



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE
TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



GABRIEL DE AZEVEDO GARRIDO

**TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE
DESCREVEM SUPERFÍCIES PSEUDOESFÉRICAS**

SÃO CARLOS - SP
2025

GABRIEL DE AZEVEDO GARRIDO

**TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE
DESCREVEM SUPERFÍCIES PSEUDOESFÉRICAS**

Monografia apresentada ao curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Igor Leite Freire.

SÃO CARLOS - SP
2025



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA (CCM)
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 5/2026/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação

FOLHA DE APROVAÇÃO

GABRIEL DE AZEVEDO GARRIDO

TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE DESCREVEM SUPERFÍCIES
PSEUDOESFÉRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 08 de dezembro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

| Cargo/Função | Nome Completo |
|-------------------|--------------------------|
| Orientador | Igor Leite Freire |
| Membro da Banca 1 | Leandro Nery de Oliveira |
| Membro da Banca 2 | Wladimir Seixas |



Documento assinado eletronicamente por **Igor Leite Freire, Professor(a) do Ensino Superior**, em 23/03/2026, às 15:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Nery de Oliveira, Professor(a) do Ensino Superior**, em 23/03/2026, às 18:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wladimir Seixas, Professor(a) do Ensino Superior**, em 23/03/2026, às 20:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **2147189** e o código CRC **C386B976**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.002141/2026-42

SEI nº 2147189

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

A todos os que contribuíram com $\varepsilon > 0$ para a minha formação.

Agradecimentos

Vais encontrar o mundo, disse-me meu pai, à porta do Ateneu. Coragem para a luta. A célebre frase escrita por Raul Pompeia e sentida por Sérgio em sua obra *O Ateneu* fez-me refletir bastante sobre como iniciaria esta parte que, agora, considero a mais difícil de toda a monografia. Sendo assim, com essa sensação de ir desbravar o mundo que me aguarda, inicio os meus agradecimentos àqueles que se fizeram presentes nessa jornada rumo ao conhecimento.

Em um primeiro momento, quero agradecer aos meus pais, José Luis Garrido e Vanessa Maria Furlan de Azevedo Garrido, pelo incentivo dado durante longos anos em preparar-me, desde os primórdios da minha educação e escolarização, para que este momento único fosse possível. Sem os senhores, escrever a presente monografia, e principalmente essa página, não seria possível. Obrigado por tornarem realidade o sonho do seu filho por meio da ciência e da universidade. Estendo os agradecimentos desse parágrafo à minha irmã, Sofia de Azevedo Garrido, que, muitas vezes sem saber, protegeu-me e deu-me forças para continuar a minha trajetória. Ressalto que, da mesma forma que se orgulham de mim, a recíproca é mais que verdadeira. Amo-os com coração de criança: puro e feliz.

À minha irmã de alma, Pietra Borges Fornazieri, agradeço, não somente pelos mais de 15 anos de amizade, mas também por ser a melhor pessoa que eu pudesse ter ao meu lado como amiga e inspiração. Agradeço pelas histórias vivenciadas juntas durante esses cinco anos de graduação, pelos vinhos e jantares realizados e conversas, que me fortaleceram e tornaram mais capaz de seguir em frente em vários momentos em que tudo parecia perdido. Obrigado pela leveza de sempre e obrigado por tornar seus os meus logros. Como disse Mônica Martelli, tem pessoas na vida que a gente encontra e, Pietra, que sorte a minha em ter-te comigo.

À minha prima, Bianca de Azevedo Barbieri, e seu esposo, Daniel Dall'Onder dos Santos, os quais foram responsáveis pelo incentivo da não desistência e da perseverança em relação a mim. Obrigado por tudo e por, principalmente, se sentirem orgulhosos por chegar até aqui. Amo-os e admiro-os.

Aos meus melhores amigos da minha região natal, Allan Simões Adegas, Luana Grégio da Silva, Cauã Gabriel Capi, Camille Gerlach e seus atuais companheiros e companheiras, quero agradecer-los por serem, também, minha família. Não sei uma definição exata dessa instituição social, mas sei que fazem parte da minha. Agradeço-lhes por anos de amizade, por tornarem a jornada rumo a essa monografia mais leve e mais bonita. Obrigado por manterem a chama da amizade ainda acesa, mesmo com a distância entre as cidades em que construímos nossas raízes, e minha eterna gratidão aos momentos que passamos juntos. Amigos são heróis e digo-lhes: muitas vezes salvaram minha vida.

Às minhas maiores amigas de São Carlos, do Brasil e do mundo, Izabela Verdinelli, Anna Clara dos Santos Moreira, Gabriele De Carlos Lopes Fernandes, Pedro Augusto Bussola, Pedro Henrique Marjotta Maistro, Alan Aref Adas Filho, Júlia Sanches Barbosa, Daniel Freire Toffoli, Marinna Carmine Lozilla, Vitor Machado Barbosa, Maria Eduarda da Silva Farah, Gustavo Ossamu Amano, Bianca Yuki So, Juan Cayetano Iriso Carvajal e o grupo *Matemáfia*. Gratidão pela amizade desenvolvida e mantida durante toda a graduação. Um amigo é um tesouro na vida de um ser humano e agradeço por me tornarem rico da presença de cada um de vocês. Obrigado por suportarem cada uma das minhas fases e ajudarem-me a ser uma pessoa melhor. Sem vocês, o caminho rumo ao mundo, o mesmo feito por Sérgio, não seria possível. Gostaria que cada um de vocês soubesse que têm um lugar especial no meu coração.

Aos meus pais acadêmicos, meu orientador Igor Leite Freire e sua esposa Priscila Leal da Silva. O início desse parágrafo conta com uma brincadeira dentro da comunidade universitária: os orientadores são pais e mães acadêmicos de seus orientandos. Porém, faço uma reformulação dessa brincadeira: os senhores foram muito mais que pais acadêmicos. Foram, de fato, pai e mãe quando os meus não estavam próximos, por conta da distância entre as cidades. É bastante difícil encontrar orientadores como o senhor, professor Igor, e, assim como no e-mail de confirmação da orientação disse, repito: eu quero agradecer ao senhor por aquela conversa. Não só pela abertura que o senhor me deu, e o fez sem a obrigação de fazer, mas porque mostrou que se importa comigo e com as angústias que sentia naquela semana, a qual foi bastante dura e longa, mas foi vencida. Obrigado por todos os "puxões de orelha" que o senhor me deu e por me fazer entender que algumas coisas não dependem exclusivamente de mim. Agradeço, também, por fazer com que eu tornasse vivo outra vez meu espírito acadêmico e lembrasse do

motivo pelo qual faço esse curso de graduação. Obrigado por, sem ter a dimensão naquele dia, ter revigorado o meu final de curso. Aos que marcam nossa caminhada, devemos dar nome e ciência do que fizeram, e isso eu aprendi em casa. À professora Priscila, eu sou extremamente grato por todo o carinho e cuidado maternal tido em todos os momentos comigo. A senhora não teve ideia, mas a senhora fez com que eu pudesse refletir, outra vez, a luz da esperança que em mim habita. Espero ser para meus alunos assim como os senhores foram para mim.

Estendo, também, os agradecimentos à banca, para os professores Leandro Nery de Oliveira e Wladimir Seixas, pelas excelentes colocações que enriqueceram meu trabalho e me auxiliaram em um entendimento mais abrangente acerca do assunto.

Ao meu ex-professor e, hoje, amigo, Antonio Marcos Tavares Júnior, agradeço, em primeiro lugar, por acolher aquele jovem garoto do sétimo ano, um garoto diferente dos demais, mas com vontade e sede de aprender. Obrigado por estar comigo e por vibrar minhas conquistas, em especial essa, presencialmente. Obrigado por, mesmo sem saber, ter sido peça crucial para minha própria descoberta e aceitação. Sabe, mas faço questão de reforçar: nunca foi somente um professor para mim, e sim sempre um amigo e alguém com quem pudesse contar. Obrigado por dar-me um presente que nunca vou esquecer: o discernimento de quem sou e de como sou. A tudo isso e à sua pessoa, minha eterna gratidão e admiração.

Ao meu ex-professor de matemática do colégio, Maurício Baffi, agradeço pelo incentivo irrestrito disparado a mim para que eu seguisse o curso no qual me graduo. O senhor fez diferença significativa e me fez entender o meu papel no mundo. Obrigado por me inspirar a ser como o senhor e por me mostrar a beleza da geometria. Hoje sou geômetra por conta das suas aulas.

À minha professora de estatística, Teresa Cristina Martins Dias, meu muito obrigado por ser paciente e me orientar em alguns momentos cuja decisão que deveria tomar era bastante difícil. Obrigado por ser sempre atenta às minhas angústias e alegrias durante toda a graduação.

Aos meus alunos, Luigi Barros Pereira Lopes e Luis Ushirobira De Santis e tantos outros, obrigado por ensinar-me a ser um professor melhor e um matemático mais humano. Obrigado por confiarem em mim e por reafirmarem que estou no caminho certo

e devo ter coragem para a luta, uma vez que esta já está vencida.

Ao meu avô Juvêncio Furlan de Azevedo (*in memoriam*), agradeço, onde quer que ele esteja, por plantar em mim a semente do pensar matemático e de fazer-me mais próximo dessa ciência. Obrigado por me proporcionar raciocínio lógico e por, mesmo que em planos distintos, acompanhar minha trajetória no curso. Que o senhor saiba que sinto sua falta.

Por fim, a todos aqueles que contribuíram, mesmo que indiretamente, para o tão esperado sonho da conclusão dessa etapa se tornar realidade, minha gratidão irrestrita e pura a cada um e cada uma de vocês. Que, daqui em diante, possamos continuar fazendo história em nossas vidas e matemática nas universidades.

“Onde se queimam livros, cedo ou tarde, se queimam homens.”
(Heinrich Heine, 1797 - 1856)

Resumo

Neste trabalho, estudaremos as transformações de Bäcklund e equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas, com enfoque na equação de *sine-Gordon*. Também usamos do Teorema de Permutabilidade de Bianchi para gerar novas soluções e parametrizar as superfícies vindas das soluções da equação supracitada. Algumas dessas superfícies são apresentadas ao final do texto.

Palavras-chave: Geometria Diferencial, Equações Diferenciais, Superfícies Pseudoesféricas, Transformações de Bäcklund e Teorema de Permutabilidade de Bianchi.

Abstract

In this work, we will study Bäcklund transformations and differential equations which describe pseudospherical surfaces, focusing on the sine-Gordon equation. We also use Bianchi's Permutability Theorem to generate new solutions and parameterize the surfaces derived from the solutions of the aforementioned equation. Some of these surfaces are presented at the end of the text.

Keywords: Differential Geometry, Differential Equations, Pseudospherical Surfaces, Bäcklund Transformation and Bianchi's Permutability Theorem.

Resumen

En este trabajo, estudiaremos las transformaciones de Bäcklund y las ecuaciones diferenciales que describen superficies pseudoesféricas, centrándonos en la ecuación de *sine-Gordon*. También utilizaremos el Teorema de Permutabilidad de Bianchi para generar nuevas soluciones y parametrizar las superficies derivadas de las soluciones de la ecuación mencionada. Algunas de estas superficies se presentan al final del texto.

Palabras Clave: Geometría Diferencial, Ecuaciones Diferenciales, Superficies Pseudoesféricas, Transformación de Bäcklund y Teorema de Permutabilidad de Bianchi.

Lista de ilustrações

| | |
|---|-----|
| Figura 4.1.1–Onda em canal britânico reproduzindo aquela observada por Russel. | 63 |
| Figura 5.3.1–Diagrama das transformações de Bäcklund. | 93 |
| Figura 5.3.2–Diagrama comutativo de Bianchi. | 95 |
| Figura 5.3.3–Quatro iterações do Teorema de Permutabilidade de Bianchi. | 98 |
| Figura 6.1.1–Pseudoesfera de Beltrami. | 111 |
| Figura 6.2.1–Dini; $\zeta = \frac{2\pi}{3}$ | 115 |
| Figura 6.2.2–Dini; $\zeta = \frac{\pi}{3}$ | 115 |
| Figura 6.3.1–Superfícies Pseudoesféricas geradas por soluções (6.3.8) da Equação de <i>sine-Gordon</i> | 120 |

Sumário

| | | |
|-----|---|-----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 15 |
| 2 | ÁLGEBRA MULTILINEAR | 17 |
| 2.1 | Tensores e Produto Tensorial | 17 |
| 2.2 | Formas e Produto Exterior | 23 |
| 2.3 | Formas Diferenciais | 33 |
| 2.4 | Pullback de Tensores e Formas | 39 |
| 3 | SUPERFÍCIES EM \mathbb{E}^3 | 46 |
| 3.1 | Referenciais Móveis | 46 |
| 3.2 | Classificação das Superfícies | 56 |
| 3.3 | Teorema de Bonnet | 59 |
| 4 | EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PSEUDOESFÉRICAS | 63 |
| 4.1 | Contexto Histórico e Geométrico | 63 |
| 4.2 | Noções Fundamentais | 65 |
| 4.3 | A Equação de sine-Gordon | 66 |
| 4.4 | A Equação de Korteweg de-Vries | 68 |
| 4.5 | A Equação de Korteweg de-Vries modificada | 71 |
| 4.6 | A Equação de Camassa-Holm | 73 |
| 4.7 | Uma Equação de Novikov | 76 |
| 5 | A TRANSFORMAÇÃO DE BÄCKLUND | 80 |
| 5.1 | Preliminares | 81 |
| 5.2 | A Transformação de Bäcklund da Equação de sine-Gordon | 85 |
| 5.3 | Teorema da Permutabilidade de Bianchi | 92 |
| 5.4 | Outras Transformação de Bäcklund da sine-Gordon | 98 |
| 6 | EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES PSEUDOESFÉRICAS | 106 |
| 6.1 | A Pseudoesfera de Beltrami | 107 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 6.2 | A Superfície de Dini | 112 |
| 6.3 | Superfícies Pseudoesféricas e o Teorema de Bianchi | 114 |
| 7 | CONCLUSÃO | 121 |
| | REFERÊNCIAS | 124 |
| | Índice | 126 |

1 Introdução

Durante a minha graduação, fui um aluno bastante interessado na geometria como um todo, sentimento advindo desde os tempos do ensino básico. Na escolha do tema do trabalho de conclusão de curso, quando fui à procura do orientador, este me ofereceu alguns temas, os quais me deixaram bastante animado. Alguns porquê da escolha desse tema são a atualidade do assunto, a possibilidade de aprofundamento em uma pesquisa de pós-graduação e o alto teor geométrico e abstrato que o permeia.

