

INTRODUÇÃO À TEORIA DAS CORDAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Aluno: Simão Pedro Vasconcelos

RA: 801959

Curso: Física Bacharelado

Orientador: Prof. Dr. Fernando David Marmolejo Schmitt

São Carlos, 21 de dezembro de 2025

*A todos aqueles que tem a
coragem de ser como criança.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por permitir que eu observe uma ínfima parte de sua natureza, maravilhando-me com o simples e vendo dele nascer o complexo, e por permitir minha chegada até aqui, me guiando pelo caminho.

Aos meus pais, que amo imensamente, Jonas e Sara, sou grato por todo o amor, exemplo, apoio, incentivo, paciência e ajuda de todos os tipos. Agradeço a meu pai por sempre ter instigado minha curiosidade, me falando sobre o mundo à minha volta e respondendo na medida do possível a todas as minhas inesgotáveis perguntas de "como funciona?" e "o que é?", o que foi de suma importância para que eu encontrasse o caminho que gostaria de seguir. Agradeço a minha mãe por ter sido minha primeira professora, tanto como profissional quanto como mãe, me ensinando a ler, escrever e a contar. Agradeço por todo o carinho, compreensão, apoio contínuo e força para trilhar este caminho sinuoso.

Sou grato a meu irmão Ruan por cada momento que guardo na memória com carinho, pelo apoio, ajuda e companheirismo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fernando David Marmolejo Schmidtt, agradeço pela instrução, pela paciência, pelos conselhos não só acadêmicos mas também os que levarei para toda a vida, e por todo o apoio psicológico. Tudo isso foi crucial para que este trabalho pudesse ser feito.

A meus amigos Ruan, "Peodro", "Lurquinha", "Pep", Amici, Bia, Senhorini, Samurai, "Predo", "Ardur" e Luiz, sou grato por cada momento, conversa, risada, ajuda, conselho e bronca. Talvez não tenham ciência disto, mas cada um contribuiu significativamente de formas distintas que se complementam para minha identidade, confiança, caráter e trabalho. Nos momentos mais obscuros e tortuosos, estiveram comigo, me mostrando que a vida pode ser simples, bela, e que as dificuldades perdem a força em meio a amizade. Amo muito cada um de vocês.

Agradeço a cada um dos professores que fizeram parte da minha vida escolar: Prof. Cássio por me mostrar a elegância e o caminho da Física e Matemática, Prof. Abdul e Prof. Wallace. Também sou grato aos excelentes professores que tive ao longo da graduação: Prof. Dr. Javier Fernando Ramos Caro por ser um exemplo de professor, físico e ser humano, Prof. Dr. Dalson Eloy Almeida, pelas excelentes aulas e incentivo, Prof. Dr. Rodrigo Figueiredo Shiozaki, Prof. Dr. Adenilson José Chiquito, Prof. Dr. Giuliano Augustus Pavan Ribeiro, Prof. Dr. Paulo Daniel Emmel, Prof. Dr. Raul Celistrino Teixeira e Prof. Dr. Vinicius Tribuzi Rodrigues Pinheiro Gomes. Sou grato por cada aula ministrada com maestria.

Agradeço aos meus gatos de estimação e colegas de quarto, o finado Frobenius, o "Frobs", e a gata Emmy Noether, a "M", pela companhia nas madrugadas, pela paz transmitida, pelas risadas, consolo e exemplo de simplicidade, mesmo que de forma inconsciente e inocente.

E finalmente, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro concedido durante o desenvolvimento deste trabalho, cuja concessão (Processo nº 2024/07309-1) permitiu o amadurecimento acadêmico e o

desenvolvimento desta pesquisa.

*“O obstáculo ao caminho
torna-se o próprio caminho.”*

Marco Aurélio

Resumo

Na década de 1960, a teoria das cordas surgiu como uma tentativa de explicar as interações fortes, mas ao longo do tempo ela se revelou potencialmente capaz de unificar as quatro interações fundamentais da natureza. Ela propõe que a matéria, em seu nível mais fundamental, é composta por cordas unidimensionais, e este é o único novo axioma da teoria. Neste modelo simples e elegante, a ação é proporcional à área descrita pelo movimento da corda unidimensional, diferentemente dos outros modelos onde a ação é proporcional ao comprimento da linha descrita pelo movimento de partículas pontuais. Com essa abordagem, as entidades e forças surgem naturalmente no desenvolvimento da teoria, o que faz dela a principal candidata para unificar a gravitação clássica e a teoria quântica de campos. Por isso, seu estudo é crucial para a física de altas energias, além da matemática e compreensão do universo. Neste trabalho, pretende-se introduzir os conceitos básicos necessários para compreensão da teoria pelo estudante.

Palavras-chave: teoria das cordas; gravitação quântica; topologia; unificação; física de partículas; geometria diferencial.

Abstract

In the 1960s, string theory emerged as an attempt to explain strong interactions, but over time it has proven potentially capable of unifying the four fundamental interactions of nature. It proposes that matter, at its most fundamental level, is composed of one-dimensional strings, which is the theory's only new axiom. In this simple and elegant model, the action is proportional to the area described by the motion of the one-dimensional string, unlike other models where the action is proportional to the length of the line described by the motion of point particles. With this approach, entities and forces naturally arise in the theory's development, making it the leading candidate for unifying quantum gravity and quantum field theory. Therefore, its study is crucial for high energy physics, as well as for mathematics and understanding the universe. This work aims to introduce the basic concepts necessary for understanding the theory by the student.

Keywords: string theory; quantum gravity; topology; unification; particle physics; differential geometry.

Sumário

Resumo do Projeto	ii
Abstract	iii
1 Introdução	1
2 Objetivos	2
2.1 Objetivos Gerais	2
2.2 Objetivos Específicos	2
3 Revisão: Dimensões extras e Cordas clássicas	3
3.1 Relatividade Especial	3
3.2 Eletromagnetismo	5
3.3 Gravitação	6
3.4 Dimensões extras	7
3.4.1 Dimensões extras no poço de potencial	7
3.4.2 Dimensões extras no Eletromagnetismo	9
3.4.3 Dimensões extras na Relatividade e Gravitação	10
4 Cordas relativísticas	13
4.1 Introduzindo a corda relativística	13
4.2 Formalismo Lagrangiano na corda relativística	16
4.3 Tensão e energia	17
4.4 Velocidade transversal e movimento das extremidades	17
4.5 Parametrização e movimento clássico	18
5 Correntes e cone de luz	20
5.1 Correntes na folha de mundo	20
5.2 Cordas no cone de luz	21
5.3 Campos e partículas no cone de luz	24
6 A Partícula Pontual Quântica Relativística	26
6.1 Partícula no cone de luz	26
6.2 Abordagens de <i>Heisenberg</i> e <i>Schrödinger</i>	27
6.3 Quantização da partícula pontual	28
6.4 Partícula quântica e partículas escalares	30
6.5 Operadores momento no cone de luz	30

7	Corda Aberta Relativística Quântica	31
7.1	Hamiltoniano e comutadores no cone de luz	31
7.2	Relações de comutação para osciladores	32
7.3	Operadores Transversais de Virasoro	33
7.4	Geradores de Lorentz	34
7.5	O espaço de estados	35
7.6	Táquions e decaimento de D-branas	36
8	Corda Fechada Relativística Quântica	38
8.1	Relações de comutação e operadores de Virasoro	38
8.2	Espaço de estados da corda fechada	39
9	D-Branas	40
9.1	Dp -branas e condições de contorno	40
9.2	Quantizando cordas abertas em Dp -branas	41
9.3	Cordas abertas entre Dp -branas paralelas	42
9.4	Cordas entre Dp e Dq -branas paralelas	43
10	Carga Elétrica e de Corda	45
11	T-Dualidade de cordas fechadas	47
11.1	Enrolando cordas fechadas	47
11.2	Solução, quantização e relações de comutação	47
11.3	Restrição e fórmula de massa	48
11.4	Espaço de estados para cordas fechadas compactificadas	49
11.5	T-dualidade e D-branas	50
12	Campos Eletromagnéticos em D-Branas	51
12.1	Acoplamento de campos de <i>Maxwell</i> às cordas abertas	51
12.2	D-branas com campo elétrico	52
13	Eletrodinâmica Não-Linear e de <i>Born-Infeld</i>	53
13.1	O arcabouço da Eletrodinâmica Não-Linear	53
13.2	Eletrodinâmica de <i>Born-Infeld</i>	54
14	Conclusão	55
	Referências Bibliográficas	56

1 Introdução

Na história da física, a busca pela unificação de diferentes fenômenos levou à descoberta ou reformulação de teorias. No século XIX, *Maxwell* unificou eletricidade e magnetismo. No século XX, o modelo de *Weinberg-Salam* uniu eletromagnetismo e força fraca, e a cromodinâmica quântica quantificou com sucesso a força forte. A combinação dessas unificações resultou no modelo padrão [1]. No entanto, esse modelo ainda é incompleto, com problemas como parâmetros indefinidos, a não renormalização ao unir gravidade e teoria quântica, falhas nas singularidades da relatividade geral e antinaturalidade em certos parâmetros. Isso levou à necessidade de buscar uma nova teoria [2]. Em 1969, a teoria das cordas foi proposta para explicar a interação forte, postulando que a matéria é composta por cordas unidimensionais em vez de partículas pontuais, [3] e este postulado foi combinado à cinemática padrão da covariância geral com os processos usuais de quantização [4]. Durante seu desenvolvimento, a teoria previu partículas indesejadas, e a supersimetria e redução de dimensões foram propostas para resolver esses problemas [5]. A teoria das cordas é única pois resolve divergências na gravidade quântica sem comprometer a consistência da teoria. Existem várias razões para estudar essa abordagem: é a principal candidata para unificar gravidade quântica e teoria quântica de campos [2], estabelece relações ricas entre Matemática e Física, contribui para a física de altas energias e é simples e elegante em sua formulação. Várias abordagens convergem para a teoria das cordas devido a problemas como a divergência da gravidade quântica e a busca por novas simetrias.

O estudo aprofundado deste tema permitiu ao aluno desenvolver as habilidades necessárias para iniciar uma carreira acadêmica na área em questão, além de prepará-lo para aplicação de um mestrado. A relatividade e a geometria diferencial, são utilizadas como ferramenta em vários momentos deste trabalho, utilizando os livros *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, de *Sean M. Carroll* [6] e *Geometry, Topology and Physics*, de *Mikio Nakahara* [7]. Apesar de já haver um conhecimento introdutório desses temas por parte do estudante, esse trabalho permitiu um maior aprofundamento dos temas e uma visão mais clara de suas aplicações em uma teoria tão promissora.

2 Objetivos

2.1 OBJETIVOS GERAIS

Este trabalho tem como objetivo introduzir e aprimorar o conhecimento do estudante em teoria das cordas, começando com a revisão de conceitos fundamentais necessários para uma compreensão sólida do assunto. Em seguida, são introduzidos os conceitos básicos relacionados à teoria das cordas, desde a corda relativística até sua quantização. Com esse conhecimento estabelecido, o foco se dá nas aplicações, especialmente na compreensão introdutória da teoria e como ela se relaciona com a física de partículas. O principal material utilizado foi o livro *A First Course in String Theory*, de *Barton Zwiebach* [1].

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Foi realizada uma breve revisão dos pré-requisitos necessários para entender efetivamente o restante da teoria, abrangendo os capítulos de 1 a 5 do livro de *Zwiebach*. Após o estudo desses tópicos, foram abordados os fundamentos, correspondentes aos capítulos de 6 a 13 da referência principal. Uma vez estabelecida uma base sólida, o aluno iniciou as aplicações, com base nos capítulos de 15 a 20 do livro.

3 Revisão: Dimensões extras e Cordas clássicas

Nesta parte do trabalho, é revisada a relatividade especial [6], o eletromagnetismo [8] [9] e a gravitação em várias dimensões [1].

3.1 RELATIVIDADE ESPECIAL

A relatividade especial é baseada no fato experimental de que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores inerciais, e também no princípio de que as leis da física são as mesmas para qualquer referencial inercial (por exemplo observadores que velocidade nula ou constante). Este fato leva às transformações de Lorentz, e é conveniente coletar as coordenadas na forma:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z). \quad (3.1)$$

As transformações de Lorentz são da forma:

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (3.2)$$

onde as matrizes Λ são os elementos do grupo de *Lorentz*, que obedecem a relação:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (3.3)$$

que define o grupo dos *boosts* e rotações espaciais, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Para um *boost* ao longo de x^1 , ou seja, as transformações de coordenadas de um referencial em repouso para um referencial que se move com velocidade v , as transformações de *Lorentz* tomam a forma:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1), \\ x'^1 &= \gamma(-\beta x^0 + x^1), \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde o fator de Lorentz γ é dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.6)$$

Para um *boost*, as transformações de Lorentz também podem ser escritas como a relação linear:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (3.7)$$

onde L^{μ}_{ν} é dado por

$$[L] = L^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Outra grandeza importante é o intervalo invariante Δs^2 . Todos os observadores de Lorentz (observadores inerciais cuja descrição do mundo está relacionada à de outro observador por uma transformação de Lorentz) obtêm o mesmo valor para

$$-\Delta s^2 \equiv -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2, \quad (3.9)$$

e na forma infinitesimal,

$$-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (3.10)$$

Utilizando a convenção de soma de Einstein, a equação (3.10) se torna:

$$-ds^2 = dx_{\mu} dx^{\mu}, \quad (3.11)$$

ou, utilizando a métrica:

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (3.12)$$

Na relatividade especial, energia e momento são dados por:

$$E = \gamma mc^2, \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}, \quad (3.13)$$

e se relacionam com a massa de repouso da seguinte forma:

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 c^2. \quad (3.14)$$

Combinando energia e momento, tem-se o quadrimomento

$$p^{\mu} = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (3.15)$$

e é fácil ver que

$$p^{\mu} p_{\mu} = -m^2 c^2, \quad (3.16)$$

o que mostra que a massa de repouso é um invariante sob as transformações de Lorentz.

