Universidade Federal de São Carlos
Campus Sorocaba

Adriano Ortiz Souza

Desenvolvimento da Geometria Através da História: Propostas didáticas para o ensino básico.

Sorocaba-SP
2025.

Universidade Federal de São Carlos
Campus Sorocaba

Adriano Ortiz Souza

Desenvolvimento da Geometria Através da História: Propostas didáticas para o ensino básico.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (PPGECE), da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação a Professora Doutora Silvia Maria Simões de Carvalho.

Orientadora: Professora Doutora Silvia Maria Simões de Carvalho.

Sorocaba-SP
2025.

Souza, Adriano Ortiz

Desenvolvimento da Geometria através da história: propostas didáticas para o ensino básico / Adriano Ortiz Souza -- 2025.
100f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Silvia Maria Simões de Carvalho
Banca Examinadora: Mayk Vieira Coelho, Antonio Luís Venezuela
Bibliografia

1. Geometria. 2. História da Matemática. 3. Ensino de Matemática. I. Souza, Adriano Ortiz. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano - CRB/8 6979

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Adriano Ortiz Souza, realizada em 21/07/2025.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho (UFSCar)

Prof. Dr. Mayk Vieira Coelho (UNIFAL)

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

Resumo

Este trabalho traça a evolução da geometria, desde suas raízes utilitárias em civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, que a empregavam para necessidades práticas como construção e medição de terras. Destaca-se a mudança de paradigma com os gregos, que introduziram o rigor da demonstração lógica, consolidado por Euclides, transformando a matemática em uma ciência dedutiva. Finalmente, explora-se a Geometria Esférica como um campo crucial para entender o nosso planeta, explicando fenômenos como as rotas de voo e as projeções cartográficas. As aulas sobre estes temas no ensino fundamental e médio são apresentadas como essenciais para desenvolver o raciocínio espacial, a curiosidade intelectual e a capacidade de resolução de problemas, preparando os alunos para uma compreensão mais aprofundada e crítica do mundo.

Palavra-Chave: ensino de geometria, planos de aula, geometria esférica.

Abstract

This paper traces the evolution of geometry, from its utilitarian roots in ancient civilizations like the Babylonians and Egyptians, who applied it to practical needs such as construction and land measurement. It highlights the paradigm shift brought by the Greeks, who introduced the rigor of logical demonstration, consolidated by Euclid, transforming mathematics into a deductive science. Finally, Spherical Geometry is explored as a crucial field for understanding our planet, explaining phenomena like flight paths and cartographic projections. Lessons on these topics in elementary and high school are presented as essential for developing spatial reasoning, intellectual curiosity, and problem-solving skills, preparing students for a deeper and more critical understanding of the world.

Keywords: teaching geometry, lesson plans, spherical geometry.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

A geometria, desde suas origens, tem sido uma ferramenta fundamental para a compreensão e organização do mundo, adaptando-se e evoluindo conforme as necessidades das civilizações. Este trabalho explora a trajetória da geometria, desde seus primórdios práticos na Mesopotâmia e no Egito Antigo, até o rigor dedutivo introduzido na Grécia e a complexidade da Geometria Esférica, demonstrando sua aplicabilidade e relevância contínuas.

A relevância deste trabalho no contexto atual é multifacetada. Primeiramente, ao resgatar e analisar a história da geometria, ele oferece uma perspectiva enriquecedora para o ensino e a aprendizagem da matemática, humanizando a disciplina e mostrando que os conceitos não surgiram isoladamente, mas de necessidades concretas. Isso pode engajar estudantes, ao permitir-lhes visualizar a matemática como uma construção cultural e histórica.

Em segundo lugar, a exploração de métodos de cálculo antigos e sua comparação com os modernos estimula o pensamento crítico e a compreensão profunda dos fundamentos matemáticos, habilidades essenciais no século XXI. A capacidade de analisar diferentes abordagens para um mesmo problema, como o cálculo da área do círculo, desenvolve a flexibilidade cognitiva e a resolução de problemas de forma inovadora.

Além disso, a inclusão de planos de aula detalhados, com foco na Geometria Babilônica, Egípcia, no Teorema de Pitágoras e na Geometria Esférica, é um recurso valioso para futuros professores. Estes planos oferecem ferramentas práticas e metodologias que podem ser diretamente aplicadas em sala de aula, auxiliando na formação de profissionais mais capacitados e criativos para lecionar geometria de maneira contextualizada e significativa, alinhada às diretrizes curriculares atuais.

Finalmente, a abordagem da Geometria Esférica e suas aplicações contemporâneas demonstra a utilidade da geometria em áreas de alta tecnologia e no cotidiano. Em um mundo cada vez mais globalizado e dependente de sistemas de posicionamento e comunicação, compreender as bases matemáticas por trás dessas tecnologias é fundamental para a formação de cidadãos conscientes e preparados para os desafios do futuro. Este trabalho, portanto, não apenas documenta a evolução da geometria, mas também serve como um guia prático para sua aplicação e ensino no cenário educacional atual.

A metodologia empregada combina pesquisa bibliográfica com a proposta de planos de aula para o ensino fundamental, visando à exploração de artefatos e textos históricos, e à comparação entre métodos antigos e modernos. Os planos de aula detalham atividades práticas, como o uso de argila para geometria babilônica ou um globo terrestre para geometria esférica, alinhando-se às competências e habilidades da BNCC.

Objetivo Geral:

- Investigar a evolução histórica da geometria, explorando os métodos e conceitos utilizados por diferentes civilizações, compreendendo teoremas fundamentais e as distinções entre a geometria plana e esférica, com ênfase em sua aplicação na resolução de problemas e em contextos práticos e variados campos do conhecimento.

Objetivos Específicos:

- Compreender métodos de cálculo antigos e sua comparação com fórmulas modernas.
- Aplicar fórmulas e conceitos geométricos para resolver problemas práticos.
- Analisar a importância das aproximações históricas e suas implicações.
- Compreender a definição de triângulos retângulos e seus componentes no contexto do Teorema de Pitágoras.
- Justificar a validade de Teoremas por meio de demonstrações.
- Compreender os conceitos fundamentais da Geometria Esférica e suas distinções em relação à Geometria Euclidiana plana.
- Calcular distâncias na superfície da Terra utilizando conceitos de Geometria Esférica.
- Criar planos de aula com o enfoque em Geometria, com o intuito de auxiliar futuros professores.

Estruturação:

- **Capítulo 2: Primórdios da Geometria: Mesopotamia -** Detalha a origem da geometria, o sistema sexagesimal e a análise de importantes artefatos babilônicos (BM 13901, YBC 6967, YBC 7289, BM 15285), incluindo planos de aula relacionados à geometria babilônica.

- **Capítulo 3: Egito Antigo -** Aborda a geometria egípcia, com foco no Papiro de Ahmes e Papiro de Moscou, e apresenta planos de aula para comparar os métodos antigos e atuais de cálculo da área do círculo.

- **Capítulo 4: Grécia Antiga -** Explora as contribuições de figuras como Tales, Pitágoras e Euclides, incluindo demonstrações do Teorema de Pitágoras e discussões sobre o Postulado das Paralelas e geometrias não-euclidianas, juntamente com planos de aula sobre o Teorema de Pitágoras.

- **Capítulo 5: Geometria Esférica -** Define os conceitos e elementos da geometria esférica, a soma dos ângulos internos e cálculos de distâncias, com a inclusão de planos de aula sobre o tema.

- **Capítulo 6: Considerações Finais -** Apresenta as considerações finais do estudo.

Capítulo 2

Primórdios da Geometria: Mesopotâmia

A origem da palavra Geometria vem do grego *Geometrein*, em que *Geo* significa terra e *metron* significa para medir, tendo uma relação direta ao seu primórdio de caráter extremamente prático através de atividades como a agricultura, o comércio e a engenharia. Tais atividades só puderam ser tão bem desenvolvidas e aprimoradas devido ao cálculo de um calendário para o controle dos plantios, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra EVES (2011, p. 57).

Sabe-se que parte das primeiras civilizações da humanidade se abrigaram na região da Mesopotâmia, onde graças a presença dos rios Tigre e Eufrates a agricultura e a criação de animais puderam ser desenvolvidas, permitindo conceber uma evolução para formas mais avançadas de sociedade, criando nesse caso uma necessidade para que a matemática como um todo se desenvolvesse. Em relação aos povos que habitaram a região da Mesopotâmia, sabemos que os sumérios viveram lá primeiro (por volta de 3500 a.C), foram dominados pelos acádios (por volta de 2500 a.C), que se tornaram os assírios e os babilônios.

> [...] babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva (regras corretas para $\pi = 3$) e se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura. EVES (2011, p. 60-61)

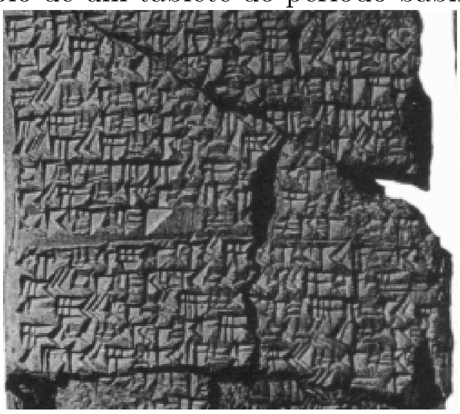
Figura 2.1: Mapa atual da região onde se encontrava a Mesopotâmia

Fonte: Coleção Dorling Kindersle RF.

Tais evidências permitem compreender o quão intrínseca era a relação entre a geometria e as necessidades práticas das civilizações antigas. Os registros babilônicos revelam não apenas um domínio funcional dos conceitos geométricos, mas também uma sofisticação impressionante em sua aplicação. Além das aplicações práticas, a geometria assumiu um papel cultural e filosófico em diversas civilizações antigas, como veremos posteriormente no desenvolvimento da geometria no Egito e na Grécia.

A matemática babilônica só é possível ser estudada e compreendida graças aos tabletes feitos de argila que encontram-se guardados em museus e universidades do mundo inteiro, sendo designados por seu número de catálogo em uma determinada coleção. Por exemplo, o tablete BM 13901 diz respeito ao tablete catalogado sob o número 13901 da coleção do museu britânico (British Museum). Outras coleções são: YBC (Yale Babilonian Collection), NBC (Nies Babylonian Colection, AO (Antiquités Orientales, do Museu do Louvre), entre outros.

Figura 2.2: Exemplo de um tablete do período babilônico - YBC 4662



Fonte: Yale Babylonian Collection

2.1 Sistema Sexagesimal Posicional

Um sistema de numeração é considerado posicional quando um mesmo símbolo pode representar diferentes valores dependendo da sua localização. Por exemplo, o símbolo "1" do número "1" possui valor distinto do "1" nos números: "10", "100" ou "1000". Com essa característica, é possível representar uma infinidade de valores utilizando-se dos mesmos algarismos: $123 \neq 132 \neq 213 \neq 231 \neq 312 \neq 321$.

Além dessa característica, é importante levar em consideração a base de um determinado sistema, atualmente utiliza-se do sistema decimal, isso significa que cada posição em um determinado número representa um múltiplo de uma potência de base 10. Ou seja, o número 12 equivale à $1(10)^1 + 2(10)^0$, já o número 8820 equivale à $8(10)^3 + 8(10)^2 + 2(10)^1 + 0(10)^0$. Para separar a parte inteira de um número de sua parte fracionária (valores menores que a unidade), utiliza-se da vírgula (,). Dessa forma, o número 45,87 equivale à $4(10)^1 + 5(10)^0 + 8(10)^{-1} + 7(10)^{-2}$.

Já os babilônios utilizavam do sistema sexagesimal posicional, ou seja, um sistema de base 60 em que cada posição em um determinado número representa um múltiplo de uma potência de base 60. Como na base 60 é possível ter, em cada casa, algarismos de 1 a 59, é usual utilizar o ponto e vírgula (;) como separador de algarismos dentro da parte inteira ou dentro da parte fracionária. Já para separar a parte inteira da fracionária utiliza-se a vírgula (,). Para compreendermos melhor alguns problemas da época é usual que seja realizado uma transformação entre um número na base sexagesimal para a sua representação na base decimal, esse processo pode ser visualizado através da tabela abaixo.

Valor sexagesimal	**Conversão para a base 10**	**Valor decimal**
1;1	$1(60)^1 + 1(60)^0$	61
1;0;1	$1(60)^2 + 0(60)^1 + 1(60)^0$	3601
2;0;0	$2(60)^2 + 0(60)^1 + 0(60)^0$	7200
2;2,3	$2(60)^1 + 2(60)^0 + 3(60)^{-1}$	122,05
3;50,3;6	$3(60)^1 + 50(60)^0 + 3(60)^{-1} + 6(60)^{-2}$	$230,051\bar{6}$

Tabela 2.1: Conversão da base sexagesimal para a base decimal

Já em relação aos cálculos na base sexagesimal é necessário ser atentar à alguns detalhes:

1. $59 + 1 = 1; 0$.

2. $2; 35, 20; 25 + 1; 20, 40; 10 = 3; 56, 0; 35$.

3. $4 \times 20 = 1; 20$.

4. $1, 30 \div 3 = 0, 30$.

5. $0, 30^2 = 0, 15$.

Não se sabe ao certo por que os babilônios adotaram a base sexagesimal, mas existem diversas hipóteses que buscam explicar essa escolha. Uma das teorias mais aceitas destaca que o número 60 possui muitos divisores (é divisível por 2, 3, 4, 5, 6 e outros), o que facilita cálculos com frações e medidas. Outra explicação possível relaciona-se à anatomia humana: ao usar o polegar de uma mão para contar as três falanges de cada um dos quatro dedos da mesma mão, obtém-se 12 unidades; e, utilizando os cinco dedos da outra mão para registrar cada grupo de 12, é possível contar até 60, o que pode ter servido como base natural para a contagem. Embora não haja consenso sobre a origem exata dessa base, seu legado é inegável. Apesar de a base decimal predominar atualmente, especialmente na resolução de problemas algébricos, a base 60 continua a ser utilizada em contextos cotidianos, como na medição do tempo (com 60 segundos em um minuto e 60 minutos em uma hora) além de sua presença em sistemas angulares e na navegação.

> Entre os babilônios, havia também tabletes equivalentes às nossas tabuadas. A maioria das operações realizadas relacionava-se diretamente com os tabletes, como multiplicação, quadrados, raízes quadradas, cubos, raízes cúbicas etc. No caso da multiplicação, seu uso era fundamental. Basta observar que os cálculos elementares, ou seja, aqueles que correspondem à nossa tabuada, incluem multiplicações até 60x60! Isso pode indicar a necessidade de tabletes mesmo para cálculos mais elementares. ROQUE (2012, p. 57).

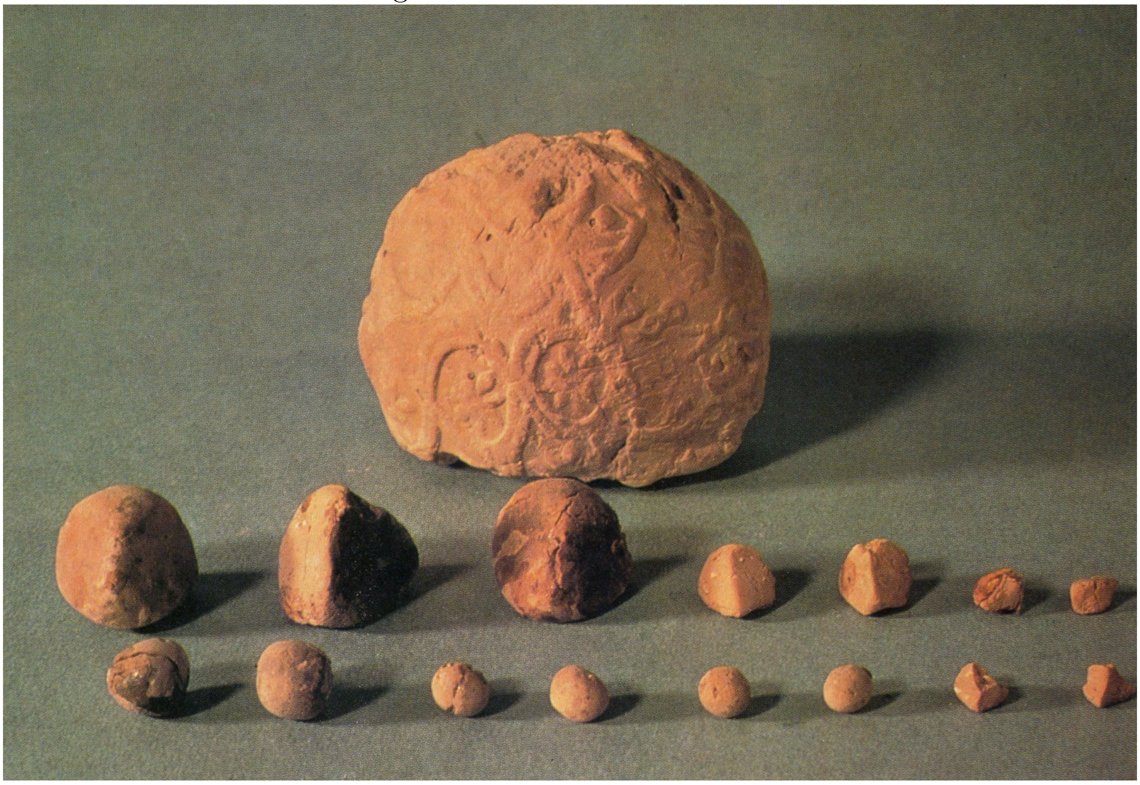
Vale ressaltar que, mediante ao apresentado por Roque (2012), muitos processos e cálculos realizados pelos babilônios serão apresentados a seguir de maneira ilustrativa. A próxima seção será dedicada ao estudo de importantes artefatos babilônicos, com a análise de alguns problemas neles contidos. Sempre que um problema for resolvido segundo os métodos utilizados pelos babilônios, será empregada a base sexagesimal, conforme apresentada acima. Já nas resoluções baseadas nos métodos atuais, será utilizada a base decimal, permitindo assim uma comparação entre os dois sistemas de cálculo.

2.2 Artefatos Babilônicos

Com o intuito de compreender como a matemática na Mesopotâmia era abordada e utilizada, será relatado e analisado a seguir alguns tabletes matemáticos antigos. Vale destacar que, de acordo com Boyer (2012, p. 40) "O uso antigo da escrita na Mesopotâmia é atestado por centenas de tábuas de barro encontradas em Uruk e datando de cerca de 5000 anos atrás".

Roque (2012) relata a existência de *tokens*, objetos de argila que apresentavam diversos formatos geométricos, tais como: cones, esferas, discos, cilindros etc. Tais objetos possuíam o objetivo de estabelecer uma relação de contagem, permitindo manter o controle sobre produtos da agricultura, em que cada forma geométrica era direcionada à contagem de determinado objeto, como por exemplo: ovelhas, grãos, pães etc.

Figura 2.3: Invólucro e *tokens*



Fonte: https://dataphys.org/list/mesopotamian-clay-tokens/

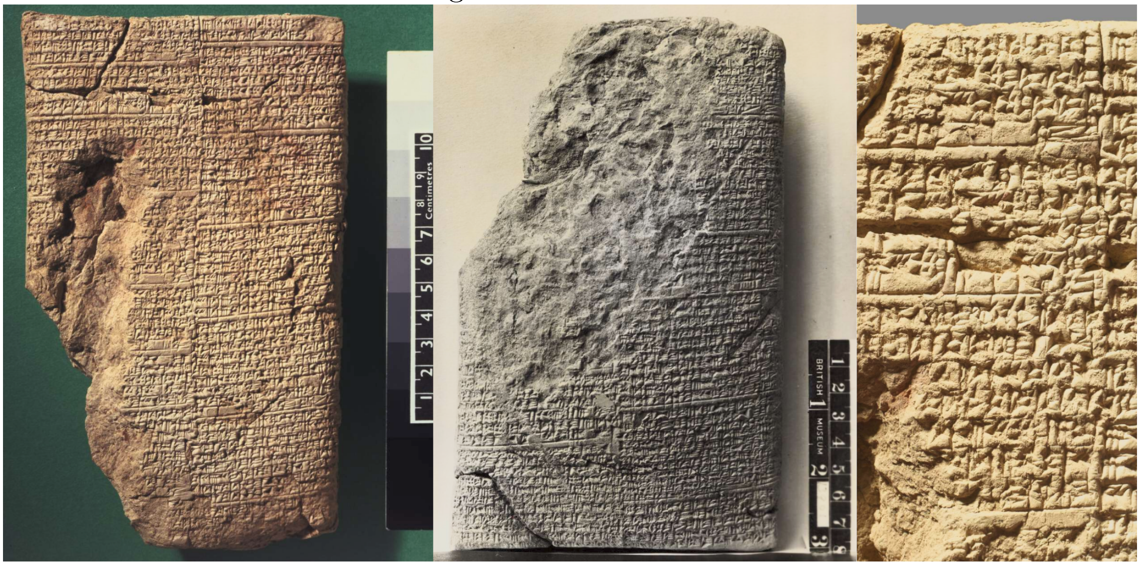
Sabe-se também que a cada objeto contado era concebido um *tokens*, armazenando-o em invólucros de argila. É importante destacar que, com o invólucro ainda molhado, era impresso com o próprio token na superfície para estabelecer um controle da quantidade em seu interior após o fechamento. Com o passar do tempo e a evolução da sociedade, percebeu-se ser desnecessário o armazenamento de *tokens* no interior dos invólucros, uma vez que a própria gravura sobre a superfície da argila já permitia o controle necessário.

Portanto, é a partir desse contexto que pesquisadores indicam como sendo o possível início das gravuras em tabletes e tábuas de argila e que, posteriormente, dariam origem à nossa escrita como conhecemos nos dias atuais.

2.2.1 BM 13901 (1900 à 1600) a.C

Um artefato babilônico de extrema importância, que permitirá estabelecer relações com a geometria compreendida pelos babilônios, é o BM 13901, localizado atualmente no Museu Britânico, apresentando 21 problemas que dão origem a equações do 2º grau ou a sistemas de equações, e outros três que estão ilegíveis, por estarem localizados em partes danificadas GONÇALVES (2011, p. 293).

Figura 2.4: BM 13901



Fonte: British Museum - *britishmuseum.org*

> Os escribas apoiavam-se frequentemente em vocabulário e noções geométricas para formular os seus problemas. À incógnita chamavam lado e à sua elevação à potência 2, chamavam quadrado; tradição perpetuada até hoje. Quando se tratava de resolver sistemas de duas incógnitas, a uma chamavam comprimento e à outra, largura. (GONÇALVES, 2011, p. 294).

O problema 1 da Tábua BM 13901 é enunciado, utilizando-se da base sexagesimal, da seguinte maneira: "Adicionei a área e o lado do meu quadrado, obtive 0,45". Em uma notação atual, convertendo para a base decimal, é possível expressar tal relação da seguinte maneira:

$$x^2 + x = \frac{45}{60},$$

sendo x o lado do quadrado.

Os escribas babilônicos apresentaram a solução através de algumas etapas, orientadas de forma verbal: "*Tu porás 1, a unidade. Tu fracionarás em 2 e obterás 0,30. Multiplicarás 0,30 por 0,30 e obterás 0,15. Adicionarás 0,15 a 0,45 e obterás 1. Este é o quadrado de 1. De 1 subtrarás 0,30, que quadraste, e obterás 0,30 que é o lado do quadrado.*"

Para os babilônicos era de extrema importância que, para cada etapa da resolução, fosse utilizado alguns tabletes para o auxílio no cálculo das operações, como por exemplo, a necessidade de um tablete de multiplicação, ou até mesmo a consulta de um tablete de raízes quadradas ROQUE (2012, p. 64).