A monografia em questão tem como principal objetivo estudar a transformação de Bäcklund e equações que descrevem superfícies pseudoesféricas. Neste capítulo introdutório, faremos uma abordagem inicial e sucinta de cada um dos capítulos presentes neste trabalho.

No Capítulo 2, definiremos tensores e o espaço vetorial destes objetos, perpassando pelos k -tensores e formas. Ademais, explicitaremos o que são formas diferenciais em \mathbb{R}^n , nos restringindo, posteriormente, a $n = 3$ e, por fim, finalizando o segundo capítulo com a seção de pullback de tensores e formas diferenciais.

Para o Capítulo 3, revisitaremos alguns objetos geométricos vistos na geometria diferencial, tais como formas fundamentais de uma superfície e curvaturas média e Gaussiana com um tratamento de formas diferenciais. Ademais, faremos a classificação dos pontos de uma superfícies de acordo com as curvaturas Gaussiana e média. A última seção é dedicada ao estudo das hipóteses e enunciação do Teorema de Bonnet, o qual dará suporte para os próximos capítulos.

O Capítulo 4 trataremos do estudo de equações diferenciais que descrevem superfícies pseudoesféricas, cuja definição deste tipo de superfície foi feita no capítulo anterior. Neste capítulo, abordaremos o contexto histórico e geométrico destas equações, juntamente com as definições de equação pseudoesférica e solução genérica com alguns exemplos de equações que possuem essa característica.

Para o Capítulo 5, este conterà toda a parte de transformações de Bäcklund e Teorema de Permutabilidade de Bianchi, aplicados à equação de *sine-Gordon* a fim

de encontrarmos sua transformação de Bäcklund e autotransformação de Bäcklund e encontrar soluções via tal método e demais soluções pelo teorema supracitado.

O Capítulo 6 é destinado à construção das superfícies de parametrizações provenientes das soluções das equações de *sine-Gordon*, utilizando a transformação de Bäcklund e o Teorema de Permutabilidade de Bianchi. Serão trazidas algumas superfícies com tal característica além de calcularmos a primeira forma fundamental destas superfícies.

Finalmente, o Capítulo 7 conclui todo o trabalho realizado durante o texto da presente monografia e, desta forma, se encerrará este trabalho de conclusão de curso.

2 Álgebra Multilinear

Neste capítulo serão introduzidos os conceitos de tensores e formas, bem como suas propriedades algébricas. Nas duas primeiras seções, trataremos desses tópicos de uma forma geral, porém contemplando todos os pormenores necessários para o seu entendimento. Nas duas últimas seções serão apresentados os conceitos de formas diferenciais e pullback de um tensor e uma forma, explorando suas propriedades, os quais terão grande importância para o desenvolvimento dos capítulos que se seguem.

As referências básicas utilizadas no desenvolvimento deste capítulo foram [McInerney \(2013\)](#), [Spivak \(1971\)](#) e [Freire \(2025a\)](#).

2.1 Tensores e Produto Tensorial

Neste trabalho todos os espaços vetoriais serão considerados sobre \mathbb{R} e de dimensão finita $n \in \mathbb{N}$. Relembremos que se V é um espaço vetorial, uma transformação linear $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada funcional linear. O conjunto de todos os funcionais lineares $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ será denotado por V^* , chamado espaço dual de V . Tal conjunto é um espaço vetorial com as operações

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \text{e} \quad (\lambda f)(v) = \lambda f(v),$$

para quaisquer $f, g \in V^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{B} = \{e_i \in V ; 1 \leq i \leq n\}$ base de V , sua base dual, $\mathcal{B}^* = \{\varepsilon_j \in V^* ; 1 \leq j \leq n\}$ é dada pelos funcionais satisfazendo

$$\varepsilon_j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Além disso, no decorrer do texto será utilizada a convenção da *soma de Einstein*, ou seja, índices iguais superior e inferior são somados de 1 a n . Dessa forma, para um

funcional qualquer $f \in V^*$ e um vetor arbitrário $v \in V$, temos que

$$f = \sum_{j=1}^n f^j \varepsilon_j =: f^j \varepsilon_j \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^n v^i e_i =: v^i e_i,$$

se escreve na soma de Einstein como

$$f(v) = f^j \varepsilon_j(v^i e_i) = f^j v^i \delta_{ji} = f^j \delta_{ji} v^i = \sum_{i=1}^n f^i v^i.$$

Vale ressaltar que a convenção só se aplica quando o índice está repetido exatamente duas vezes, uma vez em posição inferior e uma vez em posição superior. Índices que aparecem mais de duas vezes ou que se repetem na mesma posição não obedecem automaticamente à convenção e requerem notação explícita.

Definição 2.1.1 (Tensor). *Um tensor do tipo (r, s) em V é uma função multilinear, isto é, linear em cada entrada, dada por*

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ - vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ - vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos os tensores do tipo (r, s) é representado por $T^{(r, s)}(V)$.

Um tensor do tipo (r, s) pode, também, ser definido como um tensor s -contravariante e r -covariante. Mais explicitamente, o produto entre as r cópias do espaço dual de V , ou seja, V^* , é chamada de parte *covariante* do tensor e o produto entre as s cópias do espaço vetorial V é denominada parte *contravariante* do tensor.

Abaixo, são dados alguns exemplos de tensores.

Exemplo 2.1.1 (Tensores do tipo $(0, 1)$). *Todo tensor do tipo $(0, 1)$ é um funcional linear. De fato, tomando a Definição 2.1.1, tem-se que se $\alpha \in T^{(0, 1)}(V)$ é uma função $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}$, que é linear. Assim, pela definição dada de funcional linear, segue que $\alpha \in V^*$. Portanto, $T^{(0, 1)}(V) = V^*$.*

Exemplo 2.1.2 (Tensores do tipo $(1, 0)$). *Um tensor do tipo $(1, 0)$ é a função linear dada por $a : V^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Note que $a \in (V^*)^*$. Como V tem dimensão finita, tomemos a aplicação*

$$\begin{array}{rcl}
 I & : & V \longrightarrow (V^*)^* \\
 v & \longmapsto & I(v) \quad : \quad V^* \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & & \alpha \longmapsto I(v)(\alpha) = \alpha(v).
 \end{array}$$

Daí, tem-se que $(V^*)^* \simeq V$. Não é difícil ver que $I(v)$ é linear. De fato, dados dois funcionais lineares $\alpha, \beta \in V^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se que

$$I(v)(\alpha + \lambda\beta) = (\alpha + \lambda\beta)(v) = \alpha(v) + \lambda\beta(v) = I(v)(\alpha) + \lambda I(v)(\beta).$$

Provaremos a linearidade de I . Tomando os vetores $u, v \in V$ e o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, precisamos mostrar que

$$I(u + \lambda v) = I(u) + \lambda I(v).$$

Basta, então, considerarmos $\alpha \in V^*$ arbitrário e, daí,

$$I(u + \lambda v)(\alpha) = \alpha(u + \lambda v) = \alpha(u) + \lambda\alpha(v) = I(u)(\alpha) + \lambda I(v)(\alpha),$$

o que implica que $I(u + \lambda v) = I(u) + \lambda I(v)$.

Agora, vamos mostrar que I é injetora. Suponha que tenhamos $I(v) = 0$. Assim, para um funcional linear qualquer $\alpha \in V^*$, segue que

$$0 = I(v)(\alpha) = \alpha(v) = \alpha^j \varepsilon_j(v^j e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha^j v^j.$$

Como os espaços vetoriais são definidos sobre \mathbb{R} e existe um funcional tal que $\alpha(v) \neq 0$, pela arbitrariedade de $\alpha \in V^*$, definimos $\alpha^j = v^j$, para todo $1 \leq j \leq n$. Daí, tem-se que a equação acima é dada por

$$\sum_{j=1}^n (\alpha^j)^2 = 0 \iff \alpha^j = 0 = v^j.$$

Portanto, I é injetora.

Além disso, como $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V) = n$ e se I é injetora, então I é um isomorfismo. Dessa forma, $T^{(1,0)}(V) \simeq V$.

Neste momento, podemos enunciar um resultado que diz respeito ao conjunto de tensores do tipo (r, s) ser um espaço vetorial.

Proposição 2.1.1. *O conjunto $T^{(r,s)}(V)$, munido com as operações*

$$(T + \lambda S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) = T(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) \\ + \lambda S(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s)$$

é um espaço vetorial.

Demonstração. Provaremos que o conjunto satisfaz as condições de um espaço vetorial.

1. O tensor nulo é elemento de $T^{(r,s)}(V)$. De fato, basta definir o tensor nulo como sendo

$$\mathcal{O}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) = 0,$$

para quaisquer $\alpha_i \in V^*$, com $1 \leq i \leq r$, e $v_j \in V$, com $1 \leq j \leq s$.

2. O conjunto $T^{(r,s)}(V)$ é fechado na operação de soma. Com efeito, tomemos a $r + s$ -upla da forma $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s)$ tal que $\alpha_i \in V^*$, com $1 \leq i \leq r$, e $v_j \in V$, com $1 \leq j \leq s$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer. Daí, dados dois tensores $T, S \in T^{(r,s)}(V)$, segue-se que

$$(T + \lambda S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) \\ = T(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) + (\lambda S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) \\ = T(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) + \lambda S(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s).$$

3. A aplicação $T + \lambda S$ é multilinear. Sejam $T, S \in T^{(r,s)}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer. Tomando a $r + s$ -upla da forma dada por $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_i + \mu v_j, \dots, v_s)$ tal que $\alpha_i \in V^*$, com $1 \leq i \leq r$, e $v_j \in V$, com $1 \leq j \leq s$ e $\mu \in \mathbb{R}$ qualquer. Daí,

$$(T + \lambda S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_i + \mu v_j, \dots, v_s) \\ = T(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_i, \dots, v_s) + \mu T(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_j, \dots, v_s) \\ + \lambda S(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_i, \dots, v_s) + \lambda \mu S(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_j, \dots, v_s) \\ = (T + \lambda S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_i, \dots, v_s) \\ + \mu (T + \lambda S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_j, \dots, v_s)$$

A multilinearidade na parte dual será omitida pois a demonstração desta é análoga a feita acima. Assim, provamos que $T + \lambda S \in T^{(r,s)}(V)$.

Portanto, está provado que o conjunto $T^{(r,s)}(V)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . \square

Definamos, então, uma operação entre tensores que dará ao conjunto condições para que seja determinada a sua base canônica.

Definição 2.1.2 (Produto Tensorial). *Sejam os tensores $T \in T^{(r,s)}(V)$ e $S \in T^{(k,l)}(V)$ no espaço vetorial V . O produto tensorial $T \otimes S$ é definido como sendo um tensor em $T^{(r+k,s+l)}(V)$ dado por*

$$\begin{aligned} (T \otimes S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_k, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_l) \\ = T(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s)S(\beta_1, \dots, \beta_k, u_1, \dots, u_l). \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V e $\mathcal{B}^* = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ a correspondente base dual de V^* . Consideremos o tensor

$$\mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{R} \in T^{(r,s)}(V),$$

dado por

$$\mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, v_1, \dots, v_s) = \alpha_1(e_{i_1}) \dots \alpha_r(e_{i_r}) \varepsilon_{j_1}(v_1) \dots \varepsilon_{j_s}(v_s). \quad (2.1.1)$$

Usaremos a notação de produto tensorial, na qual o tensor dado acima é expresso por

$$\mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon_{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{j_s}.$$

O fato de cada uma dessas funções $\mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ serem lineares decorre da linearidade de cada funcional linear na equação (2.1.1). Dado o exposto, podemos, então, enunciar e demonstrar o teorema abaixo.

Teorema 2.1.1. *O conjunto de todos os tensores da forma $\mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$, definidos em (2.1.1), em que $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$, é uma base para o espaço vetorial $T^{(r,s)}(V)$.*

Demonstração. Provaremos que este conjunto é um conjunto linearmente independente e um gerador para o conjunto dos tensores do tipo (r, s) . Para mostrar que o conjunto dos tensores $\mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ é um gerador do conjunto $T^{(r,s)}(V)$, tomemos um tensor arbitrário $T \in T^{(r,s)}(V)$ e definimos os escalares da forma

$$t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}).$$

Queremos provar que

$$T \in \text{Span} \left(\left\{ \mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} ; 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n \right\} \right).$$

Daí, apliquemos $T \in T^{(r,s)}(V)$ na $(r+s)$ -upla dada por $(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$. Assim, para $\delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_k}^{j_k}$,

$$\begin{aligned} & T(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s}) \\ &= \left(\sum_{i_1 \dots i_r} \sum_{j_1 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{j_s} \right) (\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s}) \\ &= \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_{j_1 \dots j_s} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}(e_{i_1}) \dots \boldsymbol{\varepsilon}_{j_r}(e_{i_r}) \boldsymbol{\varepsilon}^{j_1}(e_{i_1}) \dots \boldsymbol{\varepsilon}^{j_s}(e_{i_s}) = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned}$$

Portanto, provamos que o conjunto dos tensores $\mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ é um gerador do conjunto $T^{(r,s)}(V)$.

