

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Modelagem de tempo de falha acelerado para sistemas reparáveis considerando fragilidade e diferentes funções de aceleração

Edilenia Queiroz Pereira

Tese de Doutorado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Edilenia Queiroz Pereira

Modelagem de tempo de falha acelerado para sistemas reparáveis considerando fragilidade e diferentes funções de aceleração

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.
VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Estatística

Orientador: Prof. Dr. Oilson Alberto Gonzatto Junior

USP – São Carlos
Setembro de 2025

Edilenia Queiroz Pereira

**Accelerated failure time modeling for repairable systems
considering frailty and acceleration functions**

Thesis submitted to the Institute of Mathematics and Computer Science – ICMC-USP and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar – in accordance with the requirements of the Statistics Interagency Graduate Program, for the degree of Doctor in Statistics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Prof. Dr. Oilson Alberto Gonzatto Junior

**USP – São Carlos
September 2025**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Edilenia Queiroz Pereira, realizada em 25/08/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Oilson Alberto Gonzatto Junior (USP)

Prof. Dr. Francisco Louzada Neto (USP)

Prof. Dr. Paulo Henrique Ferreira da Silva (UFBA)

Profa. Dra. Lia Hanna Martins Morita (UFMT)

Prof. Dr. Tito Lívio da Cunha Lopes (TRF5)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.

*Dedico este trabalho aos pequenos
grandes amores da minha vida:
Lenz, Oto e Manuela.*

AGRADECIMENTOS

Encerrar este ciclo é olhar para trás com alegria e reconhecimento a Deus pela oportunidade de crescimento pessoal e profissional. Na vida não caminhamos sozinhos, a superação veio porque tive comigo pessoas incríveis me apoiando. Aqui, deixo meu agradecimento a cada um que contribuiu para que eu pudesse iniciar, persistir e concluir essa pesquisa.

Ao Prof. Dr. Oilson Gonzatto, meu orientador, por estar ao meu lado desde antes do início desta jornada. Suas palavras de incentivo, paciência, acolhimento, ensinamentos e confiança foram fundamentais em cada etapa. Sua presença constante, a serenidade diante do caos, a amizade e a segurança transmitida me ajudaram a superar limites e esclarecer dúvidas. Sua orientação tornou minha caminhada mais leve e foi indispensável para meu aprendizado e crescimento profissional. Obrigada pela presença, discussões enriquecedoras e direcionamento oferecido ao longo do caminho.

À professora Dr^a. Vera Tomazella, que chegou de forma discreta, organizou toda a minha trajetória acadêmica. Com sensibilidade, foi eliminando incertezas, acolhendo, orientando, encorajando e reunindo pessoas incríveis para trilhar comigo essa jornada. Agradeço pela sua presença, discussões e direcionamento ao longo do processo.

À toda a minha família, meu maior alicerce, que sempre torce por mim e me apoia em cada novo desafio que busco realizar. Em especial, às minhas joias raras, Lenz Queiroz Oliveira, Oto Queiroz Oliveira, ao meu esposo, Antônio Oliveira, minha mãe Ildete Queiroz, meu pai Manoel Lacerda, meu irmão Enio Queiroz, minha sobrinha Manuela Brandão e cunhada Andreia Brandão, por todo o suporte, apoio, paciência, carinho e compreensão ao longo desta jornada.

Aos queridos amigos e amigas, Adriane Portela, Marcos Jardel, Adolfo Manoel, Marcia Lorena, Beatriz Regina, Hellen Geremias, Eder Brito, e tantos outros colegas do PIPGEs que estiveram presentes em momentos desafiadores e marcantes desta trajetória, agradeço pelo incentivo constante, pelo apoio generoso e pela companhia que tornou o caminho mais leve.

Ao projeto de pesquisa que tive a honra de integrar e aos professores e pesquisadores com quem tive a oportunidade de conviver, aprender, colaborar e crescer nessa trajetória.

Aos membros da banca examinadora, meu agradecimento pela generosa aceitação do convite e pela disposição em contribuir com este momento tão significativo.

Agradeço aos professores e funcionários do PIPGEs pelo suporte prestado à pesquisa, assim como à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), Código de Financiamento 001, pelo apoio financeiro que viabilizou este trabalho.

*“Se renove, siga em frente.
Se arrisque, se prepare
E se cair jamais pare
Se levante, se refaça,
Se entenda, se reconheça
E, se chorar, agradeça
cada vez que achou graça.

Se desfaça da preguiça,
do medo, da covardia
Se encante pela chance de viver um novo dia
Se ame e seja amor
Se apaixone, por favor,
Se queira e queira bem,
Se pegue, se desapegue
Se agite, desassossegue
E se acalme também.

Se olhe, se valorize
E se permita errar
Se dê de presente a chance
de pelo menos tentar
Se o SE for bem usado,
o impossível sonhado
pode se realizar.”*

(Bráulio Bessa - Poesia que transforma)

RESUMO

PEREIRA, E. Q. **Modelagem de tempo de falha acelerado para sistemas reparáveis considerando fragilidade e diferentes funções de aceleração**. 2025. 157 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

A análise de confiabilidade em testes acelerados busca compreender e antecipar o comportamento de sistemas submetidos a condições de estresse intensificado, permitindo estimar sua durabilidade em condições normais de uso. Nesse contexto, as funções de aceleração desempenham um papel central, pois descrevem como o estresse afeta o tempo até a falha. O principal objetivo desta tese é investigar, estudar e propor funções de aceleração que ampliem a capacidade dos modelos em capturar relações complexas entre estresse e resposta. Para isso, adota-se o contexto de múltiplos sistemas reparáveis sob a suposição de reparo mínimo, cujas falhas seguem um Processo de Poisson Não Homogêneo com função de intensidade de base regida pelo Processo de Lei de Potência. A modelagem também incorpora a variabilidade não observada por meio da fragilidade, capturando efeitos aleatórios que afetam o desempenho dos sistemas ao longo do tempo. A construção dos modelos foi realizada em diferentes etapas. Inicialmente, propôs-se o modelo de tempo de falha acelerado exponencial com fragilidade Lindley ponderada, em comparação ao modelo com fragilidade gama. Na sequência, ampliou-se o escopo das funções de aceleração para incluir as formas clássicas de Arrhenius, de Eyring e de Potência Inversa em comparação à Exponencial, resultando em oito modelos: quatro sem a inclusão de fragilidade e quatro com a incorporação de fragilidade gama. Posteriormente, foram propostas duas novas funções de aceleração, Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada, com o objetivo de proporcionar maior flexibilidade à modelagem e ampliar seu potencial de aplicação em diferentes cenários de estresse acelerado, superando limitações das formas clássicas. Por fim, foram desenvolvidos dois modelos adicionais combinando essas novas funções com a inclusão de fragilidade gama. A estimação dos parâmetros, para todos os modelos propostos, foi realizada sob a abordagem frequentista, por meio da construção da função de verossimilhança e da obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança, juntamente com seus intervalos de confiança assintóticos, determinados por métodos numéricos. Em todos os casos, o desempenho dos estimadores foi avaliado por meio de um estudo de simulação abrangendo diferentes cenários e níveis de aceleração e todos os modelos apresentaram resultados satisfatórios. A aplicabilidade desses modelos foi ilustrada com exemplos práticos envolvendo múltiplos sistemas e diferentes níveis de estresse, evidenciando a relevância dessas funções de aceleração para a análise de confiabilidade em testes acelerados.

Palavras-chave: Fragilidade; Funções de aceleração; Modelo de regressão; Processo de Lei de Potência; Sistemas reparáveis; Testes acelerados.

ABSTRACT

PEREIRA, E. Q. **Accelerated failure time modeling for repairable systems considering frailty and acceleration functions**. 2025. 157 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

Reliability analysis in accelerated life testing aims to understand and anticipate the behavior of systems subjected to intensified stress conditions, enabling the estimation of their durability under normal usage conditions. In this context, acceleration functions play a central role, as they describe how stress affects the time to failure. The main objective of this thesis is to investigate, study, and propose acceleration functions that enhance the models' ability to capture complex relationships between stress and response. To this end, we adopt the context of multiple repairable systems under the assumption of minimal repair, where failures follow a Non-Homogeneous Poisson Process (NHPP) with a baseline intensity function governed by a Power Law Process. The modeling also incorporates unobserved heterogeneity through a frailty term, capturing random effects that influence system performance over time. Model development was carried out in several stages. Initially, an exponential accelerated failure time model with weighted Lindley frailty was proposed and compared to a model with gamma frailty. Next, the scope of acceleration functions was expanded to include the classical forms: Arrhenius, Eyring, and Inverse Power, in comparison with the Exponential form. This methodological extension resulted in eight models: four without frailty and four incorporating gamma frailty. Subsequently, two new acceleration functions were proposed, Exponentiated Exponential and Exponentiated Eyring, aiming to provide greater flexibility in modeling and broaden the potential for application in different accelerated stress scenarios, overcoming limitations of classical forms. Finally, two additional models were developed by combining these new functions with the inclusion of gamma frailty. Parameter estimation for all proposed models was conducted under a frequentist approach, through the construction of the likelihood function and the derivation of maximum likelihood estimators, along with their asymptotic confidence intervals obtained via numerical methods. In all cases, the performance of the estimators was evaluated through a simulation study that covered various scenarios and acceleration levels, and all models yielded satisfactory results. The applicability of these models was illustrated with practical examples involving multiple systems and varying stress levels, highlighting the relevance of these acceleration functions for reliability analysis in accelerated life testing.

Keywords: Acceleration functions; Accelerated testing; Frailty; Power Law Process; Regression model; Repairable systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estrutura geral relacionando os modelos propostos e os capítulos da tese.	34
Figura 2 – Relação entre o número de eventos $N(t)$, os tempos entre falhas (X_j) e os tempos de calendário (T_j).	38
Figura 3 – Função de intensidade do PLP com $\gamma = 3$ e diferentes valores de κ	43
Figura 4 – Representação dos tempos de falha no contexto de múltiplos sistemas reparáveis e truncamento por tempo.	44
Figura 5 – Ilustração da intensidade ao longo do tempo para reparo mínimo na presença de múltiplos reparos.	45
Figura 6 – Formas de aplicação das cargas de estresse.	49
Figura 7 – Estrutura básica de um modelo de tempo de falha acelerado, composta por componentes determinístico e probabilístico.	51
Figura 8 – Alguns comportamentos possíveis para as funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade do modelo tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada, considerando os valores fixos de $\gamma = 5$, $\kappa = (0, 5; 1, 0; 1, 5)$, $\alpha = (0, 2; 1, 0; 3, 0)$, e considerando dois contextos de aceleração $e^{\beta_0} \sim e^{\beta_0 + \beta_1}$ e $e^{\beta_0} \ll e^{\beta_0 + \beta_1}$	65
Figura 9 – Resultados da simulação da MRE para modelos sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley ponderada, considerando 1000 réplicas de Monte Carlo e os cenários $\kappa = (0, 5; 1, 0; 1, 5)$, $\gamma = 5$, $\alpha = (0, 2; 1, 0; 3, 0)$, $\beta_0 = (1, 0; \log(0, 55))$ e $\beta_1 = (-1, 0; \log(0, 60)/\log(0, 55))$, considerando uma quantidade de 4 e 10 sistemas dentro de um contexto acelerado. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação ocorre na última coluna de cada um dos 3 cenários.	69
Figura 10 – Resultados de simulação da RMSE para modelos sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada, considerando 1000 réplicas de Monte Carlo e os cenários $\kappa = (0, 5; 1, 0; 1, 5)$, $\gamma = 5$, $\alpha = (0, 2; 1, 0; 3, 0)$, $\beta_0 = (1, 0; \log(0, 55))$ e $\beta_1 = (-1, 0; \log(0, 60)/\log(0, 55))$, considerando uma quantidade de 4 e 10 sistemas dentro de um contexto acelerado. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação ocorre na última coluna de cada um dos 3 cenários.	70

Figura 11 – Resultados da simulação da CP para modelos sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada, considerando 1000 réplicas de Monte Carlo e os cenários $\kappa = (0,5; 1,0; 1,5)$, $\gamma = 5$, $\alpha = (0,2; 1,0; 3,0)$, $\beta_0 = (1,0; \log(0,55))$ e $\beta_1 = (-1,0; \log(0,60)/\log(0,55))$, considerando uma quantidade de 4 e 10 sistemas dentro de um contexto acelerado. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação ocorre na última coluna de cada um dos 3 cenários.	71
Figura 12 – Descrição das falhas observadas, referentes a cada um dos motores e seu nível de aceleração ao longo do tempo.	75
Figura 13 – Descrição do acúmulo de falhas em cada um dos sistemas, que foram divididos em dois níveis, e do acúmulo médio de falhas observado (representadas pelas linhas destacadas).	76
Figura 14 – Curvas médias de acumulação de falhas para cada sistema em relação ao grupo, considerando os modelos de tempo de falha acelerado sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada.	77
Figura 15 – Função média empírica acumulada versus função média estimada acumulada.	78
Figura 16 – Representação das formas assumidas por cada uma das relações especificadas, Exponencial, Arrhenius, Eyring e Potência Inversa, em diferentes níveis de aceleração, com β_1 variando e β_0 mantido fixo.	83
Figura 17 – Funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade dos modelos Exponencial, Arrhenius, Eyring e Potência Inversa.	85
Figura 18 – Funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade dos quatro modelos com fragilidade Gama.	87
Figura 19 – Resultados para o erro percentual médio absoluto. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação está na coluna $\alpha = 0,2$	91
Figura 20 – Resultados para o erro quadrático médio padronizado. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação está na coluna $\alpha = 0,2$	91
Figura 21 – Resultados para a probabilidade de cobertura. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação está na coluna $\alpha = 0,2$	92
Figura 22 – Descrição das falhas observadas, referentes a cada uma das 30 baterias e seu nível de corrente elétrica ao longo de 100 dias.	94
Figura 23 – Descrição do acúmulo de falhas em cada um dos 30 sistemas, que foram divididos em 3 níveis de corrente elétrica, e o acúmulo médio de falhas observado (representado pela linha destacada).	94
Figura 24 – Análise comparativa da função acumulada média estimada para os oito modelos ajustados.	96
Figura 25 – Função média empírica acumulada versus função média estimada acumulada.	97

Figura 26 – A confiabilidade da próxima falha de cada bateria prevista pelo modelo de tempo de falha acelerado Arrhenius com fragilidade gama.	98
Figura 27 – Comportamento das funções de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada em relação aos níveis de aceleração para diferentes valores do parâmetro β_1 , com β_0 fixo.	103
Figura 28 – Funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade dos modelos de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada.	106
Figura 29 – Resultados do MAPE em Função dos Cenários e Parâmetros Avaliados. . .	111
Figura 30 – Resultados do SRMSE em Função dos Cenários e Parâmetros Avaliados. . .	111
Figura 31 – Resultados da CP em Função dos Cenários e Parâmetros Avaliados.	112
Figura 32 – Descrição das falhas observadas, referentes a cada um dos 9 motores e seu nível de carga ao longo do período de 10 semanas.	113
Figura 33 – O acúmulo de falhas observado em nove sistemas, agrupados em três níveis de carga, com a linha em destaque representando o acúmulo médio de falhas.	114
Figura 34 – Função acumulada média estimada para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, sobreposta às curvas do número médio acumulado observado de falhas para cada sistema.	115
Figura 35 – Função acumulada média empírica versus a função acumulada média estimada, apresentada para o modelo de tempo de falha Exponencial Exponenciada.	115
Figura 36 – Representação da função de aceleração estimada, $g(\hat{x})$ para o modelo Exponencial Exponenciada, ilustrando a relação entre os níveis de aceleração e o impacto na taxa de falha do sistema.	116
Figura 37 – Previsão da intensidade acumulada condicionada e da confiabilidade condicionada até o tempo de 2 semanas.	117
Figura 38 – Confiabilidade da próxima falha de cada motor prevista pelo modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada.	117
Figura 39 – Descrição das falhas observadas, referentes a cada um dos 15 motores e seu nível de temperatura de operação ao longo de 5 dias.	119
Figura 40 – O acúmulo de falhas observado em 15 motores, agrupados em três níveis de temperatura de operação, com a linha em destaque representando o acúmulo médio de falhas.	119
Figura 41 – Função acumulada média estimada para o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada, sobreposta às curvas do número médio acumulado observado de falhas para cada motor.	120
Figura 42 – Função acumulada média empírica em função da função acumulada média estimada, apresentada para o modelo de tempo de falha Eyring Exponenciada.	121
Figura 43 – Representação da função de aceleração estimada $\hat{g}(x)$ para o modelo Eyring Exponenciada, ilustrando a relação entre os níveis de temperatura em operação e o impacto na taxa de falha do sistema.	122

Figura 44 – Previsão da intensidade acumulada condicionada e da confiabilidade condicionada até 1 dia.	122
Figura 45 – Confiabilidade da próxima falha de cada motor prevista pelo modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada.	123
Figura 46 – Representação das funções de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada considerando diferentes valores do parâmetro β_1 , com β_0 fixo.	126
Figura 47 – Resultados dos MAPE para os modelos de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando 1.000 replicações de Monte Carlo e diferentes cenários.	133
Figura 48 – Resultados dos SRMSE para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama e o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando 1.000 replicações de Monte Carlo e diferentes cenários.	134
Figura 49 – Resultados das CP de 0,95 para os modelos de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama e Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando 1.000 replicações de Monte Carlo e diferentes cenários.	135
Figura 50 – Descrição das falhas observadas nas 20 bombas centrífugas, considerando as diferentes condições térmicas ao longo de 10 dias de operação.	136
Figura 51 – Acúmulo de falhas observado nas 20 bombas centrífugas, agrupadas em dois níveis de condição térmica. A linha em destaque representa a curva média empírica de acúmulo de falhas, obtida a partir das trajetórias individuais de cada grupo.	137
Figura 52 – Função acumulada média estimada até 10 dias pelo modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama, sobreposta às curvas do número acumulado de falhas observadas nas 20 bombas centrífugas, em cada condição térmica.	138
Figura 53 – Comparação entre a função acumulada média empírica e a função acumulada média estimada pelo modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama.	138
Figura 54 – Representação da função de aceleração estimada $g(x)$ para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama, ilustrando a relação entre a condição térmica aplicada e seu impacto na taxa de falha das bombas centrífugas.	139
Figura 55 – Previsões da intensidade acumulada e da confiabilidade, condicionadas ao histórico de falhas até $t_n = 10$ dias, projetadas para os períodos subsequentes, com base no modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama.	140

Figura 56 – Projeções da confiabilidade, condicionadas ao histórico de falhas de cada unidade testada, para períodos futuros, obtidas por meio do modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, considerando dois níveis de condição térmica.	141
Figura 57 – Padrão temporal de falhas registrado nos veículos, de acordo com a condição de rota.	142
Figura 58 – Acúmulo de falhas observado nos 12 veículos avaliados, organizados conforme os três grupos experimentais definidos pela condição térmica. A linha em destaque representa a curva média empírica de acúmulo de falhas, obtida a partir da média das trajetórias individuais de cada grupo.	143
Figura 59 – Função de intensidade acumulada estimada pelo modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, sobreposta às trajetórias empíricas observadas para os 12 veículos, agrupados conforme o nível de estresse térmico.	144
Figura 60 – Comparação entre a função acumulada média empírica e a função acumulada média estimada pelo modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama.	145
Figura 61 – Representação da função de aceleração estimada para o modelo Eyring Exponenciada com fragilidade gama.	146
Figura 62 – Previsões da intensidade acumulada e da confiabilidade, condicionadas ao histórico de falhas até $t_n = 1$ mês, projetadas para os períodos subsequentes, com base no modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama.	146
Figura 63 – Estimativas da confiabilidade, condicionadas ao histórico de falhas de cada veículo testado, para períodos futuros, obtidas por meio do modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando três níveis de estresse térmico.	147

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Percentual de identificação do modelo verdadeiro com base nos valores de AIC, BIC e AICc nos cenários 2 e 3.	73
Tabela 2 – Dados referentes às falhas registradas para cada um dos 10 motores submetidos ao teste acelerado em laboratório.	75
Tabela 3 – Estimativas de modelos de tempo de falha acelerado sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada.	77
Tabela 4 – Resultados dos critérios de seleção de modelos para os 3 modelos aplicados aos dados de motores de automóveis.	78
Tabela 5 – Apresentação das expressões matemáticas associadas às relações Exponencial, de Arrhenius, de Eyring e de Potência Inversa.	82
Tabela 6 – Influência da função $g(x)$ na intensidade de falha e no tempo de vida para diferentes relações e valores de β_1	83
Tabela 7 – Estimativas dos quatro modelos de tempo de falha acelerado sem fragilidade.	95
Tabela 8 – Estimativas dos quatro modelos de tempo de falha acelerado com fragilidade gama.	95
Tabela 9 – Resultados dos critérios de seleção para cada um dos oito modelos ajustados aplicados aos dados da bateria.	97
Tabela 10 – Funções de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada propostas.	102
Tabela 11 – Função de verossimilhança e log-verossimilhança do modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada.	107
Tabela 12 – Função de verossimilhança e log-verossimilhança do modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada.	107
Tabela 13 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada.	114
Tabela 14 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada.	120
Tabela 15 – Resumo das influências das funções Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada em diferentes condições de β_1	127
Tabela 16 – Funções de intensidade ($\lambda_s(t)$) e intensidade acumulada ($\Lambda_s(t)$) para os modelos Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada.	129

Tabela 17 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama.	137
Tabela 18 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama.	143

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CP	probabilidade de cobertura de 95%
i.i.d.	independentes e identicamente distribuídas
IC	intervalos de confiança
MRE	estimativa média relativa
PLP	Processo de Lei de Potência
PPH	Processo de Poisson Homogêneo
PPNH	Processo de Poisson Não Homogêneo
RMSE	raiz do erro quadrático médio
ZDDP	Zinco Dialquiditiofosfato

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Objetivo	32
1.2	Organização do trabalho	32
1.3	Produção	34
2	REFERENCIAL TEÓRICO	37
2.1	Processo de contagem	37
2.1.1	<i>Processo de Poisson</i>	40
2.1.2	<i>PLP</i>	41
2.2	Sistemas reparáveis	43
2.3	Testes acelerados	47
2.3.1	<i>Modelo de tempo de falha acelerado</i>	51
2.3.1.1	<i>PLP para a intensidade de base</i>	54
2.4	Modelos de fragilidade	55
2.5	Observações Finais	58
3	MODELOS ACELERADOS EXPONENCIAL COM FRAGILIDADE PARA MÚLTIPLOS SISTEMAS REPARÁVEIS	59
3.1	Modelo de Tempo de Falha Acelerado Exponencial com Fragilidade Gama e Lindley Ponderada	60
3.1.1	<i>Distribuição de Fragilidade Gama</i>	61
3.1.2	<i>Distribuição de Fragilidade Lindley Ponderada</i>	63
3.2	Estimação	65
3.3	Estudo de Simulação	67
3.3.1	<i>Discriminação Inadequada do Modelo</i>	72
3.4	Aplicação	73
3.4.1	<i>Sistema de Motor de Carro: Um Toy Exemplo</i>	73
3.5	Observações Finais	79
4	MODELOS ACELERADOS COM FRAGILIDADE GAMA PARA SISTEMAS REPARÁVEIS: ENFOQUE EM FUNÇÕES CLÁSSICAS DE ACELERAÇÃO	81
4.1	Representações Funcionais do Efeito de Estresse	82
4.2	Efeitos do Estresse sobre o Tempo de Falha: Modelagem Acelerada	84

4.2.1	<i>Modelos de Tempo de Falha Acelerado com Fragilidade Gama . . .</i>	85
4.3	Estimação	88
4.4	Estudo de Simulação	89
4.5	Aplicação	92
4.5.1	<i>Sistemas de Bateria: Um exemplo de Aplicação</i>	93
4.6	Considerações finais	99
5	MODELOS ACELERADOS EM SISTEMAS REPARÁVEIS COM NOVOS FUNÇÕES DE ACELERAÇÃO	101
5.1	Proposição de Novos Fatores de Aceleração na Modelagem Acelerada de Sistemas Reparáveis	102
5.1.1	<i>Estimação</i>	106
5.2	Avaliação Numérica	109
5.2.1	<i>Estudo de simulação</i>	109
5.2.2	<i>Aplicação 1: Falhas em Motores Elétricos Industriais</i>	112
5.2.3	<i>Aplicação 2: Eficácia Térmica de Aditivos de Extrema Pressão em Condições Operacionais Variadas</i>	118
5.3	Observações Finais	123
6	MODELOS ACELERADOS COM FRAGILIDADE GAMA PARA SISTEMAS REPARÁVEIS COM NOVOS FUNÇÕES DE ACELERAÇÃO	125
6.1	Novas Funções de Aceleração para Sistemas Reparáveis com Fragilidade	126
6.1.1	<i>Modelo de Tempo de Falha Acelerado Exponencial Exponenciada com Fragilidade Gama</i>	127
6.1.2	<i>Modelo de Tempo de Falha Acelerado Eyring Exponenciada com Fragilidade Gama</i>	128
6.1.3	<i>Estimação</i>	129
6.2	Avaliação Numérica	131
6.2.1	<i>Estudo de Simulação</i>	131
6.3	Aplicação	135
6.3.1	<i>Comportamento de Falhas em Bombas sob Diferentes Condições Térmicas</i>	136
6.3.2	<i>Desempenho de sistemas de frenagem em veículos pesados com pastilhas termoativadas</i>	141
6.4	Observações Finais	147
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	149
7.1	Observações Finais	149

REFERÊNCIAS	151
------------------------------	------------

INTRODUÇÃO

A confiabilidade é definida como a probabilidade de um item desempenhar uma função necessária sem falhas, sob condições específicas, por um determinado período de tempo (BIROLINI, 2007). No mercado de trabalho, esse conceito é um fator importante para o sucesso das organizações em um cenário competitivo. Além da adoção de tecnologias avançadas, as empresas precisam garantir que seus sistemas e serviços sejam robustos e confiáveis. Isso não apenas atende às expectativas dos clientes, mas também representa um diferencial competitivo significativo em um ambiente onde inovação e excelência operacional são fundamentais para a continuidade e o crescimento dos negócios (O'CONNOR; KLEYNER, 2012). Essa preocupação tem sido amplamente discutida na literatura recente, com diversos estudos abordando o tema, como, por exemplo, Zhan e Xiao (2025), Shen *et al.* (2025), e Papaioannou e Straub (2025).

Essa busca pelo aprimoramento da confiabilidade de sistemas impulsiona o desenvolvimento de metodologias que permitam compreender o comportamento desses equipamentos sob condições desafiadoras. Nesse contexto, os testes acelerados são utilizados como uma abordagem estatística relevante, pois permitem a avaliação da confiabilidade do sistema em intervalos de tempo reduzidos, ou quando não é viável aguardar o tempo real de ocorrência das falhas. Esses testes consistem em submeter os sistemas a níveis de estresse elevados ou não usuais, como por exemplo, temperatura, pressão ou tensão elétrica, com o objetivo de antecipar a ocorrência das falhas, reduzindo o tempo necessário para que se manifestem. Essa aceleração é controlada por funções de aceleração, que relacionam os níveis de estresse às mudanças na distribuição do tempo de falha (MEEKER; ESCOBAR, 1993; NELSON, 2009).

Essas funções são fundamentais na modelagem de testes acelerados, pois relacionam covariáveis, como temperatura, pressão, tensão, ao tempo de falha de um sistema. Essa relação permite extrapolar os resultados obtidos em condições severas para situações de uso normal (MEEKER; ESCOBAR; PASCUAL, 2022). Estudos recentes reforçam a relevância desse tipo de modelagem em aplicações industriais (PEREIRA *et al.*, 2024; WILKE; LO, 2025; TANG;

CAI, 2025).

A especificação adequada dessas funções de aceleração, aliada à validação do modelo, auxilia na obtenção de ajustes mais precisos, resultando em estimativas confiáveis e permitindo inferências robustas sobre a durabilidade e o desempenho do produto ao longo do tempo. Além disso, todos esses fatores contribuem diretamente para a eficiência dos experimentos, pois antecipam as falhas e viabilizam a análise de fenômenos que, em condições normais de uso, exigiriam longos períodos de observação. Com isso, reduzem-se tanto o tempo quanto os custos envolvidos nos estudos (MEEKER; ESCOBAR; PASCUAL, 2021). Trabalhos como os de Neto (1991), Freitas e Colosimo (1997), Escobar e Meeker (2006), Pereira *et al.* (2024) não apenas utilizam, mas também exemplificam de forma prática a aplicação dessas funções de aceleração, evidenciando sua eficácia e importância na modelagem de testes acelerados.

Diante da diversidade de mecanismos físicos e químicos que regem os processos de falha em distintos contextos, torna-se pertinente explorar novas funções de aceleração que complementem aquelas tradicionalmente utilizadas. Essas formulações têm por intuito ampliar o escopo dos modelos consagrados, sobretudo em situações em que as funções clássicas apresentam limitações. Ao incorporar diferentes formas funcionais, busca-se capturar com maior fidelidade os efeitos de variáveis ambientais ou operacionais sobre o tempo de falha, suprimindo lacunas identificadas na literatura e promovendo uma modelagem mais aderente às especificidades de cada aplicação. Assim, a proposição e a avaliação de novas funções de aceleração constituem uma estratégia relevante para o avanço metodológico na análise de confiabilidade e na condução de testes acelerados.

Na literatura de tribologia e engenharia de lubrificação, observa-se que existe uma forte influência de variáveis ambientais, como temperatura, pressão e velocidade, sobre os mecanismos de desgaste e falha de componentes mecânicos. Referências da área, como os Stachowiak e Batchelor (2025) e Mang e Dresel (2007), evidenciam que, sob condições de estresse térmico ou mecânico, a degradação de lubrificantes, a desativação de aditivos e a mudança nos regimes de lubrificação impactam diretamente a confiabilidade do sistema.

De modo geral, observa-se que a elevação da temperatura acelera a oxidação dos lubrificantes, reduz sua viscosidade e leva à falha prematura por contato direto entre superfícies, o que justifica o uso de funções monotônicas crescentes, como o modelo de Arrhenius ou funções exponenciais, para representar o efeito da aceleração. No entanto, em diversas situações, os efeitos da variável de estresse não se manifestam de forma linear ou monotônica, mas em faixas intermediárias de temperatura. Por exemplo, pode ocorrer a ativação ideal de aditivos de extrema pressão, como o Zinco Dialquiditiofosfato (ZDDP), promovendo a formação de películas protetoras e reduzindo temporariamente a taxa de falha. Por outro lado, temperaturas elevadas demais podem inativar esses aditivos ou catalisar reações triboquímicas indesejadas, revertendo o efeito benéfico inicial. Esse comportamento resulta em curvas de falha não monotônicas, caracterizadas por regiões de inflexão e zonas de risco deslocadas.

Diante desse contexto, torna-se relevante o desenvolvimento de novas funções de aceleração capazes de capturar comportamentos mais complexos e realistas dos sistemas submetidos a condições de estresse. Assim, ampliar o escopo das funções de aceleração contribui para uma modelagem mais flexível e aderente aos fenômenos observados na prática, aprimorando a representação dos mecanismos de falha e degradação e, conseqüentemente, a acurácia das inferências em estudos de confiabilidade.

Embora os testes acelerados sejam amplamente utilizados em sistemas não reparáveis, o foco deste trabalho recai sobre sistemas reparáveis, nos quais a manutenção e o reparo após as falhas são aspectos centrais. Nessa abordagem, um mesmo sistema pode apresentar múltiplas falhas ao longo do tempo, configurando um processo caracterizado por eventos recorrentes. A modelagem estatística de eventos recorrentes geralmente faz uso de processos de contagem, cuja dinâmica é descrita por uma função de intensidade de falha. Um modelo amplamente adotado é o Processo de Poisson Não Homogêneo (PPNH) com Processo de Lei de Potência (PLP), proposto por [Crow \(1975\)](#), e se destaca devido à sua flexibilidade, aplicabilidade e fácil interpretação dos parâmetros ([RAUSAND; HOYLAND, 2003](#); [MURALIDHARAN, 2008](#); [OLIVEIRA; COLOSIMO; GILARDONI, 2013](#)).

Um ponto importante dentro da modelagem de sistemas reparáveis é o efeito do reparo. O reparo pode ser classificado como mínimo, perfeito ou imperfeito. Neste trabalho assume-se o reparo mínimo, no qual o sistema, após o conserto, retorna exatamente à condição em que se encontrava imediatamente antes da falha. Essa suposição é consistente com a estrutura do PLP e tem sido amplamente adotada na literatura ([RIGDON; BASU, 1989](#); [D'ANDREA *et al.*, 2017](#); [WANG; LU; XIAO, 2018](#); [LOUZADA *et al.*, 2022](#); [PORTELA *et al.*, 2024](#); [PEREIRA *et al.*, 2024](#)).

Outra questão importante na análise de dados de confiabilidade está relacionada à heterogeneidade não observada entre sistemas ou componentes. Para capturar tais diferenças, utiliza-se os chamados modelos de fragilidade, introduzidos por [Vaupel, Manton e Stallard \(1979\)](#). Nesses modelos, um termo aleatório multiplicativo é incorporado à função de intensidade, permitindo uma abordagem mais realista ao lidar com populações heterogêneas. O uso de fragilidade é especialmente pertinente em contextos com múltiplos sistemas reparáveis, nos quais fatores não mensurados, como variações no ambiente operacional ou na qualidade de fabricação, podem impactar significativamente a confiabilidade ([WIENKE, 2010](#)). Além dos estudos iniciais realizados por [Vaupel, Manton e Stallard \(1979\)](#), muitos outros pesquisadores contribuíram para o desenvolvimento a aplicação de modelos de fragilidade em diversas áreas, incluindo a confiabilidade; entre os trabalhos disponíveis na literatura encontram-se [Tomazella \(2003\)](#), [Asfaw e Lindqvist \(2015\)](#), [Balan e Putter \(2020\)](#), [Gorfine e Zucker \(2023\)](#), [Gonzatto \(2021\)](#), [Louzada *et al.* \(2022\)](#), [Brito *et al.* \(2024\)](#).

Diante dessas considerações, esta tese tem como foco central o estudo e a proposição de novas funções de aceleração com características interpretáveis, aplicáveis a modelos de tempo de

falha acelerado. Tais modelos, com e sem a inclusão do termo de fragilidade, são desenvolvidos no contexto de múltiplos sistemas reparáveis submetidos a testes acelerados. A base metodológica fundamenta-se na integração de conceitos consolidados da teoria de confiabilidade, modelagem de eventos recorrentes e análise de dados sob estresse acelerado, resultando em contribuições metodológicas que ampliam as abordagens tradicionais e oferecem novas perspectivas para a modelagem estatística em testes acelerados com sistemas reparáveis.

1.1 Objetivo

O objetivo geral desta pesquisa é estudar e desenvolver funções de aceleração e, conseqüentemente, modelos de tempo de falha acelerado, com e sem fragilidade, em cenários envolvendo múltiplos sistemas reparáveis. Será adotada uma abordagem paramétrica baseada no PLP, a partir da qual se desdobram os seguintes objetivos específicos:

- Utilizar as funções de aceleração Exponencial, Eyring, Potência Inversa e Arrhenius no modelo de tempo de falha acelerado com/sem fragilidade no contexto de múltiplos sistemas reparáveis sujeitos a reparos mínimos;
- Propor funções de aceleração para o modelo de tempo de falha acelerado com e sem fragilidade no contexto de múltiplos sistemas reparáveis sujeitos a reparos mínimos.

1.2 Organização do trabalho

A organização dos capítulos foi planejada para abordar os principais aspectos de pesquisa, apresentando uma análise coesa e abrangente do problema em estudo, conforme detalhado a seguir:

- No [Capítulo 2](#), são apresentados os conteúdos fundamentais que servem de base para o desenvolvimento desta tese, incluindo as principais definições relacionadas a processos de contagem, com destaque para o Processo de Poisson e o Processo de Lei de Potência. Em seguida, descrevem-se os sistemas reparáveis, com ênfase no conceito de reparo mínimo. Também é discutida a importância dos testes acelerados, com especial atenção às funções de aceleração, que constituem o foco central desta tese. Apresenta-se uma descrição do modelo de tempo de falha acelerado, bem como das principais funções de aceleração discutidas na literatura, as quais servem de base para o desenvolvimento e a proposição de novos modelos apresentados nos capítulos seguintes. Por fim, são descritos os modelos de fragilidade, com ênfase em sua estrutura conceitual, propriedades e aplicabilidade no contexto da análise de dados de confiabilidade.
- No [Capítulo 3](#), adota-se a função de aceleração exponencial para investigar sua aplicação em modelos de tempo de falha acelerado, considerando múltiplos sistemas reparáveis,

com e sem a presença de fragilidade. As distribuições de fragilidade utilizadas foram a Gama e a Lindley Ponderada. A estimação dos parâmetros foi realizada por meio do método de máxima verossimilhança. Estudos de simulação foram conduzidos para avaliar o desempenho dos estimadores em diferentes cenários associados ao modelo proposto. Para ilustrar a aplicabilidade dos modelos na indústria, é apresentado um exemplo prático.

- No **Capítulo 4**, amplia-se a investigação iniciada no capítulo anterior, ao considerar múltiplas funções de aceleração. Exponencial, Eyring, Potência Inversa e Arrhenius, a múltiplos sistemas reparáveis, com e sem a presença de fragilidade Gama. A estimação dos parâmetros dos modelos propostos é realizada por meio de método da máxima verossimilhança. Com o intuito de avaliar o desempenho dos estimadores nos diferentes cenários, conduziu-se um estudo de simulação. Por fim, a aplicabilidade e a capacidade dos modelos em representar situações reais são ilustradas por meio de um exemplo prático.
- No **Capítulo 5**, são propostas novas funções de aceleração, cuja incorporação é avaliada em modelos de tempo de falha acelerado com múltiplos sistemas reparáveis. A proposta busca explorar formas alternativas e interpretáveis para representar o efeito das variáveis aceleradoras no tempo de falha, ampliando e complementando as metodologias existentes na literatura. A estimação dos parâmetros é conduzida por meio do método de máxima verossimilhança, enquanto a performance dos estimadores é avaliada por meio de estudos de simulação. A aplicabilidade dos modelos desenvolvidos é ilustrada por meio de um exemplo prático.
- No **Capítulo 6**, realiza-se a incorporação da estrutura de fragilidade Gama nos modelos de tempo de falha acelerado com múltiplos sistemas reparáveis, aplicando as funções de aceleração propostas no **Capítulo 5**. Essa ampliação permite capturar de forma mais realista a heterogeneidade não observada entre unidades, elemento fundamental para a modelagem precisa de sistemas complexos. A estimação dos parâmetros é efetuada por meio do método da máxima verossimilhança, e a eficiência dos estimadores é avaliada por meio de estudos de simulação. A aplicabilidade dos modelos é ilustrada por exemplos práticos baseados em dados simulados, evidenciando a coerência metodológica e a relevância no contexto prático.
- No **Capítulo 7** são apresentados um resumo dos principais resultados e as conclusões alcançadas ao longo do trabalho. Além disso, são exploradas possibilidades de aplicação da metodologia desenvolvida, assim como sugestões para pesquisas futuras que possam ampliar e aprofundar a modelagem apresentada.

A **Figura 1** apresenta um panorama completo da tese, incluindo a metodologia adotada, os modelos propostos, as funções de aceleração consideradas e as principais contribuições/propostas desenvolvidas em cada capítulo.

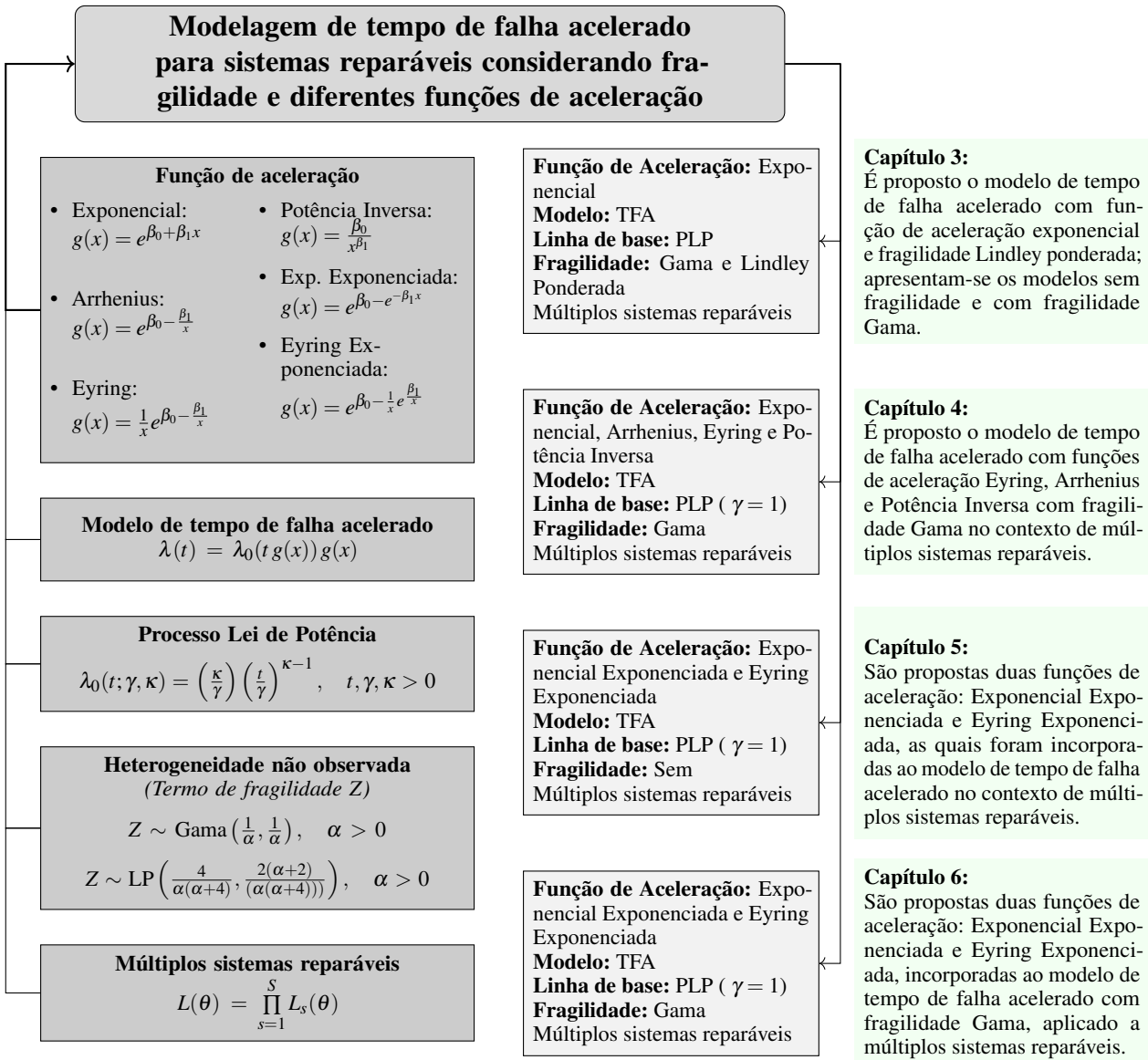


Figura 1 – Estrutura geral relacionando os modelos propostos e os capítulos da tese.

1.3 Produção

Os resultados desta tese estão organizados em quatro artigos científicos. O primeiro artigo foi publicado na revista *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. O segundo artigo foi submetido para avaliação, e o terceiro e o quarto artigos encontram-se em processo de revisão pelos autores. A seguir, apresenta-se a lista dos textos elaborados, relacionados aos capítulos seguintes.

PEREIRA, E. Q.; GONZATTO JUNIOR, O. A.; TOMAZELLA, V. L.; MORITA, L. H.; MOTA, A. L.; LOUZADA; F. **Accelerated failure time frailty model for modeling multiple systems subject to minimal repair.** (Esse artigo, referente ao [Capítulo 3](#), foi publicado em *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2024).

PEREIRA, E. Q.; GONZATTO JUNIOR, O. A.; TOMAZELLA, V. L.; LEÃO, J.; LOUZADA; F. **Modeling of Multiple Repairable Systems with Accelerated Failure Time Integrating different Acceleration Relationships and Unobserved Heterogeneity.** (Esse artigo, referente ao [Capítulo 4](#), foi submetido).

PEREIRA, E. Q.; GONZATTO JUNIOR, O. A.; TOMAZELLA, V. L.; LEÃO, J.; LOUZADA; F. **Accelerated Models in Repairable Systems Considering New Acceleration functions.** (Esse artigo, referente ao [Capítulo 5](#), está passando por revisão interna pelos autores).

PEREIRA, E. Q.; GONZATTO JUNIOR, O. A.; TOMAZELLA, V. L.; LEÃO, J.; LOUZADA; F. **Accelerated Frailty Models for Repairable Systems with New Acceleration functions.** (Esse artigo, referente ao [Capítulo 6](#), está passando por revisão interna pelos autores).

REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo é dedicado à revisão dos principais conceitos e modelos que dão suporte à proposta desta tese. A ideia é reunir fundamentos teóricos e metodológicos já consolidados na literatura, que serão utilizados ao longo da pesquisa. Essa contextualização é importante para a compreensão das escolhas feitas nas análises e para o acompanhamento das discussões desenvolvidas nos capítulos seguintes.

2.1 Processo de contagem

A análise de dados relativos a eventos que se repetem ao longo do tempo é frequentemente realizada por meio de modelos estatísticos baseados em processos de contagem. Essa abordagem, introduzida por [Aalen \(1978\)](#), é importante para o desenvolvimento de modelos cuja estrutura depende da intensidade de ocorrência dos eventos. A função de intensidade permite quantificar, ao longo do tempo, a frequência com que os eventos de interesse ocorrem.

Nesse contexto, considera-se um experimento no qual eventos ocorrem aleatoriamente ao longo do tempo, sendo T uma variável aleatória que representa o instante da ocorrência de um evento, com o início da observação em $t_0 = 0$. Cada tempo t_j registrado corresponde à ocorrência da j -ésima falha. Para modelar esses dados, utiliza-se um processo de contagem, conforme a [Definição 1](#), em que $N(t)$ denota o número acumulado de eventos no intervalo $(0, t]$.

Definição 1. Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ contabiliza o número de ocorrências de determinados eventos de interesse no intervalo $(0, t]$, o qual deve satisfazer as seguintes propriedades ([ROSS, 1995](#)):

1. $N(t) \geq 0$ e $N(0) = 0$;
2. $N(t)$ é um número inteiro;
3. $t \rightarrow N(t)$;

4. $\lim_{h \rightarrow 0^+} [N(t) - N(t - h)] = 0$;
5. Se $k < t$, então $N(k) \leq N(t)$, assim $N(k, t) = N(t) - N(k)$ é o número de eventos que ocorreram no intervalo $(k, t]$.

Os eventos relacionados ao processo de contagem podem ser estudados equivalentemente em termos de $\{N(t)\}$ (número de falhas) ou $\{T_{N(t)}\}_{t \geq 0}$ (tempo de calendário), ou por $\{X_j\}$, no qual, $X_j = T_j - T_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, N(t)$ (tempos entre falhas), conforme ilustrado na [Figura 2](#).

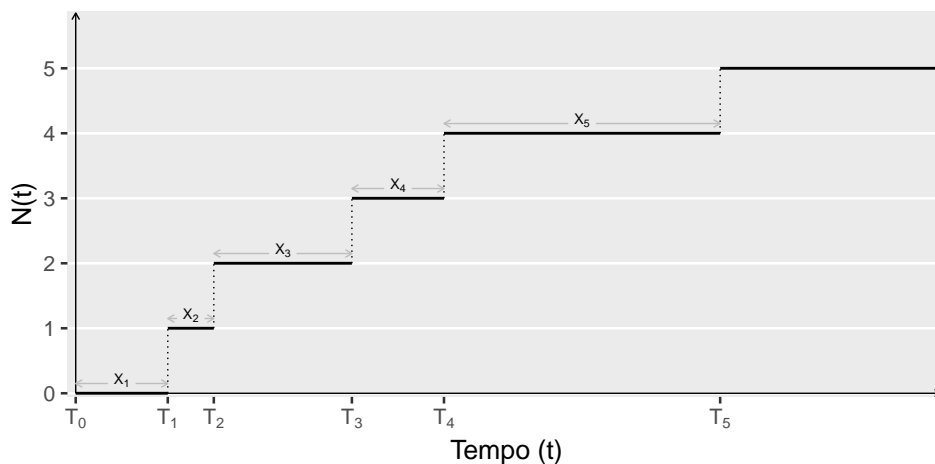


Figura 2 – Relação entre o número de eventos $N(t)$, os tempos entre falhas (X_j) e os tempos de calendário (T_j).

O estudo de eventos recorrentes busca compreender o comportamento do processo de contagem $N(t)$, $t \geq 0$ e, com isso, oferecer diretrizes sobre a abordagem metodológica mais adequada para cada problema ([MURALIDHARAN, 2008](#)). Assim, para uma melhor compreensão desses processos, é importante apresentar alguns conceitos básicos.

- **Incrementos independentes:** em um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ a variação no número de ocorrências de falhas em intervalos distintos de tempo é estatisticamente independente. Para que isso seja válido, suponha uma sequência ordenada de instantes de tempo, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, em que as quantidades $[N(t_1) - N(0)]$, $[N(t_2) - N(t_1)]$, \dots , $[N(t_n) - N(t_{n-1})]$ são todas estatisticamente independentes entre si. Essa independência entre os incrementos implica que o número de falhas em um intervalo específico não é influenciado pelo número de falhas ocorridas em quaisquer intervalos anteriores, sem sobreposição temporal. Mesmo que o sistema tenha experimentado um número muito alto ou baixo de falhas em um determinado período, essa circunstância não afetará a distribuição de falhas em intervalos futuros.
- **Incrementos estacionários:** em um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$, a distribuição do número de falhas em um intervalo de tempo depende apenas do comprimento do intervalo,

e não da sua posição no tempo. Para exemplificar, considere dois instantes de tempo disjuntos, t e k , onde $t > k \geq 0$, e uma constante $c > 0$. A propriedade de incrementos estacionários diz que as variáveis aleatórias $[N(t) - N(k)]$ e $[N(t + c) - N(k + c)]$ têm a mesma distribuição de probabilidade. Isso implica que a variação do número de ocorrências em um intervalo específico é estatisticamente equivalente à variação em outro intervalo com o mesmo comprimento, independentemente da distância desses intervalos em relação à origem do tempo. Isso indica que a evolução das falhas é constante ao longo do tempo, e a distribuição de falhas em um intervalo é estatisticamente semelhante à distribuição em outro intervalo com a mesma duração, independentemente de quando esses intervalos ocorrem, garantindo assim uma característica de estabilidade nas flutuações do processo de contagem ao longo do tempo.

- **Processo estacionário (ou homogêneo):** é um tipo de processo no qual as propriedades estatísticas permanecem inalteradas ao longo do tempo. Para que um processo de contagem seja considerado estacionário, é necessário que possua incrementos estacionários.
- **Processo não estacionário (ou não homogêneo):** é aquele em que as propriedades estatísticas mudam com o tempo. Um processo não estacionário pode apresentar tendências, sazonalidades ou flutuações significativas ao longo do tempo, o que torna suas características estatísticas dependentes do momento específico em que são observadas.
- **Processo regular (ou ordenado):** é aquele em que a $P[N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$; para valores pequenos de Δt tem-se que $o(\Delta t)$ é função de Δt tal que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Isso significa que uma unidade, neste processo de contagem, não terá duas ou mais falhas simultâneas.

- **Função de intensidade (Taxa do processo):** é utilizada para representar e quantificar a intensidade com que os eventos ocorrem. Por meio dessa função, busca-se compreender a frequência ou taxa de ocorrências dos eventos ao longo do tempo. A descrição da probabilidade instantânea de um evento acontecer em um determinado ponto no tempo é calculada por

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1 | \mathcal{F}_t^-]}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

em que está condicionado a \mathcal{F}_t^- , ou seja, ao histórico de todos os eventos ocorridos antes do tempo t .