Por outro lado, utilizando os métodos atuais para a resolução de uma equação do segundo grau e utilizando-se da base decimal, sabe-se que:

$$x = \frac{-1+\sqrt{1^2 - 4.1.(-\frac{45}{60})}}{2} = \frac{-1+\sqrt{4}}{2} = \frac{1}{2},$$

que convertendo para o sistema sexagesimal, conclui-se que o lado do quadrado é de fato 0,30.

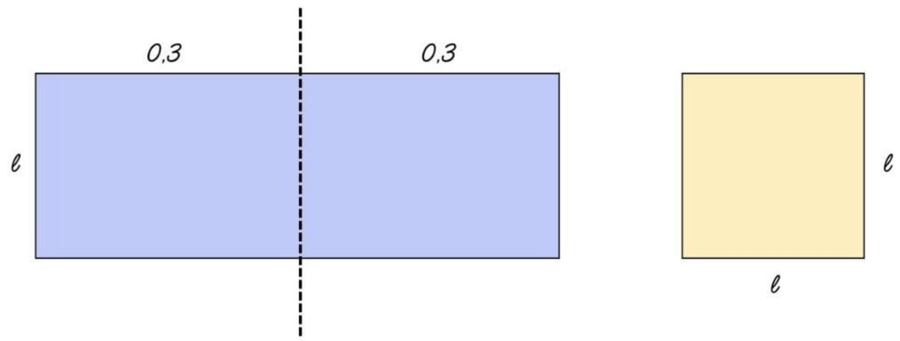
Com o intuito de compreender o raciocínio empregado pelo escriba, será realizada uma interpretação puramente geométrica do problema apresentado. Considerando o enunciado "*Adicionei a área e o lado do meu quadrado, obtive 0,45*". Seja ℓ o lado de tal quadrado, a sua área pode ser representada pelo quadrado amarelo representado pela Figura 2.5, já o lado pela representação do retângulo azul, representado pela Figura 2.5, cujos lados medem 1 e ℓ. Desta forma, temos que a área ocupada por ambas as figuras pode ser representada pelo número 0,45.

Figura 2.5: Interpretação geométrica: $\ell + \ell^2$

Fonte: Adaptado de ROQUE (2012, p. 67)

Tomando como apoio o trecho do escriba "*Tu fracionarás em 2 e obterás 0,30*", divide-se o retângulo em outros dois retângulos congruentes entre si, de lados medindo 0,30 e ℓ, conforme ilustrado pela Figura 2.6.

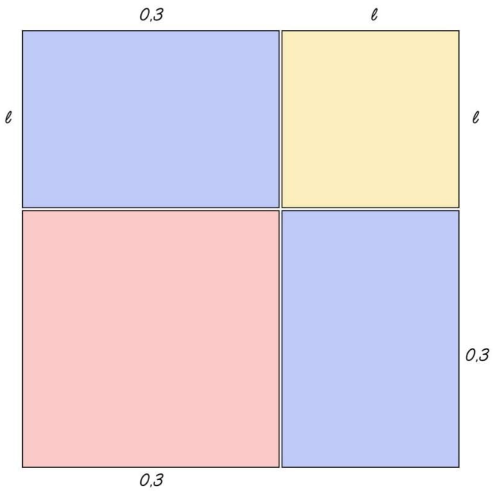
Figura 2.6: Interpretação geométrica: *Fracionarás em 2 e obterás 0,30*



Fonte: Adaptado de ROQUE (2012, p. 67)

Transladando e rotacionando tais retângulos, é possível perceber que ao adicionar um quadrado de lado 0,30, ou seja, área 0,15 é possível construir um quadrado maior (formado pelos quatro quadriláteros), conforme ilustrado pela Figura 2.7.

Figura 2.7: Interpretação geométrica: Quadrado de lado 1



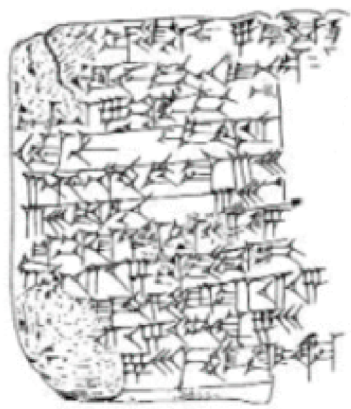
Fonte: Adaptado de ROQUE (2012, p. 67)

Tal quadrado, representado pela figura 2.7 é considerado uma figura completa, ou seja, é o todo, constituído pela união entre as figuras iniciais, cuja área é 0,45, e o quadrado de lado 0,30, cuja área é 0,15. Ou seja, tal quadrado possui área equivalente a uma unidade, logo possui também lado medindo 1, concluindo então que $\ell = 0,30$, uma vez que $0,30 + 0,30 = 1$.

2.2.2 YBC 6967 (1800 a.C)

Outro artefato de extrema importância é o YBC 6967, ilustrado pela Figura 2.8, localizado na universidade de Yale, nos Estados Unidos.

Figura 2.8: Tablete YBC 6967



Fonte: KATZ (2006, pg. 1476)

Existe um problema muito conhecido, contido nesse tablete, o de igum e igibum, em que é tido como pressuposto que o produto entre dois números resulta em 1;0. Roque (2012, pg. 69) enuncia esse problema em que são dadas duas condições:

1. $xy = 1; 0$
2. $x - y = 7$

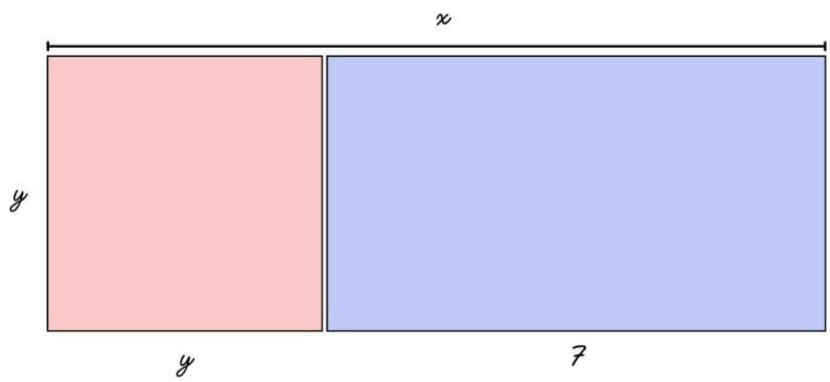
A solução, nos moldes realizados pelos escribas na época pode ser acompanhada pelas seguintes etapas:

1. divida 7 por 2 e o resultado é 3,30
2. multiplique 3,30 por 3,30, obtendo 12,15
3. adicione 1;0 a 12,15, obteno 1;12,15
4. qual a raiz quadrada de 1;12,15? Resposta: 8,30
5. escreva 8,30 duas vezes
6. de um subtraia 3,30 e em outro adicione essa mesma quantidade
7. o igibum é 12 e o igum é 5

Traduzindo para os moldes atuais, o problema pode ser resolvido da seguinte maneira: se $x-y = 7$, então $x = 7+y$, substituindo na equação $xy = 60$, temos que $y^2+7y-60 = 0$, obtendo como única solução positiva $y = 5$ e como x excede y em 7, conclui-se que $x = 12$.

De forma geométrica, nos conformes às resoluções babilônicas, temos que a equação $xy = 1; 0$ pode ser representada por um retângulo cujos lados medem x e y, ou ainda por um quadrado cujo lado mede y e um retângulo cujos lados medem y e $x - y = 7$, ilustrados pela Figura 2.9.

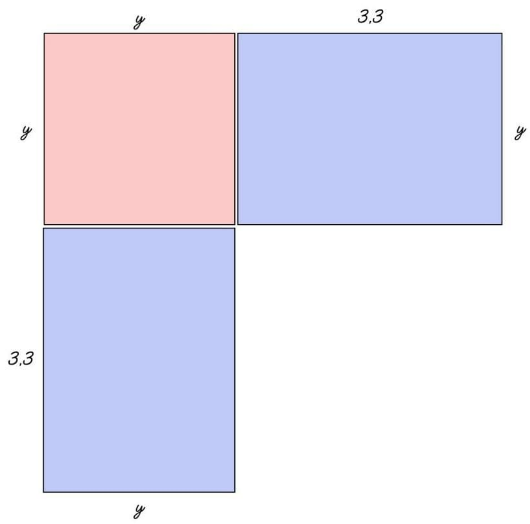
Figura 2.9: Interpretação geométrica: retângulo de lados x e y



Fonte: Adaptado de ROQUE (2012, p. 70)

Adotando a primeira orientação do escriba e dividindo o lado $x-y=7$ em duas partes iguais, obtém-se dois retângulos cujos lados medem $3,30$ (metade de 7) e y, rotacionando e transladando tais retângulos, assim como o quadrado de lado y, obtém-se a Figura 2.10 cuja área, de acordo com o próprio enunciado, pode ser representada pelo número 1;0.

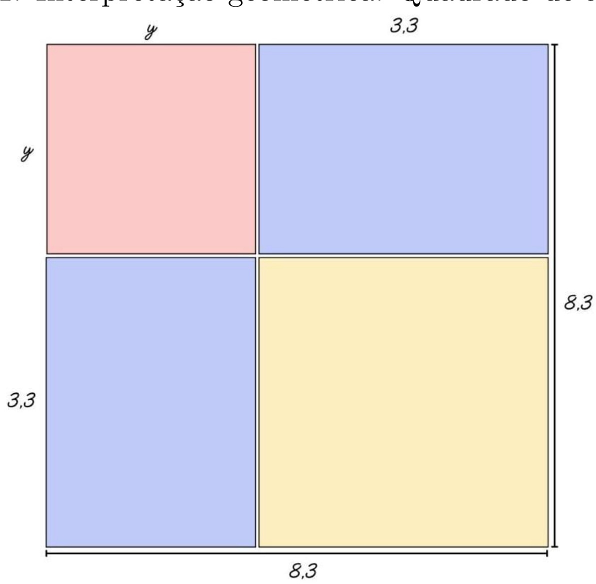
Figura 2.10: Interpretação geométrica: Reorganizando as figuras geométricas



Fonte: Adaptado de ROQUE (2012, p. 70)

Completando a imagem com um quadrado de lados $3,30$, obtém-se um quadrado maior, ilustrado pela Figura 2.11, cuja área será a soma das áreas das figuras iniciais (1;0) com a área do quadrado de lado $3,30$ (12,15), ou seja, a área do quadrado representado pela figura 2.11 será 1;12,15, e como a raíz quadrada de 1;12,15 é 8,30, conclui-se que o lado do quadrado maior será 8,30.

Figura 2.11: Interpretação geométrica: Quadrado de área 1;12,15



Fonte: Adaptado de ROQUE (2012, p. 70)

Dessa forma, é possível concluir que $8,30 - 3,30 = y$, ou seja, $y = 5$ e como x excede o seu resultado em 7, temos que $x = 12$.

2.2.3 YBC 7289

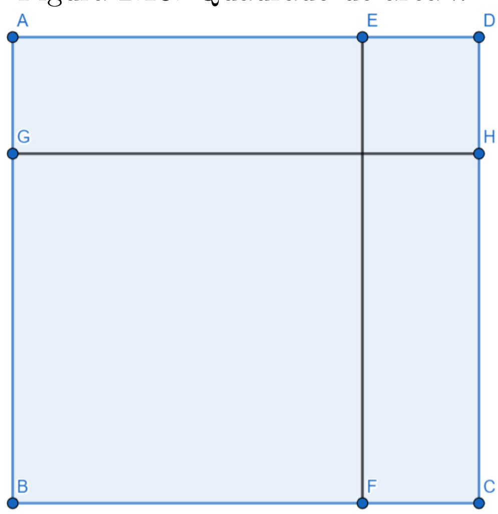
É fácil perceber que em muitos problemas apresentados por diversos tabletes, inclusive alguns citados acima, é necessário em algum momento calcular a raíz de determinado número, o que para o período não era um processo tão simples de ser realizado. Uma das hipóteses acerca do tablete YBC 7289 é a de que o seu objetivo estava relacionado a cálculos aproximados para encontrar raízes de determinados números.

Figura 2.12: YBC 7289

Fonte: Yale Babylonian Collection

Segundo Roque (2012), há indicios de que o cálculo da raíz de um número k se baseava em um procedimento geométrico. Seja o quadrado ABCD de lado k' e área k ilustrado pela figura 2.13, o objetivo principal é, dado a área do quadrado estabelecer relações para aproximar o valor do seu lado, ou seja, calcular a raíz do número k.

Figura 2.13: Quadrado de área k



Fonte: Própria.

Se os segmentos EF e GH dividem os lados do quadrado em partes tais que $AE = BF = BG = CH = a$ e $ED = FC = AG = DG = b$, de tal forma que $k' = a + b$, é possível perceber que tal quadrado pode ser fragmentado em quatro quadriláteros, sendo um quadrado de lado a, outro quadrado de lado b e dois retângulos congruêntes de lados a e b, ou seja, $k = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Se a for um valor conhecido, ou adotado como um chute inicial, o objetivo será procurar uma boa aproximação para b, de tal forma que a solução para a raíz de k será $k' = a + b$. Analisando a figura 2.13, temos que $k - a^2 = b^2 + 2ab$, conforme mais próximo for o valor de a (melhor o chute inicial), menor será b e ainda menor será b^2, de modo que podemos desprezá-lo e obter uma boa aproximação de b como sendo $b = \frac{k-a^2}{2a}$.

Uma vez que o objetivo inicial é o de encontrar a raíz de k, ou seja k', é possível expressar tal aproximação pela relação em que $k' = a + b$, e como $b = \frac{k-a^2}{2a}$, temos: $k' = a + \frac{k-a^2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{k}{2a}$. Por exemplo, se o objetivo for calcular a raíz do número 2 ($k = 2$), é necessário estabelecer um chute inicial, digamos que seja $a = 1,5$, substituindo na relação apresentada acima, temos que: $k' = \frac{1,5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$, que apresenta erro a partir da terceira casa decimal. Tal processo pode ser repetido infinitamente, adotando os valores encontrados como novas aproximações, alcançando valores cada vez mais precisos.

Presume-se que tal processo descrito acima tenha sido utilizado para encontrar uma boa aproximação para a raíz do número 2, processo esse registrado pelo tablete YBC 7289. Segundo Roque (2012), a placa fornece sobre a diagonal do quadrado, em escrita cuneiforme, a aproximação de $\sqrt{2}$ para o valor $1,4142129629$.

2.2.4 BM 15285

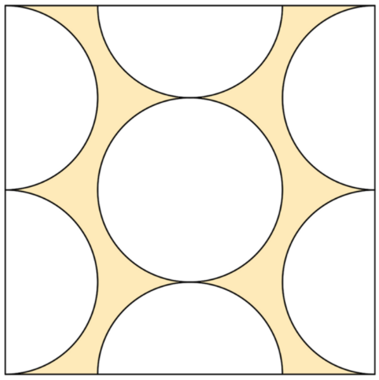
Outro artefato de extrema importância, localizado atualmente no Museu Britânico, é o tablete BM 15285, estima-se que seu uso primordial era o de ensinar alunos a encontrar áreas de determinadas figuras geométricas. Um estudo realizado por Eleanor Robson (2007) ilustra 31 dos 40 problemas propostos pelo tablete, tendo em vista que 9 dos problemas se encontram em regiões danificadas, ou completamente destruídas.

Figura 2.14: BM 15285

Fonte: Fonte: British Museum - *britishmuseum.org*

Segundo Roque (2012), a placa BM 15285 possivelmente tenha sido um texto escolar, contendo diferentes figuras planas inseridas em um quadrado, conforme pode-se observar através da figura 2.14. Um desses problemas está ilustrado de forma mais detalhada através da figura 2.15, em que é possível perceber um círculo e seis semicírculos inseridos em um quadrado, o problema se baseava em encontrar a área ilustrada pela região em amarelo.

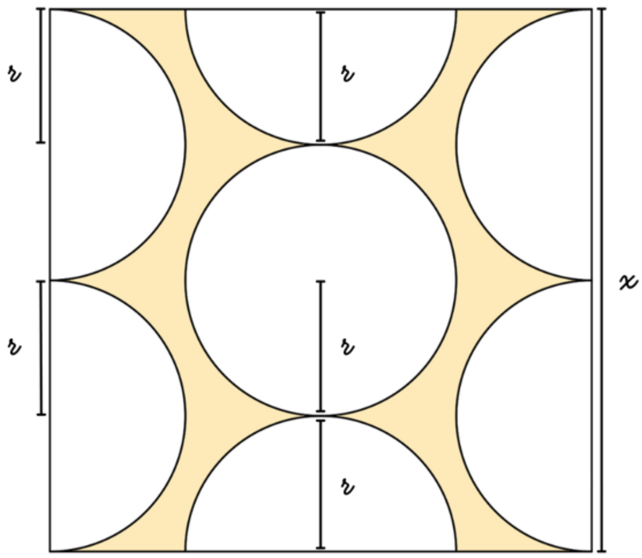
Figura 2.15: Problema 38 da placa BM 15285



Fonte: Adaptado de Robson (2007, p. 99)

Infelizmente, a ausência de soluções numéricas para tais problemas apresentados na placa impossibilitam compreender quais eram as técnicas utilizadas nas soluções pretendidas. Por outro lado, é possivel vislumbrar sobre o caráter dos problemas estudados na época, ficando extremamente nítido que o estudo e a manipulação entre diferentes figuras geométricas acabava sendo recorrente. Possivelmente, tais problemas apresentados em textos escolares possuíam o objetivo de preparar o aluno a lidar com situações que poderiam surgir no futuro, por exemplo, dentro do contexto da agricultura.

Figura 2.16: Medidas do Problema 38



Fonte: Adaptado de Robson (2007, p. 99)

Atualmente, problemas desse caráter são recorrentes dentro de um contexto escolar de alunos do ensino básico. Analisando a figura 2.16, temos que o raio dos semicírculos, assim como o do círculo central, pode ser representado por $r = \frac{x}{4}$ (sendo x o lado do quadrado). Logo, a área da região amarela (Am) será equivalente a diferença entre a área do quadrado de lado x e a área dos 8 semicírculos (um círculo e seis semicírculos) de raio $r = \frac{x}{4}$. Realizando os cálculos necessários obtém-se que $Am = x^2(1 - \frac{\pi}{4})$.

2.3 Plano de aula: Geometria Babilônica - Explorando a Matemática Antiga

Objetivo Geral: Estudar os conceitos de geometria usados pelos babilônios, utilizando materiais concretos, com foco na compreensão de operações geométricas semelhantes às descritas nos tabletes babilônicos, e aplicando esses conceitos na resolução de problemas geométricos simples.

Série: 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental.

Duração: 2 aulas de 100 minutos cada.

Objetivos Específicos:

1. **Compreender os conceitos de geometria utilizados pelos babilônios:** A geometria no contexto dos babilônios era prática e voltada para aplicações, como construção de templos, medições de terrenos, e cálculos para agrimensura.
2. **Aplicar conceitos geométricos utilizando materiais concretos:** Trabalhar com o uso de argila, régua e cordas para reproduzir práticas geométricas antigas.
3. **Desenvolver habilidades para resolver problemas de áreas e perímetros:** Explorar o cálculo da área de figuras geométricas (como retângulos, triângulos e quadrados) e perímetros, em contextos similares aos usados pelos babilônios.
4. **Introduzir a ideia de proporções e relações geométricas que os babilônios usavam:** Trabalhar com relações numéricas para encontrar medidas, especialmente a relação entre lados e áreas de figuras.

Materiais:

1. Argila (ou massinha de modelar)
2. Régua
3. Canetas ou lápis para marcar

4. Papéis em branco

5. Calculadora (opcional)

6. Imagens ou fotos de tabletes babilônicos com cálculos geométricos (opcional)

2.3.1 Competências Específicas de Matemática da BNCC (Ensino Fundamental):

1. **Competência 2:** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

2. **Competência 3:** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

3. **Competência 6:** Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados)

2.3.2 Habilidades da BNCC (Ensino Fundamental - 6º e 7º anos):

1. **EF06MA29:** Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

2. **EF07MA29:** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

3. **EF07MA31:** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros

4. **EF08MA19:** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

2.3.3 Aula 1: Introdução à Geometria Babilônica e Exploração com Argila

1. Introdução (20 minutos):

- **Objetivo:** Apresentar brevemente a história dos babilônios e como eles usavam a geometria no dia a dia.
- Explicar que a geometria babilônica tinha aplicação prática, especialmente em questões de construção e agrimensura.
- Mostrar exemplos de como os babilônios usavam operações geométricas, como calcular áreas de terrenos ou medir terrenos retangulares.

2. Atividade Inicial - Trabalhando com a massinha (40 minutos):

- **Objetivo:** Mostrar de forma prática como os babilônios usavam materiais simples para desenhar e medir figuras geométricas.
- **Passos:**
  1. Divida os alunos em pequenos grupos (3-4 alunos por grupo).
  2. Cada grupo recebe um pedaço de argila ou massinha de modelar e deve formar figuras geométricas simples (retângulos, quadrados e triângulos) e medir suas dimensões usando a régua.
  3. Após moldar as figuras, os alunos devem calcular o perímetro e a área das figuras formadas (o cálculo deve ser feito com base nas medições realizadas).
  4. Durante a atividade, o professor pode circular pela sala para ajudar os grupos e esclarecer dúvidas.

3. Discussão em grupo (40 minutos):

- **Objetivo:** Refletir sobre a atividade e conectar com o que os babilônios faziam.
- O professor pode perguntar aos alunos: "Como será que os babilônios calculavam a área e o perímetro de um terreno?".
- Explicar que, assim como nós, eles utilizavam medidas práticas, mas sem o auxílio de cálculos algébricos como usamos hoje.
- **Atividade opcional:** Apresentar imagens de tabletes babilônicos que mostram cálculos geométricos (se disponível), destacando os problemas geométricos que os babilônios resolviam.

2.3.4 Aula 2: Resolução de Problemas e Construção de Tabletes Babilônicos

1. Recapitulação e Introdução ao Problema (20 minutos):

- **Objetivo:** Revisar os conceitos da aula anterior e iniciar a resolução de problemas práticos com base nos métodos babilônios.
- Perguntar aos alunos sobre o que aprenderam na aula anterior e revisar o conceito de área e perímetro.
- Apresentar um problema simples similar aos problemas babilônicos: "Como calcular a área de um terreno retangular de 8 metros por 5 metros?"

2. Construção inicial (20 minutos):

Peça aos alunos que usem a massinha (ou argila) para construir um retângulo de dimensões 5x8 unidades.

- Oriente-os a medir os lados com uma régua ou estimar utilizando unidades iguais (exemplo: palitos ou dedos).
- Registre no quadro:
  - Área do retângulo: $A = 5 \times 8 = 40$ unidades quadradas.
  - Perímetro do retângulo: $P = 2(5 + 8) = 26$ unidades.

3. Transformações geométricas (40 minutos):

Peça que os alunos dividam e moldem a mesma massinha para criar outros polígonos (se atentar para que possuam a mesma espessura), por exemplo:

- Triângulo de base 10 e altura 8.
- Trapézio de bases 8 e 12 e altura 4.

Após cada transformação, os alunos medem os lados dos novos polígonos e calculam o perímetro. Peça que registrem os valores em uma tabela como a ilustrada pela Tabela 2.2:

Pergunte:

- "O que aconteceu com o perímetro ao mudar a forma?".
- "O que acontece com a área caso todas as figuras possuam a mesma espessura?'
- "O que acontece com a área caso a espessura seja maior ou menor?"