Para provar a independência linear, temos que verificar que a equação

$$t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = 0$$

possui somente a solução trivial. De fato, aplicando este tensor numa $(r+s)$ -upla $(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \right) (\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s}) \\ &= \left(\sum_{i_1 \dots i_r} \sum_{j_1 \dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_{j_s} \right) (\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{j_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s}) \\ &= \sum_{i_1 \dots i_r} \sum_{j_1 \dots j_s} t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}(e_{i_1}) \dots \boldsymbol{\varepsilon}_{j_r}(e_{i_r}) \boldsymbol{\varepsilon}_{j_1}(e_{i_1}) \dots \boldsymbol{\varepsilon}_{j_s}(e_{i_s}) = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}. \end{aligned}$$

Portanto, provamos que cada um dos escalares deve ser nulo e, com isso, este conjunto é linearmente independente. Sendo assim, o conjunto de todos os tensores da forma $\mathcal{E}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ é base para $T^{(r,s)}(V)$. \square

Conhecida uma base do espaço $T^{(r,s)}(V)$, somos capazes de encontrar a sua dimensão. Com efeito, afirma-se que $\dim(T^{(r,s)}(V)) = n^{r+s}$. De fato, basta ver que utilizamos r funcionais lineares da base dual de V e s vetores da base de V .

Abaixo, seguem alguns exemplos do produto tensorial que serão úteis no desenvolver do texto.

Exemplo 2.1.3. *Seja o tensor $T \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^n)$ dado por*

$$T = \sum_{k=1}^n \pi^k \otimes \pi^k,$$

com $\pi^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção da k -ésima coordenada do vetor $v \in \mathbb{R}^n$. Assim, consideremos dois vetores $u = u^i e_i, v = v^j e_j \in \mathbb{R}^n$ e façamos

$$\begin{aligned} T(u, v) &= \left(\sum_{k=1}^n \pi^k \otimes \pi^k \right) (u, v) = \sum_{k=1}^n (\pi^k \otimes \pi^k) (u, v) = \sum_{k=1}^n \pi^k(u) \pi^k(v) \\ &= \sum_{k=1}^n u^i v^j \pi^k(e_i) \pi^k(e_j) = \sum_{k=1}^n u^i v^j \delta_i^k \delta_j^k = \sum_{i=1}^n u^i v^i. \end{aligned}$$

Note que este tensor é equivalente ao produto interno canônico de \mathbb{R}^n .

Exemplo 2.1.4. *Considere o tensor $\Omega \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^2)$ dado por*

$$\Omega = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha,$$

com $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}^2)^*$ dois funcionais lineares. Dados os vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, calculemos

$$\begin{aligned} \Omega(v_1, v_2) &= (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)(v_1, v_2) = (\alpha \otimes \beta)(v_1, v_2) - (\beta \otimes \alpha)(v_1, v_2) \\ &= \alpha(v_1) \beta(v_2) - \beta(v_1) \alpha(v_2) = \det \left(\begin{bmatrix} \alpha(v_1) & \alpha(v_2) \\ \beta(v_1) & \beta(v_2) \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Do Exemplo 2.1.4 é claro ver que o produto tensorial não é comutativo. Caso fosse, teríamos que $\Omega = 0$, o que não é sempre verdade.

2.2 Formas e Produto Exterior

Nesta seção, exploraremos o conceito de formas e prepararemos o cenário para, na seção seguinte, trabalharmos com formas diferenciais.

Definição 2.2.1 (*k*-Tensores). *Seja V um espaço vetorial. Um k -tensor em V é um tensor $\omega \in T^{(0,k)}(V)$, ou seja, uma função*

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ - vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que ω é multilinear. O número $k \in \mathbb{N}$ é dito o grau do tensor ω em questão. Ademais, o conjunto dos k -tensores em V será denotado por $\tau^k(V)$.

Dada a Definição 2.2.1 podemos voltar ao Exemplo 2.1.1 e afirmar que todo funcional linear é um 1-tensor. Ademais, dizemos que um 0-tensor é um escalar. Além disso, essa mesma definição implica que o conjunto $\tau^k(V)$ é um espaço vetorial como foi mostrado anteriormente na Proposição 2.1.1, cuja base é análoga à base do espaço dos tensores em $T^{(r,s)}(V)$.

Neste trabalho, estamos interessados em estudar uma classe de k -tensores específica. Para tal, daremos a definição de um k -tensor alternado.

Definição 2.2.2 (*k*-Tensor Alternado). *Um k -tensor $\omega \in \tau^k(V)$ é dito alternado quando*

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k),$$

para qualquer k -upla de vetores em V . O conjunto de todos os k -tensores alternados é denotado por $\Lambda^k(V)$.

Considere um k -tensor alternado $\omega \in \Lambda^k(V)$. Suponha $v_1, \dots, v_k \in V$ tais que, para certos $i \neq j$, tenhamos $v_i = v_j$. Então,

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Como ambos são iguais, pois a k -upla permaneceu inalterada, por hipótese, tem-se que

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0.$$

Notemos que, se $\omega \in \Lambda^k(V)$, com $k \geq 2$, e o conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente dependente, então $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$. De fato, para certo $j \in \{1, \dots, k\}$, temos que existem escalares $\lambda^i \in \mathbb{R}$ tais que

$$v_j = \sum_{i \neq j} \lambda^i v_i.$$

Substituindo o vetor v_j como acima em ω e pela linearidade de ω , segue que

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i \neq j} \lambda^i \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Como cada uma das componentes da soma é nula, esta soma é nula.

Podemos generalizar as mudanças feitas entre v_i e v_j para qualquer subconjunto com k vetores.

Uma permutação em um conjunto $G = \{1, \dots, k\}$ ordenado é uma bijeção

$$\sigma : G \longrightarrow G,$$

de tal modo que o conjunto G seja reordenado da maneira $G = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\}$. O conjunto de todas as permutações de um conjunto finito com n elementos é denotado por S_n . Ademais, chamamos de transposição a permutação que altera somente dois elementos e mantém os outros elementos de G inalterados.

É conhecido da álgebra de grupos finitamente gerados que uma permutação pode ser escrita como composição de um número ímpar ou par de transposições. Se este número for par, diremos que σ é par, se este número for ímpar, diremos que σ é ímpar. Por esse motivo, podemos definir o sinal da permutação dado pela função

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é par;} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Exemplo 2.2.1. Consideremos as permutações de S_3 dadas por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Note que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

ou seja, esta é uma permutação par.

Definição 2.2.3 (Alternador). Seja $T \in \tau^k(V)$ um k -tensor. Define-se o alternador de T por

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Abaixo, um exemplo para que a definição do alternador de um k -tensor seja melhor compreendida.

Exemplo 2.2.2. Dado o conjunto S_3 como visto no exemplo 2.2.1, pomos $k = 3$. Notemos que as permutações

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

são permutações ímpares e, por conseguinte, as demais são pares. Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Alt}(T)(v_1, v_2, v_3) &= \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) \\ &= \frac{1}{6} [T(v_1, v_2, v_3) + T(v_2, v_3, v_1) + T(v_3, v_1, v_2)] \\ &\quad - \frac{1}{6} [T(v_1, v_3, v_2) + T(v_2, v_1, v_3) + T(v_3, v_2, v_1)]. \end{aligned}$$

Exploraremos, então, algumas propriedades do alternador de um k -tensor. Para tal, demonstramos os resultados abaixo.

Proposição 2.2.1. Sejam $T \in \tau^k(V)$ e $\omega \in \Lambda^k(V)$. Então,

1. O alternador de $T \in \tau^k(V)$ é um elemento de $\tau^k(V)$;
2. Um k -tensor $\omega \in \Lambda^k(V)$ é invariante pelo alternador;
3. $\text{Alt} \circ \text{Alt} = \text{Alt}$, isto é, $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$, ou seja, o alternador é um operador idempotente.

Demonstração. Provaremos cada item em separado.

1. Seja σ_{ij} a permutação que troca os elementos $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ e $\sigma \in S_k$. Denote a por σ' a composição $\sigma' = \sigma \circ \sigma_{ij}$. Então, para $v = (v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$, temos

$$\begin{aligned} \text{Alt}(T)(v) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} \text{sgn}(\sigma') T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(k)}). \end{aligned}$$

Os sinais de σ e σ' se relacionam por $\text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma_{ij}) = -\text{sgn}(\sigma)$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{Alt}(T)(v) &= -\frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} \text{sgn}(\sigma') T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \\ &= -\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k). \end{aligned}$$

2. Se $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\sigma \in S_k$ permuta apenas dois índices, então a k -forma alternada pode ser reescrita como $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k)$. Como toda permutação é uma composição de transposições e, portanto,

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k) \\ &= \omega(v_1, \dots, v_k) \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} 1 \\ &= \omega(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

3. Como $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$, para qualquer $T \in \tau^k(V)$, e todo k -tensor alternado é invariante pelo alternador, então segue que $\text{Alt}(\text{Alt}(T)) = \text{Alt}(T)$, ou seja, o alternador é idempotente.

Sendo assim, a proposição está demonstrada. \square

A partir deste instante, mudaremos a nomenclatura dos elementos do conjunto $\Lambda^k(V)$. Assim, um k -tensor $\omega \in \Lambda^k(V)$ será chamado de k -forma em V .

Definição 2.2.4 (Produto Exterior). *Sejam $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\eta \in \Lambda^l(V)$ quaisquer. Define-se o produto exterior entre estas formas para ser a $(k+l)$ -forma e é dada por*

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k! l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Vejamos como se aplica a definição 2.2.4 em duas 1-formas alternadas.

Exemplo 2.2.3. Sejam $\alpha, \beta \in \Lambda^1(V)$. Calculemos o produto exterior entre as duas formas. Com efeito, consideremos $v_1, v_2 \in V$ quaisquer e, então,

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) &= 2 \text{Alt}(\alpha \otimes \beta)(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) (\alpha \otimes \beta)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}) = \alpha(v_1) \beta(v_2) - \alpha(v_2) \beta(v_1) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} \alpha(v_1) & \alpha(v_2) \\ \beta(v_1) & \beta(v_2) \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Observamos que os exemplos 2.1.4 e 2.2.3 são equivalentes. Portanto, é natural ver que, para duas 1-formas $\alpha, \beta \in \Lambda^1(V)$, temos a identidade

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha. \quad (2.2.1)$$

Teorema 2.2.1. São verdadeiras as seguintes afirmações:

1. Se $S \in \tau^k(V)$, $T \in \tau^l(V)$ e $\text{Alt}(S) = 0$, então

$$\text{Alt}(S \otimes T) = 0 = \text{Alt}(T \otimes S);$$

2. Sejam $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ e $\theta \in \Lambda^m(V)$. Então tem-se que

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

e

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k! l! m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Demonstração. Provaremos cada item em separado.

1. Para ver que esta igualdade é satisfeita, tomemos uma $(k+l)$ -upla de vetores em V dada por $v = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$ e defina a $(k+l)$ -upla das permutações de ordem dos vetores de v sob a permutação σ da forma

$$v_\sigma = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}, v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Então.

$$\begin{aligned} (k+l)! \text{Alt}(S \otimes T)(v) &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) (S \otimes T)(v_\sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}). \end{aligned}$$

Seja $G \subset S_{k+l}$ um subconjunto de permutações tais que $\sigma \in S_{k+l}$ deixa os elementos de índices $j \in \{k+1, \dots, k+l\}$ fixados. Então,

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \left[\sum_{\sigma' \in G} \text{sgn}(\sigma') S(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \right] T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Suponha, agora, que $\sigma_0 \notin G$ e definamos o conjunto $G\sigma_0 = \{\sigma\sigma_0; \sigma \in G\}$. Ademais, denotemos $v_{\sigma_0(j)} = w_j$, para todo $j \in \{1, \dots, k+l\}$. Assim,

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in G\sigma_0} \text{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \left[\text{sgn}(\sigma_0) \sum_{\sigma' \in G} \text{sgn}(\sigma') S(w_{\sigma'(1)}, \dots, w_{\sigma'(k)}) \right] T(w_{k+1}, \dots, w_{k+l}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notemos que $G \cap G\sigma_0 = \emptyset$. De fato, suponha que $\sigma \in G \cap G\sigma_0$. Daí, $\sigma = \sigma'\sigma_0$, para algum $\sigma' \in G$. Com efeito, $\sigma(\sigma')^{-1} = \sigma_0 \notin G$, encontrando uma contradição. A igualdade $\text{Alt}(T \otimes S) = 0$ é provada de forma análoga.

2. Pela Proposição 2.2.1 tem-se $\text{Alt}(\text{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) = 0$. Do resultado já provado no item anterior,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) \\ &= \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta)) - \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta). \end{aligned}$$

A outra igualdade é provada analogamente. Ademais, tem-se que

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{k! l! m!} \text{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) \\ &= \frac{(k+l+m)! (k+l)!}{(k+l)! m! k! l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k! l! m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta). \end{aligned}$$

Provado o teorema em questão. \square

Agora, com as propriedades demonstradas acima, consideremos o conjunto dos k -tensores alternados, ou seja, as k -formas, dado por $\Lambda^k(V)$.

Concluimos que o conjunto $\Lambda^k(V)$ é um subespaço vetorial de $\tau^k(V)$ que, por sua vez, é um subespaço de $T^{(r,s)}(V)$. De fato, basta ver que $\Lambda^k(V)$ é não vazio e, para $\omega, \eta \in \Lambda^k(V)$, temos que $\omega + s\eta \in \Lambda^k(V)$, para $s \in \mathbb{R}$ um escalar qualquer.