Ao considerar um processo de contagem com incrementos independentes, a função de intensidade completa fornece a probabilidade instantânea de um evento ocorrer em um momento específico, sem depender do histórico de eventos anteriores. Isso ocorre porque,

nesse contexto, a ocorrência de eventos passados não tem influência sobre a ocorrência do próximo evento. Portanto, a função de intensidade; da [Equação 2.1](#) pode ser simplificada da seguinte forma

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1]}{\Delta t},$$

tornando-se independente do histórico do processo.

- **Função de intensidade acumulada:** é conhecida como o número esperado de ocorrências no intervalo $(0, t]$, ou função média acumulada, dada por

$$\Lambda(t) = E[N(t)] = \int_0^t \lambda(u) du.$$

2.1.1 Processo de Poisson

O Processo de Poisson, formalmente descrito pela [Definição 2](#), é um caso particular de processo de contagem utilizado para modelar a ocorrência de eventos ao longo do tempo, caracterizado pela independência dos incrementos. Isso significa que, se vários eventos ocorrem em um determinado intervalo de tempo, essas ocorrências não afetarão o comportamento de falhas futuras.

Definição 2. (Processo de Poisson) É um Processo de Contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ com intensidade $\lambda(t) > 0$, se satisfaz as seguintes propriedades ([BASU ASIT P.; RIGDON, 2000](#)):

1. $N(0) = 0$;
2. O processo tem incrementos independentes;
3. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t, t + \Delta t) = 1]}{\Delta t} = \lambda(t)$;
4. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t, t + \Delta t) \geq 2]}{\Delta t} = 0$.

Deste modo, a possibilidade de falhas simultâneas é descartada pela propriedade 4. Uma consequência direta desta condição é que o número de eventos em qualquer intervalo de comprimento t tem uma distribuição de Poisson com média $\Lambda(t)$, em que

$$P(N(t) = x) = \frac{\Lambda(t)^x e^{-\Lambda(t)}}{x!}.$$

Dependendo da característica da intensidade $\lambda(t)$, o Processo de Poisson pode ser classificado de duas formas distintas: o Processo de Poisson Homogêneo (PPH) nos casos em que a intensidade $\lambda(t)$ é constante, e o Processo de Poisson Não Homogêneo (PPNH) nos casos em que a intensidade $\lambda(t)$ não é constante ([HAMADA et al., 2008](#)).

Definição 3. (Processo de Poisson Homogêneo) é um Processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ com taxa λ , sendo λ estritamente positivo e com uma função de intensidade $\lambda(t)$ constante, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $N(0) = 0$;
2. $N(t)$ tem incrementos independentes e estacionários;
3. $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$;
4. $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$.

Quando se tem um PPH, algumas consequências são imediatas, sendo a primeira delas o fato de ser um processo de contagem regular, devido aos incrementos estacionários e independentes. A segunda é que a função de intensidade de um PPH é constante.

Definição 4. (Processo de Poisson Não Homogêneo) é um Processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ com função de intensidade $\lambda(t)$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $N(0) = 0$;
- O processo tem incrementos independentes;
- $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$;
- $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$.

A importância deste tipo de processo reside no fato de não exigir a condição de incrementos estacionários.

Os processos de Poisson podem ser modelados sob duas abordagens principais: a não paramétrica, que não assume uma forma funcional específica para a intensidade, e a paramétrica, na qual a função de intensidade $\lambda_0(t)$ é definida em termos de um vetor de parâmetros de dimensão finita (COOK; LAWLESS *et al.*, 2007). Entre as alternativas paramétricas mais empregadas destacam-se o modelo exponencial, com intensidade $\lambda(t|\kappa, \gamma) = e^{\kappa + \gamma t}$, e o modelo de processo de lei de potência, que será detalhado na próxima seção e adotado no desenvolvimento deste trabalho.

2.1.2 PLP

O PLP, proposto por Crow (1975), é uma modelagem paramétrica amplamente empregada na análise de sistemas reparáveis. Este modelo é um caso particular do PPNH, no qual a taxa de falha pode variar ao longo do tempo. No contexto de confiabilidade, o PLP é especialmente útil para representar sistemas sujeitos a reparos mínimos, nos quais cada falha é imediatamente

seguida de um reparo que devolve o sistema às condições existentes logo antes da falha, mas não à condição de novo (LOUZADA *et al.*, 2022).

Neste modelo, o processo de contagem $N(t)$, que representa o número acumulado de falhas até o tempo t , é caracterizado por uma função de intensidade (taxa de ocorrência de falhas) da forma:

$$\lambda_0(t) = \frac{\kappa}{\gamma} \left(\frac{t}{\gamma} \right)^{\kappa-1}, \quad t \geq 0, \kappa > 0, \gamma > 0, \quad (2.2)$$

cuja respectiva função de intensidade acumulada (também conhecida como função média acumulada de falhas) é dada por:

$$\Lambda_0(t) = \left(\frac{t}{\gamma} \right)^\kappa. \quad (2.3)$$

E a função de confiabilidade associada ao tempo até a próxima falha é dada como:

$$R_0(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\gamma} \right)^\kappa \right].$$

Essa função representa a probabilidade de o sistema operar sem falhas até o tempo t , sob o modelo de reparo mínimo.

Os parâmetros γ e κ possuem interpretações práticas relevantes no contexto de sistemas reparáveis. O parâmetro $\gamma > 0$ é um parâmetro de escala, associado ao tempo em que se espera, em média, a ocorrência da primeira falha. Isso decorre do fato de que a função de intensidade acumulada é dada por $\Lambda_0(t) = \left(\frac{t}{\gamma} \right)^\kappa$, de modo que, ao considerar $t = \gamma$, obtém-se $E[N(\gamma)] = \Lambda_0(\gamma) = 1^\kappa = 1$. Assim, γ representa o tempo em que se espera que ocorra exatamente uma falha no sistema. Já $\kappa > 0$ é o parâmetro de forma, que descreve a tendência do comportamento do sistema ao longo do tempo. Quando $\kappa = 1$, o modelo se reduz ao processo de Poisson homogêneo, indicando uma taxa de falha constante. Para $\kappa > 1$, a taxa de falha aumenta com o tempo, caracterizando um sistema em deterioração. Por outro lado, se $\kappa < 1$, a taxa de falha diminui com o tempo, o que pode indicar que o sistema está melhorando, possivelmente em função de efeitos de reparo ou de manutenção preventiva eficazes (OLIVEIRA; COLOSIMO; GILARDONI, 2013; HONG; LI; OSBORN, 2015).

O PLP é amplamente utilizado na modelagem de sistemas reparáveis devido à sua flexibilidade para representar diferentes padrões de comportamento ao longo do tempo, bem como à sua simplicidade analítica, conforme destacado por Hong, Li e Osborn (2015). Essa flexibilidade decorre da sensibilidade do modelo aos valores do parâmetro de forma κ , que controla a evolução da taxa de falha. A Figura 3 ilustra o comportamento da função intensidade $\lambda_0(t)$ para diferentes valores de κ , com o parâmetro de escala γ fixado em 3. Nota-se que o valor de κ impacta diretamente a curvatura da função intensidade, reforçando seu papel na caracterização das tendências de falha do sistema ao longo do tempo, seja ele em deterioração, melhoria ou mantendo uma taxa de falha constante.

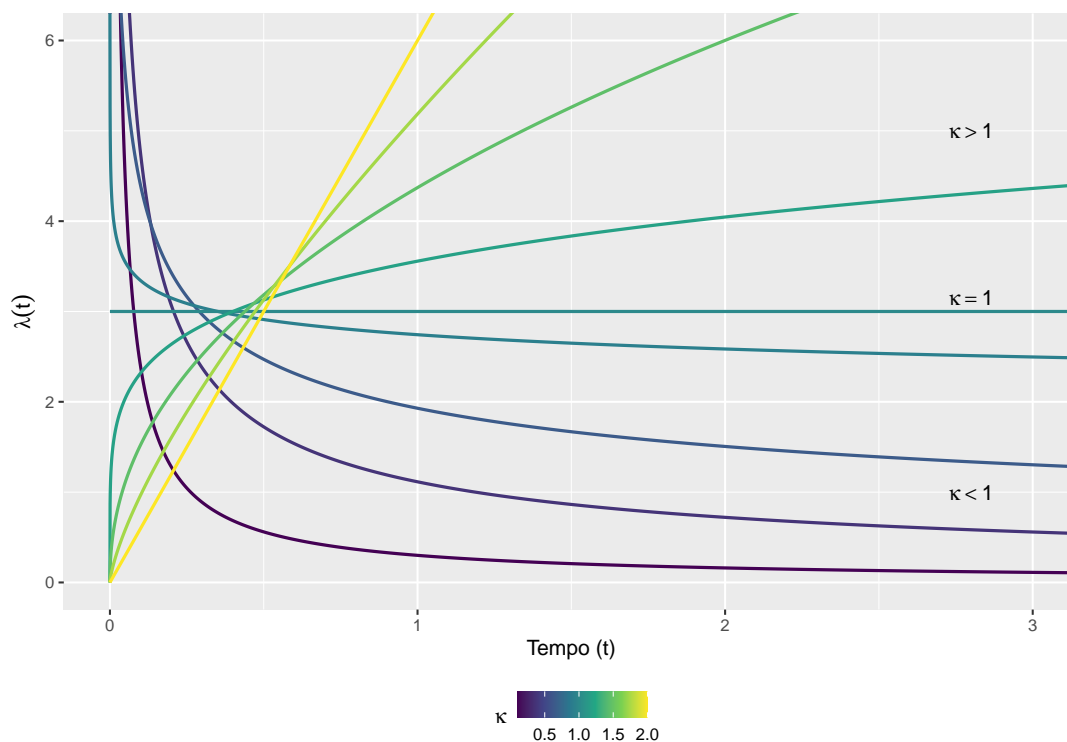


Figura 3 – Função de intensidade do PLP com $\gamma = 3$ e diferentes valores de κ .

2.2 Sistemas reparáveis

A análise de confiabilidade envolve a utilização de modelos que permitem representar probabilisticamente o comportamento de falha de um ou mais sistemas e fornecer previsões que orientem na tomada de decisões. Nesse contexto, define-se por sistema um conjunto de elementos organizados de forma integrada para desempenhar uma determinada atividade de interesse. Desta forma, os sistemas podem ser classificados como reparáveis ou não reparáveis, e, conseqüentemente, a metodologia estatística empregada varia dependendo dessa classificação (GONZATTO, 2021).

Sistemas reparáveis são aqueles que, após uma falha, podem ser restaurados por meio de ações de manutenção, dispensando a substituição integral. Essa característica permite que o sistema retorne às condições operacionais, o que representa uma vantagem significativa para o usuário. Assim, o mesmo sistema pode experimentar múltiplas falhas, caracterizando eventos recorrentes. Exemplos típicos incluem carros, aviões, máquinas industriais, ar-condicionado, computadores, entre outros (BASU ASIT P.; RIGDON, 2000).

Uma base teórica sólida sobre o comportamento e a modelagem de sistemas reparáveis pode ser encontrada em Ascher e Feingold (1984), obra reconhecida na área de confiabilidade, por fornecer conceitos, classificações e abordagens analíticas que sustentam grande parte dos estudos sobre eventos recorrentes em sistemas que passam por reparos ao longo do tempo.

Em contraste, os sistemas não reparáveis são aqueles em que a falha leva ao descarte do mesmo ou quando o reparo não é compensatório, como é o caso das lâmpadas (BASU ASIT P.; RIGDON, 2000).

A ocorrência de múltiplas falhas ao longo do tempo torna o conceito de truncamento fundamental, que pode ser classificado em duas categorias: truncamento por tempo e truncamento por falha, conforme define Basu Asit P.; Rigdon (2000). Essas categorias são fundamentais para determinar o ponto final do estudo. Para compreender melhor esses tipos de truncamento, considere um conjunto de dados com um total de S sistemas reparáveis. Cada sistema possui uma série de tempos de falha observados, representados como $t_{s,j}$, onde o índice j denota o tempo de falha observado no sistema s , com $s = 1, \dots, S$, e $j = 1, \dots, n_s$. No truncamento por tempo (ilustrado na Figura 4), os tempos de falha ocorrem em ordem crescente, ou seja, $0 < t_{s,1} < t_{s,2} < \dots < t_{s,n_s} \leq \tau_s$. Isso significa que t_{s,n_s} representa o último tempo de falha observado, e $N(\tau_s) = n_s$ representa o número total de falhas observado para o sistema s dentro do limite de tempo preestabelecido, representado por τ_s . Por outro lado, no truncamento por falha, a sequência de tempos de falha ainda ocorre em ordem crescente, isto é, $(0 < t_{s,1} < t_{s,2} < \dots < t_{s,n_s^*})$, mas com a diferença de que o último tempo de falha observado, t_{s,n_s^*} , é uma realização da variável aleatória T_s . Essa variável está associada ao número predefinido de falhas, denotado como n_s^* , definido no início do experimento.

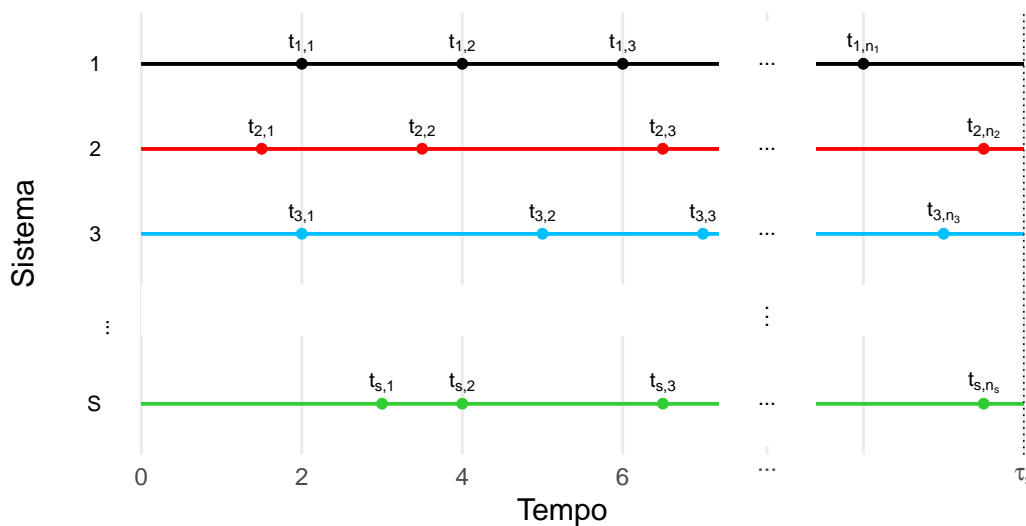


Figura 4 – Representação dos tempos de falha no contexto de múltiplos sistemas reparáveis e truncamento por tempo.

As ações de reparo em sistemas reparáveis podem ser classificadas em três categorias: reparo mínimo, reparo perfeito e reparo imperfeito. Nesta tese, dá-se ênfase ao reparo mínimo, caracterizado por restaurar o sistema exatamente ao estado em que se encontrava imediatamente antes da falha, sem promover qualquer melhoria em sua condição ou desempenho.

Nesse tipo de reparo, a intensidade condicional do processo de falha imediatamente após a falha permanece inalterada com a correção, mantendo-se igual à que era antes da falha. Devido

a essa característica, o reparo mínimo é frequentemente citado na literatura como “*As Bad As Old (ABAO)*”, ou seja, “tão ruim quanto velho”. Esse é o tipo de reparo mais estudado na literatura, e a metodologia estatística associada ao PPNH é considerado, neste caso, a mais apropriada para analisar o comportamento de falha do sistema. Isso ocorre porque a probabilidade de falha em um curto período de tempo não depende do histórico de falhas, mas apenas da falha imediatamente anterior (LINDQVIST, 2006).

A função de intensidade, neste contexto, depende apenas do tempo. Isso significa que a intensidade condicional do processo de falha imediatamente após a ocorrência é a mesma que a de antes da falha, sendo, portanto, como se nenhuma falha tivesse ocorrido. Logo, o modelo de reparo mínimo é um processo em que a função de intensidade, ilustrada na Figura 5, corresponde à intensidade do PPNH, e é dada por:

$$\lambda(t) = \lambda_0(t), \quad (2.4)$$

em que $\lambda_0(t)$ é a função de intensidade do PPNH. Conseqüentemente, tem-se que a função de intensidade acumulada é

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_0(u) du = \Lambda_0(t).$$

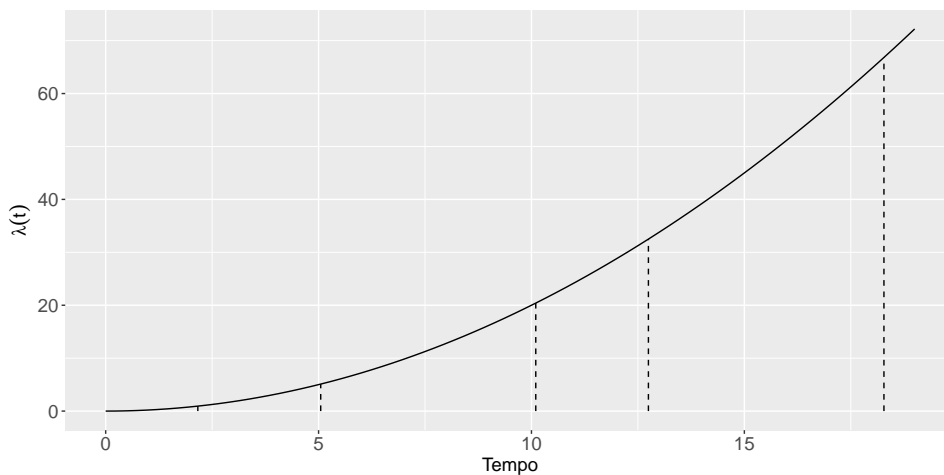


Figura 5 – Ilustração da intensidade ao longo do tempo para reparo mínimo na presença de múltiplos reparos.

Considerando que os incrementos em um PPNH são independentes, o que significa que os tempos de falha são condicionados apenas ao tempo de falha imediatamente anterior e a um sistema específico s entre os S observados, tem-se que a função de densidade conjunta dos tempos de falha $T_{s,1}, T_{s,2}, \dots, T_{s,n_s}$ é

$$\begin{aligned} f(t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,n_s}) &= f(t_{s,1})f(t_{s,2}|t_{s,1})f(t_{s,3}|t_{s,1}, t_{s,2}) \dots f(t_{s,n_s}|t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,n_s-1}) \\ &= \prod_{j=1}^{n_s} f(t_{s,j}|t_{s,j-1}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dada a função de intensidade de um modelo de reparo mínimo (Equação 2.4), tem-se que a função de confiabilidade condicional de $T_{s,j}$ dada a observação $t_{s,j-1}$ é

$$\begin{aligned} R(t_{s,j}|t_{s,j-1}) &= P[T_{s,j} > t_{s,j}|t_{s,j-1}] \\ &= P[N(t_{s,j}) - N(t_{s,j-1}) = 0] \\ &= e^{[-\Lambda_0(t_{s,j}) + \Lambda_0(t_{s,j-1})]}. \end{aligned}$$

Conhecendo a função de confiabilidade, tem-se que a função de densidade pode ser definida por

$$\begin{aligned} f(t_{s,j}|t_{s,j-1}) &= \frac{d}{dt_{s,j}} F(t_{s,j}|t_{s,j-1}) \\ &= \frac{d}{dt_{s,j}} [1 - e^{(-\Lambda_0(t_{s,j}) + \Lambda_0(t_{s,j-1}))}] \\ &= \lambda_0(t_{s,j}) e^{[-\Lambda_0(t_{s,j}) + \Lambda_0(t_{s,j-1})]}. \end{aligned}$$

Logo, a função de densidade conjunta para os tempos de falha do sistema s , (Equação 2.5), pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,n_s}) &= \prod_{j=1}^{n_s} f(t_{s,j}|t_{s,j-1}) \\ &= \prod_{j=1}^{n_s} \lambda_0(t_{s,j}) e^{[-\Lambda_0(t_{s,j}) + \Lambda_0(t_{s,j-1})]} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n_s} \lambda_0(t_{s,j}) \right) e^{-\Lambda_0(t_{s,n_s})}. \end{aligned}$$

Observa-se que, ao considerar o truncamento por tempo, é possível calcular a probabilidade de que, até o tempo de truncamento máximo de observação, denominado aqui por τ , tenham ocorrido n_s falhas no S -ésimo sistema. Nesse caso, a probabilidade pode ser expressa da seguinte forma

$$\begin{aligned} P[N(\tau) = n_s | t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,n_s}] &= P[N(\tau) = n_s | t_{s,n_s}] \\ &= P[N(\tau) - N(t_{s,n_s}) = 0] \\ &= e^{[-\Lambda_0(\tau) + \Lambda_0(t_{s,n_s})]}. \end{aligned}$$

Levando em consideração um conjunto de S sistemas reparáveis submetidos a um processo de reparo mínimo truncado por um tempo τ , é importante destacar que a aleatoriedade do número de falhas n_s ocorre no sistema s até o tempo τ , onde $s = 1, 2, \dots, S$. Nesse contexto, pode-se definir a função de verossimilhança para um dado vetor de parâmetros θ da seguinte

maneira

$$\begin{aligned}
 L(\boldsymbol{\theta}|t_{s,j}) &= \prod_{s=1}^S f(t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,n_s}, n_s) \\
 &= \prod_{s=1}^S f(t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,n_s}) P[N(\tau) = n_s | t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,n_s}] \\
 &= \prod_{s=1}^S \left\{ \left(\prod_{j=1}^{n_s} \lambda_0(t_{s,j}) \right) e^{-\Lambda_0(\tau)} \right\}, \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

com log-verossimilhança

$$l(\boldsymbol{\theta}|t_{s,j}) = \sum_{s=1}^S \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n_s} \log \lambda_0(t_{s,j}) \right) - \Lambda_0(\tau) \right\}. \tag{2.7}$$

Caso deseje entender melhor sobre análise de sistemas reparáveis e os diversos tipos de reparo, recomenda-se a consulta às seguintes obras: [Ascher e Feingold \(1984\)](#), [Basu Asit P.; Rigdon \(2000\)](#), [Rai, Chaturvedi e Bolia \(2020\)](#), [Rausand e Hoyland \(2003\)](#), [Muralidharan \(2008\)](#), [Oliveira, Colosimo e Gilardoni \(2013\)](#), [Asadi \(2023\)](#), [Portela *et al.* \(2024\)](#), [Portela *et al.* \(2025\)](#), [Cui *et al.* \(2025\)](#), [Goyal, Finkelstein e Hazra \(2025\)](#). Essas referências abrangem desde modelos clássicos até as mais recentes abordagens em teoria de confiabilidade e manutenção de sistemas reparáveis.

2.3 Testes acelerados

Para atender às exigências do mercado e garantir a entrega de produtos confiáveis em um prazo viável, as indústrias recorrem a métodos eficientes de avaliação da confiabilidade, entre os quais se destacam os testes acelerados. Esses testes são fundamentais quando o tempo disponível para observar falhas em condições normais de uso é limitado ou inviável. Ao submeter sistemas como automóveis e dispositivos eletrônicos, a condições mais severas do que as habituais (por exemplo, temperaturas elevadas, vibração intensa ou umidade excessiva), é possível antecipar o aparecimento de falhas e estimar sua durabilidade real em um tempo reduzido. A realização de testes acelerados permite, assim, validar a confiabilidade antes da comercialização, garantindo que o sistema atenda às expectativas de desempenho, segurança e durabilidade ([MEEKER; ESCOBAR; PASCUAL, 2021](#)). Dessa forma, as empresas não apenas evitam prejuízos decorrentes de falhas em campo, mas também fortalecem sua credibilidade junto aos consumidores.

De acordo com a literatura, os testes acelerados foram inicialmente propostos por [Pike \(1966\)](#) para analisar dados relacionados ao processo de formação de câncer. Nesse estudo, o autor desenvolveu a base estatística e discutiu as estimativas de probabilidades usando a distribuição Weibull. Porém, o termo teste acelerado só passou a ser empregado posteriormente, com o estudo de [Nelson e Hahn \(1972\)](#), no qual foram apresentados dados de tempo de falha associados a um

teste industrial. Nesse estudo, foram consideradas as horas até a falha de motores operando em diversas temperaturas.

Assim, os testes acelerados surgiram com a finalidade de adquirir informações sobre a confiabilidade de um sistema de forma rápida. Para isso, aumenta-se o nível de estresse aplicado aos componentes com o auxílio de uma ou mais covariáveis (por exemplo, temperatura, tensão, umidade, pressão, etc.), o que acelera a ocorrência de falhas e reduz o tempo de experimentação, sem alterar a estrutura dos modos de falha de interesse (FARD; LI, 2009). Dessa forma, é possível obter rapidamente dados que, devidamente modelados e analisados, fornecerão informações sobre a vida útil ou o desempenho do sistema em condições de uso normais, resultando em economia de tempo e recursos financeiros (NELSON, 2009).

A aplicação de testes acelerados permite alcançar diversos objetivos estratégicos. Dentre os principais propósitos, destacam-se:

- **Acelerar o desenvolvimento de sistemas:** Obter dados confiáveis em um período reduzido permite antecipar a validação do produto e reduzir o tempo para seu lançamento no mercado.
- **Avaliar a confiabilidade do sistema:** Estimar a taxa de falha sob condições extremas possibilita identificar falhas potenciais e implementar correções antes da comercialização.
- **Certificar componentes críticos:** Garantir a confiabilidade de componentes individuais é essencial em setores de alta criticidade, como o aeroespacial, onde falhas podem ter consequências graves.
- **Comparar fornecedores:** Permite a comparação objetiva da confiabilidade de sistemas produzidos por diferentes fabricantes, auxiliando na escolha dos fornecedores mais confiáveis.

Esses propósitos contribuem para decisões mais informadas durante o desenvolvimento, certificação e melhoria contínua dos sistemas (ESCOBAR; MEEKER, 2006).

O uso de modelos de testes acelerados em diferentes setores e aplicações reforça sua relevância na análise e avaliação da confiabilidade de sistemas. Por exemplo, Afridi *et al.* (2023) aplicou testes acelerados para investigar o desempenho de quarenta otimizadores CC sob altas temperaturas estáticas, considerando ciclos de alimentação e entrada de energia fixa. Além disso, Sühr (2023) destacou a importância de testes acelerados focados em modos de falha como etapa essencial no desenvolvimento e fabricação de componentes eletrônicos. Já Shim (2023) utilizou a equação de Arrhenius em testes acelerados para comparar o desempenho de dois sistemas distintos. Wilke e Lo (2025) propuseram uma abordagem semiparamétrica baseada em *bootstrap* para selecionar modelos de tempo de falha acelerado em contextos industriais, mesmo na presença de censura dependente ou independente desconhecida, permitindo estimativas mais

confiáveis das probabilidades de falha. E [Tang e Cai \(2025\)](#) apresentou uma revisão abrangente sobre a evolução dos testes de vida acelerada, abordando desde os fundamentos históricos até os métodos contemporâneos, com ênfase em modelagem, planejamento experimental e modelagem de degradação, destacando o papel estratégico dos testes de vida acelerada na garantia da confiabilidade de produtos. Esses estudos evidenciam a importância dos testes acelerados na análise de dados e na estimativa de parâmetros, contribuindo para a compreensão e a previsão do comportamento de sistemas e componentes sob condições adversas.

Os testes acelerados dividem-se, em geral, em duas categorias principais: qualitativos e quantitativos. Ambos são úteis e relevantes no contexto da confiabilidade, porém com finalidades distintas. Os testes acelerados quantitativos, foco deste trabalho, visam estimar parâmetros como taxa de falha e vida útil de sistemas sob condições extremas. Fornecem dados numéricos que permitem análises estatísticas detalhadas e decisões baseadas em evidências. Já os testes acelerados qualitativos têm como objetivo identificar modos de falha e entender os mecanismos envolvidos, sem necessariamente quantificar métricas de confiabilidade. São úteis em fases iniciais de desenvolvimento, fornecendo *insights* sobre possíveis problemas futuros ([ESCOBAR; MEEKER, 2006](#); [MODARRES; AMIRI; JACKSON, 2017](#)).

A realização de um teste acelerado exige a aplicação de um fator de aceleração que aumente o estresse sobre o sistema, antecipando falhas e reduzindo o tempo de coleta de dados para avaliação da confiabilidade. Uma forma comum é elevar a taxa de utilização ou aplicar tensões mais altas, especialmente eficaz para sistemas de uso intermitente, como pneus e lâmpadas. Quando não é possível ou eficaz acelerar a falha do sistema por meio do aumento da taxa de uso, recorre-se aos testes de estresse acelerado. Nesses casos, quatro tipos principais de carga de estresse são amplamente utilizados: estresse constante, escalonado, progressivo e cíclico ([LIMON; YADAV; LIAO, 2017](#); [INDMESKINE; SAINTIS; KOBİ, 2023](#)), cuja característica de cada um está representada na [Figura 6](#).

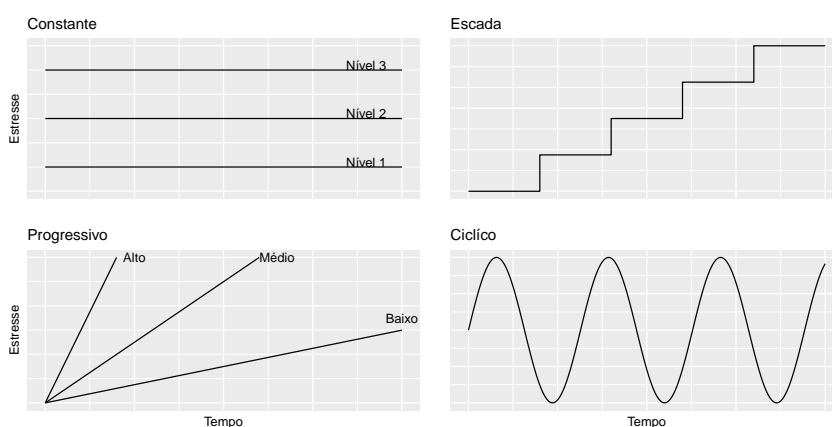


Figura 6 – Formas de aplicação das cargas de estresse.

- **Estresse constante:** É o tipo mais comum, devido à facilidade de aplicação, existência de modelos teóricos bem desenvolvidos e eficiência computacional. Cada grupo de sistemas

é submetido a um único nível de estresse ao longo do experimento, sendo essa abordagem compatível com muitas condições reais de uso. No entanto, pode não induzir falhas dentro do tempo disponível, exigindo testes mais longos em alguns casos.

- **Estresse escada:** Cada sistema é exposto a um nível de estresse por um tempo determinado. Se não houver falhas, o estresse é aumentado sucessivamente até o fim do experimento. Sua principal vantagem é acelerar a ocorrência de falhas. As desvantagens incluem dificuldades na estimativa de parâmetros, na extrapolação para condições normais e o risco de surgirem modos de falha distintos dos observados em uso real.
- **Estresse progressivo:** Cada sistema é submetido a um nível crescente e contínuo de estresse. O uso desse tipo de estresse apresenta vantagens e desvantagens semelhantes às do estresse em escada. No entanto, uma dificuldade adicional pode surgir no controle do aumento progressivo do nível de estresse.
- **Estresse cíclico:** É indicado quando se têm sistemas que experimentam tensões cíclicas em condições reais de operação, expondo as amostras a cargas repetitivas como tensão elétrica senoidal.

Portanto, cada tipo de estresse apresenta vantagens e limitações, sendo mais adequado a cada objetivo e ao contexto experimental. Compreender essas variações é importante para a escolha da abordagem mais apropriada e para contribuir com a garantia da confiabilidade do sistema.

Após compreender os diferentes tipos de estresse aplicáveis aos testes acelerados, é importante considerar as variáveis que podem ser utilizadas para essa finalidade. As variáveis de estresse são fatores controláveis e mensuráveis que permitem avaliar o desempenho de um sistema ou componente tanto em condições normais quanto sob estresse elevado (FREITAS; COLOSIMO, 1997). A escolha adequada dessas variáveis é fundamental em testes acelerados, pois elas permitem compreender como o sistema responde a diferentes níveis de tensão ao longo do tempo. As variáveis de estresse mais comuns são:

- **Temperatura:** é uma variável amplamente usada em testes acelerados, essencial em setores como eletrônica, automotivo, aeroespacial e energia. Avalia a confiabilidade e desempenho dos produtos, garantindo operação eficaz em diversas condições térmicas reais.
- **Pressão:** é uma variável usada em testes acelerados para avaliar a confiabilidade e desempenho de sistemas em setores como o petroquímico, de petróleo e gás, automotivo, farmacêutico, de alta tecnologia, de defesa e energia.

- **Voltagem:** é uma variável importante em testes acelerados para avaliar a confiabilidade de sistemas elétricos em setores como eletrônica, energia, telecomunicações, energias renováveis, automação, eletrodomésticos e transporte elétrico.
- **Carga:** essa variável é usada para avaliar a confiabilidade de sistemas sob diferentes tipos de cargas ou sobrecargas, aplicada em setores como automotivo, construção civil, máquinas, energia, transporte e indústria naval.
- **Vibração:** é uma variável utilizada para avaliar a confiabilidade de sistemas submetidos a diferentes níveis, abrangendo setores como automotivo, eletrônico, aeroespacial, construção civil, ferroviário, energia e eletrodomésticos.
- **Velocidade ou quilometragem:** Essas variáveis estão mais voltadas para as indústrias automotiva, de transporte, que têm o objetivo de submeter os sistemas analisados a velocidades ou quilometragens elevadas a fim de avaliar sua resistência e confiabilidade.

Assim, a escolha adequada não só das variáveis de estresse, mas também dos níveis de estresse, é fundamental para garantir que os testes acelerados forneçam dados confiáveis e representativos, permitindo uma avaliação precisa da durabilidade e do desempenho do sistema em condições reais e extremas.

2.3.1 Modelo de tempo de falha acelerado

A análise dos dados coletados durante os testes acelerados envolve a utilização de modelos estatísticos apropriados que levam em consideração a aceleração do processo de falha (MEEKER, 2010). Nesse contexto, os modelos de tempo de falha acelerado surgem como estruturas estatísticas valiosas, permitindo a análise do comportamento de sistemas ao longo do tempo. Por meio deles, é possível incorporar covariáveis que aceleram ou desaceleram o processo de falha. Isso permite a modelagem de distintas taxas de falhas. Esses modelos são úteis para compreender e prever o tempo até a falha em diferentes cenários e condições.

A estrutura desses modelos é ilustrada na [Figura 7](#), sendo composta geralmente por dois

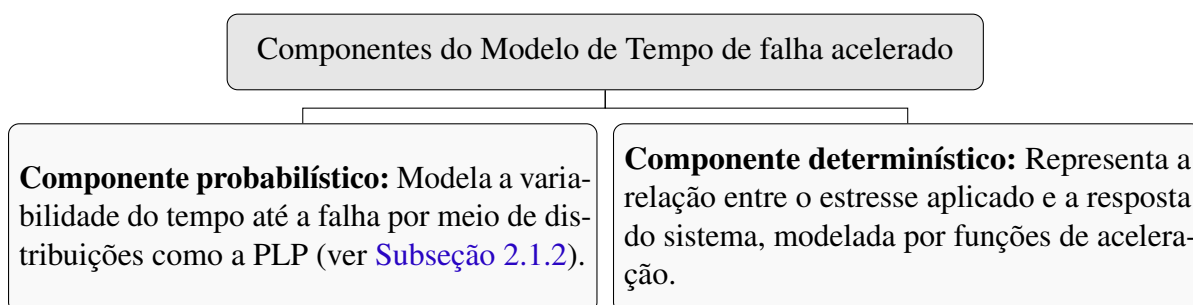


Figura 7 – Estrutura básica de um modelo de tempo de falha acelerado, composta por componentes determinístico e probabilístico.

elementos: um componente determinístico, que relaciona o estresse aplicado ao tempo até a falha por meio de uma função de aceleração, e um componente probabilístico, que modela a distribuição do tempo de falha (FREITAS; COLOSIMO, 1997).

Considerando que as covariáveis atuam de forma multiplicativa, em relação ao tempo, pode-se representar esse efeito por um vetor de covariáveis de dimensão $k \times 1$, representado por x . Nesse contexto, os eventos repetidos ocorrem de acordo com o modelo de tempo de falha acelerado, o qual é caracterizado pela sua função de intensidade dada por

$$\lambda(t|x) = \lambda_0(g(x)t)g(x), \quad t > 0 \quad (2.8)$$

com $\lambda_0(t)$ sendo a função de intensidade de linha de base (componente probabilístico), $g(x)$ é o fator de aceleração (componente determinístico), que relaciona as covariáveis ao tempo. Assim, a função de intensidade condicional $\lambda(t|x)$ dimensiona a função de intensidade de base ao longo do tempo, incorporando os efeitos das covariáveis (LIN; WEI; YING, 1998; MORITA; TOMAZELLA; LOUZADA-NETO, 2018; ESCOBAR; MEEKER, 2006).

A função de intensidade acumulada ou integrada correspondente é

$$\Lambda(t|x) = \int_0^t g(x)\lambda_0(g(x)u) du = \Lambda_0(g(x)t).$$

A função de aceleração $g(x)$, também conhecida como fator de estresse-resposta, desempenha um papel fundamental no modelo de tempo de falha acelerado. Essa função representa a influência dos fatores de estresse na taxa de envelhecimento do sistema, afetando, assim, o tempo de falha. Com isso, tem-se que a função de aceleração é o indicador de desempenho que permite avaliar como as variáveis preditoras impactam a confiabilidade de um dado sistema ao longo do tempo. Quando $g(x) < 1$, isso indica que a covariável está desacelerando o processo de envelhecimento e prolongando o tempo de falha do sistema. Por outro lado, quando $g(x) > 1$, o efeito da covariável é acelerar o processo de envelhecimento, o que resulta em um tempo de falha mais curto.

Quando a relação entre estresse e resposta é formulada com base em fundamentos físicos ou químicos, a interpretação dos resultados se torna mais intuitiva e aplicável. Dentre as formas mais utilizadas na prática, destacam-se as funções de aceleração exponencial, de Arrhenius, de Eyring e de potência inversa, segundo Neto (1991). Na sequência, apresentamos uma descrição sucinta de cada uma dessas relações estresse-resposta.

- **Relação exponencial:** É frequentemente usada em análises onde se assume que a relação entre a covariável de aceleração e o tempo é exponencial. Assim, a função de aceleração é dada por

$$g(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 x}, \quad (2.9)$$

em que β_0 e β_1 são os coeficientes a serem estimados e x é a covariável de aceleração. Essa formulação permite modelar cenários em que o impacto da covariável sobre o tempo de falha aumenta ou diminui de forma exponencial, como discutido por [Morita, Tomazella e Louzada-Neto \(2018\)](#).

- **Relação de Arrhenius:** Compreender e gerenciar as reações químicas é importante para evitar ou resolver falhas. Com o intuito de analisar a influência da temperatura na velocidade das reações químicas, o químico sueco [Arrhenius \(1889\)](#) propôs a relação de Arrhenius. Essa importante equação, amplamente utilizada na cinética química, descreve a taxa de reação em função da temperatura e pode ser expressa da seguinte forma ([KECECIOGLU; JACKS, 1984](#)):

$$g(x) = \beta_0 \exp \left[-\frac{\beta_1}{x} \right], \quad (2.10)$$

em que β_0 é o fator constante não térmico, $\beta_1 = \frac{E_A}{K}$ é a razão entre a energia de ativação e a constante de Boltzmann, com $K = 8,623 \times 10^{-5} eV/K$ e x a temperatura absoluta em Kelvin.

- **Relação de Eyring:** A relação de Eyring foi formulada a partir de princípios da mecânica quântica, e é mais frequentemente usada quando o estresse térmico é a variável de aceleração. Esta relação também é frequentemente usada para outras variáveis de tensão além da temperatura, como a umidade. Conforme descrito em [Kececioglu e Jacks \(1984\)](#) a relação é dada por:

$$g(x) = \frac{1}{x} \exp \left[-\left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{x} \right) \right], \quad (2.11)$$

em que β_0 e β_1 são os parâmetros a serem estimados e x é a covariável que representa o nível de estresse.

- **Relação potência inversa:** É utilizada para modelar o tempo de falha em função de qualquer tipo de variável de estresse, sendo expressa da seguinte forma:

$$g(x) = \frac{\beta_0}{x^{\beta_1}}, \quad (2.12)$$

com x sendo a covariável de estresse positiva, e com β_0 e β_1 os parâmetros a serem estimados ([NETO, 1991](#)).

Nos modelos de tempo de falha acelerado aplicados a sistemas reparáveis, a função de intensidade de base $\lambda_0(t)$ pode ser especificada de forma paramétrica ou não paramétrica, o que confere flexibilidade à modelagem. Três processos são comumente utilizados nesse contexto: o PLP, o processo linear e o processo log-linear, cujas características e aplicações são detalhadas em [Gonzatto \(2021\)](#).

2.3.1.1 PLP para a intensidade de base

Adota-se neste estudo a formulação baseada no PLP para a função de intensidade e sua acumulada, conforme descrito na [Subseção 2.1.2](#). Assim, o modelo de tempo de falha acelerado é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\lambda(t|\mathbf{x}) &= \frac{\kappa}{\gamma^\kappa} (tg(x))^{\kappa-1} g(x) \\ &= \frac{\kappa}{\gamma^\kappa} t^{\kappa-1} [g(x)]^\kappa,\end{aligned}$$

a função acumulada é dada por:

$$\begin{aligned}\Lambda(t|\mathbf{x}) &= \int_0^t \frac{\kappa}{\gamma^\kappa} u^{\kappa-1} [g(x)]^\kappa du \\ &= \left(\frac{tg(x)}{\gamma} \right)^\kappa,\end{aligned}$$

e função de confiabilidade correspondente é expressa por:

$$\begin{aligned}R(t|\mathbf{x}) &= \exp(-\Lambda(t|\mathbf{x})) \\ &= \exp\left\{-\left(\frac{tg(x)}{\gamma}\right)^\kappa\right\}.\end{aligned}$$

Desta forma, tem-se que a função de confiabilidade correspondente até o tempo t_n é dada por

$$\begin{aligned}R(t|\mathbf{x}, t_n) &= \exp(-\Lambda(t+t_n|\mathbf{x}, t_n) - [-\Lambda(t_n|\mathbf{x}, t_n)]) \\ &= \exp\left\{-\left(\frac{(t+t_n)g(x)}{\gamma}\right)^\kappa + \left(\frac{t_n g(x)}{\gamma}\right)^\kappa\right\}.\end{aligned}$$

E a função quantil para o modelo de tempo de falha acelerado com intensidade linha de base PLP é

$$t = \frac{\gamma}{g(x)} \left(-\log(U) + \left(\frac{t_n g(x)}{\gamma} \right)^\kappa \right)^{\frac{1}{\kappa}} - t_n. \quad (2.13)$$

Entre os métodos disponíveis para a estimação dos parâmetros dos modelos de tempo de falha acelerado, destaca-se o método de máxima verossimilhança, amplamente utilizado devido às suas propriedades assintóticas desejáveis. Após a obtenção das estimativas, torna-se possível avaliar o impacto das covariáveis na confiabilidade do sistema ao longo do tempo, identificando se elas atuam como fatores de aceleração ou desaceleração do processo de falha. Essas informações colaboram para a tomada de decisão sobre a durabilidade e a confiabilidade dos sistemas.

2.4 Modelos de fragilidade

A necessidade de quantificar a heterogeneidade não observada (fragilidade) entre os componentes de uma população ou entre os componentes que compõem um mesmo sistema/*cluster*, levou ao desenvolvimento de uma nova classe de modelos conhecidos como modelos de fragilidade. Os primeiros estudos com essa temática foram realizados por [Vaupel, Manton e Stallard \(1979\)](#) e [Hougaard \(1984\)](#) na área de sobrevivência. Os autores apresentaram uma extensão do modelo tradicional de Cox ([COX, 1972](#)), incluindo um efeito aleatório multiplicativo na função de risco/intensidade, o que permitiu lidar com essa heterogeneidade de forma mais completa.

O princípio básico do modelo de fragilidade consiste em incorporar um efeito aleatório não observado que modifica a função de intensidade de um componente. Esse termo de fragilidade representa variabilidades não capturadas por covariáveis observadas e pode ser modelado de forma univariada, atribuindo um efeito aleatório a cada unidade, ou de forma compartilhada entre grupos de componentes. Neste trabalho, vamos considerar a abordagem de fragilidade univariada.

O modelo de fragilidade tem como característica principal o modelo de intensidade multiplicativa composto por três componentes, sendo elas uma fragilidade (efeito aleatório), uma função de intensidade de linha de base (paramétrica ou não paramétrica) e um termo modelando a influência de covariáveis observadas (efeitos fixos) ([WIENKE, 2010](#)), que não será considerada aqui nesta [Seção 2.4](#).

O termo, z_s , é uma realização de uma distribuição de probabilidade conhecida, positiva, contínua e independente do tempo que tem a função de quantificar o efeito aleatório da fragilidade. Diferentes distribuições são propostas e usadas para esta finalidade, entre elas a Inversa Gaussiana ([MORITA; TOMAZELLA; LOUZADA-NETO, 2018](#)) e ([SOARES *et al.*, 2022](#)), a Birnbaum-Saunders ([LEÃO *et al.*, 2018](#)), a Lindley ponderada ([MOTA *et al.*, 2022](#)), a Log Normal ([HIRSCH; WIENKE; KUSS, 2016](#)), a Gama ([GONZATTO, 2021](#)), entre outras. Para uma descrição mais detalhada sobre as distribuições de fragilidade, o leitor deve consultar [Duchateau e Janssen \(2008\)](#).

Dentre todas as distribuições de fragilidade descritas na literatura, a distribuição Gama é a mais popular, e isso está diretamente relacionado com a sua simplicidade algébrica, ou seja, facilidade de realizar a derivação direta e fechada de expressões para medidas fundamentais como confiabilidade incondicional, intensidade acumulada e função de intensidade. Tudo isso está diretamente relacionado com a forma que ela pode ser representada e analisada usando a transformada de Laplace. Assim, a distribuição Gama tornou-se extremamente conveniente e eficaz em diversas aplicações, e a consequência direta desta vantagem analítica está na sua empregabilidade em diversos contextos, isso justifica a sua popularidade em muitos trabalhos encontrados na literatura ([WIENKE, 2010](#)).

Outro ponto importante a ser considerado é o problema da identificabilidade, descrito

por [Elbers e Ridder \(1982\)](#), o qual destaca a necessidade de examinar esse aspecto fundamental ao lidar com modelos de fragilidade. No contexto dos modelos de riscos proporcionais com fragilidade, é necessário que a distribuição de fragilidade tenha média finita para o modelo ser identificável. Assim, para manter a identificabilidade do modelo de fragilidade, é conveniente ter uma distribuição com média igual a 1, e essa condição é necessária para que a fragilidade seja determinada de forma única.

Considerando o contexto univariado com um conjunto de S sistemas independentes. Cada sistema individual, representado por $s = 1, \dots, S$, possui um conjunto de tempos de falha observados, denotados por $t_{s,j}$, onde $j = 1, \dots, n_s$. Dentro de cada instante de tempo $t_{s,j}$, existe um termo de fragilidade associado, representado como $z_{s,j}$. No contexto do modelo de fragilidade multiplicativa sem a presença de covariáveis observadas, a função de intensidade para o tempo $t_{s,j}$, condicionada ao seu termo de fragilidade $z_{s,j}$, é definida da seguinte maneira

$$\lambda(t_{s,j}|z_{s,j}) = z_{s,j}\lambda_0(t_{s,j}), \quad t_{s,j} > 0, \quad (2.14)$$

sendo $z_{s,j}$ a variável de fragilidade com distribuição conhecida e $\lambda_0(t)$ a função de intensidade de linha de base. Portanto, a função de intensidade acumulada para o tempo $t_{s,j}$, condicionada ao seu termo de fragilidade $z_{s,j}$, é expressa por

$$\Lambda(t_{s,j}|z_{s,j}) = \int_0^{t_{s,j}} z_{s,j}\lambda_0(u) du = z_{s,j}\Lambda_0(t_{s,j}). \quad (2.15)$$

E a função de confiabilidade condicionada à fragilidade $z_{s,j}$ é descrito por

$$R(t_{s,j}|z_{s,j}) = e^{-\int_0^{t_{s,j}} \lambda(u|z) du} = e^{-z_{s,j}\Lambda_0(t_{s,j})}. \quad (2.16)$$

Dadas as funções de intensidade com fragilidade ([Equação 2.14](#)) e a intensidade acumulada com fragilidade ([Equação 2.15](#)), e levando em consideração o contexto de sistemas reparáveis com reparo mínimo e truncamento por tempo, pode-se reescrever a função de verossimilhança da [Equação 2.6](#) com base na condicionalidade à fragilidade $z_{s,j}$, da seguinte forma

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}|t_{s,j}, z_{s,j}) &= \prod_{s=1}^S \left\{ \left(\prod_{j=1}^{n_s} \lambda(t_{s,j}|z_{s,j}) \right) e^{-\Lambda(\tau_s|z_{s,n_s})} \right\} \\ &= \prod_{s=1}^S \left\{ \left(\prod_{j=1}^{n_s} z_{s,j}\lambda_0(t_{s,j}) \right) e^{-z_{s,n_s}\Lambda_0(\tau_s)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ao estimar os parâmetros, o processo envolve a maximização da função de verossimilhança não condicional aos termos de fragilidade $z_{s,j}$. Uma vez que todos esses termos provêm da mesma distribuição ([WIENKE, 2010](#)), basta realizar a integração da função descrita pela [Equação 2.17](#) em relação ao termo de fragilidade $z_{s,j}$ e obter assim a função de verossimilhança marginal

$$L(\boldsymbol{\theta}|t_{s,j}, z_{s,j}) = \int_0^\infty \prod_{s=1}^S \left\{ \left(\prod_{j=1}^{n_s} z_{s,j}\lambda_0(t_{s,j}) \right) e^{-z_{s,n_s}\Lambda_0(\tau_s)} f(z_{s,j}) dz_{s,j} \right\}.$$

Entretanto, no contexto univariado, a integração não é uma tarefa trivial, pois a integração é realizada em cada um dos termos de fragilidade $z_{s,j}$. Isso é destacado por [Wienke \(2010\)](#), quando menciona que, no caso univariado, a integração não precisa ser realizada na função de verossimilhança. Em vez disso, uma abordagem mais simples e equivalente pode ser feita construindo a função de verossimilhança usando as funções de intensidade e intensidade acumulada que não são condicionadas aos termos de fragilidade. Isso significa que as funções de intensidade e intensidade acumulada são marginalizadas separadamente, e só então a função de verossimilhança é estruturada de forma marginalizada.

As funções de intensidade ([Equação 2.14](#)), intensidade acumulada ([Equação 2.15](#)), e de confiabilidade ([Equação 2.16](#)) são formuladas no nível individual. Como os dados no nível individual não são diretamente observáveis, é necessário considerar o nível populacional, onde o efeito da fragilidade é integrado. Isso implica calcular a função de confiabilidade da população como uma média ponderada das funções de confiabilidade condicionais, com os pesos determinados pela função de densidade da distribuição de fragilidade. Em outras palavras, a função de confiabilidade da população é obtida ao integrar o efeito da fragilidade na função de confiabilidade condicional $R(t_{s,j}|z_{s,j})$. Isso pode ser entendido como a função de confiabilidade (incondicional ou marginal) de um sistema escolhido aleatoriamente da população de estudo, representando o que pode ser observado na prática.

Considerando que $Z_{s,j}$ é uma variável aleatória de fragilidade com uma dada distribuição de probabilidade, tem-se que a função de confiabilidade marginal é obtida integrando a [Equação 2.16](#), conforme segue:

$$\begin{aligned} R(t_{s,j}) &= \int_0^{\infty} e^{-z_{s,j}\Lambda_0(t_{s,j})} f_Z(z_{s,j}) dz_{s,j} \\ &= \mathbf{L}(\Lambda_0(t_{s,j})), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde \mathbf{L} denota a transformada de Laplace da variável de fragilidade, ou seja, a função de confiabilidade marginal é igual a transformada de Laplace no ponto $\Lambda_0(t_{s,j})$.