Outro invariante importante é o tempo próprio, dado por

$$\tau = \frac{ds}{c}, \quad (3.17)$$

onde $-ds^2$ foi calculado para o observador de Lorentz que se move com a partícula. O tempo próprio pode ser entendido como o tempo registrado entre dois eventos por um relógio preso à partícula, e é uma quantidade que todos os observadores de Lorentz têm que concordar, pois as transformações de *Lorentz* deixam o intervalo ds invariante.

Utilizando o conceito de tempo próprio, pode-se construir a quadrivelocidade:

$$u^\mu = c \frac{dx^\mu}{ds} = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(c, \mathbf{v}). \quad (3.18)$$

3.2 ELETROMAGNETISMO

O eletromagnetismo clássico é uma teoria relativística, e tem como pilares as equações de Maxwell, aqui escritas nas unidades de Heaviside-Lorentz:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (3.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.22)$$

e a força de Lorentz, que define quem são os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (3.23)$$

A equação (3.19) mostra que o campo magnético pode ser escrito como o rotacional do potencial vetor:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.24)$$

E pode-se escrever o campo elétrico em termos dos dois potenciais:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (3.25)$$

A escolha dos potenciais admissíveis está ligada às transformações de calibre:

$$\begin{aligned} \Phi &\longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t}, \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \epsilon. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Potenciais (Φ, \mathbf{A}) e (Φ', \mathbf{A}') que são relacionados por transformações de calibre são fisicamente equivalentes e geram os mesmos campos elétricos e magnéticos. Os potenciais admissíveis são os que, de um pequeno pedaço do espaço a outro, estão relacionados por transformações de calibre infinitesimais.

É interessante também construir um quadrivetor utilizando as componentes dos potenciais vetor e escalar:

$$A_\mu = (-\Phi, A^1, A^2, A^3), \quad (3.27)$$

e também construir o tensor eletromagnético, coletando as componentes dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Este tensor é definido como:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.29)$$

Desta forma, as transformações de calibre (3.26) se tornam

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu + \partial_\mu \epsilon. \quad (3.30)$$

Introduzindo a quadricorrente

$$j^\mu = (c\rho, j^1, j^2, j^3), \quad (3.31)$$

as equações de Maxwell se tornam

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad (3.32)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu. \quad (3.33)$$

3.3 GRAVITAÇÃO

Na Teoria de Cordas, em meio às vibrações quânticas da corda relativística, surge naturalmente a gravitação. Ela aparece na teoria através da linguagem da relatividade geral de *Einstein*.

Na presença de um campo gravitacional, a métrica se torna dinâmica, e o espaço de Minkowski é distorcido de acordo com a distribuição de massa e energia. Assim, a equação (3.12) se torna

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (3.34)$$

onde a métrica do espaço plano $\eta_{\mu\nu}$ agora é substituída por $g_{\mu\nu}(x)$.

Para campos gravitacionais fracos, $g_{\mu\nu}(x)$ pode ser escrito como:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad (3.35)$$

onde interpretamos $h_{\mu\nu}(x)$ como uma pequena flutuação em torno da métrica de Minkowski. Desta forma, as equações de Einstein podem ser escritas na forma linearizada para $h_{\mu\nu}$ como

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha (\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h = 0. \quad (3.36)$$

Também há transformações de calibre na relatividade geral:

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (3.37)$$

que são uma mudança infinitesimal nas coordenadas, e podem ser vistas como uma variação infinitesimal na métrica $g_{\mu\nu}$.

Na aproximação para campos gravitacionais fracos e baixas velocidades, a gravitação de Newton é válida e pode ser utilizada para compreender a definição do comprimento de Planck em várias dimensões.

3.4 DIMENSÕES EXTRAS

É possível que dimensões espaciais extras não sejam detectadas por experimentos de baixas energias se estiverem compactadas em um espaço de volume pequeno.

Pode-se visualizar uma dimensão compacta imaginando uma linha onde dois pontos são declarados como sendo o mesmo se estes diferem por uma distância de um número inteiro vezes $2\pi R$:

$$x \sim x + 2\pi R. \quad (3.38)$$

Esta identificação transforma uma dimensão não compacta (uma linha) em uma dimensão compacta (um círculo), conforme mostra a figura 3.1.

O intervalo $0 \leq x < 2\pi R$ é o domínio fundamental da identificação (3.38). Dentro deste domínio, nenhum ponto está identificado a outro e qualquer ponto no espaço ou está dentro do domínio fundamental ou está identificado a um ponto neste domínio.

O mesmo raciocínio se aplica a espaços com mais dimensões, como um plano, por exemplo, onde se a identificação (3.38) for aplicada às coordenadas x e y , tem-se como domínio fundamental um toro.

3.4.1 Dimensões extras no poço de potencial

A constante de Planck relaciona a energia e frequência angular de um fóton da seguinte forma:

$$E = \hbar\omega, \quad (3.39)$$

e aparece nas relações de comutação:

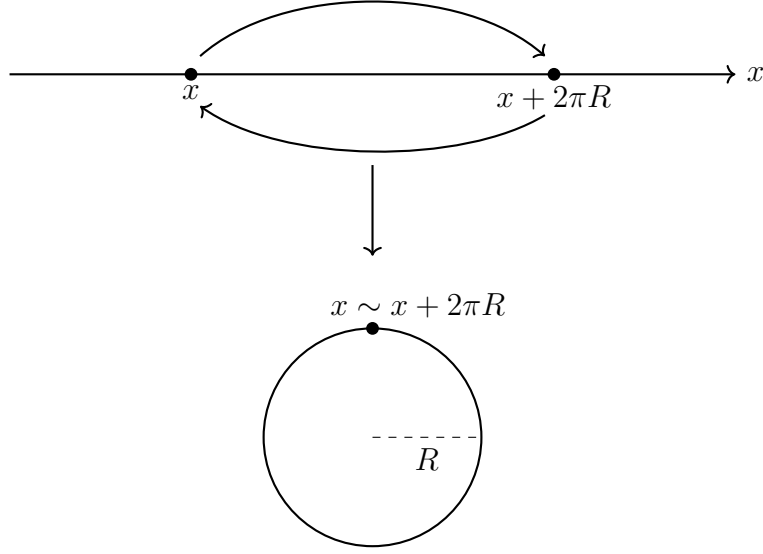


Figura 3.1: Identificação $x \sim x + 2\pi R$ transformando uma linha em um círculo compacto.

$$[x^i, p_j] = i\hbar\delta^i_j, \quad (3.40)$$

que podem ser generalizadas para qualquer número de dimensões espaciais simplesmente deixando os valores de i e j assumirem valores de 1 a d , sendo d o número de dimensões espaciais a serem consideradas.

Em duas dimensões, a equação de Schrödinger independente do tempo se escreve

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = E\Psi. \quad (3.41)$$

Pode-se aplicar (3.41) a um poço de potencial quadrado, onde o potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (0, a) \\ \infty, & \text{se } x \notin (0, a), \end{cases} \quad (3.42)$$

não depende de y . Escolhemos condições de contorno onde $\Psi(0, y) = \Psi(a, y) = 0$, e a dimensão ao longo da direção y está compactada com a seguinte identificação;

$$(x, y) \sim (x, y + 2\pi R), \quad (3.43)$$

onde encontrando o domínio fundamental, percebe-se que a partícula está confinada a um cilindro.

Utilizando o método da separação de variáveis, têm-se as soluções:

$$\psi_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (3.44)$$

$$\phi_m(y) = a_m \sin \frac{my}{R} + b_m \cos \frac{my}{R}, \quad (3.45)$$

com R sendo o raio do cilindro e $n = 1, 2, 3, \dots$ e $m \in \mathbb{N}$.

De acordo com a identificação (3.43), surgem condições de contorno para $\phi_m(y)$:

$$\phi_m(y) = \phi_m(y + 2\pi R), \quad (3.46)$$

o que mostra que $\phi_m(y)$ não precisa se anular em nenhum dos valores de y . Os cossenos presentes na equação (3.45) permitem encontrar uma solução constante não nula:

$$\phi_0 = b_0, \text{ com } m = 0, \quad (3.47)$$

que é a chave para entender por que uma dimensão extra pequena não muda significativamente a física em baixas energias.

Os níveis de energia para este problema são

$$E_{nm} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{R} \right)^2 \right]. \quad (3.48)$$

Para $n = m = 1$ e $R \ll a$,

$$E_{11} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R} \right)^2. \quad (3.49)$$

A energia relacionada a x é comparável à relacionada a y quando $m = 1$:

$$\frac{n\pi}{a} \approx \frac{1}{R} \longrightarrow n \approx \frac{1}{\pi} \frac{a}{R}, \quad (3.50)$$

onde, como $R \ll a$, n deve ser muito grande. Isso indica que para experimentos de baixa energia, dimensões extras podem não ser detectadas se forem suficientemente pequenas.

3.4.2 Dimensões extras no Eletromagnetismo

Também é possível generalizar o conceito de campo elétrico para várias dimensões. Partindo da equação (3.28), tem-se que $F^{0i} = E_i$, e pegando a componente 0 da equação (3.33),

$$\frac{\partial F^{0i}}{\partial x^i} = j^0, \quad (3.51)$$

vemos que esta é a lei de Gauss, válida para qualquer i :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (3.52)$$

E também, observando que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, tem-se a equação de Poisson válida para d dimensões espaciais:

$$\nabla^2\Phi = -\rho. \quad (3.53)$$

Integrando ambos os lados de (3.52) sobre uma bola d -dimensional:

$$\int_{B^d} d(\text{vol}) \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_{B^d} d(\text{vol}) \rho. \quad (3.54)$$

Do lado direito, tem-se a carga total, e do esquerdo, utilizando o teorema de Gauss, tem-se o fluxo de \mathbf{E} através de $B^d(r)$, que para uma carga pontual q se torna:

$$E(r) \text{vol}(S^{d-1}(r)) = q, \quad (3.55)$$

onde pode-se utilizar que

$$\text{vol}(S^{d-1}(r)) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} r^{d-1}}{\Gamma(\frac{d}{2})}. \quad (3.56)$$

Assim, o campo elétrico de uma carga pontual em um espaço com d dimensões, para $d \geq 3$ é

$$E(r) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{q}{r^{d-1}}. \quad (3.57)$$

3.4.3 Dimensões extras na Relatividade e Gravitação

O intervalo invariante ds^2 pode ser estendido para incorporar mais dimensões:

$$-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \dots + (dx^{d-1})^2, \quad (3.58)$$

onde d é o número de dimensões espaciais.

As transformações de Lorentz são definidas como mudanças lineares nas coordenadas que deixam ds^2 invariante, o que garante que todos os observadores inerciais no espaço-tempo D -dimensional concordem no mesmo valor para a velocidade da luz.

Na Gravitação Newtoniana, pode-se escrever um campo gravitacional da seguinte forma:

$$\mathbf{g} = -\nabla V_g, \quad (3.59)$$

onde V_g é o potencial gravitacional. Esta equação é válida para qualquer número de dimensões, e assim como no eletromagnetismo, tem-se a equação de Poisson, para um espaço-tempo D -dimensional:

$$\nabla^2 V_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m, \quad (3.60)$$

na qual a partir de uma análise dimensional, fica claro que a constante gravitacional G precisa mudar suas unidades para cada D .

Em gravitação, às vezes é conveniente usar o sistema de unidades de Planck, onde as três constantes fundamentais

$$\begin{aligned}
G^{(4)} &= 6,674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}, \\
c &= 2,998 \times 10^8 \frac{m}{s}, \\
\hbar &= 1,055 \times 10^{-34} \frac{kg \cdot m^2}{s},
\end{aligned} \tag{3.61}$$

assumem o valor numérico igual a 1:

$$G^{(4)} \stackrel{N}{=} c \stackrel{N}{=} \hbar \stackrel{N}{=} 1, \tag{3.62}$$

e as unidades são chamadas de comprimento de Planck l_p , tempo de Planck t_p , e massa de Planck m_p :

$$G^{(4)} = 1 \frac{l_p^3}{m_p \cdot t_p^2}, \quad c = 1 \frac{l_p}{t_p}, \quad \hbar = 1 \frac{m_p \cdot l_p^2}{t_p}. \tag{3.63}$$

Essas unidades são importantes pois para distâncias e tempos da ordem de l_p e t_p efeitos de gravitação quântica podem aparecer.

Pela equação (3.60), é fácil ver que $[G^{(5)}] = L [G^{(4)}]$ com L sendo a dimensão de comprimento, e resolvendo as equações (3.63) para l_p ,

$$l_p^{(4)} = \sqrt{\frac{G^{(4)} \hbar}{c^3}}, \tag{3.64}$$

onde $l_p^{(4)}$ é o comprimento de Planck no espaço-tempo quadridimensional, pode-se concluir que

$$[G^{(5)}] = \frac{[c]^3 L^3}{[\hbar]}. \tag{3.65}$$

Removendo os colchetes, substituindo L por l_p , reintroduzindo $G^{(4)}$, tem-se o resultado generalizado:

$$(l_p^{(D)})^{D-2} = (l_p^{(4)})^2 \frac{G^{(D)}}{G^{(4)}}. \tag{3.66}$$

Para dimensões extras compactadas em um círculo de raio R , o comprimento dessa dimensão é $2\pi R \equiv l_C$, e notando a relação

$$\rho_m^{(5)} = \frac{1}{2\pi R} \rho_m^{(4)} \tag{3.67}$$

a partir da equação (3.60), conclui-se que

$$\frac{G^{(5)}}{G^{(4)}} = l_C, \tag{3.68}$$

e generalizando para D dimensões:

$$\frac{G^{(D)}}{G^{(4)}} = (l_C)^{D-4}. \quad (3.69)$$

Para dimensões extras de comprimentos diferentes, a relação (3.69) pode ser escrita como

$$\frac{G^{(D)}}{G^{(4)}} = V_C, \quad (3.70)$$

onde V_C é o volume das dimensões extras.