Provaremos que o k -tensor nulo é alternado. Com efeito, definamos

$$\mathcal{O}(v_1, \dots, v_k) = 0$$

para toda k -upla de vetores em V . Dessa forma,

$$\mathcal{O}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = 0 = -\mathcal{O}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Portanto, k -tensor nulo é alternado e, assim, $\mathcal{O} \in \Lambda^k(V)$. Agora, para $\omega, \eta \in \Lambda^k(V)$ e $s \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} (\omega + s\eta)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) &= \omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &\quad + s\eta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) \\ &= -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\ &\quad - s\eta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\ &= -(\omega + s\eta)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Com isso, provamos que o conjunto $\Lambda^k(V)$ é fechado na soma e no produto por escalar. Portanto, este conjunto é um subespaço do espaço vetorial dos k -tensores, ou seja, $\tau^k(V)$. Dessa forma, somos capazes de encontrar uma base para o conjunto $\Lambda^k(V)$.

Consideremos a base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ do espaço vetorial V e denotemos a base do espaço dual a V , dado por V^* , por $\mathcal{B}^* = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. Com este conhecimento em mãos, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.2. *Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ a base de V e $\mathcal{B}^* = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ a base dual correspondente para V^* . O conjunto de todos os produtos*

$$\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k}, \quad \text{com } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

é uma base para o $\Lambda^k(V)$. Em particular, tem-se que

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demonstração. Para ver que este conjunto de todos os produtos é, de fato, uma base para $\Lambda^k(V)$, provemos que este é um gerador para o conjunto das k -formas. Como $\Lambda^k(V) \subset \tau^k(V) = T^{(0,k)}(V)$, se $\omega \in \Lambda^k(V)$, então

$$\omega = a^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_k}.$$

Portanto, pela Proposição 2.2.1 e pelo Teorema 2.2.1, segue que

$$\omega = \text{Alt}(\omega) = a^{i_1 \dots i_k} \text{Alt}(\varepsilon_{i_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{i_k}) = \frac{a^{i_1 \dots i_k}}{k!} \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k}.$$

Portanto, está provado que o conjunto é gerador do espaço $\Lambda^k(V)$. Para a independência linear, suponha que

$$a^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k} = 0.$$

Queremos provar que $a^{i_1 \dots i_k} = 0$ para todo $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. De fato, apliquemos esta k -forma em uma k -upla de vetores da base \mathcal{B} de V dada por $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$. Assim, para $\delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_k}^{j_k}$,

$$\begin{aligned} 0 &= (a^{i_1 \dots i_k} \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = a^{i_1 \dots i_k} (\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\ &= a^{i_1 \dots i_k} \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = a^{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

Dessa forma, prova-se a independência linear do conjunto dos produtos exteriores e, portanto, este é base de $\Lambda^k(V)$. Para a dimensão deste espaço, basta ver que foram tomados k vetores dos n possíveis e, dessa forma, segue que $\dim(\Lambda^k(V)) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. \square

Observemos que, como V tem dimensão finita, a saber, $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$, do Teorema 2.2.2 concluímos que $\dim(\Lambda^n(V)) = 1$. Dessa forma, todas as n -formas alternadas são múltiplas de uma n -forma alternada não nula. Uma vez que o determinante é uma n -forma alternada não nula, é natural pensar que ele cumpre o papel de base para $\Lambda^n(V)$. Dado isso, temos o teorema abaixo que nos mostra a discussão recém-feita.

Teorema 2.2.3. *Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e $\omega \in \Lambda^n(V)$. Então, para $u_i = a_i^j v_j$, tem-se que*

$$\omega(u_1, \dots, u_n) = \det(A) \omega(v_1, \dots, v_n),$$

com A sendo a matriz dada por

$$A = [a_i^j]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Primeiro, note que se $\eta \in \Lambda^n(V)$, uma vez que o determinante é uma n -forma alternada, temos $\eta = k \det$, para certo $k \in \mathbb{R}$. Seja $\omega \in \Lambda^n(V)$ e $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$ e defina

$$\eta(a_1, \dots, a_n) = \omega(u_1, \dots, u_n).$$

Por um lado, temos que

$$\eta(e_1, \dots, e_n) = \omega(v_1, \dots, v_n)$$

e, por outro lado,

$$\eta(e_1, \dots, e_n) = k \det(e_1, \dots, e_n) = k \det(Id) = k,$$

o que implica que

$$k = \eta(e_1, \dots, e_n) = \omega(v_1, \dots, v_n).$$

Além disso, como $\eta(a_1, \dots, a_n) = k \det(A)$, segue que

$$\omega(u_1, \dots, u_n) = \eta(a_1, \dots, a_n) = k \det(A) = \det(A) \omega(v_1, \dots, v_n).$$

□

Como o determinante é uma forma alternada, segue que este cumpre todos os requisitos provados acima.

2.3 Formas Diferenciais

Para todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$, associamos um espaço vetorial de dimensão $n \in \mathbb{N}$, o qual chamaremos de *espaço tangente a $p \in \mathbb{R}^n$* , denotado por $T_p\mathbb{R}^n$. Vetores tangentes $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ podem ser considerados funcionais lineares atribuindo a cada função diferenciável $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $p \in D(f)$ sendo dado por

$$v_p[f] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}.$$

A base canônica de $T_p\mathbb{R}^n$ é dada pelo conjunto

$$\mathcal{B} = \{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$$

e, nesse sentido, um campo de vetores \mathcal{V} em \mathbb{R}^n pode ser escrito como

$$\mathcal{V} = v^j \partial_j, \quad \text{com } j \in \{1, \dots, n\}$$

e cada $v^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O conjunto dos campos de vetores em \mathbb{R}^n diferenciáveis até a k -ésima ordem é denotado por $\mathcal{X}^k(\mathbb{R}^n)$. Além disso, quando o campo de vetores em \mathbb{R}^n for suave, este será diferenciável infinitas vezes e o conjunto dos campos infinitamente diferenciáveis em \mathbb{R}^n é denotado por $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3.1 (Formas Diferenciais). *Uma k -forma $\omega \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$ é dita uma k -forma diferencial.*

Sendo $\mathcal{B}' = \{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de \mathbb{R}^n e $\mathcal{B} = \{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ a base canônica de $T_p\mathbb{R}^n$, tem-se que a base dual associada a \mathcal{B} é $\mathcal{B}^* = \{\psi^1|_p, \dots, \psi^n|_p\}$.

Dessa forma, se $\omega \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\omega_p = \omega_{i_1 \dots i_k}(p) \psi^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge \psi^{i_k}|_p.$$

Note que $\omega_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função. À essas funções, damos o nome de funções componentes.

Ademais, uma k -forma $\omega \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$ é dita ser de classe \mathcal{C}^k em $p \in \mathbb{R}^n$ quando $\omega_{i_1 \dots i_k}$ for uma função de classe \mathcal{C}^k para todo índice. Por definição, uma 0-forma é dada por uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que $f \in \mathcal{C}^1$ e, então, $f'(p)(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle$. Daí, tem-se que $f'(p) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$.

Definição 2.3.2 (Diferencial de $f \in \mathcal{C}^1$). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 . A 1-forma df é definida por*

$$df(p)(v_p) = f'(p)(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle.$$

Dessa maneira, tem-se que $df(p) \in \Lambda^1(T_p\mathbb{R}^n) = (T_p\mathbb{R}^n)^$, o qual é chamado de espaço cotangente de \mathbb{R}^n em $p \in \mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.3.1. *Seja $\pi^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção da k -ésima coordenada de um ponto $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, ou seja,*

$$\begin{aligned} \pi^k &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \pi^k(x) = x^k. \end{aligned}$$

Então, tem-se que

$$d\pi^k(p)(v_p) = (\pi^k)'(p)(v) = \pi^k(v) = v^k.$$

Observação 2.3.1. *Como $\pi^k(x) = x^k$, escrevemos $dx^k|_p$ ao invés de $d\pi^k|_p$. Isso significa que*

$$dx^k|_p(v_p) = v^k.$$

Como a base dual de $\mathcal{B}' = \{e_1, \dots, e_n\}$ é $(\mathcal{B}')^* = \{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ e, também, $(\pi_k)'|_p = \pi_k|_p$, a base dual de $\mathcal{B} = \{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ é $\mathcal{B}^* = \{\pi^1|_p, \dots, \pi^n|_p\}$. Por outro lado, $\pi^k|_p(v_p) = dx^k|_p(v_p)$. Portanto, a base dual a \mathcal{B} é dada pelo conjunto de funcionais lineares $\mathcal{B}^* = \{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$. Logo, se $\omega \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$, então

$$\omega_p = \omega_{i_1 \dots i_k}(p) dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p.$$

Exemplo 2.3.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 . É sabido que*

$$df_p(v_p) = f'(p)(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle = v^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p).$$

Porém, como $v^j = dx^j|_p(v_p)$, tem-se que

$$df_p(v_p) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) dx^j|_p(v_p).$$

Como $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ é arbitrário e $p \in \mathbb{R}^n$ também o é, segue que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j.$$

Como as k -formas são um espaço vetorial munido da adição e multiplicação por escalar usual de funções, segue que $(\omega + \lambda \eta)(p) = \omega(p) + \lambda \eta(p)$. Sendo assim, definimos a operação de produto exterior entre duas formas em um mesmo ponto como sendo $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$.

Agora, façamos um exemplo de formas diferenciais e produto exterior para que estas definições sejam melhor entendidas.

Exemplo 2.3.3. Consideremos $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\chi(\rho, \theta, \varphi) = (\chi_1(\rho, \theta, \varphi), \chi_2(\rho, \theta, \varphi), \chi_3(\rho, \theta, \varphi)),$$

de componentes $\chi_1(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi)$, $\chi_2(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi)$ e $\chi_3(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos(\varphi)$. Vamos calcular $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Começemos da seguinte maneira:

1. Para a 1-forma dx :

$$\begin{aligned} dx(\chi(\rho, \theta, \varphi)) &= d(\chi_1(\rho, \theta, \varphi)) = d(\rho \cos(\theta) \sin(\varphi)) \\ &= \cos(\theta) \sin(\varphi) d\rho - \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) d\theta \\ &\quad + \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) d\varphi; \end{aligned}$$

2. Para a 1-forma dy :

$$\begin{aligned} dy(\chi(\rho, \theta, \varphi)) &= d(\chi_2(\rho, \theta, \varphi)) = d(\rho \sin(\theta) \sin(\varphi)) \\ &= \sin(\theta) \sin(\varphi) d\rho + \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta \\ &\quad + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi; \end{aligned}$$

3. Para a 1-forma dz :

$$\begin{aligned} dz(\chi(\rho, \theta, \varphi)) &= d(\chi_3(\rho, \theta, \varphi)) = d(\rho \cos(\varphi)) \\ &= \cos(\varphi) d\rho - \rho \sin(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Agora, calcularemos o produto exterior entre duas dessas formas e, uma vez que este produto é associativo, basta fazer o produto exterior da 2-forma com a outra 1-forma

restante. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy &= [\cos(\theta) \sin(\varphi) d\rho - \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) d\theta + \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) d\varphi] \\
&\wedge [\sin(\theta) \sin(\varphi) d\rho + \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi] \\
&= [\rho \cos(\theta)^2 \sin(\varphi)^2 + \rho \sin(\theta)^2 \sin(\varphi)^2] d\rho \wedge d\theta \\
&+ [\rho \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) - \rho \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi)] d\rho \wedge d\varphi \\
&+ [-\rho^2 \sin(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - \rho^2 \cos(\theta)^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)] d\theta \wedge d\varphi \\
&= \rho \sin(\varphi)^2 d\rho \wedge d\theta - \rho^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\theta \wedge d\varphi.
\end{aligned}$$

Por fim, segue que o produto exterior é dado por

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy \wedge dz &= [dx \wedge dy] \wedge dz \\
&= [\rho \sin(\varphi)^2 d\rho \wedge d\theta - \rho^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\theta \wedge d\varphi] \\
&\wedge \cos(\varphi) d\rho - \rho \sin(\varphi) d\varphi \\
&= [-\rho^2 \sin(\varphi)^3 - \rho^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)^2] d\rho \wedge d\theta \wedge d\varphi \\
&= (-\rho^2 \sin(\varphi)) d\rho \wedge d\theta \wedge d\varphi.
\end{aligned}$$

Note que este exemplo é o determinante da matriz jacobiana da transformação χ definida acima. O leitor atento deve se recordar que este é o determinante da matriz jacobiana da mudança de coordenadas na integral tripla por coordenadas esféricas. Na mudança, tomamos o valor absoluto deste determinante.

A seguir, introduzimos uma nova operação no conjunto das formas diferenciais.

Definição 2.3.3 (Derivada Exterior). *Seja ω uma k -forma em \mathbb{R}^n , com funções componentes $\omega_{i_1 \dots i_k}$. A derivada exterior de ω é a $(k+1)$ -forma dada por*

$$d\omega = (d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Veremos, então, um exemplo de como se calcular tais derivadas exteriores. Ademais, veremos algumas de suas propriedades.

Exemplo 2.3.4. Seja ω uma n -forma em \mathbb{R}^n . Então, $d\omega = 0$. Como $\dim(\Lambda^n(T_p\mathbb{R}^n)) = 1$, para cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$, escrevemos

$$\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ . Por conta disto,

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Cada termo desta soma é nulo pois, pela Equação (2.2.1), $dx^i \wedge dx^i = 0$. Portanto, $d\omega = 0$.

Agora, façamos alguns resultados que mostram certas propriedades da derivada exterior.