Com o resultado da distribuição de confiabilidade marginal, conforme descreve [Wienke \(2010\)](#), a função de densidade marginal é definida por:

$$f(t_{s,j}) = -\frac{d}{dt_{s,j}} \mathbf{L}(\Lambda_0(t_{s,j})),$$

logo a função de intensidade marginal é dada por

$$\lambda(t_{s,j}) = \frac{-\mathbf{L}'(\Lambda_0(t_{s,j}))}{\mathbf{L}(\Lambda_0(t_{s,j}))}. \quad (2.19)$$

E a função de intensidade acumulada marginal por

$$\Lambda(t) = -\log(\mathbf{L}(\Lambda_0(t))). \quad (2.20)$$

Com os resultados obtidos nas equações (2.19), (2.20), e considerando a modelagem com reparo mínimo e truncamento por tempo, a função de verossimilhança marginal do caso univariado com fragilidade é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}|t_{s,j}) &= \prod_{s=1}^S \left\{ \left(\prod_{j=1}^{n_s} \lambda_0(t_{s,j}) \right) e^{-\Lambda_0(\tau_s)} \right\} \\ &= \prod_{s=1}^S \left\{ \left(\prod_{j=1}^{n_s} \frac{-\mathbf{L}'(\Lambda_0(t_{s,j}))}{\mathbf{L}(\Lambda_0(t_{s,j}))} \right) \mathbf{L}(\Lambda_0(t_{s,j})) \right\}. \end{aligned}$$

É importante destacar que o parâmetro associado à fragilidade está incluído no conjunto de parâmetros a serem estimados pelo modelo. Em essência, esse parâmetro representa uma nova fonte de variabilidade a ser avaliada. No caso da fragilidade univariada, ele capta a presença de fatores não observados que podem impactar diretamente a função de intensidade em diferentes instantes de falha.

2.5 Observações Finais

Neste capítulo, foram apresentados os principais conceitos e estruturas estatísticas que fundamentam teoricamente o desenvolvimento desta tese. A abordagem contempla uma revisão sobre os processos de contagem (ver Seção 2.1), sistemas reparáveis (ver Seção 2.2), testes acelerados (ver Seção 2.3) e modelos de fragilidade (ver Seção 2.4), todos amplamente consolidados na literatura científica. O domínio desses conceitos é fundamental para a construção dos modelos propostos nos capítulos subsequentes, pois eles fornecem a base necessária para a análise de dados provenientes de sistemas reparáveis, submetidos a diferentes níveis de estresse e com possível presença de heterogeneidade não observada.

MODELOS ACELERADOS EXPONENCIAL COM FRAGILIDADE PARA MÚLTIPLOS SISTEMAS REPARÁVEIS

Este capítulo propõe uma extensão do modelo de tempo de falha acelerado exponencial com fragilidade Lindley Ponderada, focada na análise de sistemas reparáveis sob condições de estresse. A proposta busca ampliar as possibilidades de modelagem e fornecer maior flexibilidade de ajuste. A motivação decorre da crescente demanda por produtos confiáveis, o que exige estratégias de manutenção mais eficazes e análises precisas da confiabilidade em ambientes industriais. Adota-se a suposição de reparo mínimo, em que o sistema retorna à condição imediatamente anterior à falha, e usa-se o PPNH como base para modelar a recorrência de falhas ao longo do tempo.

Nesse contexto, a modelagem acelerada permite antecipar falhas ao expor o sistema a níveis elevados de estresse, otimizando a coleta de dados em tempo reduzido. Além disso, reconhece-se a importância de considerar as variáveis não observadas que afetam o comportamento do sistema, e elas são incorporadas ao modelo por meio da fragilidade.

A proposta mantém a interpretação física intuitiva do modelo original e introduz uma estrutura paramétrica para análise de regressão. Resultados empíricos mostram que a fragilidade Lindley Ponderada apresenta desempenho semelhante ao da Gama em diversos cenários, oferecendo, assim, mais uma opção de modelagem conforme as especificidades dos dados. Dessa forma, o modelo representa uma alternativa às abordagens clássicas na análise de eventos recorrentes sob estresse e heterogeneidade.

Esse capítulo está organizado da seguinte forma: na [Seção 3.1](#), descreve-se a modelagem de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama e Lindley Ponderada. A discussão sobre a obtenção das estimativas dos parâmetros por meio do método de máxima verossimilhança é feita na [Seção 3.2](#). Na [Seção 3.3](#) apresenta-se um estudo de simulação que avaliou o desempenho

dos estimadores dos modelos estudados. Por fim, a [Seção 3.4](#) ilustra a aplicação prática da modelagem a um conjunto de dados simulado.

3.1 Modelo de Tempo de Falha Acelerado Exponencial com Fragilidade Gama e Lindley Ponderada

O modelo de tempo de falha acelerado com termo de fragilidade possui a função de intensidade para a j -ésima unidade com a variável de fragilidade. Esse modelo é uma extensão da [Equação 2.8](#) e é definido como,

$$\begin{aligned}\lambda(t|\mathbf{x}, z_j) &= z_j \lambda(t|\mathbf{x}) \\ &= z_j \lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t}) e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}}, \quad j = 1, \dots, n_s,\end{aligned}$$

sendo z_j o termo de fragilidade da variável aleatória de fragilidade Z_j , independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com uma distribuição conhecida.

Além disso, a função de intensidade acumulada ou integrada correspondente é

$$\begin{aligned}\Lambda(t|\mathbf{x}, z_j) &= \int_0^t \lambda(u|\mathbf{x}, z_j) du \\ &= z_j \Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t}).\end{aligned}$$

Foram adotadas as distribuições Gama e Lindley Ponderada na modelagem da fragilidade, mas é importante destacar que outras alternativas, como Birnbaum-Saunders, Gaussiana Inversa, Hougaard e Log-Normal, são também discutidas na literatura, conforme [Balan e Putter \(2020\)](#).

Considerando o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade e assumindo que a função de intensidade de linha de base segue um PLP, como descrito na [Subseção 2.1.2](#), tem-se a função de intensidade

$$\begin{aligned}\lambda(t|\mathbf{x}, z_j) &= z_j \left(\frac{\kappa}{\gamma}\right) \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\kappa-1} e^{\kappa(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})} \\ &= z_j \lambda_0(t) e^{\kappa(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})},\end{aligned}\tag{3.1}$$

e a função de intensidade acumulada correspondente

$$\begin{aligned}\Lambda(t|\mathbf{x}, z_j) &= z_j \left(\frac{t}{\gamma}\right)^\kappa e^{\kappa(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})} \\ &= z_j \Lambda_0(t) e^{\kappa(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Portanto, a função de confiabilidade associada é dada por

$$\begin{aligned}R(t|\mathbf{x}, z_j) &= \exp\left\{-z_j \left(\frac{t}{\gamma}\right)^\kappa e^{\kappa(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})}\right\} \\ &= \exp\left\{-z_j \Lambda_0(t) e^{\kappa(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})}\right\}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Para facilitar o processo de estimação, utilizam-se as funções de intensidade condicional, intensidade acumulada e confiabilidade, descritas nas Equações (3.1), (3.2) e (3.3), respectivamente. Para isso, inicia-se pela definição da função de confiabilidade não condicionada, que pode ser obtida por meio da integração da função de confiabilidade condicional (3.3) em relação ao termo de fragilidade z_s , conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned} R(t|\mathbf{x}) &= \int_0^{\infty} R(t|\mathbf{x}, z_j) f_{Z_j}(z_j) dz_j \\ &= \int_0^{\infty} \exp\left\{-z_j \Lambda_0(t) e^{\kappa(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})}\right\} f_{Z_j}(z_j) dz_j. \end{aligned}$$

Sabendo que a transformada de Laplace $Q(p)$ é dada por

$$Q(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f_X(x) dx$$

e, conforme descrito em Wienke (2010), a confiabilidade descrita pela Equação 3.3 pode ser expressa através da transformada de Laplace da seguinte forma: substituindo $p = \Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})$ e $x = z_j$, tem-se

$$\begin{aligned} Q\left(\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})\right) &= \int_0^{\infty} \exp\left\{-z_j \Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})\right\} f_{Z_j}(z_j) dz_j \\ &= R(t|\mathbf{x}), \end{aligned}$$

e assim, obtém-se a expressão para a função de confiabilidade não condicional ao termo de fragilidade z_j . Por fim, é possível derivar as demais expressões não condicionais utilizando as relações entre as funções de confiabilidade, de intensidade acumulada e de intensidade.

3.1.1 Distribuição de Fragilidade Gama

Considerando que o efeito da fragilidade, representado por z_j , corresponde a uma realização de uma distribuição de probabilidade conhecida, o propósito é modelar esse efeito utilizando uma distribuição positiva, contínua e independente do tempo, tal como a Gama, neste caso.

Neste contexto, a variável Z é tratada como uma variável aleatória que representa o efeito de fragilidade. Essa variável segue uma distribuição Gamma($1/\alpha, \alpha$), com $E(Z) = 1$ e $\text{Var}(Z) = \alpha$, atendendo, assim, à condição de identificabilidade (ELBERS; RIDDER, 1982). Consequentemente, a função de densidade de probabilidade da variável aleatória Z é expressa da seguinte maneira:

$$f(z) = \frac{z^{1/\alpha-1} \exp\{-z/\alpha\}}{\Gamma(1/\alpha) \alpha^{1/\alpha}}, \quad z, \alpha > 0$$

em que

$$\Gamma(c) = \int_0^{\infty} x^{c-1} e^{-x} dx, \quad c > 0,$$

é a função Gama completa.

A transformada de Laplace pode ser obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned} Q(p) &= \int_0^{\infty} \exp(-pz) f_Z(z) dz \\ &= \frac{1}{\alpha^{1/\alpha} (1/\alpha + p)^{1/\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Assim, pela [Equação 3.4](#), a função de confiabilidade incondicional ao termo de fragilidade é descrita por

$$\begin{aligned} R(t|\mathbf{x}) &= Q\left(\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})\right) \\ &= \left(1 + \alpha \Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})\right)^{-1/\alpha}, \end{aligned}$$

consequentemente, a função de intensidade acumulada incondicional ao termo de fragilidade tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \Lambda(t|\mathbf{x}) &= -\log(R(t|\mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{\alpha} \log\left(1 + \alpha \Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Finalmente, ao derivar a função de intensidade acumulada dada pela [Equação 3.5](#) em relação ao tempo t , obtém-se a função de intensidade de falha incondicional ao termo de fragilidade, expressa por

$$\begin{aligned} \lambda(t|\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \Lambda(t|\mathbf{x}) \\ &= \frac{\lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})}{1 + \alpha \Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})}. \end{aligned}$$

A função quantílica do modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama é determinada por

$$\begin{aligned} F(t|\mathbf{x}, t_n) &= p \\ 1 - R(t|\mathbf{x}, t_n) &= p \\ 1 - \exp(-\Lambda(t+t_n|\mathbf{x}) + \Lambda(t_n|\mathbf{x})) &= p \\ -\frac{1}{\alpha} \log\left(1 + \alpha \Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} (t+t_n)})\right) + \frac{1}{\alpha} \log\left(1 + \alpha \Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta} t})\right) &= \log(1 - p) \end{aligned}$$

em que t_n representa o último tempo de falha.

3.1.2 Distribuição de Fragilidade Lindley Ponderada

A distribuição de fragilidade Lindley Ponderada proposta por [Ghitany et al. \(2011\)](#) constitui uma generalização significativa da distribuição Lindley ([LINDLEY, 1958](#)). Exibindo maior flexibilidade do que a Lindley, esta distribuição pode ser apropriada para diversas investigações de confiabilidade, como discutido em [Mota et al. \(2021\)](#). Seja Z uma variável aleatória com uma distribuição Lindley Ponderada com função de densidade de probabilidade descrita por

$$f(z) = \frac{\theta^{c+1}}{(\theta + c)\Gamma(c)} z^{c-1}(1+z)e^{-\theta z}, \quad z, c, \theta > 0. \quad (3.6)$$

Observa-se que é possível expressar a função de densidade de probabilidade ([Equação 3.6](#)) como uma mistura de duas distribuições Gama, ou seja,

$$f(z) = \frac{\theta}{\theta + c} f_1(z) + \frac{c}{\theta + c} f_2(z),$$

em que $f_k(z)$ tem função de densidade de probabilidade Gama $(c + k, \theta)$, para $k = 1, 2$. Aplicando a transformada de Laplace na [Equação 3.6](#) tem-se

$$\begin{aligned} Q(p) &= \int_0^{\infty} \frac{\theta^{c+1}}{(\theta + c)\Gamma(c)} z^{c-1}(1+z)e^{-(\theta+p)z} dz \\ &= \frac{\theta^{c+1}}{(\theta + c)} \int_0^{\infty} \left[\frac{z^{c-1}e^{-(p+\theta)z}}{\Gamma(c)} + \frac{z^{c-1}ze^{-(p+\theta)z}}{\Gamma(c)} \right] dz \\ &= \frac{\theta^{c+1}}{(\theta + c)} \left[\frac{1}{(p+\theta)^c} \int_0^{\infty} \frac{(p+\theta)^c z^{c-1}e^{-(p+\theta)z}}{\Gamma(c)} dz + \frac{c}{(p+\theta)^{c+1}} \int_0^{\infty} \frac{(p+\theta)^{c+1} z^{(c+1)-1}e^{-(p+\theta)z}}{c\Gamma(c)} dz \right] \\ &= \frac{\theta^{c+1}}{(\theta + c)} \left[\frac{1}{(p+\theta)^c} + \frac{c}{(p+\theta)^{c+1}} \right] \\ &= \frac{p+\theta+c}{\theta+c} \left(\frac{\theta}{p+\theta} \right)^{c+1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, pela [Equação 3.7](#), a função de confiabilidade incondicional no termo de fragilidade com distribuição Lindley Ponderada é dada por

$$\begin{aligned} R(t|\mathbf{x}) &= Q\left(\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t})\right) \\ &= \frac{\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}) + \theta + c}{(\theta + c)} \left(\frac{\theta}{\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}) + \theta} \right)^{c+1}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a função de intensidade acumulada incondicional ao termo de fragilidade é dada por

$$\begin{aligned} \Lambda(t|\mathbf{x}) &= -\log(R(t|\mathbf{x})) \\ &= -\log\left(\frac{\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}) + \theta + c}{(\theta + c)} \left(\frac{\theta}{\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}) + \theta} \right)^{c+1} \right) \\ &= -\log\left(\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}) + \theta + c\right) + \log(\theta + c) - (c+1) \left[\log \theta + \log\left(\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}) + \theta\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sendo assim, obtêm-se a função de intensidade de falha incondicional ao termo de fragilidade, dada por:

$$\begin{aligned}\lambda(t|\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt}\Lambda(t|\mathbf{x}) \\ &= -\frac{\lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t})e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}}}{\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}) + \theta + c} + \frac{(c+1)\lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t})e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}}}{\Lambda_0(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}) + \theta}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Para satisfazer a condição de identificabilidade, a variável aleatória Z será condicionada à distribuição Lindley Ponderada, com $E(Z) = 1$ e $\text{Var}(Z) = \alpha$. Nesse caso, os parâmetros c e θ assumem os seguintes valores: $c = 4/[\alpha(\alpha + 4)]$ e $\theta = 2(\alpha + 2)/[\alpha(\alpha + 4)]$.

A função quantil para o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada é determinada por

$$\begin{aligned}F(t|\mathbf{x}, t_n) &= p \\ 1 - R(t|\mathbf{x}, t_n) &= p \\ 1 - \exp\{-\Lambda(t + t_n|\mathbf{x}) + \Lambda(t_n|\mathbf{x})\} &= p \\ \log\left[\Lambda_0\left(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}(t + t_n)}\right) + \theta + c\right] - (c+1)\log\left[\Lambda_0\left(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}(t + t_n)}\right) + \theta\right] \\ - \log\left[\Lambda_0\left(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}\right) + \theta + c\right] + (c+1)\log\left[\Lambda_0\left(e^{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}_t}\right) + \theta\right] &= \log(1 - p).\end{aligned}$$

Dados os parâmetros γ, κ, α e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)^\top$, é possível observar vários comportamentos para as funções de intensidade $\lambda(t|\mathbf{x})$, intensidade acumulada $\Lambda(t|\mathbf{x})$ e confiabilidade $R(t|\mathbf{x})$ do modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada, conforme é ilustrado pela [Figura 8](#). Torna-se evidente que a incorporação do termo fragilidade ao modelo altera o comportamento assumido pela intensidade ([Equação 3.9](#)), em comparação à intensidade sem a presença de fragilidade ([Equação 2.8](#)). Na ausência de fragilidade, o parâmetro κ captura padrões crescentes ($\kappa > 1$), decrescentes ($\kappa < 1$) e constantes ($\kappa = 1$), com a inclusão do termo de fragilidade e $\gamma = 5$ fixo, a função de intensidade exibe comportamento unimodal em ($\kappa = 1, 5$), comportamento quase constante em $\kappa = 1$ e comportamento decrescente em ($\kappa = 3$).

De acordo com a [Figura 8](#), ao examinar o fator de aceleração fica evidente que, no caso apresentado, e^{β_0} representa o nível sem aceleração (linhas sólidas), enquanto $e^{\beta_0 + \beta_1}$ denota o nível com aceleração (linhas tracejadas). Consequentemente, valores estimados de e^{β_0} próximos a $e^{\beta_0 + \beta_1}$ evidenciam a inexistência de diferença entre os níveis sem e com aceleração (linhas azuis), e a curva de confiabilidade decai marginalmente mais rápido em comparação a situações em que há distinção entre esses níveis (linhas vermelhas).

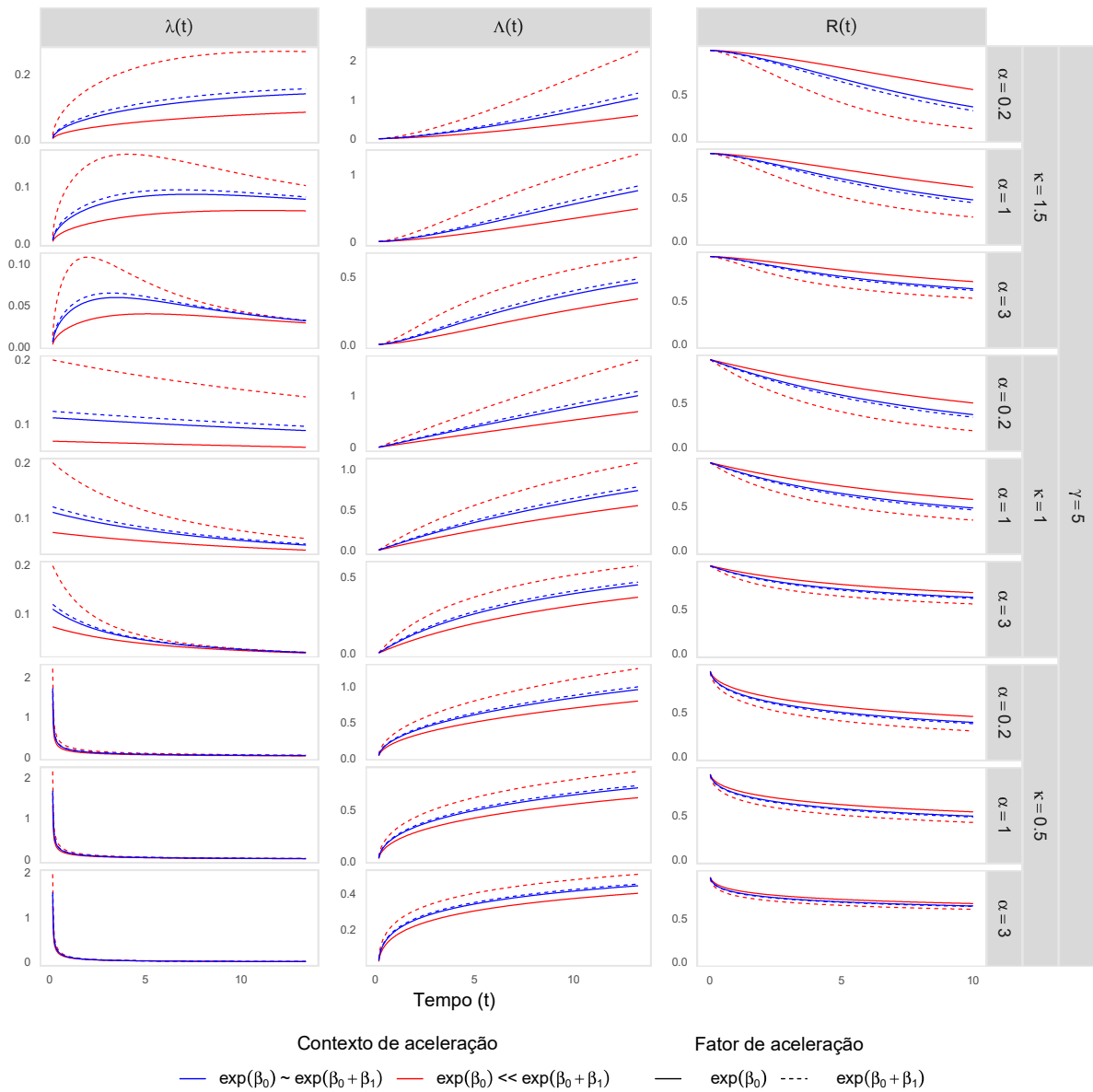


Figura 8 – Alguns comportamentos possíveis para as funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade do modelo tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada, considerando os valores fixos de $\gamma = 5$, $\kappa = (0, 5; 1, 0; 1, 5)$, $\alpha = (0, 2; 1, 0; 3, 0)$, e considerando dois contextos de aceleração $e^{\beta_0} \sim e^{\beta_0 + \beta_1}$ e $e^{\beta_0} \ll e^{\beta_0 + \beta_1}$.

3.2 Estimação

Um conceito importante em sistemas reparáveis é o truncamento, que pode ser por tempo ou falha. O truncamento por tempo em um conjunto de dados específico encerra-se quando atinge um limite de tempo previamente estabelecido e representado aqui por τ . Sejam $t_{s,j}$, onde $s = 1, \dots, S$ e $j = 1, \dots, n_s$, as observações da variável aleatória T , que representa os tempos de falha para o s -ésimo sistema. Esses tempos de falha são registrados como o intervalo decorrido desde a inicialização do sistema, denotado $(0 < t_{i,1} < t_{i,2} < \dots < t_{s,n_s})$.

Se o s -ésimo sistema sofrer truncamento de tempo, ele será observado até o tempo predeterminado τ_s , onde $0 < t_{s,1} < \dots < t_{s,n_s} < \tau_s$, com τ_s fixo, n_s aleatório e $t_{s,n_s} < \tau_s$. No truncamento por falha, os tempos de falha são denotados por $t_{s,1}, t_{s,2}, \dots, t_{s,n_s}$, em que t_{s,n_s}^* representa o último tempo de falha observado. Neste caso, a coleta de dados ocorre até que exatamente n_s^* falhas ocorram, e o número observado de falhas é fixado desde o início do experimento. Porém, os tempos de falha, representados por t , ainda são aleatórios.

Embora neste trabalho as funções de verossimilhança sejam desenvolvidas considerando truncamento de tempo, é importante notar que o processo é análogo quando se utiliza truncamento por falha. A função de verossimilhança resultante é muito semelhante àquela obtida no truncamento de tempo, com a única diferença sendo a substituição de τ pelo momento do último evento de falha observado t_{s,n_s}^* .

Entendendo o conceito de truncamento e com as funções de intensidade e intensidade acumulada definidas para todos os sistemas, a próxima etapa envolve a inferência para estimar os parâmetros do modelo. Este procedimento será realizado por meio do método de máxima verossimilhança. Assim, considerando um conjunto de S sistemas reparáveis sujeitos a um processo de reparo mínimo truncado no tempo τ_s e a variabilidade aleatória no número de falhas ocorridas no s -ésimo sistema até o tempo τ_s , onde $s = 1, \dots, S$, a função de verossimilhança para um vetor específico de parâmetros θ é definida da seguinte forma:

$$L(\theta) = \prod_{s=1}^S \left\{ \left[\prod_{j=1}^{n_s} \lambda(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) \right] \exp \{ -\Lambda(\tau_s | \mathbf{x}_s) \} \right\},$$

em que a log-verossimilhança é dada por

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n_s} \log \lambda(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) \right] - \Lambda(\tau_s | \mathbf{x}_s) \right\}.$$

Diante do modelo de tempo de falha acelerado com intensidade e intensidade acumulada de linha de base com distribuição PLP (Subseção 2.1.2), tem-se que a função log-verossimilhança é expressa por

$$l(\theta) = N(\log \kappa - \kappa \log \gamma) + \kappa \sum_{s=1}^S n_s (\mathbf{x}_s^\top \boldsymbol{\beta}) + \\ + (\kappa - 1) \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{n_s} \log t_{s,j} - \sum_{s=1}^S \left(\frac{\tau_s}{\gamma} \right)^\kappa e^{\kappa (\mathbf{x}_s^\top \boldsymbol{\beta})}, \quad (3.10)$$

em que $N = \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^{n_s} n_{s,j}$.

Explorando o modelo de tempo de falha acelerado, no qual as intensidades de linha de base e acumulada seguem um PLP, combinado com a inclusão de fragilidade Gama, a função log-verossimilhança pode ser expressa da seguinte maneira:

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n_s} \log \left(\frac{\lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}})}{1 + \alpha \Lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}})} \right) \right] - \frac{1}{\alpha} \log \left(1 + \alpha \Lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}}) \right) \right\}. \quad (3.11)$$

Ao analisar o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade de Lindley Ponderada, e levando em consideração tanto a intensidade de base distribuída pelo PLP quanto a intensidade acumulada, têm que a função log-verossimilhança pode ser expressa da seguinte forma

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n_s} \log \left(-\frac{\lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}})}{\Lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}}) + \theta + c} + \frac{(c+1)\lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}})}{\Lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}}) + \theta} \right) \right] + \right. \\ \left. - \log \left(\Lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}}) + \theta + c \right) - \log(\theta + c) + \right. \\ \left. + (c+1) \log \theta + (c+1) \log \left(\Lambda_0(e^{\mathbf{x}_s^\top} \boldsymbol{\beta}_{t_{s,j}}) + \theta \right) \right\}. \quad (3.12)$$

Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo de tempo de falha acelerado e dos modelos de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama e Lindley Ponderada podem ser obtidas por meio da maximização da $l(\theta)$ em [Equação 3.10](#), [Equação 3.11](#) e [Equação 3.12](#), respectivamente. Adicionalmente, o Teorema do Limite Central garante que os estimadores obtidos pelo método de máxima verossimilhança, em forma fechada, são assintoticamente normais, seguindo uma distribuição normal multivariada.

3.3 Estudo de Simulação

Esta seção apresenta os resultados de um estudo de simulação de Monte Carlo, destinado a avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros dos modelos sob investigação. Foram considerados três modelos: o modelo de tempo de falha acelerado e os modelos de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama e Lindley Ponderada. A geração de dados para os três modelos foi conduzida seguindo o processo descrito no [Algoritmo 1](#).

Neste estudo de simulação, foram considerados 210 cenários, divididos da seguinte maneira: 30 cenários relacionados ao modelo sem fragilidade e 90 cenários cada para os modelos com fragilidade Gama e Lindley Ponderada. As combinações para compor esses cenários foram definidas da seguinte forma: $E(N) = (10; 20; 30; 40; 50)$, representando o número esperado de falhas em um total de 4 e 10 sistemas; $\kappa = (0,5; 1,0; 1,5)$ e $\gamma = 5$, relacionados aos valores da intensidade de base do PLP; $\alpha = (0,2; 1,0; 3,0)$, referente à fragilidade. E por fim, para representar os níveis de aceleração, $(\beta_0, \beta_1) = (1,0; -1,0)$ para os casos em que e^{β_0} está distante de $e^{\beta_0 + \beta_1}$ e o par $(\beta_0, \beta_1) = (\log(0,55); \log(0,60)/\log(0,55))$ para os casos em que e^{β_0} está próximo de $e^{\beta_0 + \beta_1}$.

Algoritmo 1 – Gerador de números aleatórios do modelo proposto

```

1: Input:
2:  $G$ 
3:  $\mathbf{S} = \{(S_1, \dots, S_G)\}$  ▷ n° de sistemas dentro de um grupo
4:  $\mathbf{n} = \{(n_{11}, \dots, n_{1S_1}), \dots, (n_{G1}, \dots, n_{GS_G})\}$  ▷ n° de falhas por sistema dentro do grupo
5:  $\mathbf{x} = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{\times S_1/2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\times S_1/2}), \dots, (\underbrace{0, \dots, 0}_{\times S_G/2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\times S_G/2})\}$ 
6:  $\boldsymbol{\theta} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_G\} = \{(\kappa_1, \gamma_1, \alpha_1, \beta_{01}, \beta_{11}), \dots, (\kappa_G, \gamma_G, \alpha_G, \beta_{0G}, \beta_{1G})\}$ 
7:
8: Output:
    $\{(t, G, \mathbf{S}, \mathbf{x})\}$ 
9:
10: Procedimento:
    Define  $F_{D|\mathbf{x}, t_n}(d | \mathbf{x}, t_n)$ .
11:  $F_{D|\mathbf{x}, t_n} := (d; \mathbf{x}, t_n) \rightarrow 1 - \exp\{-\Lambda(t + t_n | \mathbf{x}) + \Lambda(t_n | \mathbf{x})\}$ 
12:
13: para  $g := 1$  to  $G$  faça
14:   para  $s := 1$  to  $S_g$  faça
15:     para  $i := 1$  to  $n_{g,s}$  faça
       $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$  ▷ Variável auxiliar amostral U
       $F_{D|\mathbf{x}, t_{g,s,i-1}}(d; \mathbf{x}, t_{g,s,i-1}) - U = 0$  ▷ Resolva para  $d$ 
       $t_{g,s,i} = t_{g,s,i-1} + d$  ▷ Determine o  $i$ -ésimo tempo de falha
16:     fim para
17:   fim para
18: fim para

```

As simulações foram conduzidas no ambiente estatístico R (R Core Team, 2024), considerando um total de $M = 1.000$ réplicas de Monte Carlo. O desempenho dos estimadores foi avaliado com base nos seguintes critérios: estimativa média relativa (MRE), raiz do erro quadrático médio (RMSE) e probabilidade de cobertura de 95% (CP). As métricas foram calculadas segundo as expressões apresentadas a seguir.

$$MRE(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\theta}_i^{(m)}}{\theta_i}, \quad RMSE(\hat{\theta}_i) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\theta}_i^{(m)} - \theta_i)^2}$$

e

$$CP(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{1}(\theta_i \in (a_i^{(m)}, b_i^{(m)}))$$

com $a_i^{(m)} = \hat{\theta}_i - 1,96 \cdot SE(\hat{\theta}_i)$ e $b_i^{(m)} = \hat{\theta}_i + 1,96 \cdot SE(\hat{\theta}_i)$. Aqui, θ_i representa o i -ésimo componente do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \gamma, \beta_0, \beta_1)$ e $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \gamma, \alpha, \beta_0, \beta_1)$ para o modelo sem fragilidade e com fragilidade, respectivamente. $\hat{\theta}_i$ denota o estimador de máxima verossimilhança correspondente, onde $\mathbb{1}(\cdot)$ é a função indicadora, assumindo o valor um se seu argumento for verdadeiro e zero se for falso. Por último, o erro padrão do estimador $\hat{\theta}_i^{(m)}$ é representado por $SE(\hat{\theta}_i)$.

Ao empregar esta metodologia, espera-se que os estimadores apresentem valores de MRE próximos de um e RMSE próximos de zero. Além disso, a probabilidade de cobertura produz valores próximos de 0,95.

Na Figura 9, apresentam-se os resultados empíricos das estimativas médias relativas (MRE) obtidas para os parâmetros γ , κ , α , β_0 e β_1 , considerando os cenários sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada, em contextos com 4 e 10 sistemas sob aceleração.

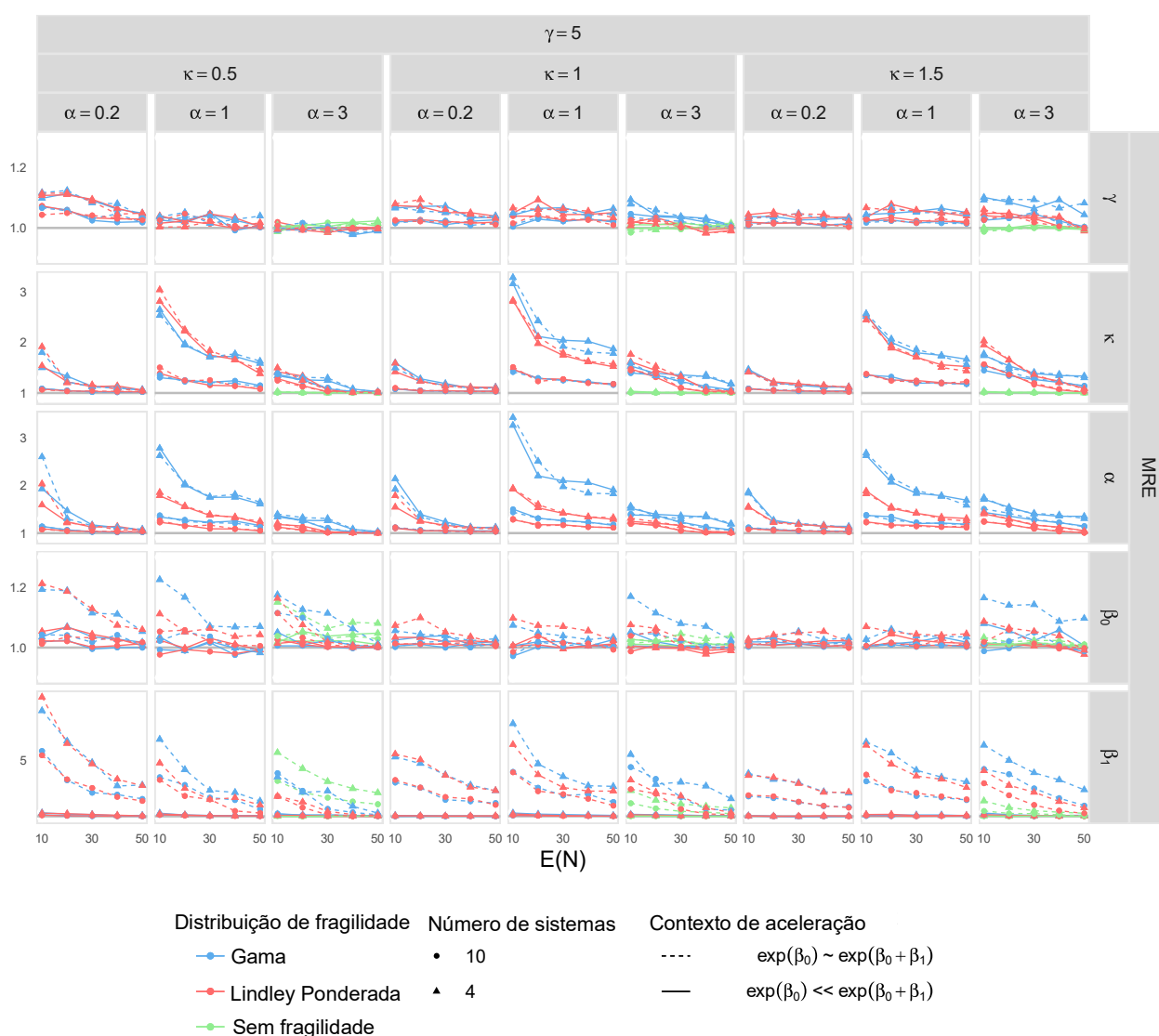


Figura 9 – Resultados da simulação da MRE para modelos sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley ponderada, considerando 1000 réplicas de Monte Carlo e os cenários $\kappa = (0,5; 1,0; 1,5)$, $\gamma = 5$, $\alpha = (0,2; 1,0; 3,0)$, $\beta_0 = (1,0; \log(0,55))$ e $\beta_1 = (-1,0; \log(0,60)/\log(0,55))$, considerando uma quantidade de 4 e 10 sistemas dentro de um contexto acelerado. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação ocorre na última coluna de cada um dos 3 cenários.

Observa-se que, em todos os cenários simulados, as propriedades assintóticas esperadas

para os estimadores de máxima verossimilhança são evidenciadas, uma vez que as curvas de MRE convergem para o valor 1 à medida que o número esperado de falhas aumenta. Além disso, verifica-se que o incremento no número de sistemas resulta em maior precisão das estimativas, refletindo a redução da variabilidade associada aos estimadores.

Na Figura 10, observa-se que os valores do RMSE para todos os parâmetros estimados apresentam comportamento consistente com o esperado, refletindo níveis de precisão adequados para os diferentes cenários analisados.

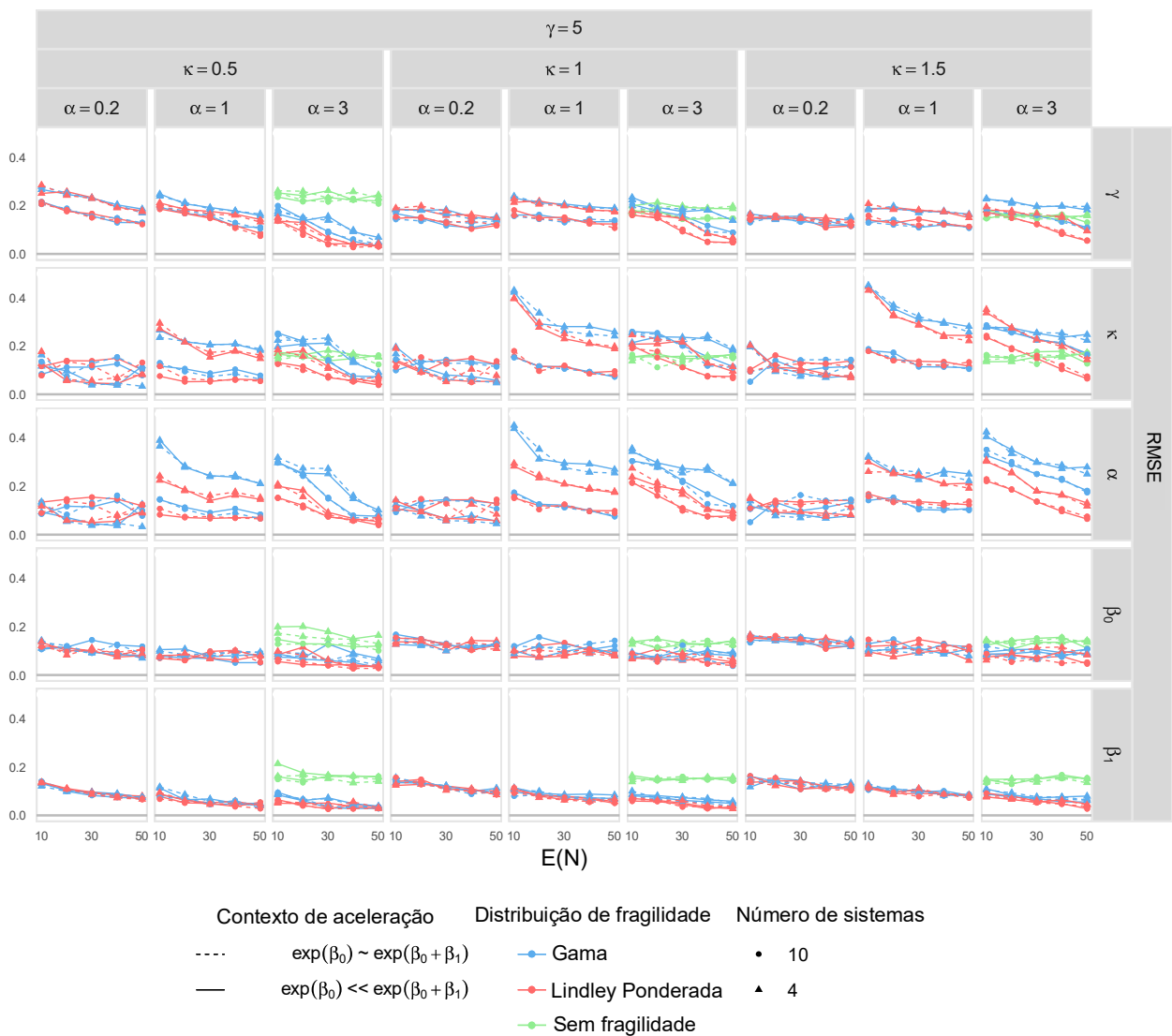


Figura 10 – Resultados de simulação da RMSE para modelos sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada, considerando 1000 réplicas de Monte Carlo e os cenários $\kappa = (0,5; 1,0; 1,5)$, $\gamma = 5$, $\alpha = (0,2; 1,0; 3,0)$, $\beta_0 = (1,0; \log(0,55))$ e $\beta_1 = (-1,0; \log(0,60)/\log(0,55))$, considerando uma quantidade de 4 e 10 sistemas dentro de um contexto acelerado. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação ocorre na última coluna de cada um dos 3 cenários.

Os resultados referentes à probabilidade de cobertura são visualizados na Figura 11. Observa-se que, à medida que o número esperado de falhas aumenta, os valores estimados se aproximam cada vez mais dos valores nominais de 0,95. Especificamente, no cenário em que $\kappa = 1,5$, observa-se uma certa variabilidade inicial, porém, com o aumento do número de falhas esperadas, a probabilidade de cobertura converge de forma consistente para o valor de 0,95.

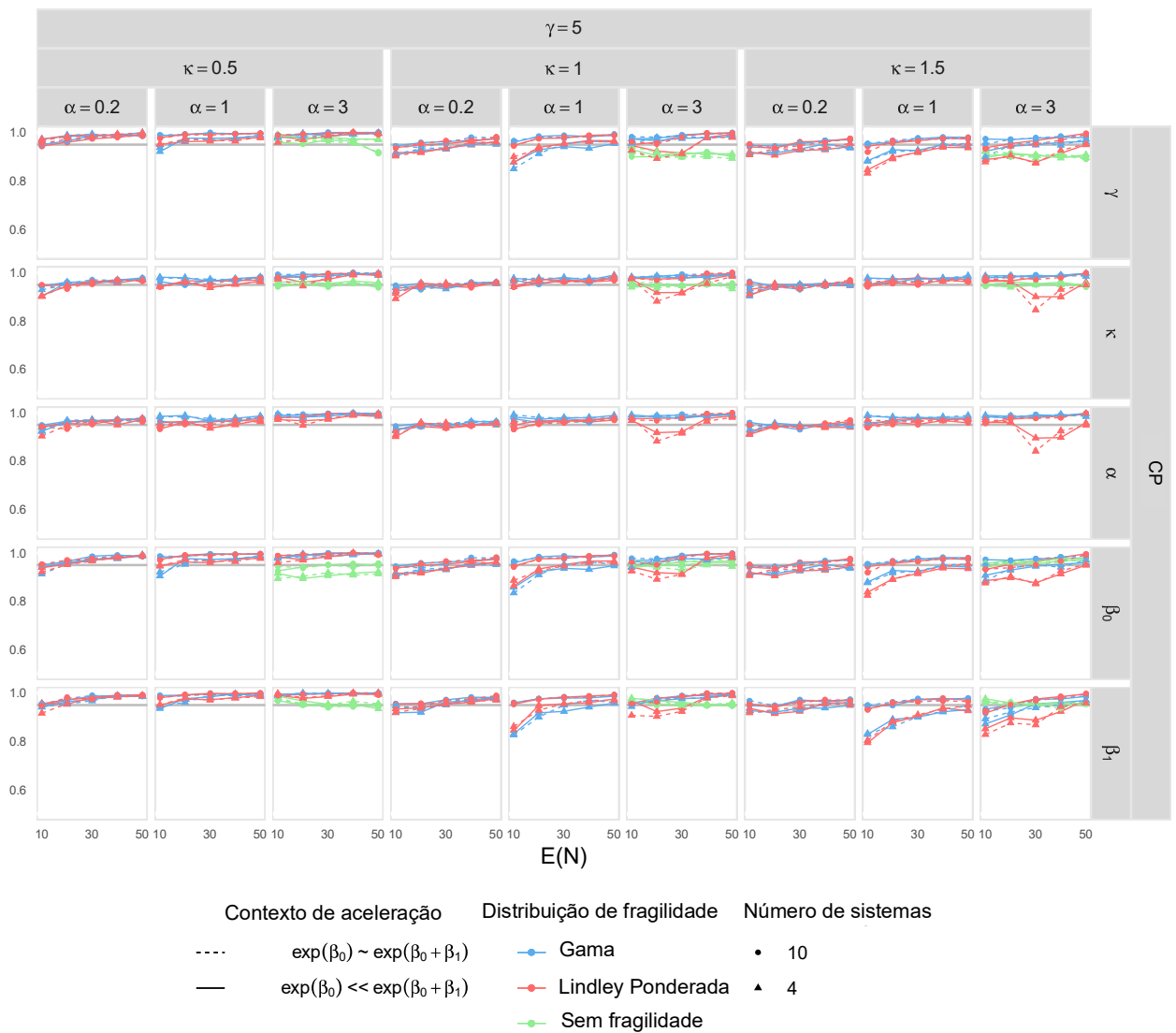


Figura 11 – Resultados da simulação da CP para modelos sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada, considerando 1000 réplicas de Monte Carlo e os cenários $\kappa = (0,5; 1,0; 1,5)$, $\gamma = 5$, $\alpha = (0,2; 1,0; 3,0)$, $\beta_0 = (1,0; \log(0,55))$ e $\beta_1 = (-1,0; \log(0,60)/\log(0,55))$, considerando uma quantidade de 4 e 10 sistemas dentro de um contexto acelerado. Nota: Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação ocorre na última coluna de cada um dos 3 cenários.

Os resultados obtidos refletem as propriedades assintóticas bem estabelecidas dos estimadores de máxima verossimilhança, garantindo a consistência e a precisão das estimativas em todos os cenários avaliados. Tais evidências reforçam a robustez e a confiabilidade dos modelos

considerados, oferecendo uma base estatística para inferências válidas e decisões fundamentadas nos dados observados.

3.3.1 Discriminação Inadequada do Modelo

O estudo de simulação para discriminação inadequada do modelo permite avaliar o comportamento dos modelos estatísticos diante de uma especificação incorreta. Nestas análises, os critérios de Informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1998), Informação Bayesiana (BIC) (SCHWARZ, 1978) e Critério de Informação de Akaike Corrigido (AICc) (HURVICH; TSAI, 1993) são empregados para comparar e selecionar modelos, levando em consideração tanto a qualidade de ajuste quanto a complexidade deles. Esses critérios desempenham um papel importante na seleção do modelo mais adequado em cenários onde a especificação do modelo pode não ser precisa.

Os critérios AIC, BIC e AICc quantificam a relação entre o ajuste do modelo e sua complexidade, penalizando modelos excessivamente complexos para evitar o *overfitting* e favorecendo aqueles que se ajustam bem aos dados. Em estudos simulados de discriminação inadequada, esses critérios avaliam o impacto da inadequação na seleção do modelo e sua confiabilidade na identificação do verdadeiro modelo que gerou os dados. O objetivo deste estudo é, então, compreender como os modelos propostos se comportam quando confrontados com dados que violam suas suposições fundamentais.

Assim, conduziu-se um estudo de simulação de Monte Carlo para examinar a robustez dos critérios de seleção em situações onde a especificação dos modelos de tempo de falha acelerado sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada está incorreta. Para isso, foram utilizados cenários com 4 e 10 números de sistemas, bem como $E(N) = (10, 20, 30, 40, 50)$ representando o número esperado de falhas.

A [Tabela 1](#) apresenta os resultados obtidos a partir de um estudo que explorou a discriminação inadequada, envolvendo os cenários determinados. A análise concentrou-se nos percentuais de casos em que o modelo com o menor AIC, BIC e AICc foi corretamente selecionado. Em cada cenário, diferentes tamanhos de amostra, números de sistemas e modelos foram considerados. Para a avaliação específica de cada um dos modelos em estudo, os resultados foram:

- **Cenário 1:** Examinou a inadequação na discriminação associada ao modelo de tempo de falha acelerado sem fragilidade, considerando diferentes números esperados de falhas, dentro do contexto de 4 e 10 sistemas. Notavelmente, dentro desse contexto, o modelo de tempo de falha acelerado sem fragilidade demonstrou consistência ao realizar identificações precisas.
- **Cenário 2:** Analisou a inadequação na capacidade de discriminação do modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama, explorando diferentes números esperados de

falhas em cenários com 4 e 10 sistemas. Conforme o número de sistemas e o número esperado de falhas aumentam, a taxa de acerto na seleção do modelo com os menores valores de AIC, BIC e AICc também aumenta.

- **Cenário 3:** Estudou a inadequação na capacidade de discriminação do modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada, abordando diferentes números esperados de falhas em cenários com 4 e 10 sistemas. À medida que o número de sistemas e o número esperado de falhas aumentam, observa-se um aumento na proporção de casos em que o modelo de tempo de falha com fragilidade Lindley Ponderada, apresentando os menores valores de AIC, BIC e AICc, é corretamente selecionado.

Tabela 1 – Percentual de identificação do modelo verdadeiro com base nos valores de AIC, BIC e AICc nos cenários 2 e 3.

Número de sistemas	$E(N)$	Gama (Cenário 2)			Lindley Ponderada (Cenário 3)		
		AIC (%)	BIC (%)	AICc (%)	AIC (%)	BIC (%)	AICc (%)
4	10	55,81	55,81	55,81	50,06	50,06	50,06
	20	61,41	61,41	61,41	50,08	50,08	50,08
	30	64,84	64,84	64,84	52,49	52,49	52,49
	40	65,67	65,67	65,67	51,66	51,66	51,66
	50	65,58	65,58	65,58	53,44	53,44	53,44
10	10	60,34	60,34	60,34	51,84	51,84	51,84
	20	66,04	66,04	66,04	54,89	54,89	54,89
	30	66,88	66,88	66,88	57,19	57,19	57,19
	40	66,54	66,54	66,54	57,68	57,68	57,68
	50	65,52	65,52	65,52	57,91	57,91	57,91

Em síntese, os resultados indicam consistentemente que escolher o modelo com os menores valores de AIC, BIC e AICc é eficaz para selecionar o modelo apropriado. À medida que tanto o número esperado de falhas quanto o número de sistemas aumentam, a capacidade de escolher corretamente o modelo com os menores valores de AIC, BIC e AICc também melhora. Esses resultados sugerem que um aumento no número esperado de falhas e no número de sistemas pode proporcionar uma discriminação aprimorada entre os modelos, aumentando a probabilidade de selecionar corretamente o modelo com base nos critérios AIC, BIC e AICc.

3.4 Aplicação

Nesta seção, busca-se ilustrar a aplicação da metodologia validada pelo estudo de simulação, oferecendo uma perspectiva prática e demonstrativa da sua utilização.

3.4.1 Sistema de Motor de Carro: Um Toy Exemplo

Na área industrial é comum deparar-se com o desenvolvimento de sistemas reparáveis complexos cada vez mais diversificados e sofisticados, como um carro ou um motor novo, mas

antes de iniciar o processo de produção em larga escala e lançá-lo ao mercado, é necessário definir e atingir metas de desempenho. Tais objetivos são verificados por meio de testes, muitos deles acelerados, durante a fase de desenvolvimento. O fato do carro ou motor ser uma espécie de sistema reparável composto por vários subsistemas faz com que durante os testes sejam observadas avarias, reparadas e a mesma unidade é colocada novamente em teste até atingir um tempo fixo pré-definido. Ao final do experimento, o número de falhas é contabilizada. Esse tipo de informação tem característica de eventos recorrentes, o que exige métodos de análise com metodologia adequada.

Dessa forma, os testes acelerados em sistemas reparáveis desempenham um papel importante na indústria automotiva, auxiliando na avaliação abrangente da confiabilidade e segurança dos sistemas veiculares. A proposta é conduzir testes sob condições mais rigorosas do que as de uso convencional, visando obter informações adicionais sobre o desempenho do sistema e sua capacidade de resistir a falhas. Por meio desses experimentos, os fabricantes conseguem identificar potenciais problemas que o sistema possa apresentar, permitindo a adoção de medidas corretivas ainda durante a fase de testes. Essa antecipação a eventuais falhas contribui para economia de tempo e recursos, uma vez que é mais eficiente e econômico corrigir possíveis problemas durante a fase de testes do que após o lançamento do veículo. Além disso, fortalece-se a confiança dos clientes na qualidade dos produtos oferecidos pela empresa.