4. Discussão e Conclusão (20 minutos):

- **Discussão coletiva:** Por que a área permanece constante, mas o perímetro muda?
- Onde isso pode ser observado no dia a dia (ex: terrenos de formas diferentes com a mesma área)?

Figura	**Área (un^2)**	**Perímetro (un)**
Retângulo	40	26
Triângulo	...	...
Trapézio	...	...

Tabela 2.2: Relação entre área e perímetro para diferentes figuras.

2.3.5 Avaliação

A avaliação é uma parte essencial do processo de ensino-aprendizagem, pois permite acompanhar o desenvolvimento dos alunos, identificar suas dificuldades e sucessos, e ajustar o ensino para atender às necessidades de cada estudante. No contexto da aula, a avaliação não se restringe a medir o domínio de conteúdos formais, mas busca também incentivar a exploração, a reflexão e a aplicação prática dos conceitos geométricos de forma concreta.

A proposta de avaliação neste plano de aula é contínua e formativa, com o objetivo de acompanhar o processo de aprendizagem de maneira dinâmica e interativa. Sendo assim, a avaliação seria realizada através da observação da participação dos alunos durante a atividade com a argila e fios, acompanhando se estão aplicando corretamente os conceitos de área e perímetro. Sendo necessário também verificar se os alunos conseguiram registrar e resolver problemas geométricos em seus “tabletes babilônicos” de forma adequada.

2.4 Considerações Parciais

É extremamente interessante e rico perceber as características nas resoluções dos problemas das diferentes placas babilônicas apresentadas. As resoluções dos problemas nas diversas placas babilônicas revelam um conhecimento geométrico notavelmente avançado. Fica claro que esses povos antigos possuíam um domínio impressionante, abrangendo desde a compreensão de formas básicas como o quadrado e o círculo até a maestria em manipulações e transformações geométricas. Isso demonstra vividamente o fascínio que os babilônios tinham pela matemática.

Os exemplos e tabletes apresentados reforçam que a geometria babilônica estava intimamente relacionada à noções utilitaristas, principalmente através da compreensão da área das principais figuras geométricas tais quais como a do quadrado, retângulo e círculo. Vale destacar também que uma das principais heranças advindas de tal período foi a da divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais, graças à base sexagesimal da época.

Capítulo 3

Egito Antigo

John Tabak (2004) relata que, de forma equivalente ao povo babilônico, a geometria egípcia se apresenta através de um caráter prático. A cada ano o Rio Nilo transbordava e lavava os campos férteis que ficavam à sua margem. O Rio muitas vezes destruía algumas marcações de fronteiras ou arrastava lotes de terra.

Figura 3.1: Mapa da Região do Egito

Fonte: Google Maps

A população precisava pagar impostos, de acordo com a extensão da sua propriedade, o que gerava um grande problema durante o período posterior às inundações, uma vez que tais demarcações eram destruídas pelo rio. Sendo esta uma possível motivação para a evolução da geometria e o estudo das medições. A busca por métodos para calcular a área de figuras geométricas simples passou a ser extremamente necessário.

Tabak (2004) e EVES (2011) destacam que justamente pelo fato de que a necessidade em estudar geometria em tal período seja para fins práticos, muitas das fórmulas utilizadas, para medir certas áreas e volumes por exemplo, não eram fórmulas exatas e sim aproximações (equivalente à aproximação de uma raíz quadrada encontrada na placa YBC 7289 do período babilônico).

Os egípcios, como é de se esperar, possuíam grande interesse na geometria espacial, em particular no estudo das pirâmides. Dada a medida de um lado da base e a altura de uma pirâmide, por exemplo, eles podiam calcular o volume da pirâmide. Descreveram também importantes propriedades matemáticas da pirâmide, por exemplo, dada a medida de um lado da base de uma pirâmide e sua altura, eles sabiam como calcular um número que caracterizava a inclinação das faces da pirâmide.

Figura 3.2: Pirâmides do Egito

Fonte: veja.abril.com.br

Em comparação ao período babilônico, nota-se que por mais que a arquitetura egípcia seja muito mais conhecida, pois suas construções eram realizadas com pedras que são muito mais duráveis que os tijolos de barros utilizados pelos mesopotâmicos, a matemática mesopotâmica é mais conhecida do que a matemática egípcia porque as tábuas de argila que os mesopotâmicos usavam para registrar sua matemática se mostraram muito mais duráveis do que o papiro egípcio.

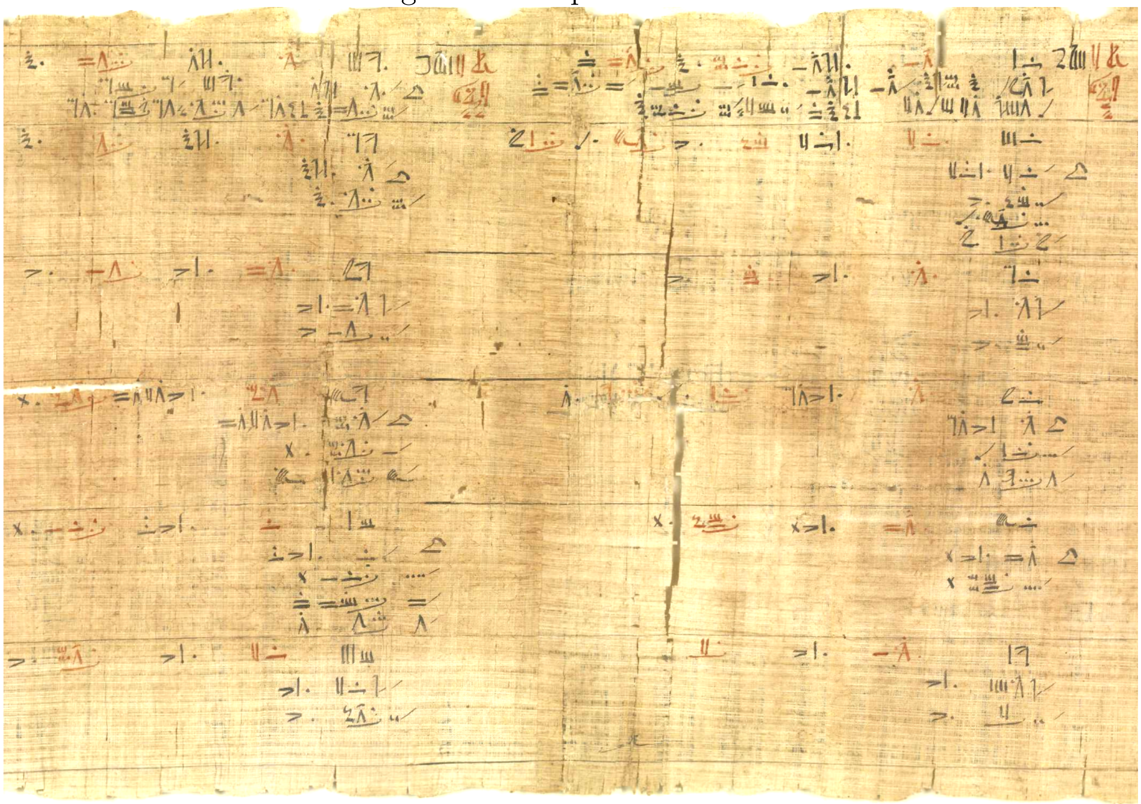
Com o intuito de melhor compreender a geometria abordada pelos egípcios, será realizada a seguir uma análise de dois papiros de extrema importância para a história da matemática, o papiro de Ahmes (ou papiro de Rhind) e o papiro de Moscou (ou papiro de Golenischev).

3.1 Papiro de Ahmes

Segundo Boyer (2012, p. 30) o papiro de Ahmes é o mais extenso papiro de natureza matemática preservado até os dias atuais. Possui cerca de 30 centímetros de altura e 5 metros de comprimento, enquanto a maior parte encontra-se no Museu Britânico, alguns de seus fragmentos estão no Museu de Brooklin.

O nome Papiro de Ahmes se dá ao escriba que o copiou de um trabalho mais antigo em 1650 a.C. Também é conhecido como Papiro de Rhind, por ter sido adquirido em 1858 pelo escocês Henry Rhind, levando assim o seu nome.

Figura 3.3: Papiro de Ahmes



Fonte: British Museum

Chace (1929) realizou uma transcrição do papiro, descrevendo os 84 problemas contidos no mesmo. É importante destacar que embora o papiro seja fragmentado em 87 partes, os números 85, 86 e 87 não contemplam o trabalho matemático, constando algumas anotações que sugerem que o escriba estava testando a sua tinta, ou ainda alguns relatos sobre determinados incidentes de forma não tão coerente. Em relação aos problemas que envolvem a geometria, é possível perceber que o autor foi capaz de determinar a área de figuras como a do retângulo, triângulos e círculos, e os volumes de cilindros e prismas, sabia também que num triângulo retângulo é possível relacionar dois de seus lados para determinar um de seus ângulos.

Nos problemas 41 ao 46, o autor calcula a quantidade de grãos que pode ser armazenada em determinados espaços ou silos de determinadas dimensões, e as dimensões dos silos que conterão determinadas quantidades de grãos. Tendo isso em vista, nota-se que tais problemas consistem na determinação de volumes em que, de forma um pouco diferente do ensino atual, o autor aborda primeiro o caso dos cilindros e só depois o dos paralelepípedos retangulares.

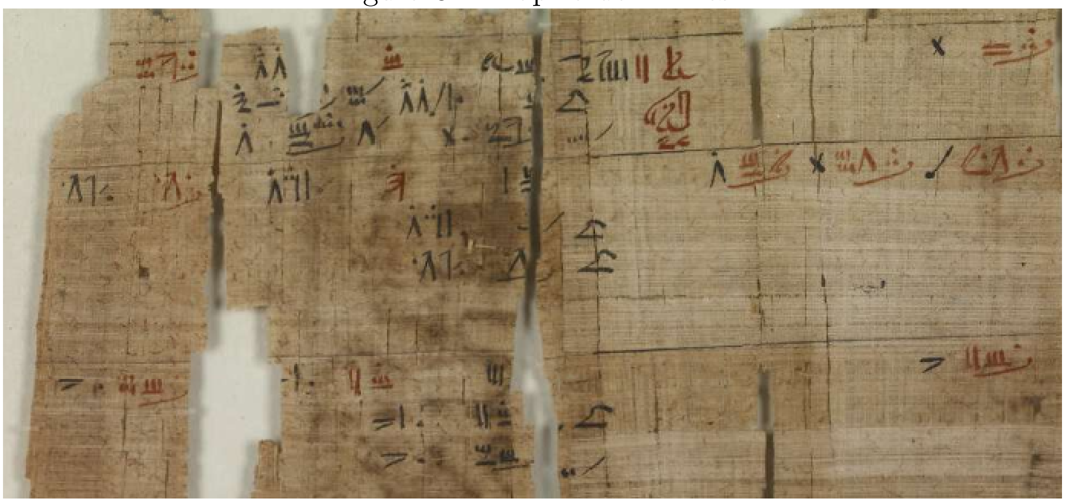
No caso dos paralelepípedos retangulares o cálculo realizado é o de simplesmente multiplicar as suas três dimensões. O problema 44 é um exemplo do cálculo direto de tal volume, sendo as três dimensões todas iguais a 10. Já no problema 45 é apresentada uma situação inversa ao do 44, em que é dado o volume de um paralelepípedo e o objetivo é encontrar o valor de seus lados, o que ele faz é tomar duas de suas dimensões como sendo 10 e calcular a terceira.

O autor possui um costume de apresentar problemas inversos aos já propostos, de tal forma que o problema 45 é o inverso do 44, o 58 é o inverso do 57 e o 59B é o inverso do 59. É claro que tal processo facilita os cálculos, uma vez que a solução poderia ser comparada às outras soluções previamente realizadas.

Nos problemas 41-43 o autor fornece as dimensões de um corpo cilíndrico para encontrar o seu volume. Assim, no problema 41 o diâmetro do cilindro é dado como 9 e a altura como 10. Para obter a área da base subtrai do diâmetro 1/9 do seu valor, elevando ao quadrado o restante e obtendo 64 como a área do círculo. Multiplicando pela sua altura, obtém-se 640 como o volume em côvados cúbicos.

É importante destacar que tal processo para a obtenção da área do círculo não é explicada pelo autor do papiro, mas segundo Chace (1929) é possível que ele tenha começado com um cilindro cujo diâmetro possua 9 unidades pois tal número possui grande importância em sua cultura, representando um grupo com as suas principais divindades. Muito provavelmente ele construiu prismas de bases quadradas com a mesma altura do cilindro, mas diferentes bases, e através de experimentações descobriu que tal cilindro completo com água conseguia preencher quase que perfeitamente o prisma cuja base possuía 8 unidades de lado. Como $8 = 9 - \frac{1}{9} \times 9$, ele tomou que a base do prisma deveria ser dado pela subtração do diâmetro com a sua nona parte.

Figura 3.4: Papiro de Ahmes



Fonte: British Museum

Sabe-se que a área de um círculo pode ser dada pelo produto entre π e o quadrado do raio $r = D/2$, mas segundo o papiro, a área de um círculo de diâmetro D é equivalente a àrea de um quadrado de lado $D - \frac{1}{9} \times D = \frac{8D}{9}$, logo:

$$\begin{aligned} \pi\frac{D^2}{4} &= (D(1 - {}^1\!/\!_9))^2 \\ \frac{\pi}{4} &= (1 - {}^1\!/\!_9)^2 \\ \pi &= 3,1605. \end{aligned}$$

Parece que foi uma feliz coincidência que um número inteiro para o diâmetro do cilindro tenha proporcionado uma aproximação tão precisa com um número também inteiro para o lado do prisma, sugerindo uma compreensão intuitiva da geometria por parte do autor.

Já nos problemas 51-53, o egípcio determina a área de um triângulo multiplicando 1/2 de sua base, e a área de um trapézio multiplicando 1/2 da soma de suas bases, pelo comprimento de uma linha *(meret)*, medida essa que pode ser o lado ou uma linha que representa a altitude. Caso *meret* significasse lado, a forma de calcular a área do triângulo seria uma ótima aproximação caso ele seja isósceles e de base estreita.

No problema 51 a base mede 4, sendo comparativamente estreita, com *meret* igual a 10. Calculando com o procedimento destacado pelo escriba, obtém-se que a área equivale à 20 unidades de área, enquanto que com as técnicas atuais obtém-se que a área equivale à 19,596 unidades de área, implicando que de fato a aproximação realizada pelo escriba é muito boa, possuindo um erro de aproximadamente 2% em relação à àrea real.

Em outros casos a base é ainda mais estreita, promovendo um erro ainda menor. No problema 53 a base é $4{}^1\!/\!_2$ com *meret* 14, enquanto no problema 52 o triângulo possui base 6 com *meret* 60. Chace (1929) ressalta que aparentemente o autor não possuísse muita concepção de diferentes tipos de triângulos, apresentando exemplos apenas com triângulos isósceles de bases estreita, o que favorece a aproximação do cálculo da área.

A relação dos comprimentos de dois lados de um triângulo retângulo é ilustrada nos problemas 56-60, que tratam das linhas distintas de uma pirâmide. Nestes problemas o escriba usa certos termos especiais. Em 56-59 ele usa as palavras *ukha-thebet* e *per-em-us* para duas linhas, e "pirâmide" para a estrutura.

A palavra *seked* é utilizada para a relação entre comprimentos de duas linhas, segundo Chace (1929) os próprios diagramas não mostram definitivamente o que são essas linhas, o mais aceito é a interpretação de Borchardt (1893) em que diz significar uma linha o lado da base enquanto a outra a altitude. Neste sentido, a palavra *seked* significa, portanto, a cotangente do ângulo em tais problemas.

Já Boyer (2012), que utiliza o termo *seqt* como sinônimo de *seked*, diz que tal palavra significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. Desta forma, ressalta que o *seqt* ou *seked* correspondia assim, exceto quanto as unidades de medida, ao termo usado hoje pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede.

Nos problemas 56, 58, 59 e 60, os comprimentos das duas linhas são dados para determinar o seked. Já em 57 e 59B a linha de base e o seked são dados para determinar a outra linha. Em todos os casos temos um triângulo isósceles, cuja metade da base é a base do triângulo retângulo utilizado.

3.1.1 Unidades de medida

Outro ponto importante a ser destacado é em relação às unidades de medida utilizadas. Em relação às unidades de medida de comprimento era utilizado, além do côvado, a unidade linear chamada *khet* que é equivalente a 100 côvados reais, além do *khet* quadrado chamado de *setat*, que é equivalente a 10.000 côvados quadrados. Tem-se também que a unidade de comprimento vertical era o côvado, enquanto que para mediar a distância horizontal a unidade era a “mão”, das quais havia sete em um côvado.

Já em relação à unidade de volume, normalmente utilizada para medir grãos, era o *hekat*, que também pode ser determinada por 292,24 polegadas cúbicas, utilizando-se usualmente a centena de *hekat*, ou um múltiplo da centena, como sendo a unidade. Tal medida era dividida em 320 partes, representando a unidade de medida denominada *ro*. Os egípcios também utilizavam frações de *hekat*, frações cujo denominador era uma potência de 2, sendo $^1/_{64}$ de *hekat* equivalente a 5 *ro*.

Essas frações eram comumente adaptadas, dobrando ou dividindo-as pela metade do seu valor, eram escritas em uma notação especial e recebiam o nome de frações do “olho de Órus”. Outra unidade importante era o *khar*, sendo equivalente a $^3/_2$ de um côvado cúbico, sendo necessário 5 *khar* para se obter uma quantidade equivalente a 1 centena de *hekat*, ou ainda 20 *khar* para se obter 1 centena de *hekat* quádruplo.

Com o intuito de melhor compreender o conhecimento geométrico de tal período, será abordado a seguir, com o apoio da tradução de Chace (1929) o enunciado e às resolução de alguns problemas encontrados no Papiro de Ahmes, realizando também uma comparação entre os processos utilizados pelo escriba, em grande maioria soluções aproximadas, e os processos utilizados atualmente.

3.1.2 Problema 41 - Encontre o volume de um celeiro cilíndrico de diâmetro 9 e altura 10

Utilizando-se do método egípcio, retira-se $^1/_9$ da medida do diâmetro, obtendo 8. Multiplica-se 8 pelo próprio 8, chegando em 64 que é a área da base. Por fim, multiplica-se por 10, chegando que o volume do cilindro equivale a 640 côvados cúbicos. Realizando as conversões necessárias para a época, como o *khar* era equivalente a $^3/_2$ de um côvado cúbico, então 640 côvados cúbicos equivalem a 960 *khar* que é equivalente a 48 centenas de *hekat* quádruplos. O método procedimental utilizado pelo escriba pode ser visualizado através da tabela abaixo.

1	8
2	16
4	32
8	64
1	64
10	640
$1/2$	320
Total	960
$1/10$	96
$1/20$	48

Tabela 3.1: Procedimento da resolução - Adaptade de Chace (1929)

Em relação aos métodos atuais, sabe-se que o volume de um cilindro é dado por $V_{cilindro} = \pi r^2 h$, em que r representa o raio da base e h a altura do cilindro. Desta forma, temos que $V_{cilindro} = 202,5\pi$, que equivale aproximadamente a 636,2 côvados cúbicos. Observando então um erro de apenas 0,6 % do método egípcio que, para fins práticos, acaba sendo irrisório na maioria das situações.

3.1.3 Problema 44 - Exemplo do cálculo do volume de um celeiro retangular, cujo comprimento é 10, sua largura 10 e a sua altura é 10. Qual a quantidade de grãos que entra nele?

Utilizando-se do método egípcio, multiplica-se 10 por 10; obtendo-se 100. Multiplica-se 100 por 10; obtendo-se 1000. Logo o volume do celeiro equivale à 1000 côvados cúbicos, ou seja, 1500 *khar* ou ainda 75 centenas de *hekat* quádruplos. O método procedimental utilizado pelo escriba pode ser visualizado através da tabela abaixo.

1	10
10	100
1	100
10	1000
1	1000
$1/2$	500
1	1500
$1/10$	150
$1/20$	75

Tabela 3.2: Procedimento da resolução - Adaptade de Chace (1929)

Através deste exemplo é possível perceber que o cálculo do volume de sólidos retangulares já era totalmete dominado e compreendido pelos egípcios, não sendo necessário utilizar aproximações.

3.1.4 Problema 50 - Exemplo de um campo redondo de diâmetro de 9 *khet*. Qual a sua área?

Utilizando-se do método egípcio, retira-se $^1/_9$ da medida do diâmetro, obtendo 1 e restando 8. Multiplica-se 8 pelo próprio 8, chegando em 64 *setat* como a área do campo redondo. O método procedimental utilizado pelo escriba pode ser visualizado através da tabela abaixo.

1	9
$^1/_9$	1
1	8
2	16
4	32
8	64

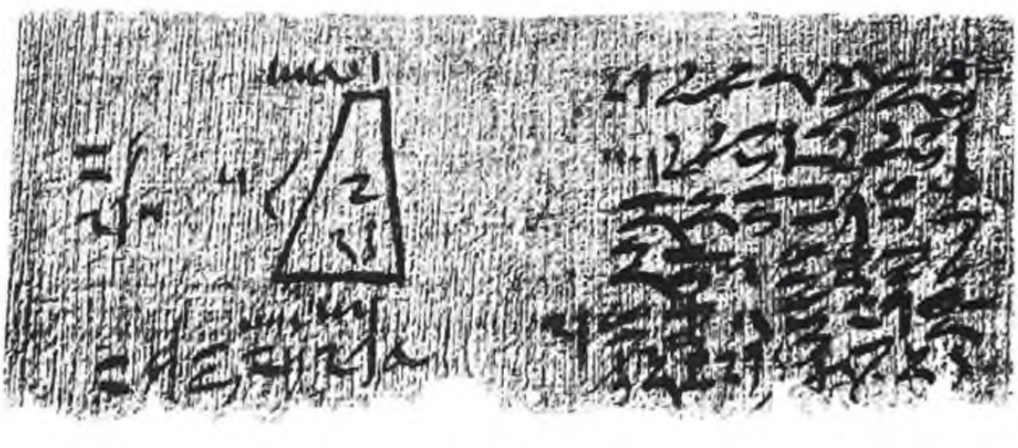
Tabela 3.3: Procedimento da resolução - Adaptade de Chace (1929)

Em relação aos métodos atuais: $A = \pi(4,5)^2 \approx 63,62$. Vale destacar que o erro será constantemente de $0,6\%$ nesses casos, devido a aproximação do valor de π.

3.2 Papiro de Moscou

O papíro de Moscou ou também conhecido como papíro Golenishchev, foi descoberto em 1893 durante uma expedição arqueológica e logo em seguida comprado por Vladimir Golenishchev, tal papiro está localizado na coleção do Museu de Belas Artes Pushkin, em Moscou, Rússia. O papíro contém 25 problemas matemáticos, envolvendo problemas tanto da área da geometria quanto da aritmética e é considerado um dos documentos matemáticos mais antigos e valiosos.