Combinando (3.66) e (3.69), e resolvendo para l_C :

$$l_C = l_p^{(D)} \left(\frac{l_p^{(D)}}{l_p^{(4)}} \right)^{\frac{2}{D-4}}. \quad (3.71)$$

Este resultado permite calcular comprimentos relativamente grandes para dimensões extras compactas, e experimentos gravitacionais são a melhor escolha para dizer até que comprimento l_C podem existir tais dimensões, pois em teoria das cordas, a gravidade surge a partir de cordas fechadas, que são afetadas por qualquer dimensão extra existente, diferentemente do eletromagnetismo, que aparece nas cordas abertas. Assim, experimentos eletromagnéticos podem deixar dimensões compactas escondidas, pois nosso espaço pode ser um hiperplano transversal as dimensões buscadas, e as cordas abertas que dão origem aos efeitos eletromagnéticos poderiam estar presas a esse hiperplano, não sendo afetadas pelas outras dimensões.

4 Cordas relativísticas

Neste capítulo são aplicadas as ferramentas da mecânica clássica [10] [11] e da relatividade especial [6] a uma corda. É introduzida a ação de *Nambu-Goto*, que relaciona a área da folha de mundo à ação da corda. Vários conceitos de topologia e geometria diferencial são utilizados nesta seção [7].

4.1 INTRODUZINDO A CORDA RELATIVÍSTICA

A ação para uma partícula pontual relativística livre é proporcional ao comprimento da linha de mundo descrita por um parâmetro τ , e se escreve da seguinte maneira:

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau , \quad (4.1)$$

onde m é a massa da partícula, c é a velocidade da luz no vácuo e x^μ são as coordenadas da posição da partícula.

Escolhendo $c = 1$:

$$S = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau , \quad (4.2)$$

e simplificando o radicando:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \dot{x}^2 , \quad (4.3)$$

tem-se definida uma Lagrangiana:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L d\tau, \quad L = -m\sqrt{-\dot{x}^2} . \quad (4.4)$$

O momento é obtido diferenciando-se a Lagrangiana em relação à velocidade:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} . \quad (4.5)$$

Desta forma, têm-se as equações de *Euler-Lagrange*:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 . \quad (4.6)$$

Todas as componentes do momento são constantes de movimento e satisfazem o vínculo

$$p^2 + m^2 = 0 . \quad (4.7)$$

Para a corda relativística, a chamada ação de *Nambu-Goto* é proporcional à área da folha de mundo, que é a superfície descrita pela corda ao se movimentar no espaço-tempo. A folha de mundo em um espaço-tempo D -dimensional, para $d = D - 1$ dimensões espaciais, mostrada na figura 4.1, é parametrizada da seguinte forma:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)), \quad (4.8)$$

onde X^μ é a função que mapeia uma pequena região do espaço dos parâmetros τ e σ , os quais estão relacionados ao tempo e ao espaço, respectivamente, ao espaço-tempo.

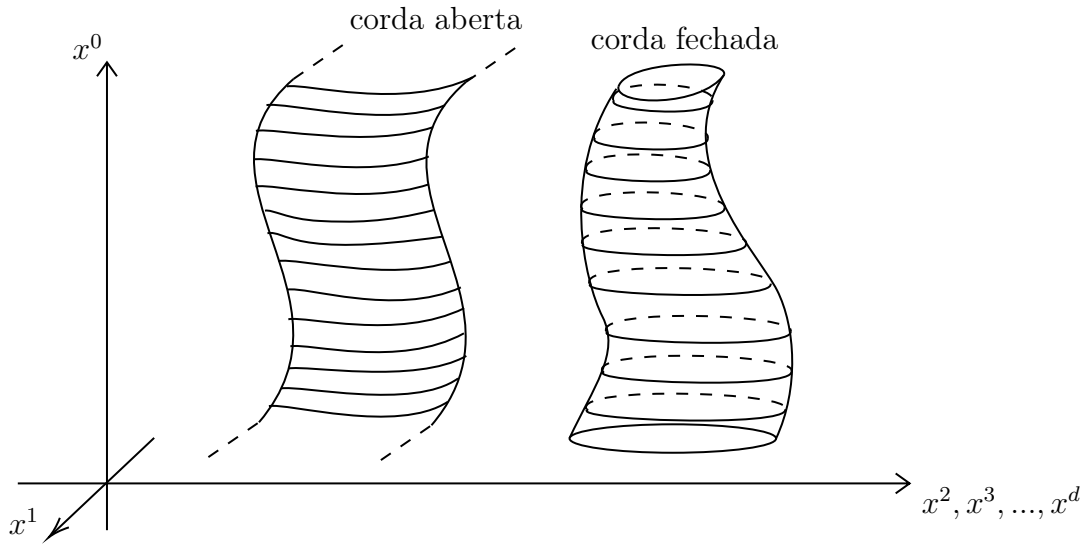


Figura 4.1: Folhas de mundo de uma corda aberta (faixa) e de uma corda fechada (tubo).

A área da folha de mundo pode ser obtida a partir do produto vetorial de dois vetores infinitesimais dv_1^μ e dv_2^μ que formam um paralelogramo na folha de mundo conforme a figura (4.2), e estes vetores estão relacionados à dois segmentos $d\tau$ e $d\sigma$ no espaço de parâmetros:

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma. \quad (4.9)$$

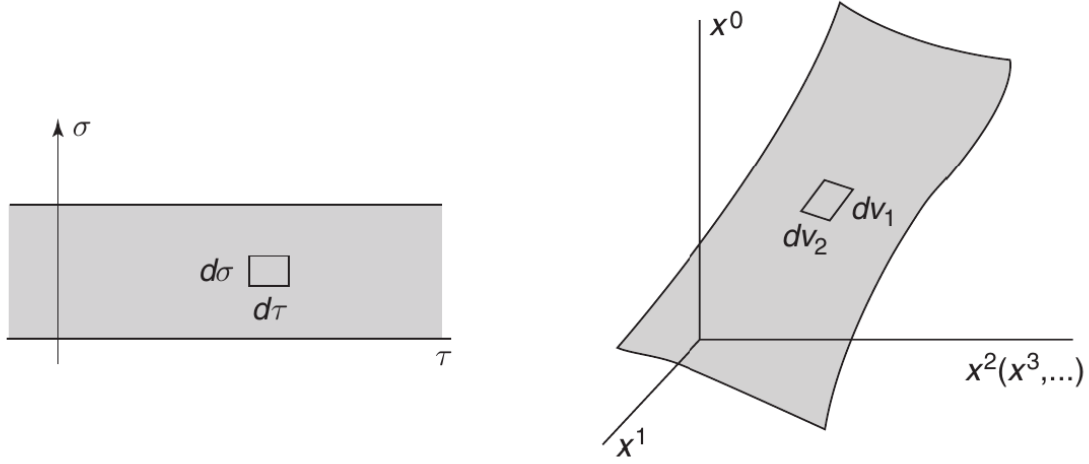


Figura 4.2: Retângulo no espaço de parâmetros e paralelogramo na superfície no espaço-alvo.

O funcional de área é então escrito como a soma de todos os pedacinhos de área

$$dA = \sqrt{(dv_1 \cdot dv_1)(dv_2 \cdot dv_2) - (dv_1 \cdot dv_2)^2}. \quad (4.10)$$

Esta soma é uma integral:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}, \quad (4.11)$$

onde foi necessário inverter o sinal dentro da raiz para que o radicando seja positivo. A ação de *Nambu-Goto* é então proporcional à área:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (4.12)$$

onde T_0 é a tensão na corda, e foram introduzidas as notações:

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (4.13)$$

Para uma reparametrização com parâmetros ξ^1 e ξ^2 quaisquer, a ação pode ser construída do seguinte modo:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad (4.14)$$

na qual γ é o determinante da métrica induzida na folha de mundo:

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta}. \quad (4.15)$$

Observando a equação (4.14), fica claro que a ação de *Nambu-Goto* é invariante sob reparametrizações, o que é análogo à invariância de calibre na eletrodinâmica.

4.2 FORMALISMO LAGRANGIANO NA CORDA RELATIVÍSTICA

Escrevendo (4.14) como a integral dupla de uma densidade de Lagrangiana:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu), \quad (4.16)$$

têm-se as densidades de momento para τ e σ :

$$\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (4.18)$$

Aplicando o princípio de *Hamilton* à variação da ação, chega-se à equação de movimento:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0, \quad (4.19)$$

que pode ser interpretada como uma equação de continuidade, como será discutido na seção 5.

As condições de contorno surgem de termos que devem se anular na variação δS de S . Uma delas é a condição de contorno de *Dirichlet*:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \mu \neq 0, \quad (4.20)$$

onde σ_* é a coordenada σ de uma extremidade. A outra é a condição de extremidade livre:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0. \quad (4.21)$$

A condição (4.21) pode ser entendida em termos de condições de contorno de *Neumann*, e as condições de *Dirichlet* são entendidas como a fixação das extremidades da corda às D-branas, que são objetos físicos reais, possuindo densidade de energia e diversas propriedades importantes.

Como dito anteriormente, assim como na eletrodinâmica, é possível escolher o calibre sem alterar a forma da ação de *Nambu-Goto*. O calibre estático, para qualquer instante t em um ponto Q da folha de mundo, é

$$\tau(Q) = t(Q), \quad (4.22)$$

o que leva a:

$$X^0(\tau, \sigma) \equiv ct(\tau, \sigma) = c\tau, \quad (4.23)$$

e

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (ct, \mathbf{X}(t, \sigma)). \quad (4.24)$$

4.3 TENSÃO E ENERGIA

O primeiro cálculo da teoria das cordas realizado neste trabalho é a obtenção da energia potencial V de uma corda esticada de $x^1 = 0$ a $x^1 = a$, com tensão T_0 , conforme mostra a figura 4.3.

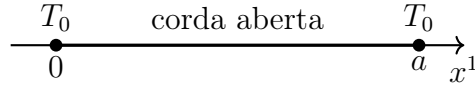


Figura 4.3: Corda esticada de $x^1 = 0$ a $x^1 = a$ sob tensão T_0 .

A partir da ação de *Nambu-Goto*:

$$V = T_0 a. \quad (4.25)$$

A massa de repouso por unidade de comprimento μ_0 é:

$$\mu_0 c^2 = \frac{V}{a} = T_0 \longrightarrow \mu_0 = \frac{T_0}{c^2}. \quad (4.26)$$

Este resultado pode ser interpretado da seguinte forma: V é a energia gasta para criar a corda, esticando-a de um tamanho infinitesimal até a . Ao esticar a corda, a tensão T_0 é aplicada, adicionando energia e criando massa de repouso.

4.4 VELOCIDADE TRANSVERSAL E MOVIMENTO DAS EXTREMIDADES

Introduzindo o parâmetro s que mede o comprimento ao longo da corda, a velocidade transversal \mathbf{v}_\perp é definida como a componente de $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}$ na direção perpendicular à corda:

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}. \quad (4.27)$$

A ação de *Nambu-Goto* em termos de \mathbf{v}_\perp é:

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}, \quad (4.28)$$

com Lagrangiana dada por:

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}. \quad (4.29)$$

Definindo $v_\perp \equiv v$, para $\mu = 1, \dots, d$ nas extremidades, tem-se que:

$$\mathcal{P}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \mathbf{0}, \quad (4.30)$$

e como $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}$ é um vetor unitário:

$$v^2 = c^2. \quad (4.31)$$

Este resultado mostra que as extremidades se movem a velocidade da luz, transversalmente à corda aberta relativística, o que sugere uma relação com o fóton, que será compreendida melhor na seção 7.

4.5 PARAMETRIZAÇÃO E MOVIMENTO CLÁSSICO

Utilizando o calibre estático, uma boa parametrização para σ é construída preenchendo a folha de mundo com linhas de σ constante ortogonais à corda em t , o que leva a:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = 0, \quad (4.32)$$

e:

$$\mathbf{v}_\perp \equiv \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \quad (4.33)$$

para todos os pontos. Assim, as densidades de momento simplificadas se tornam:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial X^\mu}{\partial t}, \quad (4.34)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s}. \quad (4.35)$$

A partir das equações (4.34) e (4.35), é possível entender melhor a equação de movimento (4.19) da corda. Tem-se que $\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$, e

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0 \frac{ds}{d\sigma}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = 0, \quad (4.36)$$

de onde pode-se inferir que a quantidade

$$\frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.37)$$

é a energia de um pequeno pedaço de corda.

Sendo E a energia total da corda, substituindo as componentes espaciais de (4.34) e (4.35) em (4.19), e escolhendo para um ponto Q a parametrização:

$$\sigma(Q) = \frac{E(Q)}{T_0}, \quad (4.38)$$

$$\sigma \in [0, \sigma_1], \quad \sigma_1 = \frac{E}{T_0}, \quad (4.39)$$

chega-se à familiar equação de onda:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \sigma^2}, \quad (4.40)$$

com a condição

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)^2 = 1. \quad (4.41)$$

Com essa parametrização que utiliza a energia, a condição (4.21) nas extremidades é uma condição de contorno de *Neumann*:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = \mathbf{0}. \quad (4.42)$$

5 Correntes e cone de luz

Nesta parte do trabalho, são vistos as correntes de momento conservadas na folha de mundo, além das cargas associadas à simetria de *Lorentz* [1] [6]. É apresentado o parâmetro α' , amplamente utilizado em teoria das cordas [2]. Por fim, é apresentado o calibre do cone de luz [1], e uma breve revisão de conceitos de teoria quântica de campos se faz necessária [12] [13].