Embora dados reais detalhados sejam essenciais para análises estatísticas, sua disponibilidade é limitada na literatura, especialmente ao lidar com múltiplos sistemas reparáveis e outras covariáveis.

Consequentemente, neste estudo, optou-se pela utilização de dados simulados com o propósito de avaliar a aplicabilidade de modelos de tempo de falha acelerado, considerando cenários sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada.

Em um experimento fictício, um fabricante de veículos quis avaliar a confiabilidade de dez motores que serão utilizados em seus veículos. Para avaliar a confiabilidade desses motores, a montadora realizou um teste acelerado em laboratório, onde os motores foram submetidos a diferentes níveis de estresse térmico. Este teste envolveu dois níveis de aceleração, baixo e alto, em que 5 motores foram submetidos a níveis baixos e 5 motores foram submetidos a níveis altos, durante um tempo máximo de 240 horas. Durante o experimento, os motores falharam diversas vezes, mas todos foram reparados imediatamente após cada falha, e o experimento terminou no instante em que o tempo pré-definido do experimento foi atingido. Todos os registros dos tempos (t), sistemas (S), número de falhas (N) e nível de aceleração (X) de cada um dos motores foram registrados e estão apresentados na [Tabela 2](#).

Tabela 2 – Dados referentes às falhas registradas para cada um dos 10 motores submetidos ao teste acelerado em laboratório.

t	S	X	N	t	S	X	N	t	S	X	N	t	S	X	N
1,22	1	0	1	7,86	3	0	5	116,83	5	0	5	4,67	8	1	5
1,82	1	0	2	14,47	3	0	6	0,26	6	1	1	12,61	8	1	6
3,78	1	0	3	30,90	3	0	7	1,70	6	1	2	0,02	9	1	1
4,78	1	0	4	40,77	3	0	8	2,95	6	1	3	0,08	9	1	2
7,96	1	0	5	59,51	3	0	9	14,44	6	1	4	0,47	9	1	3
18,40	1	0	6	118,56	3	0	10	18,10	6	1	5	6,73	9	1	4
27,94	1	0	7	0,73	4	0	1	0,16	7	1	1	69,23	9	1	5
106,10	1	0	8	1,17	4	0	2	0,25	7	1	2	134,65	9	1	6
0,46	2	0	1	6,07	4	0	3	0,28	7	1	3	138,48	9	1	7
2,65	2	0	2	24,27	4	0	4	0,30	7	1	4	0,07	10	1	1
45,62	2	0	3	53,26	4	0	5	42,25	7	1	5	0,28	10	1	2
62,45	2	0	4	144,24	4	0	6	169,25	7	1	6	0,43	10	1	3
220,77	2	0	5	211,21	4	0	7	227,42	7	1	7	0,55	10	1	4
0,48	3	0	1	0,31	5	0	1	0,20	8	1	1	2,44	10	1	5
1,09	3	0	2	0,55	5	0	2	0,73	8	1	2	12,14	10	1	6
1,90	3	0	3	0,75	5	0	3	0,77	8	1	3	24,43	10	1	7
4,86	3	0	4	63,90	5	0	4	1,06	8	1	4	82,34	10	1	8

A representação gráfica dos dados, conforme ilustrado na [Figura 12](#), fornece uma visão detalhada da ocorrência de falhas em cada um dos dez motores ao longo do tempo, considerando também o nível de aceleração que cada sistema foi submetido.

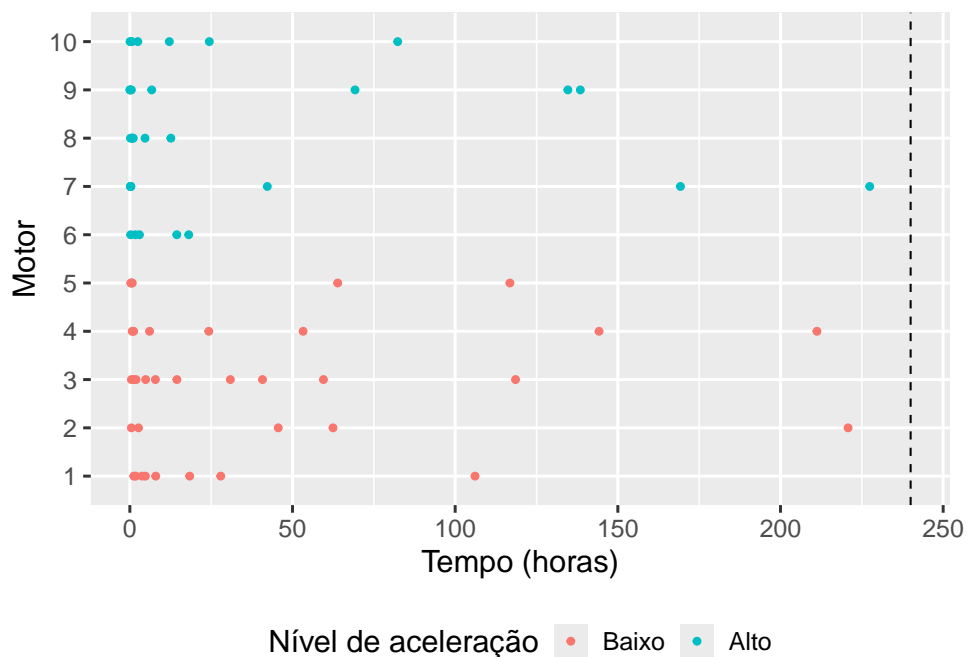


Figura 12 – Descrição das falhas observadas, referentes a cada um dos motores e seu nível de aceleração ao longo do tempo.

Uma análise destes dados revela padrões interessantes. É notável que, ao examinar esses dados, pode-se identificar um ponto importante de interesse: a incidência de falhas varia significativamente ao longo do experimento. É possível observar uma maior frequência de falhas no início do experimento, independentemente do nível de aceleração aplicado. Este fenômeno merece atenção especial, pois sugere que existe uma dinâmica inicial no funcionamento dos motores que os torna mais suscetíveis a falhas.

A [Figura 13](#) apresenta o acúmulo de falhas por motor ao longo do tempo de estudo, juntamente com o acúmulo médio de falhas (representado pelas linhas em destaque), estratificado por dois níveis de aceleração. Nota-se que, nas fases iniciais do experimento, o nível alto de aceleração resultou em uma maior concentração de falhas em comparação ao nível baixo. Contudo, à medida que o tempo avança, ambos os níveis tendem, em média, a uma estabilização no número acumulado de falhas.

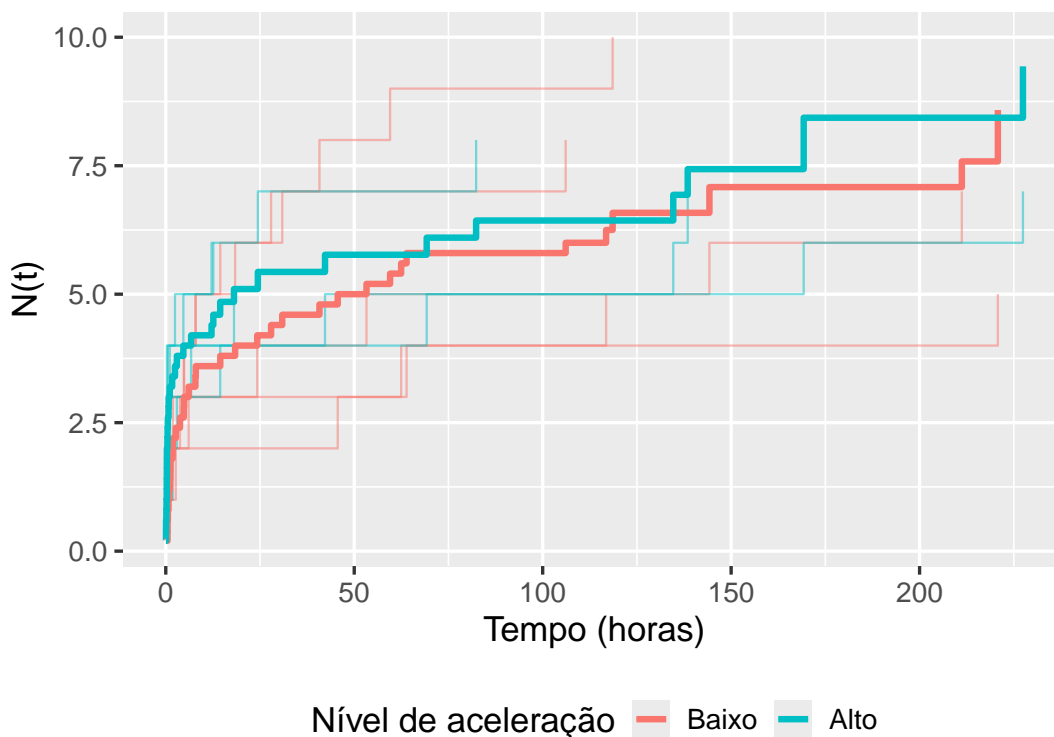


Figura 13 – Descrição do acúmulo de falhas em cada um dos sistemas, que foram divididos em dois níveis, e do acúmulo médio de falhas observado (representadas pelas linhas destacadas).

Com o intuito de fornecer à montadora estimativas das taxas de falha do motor em condições de operação normais, foram ajustados três modelos de tempo de falha acelerado: um sem considerar fragilidade, outro considerando fragilidade Gama e um terceiro considerando fragilidade Lindley Ponderada. Os resultados das estimativas para cada um desses modelos são apresentados na [Tabela 3](#).

Tabela 3 – Estimativas de modelos de tempo de falha acelerado sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada.

Modelos	Parâmetros	Estimativas	Erro padrão	95% intervalo	
				Inferior	Superior
Sem fragilidade	κ	0,258	1,129	0,204	0,328
	γ	0,079	1,754	0,026	0,237
	β_0	-0,487	0,562	-1,589	0,614
	β_1	-0,228	0,940	-2,070	1,614
Fragilidade Gama	κ	3,498	1,873	1,023	11,962
	γ	1,633	1,178	1,185	2,251
	α	3,899	1,955	1,048	14,505
	β_0	1,217	0,164	0,896	1,537
Fragilidade Lindley Ponderada	β_1	1,968	0,654	0,687	3,250
	κ	2,916	2,006	0,745	11,415
	γ	1,692	1,172	1,240	2,309
	α	2,136	1,730	0,730	6,250
	β_0	1,143	0,159	0,832	1,454
	β_1	1,873	0,701	0,500	3,246

Para a validação dos modelos ajustados, analisa-se duas abordagens: a avaliação da função média acumulada (MCF) estimada em relação ao acúmulo de falhas observado em cada sistema (conforme apresentado na Figura 14) e a comparação direta entre a MCF empírica e a MCF estimada (Figura 15). A partir da Figura 14, observa-se que os três modelos ajustados fornecem estimativas da média acumulada de falhas consistentes com o padrão observado de falhas acumuladas em cada sistema.

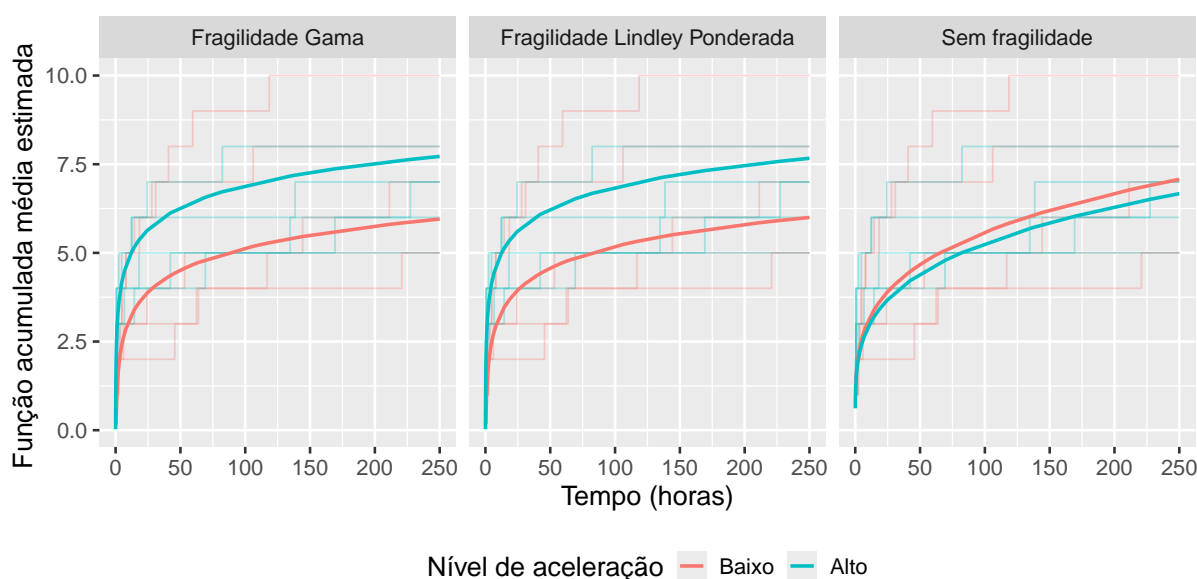


Figura 14 – Curvas médias de acumulação de falhas para cada sistema em relação ao grupo, considerando os modelos de tempo de falha acelerado sem fragilidade, com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada.

A análise da Figura 15 fornece evidências de que os modelos ajustados são adequados para a modelagem dos dados. Contudo, destaca-se que os modelos que incorporam fragilidade apresentaram melhor desempenho, produzindo estimativas mais próximas dos valores observados, o que indica um ajuste mais preciso.

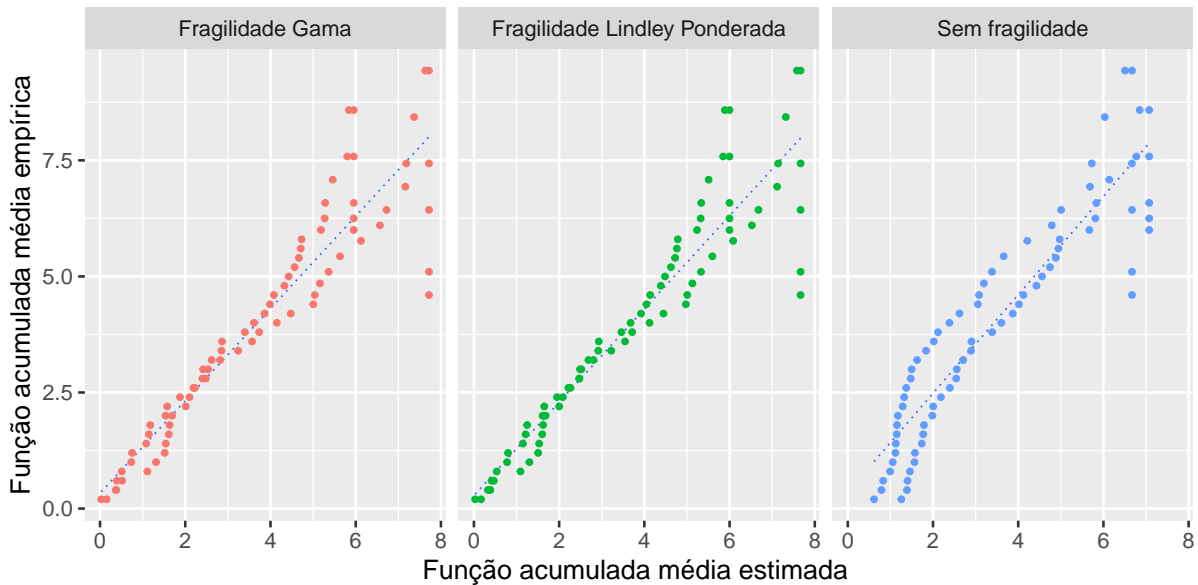


Figura 15 – Função média empírica acumulada versus função média estimada acumulada.

Para selecionar o melhor entre os três modelos ajustados, foram utilizados os critérios AIC, BIC e AICc. Com base nos resultados apresentados na Tabela 4, os modelos de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada são estatisticamente equivalentes. Dessa forma, a interpretação será feita para o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada, que apresentou a menor medida em todos os critérios adotados.

Tabela 4 – Resultados dos critérios de seleção de modelos para os 3 modelos aplicados aos dados de motores de automóveis.

Modelo	AIC	AICc	BIC
Sem fragilidade	407,97	398,71	408,47
Fragilidade Gama	368,84	357,75	370,20
Fragilidade Lindley Ponderada	368,72	357,62	370,07

De acordo com as estimativas do modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada (Tabela 3), o valor de $\alpha = 2,136$ indica a presença de heterogeneidade nos tempos de falha que não foi observada apenas no tempo. Adicionalmente, o valor de $\kappa = 2,916$ sugere uma concentração de falhas no início do experimento, com tempo esperado de falha de aproximadamente 2 horas, representado por $\gamma = 1,692$. Por último, as estimativas de $\beta_0 = 1,143$ e $\beta_1 = 1,873$ nos ajudam a entender a ocorrência de falha em diferentes níveis de

aceleração. Portanto, os dois níveis de aceleração influenciam a frequência de falhas. Entretanto, é importante destacar que o maior nível de aceleração ($e^{1,143+1,873 \times 1} = 20,409$) leva a uma incidência significativamente maior de falhas em comparação ao menor nível de aceleração ($e^{1,143} = 3,136$).

3.5 Observações Finais

Neste capítulo, o objetivo foi apresentar modelos de regressão para múltiplos sistemas reparáveis sujeitos a reparos mínimos, incluindo o modelo convencional de tempo de falha acelerado, o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama e propor o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada. A inclusão do termo de fragilidade no modelo de tempo de falha acelerado modifica o comportamento da intensidade, uma vez que, sem fragilidade, o parâmetro de forma apresenta um comportamento crescente, decrescente ou constante; já, na presença do termo de fragilidade, a intensidade do modelo de tempo de falha acelerado passa a exibir um comportamento unimodal, quase infinito e decrescente. Observou-se semelhança entre os resultados obtidos pelos modelos de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama e com fragilidade Lindley Ponderada. Para ilustrar a aplicabilidade dos modelos, foi realizado um estudo de simulação, e os resultados obtidos para os três modelos foram adequados às propriedades assintóticas conhecidas dos estimadores de máxima verossimilhança, de modo que todos os modelos se mostram confiáveis na obtenção de estimativas estatisticamente válidas. Assim, para demonstrar a aplicabilidade desses modelos, foi apresentado um *toy exemplo*, no qual o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Gama e o com fragilidade Lindley Ponderada apresentaram melhor ajuste aos dados pela análise. No entanto, a partir dos valores de AIC, AICc e BIC, o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade Lindley Ponderada foi o selecionado.

MODELOS ACELERADOS COM FRAGILIDADE GAMA PARA SISTEMAS REPARÁVEIS: ENFOQUE EM FUNÇÕES CLÁSSICAS DE ACELERAÇÃO

Este capítulo propõe uma extensão dos modelos de tempo de falha acelerado com fragilidade, incorporando diferentes funções de aceleração, Eyring, Arrhenius e Potência Inversa, aplicadas à análise de sistemas reparáveis sob condições de estresse. A motivação decorre da necessidade de apoiar decisões mais eficazes em projeto, manutenção e gestão de riscos, especialmente em contextos nos quais a confiabilidade constitui fator estratégico para a continuidade operacional. Adota-se a suposição de reparo mínimo, em que o sistema retorna à condição imediatamente anterior à falha, sendo empregado o PLP para modelar a recorrência de falhas ao longo do tempo.

A modelagem de testes acelerados constitui uma alternativa viável para antecipar falhas e possibilitar a obtenção de dados em um intervalo de tempo significativamente menor do que aquele exigido em condições normais. Nesse contexto, as funções de aceleração desempenham papel de destaque ao estabelecer a relação entre o estresse aplicado e o comportamento esperado do sistema. Quatro funções clássicas, amplamente descritas na literatura, são exploradas e integradas a modelos de sistemas reparáveis. Para representar a heterogeneidade não observada entre os sistemas, incorpora-se o termo de fragilidade gama, conforme discutido previamente na [Seção 2.4](#). Essa estrutura amplia a capacidade preditiva dos modelos ao considerar variabilidades latentes que influenciam os processos de falha.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: a [Seção 4.1](#) apresenta as funções de aceleração consideradas, destacando seus fundamentos e aplicações. A [Seção 4.2](#) formaliza os modelos acelerados para sistemas reparáveis, enquanto a [Subseção 4.2.1](#) estende essa formulação

com o uso da fragilidade gama. A Seção 4.3 discute o procedimento de estimação dos parâmetros via máxima verossimilhança. A Seção 4.4 apresenta um estudo de simulação para avaliar o desempenho dos modelos em diferentes cenários, e a Seção 4.5 ilustra uma aplicação prática baseada em dados simulados.

4.1 Representações Funcionais do Efeito de Estresse

A definição de uma função de aceleração adequada é uma etapa importante na modelagem de dados obtidos em testes acelerados, pois estabelece a ligação entre o ambiente de estresse experimental e o desempenho esperado em condições normais de operação (NELSON, 2009). Assim, a escolha da função de aceleração é relevante tanto na etapa de validação do modelo quanto para interpretações consistentes e fisicamente plausíveis dos parâmetros envolvidos (MEEKER; ESCOBAR; PASCUAL, 2021).

Neste contexto, o uso de relações com fundamentação físico-química torna-se particularmente relevante. Tais relações não apenas conferem maior realismo à modelagem, como também proporcionam *insights* valiosos sobre os mecanismos subjacentes ao processo de falha. Dentre as funções de aceleração mais discutidas na literatura e adotadas neste capítulo, destacam-se os modelos Exponencial, de Arrhenius, de Eyring e de Potência Inversa, conforme Neto (1991). Cada uma dessas funções representa uma perspectiva distinta acerca da forma como o estresse afeta a confiabilidade dos sistemas. As expressões matemáticas correspondentes estão organizadas na Tabela 5.

Tabela 5 – Apresentação das expressões matemáticas associadas às relações Exponencial, de Arrhenius, de Eyring e de Potência Inversa.

Relação	$g(x)$	onde
Exponencial	$e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}$	β_0 e β_1 são os coeficientes a serem estimados; x é a covariável de aceleração.
Arrhenius	$\exp\left[-\beta_0 + \frac{\beta_1}{x}\right]$	$\beta_1 = \frac{E_A}{K}$, sendo K a constante de Boltzmann; $K = 8,623 \times 10^{-5}$ eV/K; x é a temperatura absoluta em Kelvin.
Eyring	$\frac{1}{x} \exp\left(-\beta_0 + \frac{\beta_1}{x}\right)$	β_0 e β_1 são os parâmetros a serem estimados; x é a covariável que representa o nível de estresse.
Potência Inversa	$\frac{\beta_0}{x^{\beta_1}}$	x é a covariável de estresse positiva; β_0 e β_1 são os parâmetros a serem estimados.

A Figura 16 ilustra o impacto da variação do parâmetro β_1 no comportamento da função $g(x)$ em cada uma das relações, destacando a importância desse parâmetro para a representação da intensidade do estresse.

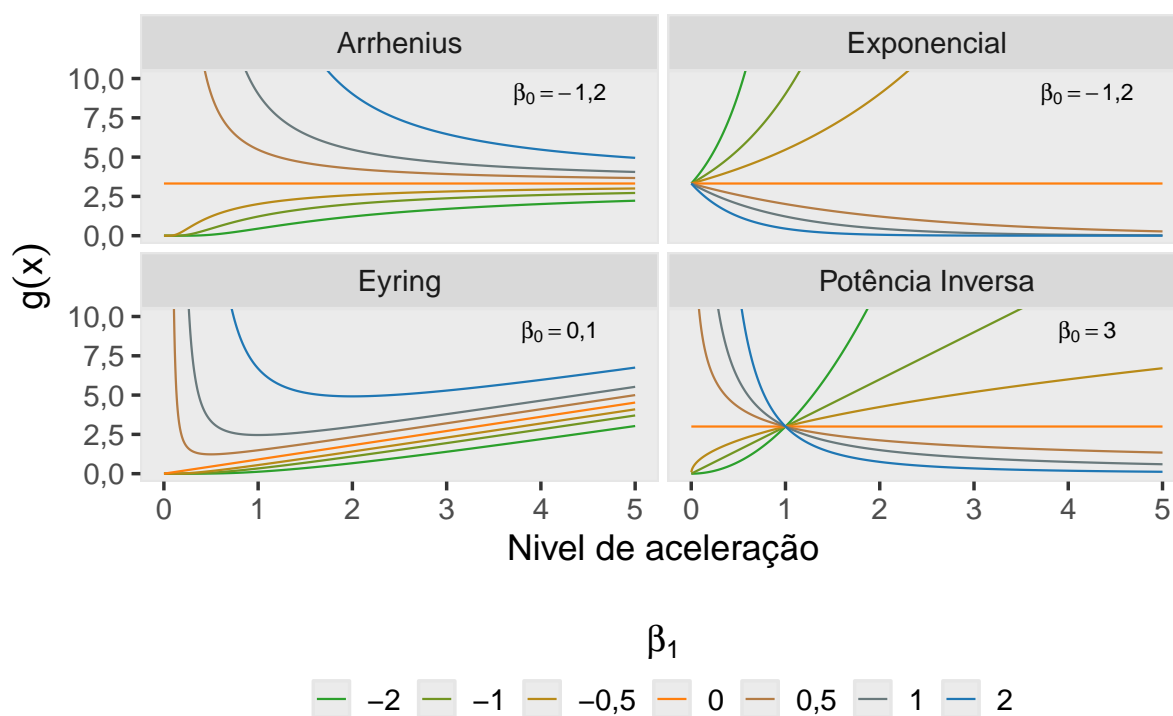


Figura 16 – Representação das formas assumidas por cada uma das relações especificadas, Exponencial, Arrhenius, Eyring e Potência Inversa, em diferentes níveis de aceleração, com β_1 variando e β_0 mantido fixo.

Para a construção dessa visualização, fixou-se o parâmetro β_0 , enquanto o parâmetro β_1 foi variado nos seguintes valores: $\beta_1 = (-2; -1; -0,5; 0, 0,5; 1, 2)$. Essa variação é particularmente relevante, uma vez que β_1 , exerce influência direta sobre o comportamento da função $g(x)$ em cada uma das relações analisadas. A Tabela 6 complementa essa análise ao fornecer uma descrição qualitativa dos efeitos da aceleração sobre a intensidade de falha e o tempo de vida útil dos sistemas modelados, conforme as diferentes combinações entre a função $g(x)$ e os valores de β_1 .

Tabela 6 – Influência da função $g(x)$ na intensidade de falha e no tempo de vida para diferentes relações e valores de β_1 .

Relação	$\beta_1 = 0$	$\beta_1 > 0$	$\beta_1 < 0$
Arrhenius	Constante	Diminui até um valor constante	Aumenta até um valor constante
Exponencial	Constante	Diminui até zero	Aumenta infinitamente
Eyring	Aumenta infinitamente	Diminui até um ponto e depois aumenta infinitamente	Aumenta infinitamente
Potência Inversa	Constante	Diminui até zero	Aumenta infinitamente

4.2 Efeitos do Estresse sobre o Tempo de Falha: Modelagem Acelerada

Dadas as representações funcionais do efeito de estresse, a próxima etapa consiste em formular o modelo de tempo de falha acelerado, conforme discutido no [Capítulo 2](#). Neste contexto, os sistemas são submetidos a níveis de estresse superiores aos encontrados em condições normais de operação, com o objetivo de induzir falhas em menor tempo e, assim, permitir inferências sobre a confiabilidade em uso real ([NELSON, 2009](#)).

Com foco no estudo de S sistemas reparáveis ($s = 1, \dots, S$), no qual cada sistema experimenta n_s falhas ao longo do tempo ($j = 1, \dots, n_s$), assume-se que as covariáveis associadas ao estresse modificam a escala temporal do processo de falha por meio de uma função de aceleração, denotada aqui por $g(\mathbf{x})$, com \mathbf{x} representando um vetor de covariáveis de dimensão $k \times 1$. Essa função de aceleração atua diretamente sobre o tempo, antecipando ou retardando a ocorrência do evento de interesse, conforme a natureza da relação funcional adotada. Assim, o processo de falha de cada sistema é modelado por um modelo de tempo de falha acelerado, cuja função de intensidade condicional é dada por:

$$\lambda_s(t_{s,j}|\mathbf{x}_s) = \lambda_0(g(\mathbf{x}_s)t_{s,j}) g(\mathbf{x}_s), \quad t > 0, \quad (4.1)$$

em que $\lambda_0(t)$ é a função de intensidade base e $g(\mathbf{x})$ é a função de aceleração, conforme discutido por ([PEREIRA et al., 2024](#)). As funções de intensidade acumulada e de confiabilidade são dadas por:

$$\begin{aligned} \Lambda_s(t_{s,j}|\mathbf{x}_s) &= \int_0^{t_{s,j}} \lambda_0(g(\mathbf{x}_s)u_{s,j}) g(\mathbf{x}_s) du \\ &= \Lambda_0(g(\mathbf{x}_s)t_{s,j}) \end{aligned}$$

e

$$R_s(t_{s,j}|\mathbf{x}_s) = \exp\{-\Lambda_0(g(\mathbf{x}_s)t_{s,j})\}.$$

Ao incorporar cada uma das funções de aceleração apresentadas na [Seção 4.1](#) à formulação do modelo de tempo de falha acelerado discutido nesta seção, obtêm-se quatro versões distintas do modelo: o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial, o modelo de tempo de falha acelerado Arrhenius, o modelo de tempo de falha acelerado Eyring e o modelo de tempo de falha acelerado Potência Inversa. As expressões correspondentes às funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade de cada um desses modelos encontram-se apresentadas na [Figura 17](#).

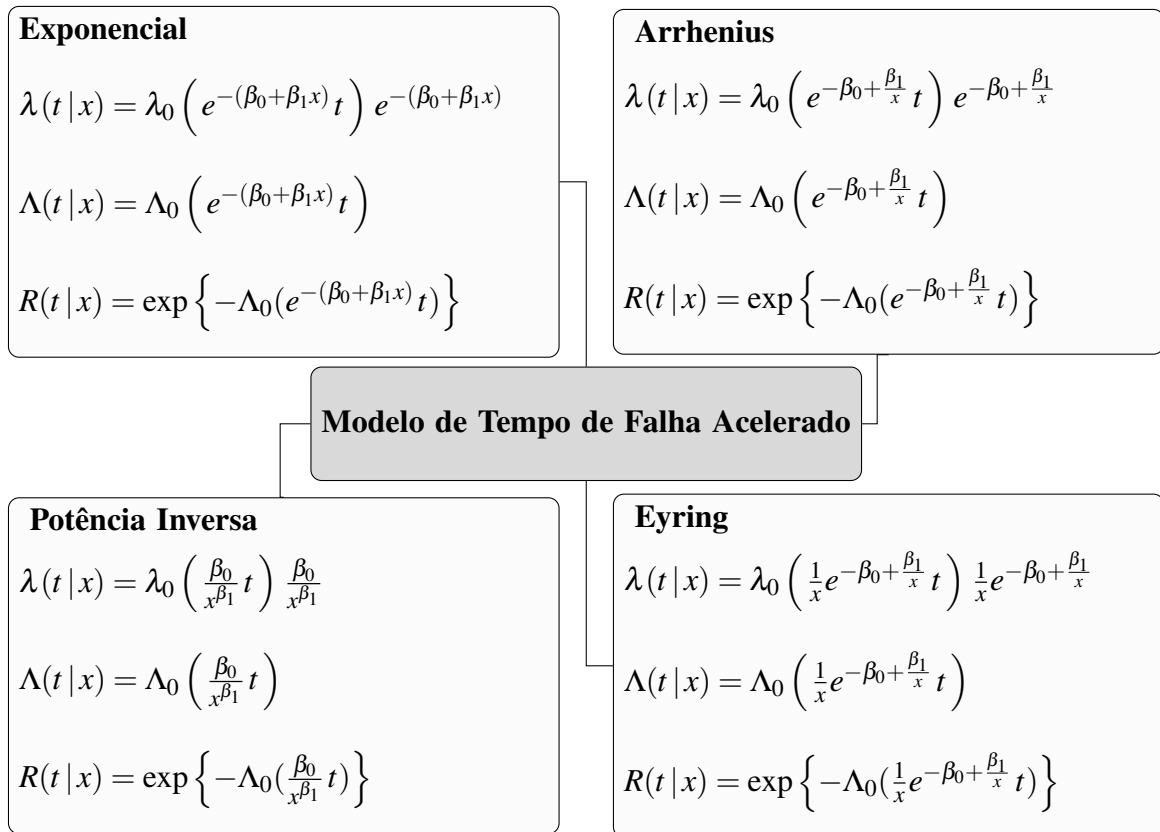


Figura 17 – Funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade dos modelos Exponencial, Arrhenius, Eyring e Potência Inversa.

4.2.1 Modelos de Tempo de Falha Acelerado com Fragilidade Gama

A integração das metodologias de sistemas reparáveis, modelos de tempo de falha acelerado e modelos de fragilidade oferece uma abordagem interessante para a engenharia de confiabilidade. Os sistemas reparáveis permitem a avaliação da continuidade operacional após falhas e reparos, fornecendo *insights* sobre a durabilidade e a manutenção de sistemas complexos. Ao combinar essa abordagem com modelos de tempo de falha acelerado e de fragilidade, é possível analisar o tempo até a falha de componentes ou sistemas, considerando tanto fatores observáveis quanto não observáveis que podem acelerar ou retardar esse processo.

Para modelar o efeito aleatório, representado por z_s , que visa capturar a variabilidade não observada que influencia o tempo até a falha, é necessário escolher uma distribuição de probabilidade adequada, que seja positiva, contínua e independente do tempo. A distribuição Gama será adotada neste capítulo devido à sua simplicidade algébrica, que facilita o cálculo da transformada de Laplace e permite a derivação direta das funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade incondicional.

Adicionalmente, serão consideradas questões de identificabilidade a fim de garantir uma determinação única do efeito aleatório, conforme discutido por [Elbers e Ridder \(1982\)](#). Nesse contexto, a variável aleatória Z será modelada com uma distribuição Gama $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$, com

$E(Z) = 1$ e $\text{Var}(Z) = \alpha$, o que satisfaz a condição de identificabilidade. A função densidade de probabilidade da variável aleatória Z é então expressa como segue:

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-z\alpha}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad z, \alpha > 0$$

em que $\Gamma(c) = \int_0^\infty x^{c-1} e^{-x} dx$, $c > 0$ é a função gama completa.

Considerando a distribuição de probabilidade Gama para a fragilidade Z e aplicando-a conforme descrito na Equação 2.18, obtém-se a função de confiabilidade marginal do modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade gama para cada sistema, dada por:

$$\begin{aligned} R_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) &= \int_0^\infty e^{-z_s \Lambda_0(g(\mathbf{x}_s) t_{s,j})} \frac{z_s^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-z_s \alpha}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} dz_s \\ &= (1 + \alpha \Lambda_0(g(\mathbf{x}_s) t_{s,j}))^{-1/\alpha} = L(\Lambda_0(g(\mathbf{x}_s) t_{s,j})), \end{aligned}$$

em que L denota a transformada de Laplace da variável de fragilidade; ou seja, a função de confiabilidade marginal corresponde à transformada de Laplace no ponto $\Lambda_0(g(\mathbf{x}), t)$.

Consequentemente, a função de intensidade acumulada incondicional ao efeito de fragilidade de cada sistema é

$$\Lambda_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = -\log(R(t_{s,j} | \mathbf{x}_s)) = \frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha \Lambda_0(g(\mathbf{x}_s) t_{s,j})).$$

E a função de intensidade de falha incondicional ao efeito de fragilidade de cada sistema é expressa por

$$\lambda_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \frac{d}{dt} \Lambda(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \frac{\lambda_0(g(\mathbf{x}_s) t_{s,j})}{1 + \alpha \Lambda_0(g(\mathbf{x}_s) t_{s,j})}.$$

Dada a ênfase na capacidade preditiva, é relevante calcular a função de confiabilidade condicional até um determinado tempo, pois isso permite estimar a confiabilidade futura e a prever falhas potenciais. Usando as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e t_{n_s} como o último tempo de falha observado de cada sistema, o próximo tempo de falha, $t = t_{n_s+1} - t_{n_s}$, pode ser determinado pela função de confiabilidade dada por:

$$\begin{aligned} R_s(t_{n_s+1} | \mathbf{x}, t_{n_s}) &= P[T_{n_s+1} - t_{n_s} > t | t_{n_s}] = P[N(t_{n_s+1}) - N(t_{n_s}) = 0] \\ &= \exp \left\{ - \int_{t_{n_s}}^{t_{n_s+1}} \lambda(u) du \right\} = \exp \left\{ - \left[\Lambda(t_{n_s+1} + t_{n_s} | \mathbf{x}_s) - \Lambda(t_{n_s} | \mathbf{x}_s) \right] \right\}, \end{aligned}$$

em que $\Lambda_0(t)$ é a função de intensidade acumulada de base.

A simulação é importante para explorar o comportamento dos modelos em diversos cenários. A função quantílica é essencial nesse processo, pois permite a geração de dados que

refletem as características do modelo. Para o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade gama, a função quantílica é dada por:

$$\begin{aligned} F(t_{s,j}|\mathbf{x}_s, t_{n_s}) &= p \\ 1 - R(t_{s,j}|\mathbf{x}_s, t_{n_s}) &= p \\ 1 - \exp(-\Lambda(t_{s,j} + t_{n_s}|\mathbf{x}_s) + \Lambda(t_{n_s}|\mathbf{x}_s)) &= p \\ -\frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha\Lambda_0(g(\mathbf{x}_s)(t_{s,j} + t_{n_s}))) + \frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha\Lambda_0(g(\mathbf{x}_s)t_{s,j})) &= \log(1 - p), \end{aligned}$$

em que t_{n_s} representa o último tempo de falha de cada sistema.

Ao incorporar cada uma das funções de aceleração apresentadas na [Seção 4.1](#) à formulação do modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade gama, obtêm-se quatro modelos distintos: o modelo de tempo de falha acelerado exponencial com fragilidade gama, o modelo de tempo de falha acelerado Arrhenius com fragilidade gama, o modelo de tempo de falha acelerado Eyring com fragilidade gama e o modelo de tempo de falha acelerado potência inversa com fragilidade gama. As expressões associadas às funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade para cada um desses modelos estão ilustradas na [Figura 18](#).

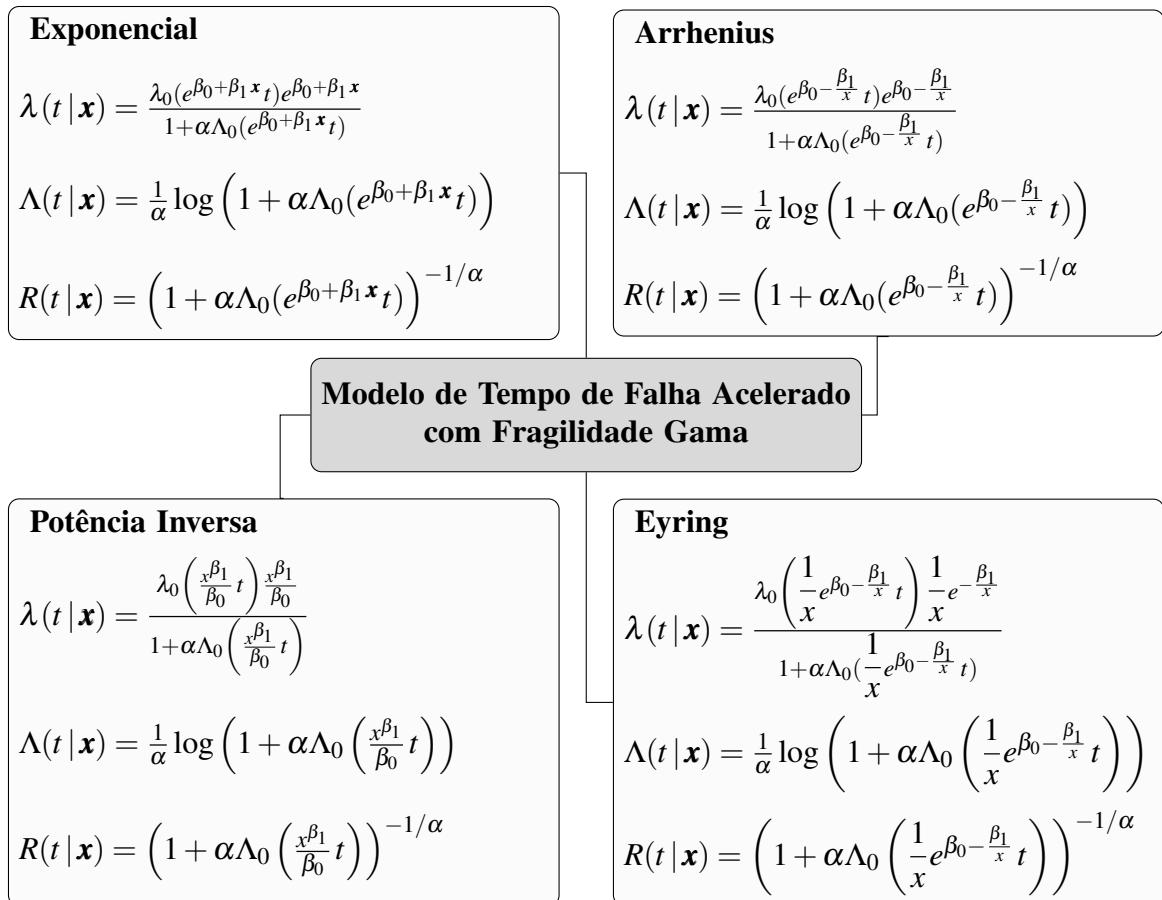


Figura 18 – Funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade dos quatro modelos com fragilidade Gama.

4.3 Estimação

As estimativas dos parâmetros dos modelos propostos serão obtidas por meio do método de máxima verossimilhança, etapa essencial para a construção de inferências estatísticas. A partir dessas estimativas, desde que devidamente avaliadas quanto à sua qualidade e validade, torna-se possível investigar as relações subjacentes nos sistemas em estudo. Informações confiáveis obtidas nesse processo podem, então, viabilizar o desenvolvimento de estratégias de manutenção e aprimoramento, com impacto potencial na confiabilidade, contribuindo para o seu desempenho e a sua durabilidade dos sistemas.

Para este propósito, considera-se um conjunto de S sistemas reparáveis. Cada sistema s apresenta n_s falhas, e está sujeito a um processo de reparo mínimo com truncamento no tempo τ_s . Assim, a função de verossimilhança geral, associada a um vetor de parâmetros específico, $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \kappa)$ para os modelos sem fragilidade ou $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \kappa, \alpha)$, para os modelos com fragilidade gama, é formulada da seguinte forma:

$$L(\Theta) = \prod_{s=1}^S \left\{ \left[\prod_{j=1}^{n_s} \lambda_0(g(\mathbf{x}_s) t_{s,j}) g(\mathbf{x}_s) \right] \exp \left\{ -\Lambda_0(g(\mathbf{x}_s) \tau_s) \right\} \right\}, \quad (4.2)$$

em que λ_0 e Λ_0 representam as funções de intensidade e intensidade acumulada de base, respectivamente. A função $g(\mathbf{x}_s)$ denota a função de aceleração adotada. Assim, ao tomar o logaritmo natural da Equação 4.2, obtém-se a função de verossimilhança logarítmica correspondente, expressa como:

$$\ell(\Theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \sum_{j=1}^{n_s} \log [\lambda_0(t_{s,j} g(\mathbf{x}_s)) g(\mathbf{x}_s)] - \Lambda_0(g(\mathbf{x}_s) \tau_s) \right\}. \quad (4.3)$$

Ao explorar a flexibilidade das funções de aceleração, que podem assumir diferentes formas, como Exponencial, Arrhenius, Eyring e Potência Inversa, é possível usar as funções de intensidade e intensidade acumulada dos modelos especificados nas Figura 17 e Figura 18 para substituí-las na Equação 4.3. Isso permite obter as funções de verossimilhança e log-verossimilhança para os oito modelos em estudo.

Assumindo que a intensidade base segue uma distribuição do PLP com $\gamma = 1$, conforme mostrado em Subseção 2.1.2, é possível expressar a log-verossimilhança geral, apresentada na Equação 4.3, da seguinte forma:

$$l(\Theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n_s} \log \left((t_{s,j})^{\kappa-1} [g(\mathbf{x}_s)]^\kappa \right) \right] - (\tau_s)^\kappa [g(\mathbf{x}_s)]^\kappa \right\}. \quad (4.4)$$

O estimador $\hat{\Theta}$ para os parâmetros Θ é obtido pela maximização da função log-verossimilhança (Equação 4.4) para cada modelo. Essa maximização é realizada utilizando métodos apropriados, especialmente quando a função log-verossimilhança não possui uma forma fechada. Uma característica importante desse estimador é sua consistência: à medida que o tamanho da amostra

n aumenta, $\hat{\Theta}$ converge para os valores verdadeiros de Θ (LEHMANN; CASELLA, 2006). Além disso, sob condições regulares, o estimador segue uma distribuição normal assintótica, $\hat{\Theta} \xrightarrow{D} N_{(p)}(\Theta, I^{-1}(\Theta))$, em que $I(\Theta) = -E \left[\frac{\partial^2 l(\Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$ é a matriz de informação de Fisher esperada, e p é o número de parâmetros. Quando a matriz de informação de Fisher é difícil de calcular, utiliza-se a matriz Hessiana, que é a matriz observada das segundas derivadas da função log-verossimilhança. A matriz Hessiana é dada por $H_{ij} = \frac{\partial^2 l(\Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}$, e a matriz de informação de Fisher aproximada é $I(\Theta) \approx -H$.

Adicionalmente, quando uma forma fechada da função log-verossimilhança não está disponível, ou mesmo quando está disponível, podem ser utilizados métodos de otimização iterativos para estimar $\hat{\Theta}$. Neste estudo, empregou-se a função `optim()` do R (R Core Team, 2024), com o método L-BFGS-B, escolhido por sua eficiência computacional.

4.4 Estudo de Simulação

Esta seção apresenta os resultados de um estudo de simulação de Monte Carlo realizado com o objetivo de avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança na estimação dos parâmetros dos oito modelos analisados. Para isso, os dados foram gerados conforme descrito no Algoritmo 2, possibilitando a criação de conjuntos representativos sob diferentes

Algoritmo 2 – Gerador de números aleatórios para os modelos propostos.

1: **Entrada:**

2: S

▷ n° de sistemas

3: $\mathbf{n} = \{(n_1, \dots, n_S)\}$

▷ n° de falhas por sistema dentro de cada grupo

4: $\mathbf{x} = \left\{ \underbrace{(x_1, \dots, x_1)}_{S_1 \text{ vezes}}, \underbrace{(x_2, \dots, x_2)}_{S_2 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{(x_3, \dots, x_3)}_{S_G \text{ vezes}} \right\}$

5: $\boldsymbol{\theta} = \{(\beta_0, \beta_1, \kappa, \alpha)\}$

6:

7: **Saída:**

$\{(t, \mathbf{S}, \mathbf{x})\}$

8:

9: **Procedimento:**

Define $F_{D|\mathbf{x}, t_n}(d | \mathbf{x}, t_n)$.

10: $F_{D|\mathbf{x}, t_n} := (d; \mathbf{x}, t_n) \rightarrow 1 - \exp\{-\Lambda(t + t_n | \mathbf{x}) + \Lambda(t_n | \mathbf{x})\}$

11:

12: **para** $s :=$ to S **faça**

13: **para** $j :=$ to n_s **faça**

$U \sim \text{Uniform}(0, 1)$

▷ Variável auxiliar da amostra U

$F_{D|\mathbf{x}, t_{s,j-1}}(d; \mathbf{x}, t_{s,j-1}) - U = 0$

▷ Resolva para d

$t_{s,j} = t_{s,j-1} + d$

▷ Determine the j -th tempo de falha

14: **fim para**

15: **fim para**

cenários. Essa estratégia permitiu uma avaliação dos modelos considerados.

Neste estudo de simulação, foram explorados 240 cenários diferentes, sendo 60 desses relacionados ao modelo sem fragilidade e 180 ao modelo com fragilidade gama. As combinações utilizadas para criar esses cenários foram $E(N) = (20, 40, 60, 80, 100)$, representando o número esperado de falhas em um total de 6, 12 e 21 sistemas, com $\alpha = (0, 2; 0, 8; 1, 5)$ relacionados à fragilidade. Para representar os níveis de aceleração, os parâmetros $\beta_0 = 2$ e $\beta_1 = 0,5$ foram considerados, e os conjuntos de sistemas foram igualmente divididos em três níveis de aceleração distintos, $X = (0, 5; 1, 0; 3, 0)$, configuração comum a todos os cenários.

Nota: Os valores de κ não foram fixados nos cenários construídos, pois foram calculados durante a geração dos conjuntos de dados com base nos valores definidos de τ , no grau de aceleração (particular para cada relação de aceleração) e nas outras especificidades de cada cenário.

O parâmetro γ foi fixado em 1, visto que o intercepto β_0 está relacionado ao parâmetro de locação γ , o que, na relação entre o PLP e o fator de aceleração, pode ser interpretado como um problema de identificabilidade. No entanto, o problema de identificabilidade mencionado refere-se à relação entre os parâmetros de escala e não ao parâmetro de aceleração, assegurando a consistência conceitual com o [Capítulo 3](#).

Para realizar as simulações, foi utilizado o *software* R ([R Core Team, 2024](#)), executando um total de 1.000 réplicas de Monte Carlo. A avaliação do desempenho dos estimadores foi baseada em critérios fundamentais, que incluem o Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE, do inglês *Mean Absolute Percentage Error*), o Erro Quadrático Médio Padronizado (SRMSE, do inglês *Standardized Root Mean Square Error*) e a Probabilidade de Cobertura de 95% (PC).

Essas métricas foram calculadas de acordo com as fórmulas correspondentes:

$$\text{MAPE}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left| \frac{\hat{\theta}_i^{(m)} - \theta_i}{\theta_i} \right|, \quad \text{SRMSE}(\hat{\theta}_i) = \frac{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\theta}_i^{(m)} - \theta_i)^2}}{\text{SE}(\hat{\theta}_i)}$$

$$\text{e} \quad \text{PC}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I(\theta_i \in (a_i^{(m)}, b_i^{(m)})),$$

onde $a_i^{(m)} = \hat{\theta}_i - 1,96 \times \text{SE}(\hat{\theta}_i)$ e $b_i^{(m)} = \hat{\theta}_i + 1,96 \times \text{SE}(\hat{\theta}_i)$. θ_i representa o i -ésimo componente do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \beta_0, \beta_1)$ para os modelos sem fragilidade e $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \alpha, \beta_0, \beta_1)$ para os modelos com fragilidade. Assim, $\hat{\theta}_i$ representa o estimador de máxima verossimilhança correspondente, sendo $I(\cdot)$ a função indicadora, que assume o valor um se seu argumento for verdadeiro e zero se for falso. Por fim, o erro padrão do estimador $\hat{\theta}_i^{(m)}$ é dado por $\text{SE}(\hat{\theta}_i)$.

Através desta metodologia, deseja-se que os estimadores apresentem valores de MAPE próximos de zero e de SRMSE próximos de um, indicando boa capacidade de estimativa e baixa discrepância entre as estimativas e os valores reais. Além disso, espera-se que a probabilidade de cobertura se mantenha próxima de 0,95, demonstrando boa confiabilidade das estimativas.

A Figura 19 apresenta os resultados do MAPE obtidos nas simulações. Observa-se que os valores estiveram próximos de zero, o que indica boa acurácia das estimativas.

