pequena.

### 8.9.3 Análise Bayesiana

O modelo de Regressão Beta bayesiano foi ajustado considerando prioris não informativas para todos os parâmetros. Através do método Metropolis-Hastings, geramos uma cadeia de 45000 valores, com os primeiros 5000 valores descartados para eliminar efeito dos valores iniciais. Com os 40000 valores restantes, espaçados de 32 em 32, uma amostra de 1250 valores é utilizada para

caracterizar a distribuição *a posteriori* do parâmetro de interesse. O teste de Geweke (1992) aplicado nas cadeias de Markov indicam que não existem problemas de convergência nas cadeias geradas para todos os parâmetros e, visualmente (Apêndice C) podemos confirmar tal convergência.

Nota-se que para todas as formas de geração as estimativas apresentam bons resultados, exibindo baixos valores de desvio padrão e amplitude dos intervalos de confiança muito pequena. Todas as estimativas bayesianas foram muito próximas das estimativas clássicas apresentadas nas seções anteriores.

Contudo, é necessário se atentar que essas conclusões são feitas com base em simulações e, por isso, estão sujeitas a limitações impostas pelo tipo de experimento.

# Capítulo 9

## Estimativas do Capital

### Econômico

Como já descrito anteriormente, o capital econômico (CE) pode ser entendido como a quantia necessária que uma instituição financeira deve ter em reserva para uma possível eventualidade.

Nosso interesse neste capítulo é determinar as estimativas do capital econômico através das expressões (7.1) e (7.6), utilizando as estimativas dos parâmetros do modelo da LGD obtidas no capítulo anterior. Analisamos as consequências das diferentes distribuições utilizadas para geração de dados e comparamos as estimativas dos capitais obtidas através dos quatro modelos para as duas maneiras de determinar o CE: aproximação assintótica e aproximação normal que nominamos respectivamente por CE-1 e CE-2.

Para o estudo de simulação, consideramos um número fixo de indivíduos no ano de interesse,  $n = 10000$  e geramos a quantia em exposição de cada indivíduo,  $w_j$ , a partir de uma Poisson com parâmetro  $\lambda = 1000$ . Como o CE é determinado como o  $q$ -ésimo percentil da distribuição da taxa de perda, a distribuição utilizada para geração da quantia em exposição não terá influência nos resultados, uma vez que utilizamos o peso de cada empréstimo individual dentro do portfólio, denotado no Capítulo 7 de  $B_j$ .

Como no estudo de simulação estamos utilizando a variável recuperação,

dada por  $R = 1 - LGD$ , temos que a média da recuperação, dado o fator de risco sistemático  $X_t$ , é descrita por  $E[R|X_t] = 1 - E[LGD|X_t]$ . Portanto, para determinarmos os capitais econômicos de cada modelo, substituímos o valor  $E[LGD|X_t]$  das equações (7.1) e (7.6) pela expressão  $1 - E[R|X_t]$ , em que  $E[R|X_t]$  é dada por (4.15), (4.19), (4.10) e (5.7) respectivamente para os modelos Normal, Log-Normal, Logit-Normal e RB.

Das 1000 iterações amostrais, para cada estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança e para a estimativa bayesiana do modelo RB, calculamos o capital econômico e definimos como estimativa final a média dessas estimações. Novamente utilizamos os intervalos de confiança *bootstrap* com nível de confiança de  $q = 95\%$ , em que ordenamos as 1000 estimativas dos capitais econômicos e definimos o limite inferior como sendo o  $1 - q$  percentil das estimativas e o limite superior como sendo o  $q$  percentil das estimativas.

## 9.1 Estimativas do CE-1

Nesta seção apresentamos as estimativas do capital econômico calculadas pela forma proposta por Vasicek (1991) e Vasicek (2002), exibidas na seção 7.2 do Capítulo 7.

Utilizando a fórmula (7.1) e as estimativas clássicas dos parâmetros referentes a cada modelo, assim como a estimativa bayesiana do modelo RB, as Tabelas 9.1, 9.2, 9.3 e 9.4 apresentam propriedades do capital econômico determinado através da aproximação assintótica, chamado de CE-1, baseados nas gerações Normal, Log-Normal, Logit-Normal e RB respectivamente.

A Tabela 9.1 apresenta a média das estimativas do CE-1, o desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança. Os CE-1 da Tabela 9.1 são determinados através das estimativas dos parâmetros considerando que os dados de recuperações são provenientes da distribuição Normal.

TABELA 9.1: CE-1 Geração Normal

<b>Modelo</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>IC</b>
Normal	0,0192	0,00010	[0,01921 0,01922]
Log-Normal	0,0173	0,00043	[0,01729 0,01734]
Logit-Normal	0,0209	0,00019	[0,02092 0,02095]
RB	0,0208	0,00008	[0,02080 0,02081]
RB-Bayes	0,0208	0,000091	[0,02079 0,02082]

Todas as estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. O CE-1, utilizando o modelo Normal para geração dos dados de recuperações, teve média global de 0,0198, significando que, em média, o banco deve poupar 1,98% do total exposto. O modelo Logit-Normal apresentou a maior estimativa do CE-1 e o modelo Log-Normal, a menor. Se os dados são provenientes do modelo Normal, aconselha-se a instituição financeira não utilizar o modelo Log-Normal para cálculo do CE-1, pois esse apresentou um valor significativamente inferior em relação aos outros modelos.