5.1 CORRENTES NA FOLHA DE MUNDO

Existem correntes conservadas na folha de mundo, e como dito na seção 3.2, a equação (4.19) é interpretada como uma equação de continuidade:

$$\partial_\alpha \mathcal{P}_\mu^\alpha = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau}, \quad (5.1)$$

onde \mathcal{P}_μ^τ é agora visto como a densidade de momento canônico em σ :

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma. \quad (5.2)$$

Derivando $p_\mu(\tau)$ em relação a τ , chega-se à conservação de momento na folha de mundo:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \quad (5.3)$$

e, utilizando o calibre estático, tem-se:

$$\frac{dp_\mu}{dt} = 0. \quad (5.4)$$

As equações (5.3) e (5.4) expressam a conservação do momento da corda tanto na folha de mundo, como em todo o espaço de *Minkowski*.

De forma mais geral, para qualquer contorno γ que conecte as extremidades $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_1$ da folha de mundo,

$$p_\mu = \int_\gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau). \quad (5.5)$$

Também existem correntes $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$ conservadas que surgem das simetrias de *Lorentz*, definidas como:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha \equiv X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha, \quad (5.6)$$

e as cargas associadas são:

$$M_{\mu\nu} = \int_{\gamma} (\mathcal{M}_{\mu\nu}^{\tau} d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^{\sigma} d\tau). \quad (5.7)$$

Atualmente em teoria das cordas, é comum utilizar o parâmetro de declive α' no lugar da tensão T_0 . Este parâmetro é definido da seguinte forma:

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2, \quad (5.8)$$

sendo J o momento angular da corda e E sua energia total. Com isso, α' pode ser relacionado à tensão:

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi\hbar c T_0}, \quad (5.9)$$

e, por fim, ao comprimento da corda l_s , que em unidades naturais é escrito como:

$$l_s = \sqrt{\alpha'}. \quad (5.10)$$

5.2 CORDAS NO CONE DE LUZ

Diversas reparametrizações podem ser feitas em τ e σ . Um exemplo são os calibres do tipo:

$$\lambda\tau = n_{\mu} X^{\mu}(\tau, \sigma), \quad (5.11)$$

onde λ é uma constante.

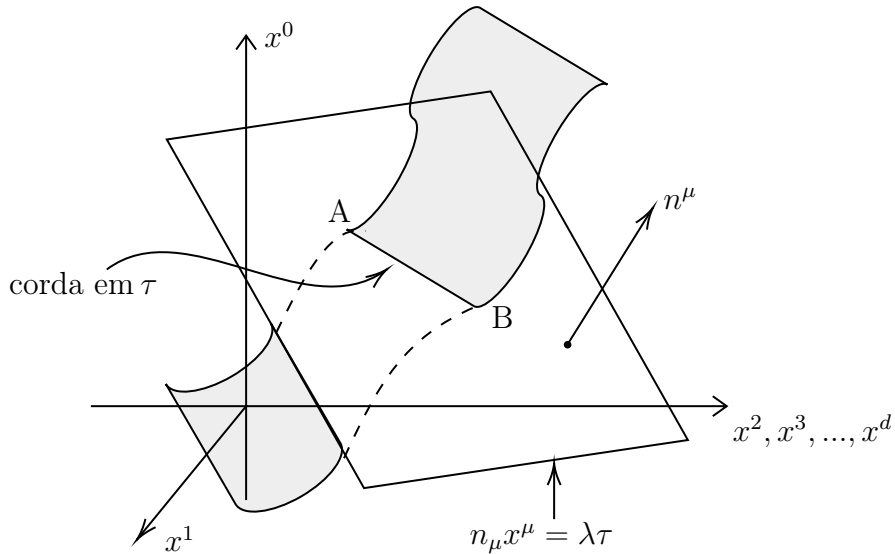


Figura 5.1: A condição de calibre $n \cdot X = \lambda\tau$ fixa as cordas a serem as curvas na intersecção entre a folha de mundo e os hiperplanos ortogonais ao vetor n^{μ} .

Para τ constante, as cordas estão em um hiperplano ortogonal ao vetor n^μ , e, mais precisamente, são a interseção entre a folha de mundo e o hiperplano $n_\mu x^\mu = \lambda\tau$.

Utilizando o momento p_μ e unidades naturais com $l_s = \sqrt{\alpha'}$, a equação (5.11) para cordas abertas se torna:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n \cdot p)\tau. \quad (5.12)$$

Exigindo a constância de $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu} = n \cdot \mathcal{P}^\tau$ sobre as cordas, chega-se a duas condições de parametrização:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta\alpha'(n \cdot p)\tau, \quad (5.13)$$

$$n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta}n \cdot \mathcal{P}^\tau, \quad (5.14)$$

com,

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{para cordas abertas,} \\ 1 & \text{para cordas fechadas.} \end{cases} \quad (5.15)$$

Com isso, têm-se os seguintes vínculos para \dot{X} e X' :

$$\left(\dot{X} \pm X'\right)^2 = 0, \quad (5.16)$$

que simplificam muito as expressões (4.34) e (4.35) para as densidades de momento:

$$\mathcal{P}^{\tau\sigma} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^\mu, \quad (5.17)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}X'^\mu. \quad (5.18)$$

Assim, a equação de movimento (4.19) se torna uma equação de onda:

$$\ddot{X}^\mu = X''^\mu. \quad (5.19)$$

Para as condições de contorno de *Neumann*, a solução é:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (5.20)$$

e os vínculos (5.16) se tornam:

$$\dot{X}^\mu \pm X'^\mu = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (5.21)$$

onde x_0^μ e α_n^μ são constantes a serem especificadas.

Porém, escolhendo arbitrariamente α_n^μ , os vínculos (5.13) e (5.14) não são satisfeitos, o que é resolvido utilizando-se as coordenadas e o calibre do cone de luz. Nas coordenadas do cone de luz, x^0 e x^1 são substituídos por:

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1) \quad \text{e} \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1). \quad (5.22)$$

O diagrama 5.2 ilustra as coordenadas do cone de luz:

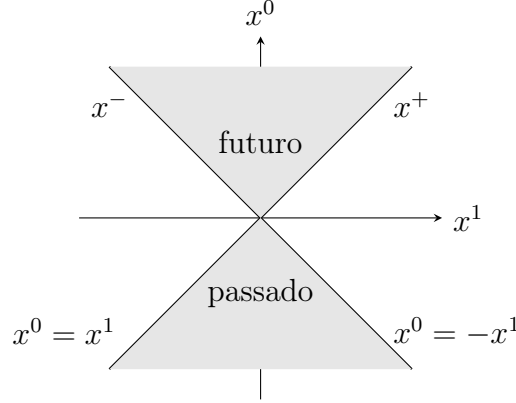


Figura 5.2: Cone de luz no espaço-tempo de Minkowski.

O invariante $-ds^2$ se torna:

$$-ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (5.23)$$

e a relação entre a energia E_{lc} no cone de luz e o momento p^- se torna:

$$p^- = \frac{E_{lc}}{c}. \quad (5.24)$$

Selecionar o calibre do cone de luz significa impor as condições (5.13) e (5.14) a um vetor n^μ que obedece a equação:

$$n \cdot X = X^+. \quad (5.25)$$

Esta estratégia mostra que não há dinâmica em X^- e toda a dinâmica está nas coordenadas transversais:

$$X^I = (X^2, X^3, \dots, X^d). \quad (5.26)$$

Com essas informações, chega-se aos vínculos (5.21) para o cone de luz:

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(\dot{X}^I \pm X'^I \right)^2, \quad (5.27)$$

onde L_n^\perp são os modos transversais de *Virasoro*:

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I, \quad \text{e} \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad (5.28)$$

com os α_n^I 's sendo os coeficientes das oscilações harmônicas transversais de (5.20). Os modos de *Virasoro* são os modos de expansão da coordenada $X^-(\tau, \sigma)$, de grande importância em teoria das cordas. Para $\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}$, e calculando a massa M de uma corda que se movimenta arbitrariamente, obtém-se:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I. \quad (5.29)$$

Este resultado mostra que a massa clássica da corda é um número real, convencionado como positivo.

5.3 CAMPOS E PARTÍCULAS NO CONE DE LUZ

Um campo quântico escalar pode ter a forma

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}), \quad (5.30)$$

obedecendo à equação de *Klein-Gordon*:

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (5.31)$$

onde o operador \square é o D'Alembertiano $\partial_\mu \partial^\mu$.

As relações de comutação para os osciladores escritas como:

$$[a_p, a_k^\dagger] = \delta_{p,k}, \quad [a_p, a_k] = 0. \quad (5.32)$$

Os operadores a_k^\dagger e a_k são, respectivamente, operadores de criação e aniquilação de partículas. Assumindo a existência de um estado de vácuo $|\Omega\rangle$ e um Hamiltoniano,

$$H = \sum_{\mathbf{p}} E_p a_p^\dagger a_p, \quad (5.33)$$

com $H|\Omega\rangle = 0$, percebe-se que $|\Omega\rangle$ é um estado onde não há partículas. De outra forma, para precisamente uma partícula, tem-se o estado $a_p^\dagger |\Omega\rangle$.

Para várias partículas, o estado é:

$$\prod_{k=1}^N a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle. \quad (5.34)$$

Em coordenadas do cone de luz, o estado de uma partícula é:

$$a_{p^+, p_T}^\dagger |\Omega\rangle, \quad (5.35)$$

com o índice p_T representando o momento transversal.

De forma semelhante, para os campos de *Maxwell* tem-se os estados de um fóton para um espaço-tempo D -dimensional, com ξ^I sendo o vetor de polarização:

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle, \quad (5.36)$$

e para campos gravitacionais, onde ξ_{IJ} é o tensor de polarização do graviton, o estado que representa um único graviton é:

$$\sum_{I, J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle, \quad \xi_{II} = 0. \quad (5.37)$$

6 A Partícula Pontual Quântica Relativística

Para realizar a quantização da corda relativística mais adiante, se fez necessário revisar conceitos de mecânica quântica [14] [15], teoria quântica de campos [12] [13] e relatividade especial [6]. O objeto de estudo deste capítulo é então uma partícula pontual, a qual está sujeita as leis da relatividade especial e mecânica quântica em conjunto [1].

6.1 PARTÍCULA NO CONE DE LUZ

Escolhendo a coordenada x^+ proporcional a τ , é definido o calibre de cone de luz para a partícula:

$$\boxed{x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau .} \quad (6.1)$$

Tomando a componente $+$ da equação (4.5) e utilizando o calibre de cone de luz, chega-se à:

$$p^+ = \frac{m}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^+ = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{p^+}{m} , \quad (6.2)$$

$$1 = \frac{1}{m\sqrt{-\dot{x}^2}} \longrightarrow \dot{x}^2 = -\frac{1}{m^2} . \quad (6.3)$$

O que permite a simplificação da expressão (4.5), obtendo

$$p_\mu = m^2 \dot{x}_\mu , \quad (6.4)$$

que difere da equação usual $p_\mu = m\dot{x}_\mu$ devido à escolha de τ adimensional.

Substituindo o resultado (6.4) na equação de movimento (4.6) obtém-se

$$\ddot{x}_\mu = 0 , \quad (6.5)$$

como esperado para a partícula livre.

Expandindo a condição (4.7) em componentes do cone de luz,

$$-2p^+ p^- + p^I p^I + m^2 = 0 \longrightarrow p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) , \quad (6.6)$$

o que determina p^- dados p^+ e as componentes p^I do momento transversal \mathbf{p}_T . De forma mais geral, este resultado mostra que o momento é completamente determinado ao se fixar p^+ e p^I .

Tomando a componente $-$ da equação (6.4) e utilizando o resultado de (6.6) obtém-se

$$\frac{dx^-}{d\tau} = \frac{1}{m^2} p^- , \quad (6.7)$$

e integrando chega-se à

$$x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau , \quad (6.8)$$

onde x_0^- é uma constante de integração. Este resultado também é válido para as componentes transversais:

$$x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau , \quad (6.9)$$

e pelo calibre (6.1), $x_0^+ = 0$.

Deste modo, as variáveis dinâmicas independentes são

$$(x^I , x_0^- , p^I , p^+) . \quad (6.10)$$

6.2 ABORDAGENS DE HEISENBERG E SCHRÖDINGER

Existem duas abordagens principais para o entendimento da evolução temporal na Mecânica Quântica. Uma delas é a de *Schrödinger*, na qual o sistema evolui e os operadores não mudam, e a outra é a de *Heisenberg*, na qual os operadores mudam com o tempo e o estado do sistema é fixo.

Na abordagem de *Schrödinger* há apenas dependência temporal explícita nos operadores, enquanto no caso de *Heisenberg* a dependência pode ser tanto implícita quanto explícita.

Seja $\hat{\xi}(t)$ um operador de *Heisenberg* que foi obtido a partir de um operador de *Schrödinger* $\hat{\xi}$ independente do tempo. Sua dependência temporal é então governada por:

$$i \frac{d\hat{\xi}(t)}{dt} = \left[\hat{\xi}(t) , \hat{H}(\hat{p}(t), \hat{q}(t); t) \right] . \quad (6.11)$$

Aqui, $\hat{H}(\hat{p}(t), \hat{q}(t); t)$ é o operador Hamiltoniano de *Heisenberg*, e $\hat{q}(t)$ e $\hat{p}(t)$ são os operadores posição e momento, respectivamente.

Se um operador $\hat{O}(t)$ é um operador de *Heisenberg* correspondente a um operador de *Schrödinger* que depende explicitamente do tempo, sua dependência temporal é comandada por:

$$i \frac{d\hat{O}(t)}{dt} = i \frac{d\hat{O}}{dt} + \left[\hat{O}(t) , \hat{H}(\hat{p}(t), \hat{q}(t); t) \right] . \quad (6.12)$$

Para transitar entre as duas abordagens, existem algumas regras. Primeiramente, assume-se um Hamiltoniano de *Schrödinger* $\hat{H}(p, q)$ independente do tempo. Neste caso, a evolução temporal do estado $|\Psi\rangle$ é dada por:

$$|\Psi, t\rangle = e^{-iHt} |\Psi\rangle . \quad (6.13)$$

Desse modo, é fácil ver que:

$$e^{iHt}\hat{\alpha}|\Psi, t\rangle = e^{iHt}\hat{\alpha}e^{-iHt}|\Psi\rangle \equiv \hat{\alpha}(t)|\Psi\rangle, \quad (6.14)$$

onde $\hat{\alpha}(t) = e^{iHt}\hat{\alpha}e^{-iHt}$ é o operador de *Heisenberg* correspondente ao operador de *Schrödinger* $\hat{\alpha}$. A operação contrária também é válida.