Teorema 2.3.1. Sejam $\omega, \eta \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$ duas k -formas de classe \mathcal{C}^∞ , $\zeta \in \Lambda^1(T_p\mathbb{R}^n)$ uma 1-forma de classe \mathcal{C}^∞ e $a, b \in \mathbb{R}$ escalares. Então,

1. $d(a\omega + b\eta) = ad\omega + bd\eta$,
2. $d(\omega \wedge \zeta) = d\omega \wedge \zeta + (-1)^k \omega \wedge d\zeta$.

Demonstração. Para ver que a igualdade em (1) é verdadeira, tem-se que, para as k -formas diferenciais $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ e $\eta = \eta_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

$$\begin{aligned} d(a\omega + b\eta) &= [d(a\omega_{i_1 \dots i_k} + b\eta_{i_1 \dots i_k})] \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= [ad\omega_{i_1 \dots i_k} + bd\eta_{i_1 \dots i_k}] \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= ad\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + bd\eta_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= ad\omega + bd\eta. \end{aligned}$$

No item (2), veremos para as formas monomiais, uma vez que o resultado geral segue de (1). Sejam $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ e $\zeta = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$. Assumamos que os multi-índices $i_1 \dots i_k$ e $j_1 \dots j_l$ sejam disjuntos. Caso contrário, ambos os lados seriam

nulos. Daí, por um lado,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \zeta) &= d[(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l})] \\ &= \left[\left(f \frac{\partial g}{\partial x^m} + g \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) dx^m \right] \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \left(f \frac{\partial g}{\partial x^m} + g \frac{\partial f}{\partial x^m} \right) dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}. \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que

$$d\omega \wedge \zeta = b \frac{\partial a}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$$

e, também,

$$\omega \wedge d\zeta = a \frac{\partial b}{\partial x^m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^m \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}.$$

Este segundo é equivalente a

$$\omega \wedge d\zeta = (-1)^k a \frac{\partial b}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}.$$

Somando-se as duas expressões obtidas acima, concluímos a igualdade. \square

Por fim, provaremos a seguir que derivadas exteriores de outras derivadas exteriores são sempre nulas.

Teorema 2.3.2. *Seja ω uma k -forma diferencial em \mathbb{R}^n . Então, $d(d\omega) = 0$.*

Demonstração. Demonstraremos para uma 0-forma, ou seja, uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ . O caso geral segue da Definição 2.3.3 e do Teorema 2.3.1. Sendo assim, tem-se que

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^n} dx^n\right) \wedge dx^m \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^j. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Schwarz ¹, esta soma é nula em todos os termos. Portanto, o teorema está provado. \square

¹ O Teorema de Schwarz afirma que, para uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$, as derivadas mistas de segunda ordem são iguais.

Seja $\omega \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)$. Dizemos que ω é fechada quando $d\omega = 0$ e dizemos que ω é exata quando existe $\eta \in \Lambda^{k-1}(T_p\mathbb{R}^n)$ tal que $d\eta = \omega$.

Na próxima seção, trataremos da operação necessária para todo o nosso trabalho: o *pullback de tensores e formas*.

2.4 Pullback de Tensores e Formas

Nessa seção, trabalharemos a operação de *pullback de tensores e formas*. A palavra *pullback*, em uma tradução livre, é algo que se assimila a um "puxar para trás" ou a "voltar de onde se partiu". Justamente, essa é a intenção da operação que veremos com mais detalhes durante a corrente seção.

Definição 2.4.1 (Mapa Tangente de f). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável no ponto $p \in \mathbb{R}^n$. O mapa tangente de f em $p \in \mathbb{R}^n$ é a função $f_*|_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ definida para todo $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$, dado como na Seção 2.3, isto é,*

$$v_p[f] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t},$$

definimos

$$(f_*|_p(v_p))[\phi] = v_p[\phi \circ f],$$

em que ϕ é de classe \mathcal{C}^∞ em $p \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.4.2 (Pullback de Formas Diferenciais). *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ e $\omega \in \Lambda^k(T_{f(p)}\mathbb{R}^m)$ uma k -forma diferencial no contradomínio. O pullback de ω por f , denotado por $f^*\omega$, é definida para ser a k -forma diferencial do domínio \mathbb{R}^n dada por*

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k)),$$

em que $v_i \in T_p\mathbb{R}^n$, para $1 \leq i \leq k$, e f_* é o mapa tangente de f . O pullback de uma 0-forma é a composição de duas funções.

Para que a definição seja melhor compreendida, façamos um exemplo.

Exemplo 2.4.1. *Considere \mathbb{R}^3 com as coordenadas (x, y, z) e seja a função suave $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$. Façamos o pullback $F^*\omega$ com*

$\omega = x dx + y dy + z dz$. Em primeiro lugar, devemos encontrar a matriz jacobiana de F , isto é,

$$F_* = J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial \rho} & \frac{\partial F^1}{\partial \theta} & \frac{\partial F^1}{\partial z} \\ \frac{\partial F^2}{\partial \rho} & \frac{\partial F^2}{\partial \theta} & \frac{\partial F^2}{\partial z} \\ \frac{\partial F^3}{\partial \rho} & \frac{\partial F^3}{\partial \theta} & \frac{\partial F^3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, para um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x} + X^2 \frac{\partial}{\partial y} + X^3 \frac{\partial}{\partial z},$$

temos que, matricialmente,

$$\begin{aligned} [F_*X] &= [dF(\rho, \theta, z)] [X] \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)X^1 - \rho \sin(\theta)X^2 \\ \rho \cos(\theta)X^2 + \sin(\theta)X^1 \\ X^3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que nos dá o campo de vetores em \mathbb{R}^3 dado por

$$F_*X = [\cos(\theta)X^1 - \rho \sin(\theta)X^2] \frac{\partial}{\partial x} + [\rho \cos(\theta)X^2 + \sin(\theta)X^1] \frac{\partial}{\partial y} + X^3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Agora, aplicando na forma $\omega = x dx + y dy + z dz$, encontramos que

$$\begin{aligned} (F^*\omega)(X) &= \omega(F(\rho, \theta, z)) (\cos(\theta)X^1 - \rho \sin(\theta)X^2, \rho \cos(\theta)X^2 + \sin(\theta)X^1, X^3) \\ &= \rho \cos(\theta) (\cos(\theta)X^1 - \rho \sin(\theta)X^2) + \rho \sin(\theta) (\rho \cos(\theta)X^2 + \sin(\theta)X^1) + zX^3 \\ &= \rho \cos(\theta)^2 X^1 - \rho \cos(\theta) \sin(\theta) X^2 + \rho \cos(\theta) \sin(\theta) X^2 + \rho \sin(\theta)^2 X^1 + zX^3 \\ &= \rho X^1 + zX^3 \end{aligned}$$

Sendo assim, encontramos

$$F^*\omega = \rho d\rho + z dz.$$

Observamos que, para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ , tem-se que

$$f^*(dx^i) = df^i.$$

De fato, para um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e $v \in T_p\mathbb{R}^n$ quaisquer, façamos

$$\begin{aligned} f^*(dx^i)|_p(v_p) &= dx^i|_{f(p)}(f_*|_p(v)) = dx^i|_{f(p)}(\nabla f_p^1(v), \dots, \nabla f_p^m(v)) \\ &= \nabla f_p^i(v) = df_p^i(v). \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de $p \in \mathbb{R}^n$ e $v \in T_p\mathbb{R}^n$, concluí-se que $f^*(dx^i) = df^i$.

Agora, podemos enunciar o resultado a seguir.

Teorema 2.4.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ . Então,*

1. *para $\omega, \eta \in \Lambda^k(T_{f(p)}\mathbb{R}^m)$ e escalares $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se que*

$$f^*(a\omega + b\eta) = af^*\omega + bf^*\eta;$$

2. *para $\omega \in \Lambda^k(T_{f(p)}\mathbb{R}^m)$ e $\eta \in \Lambda^1(T_{f(p)}\mathbb{R}^m)$, tem-se a igualdade*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta);$$

3. *para $\omega \in \Lambda^k(T_{f(p)}\mathbb{R}^m)$, tem-se*

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

Demonstração. Provaremos cada item em separado.

1. Seja $v = (v_1, \dots, v_k)$ uma k -upla de vetores de $T_p\mathbb{R}^n$ para um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente escolhido. Defina $f_*v = (f_*v_1, \dots, f_*v_k)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} (f^*(a\omega + b\eta))_p(v) &= (s\omega + t\eta)_{f(p)}(f_*v) = [(a\omega)_{f(p)} + (b\eta)_{f(p)}](f_*v) \\ &= (a\omega)_{f(p)}(f_*v) + (b\eta)_{f(p)}(f_*v) = a\omega_{f(p)}(f_*v) + b\eta_{f(p)}(f_*v) \\ &= a(f^*\omega)_p(v) + b(f^*\eta)_p(v). \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de $p \in \mathbb{R}^n$ e $v \in T_p\mathbb{R}^n$, temos $f^*(a\omega + b\eta) = af^*\omega + bf^*\eta$.

2. Seja $v = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ uma $(k+1)$ -upla de vetores de $T_p\mathbb{R}^n$ para um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente escolhido. Defina $f_*v = (f_*v_1, \dots, f_*v_k, f_*v_{k+1})$. Com efeito, sendo $\omega = a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ e $\eta = b dx^{i_{k+1}}$, tem-se que

$$\begin{aligned} (f^*(\omega \wedge \eta))_p(v) &= (\omega \wedge \eta)_{f(p)}(f_*v) = [\omega(f(p)) \wedge \eta(f(p))](f_*v) \\ &= [(a_{i_1 \dots i_k} b)_{f(p)} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}}](f_*v). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [(f^* \omega) \wedge (f^* \eta)]_p(v) &= [\omega \wedge \eta]_{f(p)}(f_*v) = [\omega_{f(p)} \wedge \eta_{f(p)}](f_*v) \\ &= [a_{i_1 \dots i_k} b dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{i_{k+1}}]_{f(p)}(f_*v). \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de $p \in \mathbb{R}^n$ e $v \in T_p\mathbb{R}^n$, temos $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$.

3. Provaremos para as 0-formas. O resultado geral segue dos itens já provados. Sejam $a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma 0-forma e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com as funções componentes $f^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $1 \leq j \leq m$. Denotando as coordenadas de \mathbb{R}^m pela m -upla $y = (y^1, \dots, y^m)$. Temos, assim,

$$da = \frac{\partial a}{\partial y^j} dy^j$$

para qualquer campo de vetores $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e podemos escrever

$$f_*X = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} X^i \right) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Por isso,

$$(f^*(da))(X) = (da)(f_*X) = \frac{\partial a}{\partial y^j} \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} X^i \right).$$

Examinando os componentes, temos que

$$f^*(da) = \frac{\partial a}{\partial y^j} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i = d(a \circ f) = d(f^*a).$$

Sendo provado cada um dos itens, o teorema está demonstrado. \square

O Teorema 2.4.1 e a discussão sobre a igualdade $f^*(dx_i) = df^i$, nos leva a enunciar o corolário abaixo.

Corolário 2.4.1. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ , de funções componentes dadas por $f^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $1 \leq j \leq m$ e $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Lambda^k(T_{f(p)}\mathbb{R}^m)$ e $\omega_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe \mathcal{C}^∞ . Então,*

$$f^*\omega = (\omega_{i_1 \dots i_k} \circ f) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}.$$

Demonstração. De fato, tem-se que

$$\begin{aligned} f^* \omega &= f^* (\omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = (f^* \omega_{i_1 \dots i_k}) f^* (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= (f \circ \omega_{i_1 \dots i_k}) f^* dx^{i_1} \wedge \dots \wedge f^* dx^{i_k} = (f \circ \omega_{i_1 \dots i_k}) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}. \end{aligned}$$

Portanto, o corolário está demonstrado. \square

Uma aplicação do corolário 2.4.1 é dada agora. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ , escreveremos as coordenadas do domínio como (x, y) e as do contradomínio como (\tilde{x}, \tilde{y}) . Também, denotaremos as funções componentes de f como sendo $f^1, f^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $\omega = d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}$. Então,

$$\begin{aligned} f^* \omega &= f^* (d\tilde{x} \wedge d\tilde{y}) = df^1 \wedge df^2 = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x} dx + \frac{\partial f^1}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial f^2}{\partial x} dx + \frac{\partial f^2}{\partial y} dy \right) \\ &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial x} \frac{\partial f^2}{\partial y} - \frac{\partial f^1}{\partial y} \frac{\partial f^2}{\partial x} \right) dx \wedge dy = \det(J_f) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Com isso, podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.4.1. *Considere a n -forma diferencial em \mathbb{R}^n dada por*

$$\Omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

em que (x^1, \dots, x^n) são as coordenadas de \mathbb{R}^n . Então, para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável de classe \mathcal{C}^1 , tem-se que

$$f^* \Omega = (\det(J_f)) \Omega.$$

Demonstração. De fato, note que

$$f^* \Omega = df^1 \wedge \dots \wedge df^n = (\det(J_f)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = (\det(J_f)) \Omega.$$

Portanto, a proposição está provada. \square

Neste momento, queremos generalizar o pullback de formas diferenciais para o pullback de tensores e campos tensoriais. Para tal, vejamos a definição que se segue.

Definição 2.4.3 (Pullback de Tensores). *Sejam $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ domínios, $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ um difeomorfismo com inversa dada por $\psi = \phi^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$. Considere T o campo de tensores do tipo (r, s) em U_2 . O pullback de T por ϕ , denotado por ϕ^*T , é definido como sendo o campo tensorial do tipo (r, s) em U_1 dado por*

$$(\phi^*T)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) = T(\psi^*\alpha_1, \dots, \psi^*\alpha_r, \phi_*X_1, \dots, \phi_*X_s),$$

em que α_i são 1-formas de classe C^∞ e $X_j \in \mathfrak{X}(U_1)$, para $j = 1, \dots, s$.