Analogamente, a Tabela 9.2 apresenta a média das estimativas do CE-1, o desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, utilizando o modelo Log-Normal para geração dos dados de recuperações.

TABELA 9.2: CE-1 Geração Log-Normal

<b>Modelo</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>IC</b>
Normal	0,0187	0,00013	[0,01876 0,01877 ]
Log-Normal	0,0162	0,00015	[0,01627 0,01629]
Logit-Normal	0,0204	0,00012	[0,02046 0,02048]
RB	0,0203	0,00011	[0,02033 0,02042]
RB-Bayes	0,0204	0,00011	[0,02040 0,02045]

As estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. Utilizando dados provenientes do modelo Log-Normal, o CE-1 teve média de 0,0192, bem próximo à média do



CE-1 quando utilizado dados provenientes do modelo Normal. Os modelos Logit-Normal e RB calculado via método bayesiano, obtiveram as maiores estimativas do CE-1. Novamente o modelo Log-Normal apresentou a menor estimativa. Se os dados são provenientes de uma Log-Normal, os modelos que oferecem maior segurança são os modelos Logit-Normal e RB (tanto o clássico quanto o bayesiano), ou seja, em uma recessão econômica tais modelos disponibilizam um capital superior ao dos modelos Normal e Log-Normal.

Considerando o modelo Logit-Normal para geração, a Tabela 9.3 apresenta a média das estimativas do CE-1, o desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, construídos com um coeficiente de confiança de 95%.

TABELA 9.3: CE-1 Geração Logit-Normal

<b>Modelo</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>IC</b>
Normal	0,0179	0,00014	[0,01795 0,01797]
Log-Normal	0,0109	0,00060	[0,01090 0,01098]
Logit-Normal	0,0202	0,00015	[0,02023 0,02025]
RB	0,0200	0,00015	[0,02003 0,02005]
RB-Bayes	0,0200	0,00015	[ 0,02002 0,02008]

Novamente todas as estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. O CE-1, utilizando dados provenientes do modelo Logit-Normal, teve média de 0,0178, significativamente inferior ao CE-1 calculado quando considerado o modelo Normal ou Log-Normal para geração dos dados. A maior estimativa do CE-1 foi do modelo Logit-Normal e a menor, do modelo Log-Normal. Se os dados são considerados provenientes de um modelo Logit-Normal, novamente o modelo Log-Normal apresenta um risco maior em comparação aos outros modelos, pois exibe um valor significativamente inferior do capital armazenado.

De forma análoga, considerando o modelo RB para geração dos dados de recuperações, a Tabela 9.4 apresenta a média das estimativas do CE-1, o desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança.

TABELA 9.4: CE-1 Geração RB

Modelo	Média	Desvio Padrão	IC
Normal	0,0185	0,00011	[0,01852 0,01853 ]
Log-Normal	0,0123	0,00052	[0,01230 0,01237]
Logit-Normal	0,0205	0,00015	[0,02050 0,02062]
RB	0,0206	0,00010	[0,02064 0,02066]
RB-Bayes	0,0206	0,00010	[0,02064 0,02066 ]

Todas as estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. Utilizando o modelo RB para geração de dados, o CE-1 teve média de 0,0185, pouco inferior ao CE-1 quando utilizado dados provenientes do modelo Normal e Log-Normal e maior que o CE-1 calculado utilizando dados do modelo Logit-Normal. Neste caso, as estimações clássicas e bayesianas do modelo RB resultaram na maior estimativa do CE-1. Novamente, o modelo Log-Normal exibiu o menor valor, apresentando um risco maior em relação aos outros modelos, ou seja, tal modelo pode estar armazenando um capital não o bastante para eventuais crises econômicas.

### 9.1.1 Análise de Resultados do CE-1

A média das estimativas do CE-1 foi de 0,0188 entre todos os modelo e entre todas as formas de geração, ou seja, teremos um capital reserva de aproximadamente 1,88% do total exposto do ano em estudo.

O modelo Log-Normal foi o modelo que apresentou o menor CE-1 independente do modelo utilizado para geração dos dados. Se a instituição financeira utilizar a aproximação assintótica para determinar seu capital econômico, o modelo Log-Normal, independente da distribuição utilizada para geração, apresenta maior risco em relação aos outros modelos, ou seja, tal modelo pode estar armazenando um capital reserva inferior ao realmente necessário.

O capital econômico calculado para os modelos RB e Logit-Normal foram extremamente próximos em todos os casos, independente da distribuição utilizada para geração de dados. Os dois modelos apresentaram os maiores valores do CE-1.

Em caso de crise econômica, isso pode significar uma segurança maior em relação aos outros modelos, pois o banco terá uma reserva maior para absorver possíveis perdas.

## 9.2 Estimativas do CE-2

Nesta seção apresentamos as estimativas do capital econômico calculadas utilizando a aproximação normal, exibidas na seção 7.3 do Capítulo 7.

Através da expressão (7.6), utilizando as estimativas clássicas dos parâmetros referentes a cada modelo, assim como a estimativa bayesiana do modelo RB, as Tabelas 9.5, 9.6, 9.7 e 9.8 apresentam propriedades do CE-2 baseados nas gerações dos dados de recuperações do modelo Normal, Log-Normal, Logit-Normal e RB respectivamente.