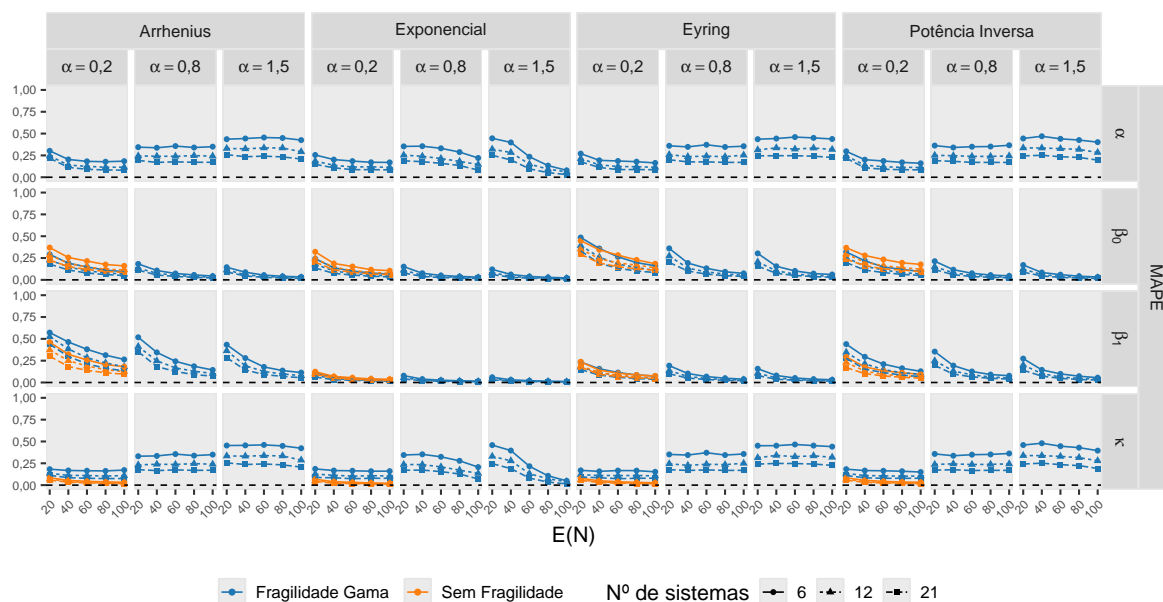


Figura 19 – Resultados para o erro percentual médio absoluto. **Nota:** Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação está na coluna $\alpha = 0,2$.

A Figura 20 mostra os valores do SRMSE. De modo geral, os resultados estiveram próximos de um, denotando boa calibração dos estimadores.

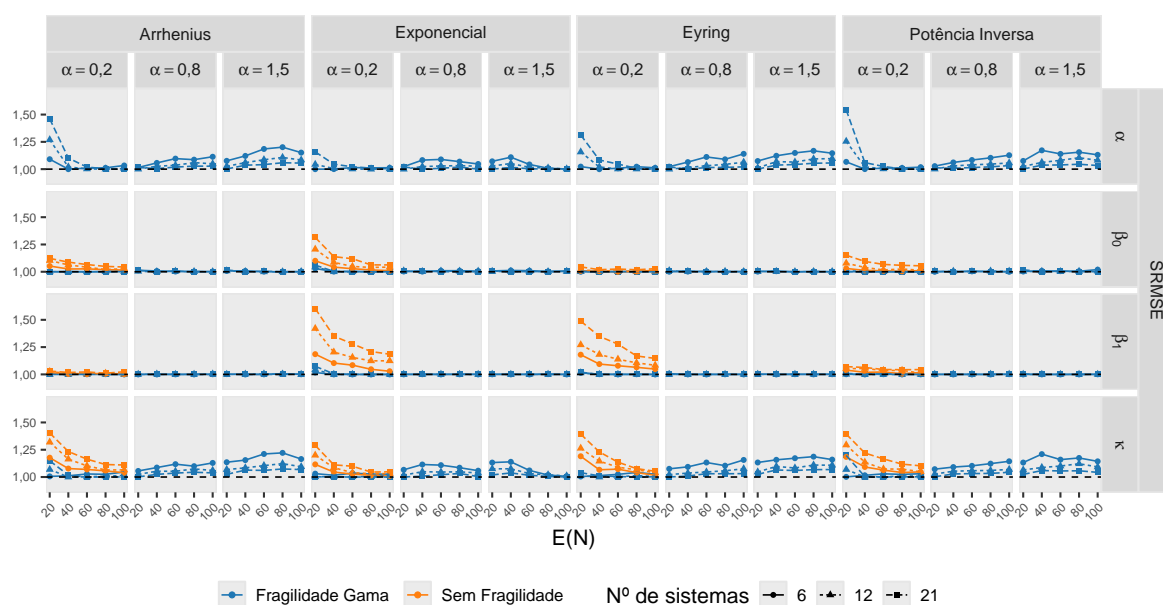


Figura 20 – Resultados para o erro quadrático médio padronizado. **Nota:** Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação está na coluna $\alpha = 0,2$.

Por fim, a Figura 21 exibe a probabilidade de cobertura dos intervalos de confiança. Nota-se que os valores obtidos mantiveram-se próximos de 0,95, evidenciando a adequada confiabilidade das estimativas.

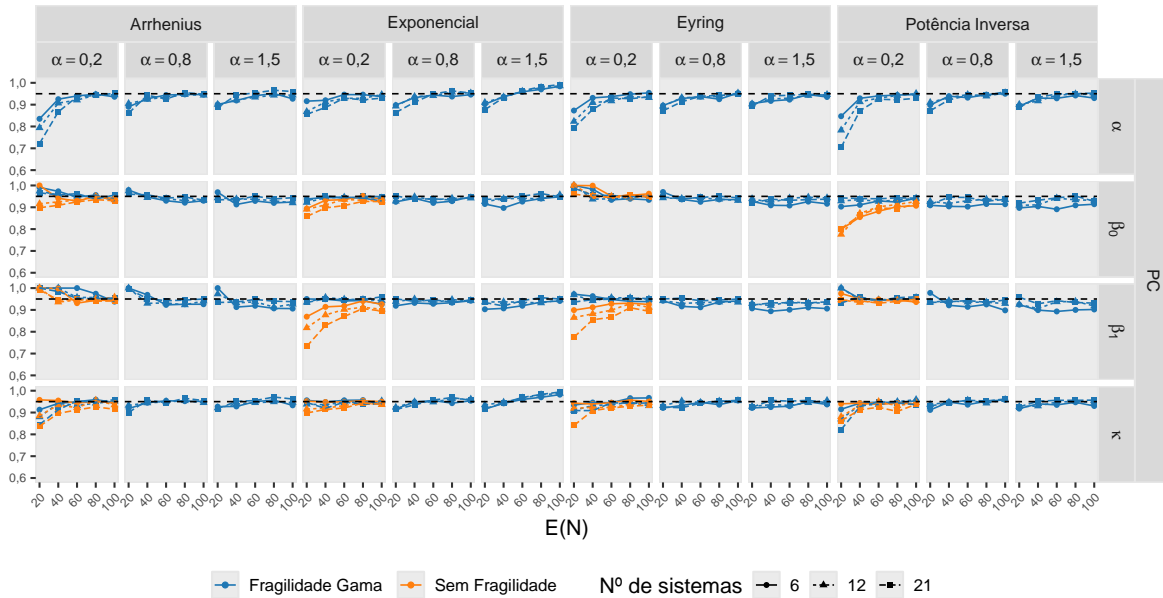


Figura 21 – Resultados para a probabilidade de cobertura. **Nota:** Como o modelo sem fragilidade não possui o parâmetro α , sua representação está na coluna $\alpha = 0,2$.

Esses resultados, em conjunto, demonstram o desempenho satisfatório dos modelos nos cenários simulados.

4.5 Aplicação

Na indústria de produção de baterias eletrônicas, é comum deparar-se com o desenvolvimento de sistemas complexos e diversificados, como baterias de alta capacidade para dispositivos eletrônicos. Antes de iniciar a produção em larga escala e lançar essas baterias no mercado, é obrigatório estabelecer e atingir metas de desempenho. Esses objetivos são avaliados por meio de uma série de testes, incluindo os testes acelerados, realizados durante a fase de desenvolvimento.

As baterias eletrônicas consistem em sistemas reparáveis compostos por vários subsistemas que passam por um processo de teste. Durante esses testes, as baterias são submetidas a condições mais rigorosas do que aquelas encontradas no uso normal. Quaisquer falhas que ocorram durante o teste são registradas, a bateria é reparada e, em seguida, reintroduzida no processo. Esse ciclo se repete até que um tempo pré-definido seja alcançado e, ao final do experimento, registram-se os instantes de falha e o número total de falhas.

Em sistemas reparáveis aplicados à indústria de baterias eletrônicas, os testes acelerados desempenham um papel importante na avaliação da confiabilidade e segurança, permitindo a

identificação de falhas em menos tempo e com maior eficiência. Essa antecipação de falhas possibilita correções já na fase de desenvolvimento, o que reduz custos e aumenta a eficiência do processo.

Apesar da importância dos dados reais para análises estatísticas, a disponibilidade desses dados é frequentemente limitada na literatura, especialmente em estudos com múltiplos sistemas reparáveis avaliados sob diferentes condições de estresse. Como resultado, a aplicação dos modelos estatísticos acelerados apresentados e dos propostos neste trabalho, será realizada com dados simulados, utilizando o modelo de tempo de falha acelerado de Arrhenius com fragilidade gama.

4.5.1 Sistemas de Bateria: Um exemplo de Aplicação

Considerando uma situação fictícia em que uma empresa especializada no desenvolvimento e produção de baterias para dispositivos eletrônicos enfrenta a necessidade de lançar uma nova bateria recarregável de alta capacidade para drones, dentro de um prazo reduzido. No entanto, antes do lançamento do produto, a empresa compromete-se a garantir que essa bateria seja altamente confiável, ainda que sua vida útil real seja longa.

Para acelerar o processo de avaliação da confiabilidade da bateria, a empresa optou por realizar um teste acelerado. Nesse teste, um conjunto de 30 baterias foi selecionado e submetido a três diferentes condições operacionais. Assim, os três grupos representaram diferentes níveis de aceleração, especificados da seguinte forma:

- **Grupo 1 (Baixa Aceleração – 15 A):** Dez baterias foram submetidas a uma corrente elétrica de 15 A, que corresponde às condições de estresse baixo de utilização em drones.
- **Grupo 2 (Média Aceleração – 25 A):** Dez baterias foram submetidas a uma corrente elétrica de 25 A, que corresponde às condições de estresse médio de utilização em drones.
- **Grupo 3 (Alta Aceleração – 45 A):** Dez baterias foram submetidas a uma corrente elétrica elevada de 45 A, com o objetivo de simular condições de estresse acentuado, que corresponde às condições de estresse alta de utilização em drones.

Em seguida, o teste acelerado foi realizado por 100 dias, em contraste com a vida útil esperada da bateria, que pode se estender por vários anos. Durante esse período, todas as falhas observadas nas 30 baterias foram registradas. As baterias danificadas foram retiradas, reparadas e reintroduzidas no teste, a fim de continuar a avaliação de sua confiabilidade. As informações sobre o tempo de ocorrência das falhas, o número total de falhas e o nível de aceleração de cada bateria foram registradas e apresentadas na [Figura 22](#).

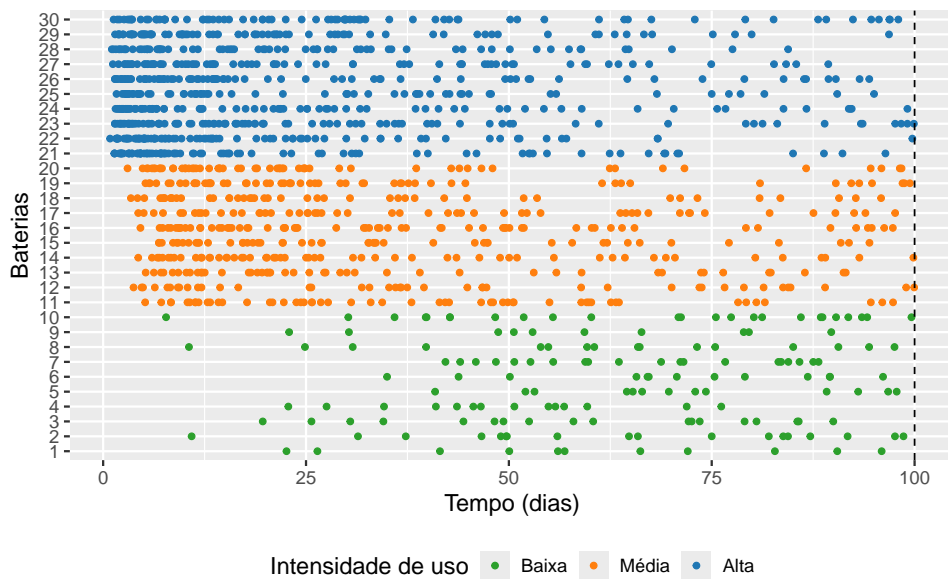


Figura 22 – Descrição das falhas observadas, referentes a cada uma das 30 baterias e seu nível de corrente elétrica ao longo de 100 dias.

A Figura 23 ilustra o acúmulo de falhas ao longo do tempo, categorizado em três níveis de corrente elétrica. No experimento, observou-se que os níveis médio e alto apresentaram maior intensidade de falhas durante os primeiros 100 dias de observação, enquanto o nível baixo manteve uma taxa mais reduzida. Esses resultados sugerem que o aumento no nível da corrente elétrica está associado a uma maior ocorrência de falhas no início do experimento. À medida que

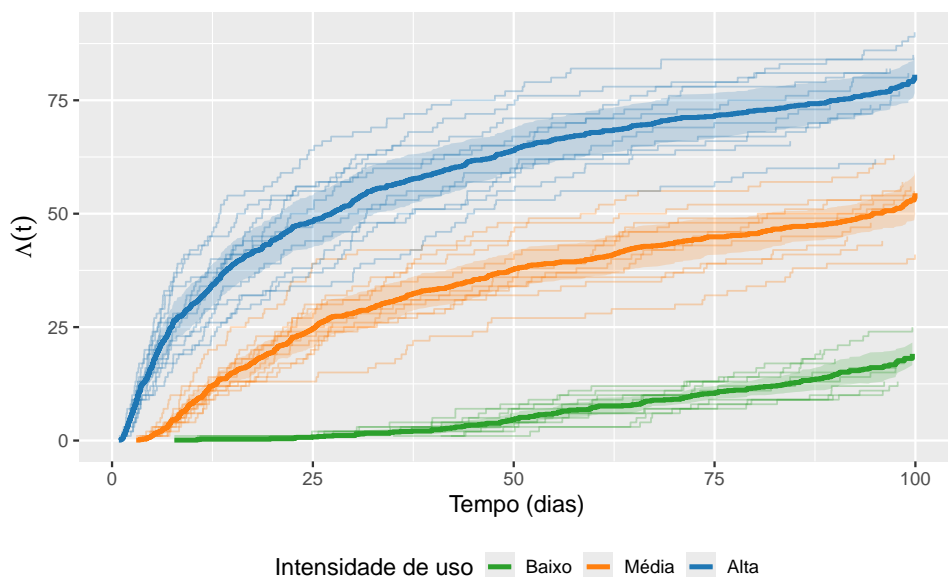


Figura 23 – Descrição do acúmulo de falhas em cada um dos 30 sistemas, que foram divididos em 3 níveis de corrente elétrica, e o acúmulo médio de falhas observado (representado pela linha destacada).

o tempo avança, os três níveis de corrente elétrica mostram, em média (linhas destacadas), uma

tendência de estabilização, indicando que o número de falhas tende a se manter mais constante ao longo do período de observação.

Para auxiliar a empresa na obtenção de estimativas das taxas de falha das baterias sob condições normais de operação, ajustaram-se oito modelos de tempo de falha acelerado. Os resultados das estimativas, erros padrão e intervalos de confiança de 95% relativos aos quatro modelos sem fragilidade são apresentados na [Tabela 7](#).

Tabela 7 – Estimativas dos quatro modelos de tempo de falha acelerado sem fragilidade.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC (95%)	
				Inferior	Superior
Exponencial	β_0	0,5140	0,1600	0,2000	0,8280
	β_1	-0,0599	0,0036	-0,0670	-0,0528
	κ	0,6540	0,0172	0,6200	0,6870
Arrhenius	β_0	-3,2100	0,2240	-3,6500	-2,7700
	β_1	-49,1000	2,9400	-54,9000	-43,4000
	κ	0,6570	0,0172	0,6230	0,6910
Eyring	β_0	0,9680	0,2320	0,5140	1,4200
	β_1	-25,8000	3,0100	-31,7000	-19,9000
	κ	0,6470	0,0171	0,6140	0,6810
Potência Inversa	β_0	128,0000	0,0100	127,9700	128,0300
	β_1	1,8500	0,0479	1,7600	1,9400
	κ	0,6530	0,0172	0,6190	0,6870

As estimativas, os erros padrão e os intervalos de confiança (IC) de 95% para os parâmetros dos quatro modelos com fragilidade gama são apresentados na [Tabela 8](#).

Tabela 8 – Estimativas dos quatro modelos de tempo de falha acelerado com fragilidade gama.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC (95%)	
				Inferior	Superior
Exponencial	β_0	4,1400	0,1030	3,9400	4,3500
	β_1	-0,0932	0,0031	-0,0993	-0,0872
	κ	2,8100	0,2080	2,4100	3,2200
	α	0,1370	0,0131	0,1120	0,1630
Arrhenius	β_0	-1,2300	0,0811	-1,3900	-1,0700
	β_1	-69,0000	1,6200	-72,2000	-65,9000
	κ	3,7900	0,3080	3,1900	4,4000
	α	0,1870	0,0181	0,1520	0,2230
Eyring	β_0	3,0500	0,0834	2,8900	3,2200
	β_1	-44,8000	1,6800	-48,1000	-41,5000
	κ	3,7500	0,3050	3,1500	4,3500
	α	0,1850	0,0180	0,1500	0,2200
Potência Inversa	β_0	41856,0000	0,0120	41855,97000	41856,03000
	β_1	2,7600	0,0145	2,7400	2,7900
	κ	3,4400	0,2680	2,9100	3,9700
	α	0,1690	0,0161	0,1380	0,2010

Uma das formas de avaliar a qualidade dos modelos ajustados é comparar a curva média estimada do acúmulo de falhas às curvas observadas de cada sistema, obtidas a partir dos dados, o que permite examinar o comportamento das falhas ao longo do tempo, conforme ilustrado na Figura 24.

A análise dos resultados dos oito modelos ajustados revela que os modelos com fragilidade gama fornecem uma função média acumulada de falhas estimada mais próxima do número acumulado de falhas observado para cada sistema. Entre os quatro modelos com fragilidade, o modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade exponencial apresenta a maior discrepância em relação aos dados observados.

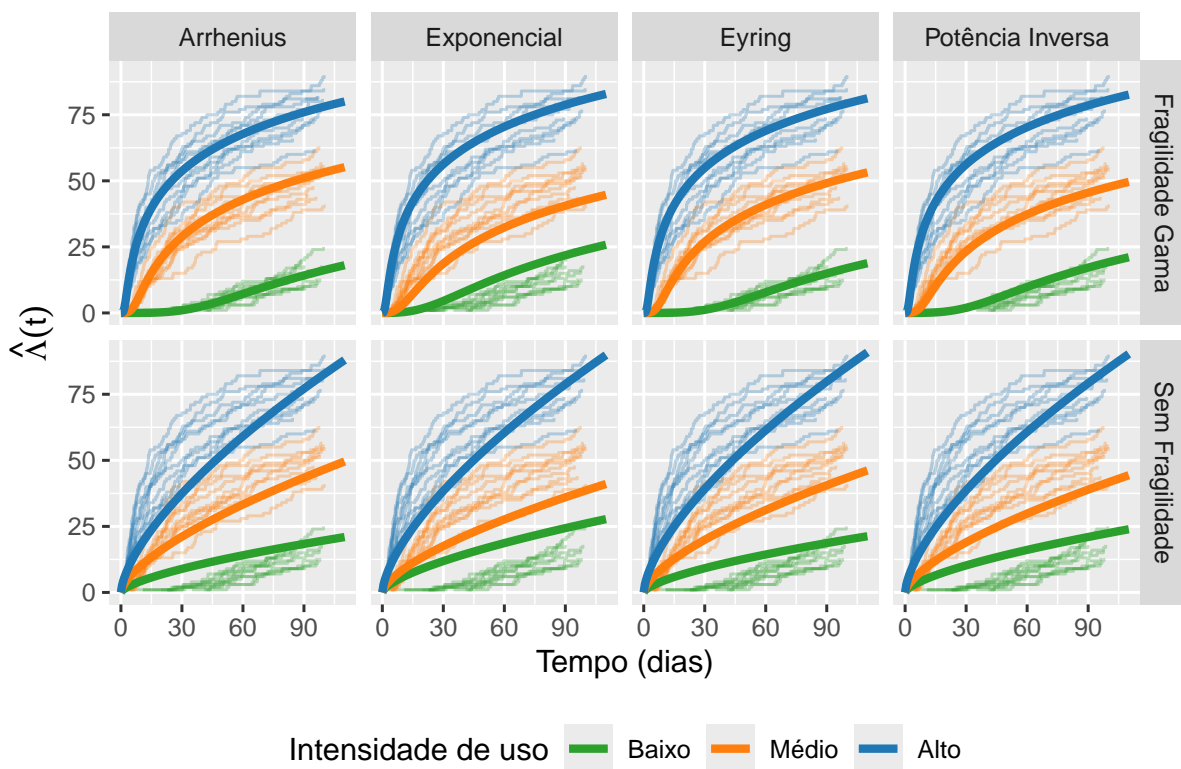


Figura 24 – Análise comparativa da função acumulada média estimada para os oito modelos ajustados.

Adicionalmente, foi realizada uma comparação entre a função média acumulada empírica e aquela estimada pelos modelos, conforme apresentado na Figura 25, com o intuito de avaliar a concordância entre os resultados. Os achados indicam que alguns modelos se mostraram mais adequados para descrever os dados, destacando-se o modelo de tempo de falha acelerado Arrhenius com fragilidade gama, bem como os modelos Eyring e Potência Inversa com fragilidade gama. As estimativas fornecidas por esses modelos apresentaram maior aderência aos valores observados.

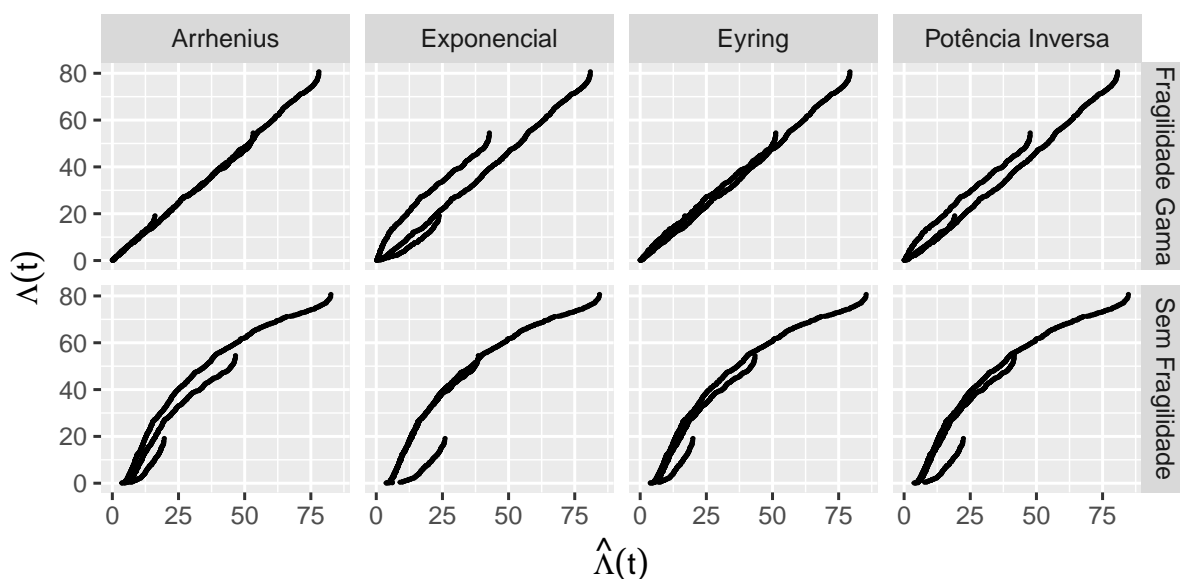


Figura 25 – Função média empírica acumulada versus função média estimada acumulada.

A seleção do modelo mais apropriado entre os ajustados foi baseada em três critérios: o Critério de Informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1998), o Critério de Informação de Akaike Corrigido (AICc) (HURVICH; TSAI, 1993) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC) (SCHWARZ, 1978). Os valores obtidos para cada um dos critérios encontram-se na Tabela 9. O modelo de tempo de falha acelerado Arrhenius com fragilidade gama apresentou o melhor desempenho em todos os critérios de seleção avaliados. Além disso, demonstrou bom ajuste à função média acumulada estimada, bem como concordância na comparação entre as funções médias empírica e estimada. Diante desses resultados, esse modelo foi selecionado como o mais apropriado para representar os dados.

Tabela 9 – Resultados dos critérios de seleção para cada um dos oito modelos ajustados aplicados aos dados da bateria.

Fragilidade	Modelo	AIC	BIC	AICc
Sem	Arrhenius	4140,98	4156,80	4140,95
	Exponencial	4212,08	4227,91	4212,05
	Eyring	4154,88	4170,71	4154,85
	Potência	4172,23	4188,06	4172,21
Gama	Arrhenius	3473,73	3494,83	3473,69
	Exponencial	3621,69	3642,79	3621,65
	Eyring	3478,96	3500,06	3478,91
	Potência	3516,53	3537,64	3516,49

Examinando as estimativas do modelo de tempo de falha acelerado de Arrhenius com fragilidade gama, apresentadas na Tabela 8, pode-se destacar diversos pontos importantes. O valor de $\alpha = 0,187$ indica a presença de heterogeneidade nos tempos de falha que não foi

capturada pelo tempo. Além disso, o valor de $\kappa = 3,790$ sugere uma concentração de falhas no início do experimento. Por fim, a estimativa de $\beta_0 = -1,230$ e $\beta_1 = -69,000$ nos ajuda a compreender a influência da covariável de aceleração. Esse valor de β_1 indica que quanto maior o nível de aceleração, maior a incidência de falhas.

Com base na seleção do modelo que apresentou melhor desempenho na análise dos dados e no entendimento da relevância de suas estimativas, prossegue-se para a etapa seguinte: a extrapolação dos resultados para um horizonte temporal mais longo, ultrapassando os 100 dias, por meio de previsão.

A Figura 26 apresenta as curvas de confiabilidade individualizadas para cada uma das 30 baterias, com base no modelo de tempo de falha acelerado de Arrhenius com fragilidade gama. O tempo previsto até a próxima falha, definido como aquele no qual a confiabilidade estimada atinge 50%, é representado por um marcador na curva de cada bateria. Observa-se que baterias submetidas a altos níveis de corrente elétrica apresentam tempos menores até a próxima falha, refletindo o efeito do estresse elevado sobre a degradação do sistema. Além disso, há uma variação considerável entre baterias de um mesmo grupo, o que destaca a relevância da inclusão da fragilidade para captar heterogeneidades não observadas. Esses resultados evidenciam a capacidade do modelo em fornecer previsões individualizadas coerentes com os níveis de estresse aplicados e o histórico de falhas.

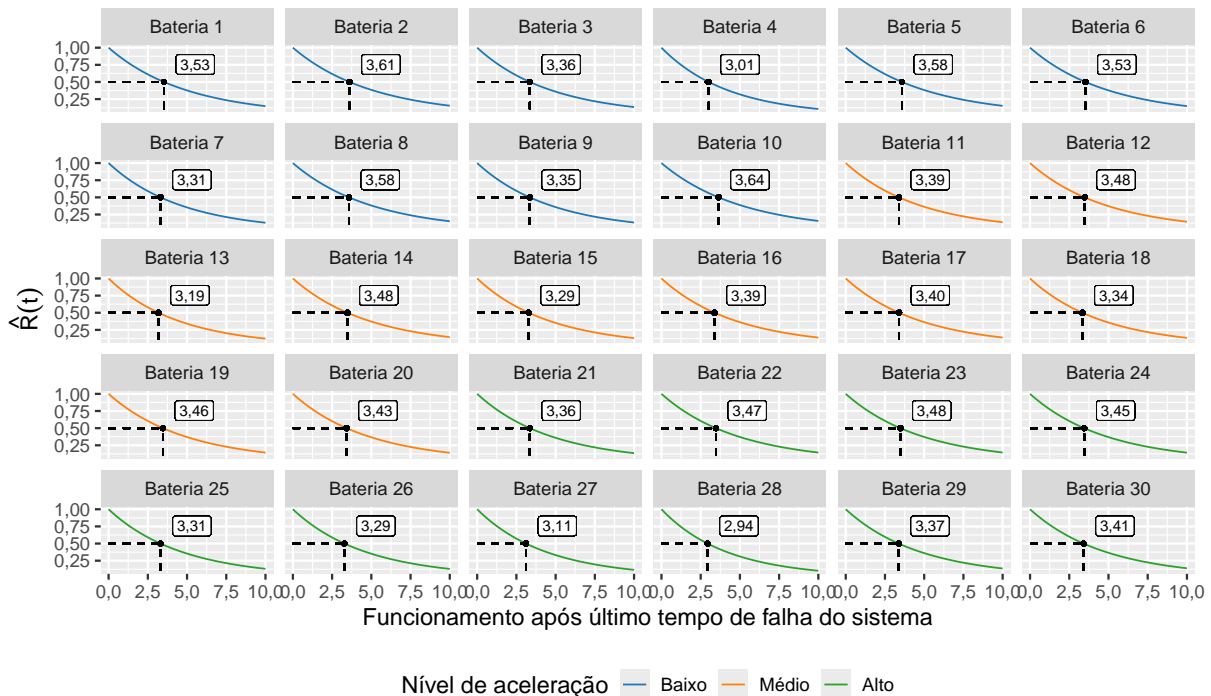


Figura 26 – A confiabilidade da próxima falha de cada bateria prevista pelo modelo de tempo de falha acelerado Arrhenius com fragilidade gama.

4.6 Considerações finais

Uma extensão dos modelos tempo de falha acelerado com fragilidade, utilizando as relações de Arrhenius, de Eyring e de Potência Inversa, foi proposta. Todos os modelos foram aplicados a múltiplos sistemas reparáveis com reparo mínimo. Para todos os modelos, assumiu-se que a função de intensidade de base segue um PLP. Os termos de fragilidade, que quantificam a heterogeneidade não observada, são modelados pela distribuição gama. Métodos inferenciais clássicos foram utilizados para obter as funções de verossimilhança de cada um dos modelos. Devido à complexidade inerente de todas as expressões, empregaram-se métodos numéricos para obter os Estimadores de Máxima Verossimilhança e seus intervalos de confiança assintóticos. A avaliação do desempenho desses estimadores foi realizada por meio de um estudo de simulação de Monte Carlo, analisando a variabilidade das estimativas para todos os modelos ajustados. Os estudos de simulação indicam resultados satisfatórios em termos das propriedades assintóticas dos estimadores. Por outro lado, a aplicabilidade prática dos modelos foi evidenciada por meio do uso de um conjunto de dados simulado.

MODELOS ACELERADOS EM SISTEMAS REPARÁVEIS COM NOVOS FUNÇÕES DE ACELERAÇÃO

Este capítulo propõe e avalia duas novas funções de aceleração: Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada, desenvolvidas para ampliar a capacidade dos modelos tradicionais na análise de dados de testes acelerados. Tais funções visam capturar padrões não lineares, que são observados em contextos reais, como na degradação térmica de lubrificantes e na ativação seletiva de aditivos.

A proposta surge diante das limitações das funções clássicas em representar situações em que o efeito do estresse não é linear, como ocorre, por exemplo, em faixas intermediárias de temperatura, onde a ação benéfica de aditivos pode ser revertida em condições extremas. As novas funções são formuladas como extensões naturais dos modelos tradicionais e integram-se à modelagem de tempo de falha acelerado com múltiplos sistemas reparáveis, sob a hipótese de reparo mínimo. Os modelos propostos são avaliados sob uma perspectiva teórica e por meio de cenários de possíveis aplicações práticas, com ênfase na qualidade do ajuste e na interpretação dos efeitos de aceleração.

Este capítulo encontra-se organizado com o propósito de apresentar e avaliar as funções de aceleração propostas para testes acelerados da seguinte forma: A [Seção 5.1](#) inicia destacando a relevância dessas funções na modelagem de tempo de falha e apresenta as novas propostas. Em seguida, essas funções são integradas à modelagem de testes acelerados no contexto de múltiplos sistemas reparáveis. E por fim, descrevem-se os métodos estatísticos de estimação adotados. Na [Seção 5.2](#), realiza-se uma avaliação numérica do desempenho dos modelos propostos. Inicialmente, é conduzido um estudo de simulação para examinar o comportamento dos estimadores em diferentes cenários. Em seguida, ilustra-se a aplicabilidade prática dos modelos por meio da análise de dados simulados.

5.1 Proposição de Novos Fatores de Aceleração na Modelagem Acelerada de Sistemas Reparáveis

As funções de aceleração são elementos fundamentais da modelagem de testes acelerados, pois descrevem como o estresse aplicado influencia o tempo até a ocorrência de falhas. A escolha adequada da função de aceleração contribui para que a modelagem represente de forma correta o comportamento físico ou químico do sistema em análise, facilitando extrapolações confiáveis para condições normais de uso. Funções consagradas, como a relação Exponencial, a de Arrhenius, a de Eyring e a de Potência Inversa, são amplamente utilizadas na literatura e em aplicações práticas por sua fundamentação teórica e interpretabilidade, conforme discutido por Neto (1991), Freitas e Colosimo (1997), Dodson e Schwab (2021). Essas funções foram apresentadas no Capítulo 2 e retomadas na Seção 4.2 no Capítulo 4, onde é destacado seu papel na modelagem de sistemas reparáveis sob condições de estresse.

No entanto, à medida que novos contextos experimentais e sistemas mais complexos passam a ser investigados, surgem cenários em que essas funções podem não capturar plenamente certos padrões de comportamento dos dados. Nesse sentido, a proposição de novas funções de aceleração busca complementar as abordagens tradicionais, ampliando o conjunto de ferramentas disponíveis para a análise de confiabilidade. Ao incorporar formas funcionais alternativas, pretende-se oferecer maior flexibilidade à modelagem, favorecendo o ajuste a diferentes realidades empíricas e contribuindo para a robustez das inferências obtidas.

Com esse objetivo, propõe-se, aqui, duas novas funções de aceleração, Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada, que ampliam as possibilidades de modelagem em sistemas reparáveis submetidos a testes acelerados. Essas funções visam representar diferentes padrões de crescimento e decrescimento, com comportamentos não lineares, permitindo uma melhor caracterização do efeito do estresse sobre o tempo de falha. As expressões matemáticas dessas funções são apresentadas na Tabela 10, considerando o caso de uma única covariável.

Tabela 10 – Funções de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada propostas.

Relação	$g(x)$
Exponencial Exponenciada	$e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x}}$
Eyring Exponenciada	$e^{\beta_0 - \frac{1}{x} e^{\frac{\beta_1}{x}}}$

Para compreender as formas funcionais assumidas por essas duas funções, observa-se na Figura 27 o comportamento das funções de aceleração associadas às relações Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada, com β_0 fixo e considerando diferentes valores de $\beta_1 = (-2; -1; -0,5; 0; 0,5; 1; 2)$. A variação de β_1 modifica a forma das curvas de cada função, influenciando diretamente a intensidade de falha e o tempo de vida em relação ao nível de estresse aplicado.

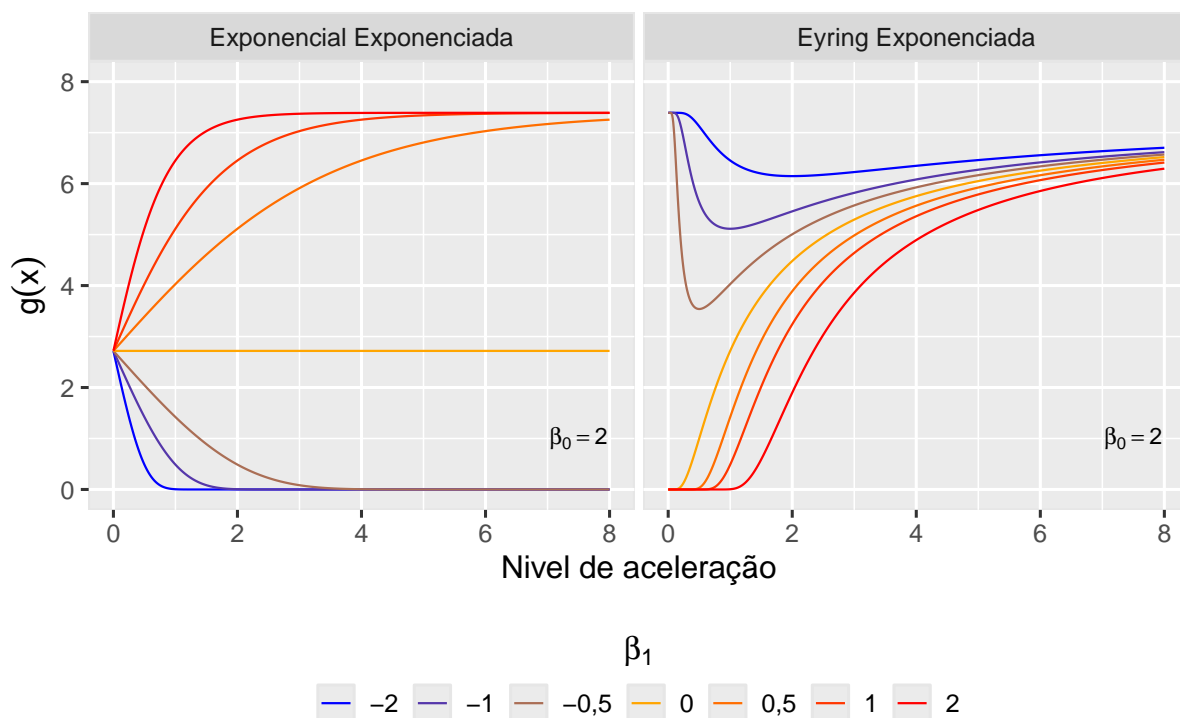


Figura 27 – Comportamento das funções de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada em relação aos níveis de aceleração para diferentes valores do parâmetro β_1 , com β_0 fixo.

Dessa forma, os seguintes padrões são identificados para cada uma dessas funções:

- **Exponencial Exponenciada:**

- Se $\beta_1 = 0$, a influência da função Exponencial Exponenciada na intensidade de falha e no tempo é constante para todos os níveis de aceleração, indicando ausência de efeito acelerador ou retardador.
- Se $\beta_1 < 0$, a influência da função Exponencial Exponenciada na intensidade de falha e no tempo inicia em um ponto e diminui progressivamente, aproximando-se de zero conforme os níveis de aceleração aumentam. Isso indica que o aumento da aceleração tende a reduzir o tempo de falha.
- Se $\beta_1 > 0$, então a influência da função Exponencial Exponenciada na intensidade de falha e no tempo começa em um ponto e cresce gradualmente, estabilizando-se próximo a um valor constante conforme o nível de aceleração aumenta. Esse padrão sugere que a aceleração tem um efeito estabilizador, mantendo o tempo de falha em níveis altos.

- **Eyring Exponenciada:**

- Se $\beta_1 > 0$, a influência da função inicia em zero e aumenta até atingir um valor constante com o aumento dos níveis de aceleração. Esse comportamento sugere que,

com o aumento da aceleração, há um crescimento inicial na intensidade de falha, que se estabiliza em níveis elevados de aceleração.

- Se $\beta_1 < 0$, a influência da função começa em um ponto, diminui até um ponto mínimo e, em seguida, aumenta novamente, aproximando-se de um valor constante com o aumento da aceleração. Esse padrão reflete uma resposta não monotônica à aceleração, com uma redução inicial no efeito de falha seguida de estabilização.

Ao comparar as funções de aceleração propostas (Figura 27) com as funções clássicas (Figura 16) descritas na Seção 4.1, observa-se que as funções Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada apresentam uma flexibilidade paramétrica capaz de capturar padrões de comportamento que não são descritos pelas funções clássicas de Arrhenius, Exponencial, Eyring e Potência Inversa. Essa flexibilidade amplia as possibilidades de aplicação na análise de confiabilidade e em testes acelerados.

Considerando a flexibilidade das funções propostas e sua aplicabilidade ao contexto de múltiplos sistemas reparáveis, admite-se um conjunto de S sistemas, onde cada sistema s ($s = 1, 2, \dots, S$) está sujeito a n_s falhas, observadas nos tempos $t_{s,j}$, com $j = 1, 2, \dots, n_s$. Nesse cenário, o efeito das covariáveis é incorporado de forma multiplicativa à escala temporal, influenciando diretamente a função de intensidade de falha (SAIKIA; BARMAN, 2017). Para modelar esse efeito, é introduzido um vetor de covariáveis \mathbf{x} , de dimensão $k \times 1$, juntamente com as funções de aceleração $g(\mathbf{x})$ propostas, de modo a modular a influência das covariáveis sobre a taxa de falha. Assim, a função de intensidade condicional para o sistema s é expressa por:

$$\lambda_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \lambda_0(g(\mathbf{x}_s)t_{s,j})g(\mathbf{x}_s),$$

em que $\lambda_0(\cdot)$ representa a função de intensidade de linha de base, e $g(\mathbf{x}_s)$ é a função que descreve o impacto das covariáveis de aceleração no sistema s . Esta função de intensidade condicional ajusta a função de intensidade de linha de base ao longo do tempo, em função das covariáveis de aceleração, conforme descrito por Pereira *et al.* (2024).

A função de intensidade acumulada para o sistema s , levando em consideração as covariáveis de aceleração \mathbf{x}_s e o tempo $t_{s,j}$ da j -ésima falha, é expressa por:

$$\Lambda_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \int_0^{t_{s,j}} g(\mathbf{x}_s)\lambda_0(g(\mathbf{x}_s)u) du = \Lambda_0(g(\mathbf{x}_s)t_{s,j}).$$

E a função de confiabilidade condicional para o sistema s , levando em consideração o tempo $t_{s,j}$, é expressa por:

$$R_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \exp\{-\Lambda_0(g(\mathbf{x}_s)t_{s,j})\}.$$

Com o objetivo de avaliar o desempenho futuro dos sistemas, é pertinente empregar a função de confiabilidade condicional a partir do instante da última falha registrada. Essa abordagem permite projetar a confiabilidade do sistema em um intervalo subsequente, auxiliando na previsão de futuras falhas.. A partir dos estimadores obtidos via máxima verossimilhança e considerando t_{n_s} como o tempo da falha mais recente de cada sistema s , é possível estimar o tempo até a próxima falha, $t = t_{n_s+1} - t_{n_s}$, por meio da função de confiabilidade associada ao modelo ajustado.

$$\begin{aligned}
 R_s(t_{n_s+1} | \mathbf{x}, t_{n_s}) &= P[T_{n_s+1} - t_{n_s} > t | t_{n_s}] = P[N(t_{n_s+1}) - N(t_{n_s}) = 0] \\
 &= \exp \left\{ - \int_{t_{n_s}}^{t_{n_s+1}} \lambda(u) du \right\} \\
 &= \exp \left\{ - \left[\Lambda(t_{n_s+1} + t_{n_s} | \mathbf{x}_s) - \Lambda(t_{n_s} | \mathbf{x}_s) \right] \right\} \\
 &= \exp \left\{ \Lambda_0(g(\mathbf{x}) t_{n_s}) - \Lambda_0(g(\mathbf{x}) (t_{n_s+1} + t_{n_s})) \right\}.
 \end{aligned}$$

Para compreender como os parâmetros influenciam o comportamento do modelo sob diferentes condições, recorre-se à simulação de dados baseada na função quantílica. Tal abordagem permite explorar cenários controlados, nos quais a distribuição dos tempos de falha incorpora explicitamente o efeito da fragilidade e da aceleração. Nesse contexto, a função quantílica, dependente do histórico até t_{n_s} , é expressa por:

$$\begin{aligned}
 F(t_{s,j} | \mathbf{x}_s, t_{n_s}) &= p \\
 1 - R(t_{s,j} | \mathbf{x}_s, t_{n_s}) &= p \\
 1 - \exp(-\Lambda(t_{s,j} + t_{n_s} | \mathbf{x}_s) + \Lambda(t_{n_s} | \mathbf{x}_s)) &= p \\
 \Lambda(t_{n_s} | \mathbf{x}_s) - \Lambda(t_{s,j} + t_{n_s} | \mathbf{x}_s) &= \log(1 - p),
 \end{aligned}$$

em que t_{n_s} representa o último tempo de falha de cada sistema.

Ao incorporar as funções de aceleração propostas: Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada, ao modelo de tempo de falha acelerado, tem-se dois novos modelos que ampliam a capacidade de modelagem do comportamento de sistemas sujeitos a múltiplos ciclos de falha e reparo sob condições variadas de estresse. Esses modelos, denominados de **Modelo de Tempo de Falha Acelerado Exponencial Exponenciada** e **Modelo de Tempo de Falha Acelerado Eyring Exponenciada**, capturam os efeitos do estresse na taxa de falhas, nos quais as funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade são diretamente afetadas pelas funções de aceleração. As representações matemáticas dessas funções para ambos os modelos estão ilustradas na [Figura 28](#).

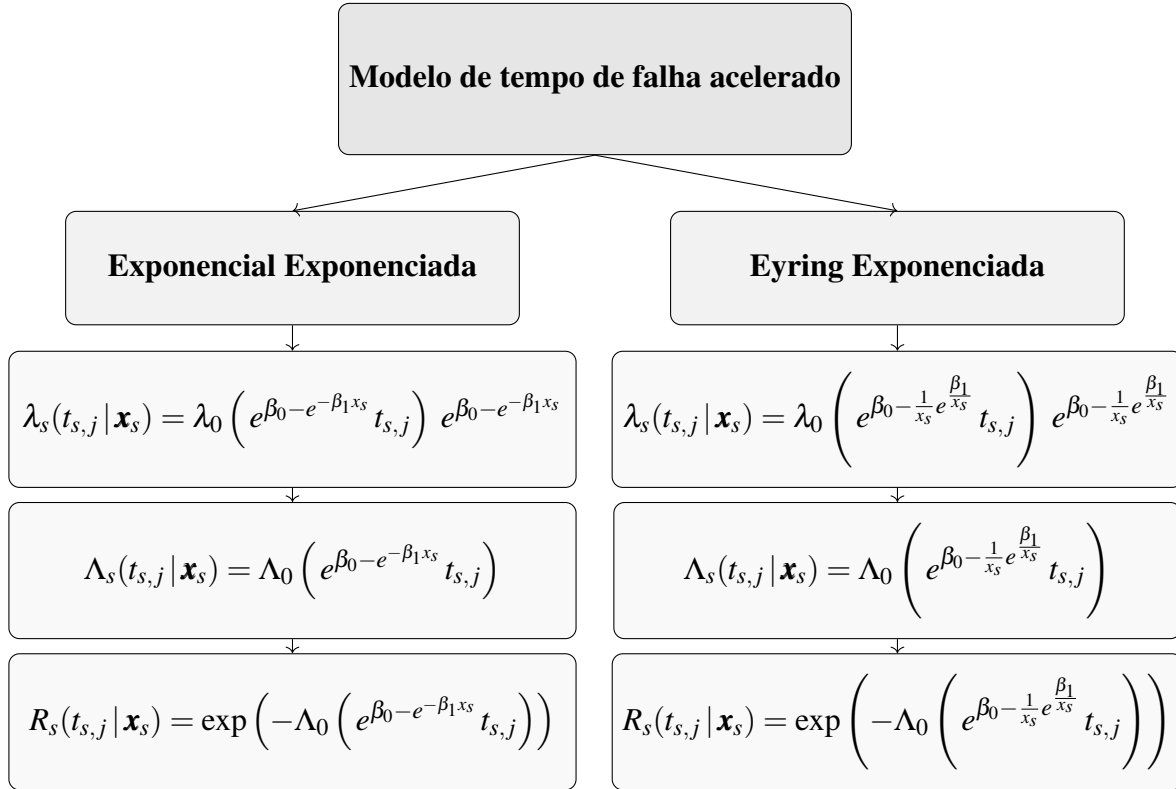


Figura 28 – Funções de intensidade, intensidade acumulada e confiabilidade dos modelos de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada.

5.1.1 Estimação

As estimativas dos parâmetros dos modelos propostos serão obtidas utilizando o método de máxima verossimilhança, acompanhado da matriz de informação de Fisher, que será utilizada para estimar as variâncias assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança. Esse processo de inferência clássica é interessante, pois as estimativas obtidas fornecem informações importantes para fundamentar decisões baseadas em evidências.

A partir da estimação dos parâmetros, é possível obter um entendimento mais aprofundado sobre os fatores que influenciam o comportamento dos sistemas estudados. Essas informações são essenciais para o desenvolvimento de estratégias eficazes de manutenção e aprimoramento, contribuindo para o aumento da confiabilidade, desempenho e longevidade dos sistemas. Entretanto, é importante destacar que esses benefícios são válidos desde que o modelo estimado seja adequadamente validado, garantindo que suas suposições e ajustes estejam coerentes com os dados observados. Neste contexto, considere um conjunto de S sistemas reparáveis, onde cada um apresenta n_s falhas, sendo submetidos a um processo de reparo mínimo com truncamento no tempo τ_s , conforme ilustrado na [Figura 4](#) da [Seção 2.2](#).

Ao assumir que a função de intensidade de linha de base tenha distribuição PLP com $\gamma = 1$, ver [Subseção 2.1.2](#), tem-se as seguintes funções de intensidade e intensidade acumulada para cada um dos modelos dadas por:

• **Exponencial exponenciada:**

$$\lambda_s(t_{s,j}|x_s) = \kappa \left(e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} t_{s,j} \right)^{\kappa-1} e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} \quad \text{e} \quad \Lambda_s(t_{s,j}|x_s) = \left(e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} t_{s,j} \right)^{\kappa}, \quad t_{s,j} > 0.$$

• **Eyring exponenciada:**

$$\lambda_s(t_{s,j}|x_s) = \kappa \left(e^{-\frac{1}{x_s} e^{\beta_0 - \frac{\beta_1}{x_s}}} t_{s,j} \right)^{\kappa-1} e^{-\frac{1}{x_s} e^{\beta_0 - \frac{\beta_1}{x_s}}} \quad \text{e} \quad \Lambda_s(t_{s,j}|x_s) = \left(e^{-\frac{1}{x_s} e^{\beta_0 - \frac{\beta_1}{x_s}}} t_{s,j} \right)^{\kappa}, \quad t_{s,j} > 0.$$

Essa relação entre β_1 e o comportamento das curvas é formalmente incorporada nas funções de verossimilhança e log-verossimilhança dos modelos em estudo. Essas funções, associadas a um vetor específico de parâmetros $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \kappa)$, foram desenvolvidas assumindo que a intensidade de linha de base segue uma distribuição PLP e são formalmente definidas nas Tabelas 11 e 12.

Tabela 11 – Função de verossimilhança e log-verossimilhança do modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada.

Modelo de Tempo de Falha Acelerado Exponencial Exponenciada

$$L(\Theta) = \prod_{s=1}^S \left\{ \left[\prod_{j=1}^{n_s} \kappa \left(e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} t_{s,j} \right)^{\kappa-1} e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} \right] \exp \left\{ - \left(e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} \tau_s \right)^{\kappa} \right\} \right\}$$

$$l(\Theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n_s} \kappa \left(e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} t_{s,j} \right)^{\kappa-1} e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} \right] - \left(e^{\beta_0 - e^{-\beta_1 x_s}} \tau_s \right)^{\kappa} \right\}$$

Tabela 12 – Função de verossimilhança e log-verossimilhança do modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada.