Para que se ilustre a Definição 2.4.3, daremos dois exemplos. Nestes exemplos, denotaremos as coordenadas do domínio por $x = (x^1, \dots, x^n)$ e do contradomínio por $y = (y^1, \dots, y^n)$. Ademais, as funções componentes de $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ serão denotadas por $\phi^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e as da sua inversa, $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, serão denotadas como $\psi^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, tem-se que

$$y^j = \phi^j(x^1, \dots, x^n) \quad \text{e, também,} \quad x^j = \psi^j(y^1, \dots, y^n).$$

Exemplo 2.4.2 (O pullback de um tensor $(0, 1)$). *Seja $T = dy^j$. Então, para qualquer campo de vetores $X = X^i \partial_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$(\phi^*T)(X) = T(\phi_*X) = dy^j \left(\left(X^1 \frac{\partial y^j}{\partial x^1} + \dots + X^n \frac{\partial y^j}{\partial x^n} \right) \partial_{y^j} \right) = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = X[y^j].$$

Exemplo 2.4.3 (O pullback de um tensor $(1, 0)$). *Seja $T = \partial_{y^j}$. Então, para qualquer 1-forma diferenciável $\alpha = a_i dx^i$, temos que*

$$(\phi^*T)(X) = T(\psi^*X) = (\partial_{y^j}) \left[(a_k \circ \psi) \frac{\partial x^k}{\partial y^j} dy^j \right] = (a_k \circ \psi) \frac{\partial x^k}{\partial y^j} = \alpha \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial y^j} \right).$$

Assim como no pullback de formas diferenciais, existe uma propriedade similar no pullback com tensores e produto tensorial. O próximo resultado prova tal relação.

Proposição 2.4.2. *Sejam $S \in T^{(r,s)}(T_p\mathbb{R}^n)$ e $T \in T^{(k,l)}(T_p\mathbb{R}^n)$. Considere o difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então,*

$$\phi^*(S \otimes T) = (\phi^*S) \otimes (\phi^*T).$$

Demonstração. Sejam $\alpha_i, \beta_j \in \Lambda^1(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n))$, com $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq k$, e também $X_i, Y_j \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq i \leq s$ e $1 \leq j \leq l$ quaisquer. Considere a $(r+k+s+l)$ -upla dada por

$$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_k, X_1, \dots, X_s, Y_1, \dots, Y_l).$$

Assim, apliquemos tal $(r+k+s+l)$ -upla em $\phi^*(S \otimes T)$. Defina

$$v_\phi^\psi = (\psi^* \alpha_1, \dots, \psi^* \alpha_r, \psi^* \beta_1, \dots, \psi^* \beta_k, \phi_* X_1, \dots, \phi_* X_s, \phi_* Y_1, \dots, \phi_* Y_l).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \phi^*(S \otimes T)(v) &= (S \otimes T)\left(v_\phi^\psi\right) \\ &= S(\psi^* \alpha_1, \dots, \psi^* \alpha_r, \phi_* X_1, \dots, \phi_* X_s) T(\psi^* \beta_1, \dots, \psi^* \beta_k, \phi_* Y_1, \dots, \phi_* Y_l) \\ &= (\phi^* S)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) (\phi^* T)(\beta_1, \dots, \beta_k, Y_1, \dots, Y_l) \\ &= [(\phi^* S) \otimes (\phi^* T)](v). \end{aligned}$$

Pela $(r+k+s+l)$ -upla $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_k, X_1, \dots, X_s, Y_1, \dots, Y_l)$ ser arbitrária, concluí-se que

$$\phi^*(S \otimes T) = (\phi^* S) \otimes (\phi^* T).$$

Portanto, a proposição está demonstrado. \square

Este resultado é o responsável por uma, não tão natural, generalização do Teorema 2.4.1, uma vez que uma forma diferencial é um tensor alternado em no espaço tangente de \mathbb{R}^n .

No próximo capítulo, usaremos as definições e resultados aqui presentes a fim de calcularmos os entes geométricos de uma superfície em \mathbb{R}^3 , ou seja, as curvaturas e as formas fundamentais de uma superfície imersa no espaço euclidiano.

3 Superfícies em \mathbb{E}^3

Nesse capítulo trabalharemos com a teoria desenvolvida no capítulo anterior, mais precisamente com formas diferenciais e pullback de formas, para descrever entes geométricos enquanto estudamos o conceito de referencial móvel em uma superfície.

Ao longo deste capítulo, \mathbb{E}^3 denotará o espaço \mathbb{R}^3 munido com a métrica euclidiana, dada por

$$g(u, v) = \langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^3 u^k v^k, \quad u, v \in T_p \mathbb{R}^3, \quad (3.0.1)$$

para todo ponto $p \in \mathbb{R}^3$, denominado como o produto interno canônico de \mathbb{R}^3 . Sendo assim, o par (\mathbb{R}^3, g) será o espaço vetorial e métrico dado por \mathbb{E}^3 . Além disso, o conjunto \mathcal{U} denotará um subconjunto aberto, conexo e simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 , e, durante o capítulo, será chamado de um *domínio*.

As referências básicas utilizadas no desenvolvimento deste capítulo foram [Clelland \(2017\)](#) e [Tenenblat \(2008\)](#).

3.1 Referenciais Móveis

Seja $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio. Lembremos que uma imersão $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ é uma aplicação diferenciável tal que sua diferencial $d\varphi_p$ é injetora, isto é, $d\varphi_p(v) = 0 \iff v = 0$. Considere $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ uma imersão tal que a imagem seja a superfície parametrizada regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$.

Define-se por um campo de vetores ao longo de Σ um levantamento

$$\tilde{\varphi}(p) = (\varphi(p); e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p), \quad (3.1.1)$$

tal que, para cada $p = (u, v) \in \mathcal{U}$, a terna $(e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p)$ forme uma base ortonormal orientada para o espaço $T_{\varphi(p)}\mathbb{E}^3$, com $e_i : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ sendo funções diferenciáveis de classe \mathcal{C}^∞ para $i = 1, 2, 3$.

Vejamus que se φ é uma imersão, a diferencial de φ , $d\varphi_p : T_p\mathcal{U} \longrightarrow T_{\varphi(p)}\Sigma$, é uma transformação linear injetora para todo ponto $p \in \mathcal{U}$, portanto, o plano tangente $T_{\varphi(p)}\Sigma$ está bem definido em cada ponto $\varphi(p) \in \Sigma$.

Dado isso, podemos definir o primeiro referencial móvel adaptado exigindo que $e_3|_p$ seja ortogonal a $T_{\varphi(p)}\Sigma$, fazendo com que o conjunto de vetores dado pelo conjunto $B = \{e_1|_p, e_2|_p\}$ forme uma base ortonormal de $T_{\varphi(p)}\Sigma$.

Notemos que, uma vez que, para um vetor $v \in T_p\mathcal{U}$, tem-se que $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}\Sigma$. Daí, segue que

$$d\varphi_p(v) = \omega^i(v) e_i|_p. \quad (3.1.2)$$

Portanto, pela arbitrariedade de $p \in \mathcal{U}$ e $v \in T_p\mathcal{U}$, tem-se que

$$d\varphi = \omega^i e_i, \quad (3.1.3)$$

com $\omega^i : T_p\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^∞ , para todo $i = 1, 2$.

Ademais, para funções de classe \mathcal{C}^∞ dadas por $e_i : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$, com $1 \leq i \leq 3$, podemos calcular a diferencial de e_i de uma forma análoga ao que foi feito para a diferencial de φ .

Nesses termos, segue que a diferencial de e_i , isto é de_i , é combinação linear de $\{e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p\}$. Portanto, para um ponto $p \in \mathcal{U}$ arbitrariamente escolhido e um vetor $v \in T_p\mathcal{U}$ qualquer, obtem-se

$$de_i|_p(v) = \omega_i^j(v) e_j|_p. \quad (3.1.4)$$

Pela arbitrariedade do ponto e do vetor, temos que

$$de_i = \omega_i^j e_j. \quad (3.1.5)$$

As 1-formas $\omega^i, \omega_i^j : T_p\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ são de classe \mathcal{C}^∞ para cada ponto $p \in \mathcal{U}$ e para todo $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$. Às formas diferenciais ω^i , daremos o nome de *correferencial do triedro móvel*, com $i = 1, 2$, e às formas diferenciais ω_i^j daremos o nome de *formas de conexão do triedro móvel*, com $1 \leq i, j, \leq 3$.

Agora, podemos enunciar um importante resultado, que nos dá toda a base para o trabalho que faremos daqui em diante.

Teorema 3.1.1. *Sejam $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ uma imersão cuja imagem é a superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$. Consideremos o correferencial $\{\omega^1, \omega^2\}$ e as formas de conexão ω_j^i , com $1 \leq i, j \leq 3$ associadas ao referencial móvel $B^l = \{e_1, e_2, e_3\}$. Então, as formas de conexão e o correferencial satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $\omega_i^j = -\omega_j^i$;
2. $d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j$;
3. $d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k$.

Demonstração. Consideremos as funções diferenciáveis em $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Tomando a diferencial da função acima, tem-se que

$$\langle de_i, e_j \rangle = -\langle e_i, de_j \rangle,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \langle de_i, e_j \rangle &= \langle \omega_i^k e_k, e_j \rangle = \omega_i^k \langle e_k, e_j \rangle = \omega_i^k \delta_{jk} = \omega_i^j; \\ \langle e_i, de_j \rangle &= \langle e_i, \omega_j^k e_k \rangle = \omega_j^k \langle e_i, e_k \rangle = \omega_j^k \delta_{ik} = \omega_j^i. \end{aligned}$$

Como $\langle de_i, e_j \rangle = -\langle e_i, de_j \rangle$, segue que $\omega_i^j = -\omega_j^i$. Portanto, o item está provado.

Para provar o item 2, pelo Teorema 2.3.2, segue que $d(d\varphi) = 0$. Dessa forma, tem-se que a derivada é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= d(d\varphi) = d(\omega^i e_i) = d\omega^i e_i + \omega^i \wedge de_i = d\omega^i e_i + \omega_j^i \wedge \omega^j e_i \\ &= (d\omega^i + \omega_j^i \wedge \omega^j) e_i. \end{aligned}$$

O que implica em $d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j$.

De maneira análoga, temos a demonstração do item 3, ou seja, usaremos o mesmo teorema do capítulo anterior. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= d(de_i) = d(\omega_j^i e_j) = d\omega_j^i e_j + \omega_j^i \wedge de_j = -d\omega_j^i e_i - \omega_k^i \wedge \omega_j^k e_i \\ &= (d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k) e_i. \end{aligned}$$

O que implica em $d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k$. □

As equações provadas nos itens 2 e 3 do Teorema 3.1.1 são denominadas de *equações de estrutura* ou *equações de Cartan*.

Nesse momento, definimos os pullbacks das formas ω^i e ω_i^j via a função diferenciável φ sendo dadas por $\bar{\omega}^i = \varphi^* \omega^i$ e $\bar{\omega}_i^j = \varphi^* \omega_i^j$, respectivamente.

Assim, é fato que $\bar{\omega}^3 = 0$. Com efeito, o pullback da equação $d\varphi = \omega^i e_i$ é dado por $d\varphi = \bar{\omega}^i e_i$. Seja $p \in \mathcal{U}$ e, então, $d\varphi_p : T_p\mathcal{U} \rightarrow T_{\varphi(p)}\Sigma$ e assim, para qualquer vetor $v \in T_p\mathcal{U}$ devemos ter que $d\varphi_p(v) = \bar{\omega}^i(v) e_i|_p \in T_{\varphi(p)}\Sigma$. Pela base do espaço tangente à superfície Σ em $\varphi(p)$ ser formada pelos vetores $e_1|_p$ e $e_2|_p$, tem-se que $\bar{\omega}^3(v) = 0$. Portanto, $\bar{\omega}^3 = 0$.

Temos condições, agora, de definir a primeira forma fundamental de Σ .

Definição 3.1.1 (Primeira Forma Fundamental de Σ). *Sejam $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ uma imersão. A primeira forma fundamental da superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ é a forma quadrática*

$$I_p(v) = \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(v) \rangle, \quad (3.1.6)$$

para todo $v \in T_p\mathcal{U}$.

Da Definição 3.1.1 unida com a discussão feita anterior à ela, é natural dizer que

$$I = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2. \quad (3.1.7)$$

De fato, para um vetor arbitrariamente escolhido $v \in T_p\mathcal{U}$, temos que

$$I_p(v) = \langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(v) \rangle = \langle \bar{\omega}^i(v) e_i|_p, \bar{\omega}^i(v) e_i|_p \rangle = \sum_{i=1}^2 (\bar{\omega}^i(v))^2.$$

Como este é satisfeito para todo $v \in T_p\mathcal{U}$, tem-se que

$$I = \sum_{i=1}^2 (\bar{\omega}^i)^2 = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2.$$

Para que consigamos dar prosseguimento, é necessário o seguinte resultado.