6.3 QUANTIZAÇÃO DA PARTÍCULA PONTUAL

O primeiro passo é escolher um conjunto de operadores de *Schrödinger* no calibre do cone de luz:

operadores de *Schrödinger* independentes do tempo: $(\hat{x}^I, \hat{x}_0^-, \hat{p}^I, \hat{p}^+)$.

(6.15)

Com operadores de *Heisenberg* correspondentes:

operadores de *Heisenberg*: $(\hat{x}^I(\tau), \hat{x}_0^-(\tau), \hat{p}^I(\tau), \hat{p}^+(\tau))$.

(6.16)

Alguns operadores adicionais também são necessários:

$$\hat{x}^+(\tau) \equiv \frac{\hat{p}^+}{m^2}\tau, \quad (6.17)$$

$$\hat{x}^-(\tau) \equiv \hat{x}_0^- + \frac{\hat{p}^-}{m^2}\tau, \quad (6.18)$$

$$\hat{p}^- \equiv \frac{1}{2\hat{p}^+}(\hat{p}^I\hat{p}^I + m^2). \quad (6.19)$$

Estes são análogos quânticos das quantidades expressas nas equações (6.1), (6.6) e (6.8).

As relações de comutação são, então, postuladas:

$[\hat{x}^I, \hat{p}^J] = i\eta^{IJ}, \quad [\hat{x}_0^-, \hat{p}^+] = i\eta^{-+} = -i,$

(6.20)

com $\eta^{IJ} = \delta^{IJ}$. Todos os outros comutadores são escolhidos como 0, e as relações de comutação para a abordagem de *Heisenberg* são as mesmas.

Utilizando o calibre do cone de luz, a energia \hat{p}^- gera uma evolução no tempo no cone de luz x^+ :

$$\frac{\partial}{\partial x^+} \longleftrightarrow \hat{p}^-, \quad (6.21)$$

e a evolução em τ é gerada por:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\hat{p}^+}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^+} \longleftrightarrow \frac{\hat{p}^+}{m^2} \hat{p}^- . \quad (6.22)$$

Assim, é postulado o Hamiltoniano de *Heisenberg*:

$$\hat{H}(\tau) = \frac{\hat{p}^+(\tau)}{m^2} \hat{p}^-(\tau) = \frac{1}{2m^2} (\hat{p}^I(\tau) \hat{p}^I(\tau) + m^2) , \quad (6.23)$$

que é uma constante de movimento:

$$\frac{d}{dt} \hat{H} = 0 . \quad (6.24)$$

Os momentos $\hat{p}^+(\tau)$ e $\hat{p}^I(\tau)$ comutam entre si e com o Hamiltoniano. Logo, são constantes de movimento \hat{p}^+ e \hat{p}^I . Já o operador $\hat{x}^I(\tau)$ comuta da seguinte forma:

$$i \frac{d\hat{x}^I(\tau)}{d\tau} = [\hat{x}^I(\tau), \hat{H}(\tau)] = i \frac{\hat{p}^I}{m^2} , \quad (6.25)$$

portanto

$$\frac{d\hat{x}^I(\tau)}{d\tau} = \frac{\hat{p}^I}{m^2} , \quad (6.26)$$

que está de acordo com o resultado clássico. Similarmente:

$$\frac{d\hat{x}^-(\tau)}{d\tau} = \frac{\hat{p}^-}{m^2} \quad \text{e} \quad \frac{d\hat{x}^+(\tau)}{d\tau} = \frac{\hat{p}^+}{m^2} . \quad (6.27)$$

Como é conveniente trabalhar no espaço dos momentos, os estados são:

$$\text{estados da partícula quântica pontual: } |p^+, \mathbf{p}_T\rangle , \quad (6.28)$$

onde p^+ é o autovalor do operador \hat{p}^+ e \mathbf{p}_T é o momento transversal.

Como p^+ e \mathbf{p}_T são variáveis contínuas:

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\mathbf{p}_T \psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) |p^+, \mathbf{p}_T\rangle . \quad (6.29)$$

Partindo da equação de *Schrödinger* para o estado $|\Psi, \tau\rangle$:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\Psi, \tau\rangle = \hat{H} |\Psi, \tau\rangle , \quad (6.30)$$

e utilizando a equação (6.29), chega-se a:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) = \frac{1}{2m^2} (\hat{p}^I \hat{p}^I + m^2) \psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) , \quad (6.31)$$

que é a equação de *Schrödinger* para a função de onda $\psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T)$ do espaço dos momentos. Isto completa o desenvolvimento da quantização da partícula pontual.

6.4 PARTÍCULA QUÂNTICA E PARTÍCULAS ESCALARES

Para uma partícula de massa m , é natural identificar os estados $|p^+, \mathbf{p}_T\rangle$ com os estados de uma partícula da teoria quântica de um campo escalar:

$$\boxed{|p^+, \mathbf{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, \mathbf{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle.} \quad (6.32)$$

Aqui, $a_{p^+, \mathbf{p}_T}^\dagger$ é o operador criação e $|\Omega\rangle$ é o estado de vácuo.

Além disso, a função de onda da partícula pontual pode ser identificada com o campo escalar ϕ :

$$\boxed{\psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) \longleftrightarrow \phi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T).} \quad (6.33)$$

Este é um exemplo da primeira quantização, onde as coordenadas e momentos da Mecânica Clássica se tornam operadores e o espaço de estados é construído. Após feitas as identificações em relação a Teoria Clássica de Campos, esta é então quantizada, o que corresponde a segunda quantização.

6.5 OPERADORES MOMENTO NO CONE DE LUZ

Na quantização covariante de *Lorentz* as relações de comutação são:

$$[\hat{x}^\mu(\tau), \hat{p}^\nu(\tau)] = i\eta^{\mu\nu}, \quad (6.34)$$

$$[\hat{x}^\mu(\tau), \hat{x}^\nu(\tau)] = 0, \quad (6.35)$$

$$[\hat{p}^\mu(\tau), \hat{p}^\nu(\tau)] = 0. \quad (6.36)$$

7 Corda Aberta Relativística Quântica

Aqui é realizada a quantização da corda relativística [1]. A revisão de conceitos de física matemática se fez essencial: séries, modos de *Fourier* para a corda, relações de ortogonalidade, delta de *Dirac* e notação matemática [16] [17]. As dimensões do espaço-tempo são então fixadas [2] e o espaço de estados da corda exibe identificações a estados de fóton e táquion [1] [18] [13] [14] [15].

7.1 HAMILTONIANO E COMUTADORES NO CONE DE LUZ

Assim como no caso da partícula quântica, para as cordas faz-se a escolha de uma lista de operadores:

$$\text{operadores de } \textit{Schrödinger}: \left(\hat{X}^I(\sigma), \hat{x}_0^-, \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\sigma), \hat{p}^+ \right), \quad (7.1)$$

$$\text{operadores de } \textit{Heisenberg}: \left(\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{x}_0^-(\tau), \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma), \hat{p}^+(\tau) \right). \quad (7.2)$$

As relações de comutação escolhidas são:

$$\left[\hat{X}^I(\sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\sigma') \right] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (7.3)$$

$$\left[\hat{X}^I(\sigma), \hat{X}^J(\sigma') \right] = \left[\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\sigma') \right] = 0, \quad (7.4)$$

onde o Delta de *Dirac* foi utilizado pois espera-se que medidas simultâneas em diferentes pontos da corda não interfiram entre si. Além disso, os operadores \hat{x}_0^- e p^+ comutam com todos os operadores e $[\hat{x}_0^-, p^+] = -i$. As mesmas relações são válidas para os operadores de *Heisenberg*.

Quanto ao Hamiltoniano, este deve gerar evolução em τ , portanto, utilizando o calibre do cone de luz, H é dado pelo seguinte operador de *Heisenberg*:

$$\hat{H}(\tau) = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)\hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma) + \frac{\hat{X}^{I'}(\tau, \sigma)\hat{X}^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (7.5)$$

Anteriormente, foi encontrada a forma $L_0^\perp = 2\alpha'p^+p^-$ para os modos transversais de *Virasoro*. Assim, o Hamiltoniano se torna:

$$H = L_0^\perp, \quad (7.6)$$

e as equações de movimento para os operadores coincidem com a forma clássica:

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma). \quad (7.7)$$

Ao quantizar a teoria das cordas clássica, as condições de contorno se tornam equações de operadores. Por exemplo, as condições de *Neumann*:

$$\partial_\sigma \hat{X}^I(\tau, \sigma) = 0, \quad \sigma = 0, \pi \text{ (extremidades)}. \quad (7.8)$$

7.2 RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO PARA OSCILADORES

Têm-se as seguintes relações:

$$\left(\dot{X}^I + X^{I'} \right) (\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad (7.9)$$

$$\left(\dot{X}^I - X^{I'} \right) (\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (7.10)$$

Ao unir estas quantidades em um operador $A^I(\tau, \sigma)$ e manipulando as relações de comutação, chega-se às relações de comutação para os modos α :

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n, 0}. \quad (7.11)$$

Com isto, assim como feito classicamente, são definidos osciladores da seguinte forma:

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1. \quad (7.12)$$

Então definimos:

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n} \quad \text{e} \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1, \quad (7.13)$$

portanto:

$$(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7.14)$$

o que funciona para $n = 0$ pois $\alpha_0^I \propto p^I$ é um operador Hermitiano. Isto implica que $X^I(\tau, \sigma)$ também seja um operador Hermitiano nesta abordagem.

Reescrevendo o comutador (7.11), agora em termos dos osciladores, tem-se:

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}. \quad (7.15)$$

Estas relações de comutação satisfazem as relações dos operadores de criação e aniquilação canônicos de um oscilador harmônico simples quântico, logo:

$$\alpha_n^I \text{ são operadores aniquilação,} \quad (7.16)$$

$$\alpha_{-n}^I \text{ são operadores criação } (n \geq 1). \quad (7.17)$$

7.3 OPERADORES TRANSVERSAIS DE VIRASORO

Tem-se as seguintes expansões em α para $X^\mu(\tau, \sigma)$:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{n}, \quad (7.18)$$

$$X^+(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau, \quad (7.19)$$

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (7.20)$$

Com os α 's tornando-se operadores, os modos transversais de Virasoro agora também o são:

$$\text{operadores transversais de Virasoro: } L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (7.21)$$

L_0^\perp , que corresponde ao Hamiltoniano do sistema é então definido como o operador em ordem normal:

$$L_0^\perp \equiv \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I. \quad (7.22)$$

As relações de comutação são:

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = -n \alpha_{m+n}^J, \quad (7.23)$$

$$[L_m^\perp, x_0^I] = -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I, \quad (7.24)$$

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}, \quad (7.25)$$

onde D é o número de dimensões espaço-temporais.

Um conjunto de operadores L_n^\perp com $n \in \mathbb{Z}$ que satisfaz o último comutador define a álgebra de Virasoro com extensão central. Estes operadores geram reparametrizações na folha de mundo, pois:

$$[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}, \quad (7.26)$$

$$\xi_m^\tau(\tau, \sigma) = -ie^{im\tau} \cos m\sigma, \quad (7.27)$$

$$\xi_m^\sigma(\tau, \sigma) = e^{im\tau} \sin m\sigma, \quad (7.28)$$

indica as reparametrizações da forma:

$$\tau \longrightarrow \tau + \epsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma), \quad (7.29)$$

$$\sigma \longrightarrow \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma), \quad (7.30)$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal.

7.4 GERADORES DE LORENTZ

Com base na seção 5, as cargas de *Lorentz* conservadas na folha de mundo para a corda aberta podem ser escritas como:

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \quad (7.31)$$

Tratando agora as cargas como operadores e escolhendo a carga M^{-I} , após várias etapas de cálculos chega-se ao comutador:

$$\begin{aligned} [M^{-I}, M^{-J}] &= -\frac{1}{\alpha' p^{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \\ &\times \left\{ m \left[1 - \frac{1}{24}(D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24}(D-2) + a \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

onde a é um parâmetro indeterminado que surge do ordenamento dos operadores α nos operadores transversais de *Virasoro*, e D é o número de dimensões espaço-temporais.

Este comutador é nulo pois as matrizes M^{-I} e M^{-J} compartilham de uma base comum de autovetores, sendo simultaneamente diagonalizáveis. Para isso, o termo entre chaves deve anular-se, pois os termos da soma de operadores em m não se cancelam. Então:

$$m \left[1 - \frac{1}{24}(D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24}(D-2) + a \right] = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (7.33)$$

Analisando para $m = 1$ e 2 tem-se:

$$1 - \frac{1}{24}(D-2) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{24}(D-2) + a = 0. \quad (7.34)$$

Assim, um importante resultado é o de que as dimensões do espaço-tempo são fixadas:

$$D = 26. \quad (7.35)$$

A constante a vale -1 , o que faz com que o operador massa ao quadrado, M^2 , seja:

$$M^2 = -p^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right) = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp), \quad (7.36)$$

onde $N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$ é o operador número. O Hamiltoniano da corda então se torna:

$$H = L_0^\perp - 1, \quad (7.37)$$

que é a versão precisa da equação (7.6).

Este resultado mostra que a teoria das cordas prediz a dimensão do espaço-tempo, pois foram utilizados argumentos de consistência para que esta tenha invariância de *Lorentz*. Além disso, o valor de $a = -1$ será muito importante para que a teoria inclua estados de massa nula que podem ser identificados como fótons.