Figura 3.5: Papiro de Moucou

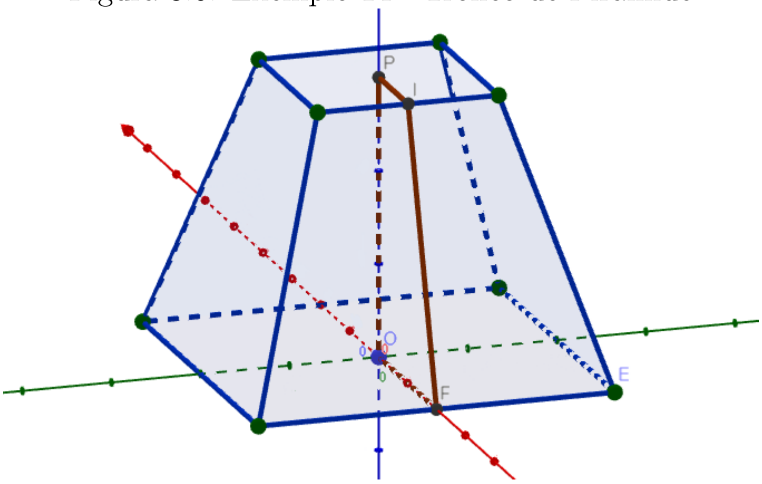


Fonte: Eves (2011, p. 86)

O problema 14 do papiro de Moscou traz consigo uma figura que se assemelha a um trapézio, confome é possível observar através da Figura 3.5. Entretanto, ao analisar os calculos associados, é possível concluir que na verdade é a representação de um tronco de pirámide com altura vertical 6 com bases quadradas, sendo a inferior medindo 4 e a superior medindo 2.

Eves (2011, p. 85) descreve que o procedimento realizado pelos escribas afim de encontrar o volume do tronco de pirâmide se baseava nas seguintes etapas: “Calcule o quadrado de 4, encontrando 16. Dobre 4, obtendo 8. Calcule o quadrado de 2. Isso será 4. Some esses 16, 8 e 4, encontrando 28. Calcule $^1/_3$ de 6. Isso será 2. Conte 28 duas vezes. Vai ser 56. Veja, é 56. Você o encontrará corretamente”.

Figura 3.6: Exemplo 14 - Tronco de Pirâmide



Fonte: GeoGebra

É surpreendente conceber que os egípcios já possuíam o conhecimento do cálculo do volume de um tronco de pirâmide de forma tão precisa, o método indicado no papiro é equivalente ao que utiliza-se até hoje, em que o volume de um tronco de pirâmide de altura h e bases quadradas de lados a e b pode ser calculado por:

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2).$$

Nota-se que o método indicado para resolver o problema 14 se enquadra perfeitamente na relação acima, em que:

$$V = \frac{1}{3}6(2^2 + 4.2 + 4^2) = 56.$$

Embora esse problema seja resolvido de forma extremamente sofisticada, muitos outros problemas do papiro não apresentam solução correta, como em relação ao cálculo de figuras planas, que deveriam ser relativamente mais simples. O que abre um questionamento acerca de como os egípcios chegaram em uma aproximação perfeita para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada, algo que ainda permanece desconhecido.

Já o problema 10 o escriba pede para calcular a área de uma superfície que se assemelha a um cesto com diâmetro $4^1/_2$, o que a princípio parece ser o comando para o cálculo de uma superfície hemisférica, algo surpreendente uma vez que, segundo Boyer (2012, p. 36), tais resultados seriam desenvolvidos cerca de 1.500 anos após o papiro.

Em relação ao desenvolvimento do papiro, o escriba utiliza uma relação equivalente à fórmula $S = (1 - {}^1/_9)^2(2x)(x)$ onde x é a medida do diâmetro, o termo $(1 - {}^1/_9)^2$ possivelmente apareça em tal relação por ser justamente a aproximação egípcia para $\frac{\pi}{4}$. Desta forma, tem-se que a resposta para tal problema é 32 e corresponderia à área da superfície de um hemisfério de diâmetro $4^1/_2$.

3.3 Plano de aula: Comparando o Cálculo da Área do Círculo no Papiro de Ahmês e nos Tempos Atuais

Objetivo Geral: Analisar e comparar o método de cálculo da área do círculo usado pelos egípcios no Papiro de Ahmês com o método utilizado na matemática moderna, destacando as aproximações e as diferenças nos processos de cálculo.

Série: 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental.

Duração: 2 aulas de 100 minutos cada.

Objetivos Específicos:

1. Compreender o método egípcio de cálculo da área do círculo, conforme o Papiro de Ahmês.

2. Comparar a fórmula egípcia de cálculo da área do círculo $(\frac{8D}{9})^2$ com a fórmula moderna πr^2, sendo D o diâmetro do círculo e r o seu raio.

3. Desenvolver a capacidade de aplicar ambas as fórmulas para resolver problemas práticos.

4. Analisar a importância das aproximações usadas pelos egípcios e suas implicações na matemática moderna.

5. Refletir sobre como o conhecimento matemático evoluiu ao longo do tempo e sua aplicabilidade em diferentes contextos.

Materiais:

1. Cadernos e canetas.
2. Folhas de exercícios.
3. Régua.
4. Projetor e computador.
5. Quadro branco.

3.3.1 Competências Específicas de Matemática da BNCC (Ensino Fundamental):

1. **Competência 1:** Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. **Competência 2:** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3.3.2 Habilidades da BNCC (Ensino Fundamental):

1. **EF07MA22:** Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
2. **EF07MA33:** Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
3. **EF08MA19:** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

3.3.3 Aula 1: O Cálculo da Área do Círculo no Papiro de Ahmês e nos Tempos Atuais

1. Introdução (20 minutos):

- Apresentação do tema da aula e objetivos.
- Discussão inicial sobre a importância da matemática na civilização egípcia e o Papiro de Ahmês como uma das fontes mais antigas de conhecimento matemático.
- Introdução ao conceito de área do círculo e sua relevância tanto na antiguidade quanto na matemática moderna.

2. Apresentação do Método Egípcio (40 minutos):

- Explicação sobre como os egípcios calculavam a área do círculo, conforme descrito no Papiro de Ahmês.
- Método egípcio: Os egípcios utilizavam a aproximação de $\pi \approx 3,16$, ou seja, multiplicavam o quadrado de 8/9 do diâmetro para calcular a área do círculo. Eles não conheciam o valor exato de π, mas essa aproximação era suficientemente precisa para muitas das suas necessidades práticas.

Ilustrar o seguinte exemplo:

$$Área = (\frac{8}{9} \times D)^2$$

Com diâmetro de 10:

$$Área = (\frac{8}{9} \times 10)^2 = 8,89^2 = 79,2$$

Assim, a área seria aproximadamente 79,2 unidades quadradas.

- Discussão: O que isso revela sobre os métodos de cálculo no Egito Antigo? Como essa aproximação influenciava o trabalho dos egípcios na construção de pirâmides e no gerenciamento de terras agrícolas?

3. Apresentação do Método Moderno (30 minutos):

- Introdução à fórmula moderna para o cálculo da área do círculo: $A = \pi r^2$, onde r é o raio do círculo e $\pi \approx 3,14$.

- Explicação detalhada sobre a diferença entre a aproximação egípcia e a fórmula moderna. O valor de π moderno é mais preciso, mas ambos os métodos são úteis para suas respectivas épocas.

Exemplo:

- Usando o mesmo diâmetro de 10 unidades, o raio seria 5.
- Aplicando a fórmula moderna:

$$\acute{A}rea = \pi \times 5^2 = 3,14 \times 25 \approx 78,5$$

- A área, usando a fórmula moderna, é aproximadamente 78,5 unidades quadradas.

4. Discussão Comparativa (10 minutos):

- Comparação entre os resultados obtidos pelos dois métodos (79,2 unidades quadradas com o método egípcio e 78,5 unidades quadradas com a fórmula moderna).
- Discussão sobre a precisão de cada método e os possíveis impactos de uma diferença de cálculo em contextos práticos (como construção e medição de terras no Egito Antigo).

3.3.4 Aula 2: Atividades Práticas e Análise de Resultados

1. Abertura e Revisão (20 minutos):

- Recapitulação das fórmulas apresentadas: a fórmula egípcia e a fórmula moderna para o cálculo da área do círculo.
- Explicação das atividades práticas que serão realizadas.

2. Atividade Prática: Resolução de Problemas (60 minutos):

Os alunos deverão resolver os seguintes problemas, utilizando os dois métodos de cálculo e registrando os resultados. Eles podem trabalhar individualmente ou em grupos pequenos.

Problema 1: Cálculo da Área de um Círculo com Diâmetro 12 Unidades

- Usando o método egípcio: Calcular a área com a fórmula $\acute{A}rea = (\frac{8}{9} \times D)^2$, onde D é o diâmetro.
- Usando a fórmula moderna: Calcular a área com a fórmula $\acute{A}rea = \pi r^2$, onde r é o raio.

Problema 2: Cálculo da Área de um Círculo com Diâmetro 20 Unidades

- Usando o método egípcio: Calcular a área com a fórmula $\acute{A}rea = (\frac{8}{9} \times D)^2$, onde D é o diâmetro.
- Usando a fórmula moderna: Calcular a área com a fórmula $\acute{A}rea = \pi r^2$, onde r é o raio.

Os alunos deverão registrar os cálculos e comparar os resultados obtidos pelos dois métodos.

3. Discussão dos Resultados (20 minutos):

- Correção coletiva dos problemas, comparando as áreas obtidas pelos dois métodos.
- Discussão sobre as diferenças nas áreas calculadas e a precisão de cada método.
- Reflexão sobre a evolução do conhecimento matemático e como a matemática moderna aperfeiçoou as aproximações feitas no passado.
- **Reflexão final:** Como a matemática egípcia influenciou o desenvolvimento de outras áreas da matemática e a importância do estudo de culturas antigas para entender a evolução do pensamento matemático.

3.3.5 Avaliação

A avaliação será feita com base na participação dos alunos nas atividades práticas, na precisão dos cálculos realizados e na capacidade de refletir sobre as diferenças entre os métodos egípcios e modernos. Além disso, a reflexão e a argumentação durante as discussões serão importantes para avaliar o entendimento dos conceitos.

Esse plano de aula oferece uma abordagem comparativa entre o cálculo da área do círculo na antiguidade e na matemática moderna, estimulando a análise crítica, o desenvolvimento de habilidades geométricas e o entendimento da evolução do conhecimento matemático.

3.4 Considerações Parciais

É interessante notar que mesmo milhares de anos após a escrita e o desenvolvimento dos papiros de Ahmes e de Moscou, problemas e situações encontradas em tais papiros ainda estão presentes no ensino básico atual. Tais como: cálculo da área de figuras planas como retângulos e círculos e também o cálculo do volume de figuras como pirâmides, cilindros e prismas.

Ambos os papiros evidenciam a habilidade do povo e, principalmente os escribas egípcios em lidar com problemas concretos, como medição de terrenos e construção de estruturas, enquanto exploravam relações geométricas mais abstratas. Outro aspecto importante a ser destacado é que, embora a matemática egípcia tivesse um forte caráter utilitário — com predominância de cálculos aproximados aplicados a situações práticas do cotidiano —, ela também refletia um desenvolvimento intelectual que ia além das necessidades imediatas, contribuindo para a organização social, religiosa e administrativa do Egito antigo.

Fica então claro que a geometria egípcia, como documentada nesses papíros, deixa um importante legado que inspira e inspirou diversas gerações futuras. Esses documentos não apenas inspiraram civilizações posteriores, como também demonstram que o pensamento geométrico, mesmo em seus estágios iniciais, é uma ferramenta poderosa para modelar, entender e transformar o mundo ao nosso redor.

Capítulo 4

Grécia Antiga

Eves (2011) e Boyer (2012) relatam que, a medida em que o poder do Egito e da Babilônia entravam em declínio a influência do povo que posteriormente seriam denominados como gregos entrava em ascenção.

> [...] Não houve uma quebra brusca marcando a transição da liderança intelectual dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates para a costa do Mediterrâneo. Os estudiosos egípcios e babilônios continuaram a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos após 800 a.C.; mas, enquanto isso, uma nova civilização se preparava rapidamente para assumir a hegemonia cultural. (BOYER, 2012, p. 54).

Tal civilização foi o berço para grandes matemáticos e pensadores que pela primeira vez, começaram a formular questões e indagações fundamentais sobre elementos que compõe o nosso universo.

4.1 Tales de Mileto

Figura 4.1: Tales de Mileto

Fonte: filosofando.art

Tales de Mileto, provavelmente nasceu na cidade de Mileto por volta de 625 a.C., foi um dos grandes pensadores da época e considera-se que, através do seu raciocínio lógico e não pela experimentação, conseguiu estabelecer os seguintes resultados:

1. Qualquer diâmetro efetua a bisseção do círculo em que é traçado.

2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.

4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.

Seguindo um pensamento lógico, possivelmente próximo ao utilizado por Tales, é possível realizar a demonstração do primeiro item, sendo necessário antes realizar algumas definições:

1. **Círculo:** O conjunto de todos os pontos em um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo, chamado de centro.

2. **Diâmetro:** Um segmento de reta que passa pelo centro do círculo e tem suas extremidades em sua circunferência.

3. **Bisseção:** Divisão em duas partes iguais.

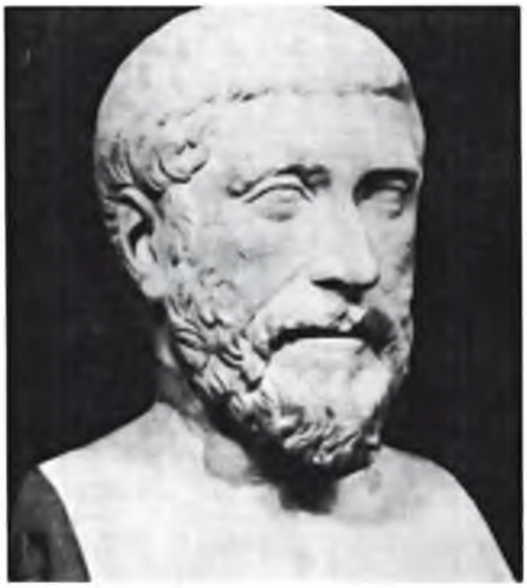
Seja O o centro do círculo e seja C o círculo de raio r centrado em O. Então, o círculo é formado por todos os pontos P tais que a distância de P até O é r, ou seja, $OP = r$. Seja AB um diâmetro qualquer do círculo. Por definição, o diâmetro é um segmento de reta que passa pelo centro O e tem suas extremidades na circunferência do círculo. Então, temos que A e B são dois pontos na circunferência de C, e O é o ponto médio do segmento AB. Ou seja, $OA = OB = r$. Para concluir a demonstração é necessário mostrar que AB divide o círculo em duas regiões de igual área. Como o diâmetro passa pelo centro O, ele divide o círculo em dois semi-círculos. Cada semi-círculo é uma região com um raio r e uma área que é a metade da área total do círculo, portanto o diâmetro efetua de fato uma bisseção do círculo.

Já para demonstrar os outros itens seria necessário realizar antes uma série de definições, algo muito semelhante ao que Euclides fez, cerca de 300 anos após o nascimento de Tales, em sua obra denominada "Os Elementos", definições essas que serão discutidas na seção denominada "Euclides de Alexandria".

4.2 Pitágoras de Samos

Embora exista uma grande discussão acerca de sua existência, acredita-se que Pitágoras de Samos nasceu em uma das ilhas do litoral grego denominada Samos, perto de Mileto, por volta de 572 a.C.. Fundou a famosa escola pitagórica que, "Além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimômias" (EVES, 2011, p. 97).

Figura 4.2: Suposta representação de Pitágoras



Fonte: Eves (2011) - Coleção David Smith

Segundo Roque (2012), Boyer (2012) e Eves (2011), justamente pelo fato de que os ensinamentos da escola pitagórica eram inteiramente orais e, como também, possivelmente por uma questão de hierarquia, o fundador recebia todo o mérito por qualquer descoberta matemática efetuada pela escola, ficando muito difícil afirmar quais desenvolvimentos de fato foram contribuições de Pitágoras e quais foram os de seus seguidores.

Oliveira (2020) relata que o processo de admissão para a Irmandade Pitagórica não era nem um pouco simples, sendo necessário realizar provas de corridas, jogos de garrocha e combates simulados na forma de danças dóricas. Segundo Schuré (1986), Pitágoras era muito exigente na admissão de seus discípulos, dizendo que "nem toda a madeira era própria para fazer um Mercúrio", as provas decisivas eram marcadas por muita angustia emocional:

> A prova moral era mais séria. Numa bela manhã, bruscamente, sem nenhuma preparação, encerrava-se o candidato a discípulo numa cela triste e nua. Deixavam-lhe uma ardósia e ordenava-se-lhe friamente que descobrisse o sentido dum dos símbolos pitagóricos, por exemplo: "Que significa o triângulo inscrito em círculo?" Ou este: "Porque é que o dodecaedro compreendido na esfera é a cifra do universo?" Ele passava doze horas na cela com a sua ardósia e o seu problema, sem nenhuma outra companhia além de pão seco e um jarro de água. (SCHURÉ, 2006, p. 255).

Sabe-se também que, apenas integrantes da irmandade conheciam de fato o que acontecia na escola pitagórica, segundo Singh:

> Embora muitos conhecessem as apirações de Pitágoras, ninguém fora da irmandade conhecia os detalhes ou a extensão de seus sucesso. Cada membro da escola era forçado a jurar que nunca revelaria ao mundo exterior qualquer uma de suas descobertar matemáticas. Mesmo depois da morte de Pitágoras, um membro da irmandade, que quebrou o juramento, foi afogado. (SINGH, 2016, p. 27).

Desta forma e principalmente pela discrição e primor pelo secreto, existem poucos relatos sobre as conquistas matemáticas de Pitágoras e seus discípulos.

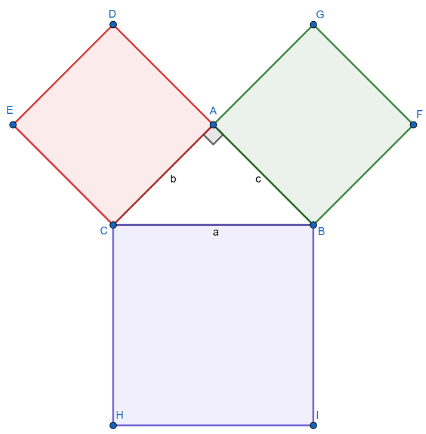
De acordo com Roque (2012, p. 112), um dos teoremas mais famosos atribuídos à Pitágoras (O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos) na verdade já era conhecida por diversos povos mais antigos que os gregos. Entretanto, Castro (2013, p. 25) ressalta que esses povos antigos não estavam interessados no porquê dessa relação, assim como de outras que provavelmente conheciam. A escola pitagórica por sua vez possuía grande interesse em demonstrações, mas infelizmente há um grande mistério em relação a demonstração utilizada por Pitágoras, pois não existe registros.

Tendo isto em vista, é sabido que existem inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras, no entanto serão abordadas apenas 3 entre as diversas existentes.

4.2.1 Demonstração 1 - Livro de Euclides

Esta primeira demonstração é uma adaptação do desenvolvimento exposto no primeiro livro de "Os Elementos" de Euclides, sendo mais especificamente a proposição de número 47. O problema é abordado sobre a seguinte perspectiva "Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto." (Bicudo, 2009, p. 132).

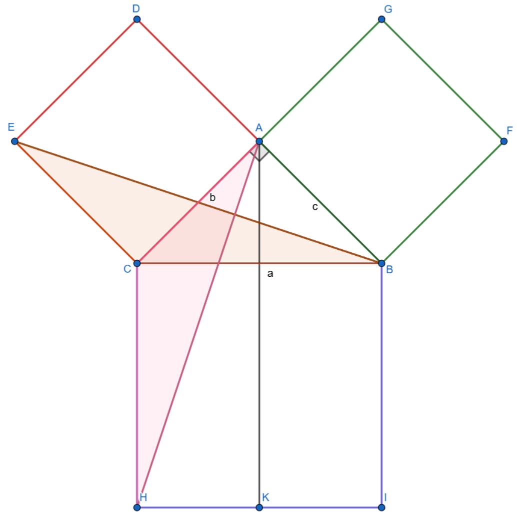
Figura 4.3: Quadrados formados a partir dos lados de um triângulo retângulo



Fonte: Própria.

A Figura 4.3 representa, de forma visual, o enunciado. Para realizar a demonstração é necessário provar que a área do quadrado BCHI é equivalente à soma dos quadrados ACED, cujo lado mede b, e ABFG, cujo lado mede c, ou seja, provar que a área do quadrado BCHI é equivalente à $b^2 + c^2$.

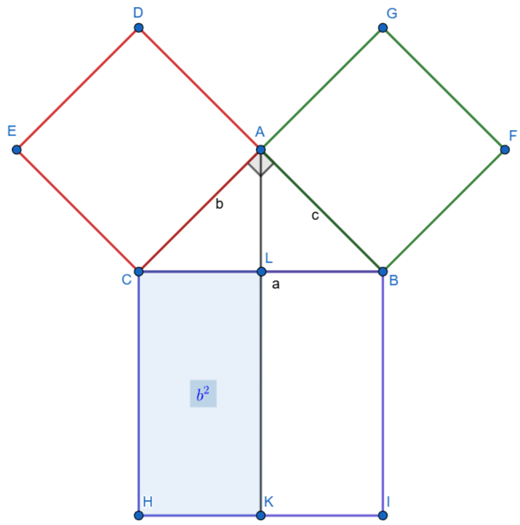
Figura 4.4: Etapa 1 para a demonstração



Fonte: Própria.

Traçando os segmentos BE e AH forma-se os triângulos ACH e BCE, triângulos esses congruentes pelo caso de congruência LAL. É possível estabelecer a congruência uma vez que $AC = CE = b$, $\widehat{BCE} = \widehat{ACH} = 90° + \widehat{ACB}$ e $BC = CH = a$. Portanto, por serem congruentes, é possível concluir que ambos os triângulo possuem a mesma área, área essa que será representada por A_1.

Figura 4.5: Área do retângulo de lados CH e HK



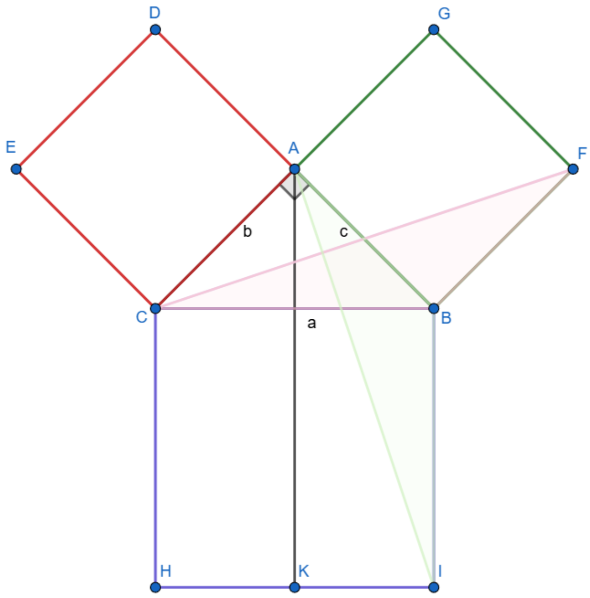
Fonte: Própria.

Analisando com mais atenção o triângulo BCE, percebe-se que tomando a sua base como sendo o segmento $CE = b$, a sua altura será o segmento $DE = b$. Desta forma, conclui-se que $A_1 = \frac{b^2}{2}$. Já pelo triângulo ACH, percebe-se que tomando a sua base como sendo o segmento CH, a sua altura será o segmento HK, sendo K um ponto pertencente à HI de tal forma que AK seja paralelo aos segmentos CH e BI. Desta forma, conclui-se que $A_1 = \frac{CH.HK}{2} \Rightarrow 2A_1 = CH.HK$.