A Tabela 9.5 apresenta a média das estimativas do CE-2, o desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, construídos com um coeficiente de confiança de 95%. Os CE-2 da tabela seguinte são determinados através das estimativas dos parâmetros considerando que os dados de recuperações são provenientes da distribuição Normal.

TABELA 9.5: CE-2 Geração Normal

<b>Modelo</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>IC</b>
Normal	0,0196	0,00027	[0,01960 0,01963]
Log-Normal	0,0209	0,00039	[ 0,02094 0,02100]
Logit-Normal	0,0222	0,00029	[ 0,02173 0,02280 ]
RB	0,0212	0,00027	[ 0,02122 0,02125]
RB-Bayes	0,0212	0,00028	[0,02111 0,02131]

Todas as estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. O CE-2, utilizando o modelo Normal para geração dos dados de recuperações, obteve média de 0,0210, aproximadamente 6% maior do que o CE-1 também calculado utilizando dados provenientes do modelo Normal. O modelo Logit-Normal apresentou a maior

estimativa do CE-2 e o modelo Normal, a menor. Se os dados são provenientes do modelo Normal, qualquer modelo utilizado terá aproximadamente o mesmo CE-2.

Analogamente, a Tabela 9.6 apresenta a média das estimativas do CE-2, o desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança, utilizando o modelo Log-Normal para geração dos dados de recuperação.

TABELA 9.6: CE-2 Geração Log-Normal

<b>Modelo</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>IC</b>
Normal	0,0193	0,00026	[0,0188 0,0198 ]
Log-Normal	0,0204	0,00024	[0,0200 0,0209]
Logit-Normal	0,0199	0,00037	[0,0191 0,0206 ]
RB	0,0208	0,00028	[0,0202 0,0214 ]
RB-Bayes	0,0208	0,00027	[ 0,0208 0,0209]

As estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. A média do CE-2 foi de 0,0202, utilizando a distribuição Log-Normal para geração dos dados, valor 5% maior do que o CE-1 quando calculado utilizando os mesmos dados. As estimações clássicas e bayesianas do modelo RB resultaram na maior estimativa do CE-2. O modelo Normal apresentou o menor valor, embora a diferença tenha sido pequena. Se os dados são provenientes do modelo Log-Normal, novamente qualquer modelo utilizado terá aproximadamente o mesmo CE-2.

Considerando o modelo Logit-Normal para geração, a Tabela 9.7 apresenta a média das estimativas do CE-2, o desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança.

TABELA 9.7: CE-2 Geração Logit-Normal

<b>Modelo</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>IC</b>
Normal	0,0185	0,00026	[0,0180 0,0191 ]
Log-Normal	0,0205	0,00031	[0,0199 0,0212 ]
Logit-Normal	0,0216	0,00026	[0,0211 0,0221 ]
RB	0,0204	0,00030	[0,0198 0,0210 ]
RB-Bayes	0,0204	0,00031	[0,0203 0,0204 ]

Novamente as estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. Utilizando o modelo Logit-Normal para geração, a média do CE-2 foi de 0,0202, alcançando assim a maior diferença na forma de calcular capital, um valor 12% maior de CE-2 em relação ao CE-1 quando utilizado a distribuição Logit-Normal para geração. Neste caso, a maior estimativa do CE-2 foi do modelo Logit-Normal e a menor, do modelo Normal. Para dados considerados provenientes do modelo Logit-Normal, não é aconselhado o uso do modelo Normal para cálculo de CE-2, uma vez que sua estimativa foi significativamente menor que para os outros modelos.

De forma análoga, considerando o modelo RB para geração dos dados de recuperações, a Tabela 9.8 apresenta a média das estimativas do CE-2, o desvio padrão e média dos limites inferiores e superiores dos intervalos de confiança.

TABELA 9.8: CE-2 Geração RB

<b>Modelo</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>	<b>IC</b>
Normal	0,0190	0,00025	[0,0186 0,0196 ]
Log-Normal	0,0204	0,00029	[0,0198 0,0210]
Logit-Normal	0,0219	0,00025	[0,0214 0,0224 ]
RB	0,0210	0,00028	[0,0205 0,0217 ]
RB-Bayes	0,0210	0,00027	[0,0210 0,0211 ]

Todas as estimativas exibiram baixos valores de desvio padrão e a amplitude dos intervalos de confiança foi muito pequena. Para geração dos dados de recuperações utilizando o modelo RB, o CE-2 teve média de 0,0206, valor 10% maior do que o CE-1. Novamente, a maior estimativa do CE-2 foi do

modelo Logit-Normal e a menor, do modelo Normal. Para dados considerados provenientes do modelo RB, novamente não é aconselhado o uso do modelo Normal para cálculo de CE-2, uma vez que sua estimativa foi significativamente menor que para os outros modelos.

### 9.2.1 Análise de Resultados do CE-2

Neste caso, podemos observar que a média geral do CE-2, independente da distribuição utilizado para geração ou do modelo utilizado, foi de 2,055% do total exposto. Em todos os casos as estimativas do CE-2 apresentaram valores maiores do que para o CE-1.

Nesta forma de calcular capital econômico, o modelo Normal apresentou a menor estimativa, independente do modelo utilizado para geração dos dados.

O modelo RB, clássico e bayesiano, e o modelo Log-Normal apresentaram valores do CE-2 muito próximos.

Instituições financeiras que utilizam a aproximação normal para determinar seu capital, devem utilizar os modelos Log-Normal, Logit-Normal ou RB para maior segurança. O modelo Normal pode armazenar uma quantia inferior de capital, conseqüentemente oferece um risco maior em relação aos outros modelos.