7.5 O ESPAÇO DE ESTADOS

Assim como no caso da partícula quântica pontual, os estados fundamentais para a corda quântica são:

$$|p^+, \mathbf{p}_T\rangle. \quad (7.38)$$

Estes são declarados como estados de vácuo para os osciladores:

$$a_n^I |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = 0, \quad n \geq 1, \quad I = 2, \dots, 25. \quad (7.39)$$

Os vetores de base podem ser escritos como:

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle. \quad (7.40)$$

Aqui, o inteiro não negativo $\lambda_{n,I}$ denota o número de vezes em que um operador criação $a_n^{I\dagger}$ aparece.

Graças ao valor da constante a , estados com $N^\perp = 1$ têm $M^2 = 0$. O estado de massa nula geral pode ser escrito como a combinação linear:

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle, \quad (7.41)$$

onde ξ_I são constantes. Estes estados podem ser comparados aos estados de fóton:

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle. \quad (7.42)$$

Isto mostra que a teoria das cordas inclui estados de fóton.

A equação análoga para cordas da (6.29) é escrita como:

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\mathbf{p}_T \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) a_{n_1}^{I_1 \dagger} \dots a_{n_k}^{I_k \dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle. \quad (7.43)$$

Para estados gerais de táquion e estados de fóton têm-se:

$$|\text{táquion}, \tau\rangle = \int dp^+ d\mathbf{p}_T \psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) |p^+, \mathbf{p}_T\rangle, \quad (7.44)$$

$$|\text{fóton}, \tau\rangle = \int dp^+ d\mathbf{p}_T \psi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) a_1^{I \dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle, \quad (7.45)$$

que satisfazem a equação de *Schrödinger*:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\Psi, \tau\rangle = H |\Psi, \tau\rangle, \quad (7.46)$$

com Hamiltoniano:

$$H = (L_0^\perp - 1) = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1 = \alpha' (p^I p^I + M^2). \quad (7.47)$$

Utilizando a equação (7.43) e a equação de *Schrödinger* (7.46) chega-se a:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \dots I_k} = (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \psi_{I_1 \dots I_k}, \quad (7.48)$$

onde N^\perp denota o autovalor do operador N^\perp para o estado (7.43).

No calibre do cone de luz esta equação de *Schrödinger* pode ser comparada a equações de campo clássicas como:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' (p^I p^I + m^2) \right) \phi(\tau, p^+, \mathbf{p}_T) = 0, \quad (7.49)$$

que é precisamente a equação para o táquion quando $m^2 = -\frac{1}{\alpha'}$:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = (\alpha' p^I p^I - 1) \psi. \quad (7.50)$$

7.6 TÁQUIONS E DECAIMENTO DE D-BRANAS

Os táquions possuem o menor valor de M^2 :

$$M^2 |p^+, \mathbf{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle, \quad (7.51)$$

com um campo escalar associado a este estado.

Para um campo escalar livre, o potencial se escreve:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2. \quad (7.52)$$

Quando $M^2 > 0$, o potencial tem um mínimo estável em $\phi = 0$. Quando $M^2 < 0$, há um máximo instável em $\phi = 0$.

A equação de movimento para um campo escalar livre $\phi(t)$ tem a forma:

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + M^2\phi(t) = 0. \quad (7.53)$$

Para $M^2 = M \cdot M > 0$ as soluções são oscilatórias do tipo:

$$\phi(t) = A \cos(Mt) + B \sin(Mt) = C \sin(Mt + \alpha_0), \quad (7.54)$$

e para $M^2 \equiv -\beta^2 = -\beta \cdot \beta < 0$ com $\beta^2 > 0$, as soluções se tornam:

$$\phi(t) = A \cosh(\beta t) + B \sinh(\beta t). \quad (7.55)$$

Para $A = 0$, por exemplo, à medida que $t \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow \infty$. Esta é a instabilidade de uma teoria que contém um táquion.

Considerando que a teoria das cordas discutida neste trabalho é uma teoria onde as cordas abertas estão ligadas a uma D25-brana que preenche todo o espaço, a instabilidade do táquion significa uma instabilidade da D25-brana, pois o táquion drena sua energia até que esta deixe de existir. Existem teorias que estudam estas instabilidades, mas estão fora do escopo deste trabalho.

8 Corda Fechada Relativística Quântica

Da mesma forma que para a corda aberta, é então quantizada a corda fechada [1]. Neste contexto surgem estados de gráviton [2] [1] [18] [13], o grande êxito da teoria das cordas.

8.1 RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO E OPERADORES DE VIRA-SORO

Para as cordas fechadas, tem-se a seguinte identificação nos parâmetros τ e σ :

$$(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + 2\pi), \quad (8.1)$$

e

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi), \quad \text{para todo } \tau \text{ e } \sigma. \quad (8.2)$$

Estas condições indicam que o espaço de parâmetros tem a forma de um cilindro, e a folha de mundo no espaço alvo para as cordas fechadas tem a forma de um tubo.

Assim como nas cordas abertas, α_0^μ é proporcional ao momento espaço-temporal carregado pela corda:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu. \quad (8.3)$$

Calculando-se $X^\mu(\tau, \sigma)$ chega-se a:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}), \quad (8.4)$$

onde, diferentemente da corda aberta, foram necessários dois conjuntos de modos α : α_n^μ para a solução de uma onda se movendo à direita (operadores de modo direito) e $\bar{\alpha}_n^\mu$ para a solução de uma onda se movendo à esquerda (operadores de modo esquerdo). As relações de comutação são:

$$[\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \quad (8.5)$$

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \quad (8.6)$$

$$[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0. \quad (8.7)$$

Com exceção do modo zero, a teoria das cordas fechadas contém duas cópias dos operadores de cordas abertas. Para o modo zero:

$$\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp, \quad (8.8)$$

$$\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu, \quad (8.9)$$

onde:

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I, \quad (8.10)$$

e o Hamiltoniano tem a forma simples:

$$H = \alpha' p^+ p^- = L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2. \quad (8.11)$$

8.2 ESPAÇO DE ESTADOS DA CORDA FECHADA

A dimensão crítica D para as cordas fechadas é 26, assim como nas cordas abertas. O operador M^2 se dá por:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2), \quad (8.12)$$

onde N^\perp e \bar{N}^\perp são dados por:

$$\bar{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I, \quad N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I, \quad (8.13)$$

com os operadores a_n desempenhando o papel de operadores criação e aniquilação assim como para as cordas abertas.

Para cordas fechadas também há estados de táquion, e o estado de $M^2 = 0$ é obtido por dois osciladores agindo no estado de vácuo, um para a esquerda e outro para a direita. A seguinte identificação para estes estados permite interpretá-los como estados de um gráviton:

$$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \mathbf{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle. \quad (8.14)$$

Para estados de massa nula em cordas fechadas também há o campo escalar chamado dilaton. O valor esperado deste campo controla o acoplamento de cordas.

Escolhendo g como o parâmetro adimensional que controla o acoplamento para interações de cordas fechadas tem-se:

$$G^{(26)} \sim g^2 (\alpha')^{12}. \quad (8.15)$$

9 D-Branas

Neste capítulo são introduzidos novos objetos: as D-branas [1] [2] [3] [4]. As D-branas são tão fundamentais quanto as próprias cordas nesta teoria [1], pois as cordas podem ser visualizadas como excitações dessas membranas.

9.1 Dp -BRANAS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Uma Dp -brana é um objeto estendido com p dimensões espaciais. As coordenadas x^μ são divididas em dois grupos:

$$\text{Coordenadas tangenciais: } x^0, x^1, \dots, x^p \quad (9.1)$$

$$\text{Coordenadas normais: } x^{p+1}, x^{p+2}, \dots, x^d. \quad (9.2)$$

Fixando-se os valores das coordenadas normais, especifica-se a posição da Dp -brana:

$$x^a = \bar{x}^a, \quad p+1, \dots, d. \quad (9.3)$$

De forma análoga, as coordenadas da corda são divididas em:

$$\text{Coordenadas tangenciais (NN): } X^0, X^1, \dots, X^p \quad (9.4)$$

$$\text{Coordenadas normais (DD): } X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^d. \quad (9.5)$$

Têm-se então condições de contorno do tipo *Dirichlet* para as coordenadas DD da corda (X^a), pois as extremidades da corda devem permanecer na Dp -brana:

$$X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}^a. \quad (9.6)$$

O esquema pode ser visualizado na figura 9.1.

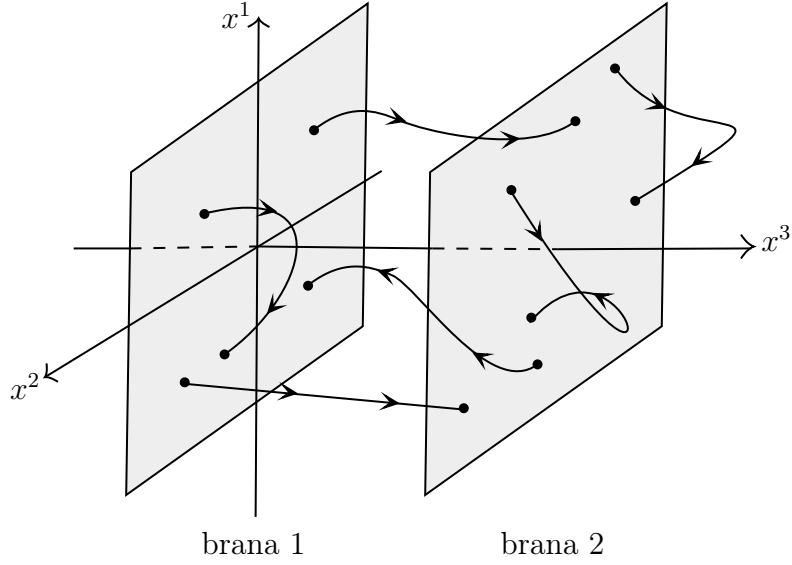


Figura 9.1: Duas D2-branas paralelas e tipos de cordas que esta configuração suporta.

Por outro lado, para as coordenadas NN (X^m , tangenciais à Dp -brana) têm-se condições de contorno de *Neumann*:

$$X^{m'}(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = X^{m'}(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p. \quad (9.7)$$

Para o cone de luz, as coordenadas da corda são:

$$\text{NN: } X^+, X^-, \{x^i\} \quad (9.8)$$

$$\text{DD: } \{x^a\}, \quad (9.9)$$

$$i = 2, \dots, p \text{ e } a = p + 1, \dots, d. \quad (9.10)$$

9.2 QUANTIZANDO CORDAS ABERTAS EM Dp -BRANAS

A dinâmica está nas coordenadas DD, e tem-se a solução:

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma. \quad (9.11)$$

Com $\mathcal{P}^{\tau a}(\tau, \sigma) = \frac{\dot{X}^a}{2\pi\alpha'}$, os comutadores não nulos são postulados como:

$$\left[X^a(\tau, \sigma), \dot{X}^b(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i \delta^{ab} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (9.12)$$

e

$$[\alpha_m^a, \alpha_n^b] = m \delta^{ab} \delta_{m+n, 0}, \quad m, n \neq 0. \quad (9.13)$$

O operador M^2 se torna então:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a \right). \quad (9.14)$$

Os estados têm a forma:

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=2}^p (a_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^d (a_m^{a\dagger})^{\lambda_{m,a}} \right] |p^+, \mathbf{p}\rangle. \quad (9.15)$$

Os campos escalares ou vetoriais representados por estes estados estão confinados às Dp -branas.

Analisando os estados com $M^2 \leq 0$, tem-se um táquion de $M^2 = -\frac{1}{\alpha'}$, assim como para a corda na D25-brana.

Para $M^2 = 0$, têm-se o estado:

$$a_1^{i\dagger} |p^+, \mathbf{p}\rangle, \quad i = 2, \dots, p, \quad M^2 = 0. \quad (9.16)$$

Estes são claramente estados de fóton com osciladores surgindo de coordenadas tangentes à brana, portanto uma Dp -brana tem um campo de *Maxwell* confinado em seu volume de mundo.

Para as coordenadas normais à brana, tem-se um campo escalar de massa nula para cada direção:

$$a_1^{a\dagger} |p^+, \mathbf{p}\rangle, \quad a = p + 1, \dots, d, \quad M^2 = 0. \quad (9.17)$$

Estes escalares têm a interpretação física de representarem excitações das Dp -branas.

9.3 CORDAS ABERTAS ENTRE Dp -BRANAS PARALELAS

Para uma configuração particular de Dp -branas, as diferentes classes (configurações) de cordas são chamadas setores. Para diferentes setores, têm-se osciladores α diferentes.

Escolhendo branas 1 e 2 paralelas, tem-se a seguinte solução para as coordenadas DD das cordas tensionadas, com uma extremidade presa a cada brana:

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin n\sigma. \quad (9.18)$$

A orientação das cordas é importante, e para cordas orientadas da brana 2 para a brana 1, apenas são trocados \bar{x}_1^a por \bar{x}_2^a na equação (9.18).

O operador M^2 neste caso se torna:

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1), \quad (9.19)$$

com

$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a. \quad (9.20)$$

O primeiro termo de (9.19) é simplesmente o quadrado da energia de uma corda clássica tensionada, pois $\frac{1}{2\pi\alpha'} = T_0$.

Os estados agora requerem índices adicionais $[ij]$, onde i denota a brana na qual a extremidade em que $\sigma = 0$ está fixada e j indica a brana em que a extremidade com $\sigma = \pi$ se encontra. Para as quatro classes disponíveis para a configuração de branas em questão, os estados se escrevem:

$$|p^+, \mathbf{p}; [11]\rangle, \quad |p^+, \mathbf{p}; [22]\rangle, \quad |p^+, \mathbf{p}; [12]\rangle, \quad |p^+, \mathbf{p}; [21]\rangle. \quad (9.21)$$

Analisando os estados fundamentais, o mais simples é:

$$|p^+, \mathbf{p}; [12]\rangle, \quad M^2 = -\frac{1}{\alpha'} + \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2. \quad (9.22)$$

Se $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a| = 0$, esses são estados taquiônicos do operador massa ao quadrado usual. Para a separação crítica $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a| = 2\pi\sqrt{\alpha'}$, têm-se um campo escalar de massa nula. Para separações maiores, têm-se campos escalares massivos.