Como $CH.HK$ é justamente a área do retângulo de lados CH e HK e $A_1 = \frac{b^2}{2}$, é possível concluir que a área de tal retângulo é equivalente à b^2, como ilustrado pela figura 4.5

De forma análoga ao apresentado acima, traça-se os segmentos CF e AI formando os triângulos BCF e ABI, triângulos esses congruentes pelo caso de congruência LAL. Estabelece-se a congruência uma vez que $BC = BI = a$, $\widehat{CBF} = \widehat{ABI} = 90° + \widehat{ABC}$ e $AB = BF = c$. Portanto, por serem congruentes, é possível concluir que ambos os triângulo possuem a mesma área, área essa que será representada por A_2.

Figura 4.6: Etapa 2 para a demonstração

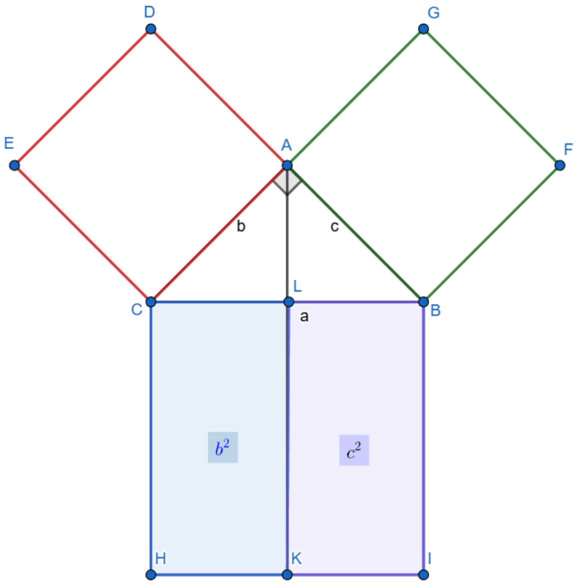


Fonte: Própria.

Analisando com mais atenção o triângulo BCF, percebe-se que tomando a sua base como sendo o segmento $BF = c$, a sua altura será o segmento $GF = c$. Desta forma, conclui-se que $A_2 = \frac{c^2}{2}$. Já pelo triângulo ABI, percebe-se que tomando a sua base como sendo o segmento BI, a sua altura será o segmento IK. Desta forma, conclui-se que $A_2 = \frac{BI.IK}{2} \Rightarrow 2A_2 = BI.IK$. Como $BI.IK$ é justamente a área do retângulo de lados BI e IK e $A_2 = \frac{c^2}{2}$, é possível concluir que a área de tal retângulo é equivalente à c^2.

Desta forma, como a área do quadrado $BCHI$, cujo lado mede a, é equivalente à $A_1 + A_2$, conclui-se que, de fato que, $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 4.7: Representação visual: $a^2 = b^2 + c^2$

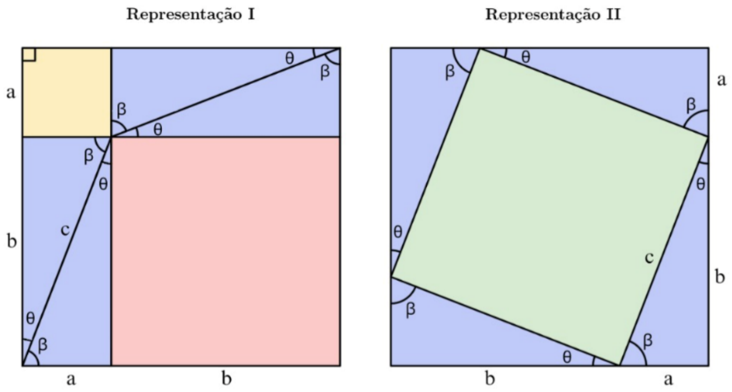


Fonte: Própria.

4.2.2 Demonstração 2 - Equivalência de Áreas sem Cálculo.

Já a segunda demonstração consiste em uma comparação entre áreas de duas figuras congruentes, em particular, dois quadrados de lado $a+b$, compostos por quatro triângulos retângulos congruentes de catetos medindo a e b e hipotenusa c, além de quadrados com medidas respectivamente iguais aos lados dos triângulos.

Figura 4.8: Duas representações de um quadrado de lado $a + b$



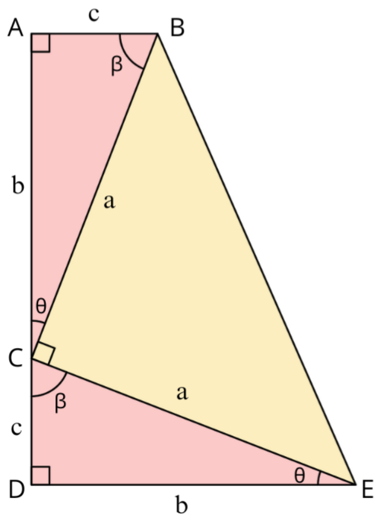
Fonte: Própria.

Pode-se perceber, conforme a figura 5.1, que as duas representações consistem em quadrados de mesmas medidas de lado (a+b), logo a área de ambos será a mesma uma vez que os quadrados são congruentes. Portanto, ao retirar os quatro triângulos, que são congruentes, de ambas as regiões, as figuras restantes também terão áreas equivalentes, ou seja, a soma da área dos dois quadrados de lados iguais a a e b (Representação I) será equivalente à área do quadrado de lado c (Representação II), portanto $a^2 = b^2 + c^2$.

4.2.3 Demonstração 3 - Trapézio composto por triângulos retângulos.

A terceira demonstração do Teorema de Pitágoras consiste no cálculo da área da figura 4.9 através de duas maneiras diferentes.

Figura 4.9: Trapézio composto por três triângulos retângulos.



Fonte: Própria.

Reconhecendo a figura acima como um trapézio de base menor c, base maior b e altura $b + c$, tem-se que a sua área pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \acute{A}rea &= \frac{(b+c)(b+c)}{2} \\ \acute{A}rea &= \frac{b^2+2bc+c^2}{2}. \end{aligned}$$

De fato a figura acima será um trapézio, como $\theta + \beta = 90^o$ então em C teremos um ângulo de 180^o, logo AD é um segmento de reta. Ademais, $AB//DE$ uma vez que ambos os segmentos formam o mesmo ângulo com o segmento transversal AD.

Já assumindo a figura como três triângulos, sendo dois congruentes de catetos b e c e o outro de catetos iguais a a, temos que a área pode ser calculada pela expressão:

$$\begin{aligned} \acute{A}rea &= \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} \\ \acute{A}rea &= \frac{2bc+a^2}{2}. \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões, uma vez que correspondem à área da mesma região, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{2bc+a^2}{2} &= \frac{b^2+2bc+c^2}{2} \\ a^2 &= b^2+c^2. \end{aligned}$$

4.3 Euclides de Alexandria

Sabe-se que Euclides viveu em Alexandria, por volta de 300 a.C, e é considerado por muitos como "o pai da geometria". Em sua principal obra "Os Elementos", composta por 13 livros, é estabelecida uma organização axiomática da matemática, iniciando com um conjunto de definições, postulados e teoremas, e a partir disso, desenvolve proposições matemáticas que são a base das demonstrações e raciocínios lógicos em matemática.

Figura 4.10: Euclides de Alexandria

Fonte: Fondazione Cariplo/Wikipédia

Em seu primeiro livro (contido em seu trabalho "Os Elementos"), Euclides inicia realizando as seguintes definições:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e nã estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.

11. Ângulo obtuso é maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E ponto é chamado de centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois.
18. E semicírulo é a figura contina tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.
19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
20. E, das figuras triláteras por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.
21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.
22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitademente em cada um dos lados, em nenhum se encontram. (BICUDO, 2009, p. 97-98).

Com o passar do tempo algumas definições foram ressignificadas, como por exemplo o quadrilátero chamado por Euclides de “oblongo” atualmente é conhecido apenas como retângulo. De forma equivalente, o que para Euclides é um “romboide”, hoje considera-se como um paralelogramo. Por mais que muitas definições sejam simplórias, é interessante estabelecer um processo lógico para a construção da lista em que cada elemento, a partir do segundo, necessita das definições anteriores para o total entendimento.

A partir destas definições, Euclides estabeleceu seus cinco postulados, sendo eles a base de toda a Geometria Euclidiana estudada rigorosamente até os tempos atuais. Os cinco postulados são:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (BICUDO, 2009, p. 97-98).

O primeiro postulado significa que, dados dois pontos quaisquer, podemos sempre desenhar uma linha reta que os conecte. Já o segundo postulado afirma que qualquer linha reta pode ser prolongada sem limites em qualquer direção. O terceiro postulado define a construção de um círculo em torno de um ponto com um raio específico. O quarto postulado diz que todos os ângulos de 90^o são congruentes, independente de sua posição ou contexto. Por último, mas não menos importante, tem-se o postulado das paralelas, em que estabelece a condição para que duas retas sejam paralelas.

Para o último postulado, tanto pela sua notável importância para a construção da geometria denominada como Euclidiana, quanto pela necessidade posterior em desenvolver e consolidar uma outra geometria (denomidada como Geometria Não-Euclidiana), a próxima seção terá como foco justamente este postulado.

Por fim, antes de iniciar a série de proposições, Euclides estabelece o que constitui as "Noções Comuns":

> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
> 4. E, caso iguais sejam adicionadas as desiguais, os todos são desiguais.
> 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
> 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
> 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
> 8. E o todo [é] maior do que a parte.
> 9. E duas retas não contêm uma àrea. (BICUDO, 2009, p. 99).

É possível estabelecer uma relação com tais itens sob a ótica da lógica matemática e da teoria dos conjuntos.

O primeiro item é uma exemplificação da propriedade transitiva da relação de igualdade. Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$. O segundo item é referente à propriedade aditiva da igualdade. Se $a = b$ e $b = c$, então $a + c = b + d$. O terceiro item se refere à propriedade de subtração da igualdade. Se $a = b$ e $b = c$, então $a - c = b - d$. O quarto item introduz o conceito de desigualdade, em que se $a = b$ e $b \neq c$, então $a + c \neq b + d$.

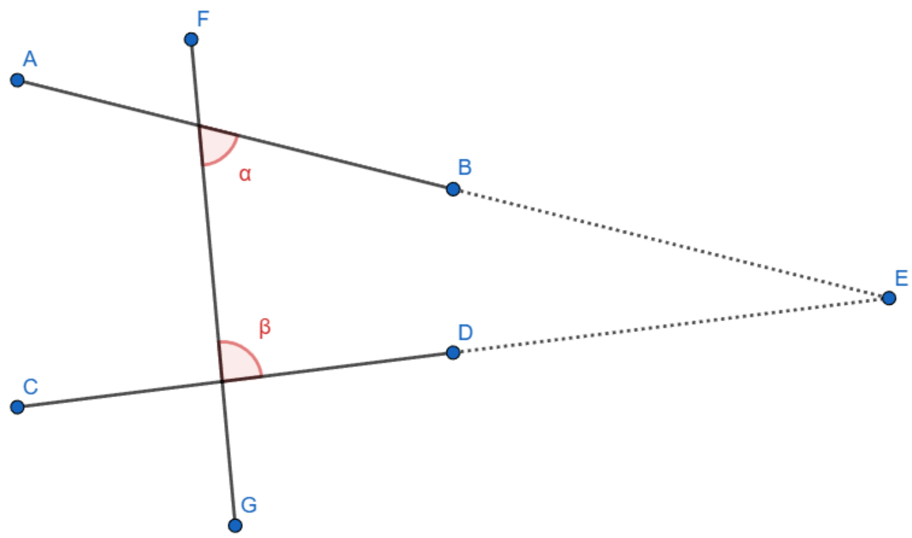
Já o quinto e o sexto item são semelhantes e se referem à multiplicação por escalar, em que se $a = b$, então $ka = kb$, em que k é um número racional. O sétimo pode ser relacionado com a ideia de equivalência ou congruência. Se dois objetos podem ser ajustados ou transformados de forma a coincidir perfeitamente, então eles são considerados congruentes ou igualmente distribuídos. O oitavo pode ser relacionado ao axioma de incompletude na teoria dos conjuntos, onde o conjunto A é maior do que qualquer subconjunto B de A, ou mais diretamente, a relação de ordem entre parte e todo.

Por fim, o nono e último item pode ser exemplificado pensando que duas retas não delimitam uma área porque para formar uma área, é necessário que se tenha uma superfície fechada, como por exemplo figuras planas (como triângulos, quadriláteros) ou figuras tridimensionais, que possuem dimensões superiores à de uma reta.

4.4 O Postulado das Paralelas

"Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos" (BICUDO, 2009, p. 99). A figura 4.11 ilustra a situação.

Figura 4.11: Retas Não Paralelas

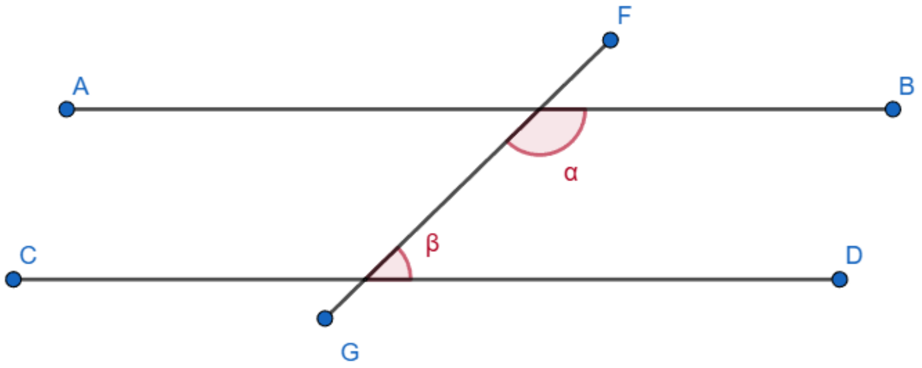


Fonte: Própria.

Neste caso, pode-se enunciar o postulado, com o auxílio da imagem acima, da seguinte maneira: caso a reta $\overleftrightarrow{FG}$, caindo sobre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, forme os ângulos α e β de tal forma que $\alpha + \beta < 180^o$, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ irão se encontrar no mesmo lado em que se encontram os ângulos α e β. Nota-se que, ao indicar uma noção de lado, a região plana em que as retas estão contidas é dividida em dois semiplanos pela reta $\overleftrightarrow{FG}$, desta forma, Euclides garante que os ângulos em destaque, se juntos forem menores que meia volta, se encontraram no mesmo semiplano que a interseção das retas.

Como consequência, caso a reta $\overleftrightarrow{FG}$ não faça ângulos interiores menores que dois retos, para qualquer um de seus lados, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ nunca irão se cruzar, sendo assim, denominadas como paralelas. Tal situação está representada na figura abaixo.

Figura 4.12: Retas Paralelas



Fonte: Própria.

Outra maneira que esse postulado pode ser enunciado é: "Dada uma linha reta e um ponto fora dela, existe uma e apenas uma linha reta passando por esse ponto que nunca se encontrará com a linha original, ou seja, que é paralela a ela". Tal enunciado foi adaptado de John Playfair, conhecida também como Postulado de Playfair, que por sua vez foi referido muito mais cedo pelo filósofo grego Proclus (410-485 a.C.) (GREENBERG, 1993, p. 24).

Enquanto os quatro primeiros postulados de Euclides sempre foram aceitos pelos matemáticos, possívelmente por serem abstrações de experiências práticas utilizando régua e compasso, o quinto postulado sempre foi considerado problemático, possivelmente pelo fato de não ser possível desenhar ou representar uma reta completamente, tornando-o nada intuitivo (GREENBERG, 1993, p. 20).

Greenberg (1993) enfatiza que os postulados de Euclides tinham o propósito de serem simples e intuitivos o que certamente não acontece com o quinto, sendo extremamente criticado por ser tomado como verdade, apesar de ser bastante complexo e não haver uma demonstração.

> Por dois mil anos, os matemáticos tentaram derivá-lo dos outros quatro postulados ou substituí-lo por outro postulado, um mais intuitivo. Todas as tentativas de derivá-lo dos quatro primeiros postulados acabaram sendo malsucedidas porque as chamadas provas sempre implicavam uma suposição oculta que era injustificável. (GREENBERG, 1993, p. 21).

Desta forma, Greenberg (1993) relata um movimento dos matemáticos, a partir do século XIX, de que ao invés de tentar provar o postulado, poderiam negar a sua validade e explorar as consequências dessa negação. Em vez de aceitar o postulado das paralelas, o que aconteceria se ele fosse alterado ou se existisse outras formas de paralelismo. É justamente a partir deste contexto que se inicia a denominada geometria não-Euclidiana.

4.5 Plano de aula: Teorema de Pitágoras

Objetivos Gerais:

1. Compreender o Teorema de Pitágoras e sua validade, justificando matematicamente a fórmula.

2. Resolver problemas envolvendo triângulos retângulos, aplicando o Teorema de Pitágoras.

3. Relacionar a matemática com o cotidiano, utilizando o Teorema de Pitágoras em situações práticas.

Série: 8º ano do Ensino Fundamental.

Duração: 2 aulas de 100 minutos cada.

Objetivos Específicos:

1. Compreender a definição de um triângulo retângulo e identificar seus catetos e hipotenusa.

2. Aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa ou um cateto em problemas geométricos.

3. Justificar a validade do Teorema de Pitágoras por meio de uma demonstração simples.

4. Resolver problemas práticos, como cálculos de distâncias e alturas usando o teorema.

Materiais:

1. Lousa ou quadra branco.
2. Régua, compasso e transferidor.
3. Papel quadriculado.
4. Projetor e computador.

4.5.1 Competências Específicas de Matemática da BNCC (Ensino Fundamental):

1. **Competência 2:** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
2. **Competência 6:** Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
3. **Competência 8:** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

4.5.2 Habilidades da BNCC (Ensino Fundamental):

1. **EF06MA19:** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
2. **EF09MA13:** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
3. **EF09MA14:** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

4.5.3 Aula 1: Introdução e Justificativa do Teorema de Pitágoras

1. **Introdução (10 minutos):**

- Comece a aula perguntando: "Onde podemos ver triângulos retângulos no nosso dia a dia?"
- Mostre algumas imagens de situações cotidianas que envolvem triângulos retângulos, como rampas, escadas e prédios.
- Anuncie o objetivo da aula: compreender o Teorema de Pitágoras e aprender uma forma de justificar sua validade.

2. **Explicação Teórica (30 minutos):**

- Explique os elementos de um triângulo retângulo: ângulo reto, hipotenusa e catetos.
- Enuncie o Teorema de Pitágoras: "Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos."Escreva a fórmula no quadro: $a^2 = b^2 + c^2$, ressalte a diferença entre os catetos e a hipotenusa.
- Resolva um problema simples com o intuito de compreender a sua aplicação. Por exemplo, para um triângulo com catetos de 3 e 4 unidades, qual será o comprimento da hipotenusa?

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ a^2 &= 3^2 + 4^2 \\ a^2 &= 25 \\ a &= 5. \end{aligned}$$

3. **Demonstração da Validade do Teorema de Pitágoras (30 minutos):**

Utilize a demonstração visual contida na seção 4.2.2. Aproveite para reforçar conceitos relacionados à áreas de figuras planas e ao conceito de congruência. Por ser uma demonstração que demande apenas de recursos visuais e elementos da geometria já estudados por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, toma-se como possível de ser abordado sem grandes dificuldades para assimilação.

4. Atividade Prática - Desenhando Triângulos (20 minutos):

- Entregue folhas de papel quadriculado e régua para os alunos.
- Peça que desenhem triângulos retângulos e calculem a hipotenusa aplicando a fórmula do Teorema de Pitágoras.
- Aplique um exercício simples onde os alunos devem identificar a hipotenusa e os catetos de diferentes triângulos, desenhados por eles.

5. Encerramento e Revisão (10 minutos)

- Recapitule o que foi abordado na aula, especialmente a fórmula e a demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras.
- Abra para perguntas e discussões, esclarecendo possíveis dúvidas.

4.5.4 Aula 2: Aplicações Práticas do Teorema de Pitágoras

1. Revisão (20 minutos):

- Comece a aula revisando rapidamente o Teorema de Pitágoras.
- Faça um exercício rápido no quadro com o intuito de recapitular os conceitos aprendidos na aula anterior.

2. Problemas Práticos em Grupos (50 minutos):

- Divida os alunos em grupos e distribua problemas práticos. Exemplos:
- **Problema 1:** Uma escada de 5 metros de altura precisa ser encostada em uma parede. A distância da base da escada até a parede é 3 metros. Qual é o comprimento da escada (hipotenusa)?
- **Problema 2:** Uma estrada forma um triângulo retângulo com um desnível de 12 metros e uma base de 16 metros. Qual é o comprimento da estrada (hipotenusa)?
- Cada grupo deve medir as distâncias necessárias, aplicar a fórmula do Teorema de Pitágoras e apresentar a solução para a turma.

3. Apresentação dos Resultados (20 minutos):

- Após a resolução dos problemas, peça que cada grupo apresente sua solução para a turma, destacando como aplicaram a fórmula e mostrando os cálculos.
- Incentive a interação entre os grupos para discutir as soluções e compartilhar insights.

4. **Conclusão (10 minutos):**

- Finalize a aula reforçando a utilidade prática do Teorema de Pitágoras e suas diversas aplicações no cotidiano.
- Deixe uma reflexão: "Como podemos utilizar o Teorema de Pitágoras em outras áreas, como arquitetura, navegação e design?"

4.5.5 Avaliação

A avaliação será realizada de forma contínua e somativa. Durante as aulas, será observada a participação dos alunos nas atividades práticas e nas discussões em grupo, com foco na capacidade de aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras e na compreensão de sua validade, especialmente após a demonstração visual apresentada. A interação dos alunos e a clareza na resolução dos problemas serão aspectos importantes para a avaliação. Ao final da segunda aula, será aplicada uma avaliação escrita contendo dois problemas. O primeiro será mais simples, abordando a aplicação direta do Teorema de Pitágoras, enquanto o segundo será mais complexo, envolvendo uma situação prática que demande mais raciocínio e interpretação. A avaliação também incluirá uma questão sobre a justificativa visual do teorema, permitindo que os alunos expressem sua compreensão do conceito de forma mais profunda.

4.6 Considerações Parciais

Antes dos gregos, é inquestionável o domínio (em certo grau) da aritmética e da geometria das civilizações antigas como os egípcios e babilônios. No entanto, esse conhecimento era aplicado de forma predominantemente utilitária, servindo para resolver problemas do dia a dia, como a construção de pirâmides ou a medição de terrenos, embora também apresentasse indícios de um saber mais elaborado, que extrapolava as necessidades imediatas. A ênfase estava em resolver, e não em explicar ou justificar os métodos utilizados.

Foi com os gregos que de fato, emergiu a busca pela demonstração rigorosa. Esse movimento se consolidou especialmente após a publicação da obra "Os Elementos", de Euclides, que se tornaria um marco para a matemática. A partir desse momento, passou a ser um requisito fundamental que toda afirmação matemática fosse não apenas enunciada, mas também demonstrada de maneira lógica e irrefutável. Esse novo padrão de rigor não apenas refinou a matemática, mas também teve um impacto profundo no desenvolvimento do pensamento científico como um todo. Os gregos estabeleceram, de forma duradoura, a ideia de que o conhecimento deve ser respaldado por evidências lógicas e provas, um princípio que atravessou os séculos e se tornou a espinha dorsal da ciência moderna.

Desta forma, fica claro que a contribuição dos gregos vai além das descobertas feitas. Não de forma exclusiva, mas principalmente a partir deste período que a ideia de que, para provar que algo é verdadeiro, é preciso demonstrar, de maneira clara e lógica, como chegamos a essa conclusão, partindo de noções intuitivas e primitivas, inicialmente aceitas como evidentes.