Modelo de Tempo de Falha Acelerado Eyring Exponenciada

$$L(\Theta) = \prod_{s=1}^S \left\{ \left[\prod_{j=1}^{n_s} \kappa \left(e^{\beta_0 - \frac{1}{x_s} e^{\frac{\beta_1}{x_s}}} t_{s,j} \right)^{\kappa-1} e^{\beta_0 - \frac{1}{x_s} e^{\frac{\beta_1}{x_s}}} \right] \exp \left\{ - \left(e^{\beta_0 - \frac{1}{x_s} e^{\frac{\beta_1}{x_s}}} \tau_s \right)^{\kappa} \right\} \right\}$$

$$l(\Theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \sum_{j=1}^{n_s} \log \left(\kappa \left(e^{\beta_0 - \frac{1}{x_s} e^{\frac{\beta_1}{x_s}}} t_{s,j} \right)^{\kappa-1} e^{\beta_0 - \frac{1}{x_s} e^{\frac{\beta_1}{x_s}}} \right) - \left(e^{\beta_0 - \frac{1}{x_s} e^{\frac{\beta_1}{x_s}}} \tau_s \right)^{\kappa} \right\}$$

O estimador dos parâmetros, denotado por $\hat{\Theta}$, é obtido por meio da maximização da função de log-verossimilhança associada a cada modelo considerado. A maximização pode ser

realizada utilizando métodos de estimação disponíveis quando a função de log-verossimilhança possui uma forma fechada. Nos casos em que essa forma não está disponível, são empregados procedimentos iterativos de otimização. Contudo, mesmo quando a função de log-verossimilhança possui uma forma fechada, esses métodos iterativos podem ser utilizados como uma alternativa eficiente. Uma propriedade importante desse estimador, amplamente discutida na literatura estatística sob certas condições de regularidade, é a sua consistência (LEHMANN; CASELLA, 2006). Isso significa que, conforme o tamanho da amostra aumenta, as estimativas $\hat{\Theta}$ convergem para os verdadeiros valores do vetor de parâmetros Θ . Além disso, sob condições regulares, o estimador de máxima verossimilhança segue uma distribuição normal assintótica, expressa por:

$$\hat{\Theta} \xrightarrow{D} N_{(1+p)}(\Theta, I^{-1}(\Theta)),$$

onde \xrightarrow{D} representa a convergência em distribuição, $I(\Theta) = -E \left[\frac{\partial^2 l(\Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$ é a matriz de informação de Fisher esperada, e p representa o número de parâmetros associados ao fator de aceleração. Todas essas propriedades constituem uma ferramenta importante para a inferência estatística (MILLAR, 2011).

Em algumas situações, o cálculo da matriz de informação de Fisher pode ser difícil de realizar de forma analítica. Por isso, é comum utilizar uma abordagem alternativa, aproximando a matriz de informação de Fisher pela sua versão observada, conhecida como matriz hessiana. Esta matriz é composta pelas segundas derivadas da função de log-verossimilhança em relação aos parâmetros do modelo, avaliadas nos valores estimados desses parâmetros. Sendo $l(\Theta)$ a função de log-verossimilhança e $\hat{\Theta}$ os valores estimados dos parâmetros, a matriz Hessiana H é uma matriz quadrada de ordem $1 + p$, onde $1 + p$ é o número de parâmetros do modelo. Os elementos da matriz hessiana são dados por:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 l(\Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta = \hat{\theta}}. \quad (5.1)$$

A matriz hessiana fornece informações sobre a curvatura da função de log-verossimilhança em torno dos valores estimados dos parâmetros. A matriz de informação de Fisher aproximada pode então ser expressa como $I(\Theta) \approx E[-H]$. Essa aproximação é útil quando o cálculo exato da matriz de informação de Fisher é complexo.

Neste estudo, embora a função de log-verossimilhança possua uma forma fechada, optou-se por realizar a estimação dos parâmetros utilizando a função `optim()` do *software* estatístico R (R Core Team, 2024), empregando o método de otimização L-BFGS-B. Essa escolha se deve à eficiência computacional oferecida por esse método.

5.2 Avaliação Numérica

A validação dos modelos propostos é realizada por meio de uma avaliação numérica em duas etapas: primeiro, um estudo de simulação é conduzido para avaliar seu desempenho em cenários controlados; em seguida, a aplicabilidade prática é analisada por meio de duas aplicações distintas, considerando as particularidades de cada modelo.

5.2.1 Estudo de simulação

Para analisar o desempenho dos modelos propostos em diferentes cenários, foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo. O intuito aqui é validar as propriedades estatísticas dos modelos, identificar possíveis limitações sob condições específicas e avaliar a precisão e a consistência dos estimadores de máxima verossimilhança. Para isso, implementou-se um processo de geração de dados descrito pelo [Algoritmo 3](#). Nessa abordagem, criou-se um conjunto de dados que simula diferentes condições, o que possibilita uma análise mais ampla do comportamento dos modelos investigados.

Algoritmo 3 – Gerador de números aleatórios do modelo proposto

```

1: Entrada:
2:  $S$  ▷ n° de sistemas.
3:  $\mathbf{n} = \{(n_1, \dots, n_s)\}$  ▷ n° de falhas por sistema.
4:  $\mathbf{x} = \{(\underbrace{0, 65; \dots; 0, 65}_{S \text{ vezes}}, \underbrace{0, 85; \dots; 0, 85}_{S \text{ vezes}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{S \text{ vezes}})\}$ 
5:  $\boldsymbol{\theta} = \{(\beta_0, \beta_1, \kappa)\}$ 
6:
7: Saída:
    $\{(t, \mathbf{S}, \mathbf{x})\}$ 
8:
9: Procedimento:
   Define  $F_{D|\mathbf{x}, t_n}(d | \mathbf{x}, t_n)$ .
10:  $F_{D|\mathbf{x}, t_n} := (d; \mathbf{x}, t_n) \rightarrow 1 - \exp\{-\Lambda(t + t_n | \mathbf{x}) + \Lambda(t_n | \mathbf{x})\}$ 
11:
12: para  $s := \text{to } S$  faça
13:   para  $j := \text{to } n_s$  faça
      $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$  ▷ Variável auxiliar amostral U
      $F_{D|\mathbf{x}, t_{s,j-1}}(d; \mathbf{x}, t_{s,j-1}) - U = 0$  ▷ Resolva para  $d$ 
      $t_{s,j} = t_{s,j-1} + d$  ▷ Determine o  $j$ -ésimo tempo de falha
14:   fim para
15: fim para

```

Neste estudo de simulação, foram explorados 108 cenários distintos, dos quais 54 estão relacionados ao modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, e 54 estão relacionados ao modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada. As combinações utilizadas para compor os cenários foram definidas considerando $E(N) = (15, 35, 55, 75, 95, 105)$ repre-

sentando o número esperado de falhas em três conjuntos de sistemas, com $S = (9, 15, 24)$. Para representar os níveis de aceleração, foram considerados o parâmetro $\beta_1 = (-1, 0; -0,5; 0,5)$, com $\beta_0 = 5$, os sistemas foram divididos em três níveis distintos de aceleração, $X = (0,65; 0,85; 1,0)$, e cada nível possui a mesma quantidade de sistemas em todos os cenários), com $\tau_s = 200$. O parâmetro γ foi fixado em 1, pois o intercepto β_0 está associado ao parâmetro de locação γ . Ressalta-se que a identificabilidade discutida refere-se aos parâmetros de escala, e não ao parâmetro de aceleração, garantindo a consistência com o [Capítulo 3](#).

Obs.: Os valores do parâmetro κ não foram definidos diretamente nos cenários construídos, pois foram calculados durante a geração dos conjuntos de dados. Esses cálculos consideraram os valores configurados de τ , o grau de aceleração e outras características específicas de cada cenário. Nos cenários analisados, o valor de κ apresentou uma variação entre 0,632 (valor mínimo) e 7,054 (valor máximo), com uma média de 3,242, refletindo a influência das condições experimentais sobre a estimativa desse parâmetro.

As simulações foram conduzidas no *software* R ([R Core Team, 2024](#)), utilizando um total de 1.000 réplicas de Monte Carlo. Para avaliar o desempenho dos estimadores, foram considerados três critérios principais: o Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE, do inglês *Mean Absolute Percentage Error*), a Raiz-Quadrada do Erro Quadrático Médio Padronizada (SRMSE, do inglês *Standardized Root Mean Square Error*) e a Probabilidade de Cobertura de 95% (CP). Cada uma dessas métricas foi calculada segundo suas fórmulas específicas:

$$\text{MAPE}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left| \frac{\hat{\theta}_i^{(m)} - \theta_i}{\theta_i} \right|, \quad \text{SRMSE}(\hat{\theta}_i) = \frac{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\theta}_i^{(m)} - \theta_i)^2}}{\text{SE}(\hat{\theta}_i)}$$

e

$$\text{CP}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I(\theta_i \in (a_i^{(m)}, b_i^{(m)})),$$

em que $a_i^{(m)} = \hat{\theta}_i - 1,96 \times \text{SE}(\hat{\theta}_i)$ e $b_i^{(m)} = \hat{\theta}_i + 1,96 \times \text{SE}(\hat{\theta}_i)$. θ_i está representando o i -ésimo componente do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1 \kappa, \gamma)$. Logo, $\hat{\theta}_i$ representa o estimador de máxima verossimilhança correspondente, onde $I(\cdot)$ é a função indicadora, assumindo o valor um se seu argumento for verdadeiro e zero se for falso. Por último, o erro padrão do estimador $\hat{\theta}_i^{(m)}$ é dado por $\text{SE}(\hat{\theta}_i)$.

Por meio desta metodologia, deseja-se que os estimadores retornem valores de MAPE próximos de zero e SRMSE próximos de um, indicando uma boa capacidade de estimativa, e uma baixa discrepância entre os valores estimados e os valores reais. Além disso, espera-se que a probabilidade de cobertura se mantenha próxima de 0,95, o que evidencia a confiabilidade das estimativas.

Na [Figura 29](#), observa-se que os valores de MAPE são consistentemente baixos para todos os cenários simulados, indicando que as estimativas apresentam um erro percentual médio

pequeno em relação aos valores reais.

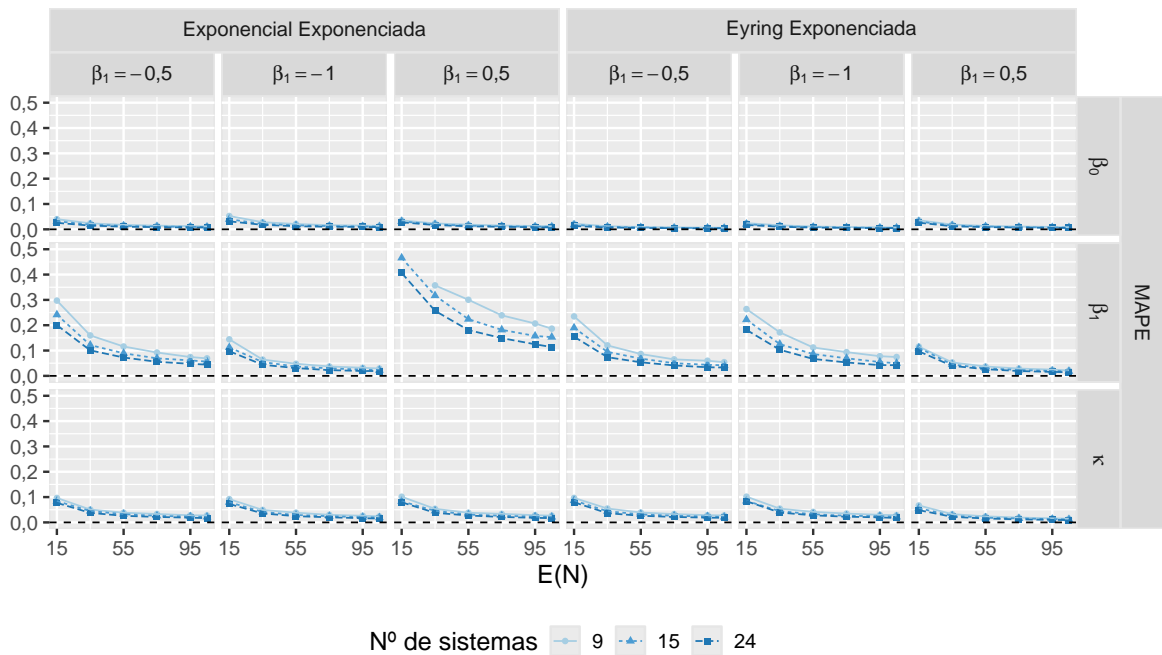


Figura 29 – Resultados do MAPE em Função dos Cenários e Parâmetros Avaliados.

Observa-se na [Figura 30](#) que os valores do SRMSE permanecem próximos de um na maioria dos cenários ou convergem para esse valor à medida que aumenta o número esperado

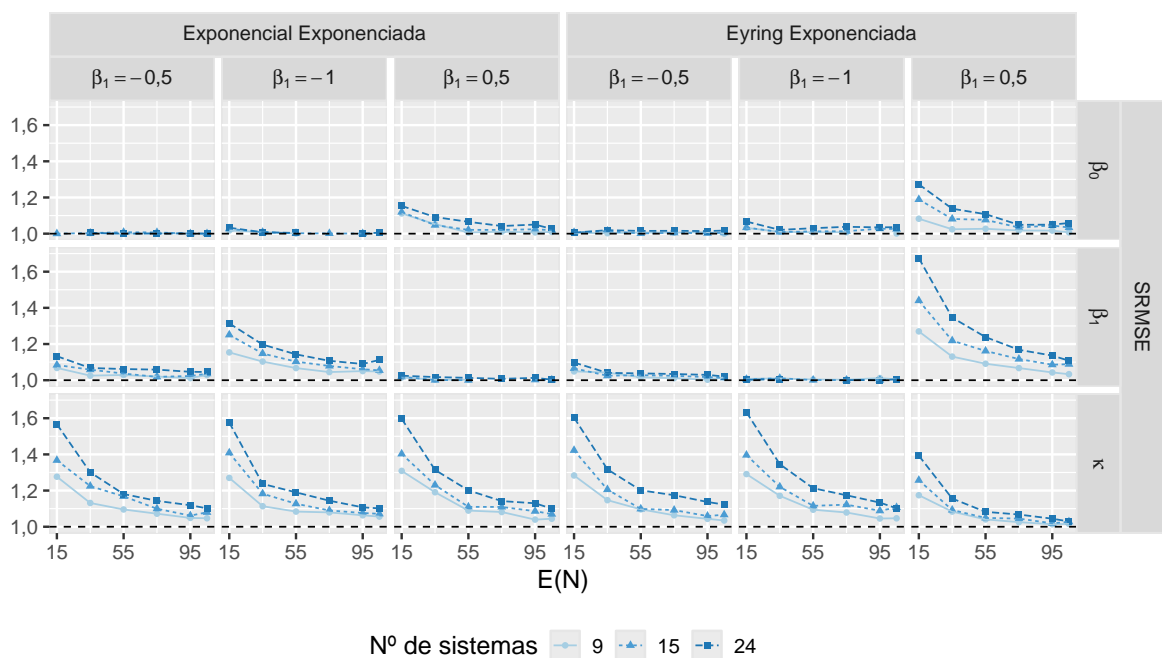


Figura 30 – Resultados d SRMSE em Função dos Cenários e Parâmetros Avaliados.

de falhas. Esse comportamento indica boa acurácia das estimativas, com baixa discrepância em relação aos valores reais.

A [Figura 31](#) apresenta os resultados da probabilidade de cobertura, que se mantém próxima do nível nominal de 95%, à medida que $E(N)$ aumenta, em todos os cenários avaliados. Esse resultado indica que os intervalos de confiança construídos possuem desempenho adequado e refletem apropriadamente a incerteza associada às estimativas.

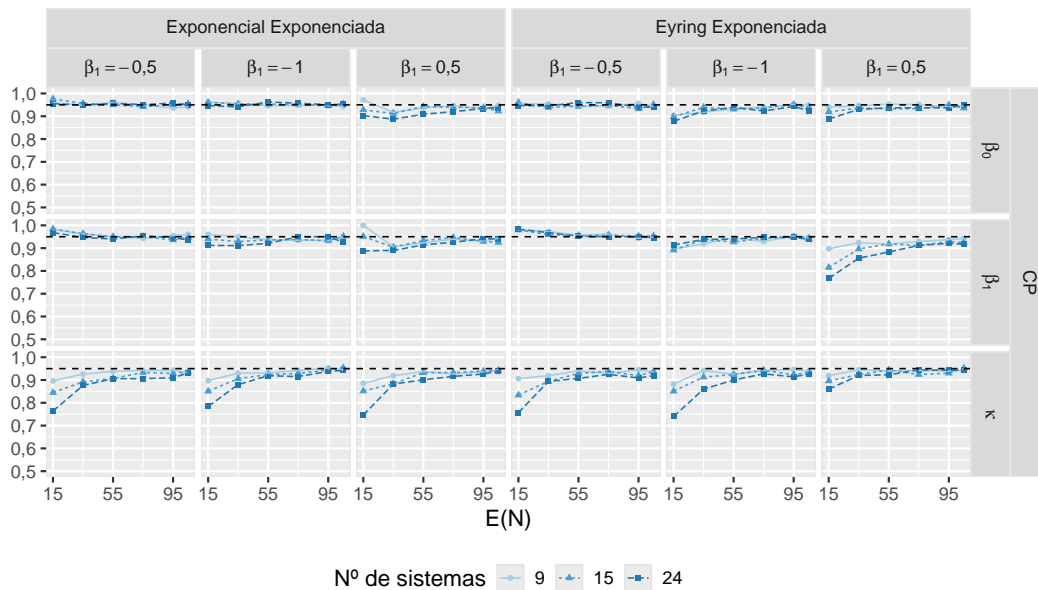


Figura 31 – Resultados da CP em Função dos Cenários e Parâmetros Avaliados.

Os resultados da simulação indicam que os modelos avaliados apresentam bom desempenho na obtenção de estimativas com níveis adequados de precisão.

5.2.2 *Aplicação 1: Falhas em Motores Elétricos Industriais*

Uma empresa de fabricação de motores elétricos industriais está desenvolvendo um novo modelo de motor de alta potência, projetado para operar em ambientes industriais severos, como usinas de processamento e fábricas com operação contínua. Com o intuito de avaliar a confiabilidade desse novo modelo em diferentes condições de carga, e antes de sua produção em larga escala, foram gerados dados simulados pelo modelo Exponencial Exponenciada, que reproduzem o comportamento esperado dos tempos de falha sob tais condições. Essa aplicação tem caráter ilustrativo e visa demonstrar a aplicabilidade do modelo proposto em um contexto realista de engenharia.

Com o objetivo de avaliar a confiabilidade dos motores em um horizonte de tempo reduzido, foi conduzido um ensaio de vida acelerada, no qual os dispositivos foram submetidos a diferentes níveis de estresse operacional. A finalidade principal foi induzir falhas em menor

tempo, viabilizando a modelagem da vida útil em condições normais de uso a partir de dados obtidos sob estresse elevado.

O experimento seguiu um delineamento completamente casualizado, com três níveis de carga de trabalho representando diferentes intensidades de estresse mecânico. Nove unidades do motor foram avaliadas e os níveis de estresse considerados foram:

- **Carga Baixa:** 3 motores operando a 110% da carga nominal. Esse nível representa condições mais elevadas que as reais de operação.
- **Carga Moderada:** 3 motores operando a 150% da carga nominal, configurando um regime de sobrecarga controlada. Esse nível permite avaliar o comportamento do motor sob condições de estresse intermediário, frequentemente observadas em situações de produção intensificada.
- **Carga Pesada:** 3 motores operando a 200% da carga nominal. Este cenário foi projetado para induzir rapidamente os modos de falha predominantes, simulando condições severas de operação contínua, com alto esforço mecânico.

Esse experimento foi conduzido por um período de 10 semanas, durante o qual cada motor foi monitorado quanto à ocorrência de falhas. Toda vez que um motor falhava, ele era removido, reparado e reinsertado no teste para continuar a avaliação de sua confiabilidade. Todas as informações coletadas sobre o tempo em que as falhas ocorreram, o total de falhas e a carga aplicada em cada motor estão representadas na [Figura 32](#).

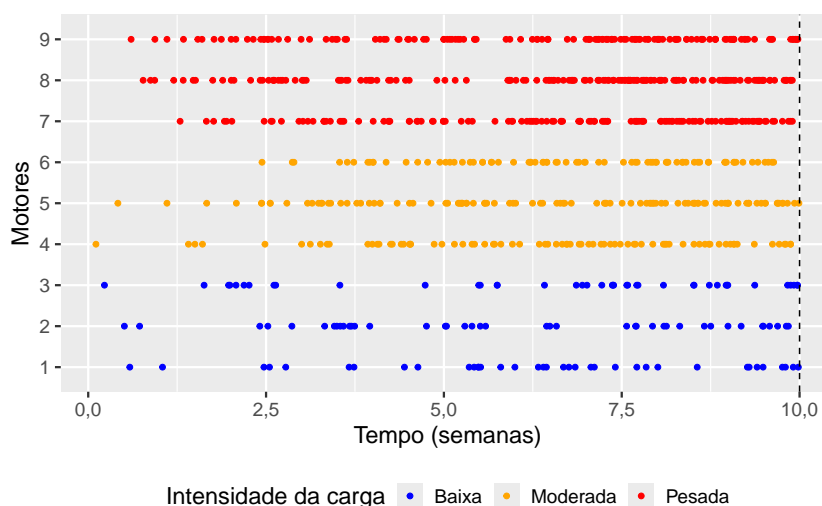


Figura 32 – Descrição das falhas observadas, referentes a cada um dos 9 motores e seu nível de carga ao longo do período de 10 semanas.

Observa-se, na [Figura 33](#), o acúmulo de falhas ao longo do tempo, classificadas em três níveis de carga. Os resultados mostram que os níveis classificados como moderado e pesado

registram uma incidência maior de falhas em comparação ao nível baixo. Esses resultados sugerem que o aumento do nível de carga pode estar associado a uma maior ocorrência de falhas. À medida que o tempo avança, a diferença no número de falhas entre os níveis se torna cada vez maior, evidenciando que cargas mais altas intensificam a ocorrência de falhas.

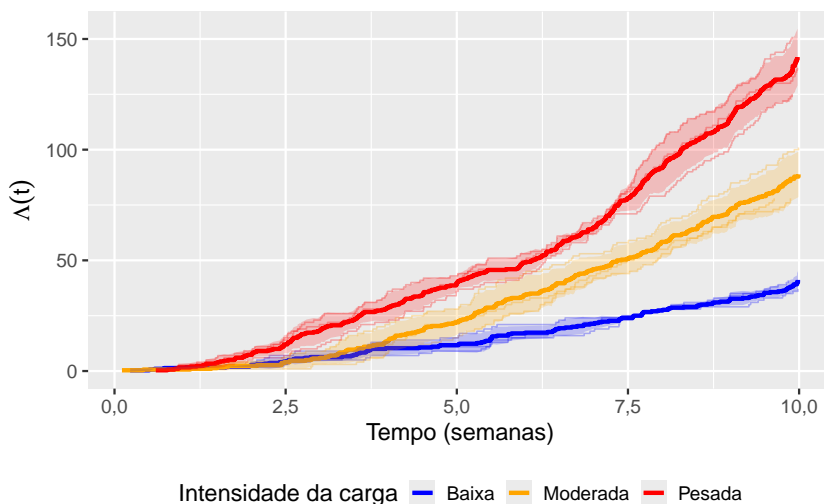


Figura 33 – O acúmulo de falhas observado em nove sistemas, agrupados em três níveis de carga, com a linha em destaque representando o acúmulo médio de falhas.

A Tabela 13 apresenta as estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada. A estimativa de β_0 é de 0,521, com erro padrão de 0,104 e intervalo de confiança de 0,318 e 0,724. A estimativa de β_1 foi de 0,176, com erro padrão de 0,0484 e intervalo de confiança de 0,0810 e 0,271. Por fim, a estimativa de κ é 1,860, com erro padrão de 0,0626 e intervalo de 1,740 e 1,980. Todos os parâmetros foram estatisticamente significativos.

Tabela 13 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC (95%)	
				Inferior	Superior
Exponencial Exponenciada	β_0	0,521	0,104	0,318	0,724
	β_1	0,176	0,0484	0,081	0,271
	κ	1,860	0,0626	1,740	1,980

A Figura 34 apresenta a função acumulada média estimada pelo modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, sobreposta às curvas mais claras, que representam o número acumulado de falhas observadas para cada sistema. Cada linha colorida representa diferentes níveis de cargas (Baixa, Moderada, Pesada). Observa-se que, à medida que o tempo de teste avança, os motores submetidos a cargas mais elevadas exibem um crescimento mais acentuado no número acumulado de falhas. Isso evidencia que níveis mais altos de carga resultam

em um desgaste acelerado dos motores, levando a um maior acúmulo de falhas em comparação a cargas mais baixas. Além disso, a função acumulada média estimada acompanha de forma consistente a tendência das observações empíricas em cada nível de carga, evidenciando a adequação do modelo na descrição da evolução das falhas ao longo do tempo.

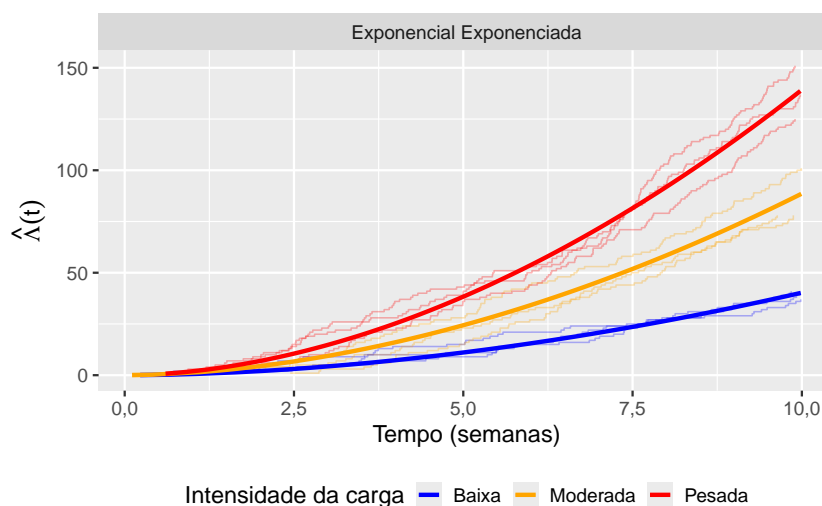


Figura 34 – Função acumulada média estimada para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, sobreposta às curvas do número médio acumulado observado de falhas para cada sistema.

A Figura 42 compara a função acumulada média empírica e a estimada pelo modelo Exponencial Exponenciada. A proximidade dos pontos à linha de identidade indica uma boa aderência do modelo aos dados, sugerindo que ele representa adequadamente o comportamento acumulado das falhas ao longo do tempo. Isso reforça a confiabilidade das estimativas e a adequação do modelo para análises de confiabilidade.

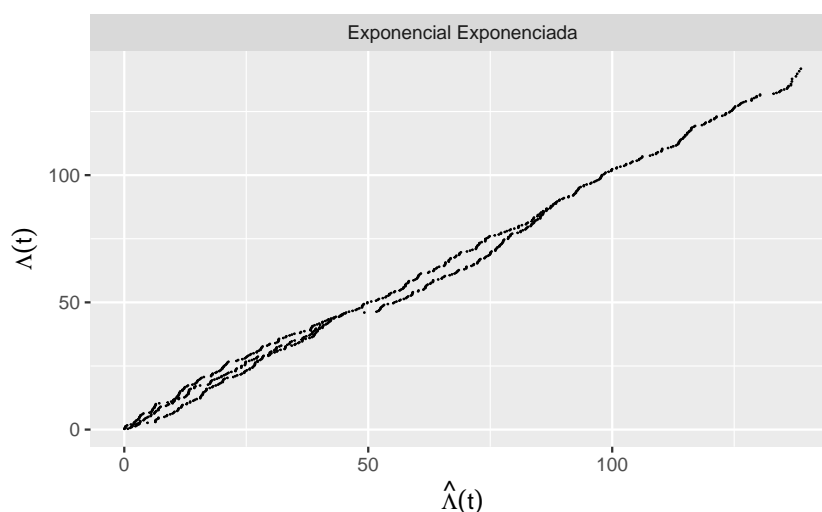


Figura 35 – Função acumulada média empírica versus a função acumulada média estimada, apresentada para o modelo de tempo de falha Exponencial Exponenciada.

Os resultados obtidos para os parâmetros do modelo ajustado permitem interpretar o efeito da aceleração sobre a taxa de falha dos motores sob diferentes níveis de carga. Os valores estimados para os parâmetros β_0 , β_1 e κ , juntamente com suas interpretações, são as seguintes:

- $\hat{\beta}_0 = 0,521$: Esse valor indica o ponto de partida da influência da aceleração sobre o tempo de falha, fornecendo a base para a modelagem da resposta do sistema antes da aplicação dos efeitos da variável aceleradora.
- $\hat{\beta}_1 = 0,176$: Esse valor positivo de β_1 indica que, quanto maior for o nível de carga sobre o motor maior será a taxa de falha ao longo do tempo, conforme representado na Figura 36.

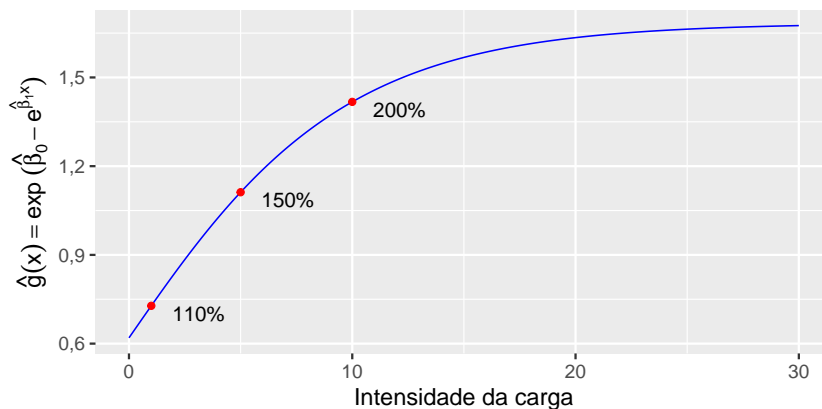


Figura 36 – Representação da função de aceleração estimada, $\hat{g}(x)$ para o modelo Exponencial Exponenciada, ilustrando a relação entre os níveis de aceleração e o impacto na taxa de falha do sistema.

- $\hat{\kappa} = 1,860$: indica que a taxa de falha aumenta com o tempo, refletindo o desgaste progressivo de componentes mecânicos sob uso contínuo, especialmente em condições severas. Essa estimativa sugere que, com o tempo, os motores experimentam um aumento progressivo na taxa de falhas à medida que se aproximam do limite de sua durabilidade.

O modelo Exponencial Exponenciada descreve de forma adequada o comportamento de falha dos motores sob diferentes condições de carga. Os resultados sugerem que, apesar da taxa de falha não aumentar rapidamente no curto prazo, ela cresce ao longo do tempo, especialmente sob altas cargas. Esses resultados ajudam na previsão da confiabilidade dos motores e na otimização dos testes de vida útil.

A Figura 37 apresenta as previsões do modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, destacando o comportamento da confiabilidade e da intensidade acumulada dos motores ao longo do tempo, considerando o histórico de falhas. A confiabilidade condicionada representa a probabilidade de um dispositivo continuar operando sem falhas após um tempo t , dado que já funcionou até $t_n = 10$ semanas. Nota-se que a confiabilidade é maior para tempos mais curtos e diminui progressivamente conforme t aumenta, sendo significativamente influenciada

pelos diferentes níveis de carga. Por outro lado, a intensidade acumulada condicionada apresentada reflete a contagem esperada de falhas acumuladas ao longo do tempo, com crescimento mais acentuado à medida que os níveis de carga aumentam.

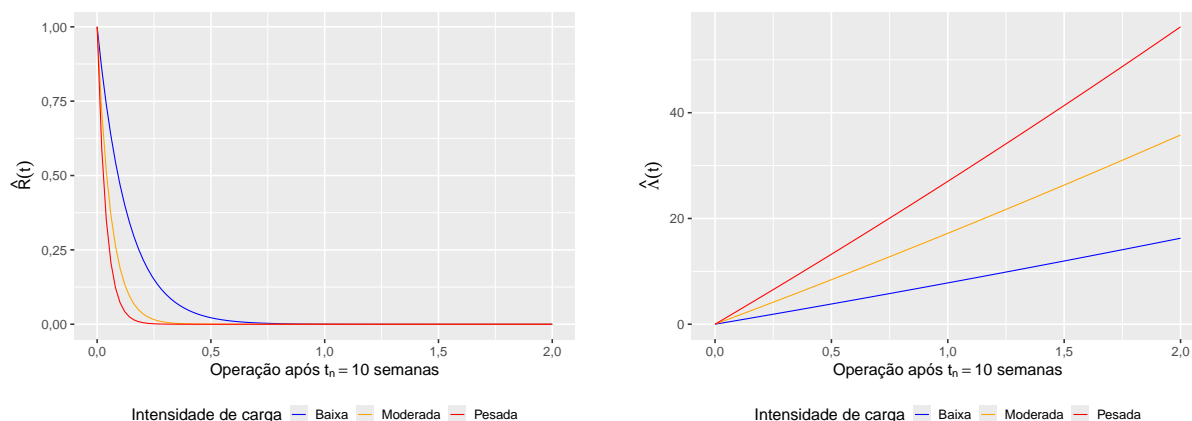


Figura 37 – Previsão da intensidade acumulada condicionada e da confiabilidade condicionada até o tempo de 2 semanas.

A previsão da confiabilidade condicionada ao longo do tempo foi realizada para diferentes níveis de carga em cada um dos 9 motores analisados, conforme ilustrado na Figura 38. Essa informação descreve a probabilidade de um dispositivo continuar operando sem falhas após um tempo t , dado que já funcionou até $t_n = 10$ semanas. Observa-se que, inicialmente, a

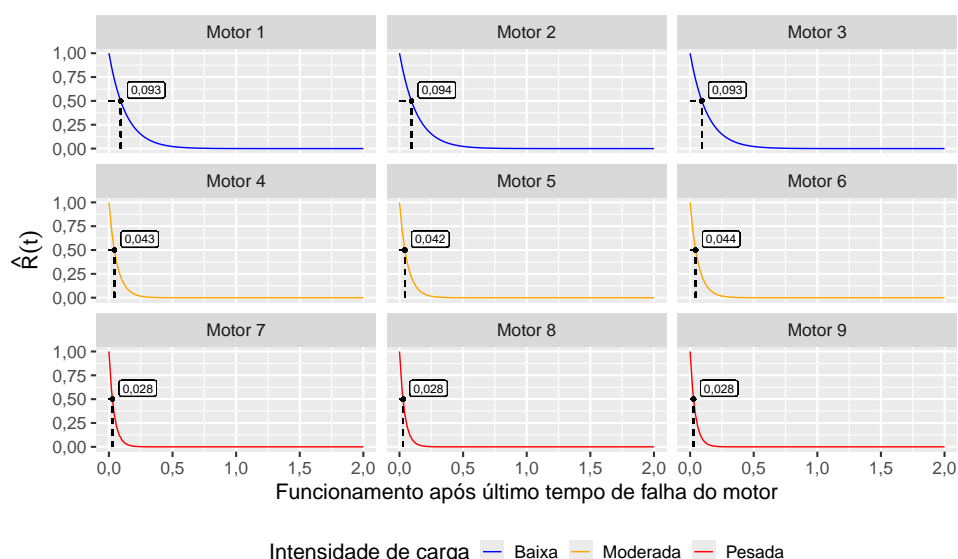


Figura 38 – Confiabilidade da próxima falha de cada motor prevista pelo modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada.

confiabilidade é alta em todos os níveis de aceleração, mas decai de forma mais acentuada à medida que o tempo avança, especialmente sob condições de maior estresse. Esses resultados

destacam o impacto significativo das cargas na redução do tempo de vida útil esperado e reforçam a importância de ajustá-las para otimizar o desempenho e a durabilidade do sistema.

5.2.3 Aplicação 2: Eficácia Térmica de Aditivos de Extrema Pressão em Condições Operacionais Variadas

Em aplicações industriais e automotivas, especialmente aquelas que envolvem componentes submetidos a atrito intenso, como rolamentos e engrenagens, há um interesse crescente em entender o desempenho de lubrificantes contendo aditivos de extrema pressão (E.P.) termoativáveis. Esses aditivos são projetados para atuar sob variações de temperatura, promovendo proteção contra desgaste em condições severas. No entanto, sua eficácia não segue necessariamente uma relação monotônica com a temperatura: em níveis baixos, a ativação é limitada; em temperaturas intermediárias, reduzem significativamente o atrito; e, em temperaturas muito elevadas, podem se degradar ou formar camadas que dificultam seu funcionamento (STACHOWIAK; BATCHELOR, 2025).

Neste contexto, foi simulado um experimento com o objetivo de investigar o comportamento de falhas em componentes mecânicos lubrificadas com óleos contendo aditivos de extrema pressão termoativáveis, sob diferentes condições operacionais. Utilizaram-se 15 motores industriais idênticos, divididos em três grupos conforme a intensidade de uso, que indiretamente representa a temperatura de operação. Os níveis de intensidade foram definidos como: baixa (operação em condições moderadas de 40°C), média (região de ativação eficiente dos aditivos, a 65°C) e alta (operação severa de 120°C, com possível degradação dos aditivos). Cada motor foi monitorado ao longo de cinco dias consecutivos, sendo registradas as falhas ocorridas em cada unidade nesse período.

A Figura 39 apresenta a distribuição temporal das falhas por motor, de acordo com os níveis de intensidade de uso. Observa-se que os motores sob intensidade média apresentam um menor acúmulo de falhas ao longo dos dias, sugerindo um desempenho ótimo dos aditivos nessa faixa de temperatura. Por outro lado, os grupos sob intensidade baixa e alta apresentam uma maior frequência de falhas, indicando a ineficiência da lubrificação em ambas as extremidades da faixa térmica.

A Figura 40 apresenta o comportamento empírico do acúmulo de falhas ao longo de cinco dias de operação, para 15 motores submetidos a três níveis de temperatura. Os resultados mostram que os grupos classificados com temperaturas baixa e alta apresentam acúmulo de falhas significativamente maior em comparação ao grupo com temperatura média. Esse comportamento indica que a intensificação da taxa de falhas ao longo do tempo apresenta um padrão não monotônico. Nota-se, ainda, que à medida que os dias avançam, a separação entre as curvas médias se amplia, reforçando o impacto do estresse térmico sobre a confiabilidade dos motores. As áreas sombreadas sobre as curvas médias, que representam a variabilidade empírica entre

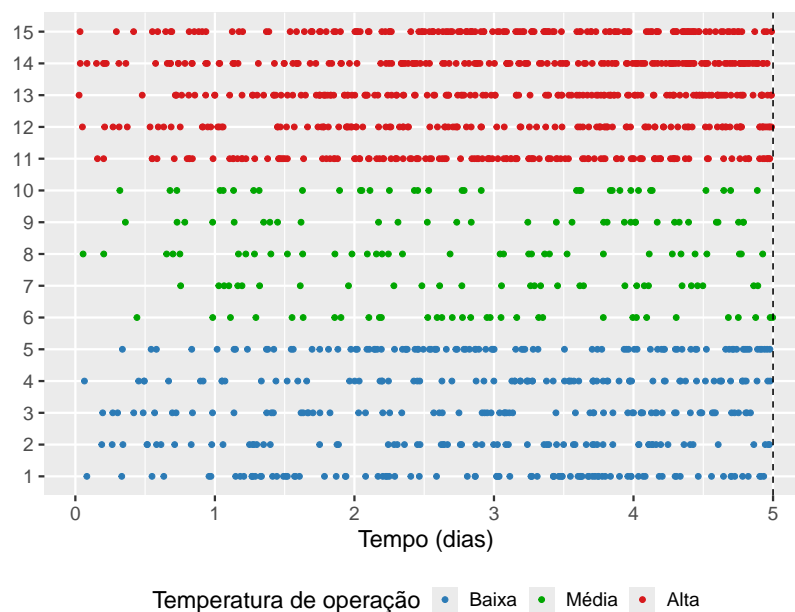


Figura 39 – Descrição das falhas observadas, referentes a cada um dos 15 motores e seu nível de temperatura de operação ao longo de 5 dias.

as unidades dentro de cada grupo, confirmam a consistência dessa diferença entre os níveis de temperatura avaliados.

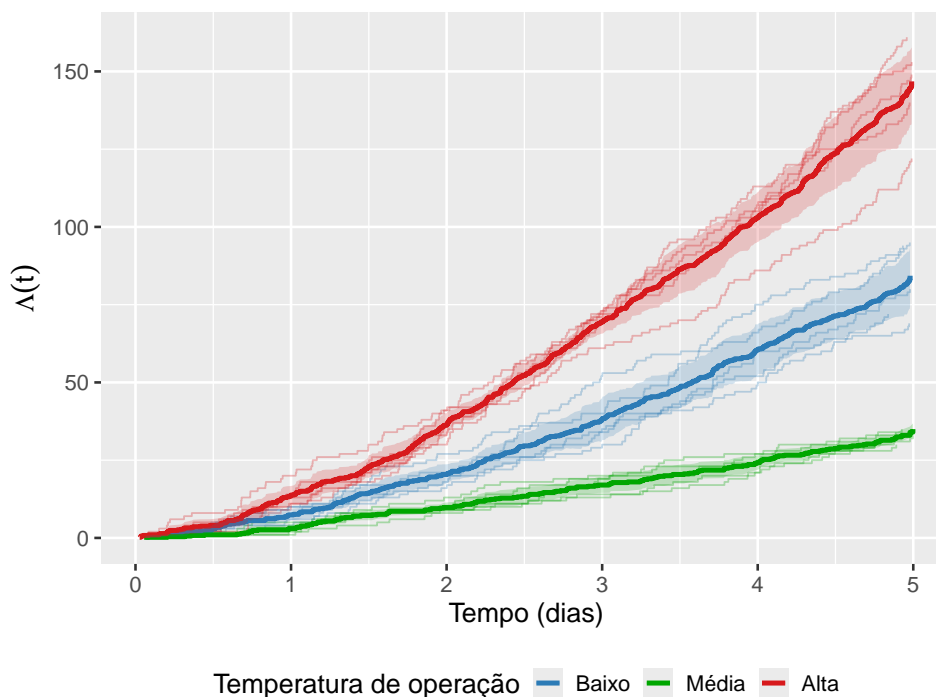


Figura 40 – O acúmulo de falhas observado em 15 motores, agrupados em três níveis de temperatura de operação, com a linha em destaque representando o acúmulo médio de falhas.

As estimativas dos parâmetros para o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada estão apresentadas na Tabela 14. Observa-se que o intercepto $\hat{\beta}_0 = 1,980$ apresenta

erro padrão de 0,0894, com intervalo de confiança de 95% entre 1,800 e 2,150. O coeficiente $\hat{\beta}_1 = -0,287$ apresenta erro padrão reduzido (0,00775) e, conseqüentemente, um intervalo de confiança estreito, de $-0,302$ a $-0,272$, o que indica alta precisão na estimação desse parâmetro. Por fim, observa-se a estimativa de $\hat{\kappa} = 1,470$, com erro padrão de 0,0378 e intervalo de confiança entre 1,390 e 1,540. Esses resultados indicam que os parâmetros estimados são estatisticamente significativos.

Tabela 14 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC (95%)	
				Inferior	Superior
Eyring Exponenciada	β_0	1,980	0,0894	1,800	2,150
	β_1	-0,287	0,00775	-0,302	-0,272
	κ	1,470	0,0378	1,390	1,540

A [Figura 41](#) apresenta a função acumulada média estimada pelo modelo Eyring Exponenciada, sobreposta às curvas empíricas de falhas de cada motor. Observa-se que o modelo ajusta-se bem aos dados, reproduzindo o padrão crescente do acúmulo de falhas e diferenciando adequadamente os três níveis de temperatura, com maior inclinação da curva para temperaturas mais elevadas.

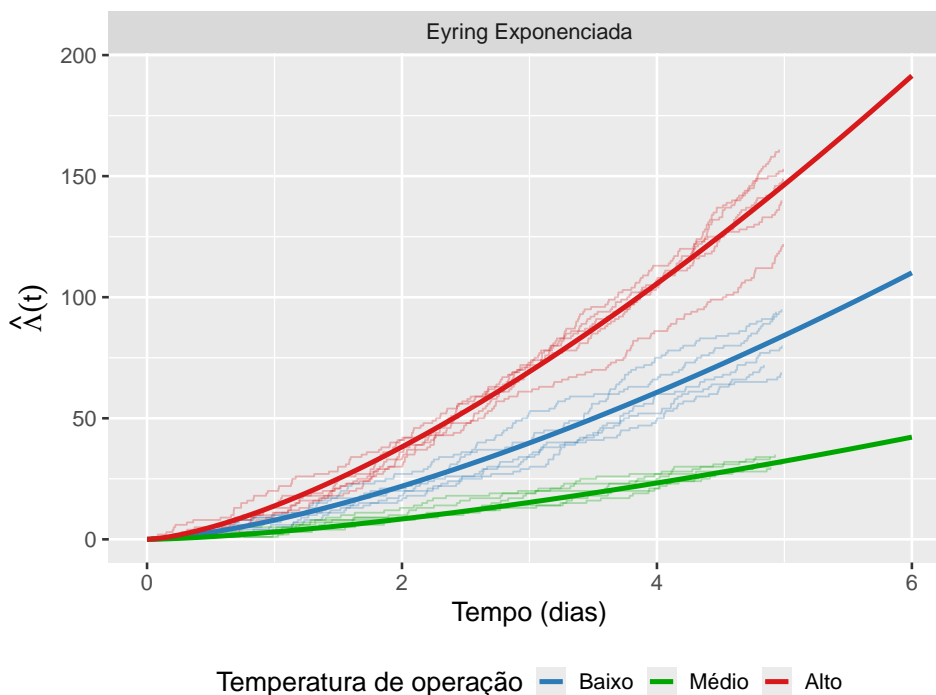


Figura 41 – Função acumulada média estimada para o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada, sobreposta às curvas do número médio acumulado observado de falhas para cada motor.

A [Figura 42](#) compara a função acumulada média empírica com a estimada pelo modelo

Eyring Exponenciada. A proximidade dos pontos à linha de identidade indica uma boa aderência do modelo aos dados, sugerindo que ele representa adequadamente o comportamento acumulado das falhas ao longo do tempo. Isso reforça a confiabilidade das estimativas e a adequação do modelo para análises de confiabilidade.

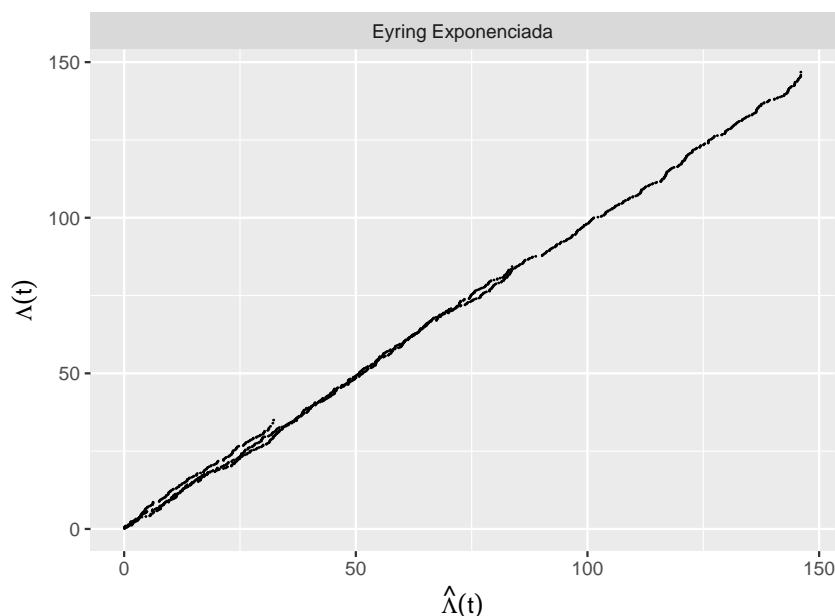


Figura 42 – Função acumulada média empírica em função da função acumulada média estimada, apresentada para o modelo de tempo de falha Eyring Exponenciada.

Os resultados obtidos para os parâmetros do modelo ajustado permitem interpretar o efeito da temperatura de operação sobre a taxa de falha dos motores. Os valores estimados para os parâmetros β_0 , β_1 e κ , juntamente com suas interpretações, são os seguintes:

- $\hat{\beta}_0 = 1,980$: Esse valor estimado corresponde ao intercepto da função de aceleração, representando o valor inicial da função quando a variável de aceleração está em seu nível de referência ou na ausência de efeito.
- $\hat{\beta}_1 = -0,287$: Esse valor estimado indica que a função de aceleração apresenta um comportamento não monotônico. Inicialmente, com o aumento da temperatura, a influência sobre o tempo de falha diminui devido ao sinal negativo do coeficiente. Em seguida, essa influência atinge um ponto mínimo e começa a aumentar, aproximando-se de um valor constante para níveis maiores de temperatura.

A [Figura 43](#) mostra a função de aceleração estimada $\hat{g}(x)$ para o modelo Eyring Exponenciada, evidenciando a relação entre a temperatura de operação e o efeito sobre a taxa de falha do sistema. O comportamento não linear da curva reflete a sensibilidade térmica capturada pelo modelo, com menor efeito acelerador em temperaturas intermediárias, o que é coerente com os resultados observados na função acumulada média estimada pelo modelo.

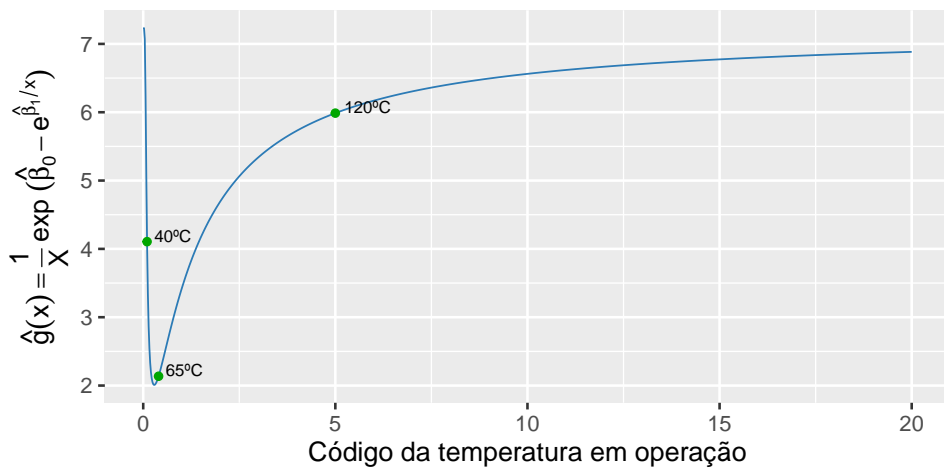


Figura 43 – Representação da função de aceleração estimada $\hat{g}(x)$ para o modelo Eyring Exponenciada, ilustrando a relação entre os níveis de temperatura em operação e o impacto na taxa de falha do sistema.

- $\hat{\kappa} = 1,470$: Essa estimativa indica que a taxa de falha tende a crescer ao longo do tempo, refletindo o desgaste acumulado dos motores em operação contínua. Esse padrão é particularmente evidente sob condições severas de uso, sugerindo que os motores apresentam um aumento gradual na probabilidade de falha à medida que se aproximam do fim de sua vida útil.

A Figura 44 apresenta as previsões do modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada, destacando o comportamento da confiabilidade e da intensidade acumulada dos motores ao longo do tempo, considerando o histórico de falhas. A confiabilidade condicionada representa a probabilidade de um dispositivo continuar operando sem falhas após um tempo t , dado que já funcionou até $t_n = 5$ dias.

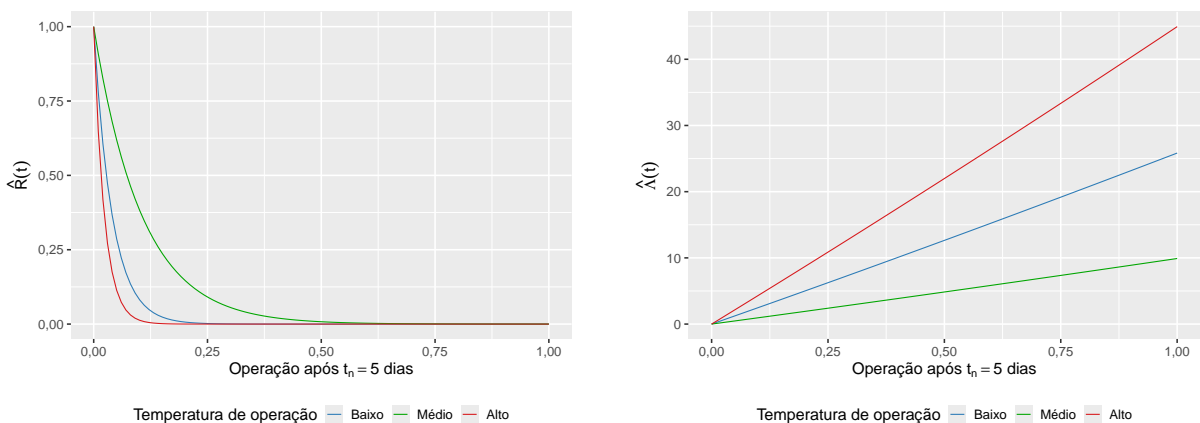


Figura 44 – Previsão da intensidade acumulada condicionada e da confiabilidade condicionada até 1 dia.