## 9.3 Análise Geral

A média geral do capital econômico, independentemente da forma calculada ou do modelo utilizado, foi de 0,0196, ou seja, a instituição financeira deve ter, em média, armazenado 1,96% do total exposto. O desvio padrão de todas as estimativas apresentou valores baixos e a amplitude de todos os intervalos foi muito pequena.

No geral, as estimativas do capital econômico considerando a aproximação normal, CE-2, obtiveram resultados relativamente maiores do que quando utilizado a aproximação assintótica, CE-1. Instituições financeiras que utilizem o CE-2, dependendo do modelo utilizado, terão um capital maior para absorver

possíveis perdas. Entretanto para alguns modelos, como o RB, essa diferença não seja de fato significativa. Os programas computacionais desenvolvidos para determinar o CE-2 são mais elaborados e necessitam de um tempo maior de execução em relação ao CE-1.

As estimativas do CE-1 a seguir são determinadas, para cada modelo, pela média das quatro estimativas do CE-1 determinadas através de dados provenientes de cada um dos modelos: Normal, Log-Normal, Logit-Normal e RB. Para o modelo Normal, entre todas as gerações, a média do CE-1 foi de 0,0185. O modelo Log-Normal obteve a menor média do CE-1, de 0,0141. Já a maior média foi do modelo Logit-Normal, de 0,0205. As estimações clássicas e bayesianas do modelo RB obtiveram estimativas do CE-1 muito próximas, de 0,02042 e 0,02045 respectivamente.

As estimativas do CE-2 a seguir são determinadas, para cada modelo, pela média das quatro estimativas do CE-2 determinadas através de dados provenientes de cada um dos modelos: Normal, Log-Normal, Logit-Normal e RB. Para o CE-2, o modelo Normal apresentou média de 0,0191 entre todas as formas de gerações. Tal estimativa foi a menor média do CE-2 entre os modelos. O modelo Log-Normal teve média do CE-2 de 0,0205, uma grande diferença em relação ao CE-1. A média do CE-2 para o modelo Logit-Normal foi de 0,0214, razoavelmente parecida com o CE-1. As estimações clássicas e bayesianas do modelo RB obtiveram as mesmas estimativas para o CE-2, de 0,02085, muito próxima a média do CE-1.

O modelo Log-Normal apresentou uma diferença muito significativa entre as duas maneiras de calcular o capital econômico, chegando a apresentar uma estimativa do CE-2 31% maior do que para o CE-1. Com exceção do modelo Logit-Normal, os modelos apresentaram estimativas do CE-2 maiores do que para o CE-1. O modelo Logit-Normal exibiu um CE-1 aproximadamente 4% maior do que o CE-2. Já os modelos Normal e RB exibiram um CE-2, respectivamente, 3,2% e 1,9% maiores do que o CE-1. Apresentar uma diferença significativa no valor do capital econômico, dependendo da aproximação utilizada, pode não ser um bom sinal para o uso do modelo, uma vez que se espera valores próximos

do CE-1 e CE-2 calculados para o mesmo modelo. Com valores tão distintos de capitais econômicos, ficamos em dúvida de qual aproximação utilizar quando se considera, principalmente, o modelo Log-Normal.

O modelo RB apresentou maior uniformidade nos valores do capital econômico, independente do modelo utilizado na geração ou da forma utilizada para calcular o capital econômico. Analisando as estimativas, podemos concluir que a determinação do capital econômico através do modelo RB, e também do modelo Logit-Normal, apresentam maior segurança, por exibirem valores razoavelmente maiores do CE e conseqüentemente oferecem uma reserva maior para absorver possíveis perdas.

Embora o modelo Logit-Normal apresente um capital econômico mais seguro, assim como o modelo RB, e possua certa uniformidade de seus capitais econômicos, os processos numéricos para determinação de média e variância foram bastante lentos em relação aos outros modelos.



# Capítulo 10

## Conclusão

Muitos dos modelos de créditos de risco utilizados nas instituições financeiras assumem que as LGD ou são constantes determinadas ou variáveis independentes do evento de *default*. Entretanto, muitos estudos já mostraram existir uma correlação significativa entre o evento de *default* e a LGD. Modelos que não consideram essa correlação podem estar subestimando o risco real e podem, eventualmente, acolher um capital econômico inferior ao necessário.

Nesse trabalho, analisamos quatro modelos presentes na literatura levando em conta dependência entre a recuperação e o evento de *default*. Nos modelos, tanto o *default* como a LGD dependem de um fator de risco sistemático simples. Os modelos são utilizados na determinação do capital econômico, evitando uma possível perda em eventuais desacelerações econômicas.

Para os modelos Normal, Log-Normal e Logit-Normal descrevemos passo a passo as abordagens clássicas dos parâmetros.

Por ser muito flexível e restrito ao intervalo  $(0, 1)$ , o modelo RB foi analisado com mais detalhes. Além da metodologia clássica, uma abordagem bayesiana deste modelo foi desenvolvida modelando conjuntamente a média e o parâmetro de dispersão.

Descrevemos detalhadamente o cálculo do capital econômico referente a cada modelo utilizando a aproximação assintótica da distribuição da taxa de perda proposta por Vasicek (2002) e Vasicek (1991). Desenvolvemos também,

para os quatro modelos, a aproximação normal para o cálculo de capital econômico.