Capítulo 5

Geometria Esférica

A Geometria Esférica é um fascinante ramo da matemática que nos convida a explorar um universo curvo, no qual as regras familiares da geometria plana já não se aplicam da mesma maneira. Enquanto a Geometria Euclidiana se desenvolve sobre superfícies planas, a Geometria Esférica investiga relações e propriedades que emergem na superfície de uma esfera como, por exemplo, o próprio planeta Terra. Esse tipo de geometria é essencial para compreender fenômenos cotidianos e tecnológicos, como a navegação aérea e marítima, os sistemas de posicionamento global (GPS) e a cartografia. Afinal, em uma esfera, o caminho mais curto entre dois pontos não é uma linha reta, mas um arco de circunferência máxima, uma realidade que impacta diretamente rotas de voo, cabos submarinos e até mesmo projeções de mapas.

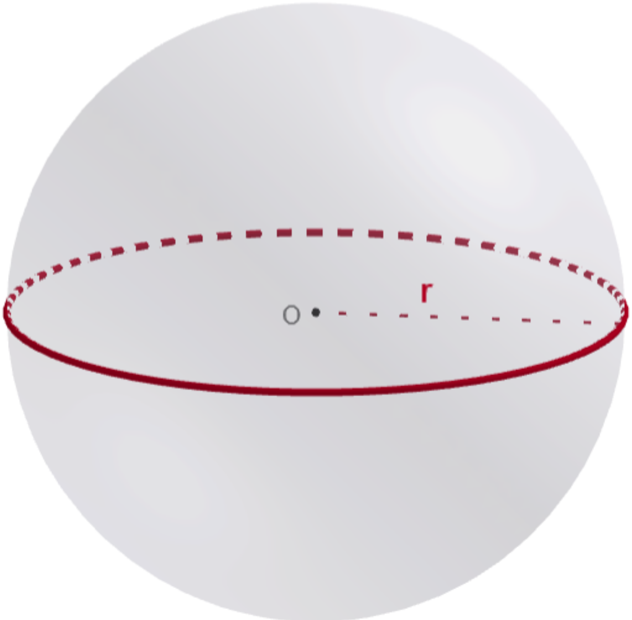
Neste capítulo, apresentaremos os conceitos fundamentais da Geometria Esférica, suas diferenças em relação à geometria plana, e suas aplicações concretas. Partiremos de definições formais, como esfera, polos e círculos máximos até chegar à construção de triângulos esféricos, suas propriedades angulares e o cálculo de distâncias geodésicas. Com isso, busca-se não apenas explorar a teoria, mas também oferecer ferramentas que permitam aplicar esses conhecimentos a contextos reais.

5.1 Definições e Principais Elementos da Geometria Esférica

Seja O um ponto e r um número real positivo, chama-se esfera o lugar geométrico dos pontos P do espaço, cujas distâncias a O são iguais a r. Neste caso, o ponto O é considerado o centro da esfera. A seguir, será realizada uma série de definições e proposições que fundamentam a geometria esférica. Para isto, será usado como referência Dolce (2013), Santos (2018), Doria (2019) e Santos (2024).

A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é denominada como *Circunferência Máxima* e será a circunferência com o mesmo centro e raio da superfície esférica, dividindo a esfera em duas regiões congruentes denominadas *Hemisférios*. Neste caso, fica evidente que duas circunferências máximas distintas sempre se intersectaram em dois pontos opostos, contradizendo o postulado das paralelas, uma vez que tais circunferências máximas são equivalentes as retas da geometria Euclidiana.

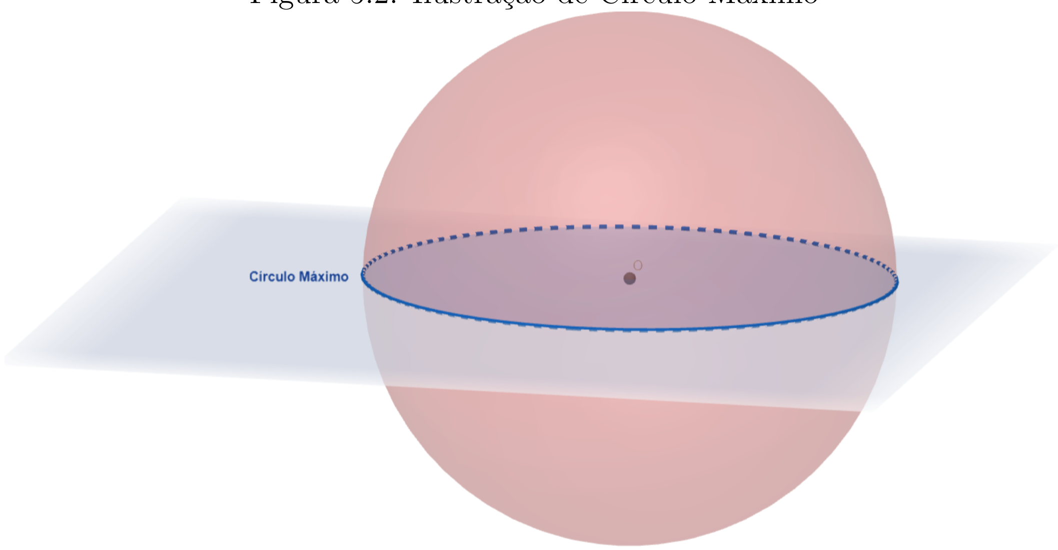
Figura 5.1: Ilustração de uma Esfera de centro O e raio r



Fonte: Própria.

Seja S uma superfície esférica de centro O e raio r e α um plano contendo O. A interseção entre o plano α e a superfície esférica S será o conjunto de todos os pontos de α que distam r de O. Logo, será uma circunferência, contida em α, com centro O e raio r, conforme ilustrado pela figura abaixo.

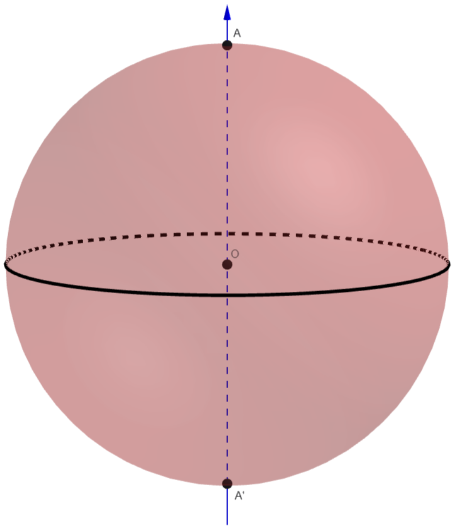
Figura 5.2: Ilustração de Círculo Máximo



Fonte: Própria.

Chama-se *Eixo da Esfera* qualquer reta que passa por O. Os dois pontos advindos da interseção de um eixo com a esfera são chamados diametralmente opostos (ou antipodais), também definidos como *Polos* do eixo com a superfície esférica, e podem ser visualizados pela Figura 5.3, em que A é a antípoda de A'.

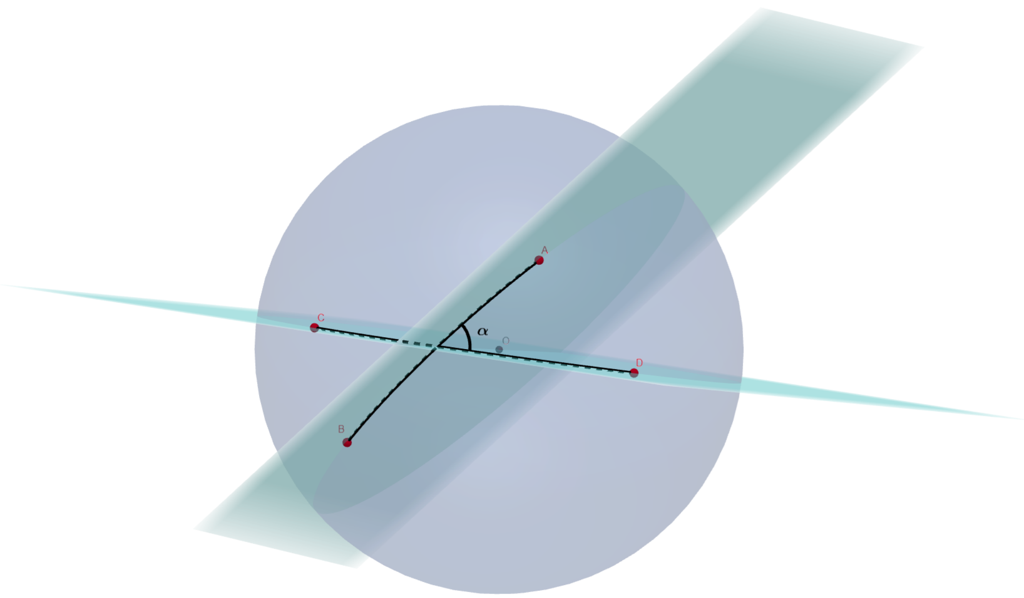
Figura 5.3: Pontos Diametralmente Opostos



Fonte: Própria.

A *Distância Esférica* entre os pontos A e B de uma esfera é o comprimento do menor arco da circunferência máxima que passa por esses pontos. O *Ângulo Esférico* será o ângulo formado por dois arcos de círculos máximos com uma extremidade em comum, desta forma, a sua medida será a mesma do ângulo euclidiano formado pelo diedro definido pelos dois planos que contém esses arcos, conforme ilustrado pela Figura 5.4.

Figura 5.4: Ângulo Esférico



Fonte: Própria.

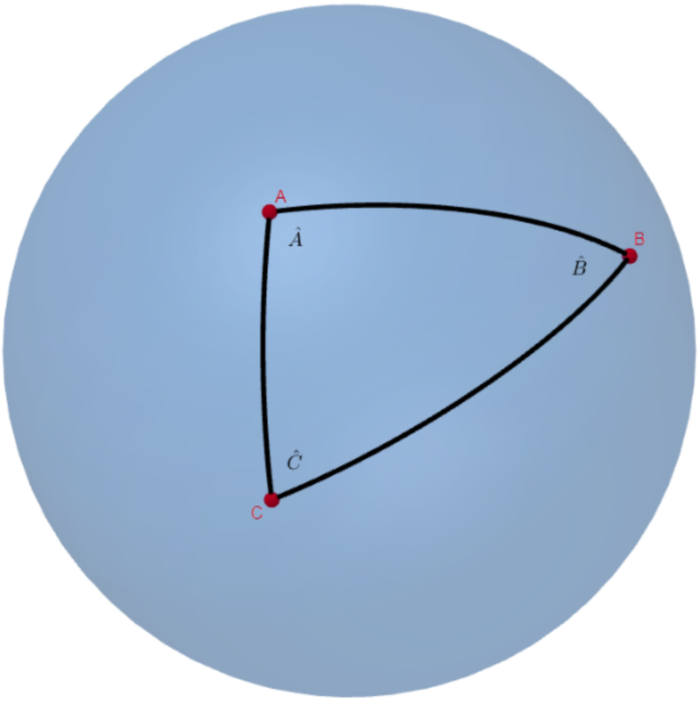
Dados três pontos A, B, e C de uma superfície esférica, não pertencentes a uma mesma circunferência máxima, ligados pelos arcos de circunferências máximas que definem suas distâncias, determinam um *Triângulo Esférico*. Tais pontos são denomidados vértices do triângulo esférico, conforme ilustrado pela Figura 5.5.

É importante destacar também que, tanto os lados quanto os ângulos internos do triângulo esférico ABC sempre satisfazem: $0^o < a < 180^o, 0^o < b < 180^o, 0^o < c < 180^o, 0^o < \hat{A} < 180^o, 0^o < \hat{B} < 180^o, 0^o < \hat{C} < 180^o$. Os elementos de um triângulo esférico são semelhantes aos de um triângulo no plano, três vértices, três lados e três ângulos internos.

Diferente de um triângulo no plano, tem-se que os lados são arcos de uma circunferência e, portanto, medidos em graus ou radianos. Tem-se também que, a soma dos ângulos internos é maior que 180^o e menor que 540^o, o que será demonstrado mais a frente. É possível classificar um triângulo esférico em relação aos seus ângulos como: Acutângulo (três ângulos agudos), Retângulo (um ângulo reto), Bi-retângulo (dois ângulos retos), Tri-retângulo (três ângulos retos), Obtusângulo (três ângulos obtusos).

Já em relação aos lados, é possível classificar de forma análoga aos triângulos euclidianos: Escaleno, Isósceles e Equilátero. Porém, justamente pelo fato dos lados serem medidos em ângulos, pode-se classificar também como: Retiláteros, Bi-retiláteros e Tri-retiláteros, conforme tenha um, dois, ou três lados medindo 90^o, respectivamente.

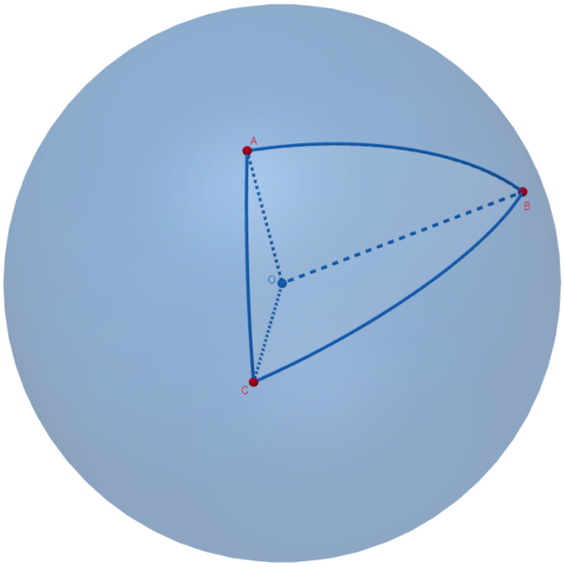
Figura 5.5: Triângulo Esférico



Fonte: Própria.

Seja o triângulo ABC pertencente a uma esfera de centro O. Considere o triedro definido pelas semiretas $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, conforme ilustrado pela Figura 5.6.

Figura 5.6: Triedro definido pelas semiretas $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

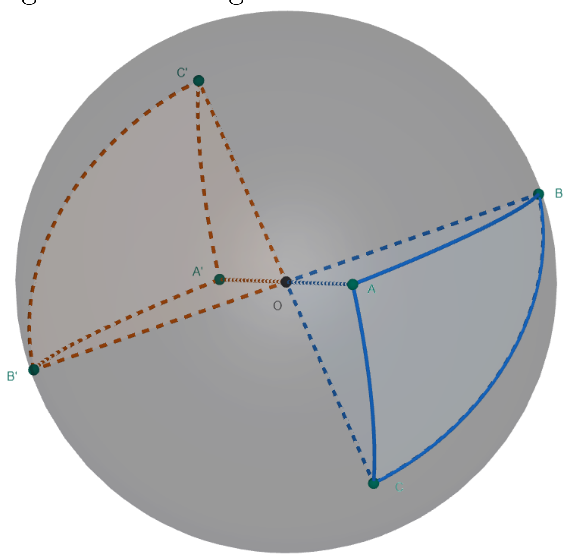


Fonte: Própria.

Sabe-se que os ângulos planos (ângulos triédricos) $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ têm a mesma medida angular que seus respectivos arcos opostos (lados do triângulo esférico). Retomando e reforçando a definição de ângulo esférico, temos que os ângulos diedros do triedro entre os planos AOB com AOC, AOB com BOC e AOC com BOC têm a mesma medida que os ângulos esféricos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, do triângulo esférico ABC.

Outra definição importante é em relação aos *Triângulos Simétricos*, sendo possível definir da seguinte maneira: dois triângulos esféricos cujos vértices são diametralmente opostos são chamados de simétricos. Levando em consideração a simetria, tem-se que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são também congruentes. A figura abaixo ilustra dois triângulos esféricos simétricos.

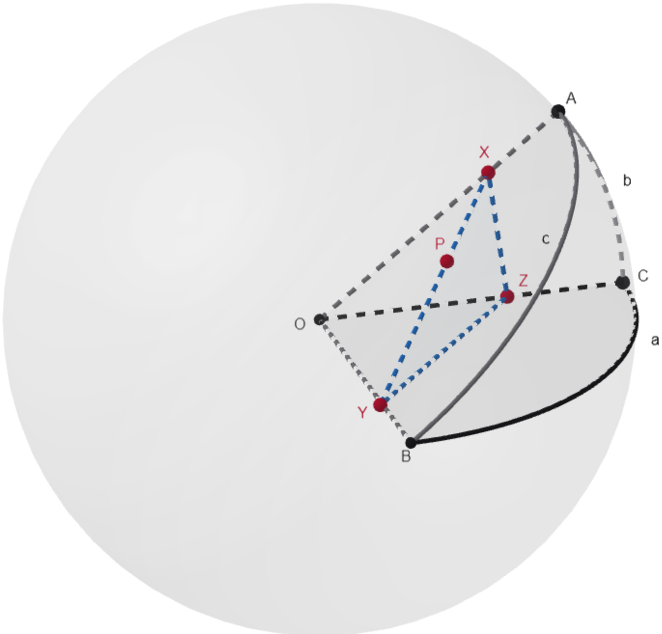
Figura 5.7: Triângulos Esféricos Simétricos



Fonte: Própria.

Ademais, tem-se que num triângulo esférico, um lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença.

Figura 5.8: Suporte para a Demonstração



Fonte: Própria.

Demonstração:

Considere o triângulo ABC, com lados a, b e c em uma esféra de centro O. Tomando um ponto X sobre OA, um ponto Y sobre OB e um ponto P sobre XY de modo que $X\hat{O}P = A\hat{O}C$. Sobre OC tome um ponto Z de modo que $OZ = OP$, conforme a Figura 5.8.

Pelo caso de congruência LAL, pode-se perceber que os triângulos XOZ e XOP são congruentes, tendo $XP = XZ$.

Pela desigualdade triangular da geometria plana no triângulo XYZ, tem-se que:

$$\begin{aligned} XZ + ZY &< XY \\ XZ + ZY &< XP + PY. \end{aligned}$$

Como $XP = XZ$,

$$\begin{aligned} ZY &> PY \\ Z\hat{O}Y &> P\hat{O}Y. \end{aligned}$$

Somando $X\hat{O}Z$ em ambos os lados da igualdade:

$$X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y \quad > \quad X\hat{O}Z + P\hat{O}Y.$$

Como $X\hat{O}P = A\hat{O}C = X\hat{O}Z$,

$$X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y \quad > \quad X\hat{O}P + P\hat{O}Y.$$

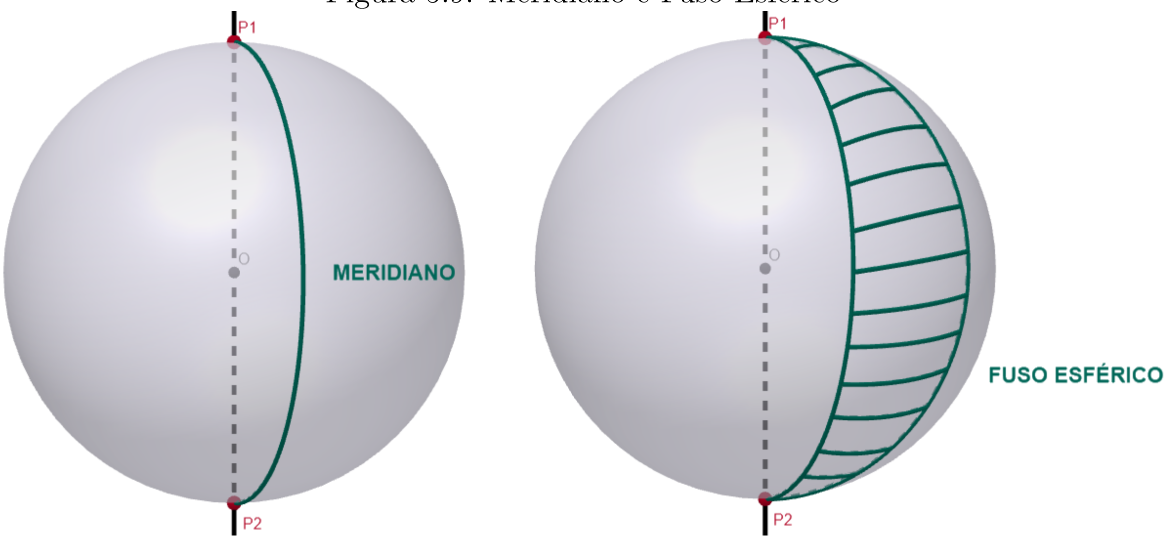
Como $X\hat{O}P + P\hat{O}Y = X\hat{O}Y$ (vide Figura 5.8), logo:

$$\begin{aligned} X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y \quad &> \quad X\hat{O}Y. \\ a + b \quad &> \quad c. \end{aligned}$$

Reescrevendo a desigualdade, tem-se que $a > c - b$. De forma análoga, demonstra-se que de fato, para quaisquer lados, um lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença.

Outra definição importante é a do *Meridiano*, sendo definido como uma semicircunferência máxima cujo plano contém o eixo, e liga os polos. Já *Fuso Esférico* será a região compreendida entre dois meridianos, conforme ilustrado pela Figura 5.9.

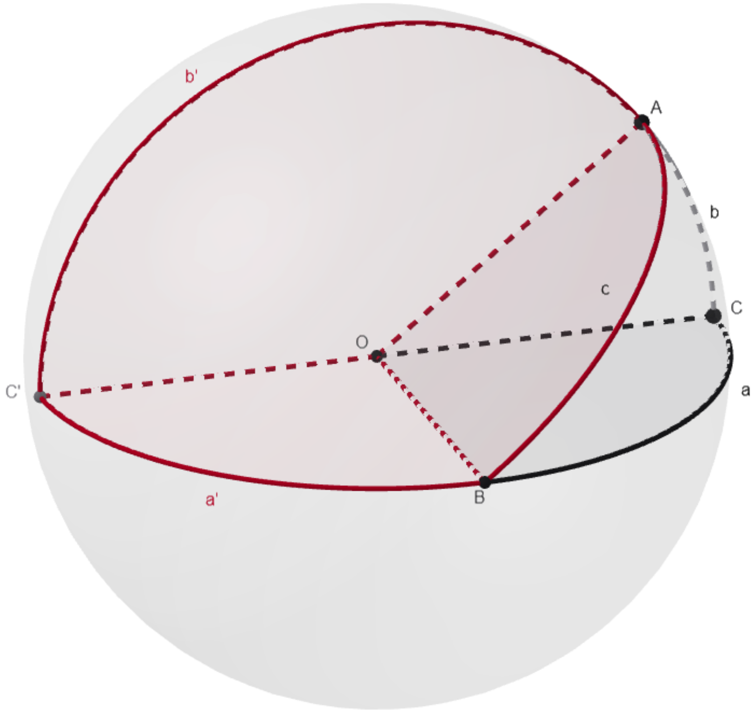
Figura 5.9: Meridiano e Fuso Esférico



Fonte: Própria.

Seja um triângulo esférico determinado pelos pontos ABC, o *Triângulo Suplementar* será aquele em que um dos vértices será a antípoda de um dos vértices do primeiro. Desta forma, é possível associar três triângulos auxiliares, sendo o triângulo $A'BC$ (em que A é a antípoda de A', $AB'C$ (em que B é a antípoda de B'), ou ainda ABC' (em que C é a antípoda de C'). A Figura 5.10 ilustra uma das possibilidades.

Figura 5.10: Triângulo Suplementar



Fonte: Própria.