Lema 3.1.1 (Lema de Cartan). *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita $n \in \mathbb{N}$. Suponha que o conjunto $N = \{\eta^i \in V^* : 1 \leq i \leq r\}$ de 1-formas diferenciais seja linearmente independente, com η^i sendo de classe \mathcal{C}^∞ para todo $1 \leq i \leq n$. Suponha, também, que o conjunto de 1-formas diferenciais $T = \{\theta_i \in V^* ; 1 \leq i \leq r\}$ seja tal que*

$$\sum_{i=1}^r \theta_i \wedge \eta^i = 0.$$

Então, existem funções de classe \mathcal{C}^∞ $h_{ji} = h_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$, com $1 \leq i, j \leq n$ tais que

$$\theta_i = h_{ij} \eta^j.$$

Demonstração. Completamos o conjunto N em uma base de V^* , isto é, o conjunto $N' = \{\eta^1, \dots, \eta^r, \eta^{r+1}, \dots, \eta^n\}$ é uma base para o espaço V^* . Assim, escrevemos

$$\theta_i = \sum_{j=1}^r h_{ij} \eta^j + \sum_{l=r+1}^n g_{il} \eta^l.$$

Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \eta^i \wedge \theta_i = \sum_{i=1}^r \eta^i \wedge \left(\sum_{j=1}^r h_{ij} \eta^j + \sum_{l=r+1}^n g_{il} \eta^l \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_{ij} \eta^i \wedge \eta^j + \sum_{i=1}^r \sum_{l=r+1}^n g_{il} \eta^i \wedge \eta^l \\ &= \sum_{i < j} (h_{ij} - h_{ji}) \eta^i \wedge \eta^j + \sum_{i=1}^r \sum_{l=r+1}^n g_{il} \eta^i \wedge \eta^l. \end{aligned}$$

Pela independência linear, concluímos que $h_{ij} = h_{ji}$ e $g_{il} = 0$. □

Como $\bar{\omega}^3 = 0$, concluí-se diretamente que $d\bar{\omega}^3 = 0$. De acordo com as equações do Teorema 3.1.1, tem-se que $0 = d\bar{\omega}^3 = -\bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}^1 - \bar{\omega}_2^3 \wedge \bar{\omega}^2$, ou seja,

$$\bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}^1 = -\bar{\omega}_2^3 \wedge \bar{\omega}^2. \quad (3.1.8)$$

Pela independência linear de $\bar{\omega}^1$ e $\bar{\omega}^2$, segue, do Lema 3.1.1 que existem funções, simétricas nos subíndices, $h_{ij} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ de tal forma que

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1^3 = h_{11}\bar{\omega}^1 + h_{12}\bar{\omega}^2, \\ \bar{\omega}_2^3 = h_{21}\bar{\omega}^1 + h_{22}\bar{\omega}^2. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Matricialmente, o sistema é da forma

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_1^3 \\ \bar{\omega}_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\omega}^1 \\ \bar{\omega}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.10)$$

Vale ressaltar que, de acordo com Clelland (2017), nas páginas 120 e 121, como

$$de_3 = -(\omega_1^3 e_1 + \omega_2^3 e_2), \quad (3.1.11)$$

para qualquer vetor tangente $v \in T_{\varphi(p)}\Sigma$, o vetor $de_3(v)$ mede a derivada direcional do campo vetorial normal na direção de $v \in T_{\varphi(p)}\Sigma$. Assim, as 1-formas ω_i^3 , com $i = 1, 2$, medem a velocidade em que o campo vetorial e_3 gira na direção de e_i , com $i = 1, 2$. Fazendo o pullback destas formas diferenciais, concluimos que, como $\bar{\omega}_i^3$ é combinação linear de $\bar{\omega}^1$ e $\bar{\omega}^2$, as funções h_{ij} dadas pelo Lema 3.1.1 medem a variação de e_3 na direção de e_i quando se move na direção de e_j .

Definiremos, então, a função que nos dará o necessário para o cálculo das curvaturas, sendo exploradas futuramente nesta seção.

Definição 3.1.2 (Aplicação normal de Gauss). *Sejam $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e uma imersão $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$, cuja imagem é a superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$. Define-se como a aplicação normal de Gauss a função*

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : \Sigma \subset \mathbb{E}^3 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ q = \varphi(p) &\longmapsto \mathcal{N}(q) = e_3|_p \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

em que $(e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p)$ é um referencial móvel adaptado ortonormal em Σ .

Note que a Equação (3.1.12), a menos de sinal, está bem-definida. Uma vez que a codimensão de $T_{\varphi(p)}\Sigma$ é 1, segue que há somente um vetor normal à superfície em $q = \varphi(p) \in \Sigma$. Portanto, a escolha do sinal não altera a boa definição de \mathcal{N} .

Observação 3.1.1. *As noções de curvatura, que são tipicamente associadas à superfície, surgem como propriedades de $d\mathcal{N}_p$, também conhecida como Operador de Forma. A informação que será relevante está contida na segunda forma fundamental de Σ .*

Definição 3.1.3 (Segunda forma fundamental de Σ). *Sejam $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ uma imersão, cuja imagem é a superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$. A*

segunda forma fundamental de Σ é a forma quadrática

$$II_p(v) = -\langle de_3|_p(v), d\varphi_p(v) \rangle, \quad (3.1.13)$$

com $v \in T_p\mathcal{U}$ qualquer e $(e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p)$ sendo um referencial móvel adaptado ortogonal em Σ .

Como a curvatura está relacionada à velocidade da variação do vetor normal à medida que nos movemos pela superfície, podemos esperar que as funções obtidas pelo Lema 3.1.1 apareçam na segunda forma fundamental. Dessa forma, consideremos a Definição 3.1.3 e façamos, para $p \in \mathcal{U}$ e $v \in T_p\mathcal{U}$ arbitrariamente escolhidos,

$$\begin{aligned} II_p(v) &= -\langle de_3|_p(v), d\varphi_p(v) \rangle \\ &= -\langle -\bar{\omega}_1^3(v)e_1|_p - \bar{\omega}_2^3(v)e_2|_p, \bar{\omega}^1(v)e_1|_p + \bar{\omega}^2(v)e_2|_p \rangle \\ &= \bar{\omega}_1^3(v)\bar{\omega}^1(v) + \bar{\omega}_2^3(v)\bar{\omega}^2(v) \\ &= (h_{11}(p)\bar{\omega}^1(v) + h_{12}(p)\bar{\omega}^2(v))\bar{\omega}^1(v) + (h_{12}(p)\bar{\omega}^1(v) + h_{22}(p)\bar{\omega}^2(v))\bar{\omega}^2(v) \\ &= h_{11}(p)(\bar{\omega}^1(v))^2 + 2h_{12}(p)\bar{\omega}^1(v)\bar{\omega}^2(v) + h_{22}(p)(\bar{\omega}^2(v))^2. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de $p \in \mathcal{U}$ e $v \in T_p\mathcal{U}$, segue que

$$II = \bar{\omega}_1^3\bar{\omega}^1 + \bar{\omega}_2^3\bar{\omega}^2 = h_{11}(\bar{\omega}^1)^2 + 2h_{12}\bar{\omega}^1\bar{\omega}^2 + h_{22}(\bar{\omega}^2)^2. \quad (3.1.14)$$

Neste momento, podemos definir uma outra curvatura da superfície.

Definição 3.1.4 (Curvatura normal). *Sejam $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e a imersão $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$, cuja imagem é a superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$. A curvatura normal em $q = \varphi(p) \in \Sigma$ da superfície Σ é a função*

$$\begin{aligned} k^\perp : T_p\mathcal{U} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto k^\perp(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = \frac{\bar{\omega}_1^3\bar{\omega}^1 + \bar{\omega}_2^3\bar{\omega}^2}{(\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Note que $k^\perp(\lambda v) = k^\perp(v)$. De fato, tem-se que

$$\begin{aligned} k^\perp(\lambda v) &= \frac{\bar{\omega}_1^3(\lambda v)\bar{\omega}^1(\lambda v) + \bar{\omega}_2^3(\lambda v)\bar{\omega}^2(\lambda v)}{(\bar{\omega}^1(\lambda v))^2 + (\bar{\omega}^2(\lambda v))^2} = \frac{\lambda^2\bar{\omega}_1^3(v)\bar{\omega}^1(v) + \lambda^2\bar{\omega}_2^3(v)\bar{\omega}^2(v)}{\lambda^2(\bar{\omega}^1(v))^2 + \lambda^2(\bar{\omega}^2(v))^2} \\ &= \frac{\bar{\omega}_1^3(v)\bar{\omega}^1(v) + \bar{\omega}_2^3(v)\bar{\omega}^2(v)}{(\bar{\omega}^1(v))^2 + (\bar{\omega}^2(v))^2} = k^\perp(v). \end{aligned}$$

Neste contexto, diremos que $v \in T_p\mathcal{U}$ é uma *direção assintótica* quando $k^\perp(v) = 0$. Ademais, as *linhas assintóticas* são definidas como aquelas cujas tangentes em cada ponto coincidem com as direções assintóticas da superfície.

Da álgebra linear, qualquer matriz simétrica pode ser transformada em uma matriz diagonal por meio de uma mudança de base. Sendo assim, para cada $p \in \mathcal{U}$, existe um referencial móvel adaptado ortonormal $(e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p)$ no ponto $\varphi(p) \in \Sigma$ de tal forma que

$$\begin{bmatrix} h_{11}(p) & h_{12}(p) \\ h_{21}(p) & h_{22}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1(p) & 0 \\ 0 & \kappa_2(p) \end{bmatrix}, \quad (3.1.16)$$

para certas funções reais $\kappa_i : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $i = 1, 2$.

Proposição 3.1.1. *Seja $(e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p)$ um referencial móvel adaptado ortonormal satisfazendo a equação (3.1.16) e sejam $v_1, v_2 \in T_p\mathcal{U}$ tais que $d\varphi_p(v_i) = e_i|_p$, com $i = 1, 2$. Então,*

$$de_3|_p(v_i) = dN_{\varphi(p)}(v_i) = \kappa_i(p) e_i|_p, \quad \text{com } i = 1, 2.$$

Demonstração. De fato, como $de_3|_p(v) = -\bar{\omega}_1^3(v) e_1|_p - \bar{\omega}_2^3(v) e_2|_p$, segue que, para $v_i \in T_p\mathcal{U}$, sendo $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} de_3|_p(v_i) &= -\bar{\omega}_1^3(v_i) e_1|_p - \bar{\omega}_2^3(v_i) e_2|_p \\ &= -(h_{11}(p) \bar{\omega}_1^1(v_i) + h_{12}(p) \bar{\omega}_2^1(v_i)) e_1|_p \\ &\quad - (h_{12}(p) \bar{\omega}_1^1(v_i) + h_{22}(p) \bar{\omega}_2^1(v_i)) e_2|_p. \end{aligned}$$

Por hipótese, como $h_{12} = h_{21} = 0$ e $h_{ii} = \kappa_i$, para $i = 1, 2$, tem-se que

$$de_3|_p(v_i) = -\kappa_1(p) \bar{\omega}_1^1(v_i) e_1|_p - \kappa_2(p) \bar{\omega}_2^1(v_i) e_2|_p.$$

Note que, para $v_i \in T_p\mathcal{U}$ com a propriedade de $d\varphi_p(v_i) = e_i|_p$, com $i = 1, 2$, implica que

$$\bar{\omega}^j(v_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Portanto, $de_3|_p(v_1) = -\kappa_1(p) e_1$ e $de_3|_p(v_2) = -\kappa_2(p) e_2$, como queríamos. \square

Observe que os vetores $e_i|_p$, com $i = 1, 2$ são autovetores de $d\mathcal{N}_{\varphi(p)}$ com os seus autovalores associados sendo $-\kappa_i$, com $i = 1, 2$.

Com a Proposição 3.1.1 em mãos, podemos dar a seguinte definição.

Definição 3.1.5 (Direções e curvaturas principais). *Os autovetores de $-d\mathcal{N}_{\varphi(p)}$, dados por $e_i|_p$, são chamados de direções principais no ponto $\varphi(p) = q \in \Sigma$. Os autovalores associados $\kappa_i(p)$ são denominadas de curvaturas principais.*

Dessa forma, existe um referencial móvel adaptado ortonormal $(e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p)$ de tal maneira que, em cada ponto $\varphi(p) = q \in \Sigma$, os vetores $e_1|_p$ e $e_2|_p$ sejam direções principais em $\varphi(p) = q \in \Sigma$. O referencial móvel adaptado ortonormal com tal propriedade será dito um *referencial principal* em $\varphi(p) = q \in \Sigma$.

Com isto, tem-se a proposição a seguir.

Proposição 3.1.2. *Sejam $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ uma imersão, cuja imagem é a superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$. Considere o referencial principal dado por $(e_1|_p, e_2|_p, e_3|_p)$. Então, a segunda forma fundamental é dada por*

$$II_p(v) = \kappa_i(p) (\bar{\omega}^i(v))^2,$$

para qualquer ponto $p \in \mathcal{U}$ e para todo vetor $v \in T_p\mathcal{U}$.

Demonstração. De fato, como já visto, tem-se que

$$II_p(v) = h_{11}(p) (\bar{\omega}^1(v))^2 + 2h_{12}(p) \bar{\omega}^1(v) \bar{\omega}^2(v) + h_{22}(p) (\bar{\omega}^2(v))^2.$$

Por hipótese, o referencial principal satisfaz a identidade da Equação (3.1.16) e, portanto, tem-se que $h_{12} = h_{21} = 0$ e $h_{ii} = \kappa_i$, para $i = 1, 2$. Daí, a segunda forma fundamental é reescrita como sendo

$$II_p(v) = \kappa_1(p) (\bar{\omega}^1(v))^2 + \kappa_2(p) (\bar{\omega}^2(v))^2.$$

Pela arbitrariedade de $p \in \mathcal{U}$ e $v \in T_p\mathcal{U}$, tem-se provada a igualdade do enunciado. \square

Um objeto geométrico é *invariante pela imersão* $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ quando este pode ser expressado puramente em termos do correferencial e da primeira forma

fundamental de $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$. Ademais, este objeto receberá do nome de *invariante intrínseca da superfície*. Note que as curvaturas principais κ_i , com $i = 1, 2$, entretanto, não são intrínsecas; elas dependem não apenas da métrica, mas também de como a superfície está imersa.