Como dados referentes à LGD são dificilmente disponibilizados para estudo, gerou-se um conjunto de dados para cada distribuição analisada. Para cada um dos quatro conjuntos de dados simulados, analisamos as estimativas clássicas de cada modelo e a estimativa bayesiana do modelo RB.

Sob o enfoque clássico, todas as estimativas foram adequadas apresentando uma baixa variância e uma amplitude nos intervalos de confiança muito pequena. O modelo que apresentou menor vício para os parâmetros estimados classicamente foi o modelo RB. Através da análise dos critérios AIC e BIC, podemos concluir que o modelo RB foi o mais adequado, pois além de ser considerado o melhor modelo para dados provenientes do modelo RB, para os outros três casos o modelo RB apresentou valores dos critérios bem próximos aos dos modelos utilizados para geração dos dados.

Sob a metodologia bayesiana do modelo RB, para o estudo de simulação consideramos prioris vagas para todos os parâmetros. Exibimos e analisamos os resultados do método Metropolis-Hasting utilizado para obter informações das distribuições *a posteriori*. A metodologia bayesiana, em termos computacionais, foi bastante lenta em relação ao método clássico.

Seguindo com o estudo de simulação, observando as estimativas dos capitais econômicos, notamos que a aproximação assintótica apresentou valores razoavelmente menores do que a aproximação normal para os modelos. O uso do modelo Log-Normal não é aconselhável, uma vez que apresentou uma diferença significativa entre as duas maneiras de calcular o capital econômico. O modelo RB apresentou maior uniformidade nos valores do capital econômico independente do modelo utilizado para geração ou da aproximação utilizada para determiná-lo.

Embora os modelos Normal e Logit-Normal tenham exibido bons resultados, o modelo Normal não é restrito ao intervalo  $(0, 1)$  e os processos numéricos para determinação de média e variância do modelo Logit-Normal foram bastante lentos em relação aos outros modelos. No processo de geração de dados notamos que o modelo RB é o único modelo que possibilita o uso de dados tanto de recuperações quanto da LGD, ou seja, é o único modelo capaz de assimilar a

---

relação negativa entre o estado da economia e a LGD. Diante de tais fatos e pela análise dos resultados podemos concluir que o modelo RB, clássico ou bayesiano, é o mais adequado para o estudo da LGD.

# Apêndice A

## Função Escore e Matriz de Informação de Fisher

### A.1 Modelo Valor Ativo

A seguir, obtemos os limites inferiores de Cramér-Rao para o desvio padrão dos estimadores de máxima verossimilhança de  $p$  e  $PD$ . Para facilitar as notações chamemos  $\gamma = \Phi^{-1}(PD)$  e  $\delta_t = \Phi^{-1}(DF_t)$ .

Determinaremos a matriz hessiana da log-verossimilhança das taxas de *default*,

$$\begin{aligned} LL &= \sum_{t=1}^T \ln(f(PD, p; DF_t)) \\ &= \frac{T}{2} \ln\left(\frac{1-p}{p}\right) - \frac{T\gamma^2}{2p} + \frac{\sqrt{1-p}}{p} \gamma \sum_{t=1}^T \delta_t + \frac{2p-1}{2p} \sum_{t=1}^T \delta_t^2, \end{aligned}$$

denotemos  $\sum_{t=1}^T \delta_t = s_1$  e  $\sum_{t=1}^T \delta_t^2 = s_2$

A segunda derivada de  $LL$  em respeito a  $p$  e  $PD$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 LL}{dp^2} &= \frac{T}{2} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(1-p)^2} \right) - \frac{T\gamma^2 + s_2}{p^3} + \gamma s_1 \frac{3p^2 - 12p + 8}{4p^3 (1-p)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{s_1^4 + 2T^2 (s_2 + T)^2 - s_1^2 T (3s_2 + 4T) (1 + Var[\delta])^2}{4T^3 Var[\delta]^2}, \end{aligned}$$

com

$$Var[\delta] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_t^2 - \bar{\delta}^2,$$

em que  $\bar{\delta} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_t$ . Denotemos  $\frac{s_1^4 + 2T^2(s_2+T)^2 - s_1^2 T(3s_2+4T)}{4T^3} = s_3$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 LL}{dpdPD} &= \frac{d^2 LL}{dPDdp} = \frac{1}{p^2} \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(PD))} \left( T\Phi^{-1}(PD) + s_1 \frac{p-2}{2\sqrt{1-p}} \right) \\ &= -\frac{1}{T} \frac{\bar{\delta}}{\phi(\gamma)} \frac{(1 + Var[\delta])^{\frac{3}{2}}}{Var[\delta]} \\ \frac{d^2 LL}{dPD^2} &= -\frac{T}{p^2 \phi(\Phi^{-1}(PD))} \left( 1 + \Phi^{-1}(PD)^2 + \bar{\delta} \sqrt{1-p} \right) \Phi^{-1}(PD) \\ &= -\frac{T}{\phi(\gamma)^2} \frac{1 + Var[\delta]}{Var[\delta]}. \end{aligned}$$

O inverso do negativo da matriz Hessiana da função log-verossimilhança em  $(\hat{p}, \hat{PD})$  produz a matriz de Fisher, que é definida como o inverso da matriz de informação nesse ponto.