Desta forma, é possível concluir que dois triângulos suplementares formam um fuso horário de tal forma que os vértices antipodais são os polos. Ademais, a partir da figura acima, tem-se que $a+a' = 180^o$ e $b+b' = 180^o$, o que permite demonstrar outro resultado importante, o que afirma que a soma dos três lados de um triângulo esférico é sempre menor que 360^o.

De fato, como $a + a' = 180^o$ e $b + b' = 180^o$:

$$\begin{aligned} a + a' + b + b' &= 360^o \\ a + b + (a' + b') &= 360^o. \end{aligned}$$

Foi demonstrado anteriormente que para quaisquer lados de um triângulo esférico, um lado sempre será menor que a soma dos outros dois. Considerando o triângulo ABC' representado pela Figura 5.10, tem-se que $c < a' + b'$, da equação acima segue que:

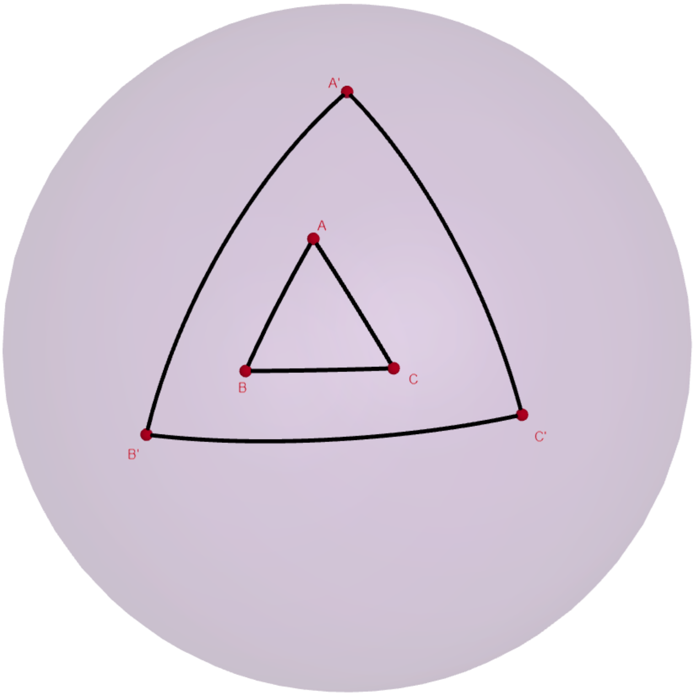
$$a + b + c < 360^o.$$

Foi definido anteriormente que os *Polos* de uma esfera são os pontos gerados pela interseção de um eixo da esfera com a sua superfície. Define-se também, a partir das definições de eixo e polo de uma esfera que, se P é um dos polos da esfera, então P será também o polo da circunferência máxima perpendicular ao eixo que gerou P.

Como resultado direto, tem-se que P será polar a uma determinada circunferência máxima se, e somente se, a distância de P com qualquer ponto da circunferência seja igual a 90^o. Tal resultado advém da definição de que que tal circunferência é perpendicular ao eixo que gerou P (lembrando que a medida do ângulo central determinará a distância).

Desta forma, dois triângulos são tidos como *Triângulos Polares* quando os vértices do primeiro são polos das circunferências geradas pelos lados do segundo. Será demonstrado abaixo que, sendo ABC e $A'B'C'$ dois triângulos esféricos, se $A'B'C'$ é polar de ABC, então ABC será polar de $A'B'C'$.

Figura 5.11: Triângulo Polares



Fonte: Própria.

De fato, seja a situação ilustrada pela Figura 5.11, por hipótese tem-se que A é polar ao arco formado pelos vértices $B'C'$, B é polar ao arco formado pelos vértices $A'C'$ e C é polar ao arco formado pelos vértices $A'B'$. Como A é polar ao arco formado pelos vértices $B'C'$ então a distância entre A e C' será de 90^o. Como B é polar ao arco formado pelos vértices $A'C'$ então a distância entre B e C' será de 90^o. Logo, tendo que a distância entre C' e os vértices A e B é igual a 90^o, então C' é polar ao arco formado pelos vértices A e B.

De forma análoga, demonstra-se que: B' é polar ao arco formado pelos vértices A e C e que A' é polar ao arco formado pelos vértices B e C. Ou seja, ABC será polar de $A'B'C'$, validando o resultado.

5.2 Soma dos Ângulos Internos

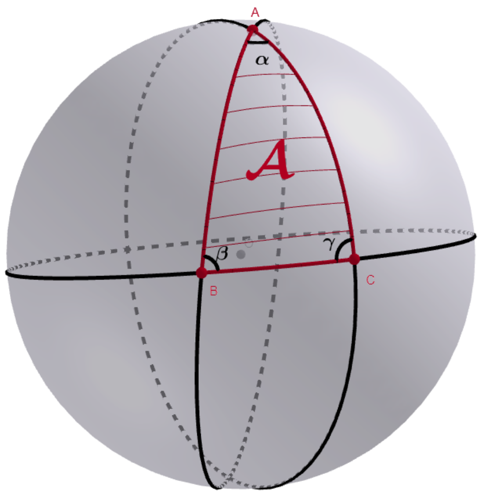
Com o intuito de estabelecer uma relação com a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é necessário antes destacar alguns resultados. Sabe-se que a área A_{esfera} de uma esfera de raio r é dada dor $A = 4\pi r^2$. Já para a área de um fuso A_{fuso}, seja α o ângulo do fuso, sua área é diretamente proporcional à área da esfera, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{A_{esfera}}{A_{fuso(\alpha)}} &= \frac{360^o}{\alpha} \\ \frac{4\pi r^2}{A_{fuso(\alpha)}} &= \frac{360^o}{\alpha} \\ A_{fuso(\alpha)} &= 2\alpha r^2. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão $A_{fuso} = 2\alpha r^2$ determina a área de tal fuso.

Teorema de Girard: A soma dos ângulos internos α, β e γ de um triângulo esférico é dada por $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathcal{A}}{r^2}$, em que $\mathcal{A}$ é a área do triângulo e r é o raio da esfera que o contém.

Figura 5.12: Triâgulo Esférico ABC



Fonte: Própria.

Demonstração: De fato, considere um triângulo esférico de vértices A, B e C de ângulos internos α, β e γ e área $\mathcal{A}$, conforme a Figura 5.12. Tem-se que a área correspondente ao fuso de ângulo α ($A_{fuso(\alpha)}$) será equivalente à soma das áreas dos triângulos $\mathcal{A}$+$A_{A'BC}$, a área correspondente ao fuso de ângulo β ($A_{fuso(\beta)}$) será equivalente à soma das áreas dos triângulos $\mathcal{A} + A_{AB'C}$ e a área correspondente ao fuso de ângulo γ ($A_{fuso(\gamma)}$) será equivalente à soma das áreas dos triângulos $\mathcal{A}$+$A_{ABC'}$. Sendo $A_{A'BC}$, $A_{AB'C}$ e $A_{ABC'}$ as áreas respectivas aos triângulos formados pelos vértices $A'BC, AB'CeAABC'$. Ou seja:

$$\begin{aligned} A_{fuso(\alpha)} &= \mathcal{A} + A_{A'BC} \\ A_{fuso(\beta)} &= \mathcal{A} + A_{AB'C} \\ A_{fuso(\gamma)} &= \mathcal{A} + A_{ABC'}. \end{aligned}$$

Somando as três equações, tem-se que:

$$A_{fuso(\alpha)} + A_{fuso(\beta)} + A_{fuso(\gamma)} = 2\mathcal{A} + \mathcal{A} + A_{A'BC} + A_{AB'C} + A_{ABC'}.$$

Como os triângulos formados pelos vértices $AB'C$ e $A'BC'$ são simétricos (vértices antipodais), eles também são congruentes, conservando a sua área, ou seja, $A_{AB'C} = A_{A'BC'}$. Substituindo na esquação acima:

$$A_{fuso(\alpha)} + A_{fuso(\beta)} + A_{fuso(\gamma)} = 2\mathcal{A} + \mathcal{A} + A_{A'BC} + A_{A'BC'} + A_{ABC'}.$$

Sabe-se também que a circunferência máxima contendo o arco AC divide a esfera em dois hemisférios congruentes, sendo um deles formado justamente pelos triângulos $ABC + A'BC + A'BC' + ABC'$, vide Figura 5.12. Ou seja, suas áreas somadas equivalem à área de meia circunferência ($2\pi r^2$). Substituindo na equação acima, tem-se que:

$$A_{fuso(\alpha)} + A_{fuso(\beta)} + A_{fuso(\gamma)} = 2\mathcal{A} + 2\pi r^2.$$

Como a área de um fuso de ângulo α é determinado por $2\alpha r^2$, então:

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\mathcal{A} + 2\pi r^2.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por $2r^2$ e simplificando a equação ao máximo, obtém-se finalmente que $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathcal{A}}{r^2}$.

Como resultado direto do teorema acima, tem-se que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo esférico sempre será um valor real entra π e 3π radianos.

De fato, pelo teorema tem-se que $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathcal{A}}{r^2}$, em que $\mathcal{A}$ é a área do triângulo. A menor soma possível para os ângulos internos será obtida quando a área for a menor possível, fazendo $\mathcal{A} \to 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \to \pi$. Já a maior soma possível acontecerá quando a área for também a maior possível, ou seja, quando a área tender a ser a de um hemisfério, isto é, $\mathcal{A} \to 2\pi r^2 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \to 3\pi$.

Desta forma, tem-se que de fato:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi,$$

sendo os ângulos dados em radianos. De forma equivalente, em graus, tem-se que:

$$180^o < \alpha + \beta + \gamma < 540^o.$$

5.2.1 Relações Angulares

Com o intuito de desenvolver e demonstrar algumas relações angulares em triângulos esféricos, será utilizado a Figura 5.13 como suporte. Tal figura ilustra um triângulo esférico com vértices A, B e C e lados a, b e c situado em uma esféra de centro O. Seja também o ponto P a projeção ortogonal do ponto A sobre o plano que contém o triângulo OBC. Sejam N e M as projeções ortogonais do ponto P em relação aos segmentos OC e OB, respectivamente.

A partir disto, é possível notar que os triângulos APN, APM, ONP, OMP e OPA são todos retângulos, nota-se também que o ângulo reto está no vértice no meio do nome do triângulo (o triângulo OPA é retângulo no vértice em P).

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPA, tem-se:

$$OA^2 = AP^2 + OP^2. \tag{5.1}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo APM, tem-se:

$$AM^2 = AP^2 + PM^2 \Rightarrow AP^2 = AM^2 - PM^2. \tag{5.2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPM, tem-se:

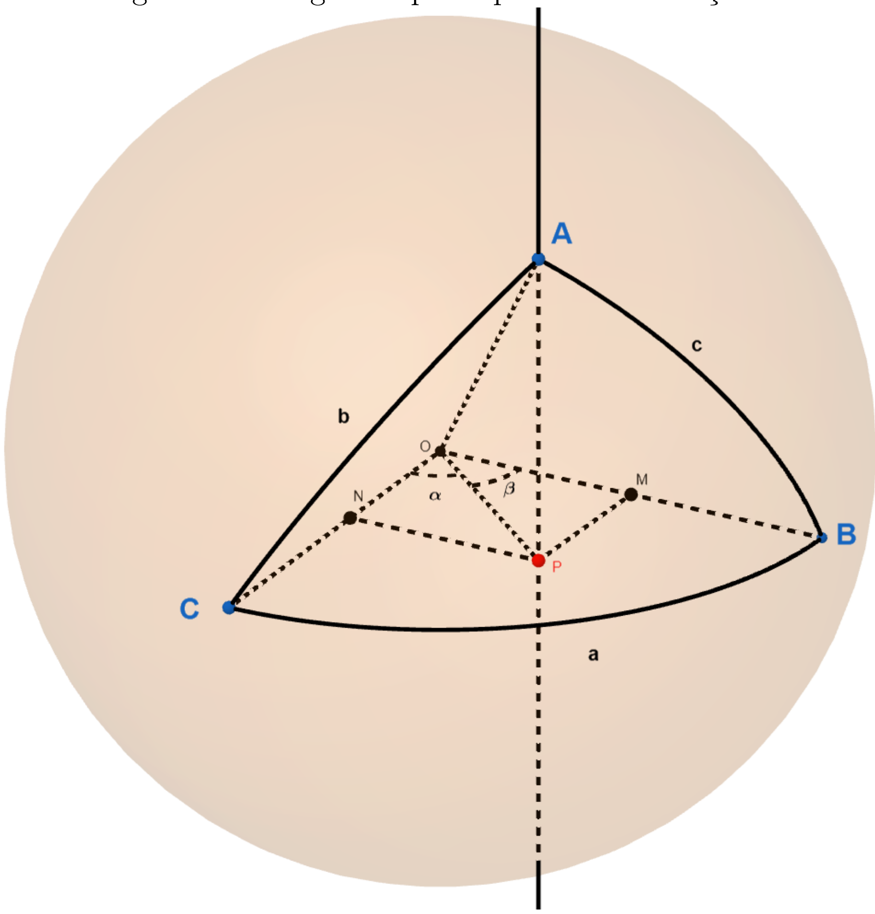
$$OP^2 = OM^2 + PM^2. \tag{5.3}$$

Substituindo as Equações (5.2) e (5.3) em (5.1), tem-se:

$$\begin{aligned} OA^2 &= AM^2 - PM^2 + OM^2 + PM^2 \\ OA^2 &= AM^2 + OM^2. \end{aligned}$$

Implicando que o triângulo ONA é retângulo. De forma análoga, é possível demonstrar que o triângulo OMA é retângulo, sendo que em ambos os casos a hipotenusa é o segmento OA.

Figura 5.13: Figura suporte para demonstrações.



Fonte: Própria.

Analisando o triângulo ONA é possível perceber que o ângulo $A\hat{O}C$ é justamente o lado b, segue que:

$$cos(b) = \frac{ON}{OA} \quad (5.4)$$

$$sen(b) = \frac{AN}{OA}. \quad (5.5)$$

Analogamente, considerando o triângulo OMA cujo ângulo $A\hat{O}B$ é o lado c, segue que:

$$cos(c) = \frac{OM}{OA} \quad (5.6)$$

$$sen(c) = \frac{AM}{OA}. \quad (5.7)$$

Sejam agora os triângulos OMP e ONP com os seus respectivos ângulos α e β, então:

$$cos(\alpha) = \frac{OM}{OP} \tag{5.8}$$
$$cos(\beta) = \frac{ON}{OP}. \tag{5.9}$$
$$sen(\alpha) = \frac{MP}{OP} \tag{5.10}$$
$$sen(\beta) = \frac{NP}{OP}. \tag{5.11}$$

Através da relação (5.8) é possível escrever que $OM = OP.cos(\alpha)$. Como $\alpha + \beta = a$, então $\alpha = a - \beta$. Logo: $OM = OP.cos(a - \beta)$, pela subtração de arcos da geometria plana:

$$OM = OP.[cos(a)cos(\beta) + sen(a)sen(\beta)]. \tag{5.12}$$

Substituindo (5.9) e (5.11) em (5.12) e realizando as devidas simplificações, tem-se:

$$OM = ON.cos(a) + NP.sen(a). \tag{5.13}$$

Pelo triângulo APN, é possível estabelecer que:

$$cos(\hat{N}) = \frac{NP}{AN} \tag{5.14}$$
$$sen(\hat{N}) = \frac{AP}{AN}. \tag{5.15}$$

Pela definição de ângulo esférico sabe-se que $A\hat{N}P = A\hat{C}B$, logo:

$$cos(\hat{N}) = cos(\hat{C}) = \frac{NP}{AN} \tag{5.16}$$
$$sen(\hat{N}) = sen(\hat{C}) = \frac{AP}{AN}. \tag{5.17}$$

Da equação (5.6) tem-se que $OM = OA.cos(c)$, enquanto que da Equação (5.4) tem-se que $ON = OA.cos(b)$. Já da equação (5.14), tem-se que $NP = AN.cos(\hat{C})$. Substituindo na Equação (5.13):

$$OA.cos(c) = OA.cos(b).cos(a) + AN.cos(\hat{C}).sen(a).$$

Pela Equação (5.5) $AN = OA.sen(b)$, desta forma:

$$OA.cos(c) \quad = \quad OA.cos(b).cos(a) + OA.sen(b).cos(\hat{C}).sen(a).$$

Simplificando e reorganizando:

$$cos(c) \quad = \quad cos(b).cos(a) + sen(b).sen(a).cos(\hat{C}). \tag{5.18}$$

Utilizando o mesmo raciocínio, observa-se também que:

$$cos(a) \quad = \quad cos(b).cos(c) + sen(b).sen(c).cos(\hat{A}). \tag{5.19}$$

$$cos(b) \quad = \quad cos(a).cos(c) + sen(a).sen(c).cos(\hat{B}). \tag{5.20}$$

Essas relações são denominadas como *Lei dos Cossenos Esféricos* e afirmam que o cosseno de um lado qualquer de um triângulo esférico é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados, somado ao produto dos senos desses mesmos lados multiplicado pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

Outra relação extremamente importante é a *Lei dos Senos Esféricos* que afirma que, em um triângulo esférico, o seno de um lado dividido pelo seno do ângulo oposto a ele é igual ao mesmo quociente formado pelos outros dois lados e seus ângulos opostos; ou seja, os senos dos lados estão na mesma proporção que os senos dos ângulos opostos. Logo:

$$\frac{sen(a)}{sen(\hat{A})} = \frac{sen(b)}{sen(\hat{B})} = \frac{sen(c)}{sen(\hat{C})}. \tag{5.21}$$

Demonstração: Das Equações (5.5) e (5.17), tem-se que:

$$AN = OA.sen(b)$$

e

$$AN = \frac{AP}{sen(\hat{C})}.$$

Desta forma:

$$OA.sen(b) \quad = \quad \frac{AP}{sen(\hat{C})} \Rightarrow$$

$$\frac{AP}{OA} = sen(b).sen(\hat{C}). \tag{5.22}$$

Pelo triângulo APM, é possível estabelecer que:

$$sen(\hat{M}) = \frac{AP}{AM}.$$

Pela definição de ângulo esférico sabe-se que $A\hat{M}P = A\hat{B}C$, logo:

$$sen(\hat{M}) = sen(\hat{B}) = \frac{AP}{AM} \Rightarrow AM = \frac{AP}{sen(\hat{B})}. \tag{5.23}$$

Pela Equação (5.7), sabe-se que:

$$AM = OA.sen(c),$$

substituindo na equação (5.23), tem-se que:

$$OA.sen(c) = \frac{AP}{sen(\hat{B})} \Rightarrow$$

$$\frac{AP}{OA} = sen(c).sen(\hat{B}). \tag{5.24}$$

Igualando as Equações (5.22) e (5.23) e reorganizando, segue:

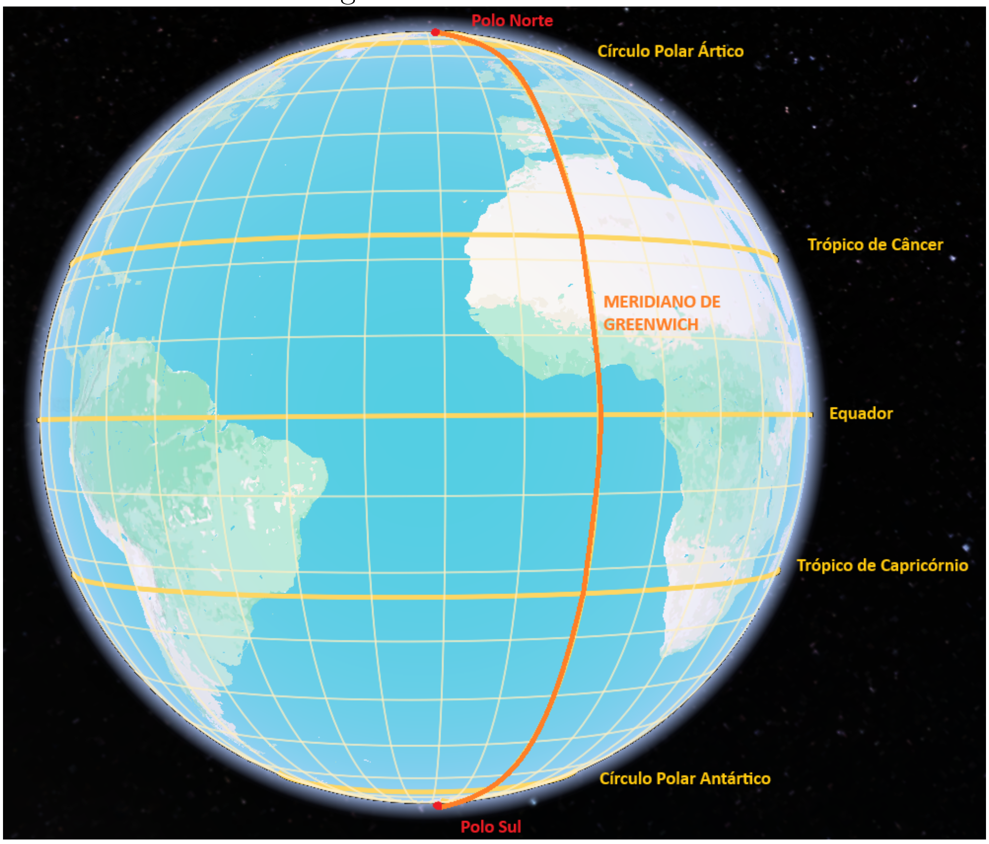
$$\frac{sen(b)}{sen(\hat{B})} = \frac{sen(c)}{sen(\hat{C})}. \tag{5.25}$$

Desta forma, demonstra-se uma das igualdades. O restante é realizado de modo análogo.

5.3 Geodésia - Distância entre Pontos.

A Geodésia é o nome da ciência que estuda a forma e as dimensões do planeta Terra, assim como a posição de pontos sobre a sua superfície. A partir da Figura 5.14 e das definições já estabelecidas, chama-se eixo da Terra a linha imaginária que atravessa o planeta de um polo a outro, sendo também o eixo no qual a esfera terrestre apresenta rotação. Já os círculos perpendiculares ao eixo da Terra são chamados de paralelos terrestres. O círculo máximo é denominado Equador, dividindo o planeta em dois hemisférios, denominados como Norte e Sul. Tem-se também que os círculos máximos que passam pelos polos geográficos são chamados de meridianos, sendo todos perpendiculares aos círculos paralelos.

Figura 5.14: Planeta Terra



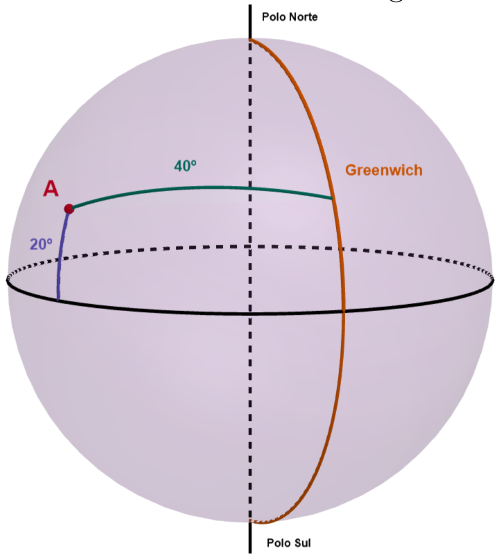
Fonte: Google Earth

Chama-se de Longitude o ângulo entre o plano que contém o eixo da Terra, e que define o meridiano de Greenwich (vide Figura 5.14), e o plano que contém o eixo da Terra e o meridiano do lugar do observador. A longitude é denotada por λ e é medida em graus, de zero a 180^o para Leste (E) ou Oeste (W) do Meridiano de Greenwich. Por convenção, usa-se o sinal negativo para indicar a posição W e positivo para a posição E. Deste modo $-180^o(W) \leq \lambda \leq 180^o(E)$.