A previsão da confiabilidade condicionada ao longo do tempo foi realizada para diferentes níveis de carga em cada um dos 15 motores analisados, conforme apresentado na Figura 45. Essa

informação descreve a probabilidade de um dispositivo continuar operando sem falhas após um tempo t , dado que já funcionou até $t_n = 5$ dias. Observa-se que, inicialmente, a confiabilidade é alta em todos os níveis de aceleração, mas decresce de forma mais acentuada à medida que o tempo avança, especialmente sob condições de estresse baixo e alto. Esses resultados destacam o

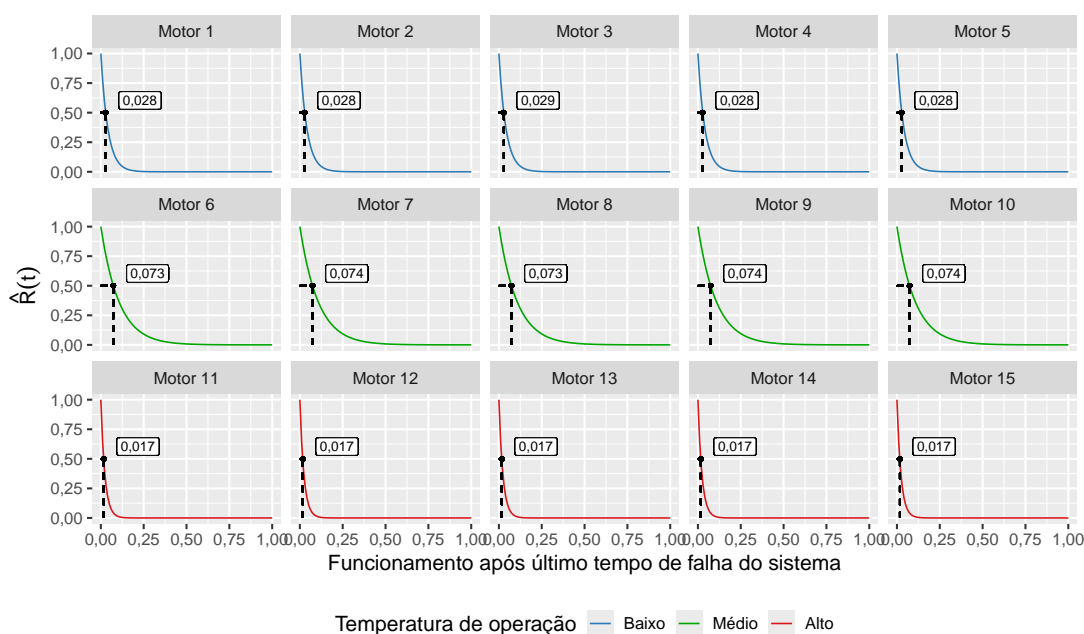


Figura 45 – Confiabilidade da próxima falha de cada motor prevista pelo modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada.

impacto significativo das temperaturas na redução do tempo de vida útil esperado e reforçam a importância de ajustá-las para otimizar o desempenho e a durabilidade dos motores.

5.3 Observações Finais

Este capítulo traz contribuições para os testes de vida acelerados em sistemas reparáveis ao ampliar as possibilidades de modelagem dos efeitos do estresse, por meio da proposição das funções de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada. Ambos os modelos propostos foram aplicados ao contexto de múltiplos sistemas reparáveis sob a hipótese de reparo mínimo. Para a função de intensidade de base, foi assumido o PLP. Essas novas funções de aceleração proporcionam flexibilidade na modelagem do comportamento de falhas ao incluir covariáveis que podem tanto acelerar quanto desacelerar o processo de falha. Dessa forma, elas oferecem uma representação distinta em comparação com outros fatores de aceleração já descritos na literatura. Os parâmetros dos modelos foram estimados utilizando o método de máxima verossimilhança, com a aplicação de métodos numéricos para a obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança. Além disso, foram calculados os intervalos de confiança assintóticos para esses estimadores. A validação dos modelos foi realizada por meio de um estudo de simulação, cujos resultados indicaram desempenho satisfatório em termos das propriedades assintóticas dos

estimadores. Esses resultados indicam que os modelos desenvolvidos são adequados para prever falhas em sistemas reparáveis. A aplicabilidade prática dos modelos foi apresentada via conjunto de dados simulados reforçando a relevância dos modelos no contexto prático.

MODELOS ACELERADOS COM FRAGILIDADE GAMA PARA SISTEMAS REPARÁVEIS COM NOVOS FUNÇÕES DE ACELERAÇÃO

O propósito deste capítulo é propor uma extensão direta dos modelos apresentados no [Capítulo 5](#). Nesse sentido, o intuito é ampliar o escopo da modelagem apresentada, incorporando o termo de fragilidade gama aos modelos de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada. A inclusão desse termo de fragilidade permite quantificar variações não observadas entre unidades submetidas a estresse, o que é particularmente relevante em estudos de confiabilidade de sistemas complexos.

A extensão proposta contempla a representação de múltiplos sistemas reparáveis submetidos a condições de estresse, todos modelados sob a suposição de reparo mínimo. Assume-se que, após cada falha, o sistema retorna ao estado imediatamente anterior, e a dinâmica da recorrência de falhas ao longo do tempo é descrita por meio de um NHPP.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: A [Seção 6.1](#) introduz a relevância dessas funções na modelagem do tempo de falha acelerado e descreve as funções propostas. Em seguida, essas funções são incorporadas à estrutura de modelos com fragilidade gama, considerando múltiplos sistemas reparáveis. Na sequência, são apresentados os métodos estatísticos de estimação adotados. A [Seção 6.2](#) é dedicada à avaliação numérica do desempenho dos modelos. Inicialmente, realiza-se um estudo de simulação para analisar o comportamento dos estimadores sob diferentes cenários. Por fim, a [Seção 6.3](#) ilustra a aplicação prática dos modelos por meio da análise de dados simulados, destacando seu potencial de aplicação em situações reais.

6.1 Novas Funções de Aceleração para Sistemas Reparáveis com Fragilidade

Com o intuito de aumentar a flexibilidade na modelagem de diferentes padrões de falha e de resposta ao estresse em testes acelerados, buscou-se aprimorar a adequação dos modelos a diferentes cenários, inclusive àqueles que envolvem comportamentos não monotônicos. Nesse sentido, conforme discutido no [Capítulo 5](#), foram propostas duas novas funções de aceleração, idealizadas para capturar tais comportamentos e proporcionar maior aderência aos dados observados.

No caso específico de uma única covariável, essas funções, já apresentadas no [Capítulo 5](#), são denominadas:

- Exponencial Exponenciada:

$$g_1(x) = \exp(\beta_0 - \exp(-\beta_1 x))$$

- Eyring Exponenciada:

$$g_2(x) = \exp\left(\beta_0 - \frac{1}{x} \exp\left(\frac{\beta_1}{x}\right)\right)$$

A [Figura 46](#) ilustra o comportamento das duas funções de aceleração propostas para diferentes valores de $\beta_1 = (-3; -1,5; -0,6; 0; 0,6; 1,5; 3)$. Observa-se que as funções de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada apresentam dinâmicas distintas para os mesmos valores de β_1 . Dependendo do valor de β_1 , a função pode assumir comportamento crescente, decrescente, unimodal ou constante, o que impacta diretamente a intensidade de falha e o tempo em resposta às variações no nível de aceleração.

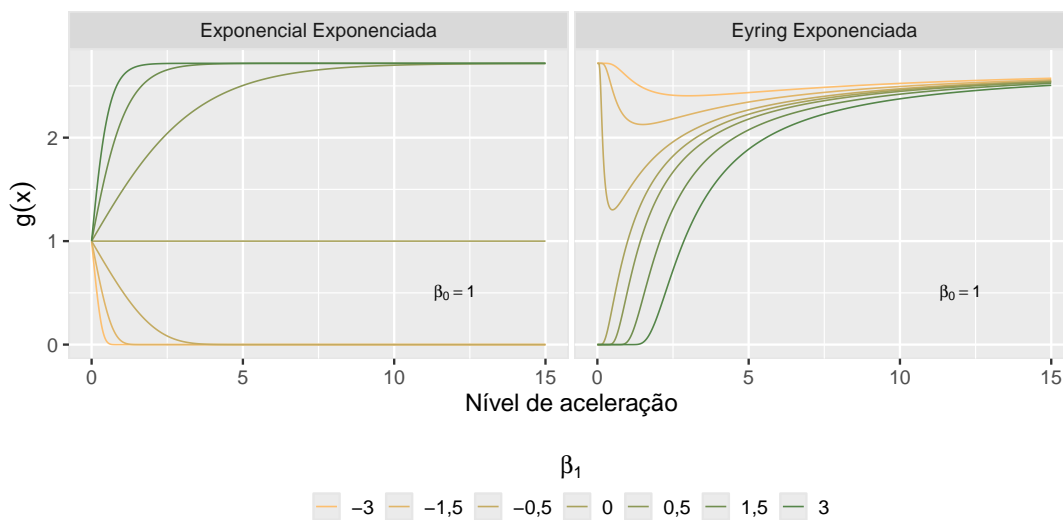


Figura 46 – Representação das funções de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada considerando diferentes valores do parâmetro β_1 , com β_0 fixo.

Observando o comportamento das funções Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada em relação aos níveis de aceleração e aos diferentes valores de β_1 na [Figura 46](#), identificam-se os padrões descritos na [Tabela 15](#):

Tabela 15 – Resumo das influências das funções Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada em diferentes condições de β_1 .

Função de Aceleração	Condição	Comportamento
Exponencial Exponenciada	$\beta_1 = 0$	Influência constante, indicando ausência de efeito acelerador ou retardador.
	$\beta_1 < 0$	Influência diminui progressivamente com o aumento da aceleração, reduzindo o tempo de falha.
	$\beta_1 > 0$	Influência cresce e estabiliza próximo a um valor constante, mantendo o tempo de falha elevado.
Eyring Exponenciada	$\beta_1 \geq 0$	Influência cresce a partir de zero e se estabiliza em altos níveis de aceleração.
	$\beta_1 < 0$	Influência diminui inicialmente, atinge um mínimo e cresce novamente, estabilizando-se em um valor constante.

Esses padrões indicam que cada função de aceleração se ajusta melhor a diferentes contextos, dependendo da dinâmica específica de falha e das condições operacionais dos sistemas.

Essa metodologia de modelagem do tempo de falha acelerado, utilizando as funções de aceleração sugeridas, introduz uma nova forma de representar o comportamento do sistema sob condições de estresse. Com essa abordagem, é possível não apenas identificar padrões de falha, mas também observar efeitos de aceleração, permitindo uma adaptação às variações presentes nos dados. Essa modelagem possibilita a adaptação do modelo às particularidades do sistema, simplificando tanto a análise quanto a interpretação dos resultados. Contudo, é importante que a escolha da função de aceleração seja fundamentada, considerando as características específicas do sistema e a natureza dos dados disponíveis.

Com desenvolvimento teórico análogo ao das [subseções 3.1.1 e 4.2.1](#), apresentam-se, respectivamente, o Modelo de Tempo de Falha Acelerado Exponencial Exponenciada com Fragilidade Gama e o Modelo de Tempo de Falha Acelerado Eyring Exponenciada com Fragilidade Gama.

6.1.1 Modelo de Tempo de Falha Acelerado Exponencial Exponenciada com Fragilidade Gama

Ao incorporar a função de aceleração Exponencial Exponenciada ao modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade gama, obtém-se um novo modelo, denominado Modelo de Tempo de Falha Acelerado Exponencial Exponenciada com Fragilidade Gama, com função de intensidade condicional definida por

$$\lambda_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \frac{\lambda_0 (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j}) g_1(\mathbf{x}_s)}{1 + \alpha \Lambda_0 (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})},$$

sendo $\lambda_0(\cdot)$ a função de intensidade de linha de base (ver [Subseção 2.1.2](#)), que caracteriza o padrão temporal de falha em condições normais; a função de aceleração exponencial exponenciada $g_1(\mathbf{x}_s)$, responsável por descrever o impacto das covariáveis \mathbf{x}_s no processo de aceleração do tempo de falha; e o parâmetro de fragilidade α , que ajusta o efeito da heterogeneidade.

A função de intensidade acumulada correspondente é expressa como:

$$\Lambda_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \frac{1}{\alpha} \log (1 + \alpha \Lambda_0 (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})),$$

onde $\Lambda_0(\cdot)$ representa a intensidade acumulada de linha de base (ver [Subseção 2.1.2](#)). Esse termo incorpora o impacto acumulado das covariáveis e a estrutura multiplicativa do modelo no tempo ajustado.

E a função de confiabilidade é definida por

$$R_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = (1 + \alpha \Lambda_0 (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j}))^{-1/\alpha},$$

que consiste em expressar a confiabilidade do sistema s até o tempo $t_{s,j}$, dado o vetor de covariáveis \mathbf{x}_s .

Pensando na capacidade preditiva, pode-se calcular a confiabilidade condicional até um determinado tempo futuro. Com base nas estimativas de máxima verossimilhança e considerando t_{n_s} como o último tempo de falha observado do sistema, a confiabilidade de não ocorrência de falhas no intervalo $(t_{n_s}, t_{n_s+1}]$ é expressa por:

$$R_s(t_{n_s+1} | \mathbf{x}, t_{n_s}) = \exp \{ \Lambda_s(t_{n_s} | \mathbf{x}_s) - \Lambda_s(t_{n_s+1} + t_{n_s} | \mathbf{x}_s) \}, \tag{6.1}$$

em que $\Lambda(t | \mathbf{x}_s)$ representa a função de intensidade acumulada condicional ao vetor de covariáveis \mathbf{x}_s .

6.1.2 Modelo de Tempo de Falha Acelerado Eyring Exponenciada com Fragilidade Gama

Incorporando a função de aceleração Eyring Exponenciada ao modelo de tempo de falha acelerado com fragilidade gama, tem-se um novo modelo, denominado modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, cuja função de intensidade condicional é definida por:

$$\lambda_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \frac{\lambda_0 (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j}) g_2(\mathbf{x}_s)}{1 + \alpha \Lambda_0 (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})},$$

com $\lambda_0(\cdot)$ a função de intensidade de linha de base (ver [Subseção 2.1.2](#)). A função de aceleração Eyring Exponenciada $g_2(\mathbf{x}_s)$ descreve o impacto das covariáveis \mathbf{x}_s no processo de aceleração do tempo de falha, e α é o parâmetro de fragilidade, responsável por quantificar o efeito não observado.

A função de intensidade acumulada correspondente é expressa por:

$$\Lambda_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \frac{1}{\alpha} \log \left(1 + \alpha \Lambda_0 (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j}) \right),$$

em que $\Lambda_0(\cdot)$ é a intensidade acumulada de linha de base (ver [Subseção 2.1.2](#)). E a função de confiabilidade é definida por

$$R_s(t_{s,j} | \mathbf{x}_s) = \left(1 + \alpha \Lambda_0 (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j}) \right)^{-1/\alpha}.$$

Conforme já apresentado na equação (6.1), utiliza-se a confiabilidade condicional, conceito análogo ao descrito na seção anterior, para prever o próximo tempo de falha.

6.1.3 Estimação

Para modelar os tempos de falha desses sistemas, assume-se que estes seguem um processo de reparo mínimo, onde o tempo até a j -ésima falha do s -ésimo sistema é denotado por $t_{s,j}$, com $j = 1, \dots, n_s$ e $s = 1, \dots, S$. O truncamento no tempo, τ_s , indica que os sistemas foram monitorados até esse instante, ou seja, os tempos de falha observados satisfazem $t_{s,j} \leq \tau_s$. Além disso, assume-se que a função de intensidade da linha de base segue uma distribuição de PLP, conforme discutido na [Subseção 2.1.2](#), com $\gamma = 1$, pois foi identificado que o intercepto β_0 está associado ao parâmetro de locação γ . O problema de identificabilidade, identificado e resolvido, refere-se aos parâmetros de escala e não ao parâmetro de aceleração, garantindo a consistência com o [Capítulo 3](#).

Desta forma na, [Tabela 16](#), as seguintes funções de intensidade e intensidade acumulada paramétrica com as novas funções de aceleração são dadas por:

Tabela 16 – Funções de intensidade ($\lambda_s(t)$) e intensidade acumulada ($\Lambda_s(t)$) para os modelos Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada.

Modelo	$\lambda_s(t_{s,j} \mathbf{x})$	$\Lambda_s(t_{s,j} \mathbf{x})$
Exponencial Exponenciada	$\frac{(g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^{k-1} g_1(\mathbf{x}_s)}{1 + \alpha (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^k}$	$\frac{1}{\alpha} \log \left(1 + \alpha (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^k \right)$
Eyring Exponenciada	$\frac{(g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^{k-1} g_2(\mathbf{x}_s)}{1 + \alpha (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^k}$	$\frac{1}{\alpha} \log \left(1 + \alpha (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^k \right)$

As estimativas dos modelos propostos foram obtidas usando-se o método de máxima verossimilhança, considerando-se as funções de intensidades apresentadas na [Tabela 16](#) para

escrever as funções de verossimilhança (log verossimilhança), considerando todas as suposições apresentadas anteriormente.

A função de verossimilhança para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade Gama é dada por:

$$L(\Theta) = \prod_{s=1}^S \left\{ \left[\prod_{j=1}^{n_s} \frac{(g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^{\kappa-1} g_1(\mathbf{x}_s)}{1 + \alpha (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^\kappa} \right] e^{\left\{ -\frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^\kappa) \right\}} \right\}.$$

E a função log-verossimilhança definida por

$$l(\Theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \sum_{j=1}^{n_s} \log \left(\frac{(g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^{\kappa-1} g_1(\mathbf{x}_s)}{1 + \alpha (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^\kappa} \right) - \sum_{j=1}^{n_s} \log \left(\frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha (g_1(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^\kappa) \right) \right\}.$$

A função de verossimilhança para o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade Gama é expressa por:

$$L(\Theta) = \prod_{s=1}^S \left\{ \left[\prod_{j=1}^{n_s} \frac{(g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^{\kappa-1} g_2(\mathbf{x}_s)}{1 + \alpha (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^\kappa} \right] e^{\left\{ -\frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^\kappa) \right\}} \right\}.$$

Consequentemente, a função log-verossimilhança é definida por:

$$l(\Theta) = \sum_{s=1}^S \left\{ \sum_{j=1}^{n_s} \log \left(\frac{(g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^{\kappa-1} g_2(\mathbf{x}_s)}{1 + \alpha (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^\kappa} \right) - \sum_{j=1}^{n_s} \log \left(\frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha (g_2(\mathbf{x}_s) t_{s,j})^\kappa) \right) \right\}.$$

O estimador dos parâmetros, denotado por $\hat{\Theta}$, é obtido pela maximização da função de log-verossimilhança associada a cada modelo. Quando a função possui uma forma fechada, a maximização pode ser realizada diretamente. Caso contrário, utilizam-se métodos iterativos de otimização, que também podem ser aplicados como alternativa eficiente, mesmo quando a forma fechada está disponível. Sob condições de regularidade, o estimador de máxima verossimilhança é consistente e segue uma distribuição normal assintótica, dada por:

$$\hat{\Theta} \xrightarrow{D} N_{(2+p)}(\Theta, I^{-1}(\Theta)),$$

com $I(\Theta)$ sendo a matriz de informação de Fisher esperada (LEHMANN; CASELLA, 2006). Quando o cálculo direto da matriz de informação de Fisher é complexo, pode-se aproximá-la pela matriz Hessiana, que é composta pela segunda derivada da log-verossimilhança em relação aos parâmetros do modelo, avaliadas nos valores estimados. A matriz Hessiana H é dada por:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 l(\Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta = \hat{\theta}}.$$

A matriz de informação de Fisher aproximada pode então ser expressa como $I(\Theta) \approx E[-H]$ (MILLAR, 2011). Neste estudo, apesar da função de log-verossimilhança ter forma fechada, optou-se por estimar os parâmetros utilizando a função `optim()` do R (R Core Team, 2024) com o método L-BFGS-B, pela sua simplicidade computacional.

6.2 Avaliação Numérica

A validação dos modelos propostos envolve duas etapas numéricas: primeiro, um estudo de simulação para avaliar o desempenho dos modelos em cenários controlados; em seguida, a análise da aplicabilidade prática desses modelos utilizando um conjunto de dados simulado.

6.2.1 Estudo de Simulação

Estudos de simulação são ferramentas utilizadas para validar modelos estatísticos, especialmente quando análises diretas são inviáveis. Como destacado por [Carsey e Harden \(2013\)](#), as simulações de Monte Carlo permitem avaliar sistematicamente propriedades como viés e eficiência sob diferentes condições. Assim, a abordagem é empregada para validar os dois modelos propostos, investigando seu desempenho, limitações e sua robustez antes de aplicá-los a dados reais. Para isso, implementa-se um processo de geração de dados, descrito no [Algoritmo 4](#).

Algoritmo 4 – Gerador de números aleatórios do modelo proposto

```

1: Entrada:
2:  $S$  ▷ Número de sistemas
3:  $\mathbf{n} = \{(n_1, \dots, n_S)\}$  ▷ Número de falhas por sistema
4:  $\mathbf{x} = \left\{ \underbrace{(x_1, \dots, x_1)}_{S/3}, \underbrace{(x_2, \dots, x_2)}_{S/3}, \underbrace{(x_3, \dots, x_3)}_{S/3} \right\}$ 
5:  $\boldsymbol{\theta} = \{(\beta_0, \beta, \kappa, \gamma, \alpha)\}$ 
6: Saída:  $\{(\mathbf{t}, \mathbf{S}, \mathbf{x})\}$ 
7: Procedimento:
8: Defina  $F_{D|\mathbf{x}, t_n}(d | \mathbf{x}, t_n) = 1 - \exp\{-\Lambda(t + t_n | \mathbf{x}) + \Lambda(t_n | \mathbf{x})\}$ 
9: para  $s \leftarrow 1$  to  $S$  faça
10:   para  $j \leftarrow 1$  to  $n_s$  faça
11:      $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$  ▷ Variável auxiliar
12:     Resolva  $F_{D|\mathbf{x}, t_{s,j-1}}(d | \mathbf{x}, t_{s,j-1}) - U = 0$  para  $d$ 
13:      $t_{s,j} = t_{s,j-1} + d$  ▷ Determine o  $s$ -ésimo tempo de falha
14:   fim para
15: fim para

```

Esse procedimento permitiu a geração de conjuntos de dados simulados sob diferentes condições, viabilizando a análise do comportamento dos modelos e a avaliação de sua adequação em distintos cenários. Para conduzir essa avaliação, foi definido um desenho experimental composto por 180 cenários, considerando as seguintes combinações:

- **Configurações do experimento:** número esperado de falhas $E(N) = (10, 25, 50, 75, 100)$; número de sistemas observados $S = (6, 18, 27)$; tempo máximo de observação τ fixado em 300 horas;
- **Definição dos parâmetros do modelo:** parâmetro de fragilidade $\alpha = (0, 2; 0, 6; 1, 1)$; coeficientes associados aos fatores de aceleração $\beta_0 = 1$ e $\beta_1 = (-0, 2; 0, 2)$; parâmetro de

forma κ , cujos valores não foram fixados previamente nos cenários, sendo determinados durante a geração dos conjuntos de dados com base nos parâmetros configurados de τ , no grau de aceleração e em outras características específicas de cada cenário.

- **Especificações do modelo:** intensidade de falha de base baseada no modelo PLP; distribuição de fragilidade Gama; fatores de aceleração Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada.

O próximo passo consistiu em implementar a simulação, fixando um total de 1.000 réplicas de Monte Carlo, utilizando o *software* R (R Core Team, 2024). Para avaliar o desempenho dos estimadores, foram considerados três critérios principais: Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE, do inglês *Mean Absolute Percentage Error*); Raiz-Quadrada do Erro Quadrático Médio Padronizada (SRMSE, do inglês *Standardized Root Mean Square Error*) e Probabilidade de Cobertura de 95% (CP). Esses critérios permitiram uma análise da precisão e da confiabilidade dos estimadores em diferentes cenários simulados.

A seguir, descrevem-se as métricas utilizadas, acompanhadas dos resultados obtidos neste estudo, o que permite uma avaliação do desempenho dos estimadores.

- **MAPE:** É uma métrica utilizada para avaliar a precisão das estimativas, medindo o desvio percentual absoluto médio entre os valores estimados e os valores reais. Sua fórmula é dada por:

$$\text{MAPE}(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left| \frac{\hat{\theta}_i^{(m)} - \theta_i}{\theta_i} \right|,$$

com θ_i representando o i -ésimo componente do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \beta_0, \beta_1, \alpha)$, e $\hat{\theta}_i^{(m)}$ sendo a estimativa correspondente obtida na m -ésima réplica de Monte Carlo. Ao utilizar o MAPE, busca-se obter valores próximos de zero, o que indica uma alta capacidade de estimativa do modelo, com baixa discrepância entre os valores estimados ($\hat{\theta}_i$) e os valores reais (θ_i).

A Figura 47 apresenta os resultados da métrica MAPE em função do número esperado de falhas, $E(N)$, para os modelos de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada com fragilidade gama, avaliados nos diferentes cenários. Observa-se que os valores de MAPE diminuem progressivamente em direção a zero conforme $E(N)$ aumenta, independentemente do cenário simulado. Isso indica que as estimativas apresentam um erro percentual absoluto médio pequeno em relação aos valores reais. Além disso, a redução do MAPE com o aumento do número de sistemas destaca uma melhora na precisão das estimativas, evidenciando que a coleta de mais informações contribui para resultados mais precisos.

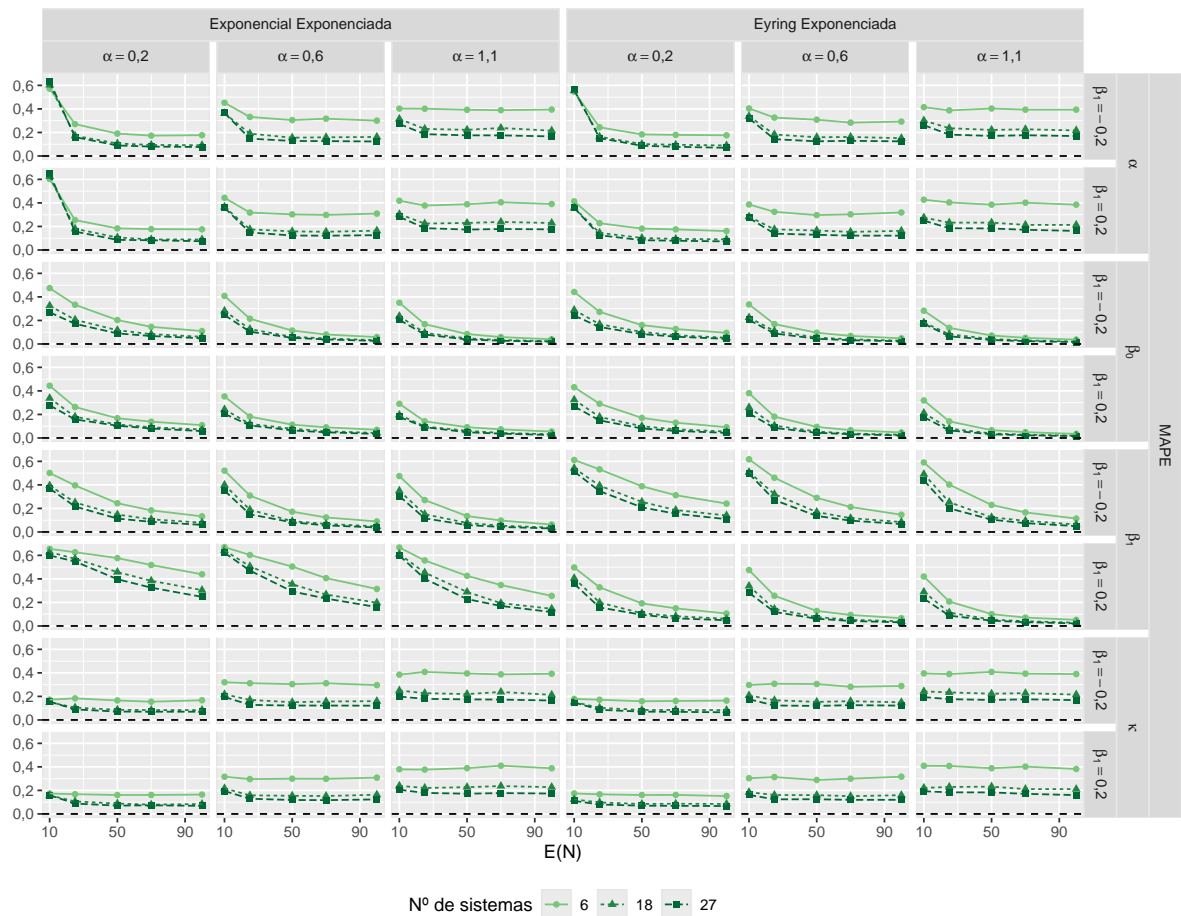


Figura 47 – Resultados dos MAPE para os modelos de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando 1.000 replicações de Monte Carlo e diferentes cenários.

- **SRMSE:** Métrica utilizada para avaliar a qualidade das estimativas dos parâmetros em termos de precisão relativa, considerando a dispersão das estimativas em relação aos valores reais. Ela é definida como:

$$\text{SRMSE}(\hat{\theta}_i) = \frac{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\theta}_i^{(m)} - \theta_i)^2}}{\text{SE}(\hat{\theta}_i)},$$

com θ_i representando o i -ésimo componente do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \gamma, \beta_1, \alpha)$, $\hat{\theta}_i^{(m)}$ sendo a estimativa correspondente obtida na m -ésima réplica de Monte Carlo, a qual foi fixada em M repetições e $\text{SE}(\hat{\theta}_i)$ é o desvio padrão das estimativas do i -ésimo parâmetro. Ela calcula a raiz do erro quadrático médio (RMSE) das estimativas e a normaliza pelo desvio padrão das mesmas. Busca-se valores próximos de 1, o que indica estimativas com boa precisão e uma variabilidade nas estimativas consistente com a dispersão esperada em torno do valor verdadeiro.

Observa-se, na [Figura 48](#), que os resultados obtidos convergem a uma medida estável à medida que aumenta o número esperado de falhas. Isso indica que as estimativas tornam-se

progressivamente mais consistentes com a variabilidade das mesmas em relação ao valor real dos parâmetros, evidenciando a robustez dos estimadores.

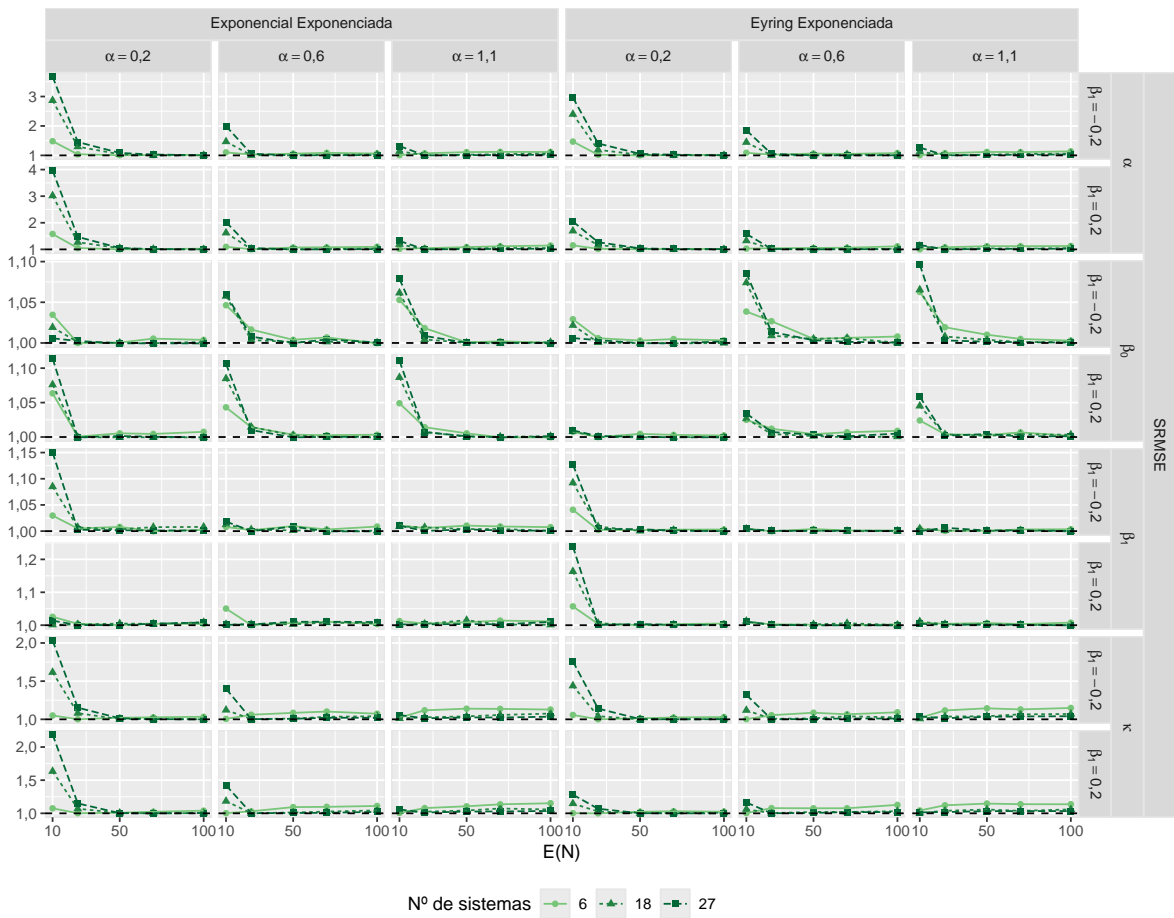


Figura 48 – Resultados dos SRMSE para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama e o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando 1.000 replicações de Monte Carlo e diferentes cenários.

- **CP de 0,95:** Métrica utilizada para avaliar a confiabilidade dos intervalos de confiança associados aos estimadores de máxima verossimilhança, definida como:

$$CP(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I(\theta_i \in (a_i^{(m)}, b_i^{(m)})),$$

em que $a_i^{(m)} = \hat{\theta}_i - 1,96 \times SE(\hat{\theta}_i)$ e $b_i^{(m)} = \hat{\theta}_i + 1,96 \times SE(\hat{\theta}_i)$ definem os limites inferior e superior do intervalo de confiança de 0,95 para o i -ésimo parâmetro. θ_i é o valor real do i -ésimo componente do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\kappa, \gamma, \beta_1, \alpha)$. Logo, $\hat{\theta}_i$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro θ_i , $SE(\hat{\theta}_i)$ é o erro padrão associado ao estimador $\hat{\theta}_i^{(m)}$. Por fim, $I(\cdot)$ é a função indicadora, que assume o valor 1 se θ_i estiver dentro do intervalo $(a_i^{(m)}, b_i^{(m)})$ e 0 caso contrário. A probabilidade de cobertura mede a frequência com que os intervalos de confiança de 95% incluem o valor verdadeiro do parâmetro θ_i , considerando M repetições. Espera-se que a CP esteja próxima de 0,95, o que indica que os intervalos são adequadamente construídos e refletem bem a incerteza associada às estimativas, evidenciando boa confiabilidade dos estimadores.

A Figura 49 apresenta os resultados da probabilidade de cobertura, que permanece consistentemente próxima de 0,95 em quase todos os cenários avaliados. Esse desempenho indica que os intervalos de confiança estão bem ajustados, refletindo a confiabilidade esperada nas estimativas e garantindo que a incerteza associada aos parâmetros seja adequadamente representada.

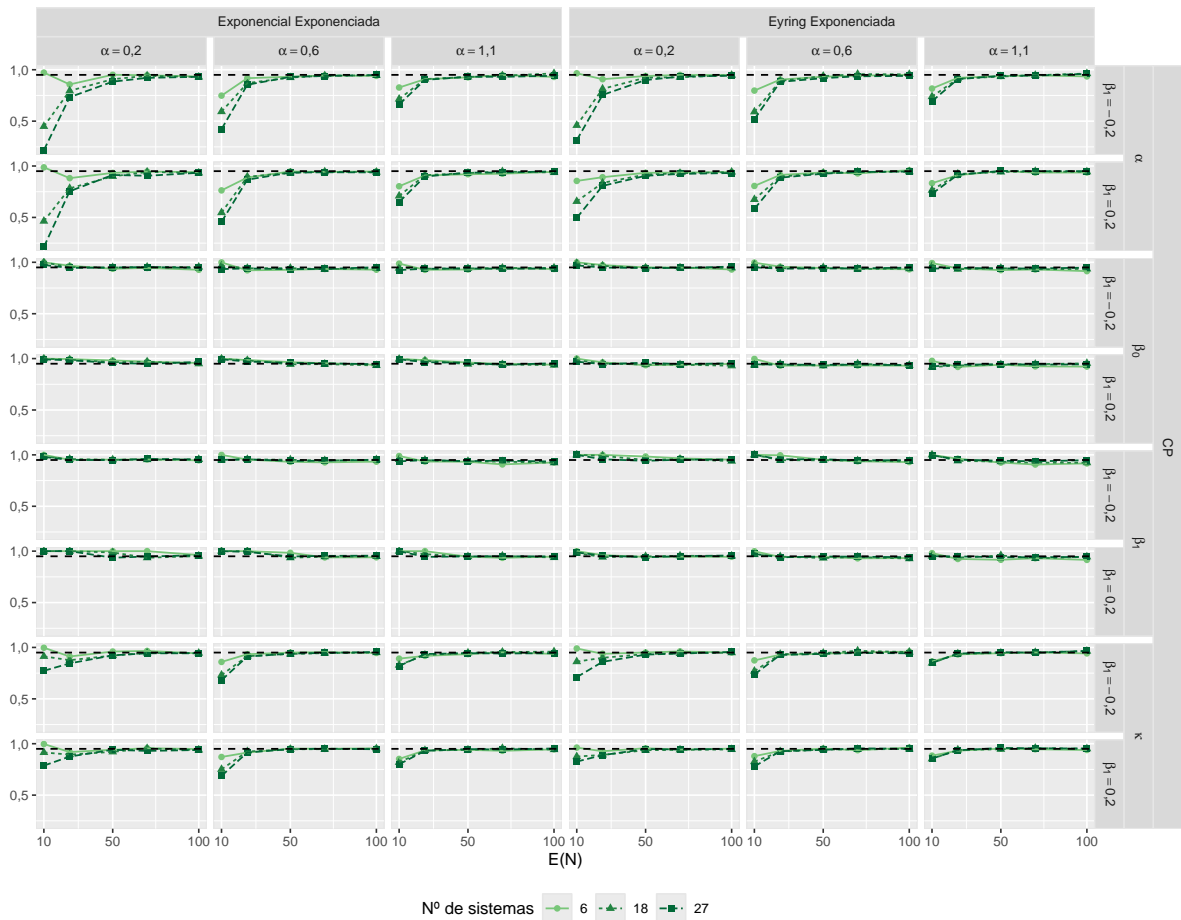


Figura 49 – Resultados das CP de 0,95 para os modelos de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama e Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando 1.000 replicações de Monte Carlo e diferentes cenários.

As simulações realizadas demonstraram que os modelos propostos oferecem estimativas confiáveis nos cenários estudados. Métricas como SRMSE e CP indicaram que, com o aumento do número esperado de falhas ou de sistemas em teste, as estimativas tornam-se mais consistentes e os intervalos de confiança ficam bem ajustados.

6.3 Aplicação

Devido às diferenças estruturais entre as funções de aceleração propostas, que resultam em dinâmicas distintas nos modelos, considera-se mais apropriado avaliar cada modelo em

um contexto prático específico. Assim, apresentam-se duas aplicações distintas, cada uma direcionada a um modelo, a fim de ilustrar sua adequação e desempenho em cenários compatíveis com suas particularidades.

6.3.1 Comportamento de Falhas em Bombas sob Diferentes Condições Térmicas

Com o objetivo de avaliar a confiabilidade de um novo modelo de bomba centrífuga sob diferentes níveis de estresse térmico, foi conduzido um ensaio de vida acelerada com múltiplos sistemas reparáveis, simulando condições típicas da indústria petroquímica. Vinte unidades foram alocadas aleatoriamente em dois grupos experimentais distintos, definidos conforme a temperatura de operação: Grupo 1 (temperatura de referência de 90°C) representando um regime de menor severidade, adotado como base (fator de aceleração 1), simulando baixo nível de estresse térmico. Já o Grupo 2 (temperatura elevada de 134°C) representa um regime mais severo, com fator de aceleração 50, com base em estudos que relacionam o aumento térmico à intensificação da taxa de falhas por mecanismos como difusão térmica e degradação acelerada de materiais.

As bombas operaram continuamente até a ocorrência de falhas observáveis, tais como vazamentos em selos, cavitação ou desgaste de rolamentos. A Figura 50 apresenta a distribuição temporal das falhas ao longo de 10 dias de operação nas duas condições térmicas. Cada linha

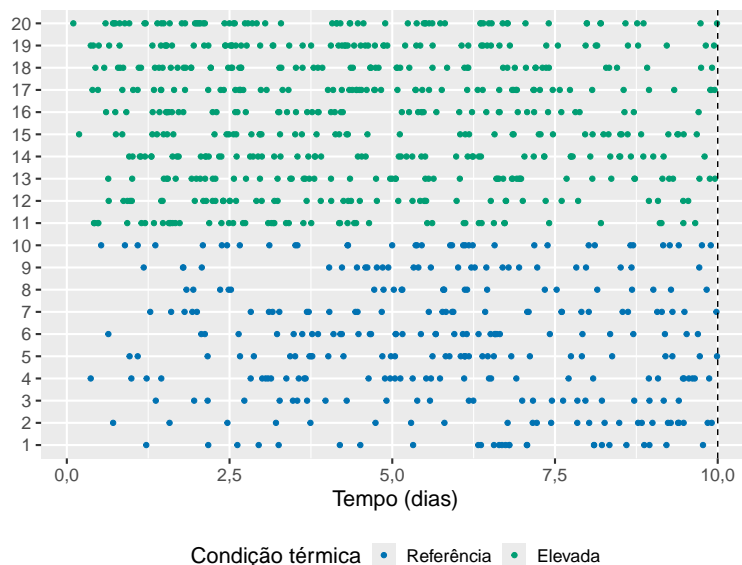


Figura 50 – Descrição das falhas observadas nas 20 bombas centrífugas, considerando as diferentes condições térmicas ao longo de 10 dias de operação.

representa uma bomba, e os pontos marcam os instantes de falha, totalizando 876 ocorrências. Nota-se uma maior frequência de falhas sob condições térmicas elevadas, sugerindo um possível efeito da temperatura sobre a confiabilidade dos sistemas.

A Figura 51 apresenta as curvas acumuladas de falhas das 20 bombas centrífugas sob cada uma das condições térmicas. As trajetórias individuais representam o processo de contagem acumulada de falhas ao longo do tempo para cada bomba. As curvas em destaque correspondem às médias empíricas por grupo, obtidas a partir das trajetórias individuais. Nota-se que o grupo em condição térmica elevada apresentou maior intensidade de falhas acumuladas ao longo do tempo, evidenciando uma taxa de falhas mais alta em comparação ao grupo na condição térmica de referência. Essa diferença sugere um efeito de aceleração induzido pela temperatura, consistente com o comportamento esperado em ensaios acelerados de sistemas reparáveis.

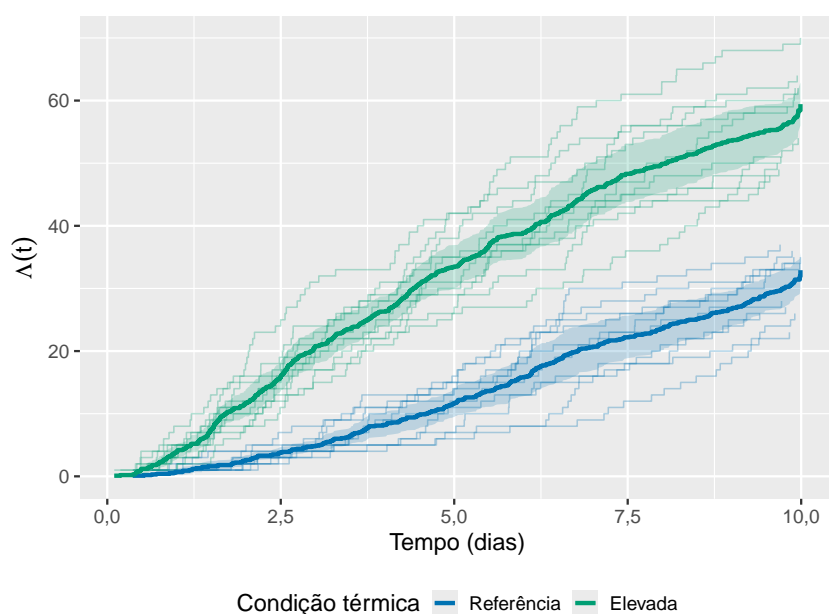


Figura 51 – Acúmulo de falhas observado nas 20 bombas centrífugas, agrupadas em dois níveis de condição térmica. A linha em destaque representa a curva média empírica de acúmulo de falhas, obtida a partir das trajetórias individuais de cada grupo.

A Tabela 17 apresenta as estimativas pontuais, erros padrão e intervalos de confiança de 95% dos parâmetros do modelo Exponencial Exponenciada. Os coeficientes $\hat{\beta}_0 = 0,645$ (EP = 0,091) e $\hat{\beta}_1 = 0,175$ (EP = 0,089) apresentam intervalos de confiança de $[0,467; 0,822]$ e $[0,010; 0,349]$, respectivamente. Para $\hat{\kappa}$, a estimativa foi de 2,050 (EP = 0,138), com intervalo $[1,780; 2,320]$, e para $\hat{\alpha}$, 0,054 (EP = 0,007), com intervalo $[0,040; 0,068]$. Todos os intervalos não contêm zero, o que denota a significância estatística dos parâmetros.

Tabela 17 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC (95%)	
				Inferior	Superior
Exponencial Exponenciada	β_0	0,645	0,091	0,467	0,822
	β_1	0,175	0,089	0,010	0,349
	κ	2,050	0,138	1,780	2,320
	α	0,054	0,007	0,040	0,068

A Figura 52 apresenta a função acumulada média estimada até 15 dias pelo modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, sobreposta às curvas empíricas de falhas acumuladas observadas individualmente para cada uma das 20 bombas, classificadas em dois níveis. Observa-se que as curvas ajustadas seguem de forma consistente o padrão das trajetórias empíricas, tanto no grupo de referência quanto no grupo sob condição térmica elevada, evidenciando bom alinhamento entre o modelo e os dados observados no domínio temporal analisado.

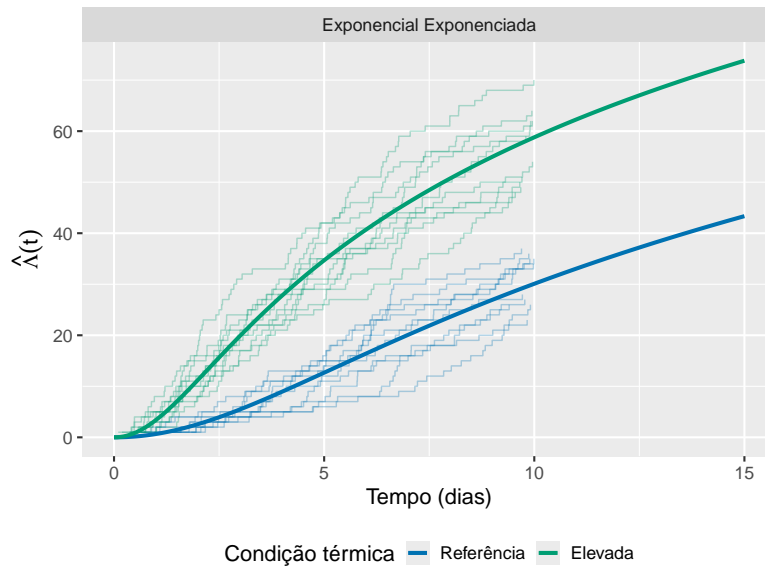


Figura 52 – Função acumulada média estimada até 10 dias pelo modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama, sobreposta às curvas do número acumulado de falhas observadas nas 20 bombas centrífugas, em cada condição térmica.

Já a Figura 53 mostra a comparação direta entre a função acumulada média empírica

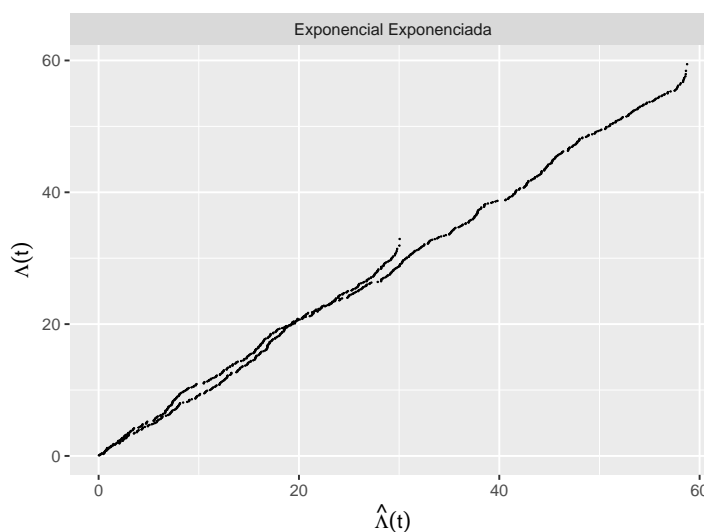


Figura 53 – Comparação entre a função acumulada média empírica e a função acumulada média estimada pelo modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama.

e a função estimada pelo modelo, por meio de $\Lambda(t)$ versus $\hat{\Lambda}(t)$. A proximidade dos pontos à diagonal indica que as estimativas do modelo replicam adequadamente o comportamento médio do processo de falhas observado, sugerindo boa qualidade de ajuste do modelo.

A partir das estimativas obtidas para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama, apresentadas na Tabela 17, analisa-se individualmente cada parâmetro estimado, destacando seus efeitos e significância.

O valor estimado de $\hat{\beta}_0 = 0,645$ representa o nível inicial da função de aceleração, correspondente à condição de referência, ou seja, quando não há efeito da variável aceleradora. Já o valor estimado de $\hat{\beta}_1 = 0,089$ corresponde ao coeficiente associado ao fator de aceleração, indicando evidência estatística de que o aumento da condição térmica está positivamente associado à elevação da taxa de falha. Essa tendência é reforçada pela Figura 54, que apresenta a

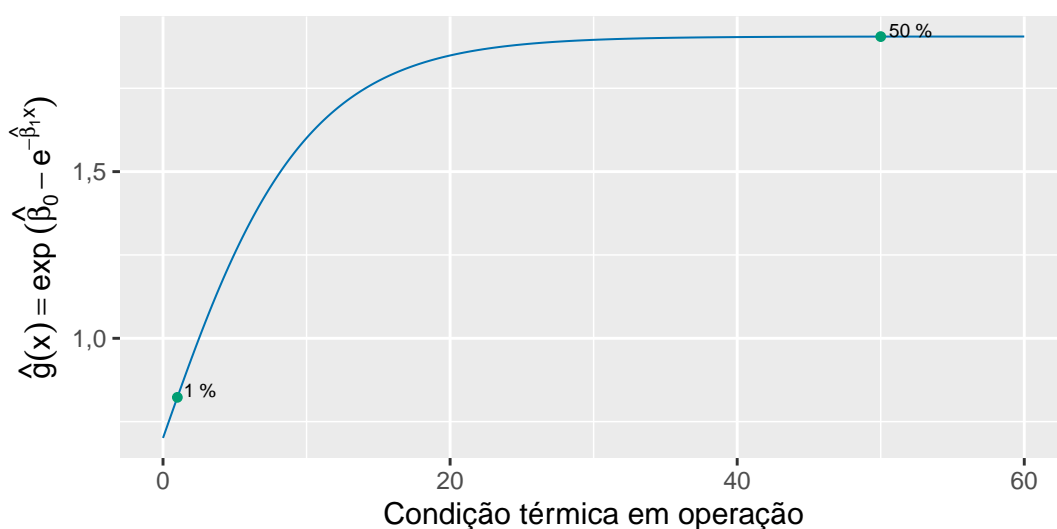


Figura 54 – Representação da função de aceleração estimada $g(x)$ para o modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama, ilustrando a relação entre a condição térmica aplicada e seu impacto na taxa de falha das bombas centrífugas.

função de aceleração estimada $\hat{g}(x) = \exp(\hat{\beta}_0 - e^{-\hat{\beta}_1 x})$. Observa-se que, à medida que a condição térmica aumenta, a função de aceleração se eleva rapidamente e tende à estabilização, indicando efeito não linear.