9.4 CORDAS ENTRE D p E D q -BRANAS PARALELAS

Nesta seção, são consideradas duas branas paralelas, uma D p -brana e uma D q -brana, com p e q inteiros que satisfazem $1 \leq q < p \leq 25$, como o exemplo da figura 9.2.

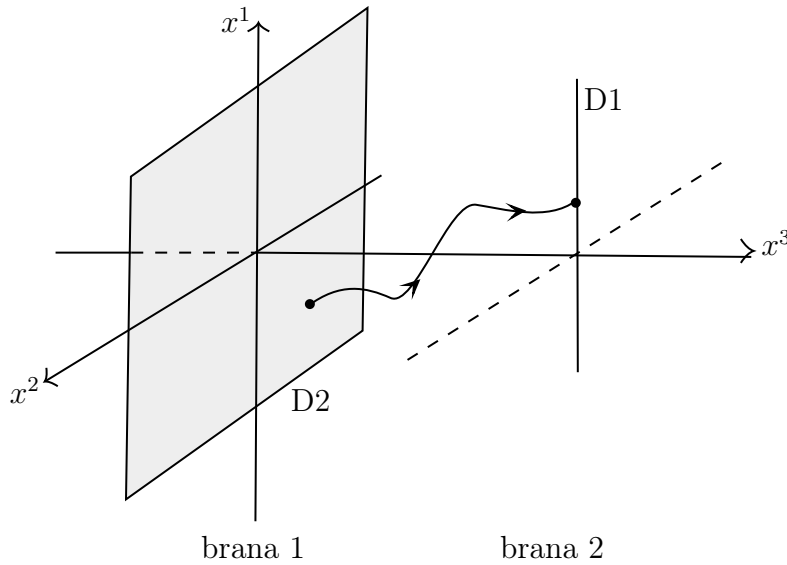


Figura 9.2: Exemplo de uma D2-brana e uma D1-brana paralelas. Há uma corda que vai da D2-brana à D1-brana, com coordenada x^2 do tipo ND.

Para esta configuração têm-se as coordenadas:

$$\text{coordenadas tangenciais comuns: } x^0, x^1, \dots, x^q; \quad (9.23)$$

$$\text{coordenadas mistas: } x^{q+1}, x^{q+2}, \dots, x^p; \quad (9.24)$$

$$\text{coordenadas normais comuns: } x^{p+1}, x^{p+2}, \dots, x^d. \quad (9.25)$$

Para as cordas, as coordenadas são:

$$\text{coordenadas NN: } X^0, X^1, \dots, X^q; \quad (9.26)$$

$$\text{coordenadas ND: } X^{q+1}, X^{q+2}, \dots, X^p; \quad (9.27)$$

$$\text{coordenadas DD: } X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^d. \quad (9.28)$$

No cone de luz escreve-se:

$$\text{NN: } X^+, X^-, \{X^i\}; \quad (9.29)$$

$$\text{ND ou DN: } \{X^r\}; \quad (9.30)$$

$$\text{DD: } \{X^a\}; \quad (9.31)$$

$$i = 2, \dots, q, \quad r = q + 1, \dots, p, \quad \text{e} \quad a = p + 1, \dots, d. \quad (9.32)$$

Analisando-se as coordenadas X^r (ND) e as condições de contorno, obtém-se:

$$X^r(\tau, \sigma) = \bar{x}_2^r + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\text{ímpar}}} \frac{2}{n} \alpha_{\frac{n}{2}}^r e^{-i\frac{n}{2}\tau} \cos\left(\frac{n\sigma}{2}\right). \quad (9.33)$$

As relações de comutação são:

$$\left[X^r(\tau, \sigma), \dot{X}^s(\tau, \sigma') \right] = i(2\pi\alpha') \delta(\sigma - \sigma') \delta^{rs}, \quad (9.34)$$

$$\left[\alpha_{\frac{m}{2}}^r, \alpha_{\frac{n}{2}}^s \right] = \frac{m}{2} \delta^{rs} \delta_{m+n,0}. \quad (9.35)$$

Neste caso, as constantes de ordenamento normal que contribuem para M^2 são:

$$\boxed{a_{\text{NN}} = a_{\text{DD}} = -\frac{1}{24}, \quad a_{\text{ND}} = a_{\text{DN}} = \frac{1}{48}}. \quad (9.36)$$

A constante de ordenamento normal total para o problema em questão é então dada por:

$$a = -1 + \frac{1}{16}(p - q). \quad (9.37)$$

O operador massa ao quadrado é então dado por:

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} \left(N^\perp - 1 + \frac{1}{16}(p - q) \right). \quad (9.38)$$

A dimensionalidade espaço-temporal dos campos que surgem em cada setor é igual ao número de coordenadas NN presentes no setor.

10 Carga Elétrica e de Corda

Assim como a partícula pontual é acoplada ao campo de calibre de *Maxwell* A_μ por possuir carga elétrica, as cordas são acopladas ao campo de *Kalb-Ramond* $B_{\mu\nu}$ por possuírem carga de corda [2]. Na análise do espaço de estados da corda fechada surgem os estados de uma partícula relativos ao campo de *Kalb-Ramond* [1] [2].

De modo análogo a $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (10.1)$$

é definido o tensor de campo de três índices:

$$H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}. \quad (10.2)$$

A generalização natural da ação de uma partícula pontual acoplada ao campo de *Maxwell* para o caso de uma corda acoplada ao campo de *Kalb-Ramond* é dada por:

$$S = S_{\text{str}} - \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma)) \frac{\partial X^{[\mu}}{\partial \tau} \frac{\partial X^{\nu]}}{\partial \sigma} - \frac{1}{6\kappa^2} \int d^D x H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}, \quad (10.3)$$

onde κ é uma constante introduzida para deixar o último termo adimensional (unidades naturais) e foi definida a antissimetrização $a^{[\mu b^\nu]} \equiv a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$.

O primeiro termo na ação (10.3) é a ação da corda, o segundo representa a interação entre a corda e o campo, e o terceiro termo dá a dinâmica ao campo $B_{\mu\nu}$.

Calculando a variação desta ação e utilizando o princípio de *Hamilton*, obtêm-se a equação:

$$\boxed{\frac{1}{\kappa^2} \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = j^{\mu\nu}}, \quad (10.4)$$

que é análoga a equação de *Maxwell* $\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$. Esta equação sugere que $j^{\mu\nu}$ seja uma corrente conservada, o que decorre do fato de $H^{\mu\nu\rho}$ ser um tensor antissimétrico.

Ademais, o índice μ está atrelado à conservação da corrente, mas o índice ν é livre, o que indica um conjunto de correntes. Para $\mu = 0$, o vetor \mathbf{j}^0 é a densidade de carga de *Kalb-Ramond* com componentes j^{0k} . A antissimetricidade de $H^{\mu\nu\rho}$ também leva \mathbf{j}^0 a ser um vetor solenoidal, isto é, de divergente nulo:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^0 = 0. \quad (10.5)$$

Naturalmente, o vetor carga de corda \mathbf{Q} é dado por:

$$\mathbf{Q} = \int d^d x \mathbf{j}^0. \quad (10.6)$$

As cordas são objetos físicos que possuem orientação. A direção de σ crescente indica a orientação, e a densidade de carga de corda aponta nesta direção, sendo tangente a corda. Portanto, o acoplamento da corda ao campo de *Kalb-Ramond* não é invariante sob reparametrizações da folha de mundo, pois o sinal da densidade de carga muda de acordo com a orientação da corda.

Os campos de Maxwell tem uma relação especial com o campo de *Kalb-Ramond*. O tensor eletromagnético F_{mn} também não é invariante sob transformações de calibre. Para que a carga de corda seja conservada em cordas abertas, postula-se que variações em $B_{\mu\nu}$ devem ser acompanhadas de variações em A_m :

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu \quad (10.7)$$

$$\delta A_m = -\Lambda_m, \quad (10.8)$$

onde os Λ são os parâmetros de calibre. É definida uma quantidade invariante \mathcal{F}_{mn} :

$$\mathcal{F}_{mn} \equiv F_{mn} + B_{mn}, \quad \delta \mathcal{F}_{mn} = 0. \quad (10.9)$$

A carga agora é conservada, pois a densidade de carga de corda comporta-se como uma corrente que flui da corda para as D-branas, propagando-se pelas linhas de campo elétrico confinadas à brana.

11 T-Dualidade de cordas fechadas

11.1 ENROLANDO CORDAS FECHADAS

Aqui é definido o número de enrolamento m , um inteiro que conta o número de voltas que uma corda fechada descreve em uma dimensão toroidal (por exemplo, um plano XY com identificação $x \sim x + 2\pi R$ como mostra a figura 11.1).

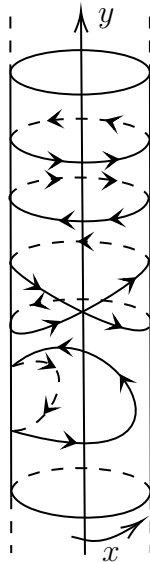


Figura 11.1: Configurações de cordas fechadas em uma dimensão toroidal.

O número m é uma propriedade topológica: cordas com número de enrolamento diferentes não podem ser continuamente deformadas até se tornarem idênticas [3] [2] [1].

Define-se também o enrolamento w :

$$w \equiv \frac{mR}{\alpha'}. \quad (11.1)$$

11.2 SOLUÇÃO, QUANTIZAÇÃO E RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO

A análise será realizada no calibre de cone de luz com 26 dimensões. Tem-se as seguintes coordenadas:

$$X^+, X^-, \{X^i\} \text{ e } X \text{ com } i = 2, 3, \dots, 24. \quad (11.2)$$

Aqui foi definida a coordenada $X^{25} \equiv X$, que está compactada com $X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + 2\pi\alpha'w$.

Agora, a equação (8.9) deixa de ser necessariamente válida. A nova relação é:

$$\bar{\alpha}_0 - \alpha_0 = \sqrt{2\alpha'}w. \quad (11.3)$$

Observando a relação (8.3) e combinando com a (11.3), fica evidente que w pode ser tratado da mesma forma que o momento p :

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\bar{\alpha}_0 + \alpha_0), \quad w = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\bar{\alpha}_0 - \alpha_0), \quad (11.4)$$

e a solução para $X(\tau, \sigma)$ é:

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \alpha'(p\tau + w\sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n e^{in\sigma} + \alpha_n e^{in\sigma}). \quad (11.5)$$

As relações de comutação da seção 4.1 ainda são válidas (omitindo-se os índices sobrescritos e a métrica), e a partir delas percebe-se que:

$$[p, w] = [p, \bar{\alpha}_n] = [p, \alpha_n] = [w, \bar{\alpha}_n] = [w, \alpha_n] = 0. \quad (11.6)$$

Para o operador x_0 , têm-se então:

$$[x_0, \bar{\alpha}_0] = [x_0, \alpha_0] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}, \quad [x_0, p] = i, \quad [x_0, w] = 0. \quad (11.7)$$

Como w comuta com todos os operadores que aparecem em X , a interpretação natural é a de que w é um operador e seus autovalores correspondem aos possíveis enrolamentos.

Ambos p e w são quantizados na direção em que há compactificação, com espectro discreto:

$$p = \frac{n}{R}, \quad w = \frac{mR}{\alpha'}, \quad \text{com } m, n \in \mathbb{Z}. \quad (11.8)$$

11.3 RESTRIÇÃO E FÓRMULA DE MASSA

A partir das expressões para \bar{L}_0^\perp e L_0^\perp combinadas à (11.8) para o caso em questão, pode-se chegar à seguinte restrição:

$$\boxed{N^\perp - \bar{N}^\perp = \alpha'pw = nm}. \quad (11.9)$$

Agora é possível encontrar a fórmula de massa ao quadrado, tendo em vista as expressões (11.4):

$$M^2 = p^2 + w^2 + \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (11.10)$$

Esta equação mostra que, na compactificação, o momento interno $|p|$ contribui para a energia de repouso da corda da mesma forma que o momento de uma partícula de massa nula contribui para sua energia. Já $|w|$ pode ser naturalmente entendido como a energia associada à distensão necessária para enrolar a corda sobre a dimensão compacta.

11.4 ESPAÇO DE ESTADOS PARA CORDAS FECHADAS COMPACTIFICADAS

Os estados fundamentais agora têm a forma:

$$|p^+, \mathbf{p}_T; n, m\rangle, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (11.11)$$

Os estados da base devem satisfazer a condição (11.9), e M^2 se torna:

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (11.12)$$

Para $m = n = 0$, são encontrados estados de táquion, gráviton e dilaton e o campo de *Kalb-Ramond* e, surpreendentemente, dois campos de *Maxwell*, mesmo em cordas fechadas.

Com $n = m = \pm 1$ ou $n = -m = \pm 1$, algo interessante também ocorre: O operador de massa ao quadrado tem a forma de

$$M^2(R) = \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{\alpha'}\right)^2, \quad (11.13)$$

e fica claro que existe um raio R^* para o qual $M^2(R^*) = 0$:

$$\frac{1}{R^*} = \frac{R^*}{\alpha'} \quad \rightarrow \quad R^* = \sqrt{\alpha'} = l_s, \quad (11.14)$$

onde l_s é o comprimento da corda. R^* é o chamado raio altdual. Estes estados de massa nula possuem enrolamento e são estados puramente de corda, não podendo surgir em uma teoria de partículas.