Já Latitude é denifinido como sendo o arco do meridiano, medido em graus, de um ponto até o equador, sendo denotada por ϕ e é medida de zero a 90^o para Norte (N) ou para Sul (S) do Equador. Por convenção, usa-se o sinal negativo para indicar a posição S e positivo para a posição N. Deste modo $-90^o(S) \leq \phi \leq 90^o(S)$.

Desta forma, é possível localizar qualquer ponto na superfície terrestre a partir da sua Latitude e Longitude. Por exemplo, o ponto A (vide Figura 5.15) tem Latitude 20^o N e Longitude 40^o W.

Figura 5.15: Latitude 20^o N e Longitude 40^o W.



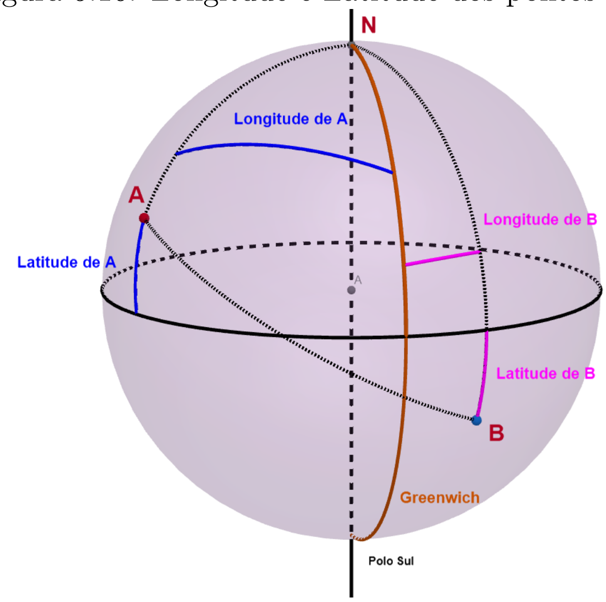
Fonte: Própria.

Desta forma, dadas as coordenadas geográficas (Latitude e Longitude) de dois pontos terrestres A e B, e sendo N o ponto respectivo ao Polo Norte, é possível calcular a distância entre A e B a partir de uma adaptação da *Lei dos Cossenos Esféricos*, sendo:

$$\widehat{AB} = arccos\big(cos(\widehat{NA}).cos(\widehat{NB}) + sen(\widehat{NA}).sen(\widehat{NB}).cos(\hat{N})\big), \tag{5.26}$$

em que $\widehat{AB}$ é a distância entre os pontos A e B, $\widehat{NA}$ é a distância entre os pontos N e A e $\widehat{NB}$ é a distância entre os pontos N e B, sendo $\hat{N}$ o ângulo esférico N do triângulo ABN.

Figura 5.16: Longitude e Latitude dos pontos A e B.



Fonte: Própria.

Conforme a Figura 5.16, é possível perceber que quando um ponto se encontra no hemisfério norte (ponto A), a sua distância com o polo Norte será dada pelo complemento da sua Latitude ou seja, $\widehat{NA} = 90^o -$ *Latitude de A*. Já quando um ponto de encontra no hemisfério sul (ponto B), a sua distância com o polo Norte será justamente o valor da sua latitude mais 90^o ou seja, $\widehat{NB} = 90^o +$ *Latitude de B*. Por fim, o ângulo esférico N será dado pela soma das Longitudes de ambos os pontos, caso um esteja para o Oeste e o outro para o Leste, caso a soma seja superior à 180^o, utiliza-se o replemento de ângulo. Caso ambos estejam para o Oeste ou Leste, o ângulo N será a diferença entre as Longitudes.

Para converter as distâncias angulares em quilômetros na superfície terrestre basta associar que o círculo máximo da Terra mede 40.075 km, desta forma, cada grau de distância entre dois pontos equivale a aproximadamente 111,32 km. Tendo tudo isso em vista, é possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer sobre a superfície terrestre em quilômetros. Os próximos cálculos utilizaram as localidades informadas pela tabela abaixo.

Descrição do Local	**Latitude**	**Longitude**
UFSCar - Sorocaba	-23.57223 ^{o} S	-47,49606 ^{o} W
Universidade de Kyoto	35,0262 ^{o} N	135,7808 ^{o} E
Universidade de Oxford	51,7548 ^{o} N	–1,2544 ^{o} W
Universidade de Pequim	39,9872 ^{o} N	116,3032 ^{o} E
Universidade do Chile	–33,43997 ^{o} S	–70,65059 ^{o} W

Tabela 5.1: Coordenadas Geográficas de Universidades

5.3.1 Distância entre a UFSCar - Sorocaba e a Universidade de Kyoto

Utilizando a Equação (5.26) e considerando o ponto A como a localização da UFSCar - Sorocaba e o ponto B como a Universidade de Kyoto, conforme a tabela acima, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{NA} &= 113,57223^o \text{ (A é um ponto do hemisfério Sul)} \\
\widehat{NB} &= 54,9738^o \text{ (B é um ponto do hemisfério Norte)} \\
\hat{N} &= 176,72314^o \text{ (Replemento de 47,49606+135,7808).}
\end{aligned}
$$

Logo:

$$\widehat{AB} \approx arccos(cos(113,57^o).cos(54,97^o) + sen(113,57^o).sen(54,97^o).cos(176,72^o))$$
$$\widehat{AB} \approx 168,19^o.$$

Neste caso convertendo para quilômetros, a distância entre as duas universidades será de aproximadamente 18.723 km.

5.3.2 Distância entre a UFSCar - Sorocaba e a Universidade de Oxford

Utilizando a Equação (5.26) e considerando o ponto A como a localização da UFSCar - Sorocaba e o ponto B como a Universidade de Oxforme, tem-se que:

$$\widehat{NA} = 113,57223^o \text{ (A é um ponto do hemisfério Sul)}$$
$$\widehat{NB} = 38,2452^o \text{ (B é um ponto do hemisfério Norte)}$$
$$\hat{N} = 46,24166^o \text{ (Ambos os pontos se encontram no Oeste).}$$

Logo:

$$\widehat{AB} \approx arccos(cos(113,57^o).cos(38,247^o) + sen(113,57^o).sen(38,24^o).cos(46,24^o))$$
$$\widehat{AB} \approx 85,50^o.$$

Neste caso convertendo para quilômetros, a distância entre as duas universidades será de aproximadamente 9.517,86 km.

5.3.3 Distância entre a UFSCar - Sorocaba e a Universidade de Pequim

Utilizando a Equação (5.26) e considerando o ponto A como a localização da UFSCar - Sorocaba e o ponto B como a Universidade de Pequim, tem-se que:

$$\widehat{NA} = 113,57223^o \text{ (A é um ponto do hemisfério Sul)}$$
$$\widehat{NB} = 50,0128^o \text{ (B é um ponto do hemisfério Norte)}$$
$$\hat{N} = 163,79926^o \text{ (Resultado: 47,49606+116,3032).}$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
\widehat{AB} &\approx arccos(cos(113,57^o).cos(50,01^o) + sen(113,57^o).sen(50,01^o).cos(163,80^o)) \\
\widehat{AB} &\approx 158,64^o
\end{aligned}
$$

Neste caso convertendo para quilômetros, a distância entre as duas universidades será de aproximadamente 17.659,80 km.

5.3.4 Distância entre a UFSCar - Sorocaba e a Universidade do Chile

Utilizando a Equação (5.26) e considerando o ponto A como a localização da UFSCar - Sorocaba e o ponto B como a Universidade do Chile, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{NA} &= 113,57223^o \text{ (A é um ponto do hemisfério Sul)} \\
\widehat{NB} &= 123,43997^o \text{ (B é um ponto do hemisfério Sul)} \\
\hat{N} &= 23,16453^o \text{ (Ambos os pontos se encontram no Oeste).}
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
\widehat{AB} &\approx arccos(cos(113,57^o).cos(123,44^o) + sen(113,57^o).sen(123,44^o).cos(23,16^o)) \\
\widehat{AB} &\approx 22,39^o
\end{aligned}
$$

Neste caso convertendo para quilômetros, a distância entre as duas universidades será de aproximadamente 2.492,45 km.

5.4 Plano de aula - Geometria Esférica

Objetivos Gerais:

1. Compreender os conceitos fundamentais da Geometria Esférica e suas distinções em relação à Geometria Euclidiana plana.

2. Desenvolver a capacidade de identificar e resolver problemas envolvendo elementos geométricos em uma superfície esférica.

3. Perceber a aplicação da Geometria Esférica em contextos do cotidiano e em diferentes áreas do conhecimento.

Objetivos Específicos:

1. Definir esfera, círculo máximo, polos e equador.
2. Diferenciar a linha reta euclidiana de um arco de círculo máximo (geodésica) em uma superfície esférica.
3. Identificar as propriedades dos triângulos esféricos, como a soma dos ângulos internos.
4. Calcular distâncias entre pontos na superfície da Terra utilizando conceitos de Geometria Esférica (quando aplicável e com simplificações).
5. Relacionar a Geometria Esférica com a navegação, cartografia e astronomia.

Materiais:

1. Globo terrestre (ou esfera de isopor grande).
2. Barbante ou linha fina.
3. Canetas para quadro branco/marcadores.
4. Projetor e computador para exibição de slides/vídeos.
5. Réguas e compassos (para a parte introdutória de comparação).
6. Mapas-múndi (plano e esférico, se disponível).
7. Material impresso com exercícios e atividades.

5.4.1 Competências Específicas de Matemática da BNCC (Ensino Médio):

1. **Competência 1:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. **Competência 2:** Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. **Competência 3:** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. **Competência 5:** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

5.4.2 Habilidades da BNCC (Ensino Médio):

1. **EM13MAT105:** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

2. **EM13MAT509:** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

5.4.3 Aula 1: Introdução à Geometria Esférica e seus Elementos (100 minutos)

1. Abertura e Questionamento Inicial (20 minutos):

- Inicie a aula perguntando aos alunos se eles já pensaram como uma aeronave ou um navio encontra o caminho mais curto entre dois pontos distantes na Terra.

- Provoque-os com a ideia de que a "linha reta"em um mapa plano não é necessariamente o caminho mais curto na realidade.

- Apresente o globo terrestre e o barbante. Peça a um aluno para tentar encontrar o caminho mais curto entre duas cidades distantes, primeiro com uma régua em um mapa plano e depois com o barbante no globo. Discuta as diferenças.

2. Conceitos Fundamentais da Esfera (40 minutos):

- Defina esfera como uma superfície tridimensional onde todos os pontos estão equidistantes de um centro.

- Apresente e defina os seguintes elementos na esfera, utilizando o globo e o barbante: **Círculo Máximo:** Corte de uma esfera por um plano que passa pelo seu centro. Enfatize que é o "equivalente" à linha reta na geometria plana. Mostre vários exemplos com o barbante no globo; **Polos:** Pontos na superfície da esfera equidistantes de todos os pontos de um círculo máximo; **Equador:** O círculo máximo perpendicular ao eixo que passa pelos polos.

- Discuta a principal diferença entre a Geometria Euclidiana (plana) e a Geometria Esférica: na Geometria Esférica, a "linha reta" é um arco de círculo máximo.

3. Comparação e Contraste (30 minutos):

- Projete slides mostrando figuras geométricas planas (triângulos, retas) e suas analogias na superfície esférica.

- Pergunte: "É possível construir um triângulo com a soma dos ângulos internos maior que 180° na superfície de uma esfera?" Incentive a discussão e permita que os alunos tentem esboçar no globo.

- Introduza a ideia de triângulo esférico e a propriedade de que a soma dos ângulos internos é sempre maior que 180° e menor que 540°. Demonstre com o barbante no globo, criando um triângulo esférico com três ângulos retos (ex: do Polo Norte até o Equador, ao longo do Equador e de volta ao Polo Norte).

4. Resumo e Dúvidas (10 minutos):

- Recapitule os principais conceitos apresentados.

- Abra para perguntas e esclareça quaisquer dúvidas.

5.4.4 Aula 2: Aplicações da Geometria Esférica e Resolução de Problemas (100 minutos):

1. Revisão e Conexão com o Cotidiano (20 minutos):

- Retome os conceitos da aula anterior e peça aos alunos que compartilhem suas pesquisas sobre as aplicações da Geometria Esférica.

- Direcione a discussão para as áreas de navegação aérea e marítima, cartografia e astronomia.

2. Navegação e Distâncias (40 minutos):

- Explique como as rotas de aviões e navios seguem arcos de círculos máximos para minimizar a distância e o tempo de viagem. Utilize o globo novamente para demonstrar rotas reais.

- Apresente, de forma simplificada, a ideia de que a distância entre dois pontos na superfície da Terra pode ser calculada usando a Geometria Esférica (não é necessário entrar em fórmulas complexas, mas mencionar a importância de coordenadas geográficas e a fórmula do haversine como um exemplo de cálculo real).

- Se houver tempo e interesse, mostre um vídeo curto explicando como as rotas de voo são planejadas com base nesses princípios.

3. Cartografia e Deformações (30 minutos):

- Discuta como a Geometria Esférica é fundamental para a cartografia.

- Explique as deformações inevitáveis ao projetar uma superfície esférica (a Terra) em uma superfície plana (um mapa).

- Compare diferentes tipos de projeções cartográficas (Mercator, Peters, etc.), destacando como cada uma tenta minimizar um tipo específico de distorção (área, forma, distância, direção). Use os mapas-múndi para ilustrar.

4. Atividade Prática/Discussão de Problemas (10 minutos):

- Proponha um problema simples para os alunos discutirem em grupos pequenos ou individualmente. Exemplo: "Por que um avião voando de São Paulo para Tóquio não segue uma linha reta em um mapa-múndi tradicional?"

- Incentive-os a usar os conceitos aprendidos para justificar suas respostas.

- Abra para uma breve discussão em sala.

5.4.5 Avaliação

A avaliação será contínua ao longo das duas aulas, observando a participação, o envolvimento e a compreensão dos alunos. Além disso, será utilizada uma avaliação formativa ao final do conteúdo.

- **Participação em Sala de Aula (Observação):** Observar o engajamento dos alunos nas discussões, nas atividades práticas com o globo e na formulação de perguntas.

- **Atividade de Problematização:** Avaliar a capacidade dos alunos de aplicar os conceitos de Geometria Esférica na resolução da questão proposta na segunda aula, seja na discussão em grupo ou em uma breve resposta escrita.

- **Questão Aberta (Individual):** Ao final da segunda aula, solicitar que os alunos respondam a uma breve questão, como: "Quais são as principais diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica, e em qual contexto a Geometria Esférica é mais relevante?"Essa resposta permitirá verificar a compreensão dos conceitos centrais e a capacidade de síntese.

5.5 Considerações Parciais

A Geometria Esférica, muitas vezes ofuscada pela familiaridade da geometria euclidiana, revela-se um campo de estudo de importância crucial, especialmente quando consideramos o mundo em que vivemos. Ao explorarmos as superfícies curvas, exploramos um universo tridimensional que espelha a realidade do nosso planeta. É por meio dela que compreendemos, por exemplo, por que a rota mais curta entre duas cidades distantes em um globo terrestre não é uma linha reta em um mapa plano, mas sim um arco de círculo máximo. Essa compreensão é fundamental para diversas áreas, desde a navegação aérea e marítima, que depende de cálculos precisos para otimizar rotas e economizar combustível, até a cartografia, que lida com o desafio de representar uma esfera em uma superfície plana, gerando as inevitáveis, mas controláveis, distorções que vemos em diferentes projeções de mapas.

Nesse cenário, a realização de aulas dedicadas à Geometria Esférica no ensino médio torna-se inestimável. Mais do que apenas apresentar novas fórmulas ou conceitos abstratos, essas aulas proporcionam aos alunos a oportunidade de expandir seu raciocínio espacial e desenvolver uma visão mais crítica sobre o mundo ao seu redor. Ao manipularem um globo, visualizarem arcos de círculos máximos e compararem mapas, os estudantes não apenas absorvem conhecimento, mas também cultivam a curiosidade intelectual e a capacidade de resolver problemas que vão além do óbvio. Eles aprendem a questionar as representações da realidade e a entender que diferentes sistemas geométricos se aplicam a diferentes contextos. Em última análise, ao desmistificar a complexidade do nosso planeta e suas interconexões, as aulas de Geometria Esférica capacitam os alunos a compreenderem melhor o mundo e a se tornarem cidadãos mais informados e aptos a navegar por um universo cada vez mais complexo.

Capítulo 6

Considerações Finais

A jornada através da história da geometria é um testemunho fascinante da evolução do pensamento humano e da nossa incessante busca por compreender e modelar o mundo. De fato, ao revisitar as contribuições de diversas civilizações, é possível traçar uma linha contínua que conecta o conhecimento ancestral às aplicações contemporâneas.

Inicialmente, nas civilizações como a babilônica e a egípcia, a geometria floresceu a partir de uma necessidade intrínseca: a de resolver problemas práticos e utilitários. Seja no cálculo de áreas para a demarcação de terrenos agrícolas após as cheias do Nilo, na estimativa de volumes para a construção de grandiosas pirâmides ou no domínio das transformações geométricas para o planejamento urbano, a matemática desses povos era uma ferramenta essencial para a sua sobrevivência e progresso. A herança da divisão da circunferência em 360 partes iguais, oriunda da base sexagesimal babilônica, é um exemplo notável de como suas soluções, mesmo que empíricas, ainda ressoam em nossos dias. Os papiros de Ahmes e de Moscou são provas concretas da habilidade egípcia em lidar com essas questões, demonstrando um pragmatismo que priorizava a funcionalidade sobre a formalidade.

Contudo, foi com os gregos que a geometria transcendeu a mera aplicação. Embora reconhecessem o domínio aritmético e geométrico de seus predecessores, os gregos introduziram uma revolução no pensamento matemático: a busca pela demonstração rigorosa. A publicação de "Os Elementos" de Euclides marcou um divisor de águas, estabelecendo que toda afirmação matemática deveria ser não apenas enunciada, mas também provada de maneira lógica e irrefutável. Esse novo padrão de rigor transformou a matemática em uma ciência dedutiva e teve um impacto profundo no desenvolvimento do pensamento científico como um todo, consolidando a ideia de que o conhecimento válido é aquele respaldado por evidências lógicas e provas.

Pulando séculos, chegamos à Geometria Esférica, um campo que, embora por vezes ofuscado pela familiaridade da geometria euclidiana plana, é de importância capital para a compreensão do nosso próprio planeta. Ao explorarmos as superfícies curvas, saímos do plano bidimensional e adentramos um universo tridimensional que espelha a realidade da Terra. É a Geometria Esférica que nos permite entender por que a rota mais curta entre dois pontos distantes em um globo não é uma linha reta em um mapa plano, mas sim um arco de círculo máximo. Essa compreensão é a base de diversas áreas, desde a navegação aérea e marítima, que depende de cálculos precisos para otimizar rotas e economizar combustível, até a cartografia, que lida com o desafio de representar uma esfera em uma superfície plana, resultando nas distorções inevitáveis, mas controláveis, que vemos em diferentes projeções de mapas.

Nesse panorama histórico e prático, a realização de aulas dedicadas à Geometria Esférica no ensino médio se torna inestimável. Mais do que apenas apresentar novas fórmulas ou conceitos abstratos, essas aulas proporcionam aos alunos a oportunidade de expandir seu raciocínio espacial e desenvolver uma visão mais crítica sobre o mundo ao seu redor. Ao manipularem um globo, visualizarem arcos de círculos máximos e compararem mapas, os estudantes não apenas absorvem conhecimento, mas também cultivam a curiosidade intelectual e a capacidade de resolver problemas que vão além do óbvio. Eles aprendem a questionar as representações da realidade e a entender que diferentes sistemas geométricos se aplicam a diferentes contextos. Em última análise, ao desmistificar a complexidade do nosso planeta e suas interconexões, as aulas de Geometria Esférica auxiliam os alunos a compreenderem melhor o mundo e a se tornarem cidadãos mais informados e aptos a navegar por um universo cada vez mais complexo.

Assim, a jornada da geometria, desde suas origens utilitárias até suas formalizações rigorosas e suas aplicações contemporâneas na Geometria Esférica, demonstra não apenas a evolução do conhecimento matemático, mas também a sua capacidade inerente de nos equipar para entender, transformar e interagir com o mundo que nos cerca.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, F. B. *Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe.* Tese de Mestrado. Porto: FCUP, 2007.

[2] BALL, W. W. R. *A Short Account of the History of Mathematics.* London, New York: Macmillan, 1893.

[3] BALDOR, J.A. *Geometria Plana y del Espacio y Trigonometria.* Espanha: Venezuelana S. A., 1967

[4] BERLINGHOFF, W.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos.* 2. ed. São Paulo; Blucher, 2008.

[5] BICUDO, Irineu. *Os Elementos - Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo.* São Paulo, SP: Editora UNESP, 2009

[6] BOYER, Carl. *História da matemática.* 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

[7] BRUNO, Leonard C. *Math and Mathematicians: The History of Mathematics Discoveries around the World.* Detroit, Mich.: U.X.L., 1999.

[8] BURTON, D. M. *The History of Mathematics. An Introduction.* 6. ed. New York: McGraw-Hill, 2006.

[9] CAJORI, F. *Uma História da Matemática.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[10] CASTRO, W. *Sobre o teorema de Pitágoras.* Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Universidade Federal Fluminense, 2013.

[11] CHACE, A. B. *The Rhind Mathematical Papyrus.* Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, 1929.

[12] COUTINHO, L. *Convite às Geometrias não euclidianas.* 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

[13] DOLCE, Osvaldo *Fundamentos de matemática elementar, 10.* 7. ed. - São Paulo: Atual, 2013.

[14] DORIA, Celso Melchiades. *Geometrias: euclidiana, esférica e hiperbólica.* Rio de Janeiro: SBM, 2019.

[15] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[16] GONÇALVES, Ida Maria Faria de Lira. *Os problemas da matemática: o seu papel na matemática e nas aulas de matemática.* Tese (Doutorado em Matemática), Universidade da Madeira, Funchal, 2011.

[17] GREENBERG, M.J.. *Euclidean and non-Euclidean Geometries.* N.Y.: W.H. Freeman, 1993.

[18] KAMERS, Fernando *Pitágoras de Samos e o Teorema de Pitágoras.* Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

[19] KATZ, Victor. *A Faulty Survey of Algebra's Roots.* SCIENCE, v. 312, p. 1473, 2006.

[20] LIMA, Elon Lages *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Coleção do Professor de Matemática - SBM, 2004.

[21] OLIVEIRA, Ana Maria Libório; NASCIMENTO, Edinaldo da Silva Nascimento. *A trajetória de vida de Pitágoras e suas principais contribuições à Matemática.* Itinerarius Reflectionis, Goiás, v. 16, n. 2. 2020.

[22] ROBSON, Eleanor. *Mesopotamian Mathematics*, 2007.

[23] ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[24] SANTOS, Carla Patrícia Ferreira dos; CARITÁ, Lucas Antonio. *Geometria e Trigonometria Esférica: Fundamentos e Aplicações.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2024.

[25] SANTOS, R. A, OLIVEIRA. J. *Trigonometria Triangular Esférica.* RCT, Roraima, 2018.

[26] SCHURÉ, Édouard. *Os Grandes Iniciados - Pitágoras.* Tradução: Augusta Garcia Dorea, 2006.

[27] SINGH, Simon. *O último Teorema de Fermat.* 2. ed. BestBolso: Rio de Janeiro, 2016.

[28] TABAK, John. *The history of mathematics*, 2004.