A matriz Hessiana é dada por

$$H_{LL} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 LL}{dp^2} & \frac{d^2 LL}{dpdPD} \\ \frac{d^2 LL}{dPDdp} & \frac{d^2 LL}{dPD^2} \end{pmatrix}.$$

Logo, temos que a matriz informação de Fisher

$$F_{LL} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} f_{11} &= -\frac{h_{22}}{-h_{12}^2 + h_{11}h_{22}} = \frac{2Var[\delta]^2}{T(1 + Var[\delta])^4}; \\ f_{12} = f_{21} &= \frac{h_{12}}{-h_{12}^2 + h_{11}h_{22}} = -\frac{s_1 \phi(\gamma) Var[\delta]^2}{T^2(1 + Var[\delta])^{7/2}}; \\ f_{22} &= \frac{h_{11}}{-h_{12}^2 + h_{11}h_{22}} = -\frac{s_3 \phi(\gamma)^2 Var[\delta]}{2T^5(1 + Var[\delta])^3}. \end{aligned}$$

## A.2 Modelo RB

A função escore é obtida derivando o logaritmo da função de verossimilhança com respeito aos parâmetros de interesse.

Segue que, para os parâmetros  $\beta$ 's, para  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{dl(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\beta_j} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{dl(\mu_i, \varphi_i)}{d\mu_i} \frac{d\mu_i}{\eta_i} \frac{d\eta_i}{d\beta_j} \right\},$$

com

$$\frac{dl(\mu_i, \varphi_i)}{d\mu_i} = \varphi_i \left\{ \log \left( \frac{y_i}{1 - y_i} \right) - \Psi(\mu_i \varphi_i) + \Psi[(1 - \mu_i) \varphi_i] \right\}.$$

em que  $\Psi(\cdot)$  é a função digamma dada por

$$\Psi(\lambda) = \frac{d \ln \Gamma(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\Gamma'(\lambda)}{\Gamma(\lambda)}, \lambda > 0.$$

Note que

$$\frac{d\mu_i}{\eta_i} = \frac{1}{g'(\mu_i)}$$

e

$$\frac{d\eta_i}{d\beta_j} = x_{ij}.$$

Portanto temos que

$$\frac{dl(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\beta_j} = \sum_{i=1}^n \left\{ \varphi_i \left\{ \log \left( \frac{y_i}{1 - y_i} \right) - \Psi(\mu_i \varphi_i) + \Psi[(1 - \mu_i) \varphi_i] \right\} \frac{x_{ij}}{g'(\mu_i)} \right\}.$$

No caso de se considerar a função ligação logit, temos que

$$\frac{dl(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\beta_j} = \sum_{i=1}^n \left\{ \varphi_i \left\{ \log \left( \frac{y_i}{1 - y_i} \right) - \Psi(\mu_i \varphi_i) + \Psi[(1 - \mu_i) \varphi_i] \right\} \frac{x_{ij}}{\mu_i (1 - \mu_i)} \right\}.$$

Para os parâmetros  $\alpha$ 's temos que

$$\frac{dl(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_j} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{dl(\mu_i, \varphi_i)}{d\varphi_i} \frac{d\varphi_i}{\tau_i} \frac{d\tau_i}{d\alpha_j} \right\},$$

com

$$\begin{aligned} \frac{dl(\mu_i, \varphi_i)}{d\varphi_i} &= \\ &= \mu_i \log(y_i) + (1 - \mu_i) \log(1 - y_i) + \Psi(\varphi_i) - \mu_i \Psi(\mu_i \varphi_i) - (1 - \mu_i) \Psi[(1 - \mu_i) \varphi_i]. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{d\varphi_i}{\tau_i} = \frac{1}{h'(\varphi_i)}$$

e

$$\frac{d\tau_i}{d\alpha_j} = z_{ij}.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dl(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_j} &= \sum_{i=1}^n \mu_i \log(y_i) + (1 - \mu_i) \log(1 - y_i) + \Psi(\varphi_i) - \\ &\quad - \mu_i \Psi(\mu_i \varphi_i) - (1 - \mu_i) \Psi[(1 - \mu_i) \varphi_i] \frac{z_{ij}}{h'(\varphi_i)}. \end{aligned}$$

No caso da função ligação exponencial, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dl(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_j} &= \sum_{i=1}^n \mu_i \log(y_i) + (1 - \mu_i) \log(1 - y_i) + \Psi(\varphi_i) - \\ &\quad - \mu_i \Psi(\mu_i \varphi_i) - (1 - \mu_i) \Psi[(1 - \mu_i) \varphi_i] \frac{z_{ij}}{\varphi_i}. \end{aligned}$$

As derivadas parciais de segunda ordem do log da verossimilhança em função de  $(\mu_i, \varphi_i)$  são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d^2l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\mu_i^2} &= -\varphi_i^2 \left\{ \Psi'(\mu_i \varphi_i) + \Psi'[(1 - \mu_i) \varphi_i] \right\}; \\ \frac{d^2l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\varphi_i^2} &= \Psi'(\varphi_i) - \mu_i^2 \Psi'(\mu_i \varphi_i) - (1 - \mu_i)^2 \Psi'[(1 - \mu_i) \varphi_i]; \\ \frac{d^2l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\mu_i d\varphi_i} &= \varphi_i \left\{ \mu_i \Psi'(\mu_i \varphi_i) - (1 - \mu_i) \Psi'[(1 - \mu_i) \varphi_i] \right\}. \end{aligned}$$