As equações (11.9) e (11.12) mostram que o espectro para uma compactificação de raio R é idêntico ao de uma de raio $\tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}$:

$$R \longleftrightarrow \frac{\alpha'}{R} \equiv \tilde{R}, \quad (11.15)$$

onde R e \tilde{R} são chamados de raios duais. Esta é a T-dualidade, que no fundo surge pela possibilidade da seguinte transformação:

$$\text{T-dualidade: } X = X_L + X_R \longrightarrow \tilde{X} = X_L - X_R, \quad (11.16)$$

onde X_L e X_R são as soluções que se movem para esquerda e direita respectivamente na corda fechada. R^* é então o comprimento mínimo para se compactificar toroidalmente uma dimensão.

R é um parâmetro ajustável do espaço, não da teoria das cordas. Estes parâmetros são chamados de *moduli*, constituindo o espaço *moduli* [7] [4] [2] [1].

11.5 T-DUALIDADE E D-BRANAS

Considera-se ainda a direção x^{25} compactificada, mas agora existe uma D25-brana que preenche todo o espaço. Todas as coordenadas de corda serão então do tipo NN.

A T-dualidade, então, é dada por:

$$\text{T-dualidade ao longo de } x^{25} : (D25; R) \longrightarrow \left(D24; \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R} \right). \quad (11.17)$$

Em ambas as teorias, o espectro coincide pois o momento na primeira contribui para M^2 da mesma forma que o enrolamento na segunda. Para preservar a T-dualidade, a transformação deve modificar a D-brana.

12 Campos Eletromagnéticos em D-Branas

Neste capítulo, os campos eletromagnéticos de fundo [9] considerados possuem apenas o tensor F_{mn} constante, onde m e n são índices do mundo volume da brana em questão [1] [19].

12.1 ACOPLAMENTO DE CAMPOS DE MAXWELL ÀS CORDAS ABERTAS

Os potenciais de calibre podem ser escolhidos como:

$$A_n(x) = \frac{1}{2} F_{mn} x^m. \quad (12.1)$$

A ação então se torna:

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}, X') + \frac{1}{2} \int d\tau F_{mn} (X^m \partial_\tau X^n|_{\sigma=\pi} - X^m \partial_\tau X^n|_{\sigma=0}), \quad (12.2)$$

onde \mathcal{L} é a densidade Lagrangiana de *Nambu-Goto*.

A equação de onda $\partial_\tau \mathcal{P}_\mu^\tau + \partial_\sigma \mathcal{P}_\mu^\sigma = 0$ ainda se aplica, e o único efeito do campo eletromagnético é uma mudança nas condições de contorno. Após variar a ação e aplicar o princípio de *Hamilton* chega-se à condição:

$$\partial_\sigma X_m - 2\pi\alpha' F_{mn} \partial_\tau X^n = 0, \quad \sigma = 0, \pi. \quad (12.3)$$

Para um campo de fundo puramente magnético, $F_{0i} = 0$, e tem-se:

$$\partial_\sigma X_i - 2\pi\alpha' F_{ij} \partial_\tau X^j = 0, \quad \sigma = 0, \pi, \quad (12.4)$$

que é uma condição mista: nem *Neumann* nem *Dirichlet*. Se o campo B for suficientemente grande, certos termos se tornam negligenciáveis em (12.4). Para $B \equiv F_{23} = -F_{32}$, a condição se torna:

$$\partial_\tau X^2 = \partial_\tau X^3 = 0, \quad (12.5)$$

que são condições de *Dirichlet*. À medida em que B aumenta, o movimento das extremidades da corda em x^2 e x^3 cessa. Uma possível interpretação para esse fenômeno seria a de que a Dp -brana se comporta como se fosse constituída de várias $D(p-2)$ -branas, uma para cada valor de (x^2, x^3) .

12.2 D-BRANAS COM CAMPO ELÉTRICO

Considera-se uma Dp -brana ao longo de uma dimensão compacta x^{25} de raio R , e é assumido que ela possui um campo elétrico ao longo desta direção:

$$F_{25,0} = E_{25} \equiv E. \quad (12.6)$$

Define-se então o campo elétrico adimensional $\mathcal{E} \equiv 2\pi\alpha' E$.

As condições de contorno podem ser escritas em uma forma mais compacta:

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\mathcal{E}^2}{1-\mathcal{E}^2} & \frac{2\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}^2} \\ \frac{2\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}^2} & \frac{1+\mathcal{E}^2}{1-\mathcal{E}^2} \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix}, \quad (12.7)$$

e as relações de dualidade são:

$$\text{Relações de dualidade: } \partial_+ X = \partial_+ \tilde{X}, \quad \partial_- X = -\partial_- \tilde{X}. \quad (12.8)$$

Agora, analisa-se a situação de uma $D(p-1)$ -brana que se move na dimensão dual de raio \tilde{R} , onde S é o referencial em repouso em relação ao círculo e S' é o referencial em repouso em relação à brana. O impulso é caracterizado pelo parâmetro $\beta = \frac{v}{c}$, com v sendo a velocidade da brana. As condições de contorno em S' são:

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X'^0 \\ \tilde{X}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X'^0 \\ \tilde{X}' \end{pmatrix}, \quad (12.9)$$

aqui, os índices com $'$ denotam as coordenadas de corda no referencial S' . O objetivo é aplicar a transformação de T-dualidade (12.8). Para isso, utilizam-se transformações de *Lorentz*, obtendo-se as condições de contorno no referencial S :

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix}, \quad (12.10)$$

com $M \equiv \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$. Chega-se então a:

$$\partial_+ \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} & \frac{2\beta}{1-\beta^2} \\ \frac{2\beta}{1-\beta^2} & \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \end{pmatrix} \partial_- \begin{pmatrix} X^0 \\ X \end{pmatrix}. \quad (12.11)$$

É fácil ver que:

$$\boxed{\mathcal{E} = 2\pi\alpha' E = \beta}. \quad (12.12)$$

Este resultado mostra que uma $D(p-1)$ -brana se movendo com parâmetro de rapidez β em um círculo é T-dual a uma Dp -brana enrolada no círculo dual, a qual carrega um campo elétrico $\mathcal{E} = \beta$ na direção ao longo do círculo. Além disso, a limitação da velocidade da $D(p-1)$ -brana implica um valor máximo para o campo \mathcal{E} .

13 Eletrodinâmica Não-Linear e de *Born-Infeld*

13.1 O ARCABOUÇO DA ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR

Teorias de eletrodinâmica não-linear buscam descrever o eletromagnetismo no vácuo. Nestes casos, o vácuo se comporta como um tipo de "material", isto é, um meio não linear (as relações entre os campos auxiliares \mathbf{D} e \mathbf{H} com os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são não lineares) [9] [1].

Em um meio material, as equações de *Maxwell* na presença de fontes podem ser escritas na forma:

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu, \quad (13.1)$$

com:

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & H_z & -H_y \\ -D_y & -H_z & 0 & H_x \\ -D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (13.2)$$

que pode ser facilmente generalizada para várias dimensões assim como feito para $F^{\mu\nu}$ anteriormente.

Considerando a ação S em um número arbitrário de dimensões:

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} \int d^D x A_\mu j^\mu, \quad (13.3)$$

com densidade de Lagrangiana arbitrária e invariante de calibre, e utilizando o princípio de *Hamilton* é encontrada a expressão (13.1) (indicando que o vácuo pode comportar-se como um meio não linear) e a relação entre $G^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$:

$$G^{\mu\nu} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}. \quad (13.4)$$

As expressões (10.1), (13.1) e (13.4) formam as equações da eletrodinâmica não-linear.

Com (13.4) em mãos, utilizando a regra da cadeia e a definição (13.2), pode-se encontrar a relação entre \mathbf{D} e \mathbf{E} , conhecida a densidade de Lagrangiana:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}}, \quad (13.5)$$

e de forma similar, em quatro dimensões, encontra-se:

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}}. \quad (13.6)$$

O resultado (13.5) permite visualizar \mathbf{D} como o momento canônico associado à velocidade \mathbf{E} , o que sugere o Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathcal{L}, \quad (13.7)$$

que se reduz à teoria de *Maxwell* para $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

13.2 ELETRODINÂMICA DE *BORN-INFELD*

A densidade Lagrangiana de *Born-Infeld* [9] [2] [1] [19] pode ser escrita em termos da raiz de um determinante:

$$\mathcal{L} = -b^2 \sqrt{-\det \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b} F_{\mu\nu} \right)} + b^2, \quad (13.8)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de *Minkowski* e $b \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} = E_{\text{crit}}$ é o campo elétrico crítico da teoria das cordas conforme visto no capítulo anterior. A raiz quadrada em (13.8), garante que b é o campo elétrico máximo, e a expressão é invariante de *Lorentz*.

Um ponto importante da teoria de *Born-Infeld* é o fato de que cargas pontuais apresentam autoenergia finita. Para $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, a densidade de energia de *Born-Infeld* é dada pelo Hamiltoniano que pode ser calculado utilizando-se os resultados apresentados neste capítulo:

$$\mathcal{H} = b^2 \sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}} - b^2. \quad (13.9)$$

A partir deste Hamiltoniano, é possível calcular a autoenergia de uma carga pontual, pois a integral de energia converge nesta teoria:

$$U_Q = \frac{1}{4\pi} 1,748 \frac{Q^2}{l_s \sqrt{Q}}. \quad (13.10)$$

Não obstante, utilizando as ferramentas da T-dualidade, é possível mostrar que os campos eletromagnéticos em D-branas obedecem à teoria de *Born-Infeld*, pois são compatíveis com a densidade de Lagrangiana escrita na forma:

$$\mathcal{L} = -T_p(g) \sqrt{-\det(\eta_{mn} + 2\pi\alpha' F_{mn})}, \quad (13.11)$$

Aqui T_p é a tensão na Dp -brana, e g é o acoplamento de corda.

14 Conclusão

A teoria das cordas incorpora naturalmente e de forma bela a gravidade. Isso contrasta fortemente com a teoria quântica de campos, onde os campos de spin dois são muito problemáticos [20]. A existência de dualidades mostra que descrições diferentes podem na verdade corresponder a uma mesma física, sugerindo que a teoria possui uma unicidade profunda. Além disso, a presença das D-branas estabelece conexões entre topologia, teorias de calibre e propriedades geométricas do espaço-tempo de forma muito elegante e concisa.

Mas esta teoria enfrenta limitações significativas no contexto experimental [1]. Não existem evidências diretas da existência de dimensões extras. Experimentos de colisores, como o LHC, já investigaram sinais que poderiam surgir de compactificações com escalas próximas ao TeV [21], mas até o presente momento não obtiveram sucesso. Há também o enorme conjunto de possíveis vácuos da teoria (espaço *moduli*), tornando o modelo difícil de testar [22], já que diferentes compactificações podem reproduzir efeitos físicos distintos.

A teoria parece capaz de se acomodar a diversos resultados empíricos, o que limita seu poder preditivo em alguns regimes. A ausência de uma formulação completa e não perturbativa para toda a teoria, embora parcialmente suprida pela conjectura da *M-theory*, permanece como um problema importante. *Edward Witten* aponta que o próprio conceito de espaço-tempo poderia surgir de graus de liberdade mais fundamentais, tornando a geometria clássica uma aproximação macroscópica. Talvez as cordas não sejam os objetos fundamentais, mas manifestações de uma estrutura mais profunda [23].

Se esta teoria está correta como descrição fundamental da realidade, apenas o avanço teórico e experimental das próximas décadas poderá decidir, ou talvez o surgimento de outra abordagem mais promissora e simples. Mas independentemente, o estudo aqui apresentado demonstra sua profundidade conceitual e papel como uma das mais importantes tentativas de unificação.

Referências Bibliográficas

- [1] ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [2] POLCHINSKI, J. *String Theory, volume 1 of Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998.
- [3] TONG, D. *Lectures on string theory*. [S.l.: s.n.], 2009.
- [4] WEIGAND, T. *Introduction to string theory*. [S.l.: s.n.], 2012.
- [5] BERKOVITS, N. Theoretical motivation for studying superstrings. *Brazilian Journal of Physics*, 2004.
- [6] CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- [7] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. [S.l.]: Institute of Physics Publishing, 2002.
- [8] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2023.
- [9] JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2021.
- [10] LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- [11] GOLDSTEIN, H. et al. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
- [12] BERNARDINI, A. E. *Teoria Quântica de Campos e Simetrias - Vol. I*. 1. ed. São Carlos: Edição do Autor, 2020.
- [13] ZEE, A. *Quantum field theory in a nutshell*. [S.l.]: Princeton university press, 2010. v. 7.
- [14] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics Volume 2*. [S.l.]: Hermann, 1986.
- [15] COHEN-TANNOUDJI, C. et al. *Quantum Mechanics*. [S.l.]: Wiley-VCH Verlag GmbH Co, 2020.
- [16] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. [S.l.]: Academic press, 2011.
- [17] MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of theoretical physics*. [S.l.]: Technology Press, 1946.
- [18] BERNARDINI, A. E. *Teoria Quântica de Campos e Simetrias - Vol. II*. 1. ed. São Carlos: Edição do Autor, 2020.

- [19] BERNARDINI, A. E. *Teoria Quântica de Campos e Simetrias - Vol. III*. 1. ed. São Carlos: Edição do Autor, 2020.
- [20] SALIMKHANI, K. The dynamical approach to spin-2 gravity. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier, v. 72, p. 29–45, 2020.
- [21] CULLEN, S.; PERELSTEIN, M.; PESKIN, M. E. Tev strings and collider probes of large extra dimensions. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 62, n. 5, ago. 2000. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.62.055012>>.
- [22] BAUMGART, M. et al. How to falsify string theory at a collider. *Phys. Rev. Res.*, American Physical Society, v. 7, p. 023184, May 2025. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.7.023184>>.
- [23] WITTEN, E. *Reflections on the fate of spacetime*. [S.l.]: American Institute of Physics, 1996. 24–30 p.