A estimativa de $\hat{\kappa} = 2,050$ indica uma taxa de falha crescente ao longo do tempo, característica típica de processos com desgaste acumulado, como se observa em sistemas sujeitos à deterioração progressiva. Por fim, o valor estimado de $\hat{\alpha} = 0,054$ sugere a presença de heterogeneidade não observada entre os sistemas, refletindo variações estruturais ou operacionais não explicitamente modeladas. Essa variabilidade é adequadamente capturada pela inclusão do termo de fragilidade gama, que permite acomodar correlações não explicadas entre as falhas de cada unidade.

A Figura 55 apresenta as previsões da função de confiabilidade condicional e da intensidade acumulada condicional, projetadas para os 4 dias subsequentes à última falha observada em $t_n = 10$ dias. As curvas foram obtidas com base no modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, considerando duas condições térmicas distintas: referência e elevada. Observa-se que, sob a condição térmica elevada, a confiabilidade decai de forma mais acentuada, indicando maior probabilidade de ocorrência de falhas em curto prazo. Esse resultado está alinhado com o efeito acelerador da temperatura, previamente identificado na função de aceleração. Por outro lado, a função de intensidade acumulada cresce mais rapidamente sob essa mesma condição, refletindo o aumento da frequência esperada de falhas. Tais projeções reforçam a capacidade do modelo de capturar o comportamento dinâmico dos sistemas ao longo do tempo, incorporando tanto o histórico individual de falhas quanto o efeito da variável aceleradora.

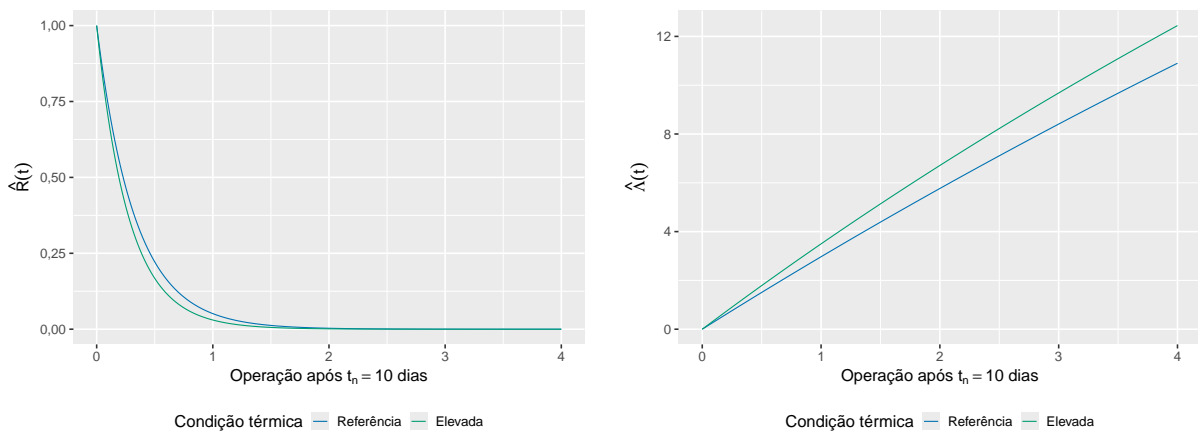


Figura 55 – Previsões da intensidade acumulada e da confiabilidade, condicionadas ao histórico de falhas até $t_n = 10$ dias, projetadas para os períodos subsequentes, com base no modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada com fragilidade gama.

A Figura 56 apresenta as projeções da confiabilidade condicional $\hat{R}(t)$ para cada uma das 20 bombas centrífugas, ao longo de 4 dias após o último tempo de falha registrado, para os dois níveis de temperatura: referência e elevada. As curvas refletem a influência do histórico individual de falhas e da condição térmica sobre a probabilidade de confiabilidade futura de cada unidade. Observa-se que, para todas as bombas, a confiabilidade projetada decresce rapidamente, o que é compatível com a natureza dos sistemas em estudo, sujeitos a processos de desgaste acelerado. Além disso, verifica-se que os sistemas sob condição térmica elevada apresentam confiabilidade inferior em comparação com aqueles em condição térmica de referência, refletindo o efeito do fator de aceleração identificado no modelo.

As diferenças nos tempos medianos de falha condicional, marcados nas curvas como o ponto em que $\hat{R}(t) = 0,5$, reforçam essa tendência: as unidades sob condição térmica elevada apresentam consistentemente tempos medianos mais baixos, evidenciando menor confiabilidade e maior necessidade de intervenção..

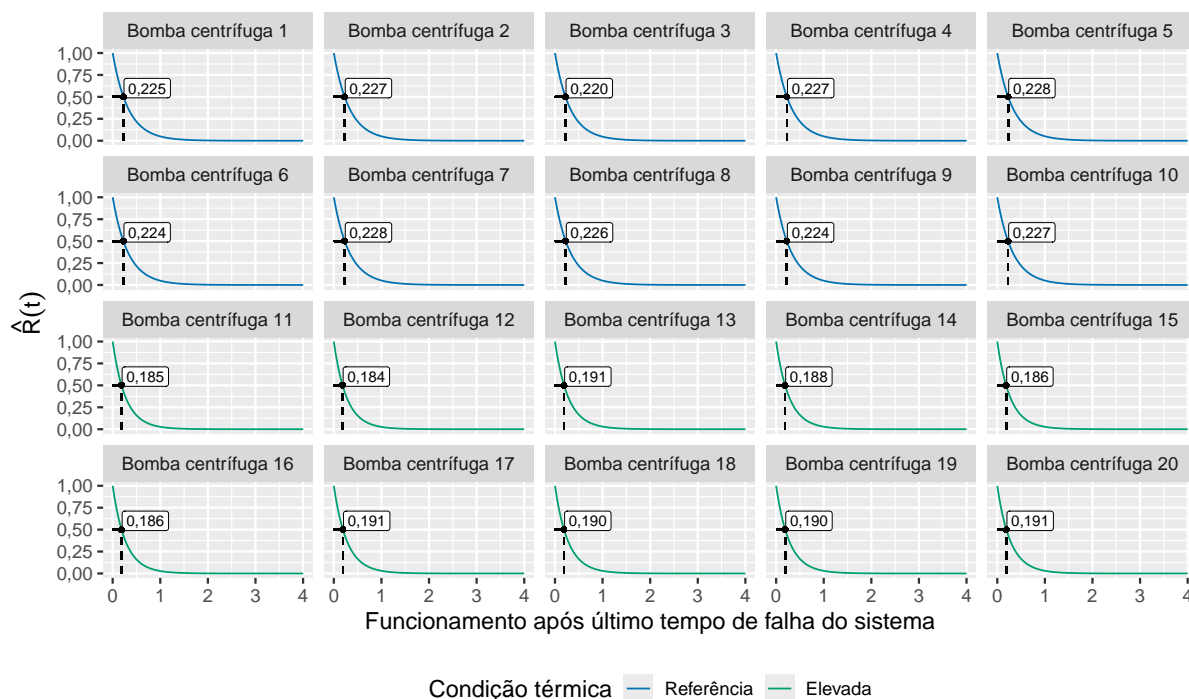


Figura 56 – Projeções da confiabilidade, condicionadas ao histórico de falhas de cada unidade testada, para períodos futuros, obtidas por meio do modelo de tempo de falha acelerado Exponencial Exponenciada, considerando dois níveis de condição térmica.

6.3.2 Desempenho de sistemas de frenagem em veículos pesados com pastilhas termoativadas

Com o objetivo de investigar o comportamento de falhas relacionadas à perda de eficiência de frenagem em veículos pesados equipados com pastilhas de freio termoativadas, foi conduzido um experimento simulado em condições operacionais controladas. A simulação considerou diferentes perfis de rota, refletindo variações nas cargas térmicas impostas ao sistema de freio.

Foram avaliadas 12 unidades veiculares, divididas em três grupos experimentais, conforme o tipo de rota percorrida, diretamente associada à faixa térmica típica de operação dos freios:

- **Grupo 1 (rota plana):** trajeto realizado em terreno plano com velocidade constante, gerando temperaturas do sistema de freio inferiores a 150°C. Para fins de modelagem, essa condição foi codificada como 10/25 da referência térmica de 250°C.
- **Grupo 2 (rota mista):** percurso com variações moderadas de relevo, resultando em uma faixa de temperatura operacional entre 150°C e 350°C. Considera-se 250° C como referência térmica.
- **Grupo 3 (rota de serra):** percurso com descidas longas e frenagens frequentes, elevando a temperatura do sistema de freio à faixa de 351°C a 450°C. Para a análise, adotou-se

400°C como ponto médio do intervalo, codificado como cerca de três vezes (40/25) da referência térmica de 250°C.

Cada veículo percorreu sua respectiva rota durante um mês, sob condições padronizadas de carga e condução. Foram monitorados, ao longo do tempo, eventos de falha relacionados ao sistema de frenagem, incluindo: superaquecimento do sistema; perda de aderência entre pastilha e disco; necessidade de parada técnica para substituição ou resfriamento. A cada falha, o sistema passava por manutenção corretiva e era novamente incluído no experimento.

Essa abordagem experimental reproduziu os ciclos térmicos típicos enfrentados por sistemas de freio em aplicações rodoviárias e industriais, permitindo avaliar o desempenho funcional das pastilhas termoativadas em diferentes faixas de temperatura operacional, especialmente quanto à sua zona de ativação térmica e à degradação em regimes críticos de aquecimento.

Observa-se na [Figura 57](#) a distribuição temporal dos eventos de falha nos três grupos

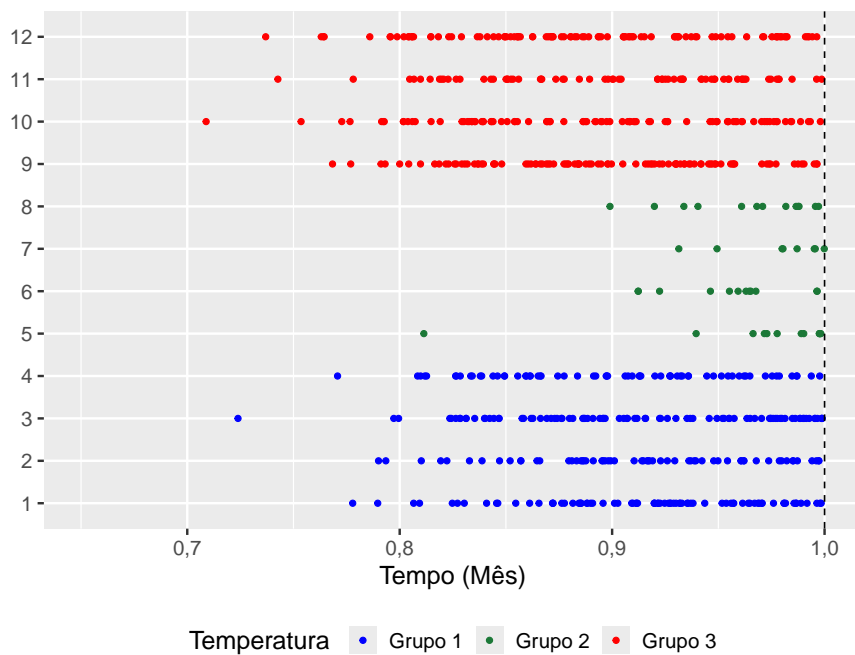


Figura 57 – Padrão temporal de falhas registrado nos veículos, de acordo com a condição de rota.

experimentais, definidos conforme as diferentes condições térmicas aplicadas. Ao longo do experimento, foram registradas 694 falhas. Os veículos alocados aos Grupos 1 e 3 apresentaram dispersão temporal semelhante, moderada e relativamente uniforme das falhas. Em contraste, as falhas dos veículos do Grupo 2 concentraram-se majoritariamente no término do experimento, sugerindo um padrão de falha mais tardio, possivelmente relacionado à ativação progressiva de mecanismos de desgaste. A linha tracejada indica o tempo máximo de duração do experimento.

A [Figura 58](#) apresenta as curvas empíricas da função de intensidade de falhas acumuladas ao longo do tempo, agrupadas por nível de estresse térmico aplicado aos sistemas de frenagem dos veículos. As curvas médias estão representadas por linhas em destaque, enquanto as faixas

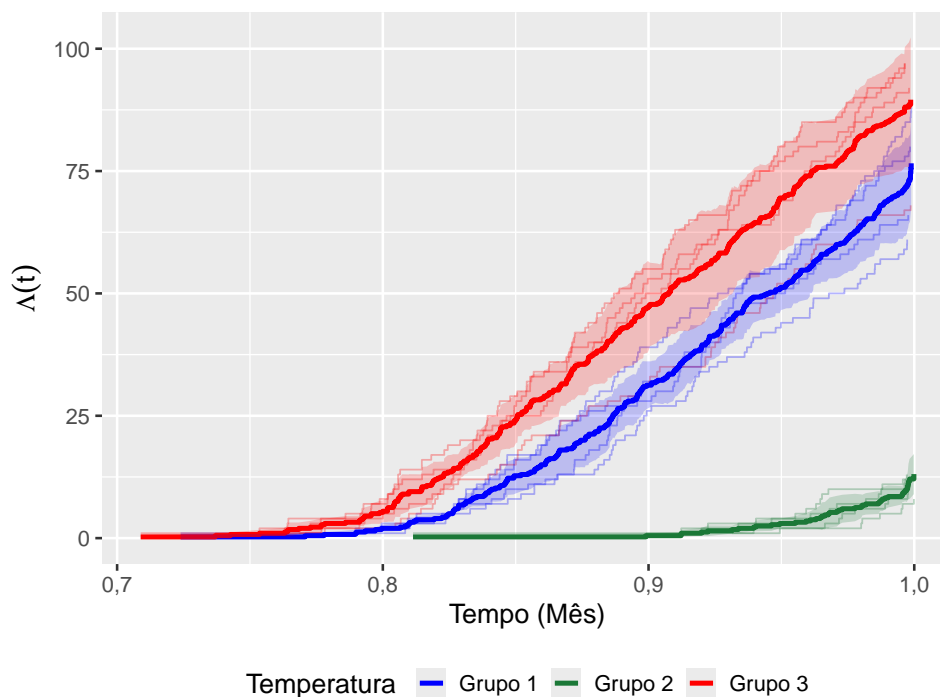


Figura 58 – Acúmulo de falhas observado nos 12 veículos avaliados, organizados conforme os três grupos experimentais definidos pela condição térmica. A linha em destaque representa a curva média empírica de acúmulo de falhas, obtida a partir da média das trajetórias individuais de cada grupo.

sombreadas indicam a variabilidade entre as trajetórias individuais dentro de cada grupo. O Grupo 3 e 1 apresentaram os maiores acúmulos de falhas, com crescimento acentuado nos extremos das temperaturas, indicando degradação acelerada nessas condições. Já o Grupo 2 exibiu menor acúmulo, com falhas concentradas no término do experimento, sugerindo desgaste mais tardio. Esses padrões indicam que a influência da temperatura na confiabilidade dos sistemas de frenagem não segue uma tendência monotonicamente crescente, revelando comportamentos distintos conforme o nível de estresse térmico.

A Tabela 18 apresenta as estimativas dos parâmetros do modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, juntamente com os respectivos erros padrão e intervalos de confiança de 95%. Os valores estimados foram $\hat{\beta}_0 = 0,4480$, $\hat{\beta}_1 =$

Tabela 18 – Estimativas dos parâmetros, erros padrão e intervalos de confiança de 95% para o modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama.

Modelo	Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC (95%)	
				Inferior	Superior
Eyring Exponenciada	β_0	0,4480	0,0082	0,4320	0,4640
	β_1	-0,9980	0,0162	-1,0300	-0,9670
	κ	38,0000	3,5800	31,0000	45,0000
	α	0,0915	0,0111	0,0697	0,1130

$-0,9980$, $\hat{\kappa} = 38,0$ e $\hat{\alpha} = 0,0915$, com erros padrão de 0,0082; 0,0162; 3,5800 e 0,0111,

respectivamente. Os intervalos de confiança de 95% obtidos para cada parâmetro indicam que todos são estatisticamente significativos, pois não incluem zero.

Observa-se na Figura 59 as curvas estimadas da função de intensidade acumulada $\hat{\Lambda}(t)$ ao longo do tempo, obtidas pelo modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada

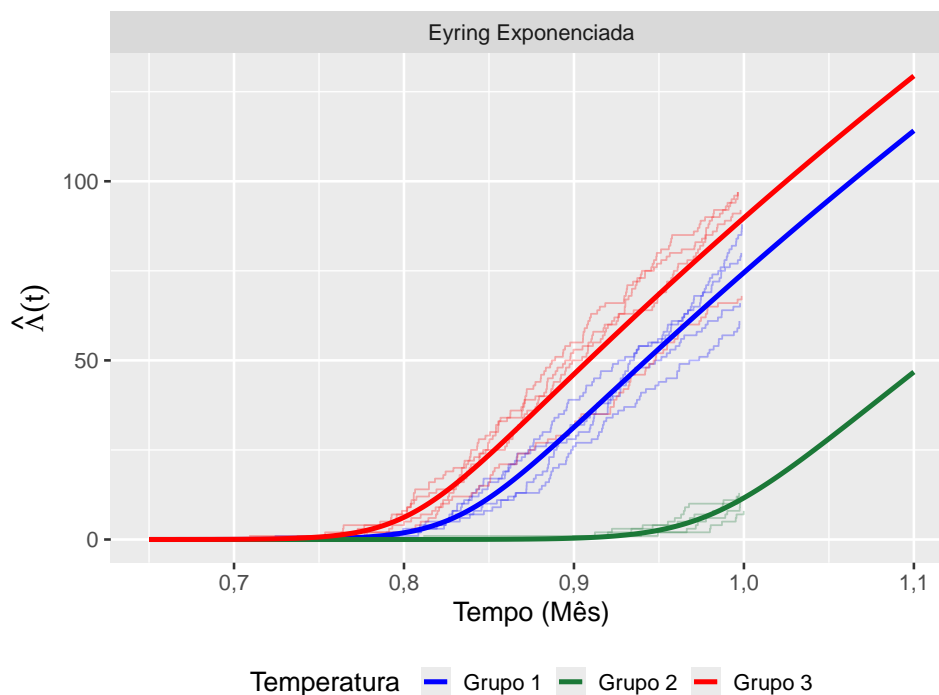


Figura 59 – Função de intensidade acumulada estimada pelo modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, sobreposta às trajetórias empíricas observadas para os 12 veículos, agrupados conforme o nível de estresse térmico.

com fragilidade gama, agrupadas por grupo experimental. Essas curvas, destacadas por linhas evidentes, estão sobrepostas às trajetórias empíricas das unidades observadas em cada grupo. A concordância visual entre as curvas ajustadas e os dados observados indica que o modelo captura adequadamente o comportamento das falhas sob diferentes níveis de estresse térmico. Nota-se um aumento mais pronunciado da função de intensidade acumulada nos grupos expostos aos níveis extremos de temperatura, o que corrobora o efeito esperado de aceleração térmica neste experimento.

A Figura 60 apresenta o gráfico de diagnóstico da função de intensidade acumulada observada $\Lambda(t)$ versus os valores ajustados $\hat{\Lambda}(t)$. A proximidade dos pontos à linha de referência evidencia boa concordância entre valores observados e estimados, indicando ajuste adequado do modelo.

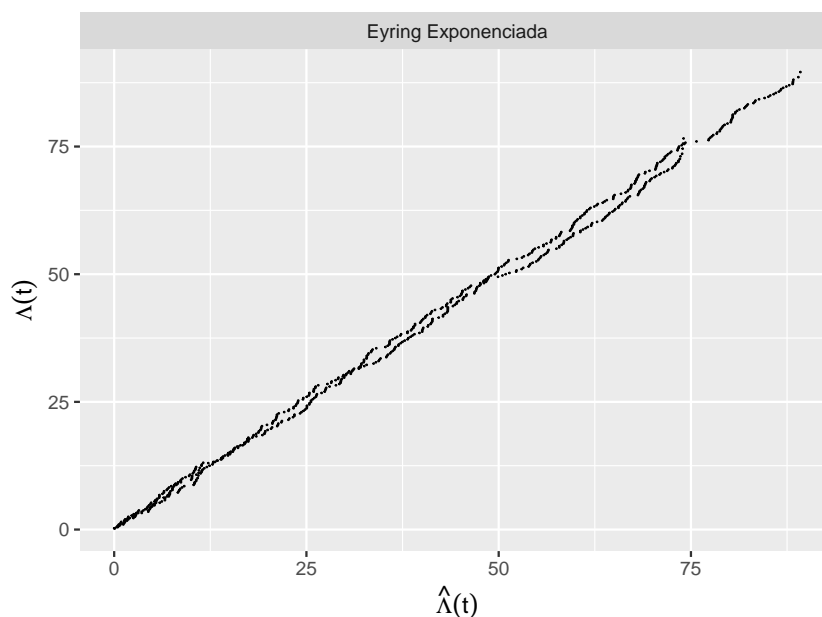


Figura 60 – Comparação entre a função acumulada média empírica e a função acumulada média estimada pelo modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama.

Após a validação do modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, cujas estimativas estão apresentadas na [Tabela 18](#), segue-se a interpretação dos parâmetros estimados a seguir.

O valor estimado de $\hat{\beta}_0 = 0,4480$ representa o intercepto da função de aceleração, refletindo a intensidade de falha na condição de referência, ou seja, sem a influência da variável aceleradora. Esse valor representa o nível inicial da função de aceleração, na ausência do fator de estresse, permitindo interpretar a influência da covariável.

O valor estimado de $\hat{\beta}_1 = -0,9980$ indica que a função de aceleração apresenta um padrão não monotônico com o aumento da temperatura. Devido à forma funcional adotada, esse parâmetro induz uma curva não linear, em que a taxa de falha inicialmente diminui com o aumento da temperatura, atingindo um valor mínimo, e depois volta a crescer. Esse comportamento está ilustrado na [Figura 61](#), que mostra a forma característica da função $\hat{g}(x)$ para os níveis de temperatura considerados no experimento. Portanto, esses resultados indicam que temperaturas extremas (altas e baixas) aceleram a degradação dos sistemas de frenagem, enquanto temperaturas intermediárias promovem maior estabilidade e menor acúmulo de falhas. Isso sugere a existência de uma faixa térmica ideal de operação, com implicações diretas para o projeto, uso e manutenção dos freios em diferentes condições de rota.

A estimativa de $\hat{\kappa} = 38,0$ indica uma taxa de falha crescente ao longo do tempo, compatível com processos de desgaste acumulado. Já o valor de $\hat{\alpha} = 0,0915$ revela heterogeneidade não observada entre os sistemas, capturada pelo termo de fragilidade gama.

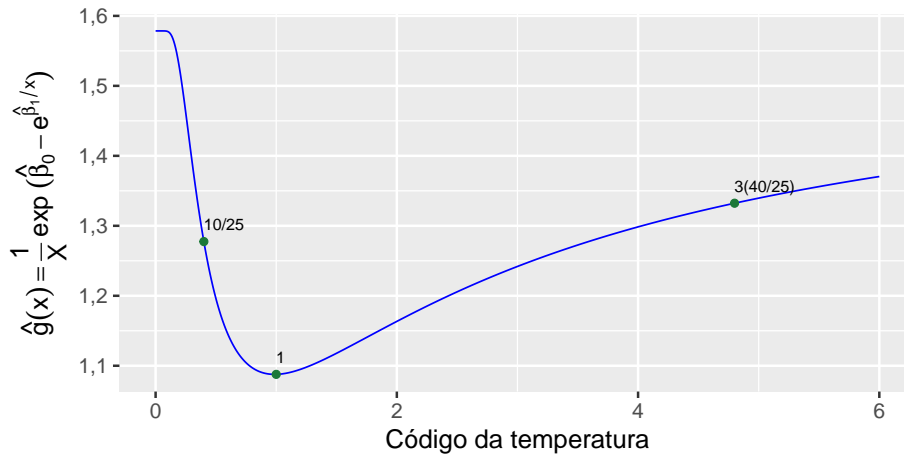


Figura 61 – Representação da função de aceleração estimada para o modelo Eyring Exponenciada com fragilidade gama.

As previsões da confiabilidade condicional e da intensidade acumulada projetadas para o período subsequente à operação de 1 mês são apresentadas na Figura 62. As curvas foram obtidas com base no modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando três níveis de temperatura. Observa-se que, sob temperaturas intermediárias (Grupo 2), a confiabilidade decai mais lentamente, enquanto a intensidade acumulada de falhas cresce mais lentamente, refletindo o efeito da aceleração térmica.

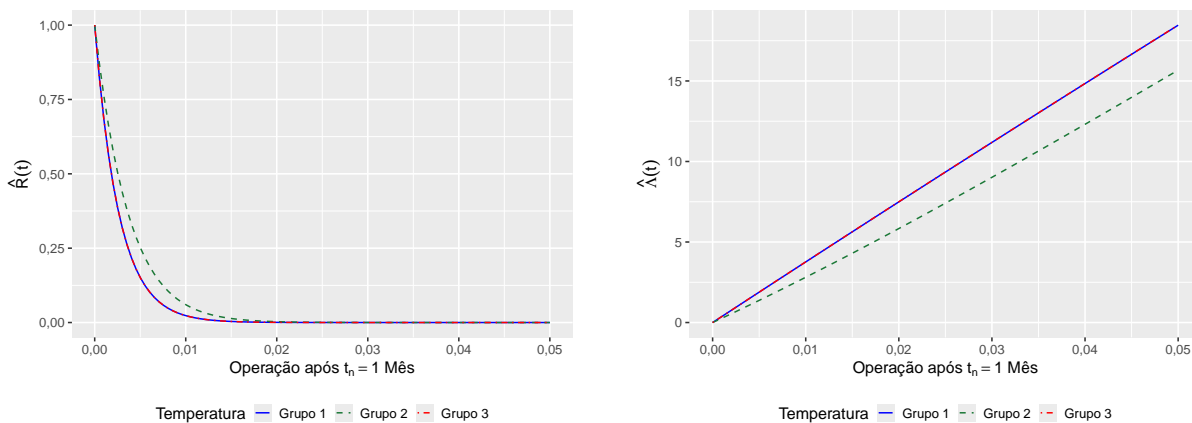


Figura 62 – Previsões da intensidade acumulada e da confiabilidade, condicionadas ao histórico de falhas até $t_n = 1$ mês, projetadas para os períodos subsequentes, com base no modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama.

As estimativas da confiabilidade condicional para cada veículo, com base no histórico individual de falhas e nas diferentes faixas de estresse térmico, são apresentadas na Figura 63. Observa-se que, no grupo 2, mesmo sob a mesma faixa de temperatura, há variações nas curvas de confiabilidade, refletindo diferenças estruturais entre os sistemas. Esse comportamento evidencia a importância da modelagem da heterogeneidade entre unidades, capturada pelo termo de fragilidade gama do modelo.

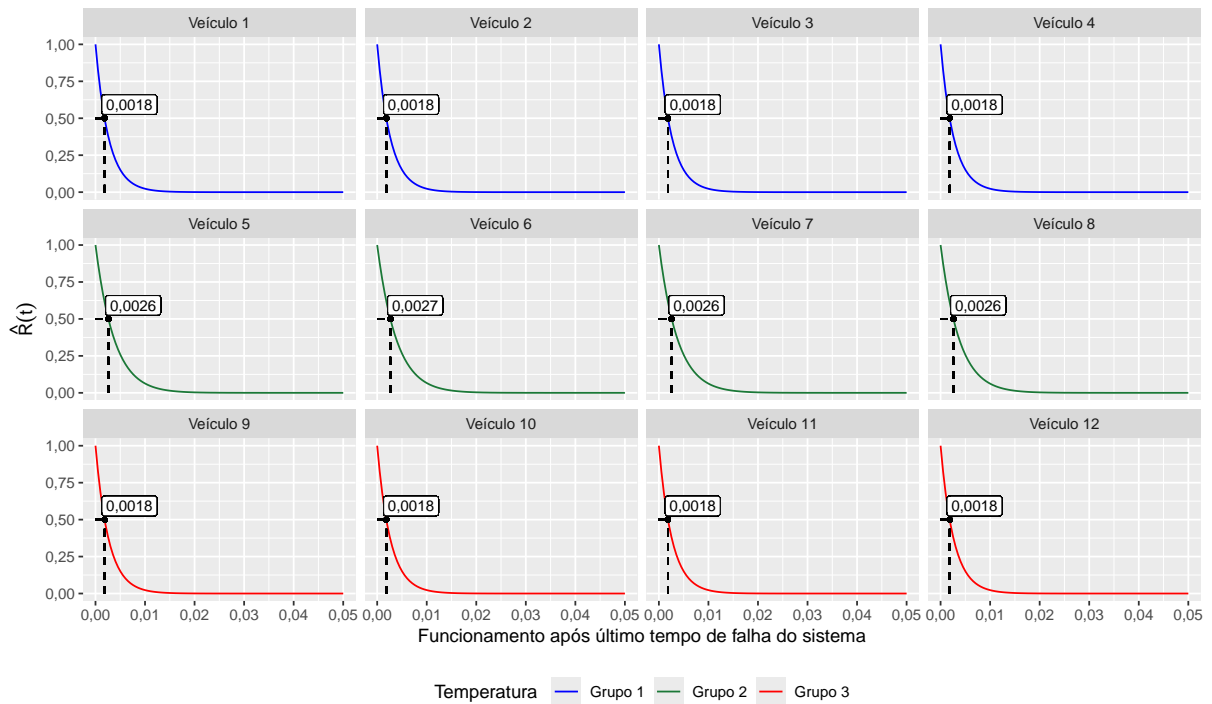


Figura 63 – Estimativas da confiabilidade, condicionadas ao histórico de falhas de cada veículo testado, para períodos futuros, obtidas por meio do modelo de tempo de falha acelerado Eyring Exponenciada com fragilidade gama, considerando três níveis de estresse térmico.

6.4 Observações Finais

Neste estudo, ampliou-se a abordagem do [Capítulo 5](#), no qual foram propostas duas novas funções de aceleração, Exponencial Exponenciada e Eyring Exponenciada, ao incorporá-las a modelos de tempo de falha acelerado com fragilidade gama, direcionados à modelagem de sistemas reparáveis, sob a hipótese de reparo mínimo. Essas funções ampliam a flexibilidade dos modelos tradicionais, permitindo representar aceleração e desaceleração no processo de falha de forma distinta das funções tradicionais da literatura, o que é coerente com o comportamento de muitos sistemas no contexto prático. As estimativas dos parâmetros dos modelos foram obtidas por meio do método de máxima verossimilhança, utilizando procedimentos numéricos. Adicionalmente, foram construídos intervalos de confiança assintóticos. A validação desses modelos foi feita por simulação, com resultados satisfatórios quanto às propriedades dos estimadores. As análises com dados simulados ilustraram o contexto prático da abordagem proposta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Observações Finais

O principal objetivo desta tese foi estudar, desenvolver e investigar novas funções de aceleração com ênfase na interpretabilidade e na aplicabilidade prática, no contexto de sistemas reparáveis submetidos a testes acelerados. Com o propósito de expandir e enriquecer a fundamentação existente na literatura, foram propostas extensões dos modelos de tempo de falha acelerado, contemplando estruturas com fragilidade (Capítulos 3, 4 e 6) e sem fragilidade (Capítulos 3, 4 e 5).

Em todos os modelos propostos, assume-se que a função de intensidade de base segue um PLP, o que permite capturar dinâmicas crescentes ou decrescentes da taxa de falha ao longo do tempo. A heterogeneidade não observada entre os sistemas foi incorporada por meio de termos de fragilidade, modelados pelas distribuições Gama (Capítulos 3, 4 e 6) e Lindley Ponderada (Capítulo 3). A estimação dos parâmetros foi conduzida sob a abordagem clássica da inferência estatística, com a construção das funções de verossimilhança correspondentes a cada estrutura modelada. Devido à complexidade analítica das expressões envolvidas, recorreu-se a procedimentos numéricos para a obtenção dos Estimadores de Máxima Verossimilhança e seus intervalos de confiança assintóticos.

O desempenho dos estimadores foi avaliado por meio de um estudo de simulação de Monte Carlo, com o intuito de investigar suas propriedades assintóticas e a variabilidade sob diferentes cenários modelados. Os resultados indicaram desempenho adequado em termos de viés e precisão nos cenários estudados, o que evidencia a consistência das propostas metodológicas. Adicionalmente, a aplicabilidade prática dos modelos foi demonstrada por meio da análise de conjuntos de dados simulados, destacando sua relevância em contextos práticos.

Ressalta-se que a metodologia adotada está alinhada com uma linha de pesquisa consolidada na literatura, que visa adaptar e estender modelos clássicos a contextos de maior

complexidade e realismo. A proposta de novas funções de aceleração, aliada à incorporação de termos de fragilidade, representa um avanço incremental na modelagem estatística de dados de confiabilidade, contribuindo para ampliar sua aplicabilidade em contextos práticos.

Com base nos resultados obtidos, foram identificadas algumas possibilidades de continuação da pesquisa no contexto da modelagem de sistemas reparáveis sob testes acelerados. Dentre elas, destaca-se a investigação de outras distribuições de fragilidade nos modelos propostos, como a distribuição Lindley Ponderada, ainda não explorada em alguns dos modelos estudados, bem como a distribuição Gaussiana Inversa e alternativas adicionais disponíveis na literatura. Essa ampliação pode contribuir para uma representação mais flexível da heterogeneidade não observada e permitir comparações entre diferentes estruturas de fragilidade.

Aplicar as funções de aceleração em contextos com diferentes tipos de reparo, como, por exemplo o reparo imperfeito ou o reparo perfeito. Essa abordagem pode permitir avaliar como o tipo de reparo influencia o desempenho dos modelos acelerados, contribuindo para uma compreensão mais abrangente do comportamento de sistemas sob estresse em diferentes cenários.

Outra possibilidade consiste na incorporação da modelagem híbrida, na qual duas funções distintas afetam, respectivamente, o tempo e a intensidade de base. Essa abordagem amplia a flexibilidade do modelo, permitindo que diferentes componentes do processo sejam influenciados separadamente pelas covariáveis. Com isso, torna-se possível capturar dinâmicas mais complexas e obter uma compreensão mais detalhada do comportamento do sistema ao longo do tempo.

Embora os resultados obtidos demonstrem o potencial e a flexibilidade dos modelos propostos, é importante destacar alguns desafios associados a este trabalho. Um deles diz respeito à incorporação de outros tipos de reparo uma extensão natural que aumenta a complexidade do modelo. Essa generalização exigiria um maior número de parâmetros e a adoção de suposições adicionais sobre o processo de recuperação do sistema.

Outro ponto relevante é a ausência de dados reais para validação empírica dos modelos. Os resultados obtidos com dados simulados fornecem evidências sólidas sobre o desempenho dos modelos propostos, mas estudos futuros com dados reais poderão fortalecer ainda mais suas conclusões e aplicabilidade.

REFERÊNCIAS

- AALEN, O. Nonparametric inference for a family of counting processes. **The Annals of Statistics**, JSTOR, p. 701–726, 1978. Citado na página 37.
- AFRIDI, M.; TATAPUDI, S.; FLICKER, J.; SRINIVASAN, D.; TAMIZHMANI, G. Reliability evaluation of dc power optimizers for photovoltaic systems: Accelerated testing at high temperatures with fixed and cyclic power stresses. **Engineering Failure Analysis**, Elsevier, v. 152, p. 107484, 2023. Citado na página 48.
- AKAIKE, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. **Selected papers of hirotugu akaike**, Springer, p. 199–213, 1998. Citado nas páginas 72 e 97.
- ARRHENIUS, S. Über die reaktionsgeschwindigkeit bei der inversion von rohrzucker durch säuren. **Zeitschrift für physikalische Chemie**, De Gruyter Oldenbourg, v. 4, n. 1, p. 226–248, 1889. Citado na página 53.
- ASADI, M. On a parametric model for the mean number of system repairs with applications. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 234, p. 109137, 2023. Citado na página 47.
- ASCHER, H.; FEINGOLD, H. Repairable systems reliability: modeling, inference, misconceptions and their causes. M. Dekker New York, 1984. Citado nas páginas 43 e 47.
- ASFAW, Z. G.; LINDQVIST, B. H. Unobserved heterogeneity in the power law nonhomogeneous poisson process. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 134, p. 59–65, 2015. Citado na página 31.
- BALAN, T. A.; PUTTER, H. A tutorial on frailty models. **Statistical methods in medical research**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 29, n. 11, p. 3424–3454, 2020. Citado nas páginas 31 e 60.
- BASU ASIT P.; RIGDON, S. E. **Statistical methods for the reliability of repairable systems**. [S.l.]: John Wiley, New York, 2000. v. 4. Citado nas páginas 40, 43, 44 e 47.
- BIROLINI, A. **Reliability engineering**. [S.l.]: Springer, 2007. v. 5. Citado na página 29.
- BRITO, É. S.; TOMAZELLA, V. L.; FERREIRA, P. H.; NETO, F. L.; JUNIOR, O. A. G. Reliability analysis of multiple repairable systems under imperfect repair and unobserved heterogeneity. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 40, n. 7, p. 3888–3912, 2024. Citado na página 31.
- CARSEY, T. M.; HARDEN, J. J. **Monte Carlo simulation and resampling methods for social science**. [S.l.]: Sage Publications, 2013. Citado na página 131.
- COOK, R. J.; LAWLESS, J. F. *et al.* **The statistical analysis of recurrent events**. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 41.

- COX, D. R. Regression models and life-tables. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, Wiley Online Library, v. 34, n. 2, p. 187–202, 1972. Citado na página 55.
- CROW, L. H. **Reliability analysis for complex, repairable systems**. [S.l.], 1975. Citado nas páginas 31 e 41.
- CUI, X.; LI, B.; WANG, S.; ZHANG, S.; YANG, X.; REN, Y.; XIAO, Y. Timeliness-oriented rush repair optimization of workforce scheduling and routing for logically complex systems under uncertainty. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 253, p. 110574, 2025. Citado na página 47.
- DODSON, B.; SCHWAB, H. **Accelerated testing: a practitioner's guide to accelerated and reliability testing**. [S.l.]: SAE international, 2021. Citado na página 102.
- DUCHATEAU, L.; JANSSEN, P. **The frailty model**. [S.l.]: Springer, 2008. Citado na página 55.
- D'ANDREA, A.; FEITOSA, C. C.; TOMAZELLA, V.; VIEIRA, A. M. C. Frailty modeling for repairable systems with minimum repair: An application to dump truck data of a brazilian mining company. **J Math Stat Sci**, v. 6, p. 179–198, 2017. Citado na página 31.
- ELBERS, C.; RIDDER, G. True and spurious duration dependence: The identifiability of the proportional hazard model. **The Review of Economic Studies**, Wiley-Blackwell, v. 49, n. 3, p. 403–409, 1982. Citado nas páginas 56, 61 e 85.
- ESCOBAR, L. A.; MEEKER, W. Q. A review of accelerated test models. **Statistical science**, JSTOR, p. 552–577, 2006. Citado nas páginas 30, 48, 49 e 52.
- FARD, N.; LI, C. Optimal simple step stress accelerated life test design for reliability prediction. **Journal of statistical planning and inference**, Elsevier, v. 139, n. 5, p. 1799–1808, 2009. Citado na página 48.
- FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A. **Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados**. [S.l.]: Escola de Engenharia da UFMG/Fundacao Christiano Ottoni, 1997. Citado nas páginas 30, 50, 52 e 102.
- GHITANY, M.; ALQALLAF, F.; AL-MUTAIRI, D. K.; HUSAIN, H. A two-parameter weighted lindley distribution and its applications to survival data. **Mathematics and Computers in simulation**, Elsevier, v. 81, n. 6, p. 1190–1201, 2011. Citado na página 63.
- GONZATTO, O. A. Frailty model for multiple repairable systems hierarchically represented in serial/parallel structures under assumption of aram imperfect repairs. Universidade Federal de São Carlos, 2021. Citado nas páginas 31, 43, 53 e 55.
- GORFINE, M.; ZUCKER, D. M. Shared frailty methods for complex survival data: A review of recent advances. **Annual Review of Statistics and Its Application**, Annual Reviews, v. 10, p. 51–73, 2023. Citado na página 31.
- GOYAL, D.; FINKELSTEIN, M.; HAZRA, N. K. On repairable systems with time redundancy and operational constraints. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 255, p. 110631, 2025. Citado na página 47.
- HAMADA, M. S.; MARTZ, H. F.; REESE, C. S.; WILSON, A. G. **Bayesian reliability**. [S.l.]: Springer, 2008. v. 15. Citado na página 40.

- HIRSCH, K.; WIENKE, A.; KUSS, O. Log-normal frailty models fitted as poisson generalized linear mixed models. **Computer methods and programs in biomedicine**, Elsevier, v. 137, p. 167–175, 2016. Citado na página 55.
- HONG, Y.; LI, M.; OSBORN, B. System unavailability analysis based on window-observed recurrent event data. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 122–136, 2015. Citado na página 42.
- HOUGAARD, P. Life table methods for heterogeneous populations: distributions describing the heterogeneity. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 71, n. 1, p. 75–83, 1984. Citado na página 55.
- HURVICH, C. M.; TSAI, C.-L. A corrected akaike information criterion for vector autoregressive model selection. **Journal of time series analysis**, Wiley Online Library, v. 14, n. 3, p. 271–279, 1993. Citado nas páginas 72 e 97.
- INDMESKINE, F.-E.; SAINTIS, L.; KOBİ, A. Review on accelerated life testing plan to develop predictive reliability models for electronic components based on design-of-experiments. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, 2023. Citado na página 49.
- KECECIOGLU, D.; JACKS, J. A. The arrhenius, eyring, inverse power law and combination models in accelerated life testing. **Reliability Engineering**, Elsevier, v. 8, n. 1, p. 1–9, 1984. Citado na página 53.
- LEÃO, J.; LEIVA, V.; SAULO, H.; TOMAZELLA, V. Incorporation of frailties into a cure rate regression model and its diagnostics and application to melanoma data. **Statistics in medicine**, Wiley Online Library, v. 37, n. 29, p. 4421–4440, 2018. Citado na página 55.
- LEHMANN, E. L.; CASELLA, G. **Theory of point estimation**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado nas páginas 89, 108 e 130.
- LIMON, S.; YADAV, O. P.; LIAO, H. A literature review on planning and analysis of accelerated testing for reliability assessment. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 33, n. 8, p. 2361–2383, 2017. Citado na página 49.
- LIN, D.; WEI, L.; YING, Z. Accelerated failure time models for counting processes. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 85, n. 3, p. 605–618, 1998. Citado na página 52.
- LINDLEY, D. V. Fiducial distributions and bayes' theorem. **Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)**, JSTOR, p. 102–107, 1958. Citado na página 63.
- LINDQVIST, B. H. On the statistical modeling and analysis of repairable systems. 2006. Citado na página 45.
- LOUZADA, F.; TOMAZELLA, V. L.; JUNIOR, O. A. G.; BOCHIO, G.; MILANI, E. A.; FERREIRA, P. H.; RAMOS, P. L. Reliability assessment of repairable systems with series–parallel structure subjected to hierarchical competing risks under minimal repair regime. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 222, p. 108364, 2022. Citado nas páginas 31 e 42.
- MANG, T.; DRESEL, W. **Lubricants and lubrication**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007. Citado na página 30.

- MEEKER, W. Q. Trends in the statistical assessment of reliability. **Advances in Degradation Modeling: Applications to Reliability, Survival Analysis, and Finance**, Springer, p. 3–16, 2010. Citado na página 51.
- MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A. A review of recent research and current issues in accelerated testing. **International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique**, JSTOR, p. 147–168, 1993. Citado na página 29.
- MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A.; PASCUAL, F. G. **Statistical methods for reliability data**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2021. Citado nas páginas 30, 47 e 82.
- _____. **Statistical methods for reliability data**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2022. Citado na página 29.
- MILLAR, R. B. **Maximum likelihood estimation and inference: with examples in R, SAS and ADMB**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado nas páginas 108 e 130.
- MODARRES, M.; AMIRI, M.; JACKSON, C. **Probabilistic physics of failure approach to reliability: modeling, accelerated testing, prognosis and reliability assessment**. [S.l.]: Wiley Online Library, 2017. Citado na página 49.
- MORITA, L. H. M.; TOMAZELLA, V. L.; LOUZADA-NETO, F. Accelerated lifetime modelling with frailty in a non-homogeneous poisson process for analysis of recurrent events data. **Quality Technology & Quantitative Management**, Taylor & Francis, v. 15, n. 2, p. 209–229, 2018. Citado nas páginas 52, 53 e 55.
- MOTA, A.; MILANI, E. A.; LEÃO, J.; RAMOS, P. L.; FERREIRA, P. H.; JUNIOR, O. G.; TOMAZELLA, V. L.; LOUZADA, F. A new cure rate frailty regression model based on a weighted lindley distribution applied to stomach cancer data. **Statistical Methods & Applications**, Springer, p. 1–27, 2022. Citado na página 55.
- MOTA, A. L.; RAMOS, P. L.; FERREIRA, P. H.; TOMAZELLA, V. L.; LOUZADA, F. A reparameterized weighted lindley distribution: properties, estimation and applications. **Revista Colombiana de Estadística**, Universidad Nacional de Colombia, v. 44, n. 1, p. 65–90, 2021. Citado na página 63.
- MURALIDHARAN, K. A review of repairable systems and point process models. In: **ProbStat Forum**. [S.l.: s.n.], 2008. v. 1, n. 1, p. 26–49. Citado nas páginas 31, 38 e 47.
- NELSON, W.; HAHN, G. J. Linear estimation of a regression relationship from censored data part i—simple methods and their application. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 14, n. 2, p. 247–269, 1972. Citado na página 47.
- NELSON, W. B. **Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado nas páginas 29, 48, 82 e 84.
- NETO, F. L. **TESTES DE SOBREVIVÊNCIA ACELERADOS: UMA ANÁLISE BAYESIANA DO MODELO EYRING**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 1991. Citado nas páginas 30, 52, 53, 82 e 102.
- O’CONNOR, P.; KLEYNER, A. **Practical reliability engineering**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Citado na página 29.

- OLIVEIRA, M. D. D.; COLOSIMO, E. A.; GILARDONI, G. L. Power law selection model for repairable systems. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 42, n. 4, p. 570–578, 2013. Citado nas páginas 31, 42 e 47.
- PAPAIOANNOU, I.; STRAUB, D. Form-based global reliability sensitivity analysis of systems with multiple failure modes. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, p. 110974, 2025. Citado na página 29.
- PEREIRA, E. Q.; JUNIOR, O. A. G.; TOMAZELLA, V. L. D.; MORITA, L. H. M.; MOTA, A. L.; NETO, F. L. Accelerated failure time frailty model for modeling multiple systems subject to minimal repair. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, Wiley Online Library, 2024. Citado nas páginas 29, 30, 31, 84 e 104.
- PIKE, M. A method of analysis of a certain class of experiments in carcinogenesis. **Biometrics**, JSTOR, v. 22, n. 1, p. 142–161, 1966. Citado na página 47.
- PORTELA, A. C. T.; BRITO, É. S. de; TOMAZELLA, V. L. D.; DINIZ, C. A. R.; FERREIRA, P. H. Reliability of repairable systems with non-central gamma frailty. **Brazilian Journal of Biometrics**, v. 42, n. 2, p. 182–201, 2024. Citado nas páginas 31 e 47.
- PORTELA, A. C. T.; MORITA, L. H.; TOMAZELLA, V.; TOLEDO, M. L.; FERREIRA, P. H.; LOUZADA, F. Non-constant imperfect maintenance effects in inverse gaussian degradation models for multiple repairable systems. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, p. 111349, 2025. Citado na página 47.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2024. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Citado nas páginas 68, 89, 90, 108, 110, 130 e 132.
- RAI, R. N.; CHATURVEDI, S. K.; BOLIA, N. **Repairable systems reliability analysis: A comprehensive framework**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020. Citado na página 47.
- RAUSAND, M.; HOYLAND, A. **System reliability theory: models, statistical methods, and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. v. 396. Citado nas páginas 31 e 47.
- RIGDON, S. E.; BASU, A. P. The power law process: a model for the reliability of repairable systems. **Journal of Quality Technology**, Taylor & Francis, v. 21, n. 4, p. 251–260, 1989. Citado na página 31.
- ROSS, S. M. **Stochastic processes**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995. Citado na página 37.
- SAIKIA, R.; BARMAN, M. P. A review on accelerated failure time models. **International Journal of Statistics and Systems**, v. 12, n. 2, p. 311–322, 2017. Citado na página 104.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, JSTOR, p. 461–464, 1978. Citado nas páginas 72 e 97.
- SHEN, S.; CHENG, J.; LIU, Z.; TAN, J.; ZHANG, D. Bayesian inference-assisted reliability analysis framework for robotic motion systems in future factories. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, p. 110894, 2025. Citado na página 29.
- SHIM, K. Comparison of accelerated life tests for two different systems generated using the arrhenius model. **International Journal of Membrane Science and Technology**, v. 10, n. 4, p. 160–164, 2023. Citado na página 48.

- SOARES, K.; TOMAZELLA, V.; JÚNIOR, S. *et al.* Longevity evaluation of cattle curraleiro pé-duro breed using the inverse gaussian frailty model. **Biom Biostat Int J**, v. 11, n. 3, p. 111–117, 2022. Citado na página 55.
- STACHOWIAK, G.; BATCHELOR, A. W. **Engineering tribology**. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2025. Citado nas páginas 30 e 118.
- SUHIR, E. Failure-oriented-accelerated-testing (foat) and its role in assuring electronics reliability. **INTERNATIONAL JOURNAL**, v. 2766, p. 2748, 2023. Citado na página 48.
- TANG, L. C.; CAI, J. Accelerated reliability testing: From practice to theory. **Reliability Analysis and Maintenance Optimization of Complex Systems: Essays in Honor of Professor Won Young Yun on his 65th Birthday**, Springer, p. 289–314, 2025. Citado nas páginas 29, 30 e 49.
- TOMAZELLA, V. L. D. **Modelagem de dados de eventos recorrentes via processo de Poisson com termo de fragilidade**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2003. Citado na página 31.
- VAUPEL, J. W.; MANTON, K. G.; STALLARD, E. The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality. **Demography**, Springer, v. 16, n. 3, p. 439–454, 1979. Citado nas páginas 31 e 55.
- WANG, Y.; LU, Z.; XIAO, S. Parametric bootstrap confidence interval method for the power law process with applications to multiple repairable systems. **IEEE Access**, IEEE, v. 6, p. 49157–49169, 2018. Citado na página 31.
- WIENKE, A. **Frailty models in survival analysis**. [S.l.]: CRC press, 2010. Citado nas páginas 31, 55, 56, 57 e 61.
- WILKE, R. A.; LO, S. M. Accelerated failure time analysis for industrial life modeling in presence of unknown dependent and independent censoring. **Quality Engineering**, Taylor & Francis, p. 1–12, 2025. Citado nas páginas 29, 30 e 48.
- ZHAN, H.; XIAO, N.-C. A new active learning surrogate model for time-and space-dependent system reliability analysis. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 253, p. 110536, 2025. Citado na página 29.