Sendo  $\Psi'$  a função trigama dada por

$$\Psi'(\lambda) = \frac{d\Psi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d^2 \ln \Gamma(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{\Gamma''(\lambda) \Gamma(\lambda) - [\Gamma'(\lambda)]^2}{[\Gamma(\lambda)]^2}, \lambda > 0.$$

Finalmente, calculamos a matriz informação de Fisher que é dada pelo negativo da esperança da segunda derivada do log da função de verossimilhança em respeito aos parâmetros de interesse.

$$K = K(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} K_{\beta\beta} & K_{\beta\alpha} \\ K_{\alpha\beta} & K_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}.$$

Os elementos da matriz de informação de Fisher são:

$$\begin{aligned} K_{\beta\beta} &= -E \left( \frac{d^2l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\beta_j d\beta_k} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{d^2l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\mu_i^2} \frac{x_{ij} x_{ik}}{(g'(\mu_i))^2} \\ K_{\alpha\alpha} &= -E \left( \frac{d^2l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_j d\alpha_k} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{d^2l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{d\varphi_i^2} \frac{z_{ij} z_{ik}}{(h'(\varphi_i))^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{\beta\alpha} &= K_{\alpha\beta} = -E \left( \frac{d^2l(\beta, \alpha)}{d\alpha_j d\beta_k} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d^2l(\beta, \alpha)}{d\mu_i d\varphi_i} \frac{z_{ij} x_{ik}}{g'(\mu_i) h'(\varphi_i)}.
\end{aligned}$$

No caso de considerarmos as funções ligação logit e exponencial para  $g(\cdot)$  e  $h(\cdot)$  respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
K_{\beta\beta} &= -E \left( \frac{d^2l(\beta, \alpha)}{d\beta_j d\beta_k} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{d^2l(\beta, \alpha)}{d\varphi_i^2} \frac{x_{ij} x_{ik}}{(\varphi_i)^2} \\
K_{\alpha\alpha} &= -E \left( \frac{d^2l(\beta, \alpha)}{d\alpha_j d\alpha_k} \right) = - \sum_{i=1}^n \frac{d^2l(\beta, \alpha)}{d\mu_i^2} \frac{z_{ij} z_{ik}}{(\mu_i (1 - \mu_i))^2} \\
K_{\beta\alpha} &= K_{\alpha\beta} = -E \left( \frac{d^2l(\beta, \alpha)}{d\alpha_j d\beta_k} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d^2l(\beta, \alpha)}{d\mu_i d\varphi_i} \frac{z_{ij} x_{ik}}{\varphi_i \mu_i (1 - \mu_i)}.
\end{aligned}$$



# Apêndice B

## Lemas

A prova das Proposições 1, 2 e 3 requerem uma versão da lei do forte dos grandes números para uma seqüência  $\{Y_n\}$  de variáveis aleatórias independentes e uma seqüência  $\{a_n\}$  de constantes positivas. Os lemas necessários para provar tais fatos são apresentados a seguir.

**Lema 1.**(Petrov (1995)) Se  $a_n \rightarrow \infty$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} (Var [Y_n] / a_n^2) < \infty$ , então

$$\frac{1}{a_n} \left( \sum_{i=1}^n Y_i - E \left[ \sum_{i=1}^n Y_i \right] \right) \xrightarrow{q.c.} 0.$$

**Lema 2.** Se  $\{b_n\}$  é uma seqüência de numeros reais positivos tal que  $b_n = O(n^{-\rho})$  para algum  $\rho > 1$ , então

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

Este lema é um corolário do Teorema 3.5.2 em Knopp (1956) e da convergência da série harmônica  $1/n^\rho$  para  $\rho > 1$  (ver Knopp (1956), Exemplo 3.1.2.3).

**Lema 2.** Sejam  $\{b_n\}$  e  $\{d_n\}$  seqüências de reais tal que  $a_n \equiv \sum_{i=1}^n b_i \rightarrow \infty$  e  $d_n \rightarrow 0$ . Então

$$(1/a_n) \sum_{i=1}^n b_i d_i \rightarrow 0.$$

Este resultado é um caso especial de Petrov (1995), Lema 6.10.

# Apêndice C

## Gráficos

Para a abordagem bayesiana do modelo RB, a seguir temos os gráficos de convergência e de correlação para os parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  do modelo.

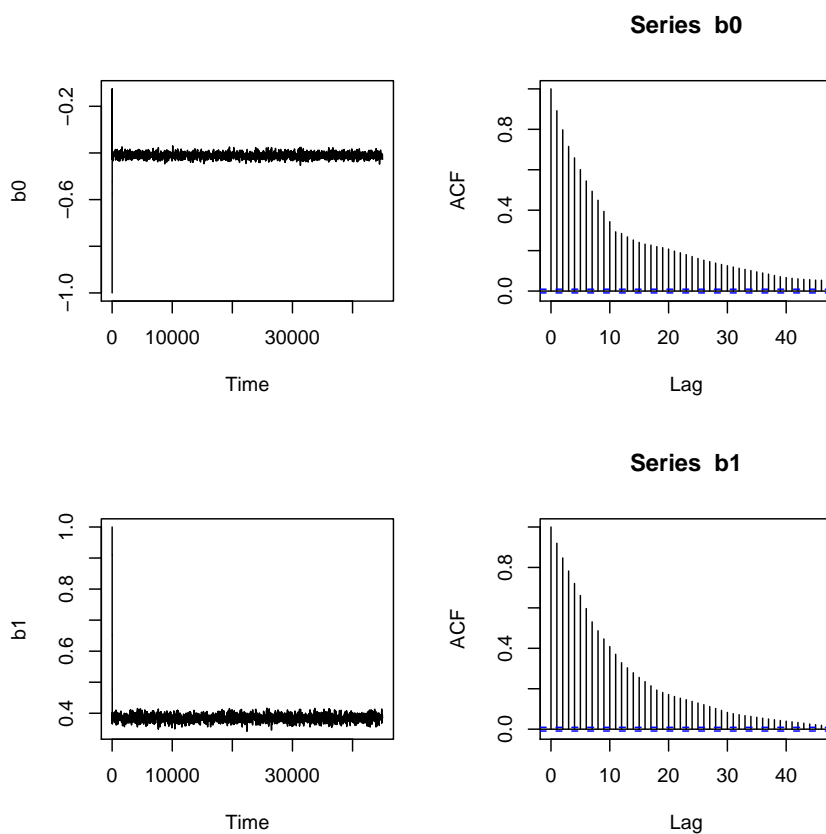
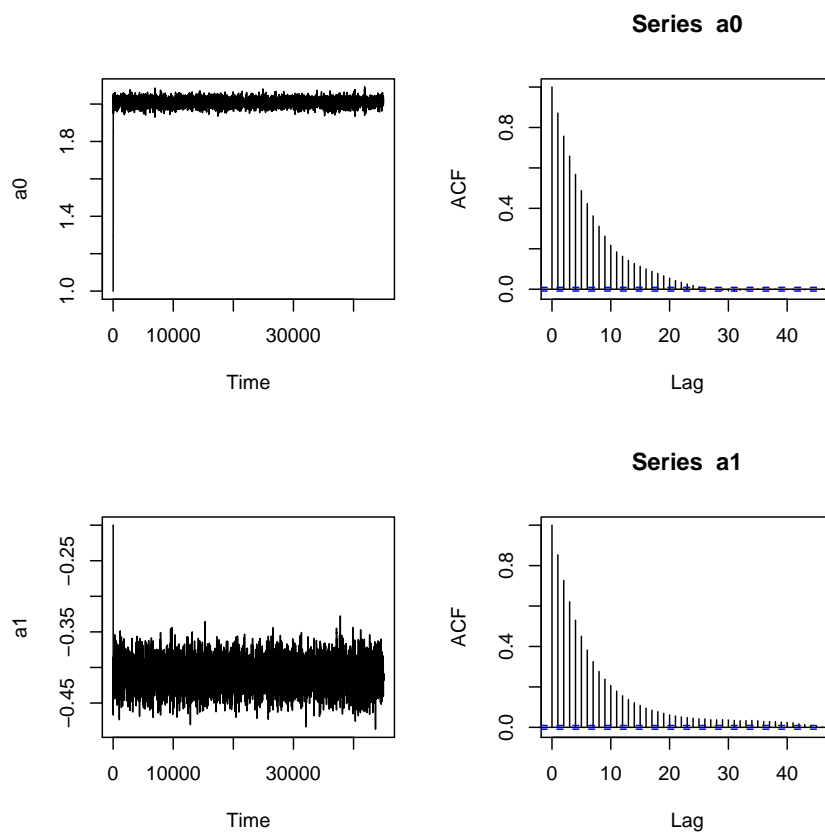


FIGURA C.1: Gráficos de convergência e correlação de  $\beta_0$  e  $\beta_1$

FIGURA C.2: Gráficos de convergência e correlação de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$

# Referências Bibliográficas

- Dullmann, K., Trapp, M. & Bundesbank, D. Systematic risk in recovery rates-an empirical analysis of US corporate credit exposures. 2004.
- Ferrari, S. & Cribari-Neto, F. Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 31(7):799–815, 2004.
- Finger, C. Conditional approaches for CreditMetrics portfolio distributions. *CreditMetrics Monitor*, 1:14–33, 1999.
- Frye, J. Depressing recoveries. *Risk-London-Risk Magazine Limited-*, 13(11), 2000.
- Geweke, J. Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to Calculating Posterior Moments. *Bayesian Statistics*, 4, 1992.
- Gordy, M. A comparative anatomy of credit risk models. *Journal of Banking & Finance*, 24(1-2):119–149, 2000.
- Gordy, M. A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules. *Journal of Financial Intermediation*, 12(3):199–232, 2003.
- Huang, X. & Oosterlee, C. Generalized beta regression models for random loss-given-default. Delft University of Technology Report, pages 08–10, 2008.
- Huang, X., Oosterlee, C. & Mesters, M. Computation of VaR and VaR Contribution in the Vasicek portfolio credit loss model: a comparative study. *Journal of Credit Risk*, 3(3):75–96, 2007.
- Knopp, K. *Infinite sequences and series*. Dover Pubns, 1956.
- Petrov, V. *Limit theorems of probability theory: sequences of independent random variables*. Oxford University Press, USA, 1995.
- Pykhtin, M. Unexpected recovery risk. *Risk*, 16(8):74–78, 2003.
- Schonbucher, P. *Factor models for portfolio credit risk*. Department of Statistics, Bonn University, 2000.
- Vasicek, O. *Limiting loan loss probability distribution*. KMV corporation, 1991.
- Vasicek, O. The distribution of loan portfolio value. *Risk*, 15(12):160–162, 2002.