Definição 3.1.6 (Curvaturas média e gaussiana). *As funções definidas por*

$$\mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2 \quad e \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad (3.1.17)$$

para todo $p \in \mathcal{U}$, são chamadas, respectivamente, de *curvaturas gaussiana e média da superfície* Σ .

Vale ressaltar que as curvaturas definidas na Definição 3.1.6 podem ser dadas pelo determinante e metade do traço da matriz das curvaturas principais

$$[\kappa_{ij}] = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}. \quad (3.1.18)$$

Não é necessário que estejamos lidando com um referencial principal para definir as curvaturas da Definição 3.1.6. Nesse caso, usemos a linearidade de $d\mathcal{N}_p$ e, assim, construir as curvaturas definidas na Definição 3.1.5. Assim,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (h_{11} - \lambda)(h_{22} - \lambda) - h_{12}^2 \\ &= \lambda^2 - (h_{11} + h_{22})\lambda + h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \lambda^2 - \text{tr}([h_{ij}])\lambda + \det([h_{ij}]). \end{aligned}$$

Pela Definição 3.1.6 e pela Equação (3.1.16), concluímos que

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\mathcal{H}\lambda + \mathcal{K}, \quad (3.1.19)$$

ou seja,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \text{tr}([h_{ij}]) \quad e \quad \mathcal{K} = \det([h_{ij}]). \quad (3.1.20)$$

O polinômio $p(\lambda)$, de raízes dadas por

$$\lambda_{\pm} = \frac{2\mathcal{H} \pm \sqrt{4\mathcal{H}^2 - 4\mathcal{K}}}{2} = \mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 - \mathcal{K}}, \quad (3.1.21)$$

é o responsável por nos dar, também, as curvaturas.

Na Seção 3.2, classificaremos as superfícies de acordo com as curvaturas dadas pela Definição 3.1.6 e, após tal classificação, introduziremos o conceito de *superfície pseudoesférica*.

Na Seção 3.3 veremos quais condições devemos impor sobre as 1-formas que definimos nesta seção a fim de que tais formas diferenciais representem a primeira e a segunda formas fundamentais de uma superfície.

3.2 Classificação das Superfícies

Nesta seção, classificaremos os pontos de uma superfície de acordo com os sinais das curvaturas definidas na Definição 3.1.6. Ademais, veremos o comportamento da superfície próximo à esses pontos.

Definição 3.2.1 (Classificação dos pontos de Σ). *Seja a superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$. Diremos que o ponto $q = \varphi(p) \in \Sigma$ é*

1. *elíptico quando $\mathcal{K}(p) > 0$;*
2. *hiperbólico quando $\mathcal{K}(p) < 0$;*
3. *parabólico quando $\mathcal{K}(p) = 0$ e $\mathcal{H}(p) \neq 0$;*
4. *planar quando $\mathcal{K}(p) = 0 = \mathcal{H}(p)$.*

Em termos do sinal das curvaturas principais, um ponto elíptico é o ponto cujo representante do domínio possui as curvaturas principais de mesmo sinal, ou seja, o ponto $q = \varphi(p)$ é um ponto elíptico quando $\kappa_1(p) > 0$ e $\kappa_2(p) > 0$ ou $\kappa_1(p) < 0$ e $\kappa_2(p) < 0$.

Já o ponto hiperbólico, as curvaturas principais em $p \in \mathcal{U}$ possuem sinais contrários, ou seja, o ponto $q = \varphi(p)$ é um ponto hiperbólico quando $\kappa_1(p) > 0$ e $\kappa_2(p) < 0$ ou $\kappa_1(p) < 0$ e $\kappa_2(p) > 0$.

Se uma das curvaturas principais for nula num certo ponto $p \in \mathcal{U}$, o ponto $q = \varphi(p)$ é chamado de parabólico. Se ambas as curvaturas principais forem nulas em um ponto $p \in \mathcal{U}$, então o ponto $q = \varphi(p)$ é chamado de ponto planar.

Vejamos, agora, o caso em que as curvaturas principais coincidem.

Definição 3.2.2 (Pontos umbílicos). *Seja a superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$. Diremos que o ponto $q = \varphi(p) \in \Sigma$ é umbílico quando $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.*

Em um ponto umbílico $q = \varphi(p) \in \Sigma$, a curvatura normal k^\perp de qualquer vetor $v \in T_p\mathcal{U} \setminus \{0\}$ é constante igual a $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$. De fato, como a segunda forma fundamental pode ser dada por $II_p = \kappa_1(p) (\bar{\omega}^1(v))^2 + \kappa_2(p) (\bar{\omega}^2(v))^2$ e, por hipótese, $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$, tem-se que $II_p(v) = \kappa(p) I_p(v)$, com $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$. Sendo assim, a curvatura normal é igual à curvatura principal.

Dessa forma, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.2.1. *Um ponto $q = \varphi(p) \in \Sigma$, com $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ uma superfície, é um ponto umbílico se, e somente se, a segunda forma fundamental é múltipla por um escalar da primeira forma fundamental, para todo $v \in T_p\mathcal{U}$.*

Demonstração. Supomos, em primeiro lugar, que $q \in \Sigma$ é um ponto umbílico. Com efeito, escrevamos a segunda forma fundamental por $II_p = \kappa_1(p) (\bar{\omega}^1(v))^2 + \kappa_2(p) (\bar{\omega}^2(v))^2$. Por hipótese, $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$ e, portanto, tem-se que

$$II_p(v) = \kappa_1(p) (\bar{\omega}^1(v))^2 + \kappa_2(p) (\bar{\omega}^2(v))^2 = \kappa(p) \left[(\bar{\omega}^1(v))^2 + (\bar{\omega}^2(v))^2 \right] = \kappa I_p(v).$$

Pela arbitrariedade de $v \in T_p\mathcal{U}$, segue que

$$II_p = \kappa I_p.$$

Reciprocamente, suponha $II_p = \kappa I_p$ para todo $v \in T_p\mathcal{U}$. Daí, pelas mesmas relações envolvidas na demonstração da implicação anterior, chegamos no resultado desejado. \square

Em termos das curvaturas gaussianas e média, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1. *Um ponto $q = \varphi(p) \in \Sigma$, com $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ uma superfície, é um ponto umbílico se, e somente se, $H(p)^2 - K(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. De fato, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(p)^2 - \mathcal{K}(p) = 0 &\iff \left[\frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} \right]^2 - k_1(p)k_2(p) = 0 \\
 &\iff \frac{k_1(p)^2 + 2k_1(p)k_2(p) + k_2(p)^2 - 4k_1(p)k_2(p)}{4} = 0 \\
 &\iff \frac{k_1(p)^2 - 2k_1(p)k_2(p) + k_2(p)^2}{4} = 0 \\
 &\iff \left[\frac{k_1(p) - k_2(p)}{2} \right]^2 = 0 \iff k_1(p) - k_2(p) = 0.
 \end{aligned}$$

Assim, é provamos o teorema. □

Existem alguns problemas¹ que a superfície com pontos umbílicos possui em se tratando da escolha do referencial móvel principal. Tais problemas não serão considerados e podem ser observados nas referências do corrente capítulo.

Definição 3.2.3 (Classificação das superfícies em relação à \mathcal{K}). *Seja $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ uma superfície regular. Diremos que Σ é*

1. *elíptica quando todos os pontos de Σ forem elípticos;*
2. *esférica quando a curvatura gaussiana de Σ for constante e positiva;*
3. *hiperbólica quando todos os pontos de Σ forem hiperbólicos;*
4. *pseudoesférica quando for hiperbólica e sua curvatura gaussiana for constante;*
5. *parabólica quando todos os pontos de Σ forem parabólicos;*
6. *plana quando quando todos os pontos de Σ forem planares.*

Da Definição 3.2.3, nos itens 2 e 4, podemos fazer uma mudança de parâmetros na superfície em questão tal que a curvatura gaussiana seja, respectivamente, $K(p) = 1$ e $K(p) = -1$, para todo $p \in \mathcal{U}$. Dessa forma, os itens 2 e 4 podem ser reescritos da forma a seguir.

¹ De acordo com Clelland (2017), na página 124, se a superfície não tiver pontos umbílicos, então o referencial móvel principal pode ser determinado unicamente exigindo-se que $\kappa_1 < \kappa_2$. Pode ocorrer de um referencial principal não ser escolhido de forma suave em uma vizinhança de um ponto umbílico e, por isso, evitaremos pontos dessa natureza durante o capítulo.

Definição 3.2.4 (Superfícies esféricas e pseudoesféricas). *Seja $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ uma superfície regular. Diremos que Σ é*

1. *esférica quando $\mathcal{K}(p) = 1$ para todo $p \in \mathcal{U}$;*
2. *pseudoesférica quando $\mathcal{K}(p) = -1$ para todo $p \in \mathcal{U}$.*

Portanto, nosso objeto de estudo neste trabalho é definido na Definição 3.2.4. Dessa forma, as superfícies de interesse para nosso trabalho possuem a curvatura gaussiana \mathcal{K} constante dada por $\mathcal{K} = -1$.

Definição 3.2.5 (Classificação de superfícies em relação à \mathcal{H}). *Seja $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ uma superfície regular. Diremos que Σ é*

1. *mínima quando $\mathcal{H}(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{U}$;*
2. *umbílica quando $\mathcal{H}(p)^2 - \mathcal{K}(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{U}$.*

Note que, pela Definição 3.2.5, em uma superfície mínima, para todo $p \in \mathcal{U}$, todos os pontos são hiperbólicos. De fato, como $\mathcal{H}(p) = 0$, segue que $\kappa_1(p) = -\kappa_2(p)$. Portanto, o produto entre as curvaturas principais é sempre negativo.

Assim, pela Definição 3.2.1, todos os pontos são hiperbólicos. Segue, então, pela Definição 3.2.3, que toda superfície mínima é uma superfície hiperbólica.

Na seção seguinte, reuniremos todos os conceitos mostrados nas seções 3.1 e 3.2 a fim de estudar o *Teorema de Bonnet*.

3.3 Teorema de Bonnet

Nesta seção, estudaremos as exigências que devemos fazer sobre as formas fundamentais da superfície Σ , vistas na Seção 3.1, de modo que, ao menos localmente, essa superfície seja imagem de uma parametrização.

Sendo assim, exijamos da primeira forma fundamental que esta seja positiva definida, uma vez que esta definirá uma métrica na superfície. Ademais, para que não

existam autovalores de $-d\mathcal{N}_{\varphi(p)}$ iguais, isto é, $\kappa_1 \neq \kappa_2$, pediremos que a segunda forma fundamental não seja um múltiplo da primeira forma fundamental.

Nos cálculos das primeira e segunda formas fundamentais foram determinadas as 1-formas diferenciais, a menos de sinal, $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_2^3)$ associadas ao referencial móvel adaptado, com $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2)$ linearmente independentes e $\bar{\omega}_i^3$ sendo combinação linear de $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2)$.

Suponha que sejam dadas as 1-formas $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_2^3)$ em um conjunto aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ satisfazendo as condições acima. Queremos encontrar condições adicionais que estas 1-formas devem satisfazer para que haja uma imersão dada por $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ cujas primeira e segunda forma fundamentais da superfície regular $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ sejam

$$I = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2 \quad e \quad II = \bar{\omega}_1^3 \bar{\omega}^1 + \bar{\omega}_2^3 \bar{\omega}^2.$$

Tais 1-formas $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_2^3)$, juntamente com as 1-formas dadas por $\bar{\omega}^3 = 0$ e $\bar{\omega}_2^1 = -\bar{\omega}_1^2$ devem satisfazer as equações de Cartan. Por conta de $\bar{\omega}^3 = 0$, tem-se que as primeiras equações podem ser escritas como

$$d\bar{\omega}^1 = -\bar{\omega}_2^1 \wedge \bar{\omega}^2, \quad d\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}_1^2 \wedge \bar{\omega}^1 \quad e \quad \bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}^1 = -\bar{\omega}_2^3 \wedge \bar{\omega}^2. \quad (3.3.1)$$

Definição 3.3.1 (Conexão de Levi - Civita). *A 1-forma dada por $\bar{\omega}_2^1$ determinada pelas equações*

$$d\bar{\omega}^1 = -\bar{\omega}_2^1 \wedge \bar{\omega}^2 \quad e \quad d\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}_1^2 \wedge \bar{\omega}^1 \quad (3.3.2)$$

é denominada de conexão de Levi-Civita da métrica definida pela primeira forma fundamental.

Agora, provaremos o resultado que mostra que as equações da Definição 3.3.1 determinam unicamente a conexão de Levi-Civita.

Proposição 3.3.1. *A 1-forma dada por $\bar{\omega}_2^1$ é determinada unicamente pelas equações em (3.3.2)*

Demonstração. Sejam $\bar{\omega}_2^1$ e $\bar{\eta}_2^1$ duas 1-formas tais que as equações dadas em (3.3.2) sejam satisfeitas, ou seja, $d\bar{\omega}^1 = -\bar{\omega}_2^1 \wedge \bar{\omega}^2$, $d\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}_1^2 \wedge \bar{\omega}^1$, $d\bar{\omega}^1 = -\bar{\eta}_2^1 \wedge \bar{\omega}^2$ e

$d\bar{\omega}^2 = \bar{\eta}_1^2 \wedge \bar{\omega}^1$. Assim, façamos

$$0 = d\bar{\omega}^1 - d\bar{\omega}^1 = -\bar{\omega}_2^1 \wedge \bar{\omega}^2 + \bar{\eta}_2^1 \wedge \bar{\omega}^2 = (\bar{\eta}_2^1 - \bar{\omega}_2^1) \wedge \bar{\omega}^2;$$

$$0 = d\bar{\omega}^2 - d\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}_1^2 \wedge \bar{\omega}^1 - \bar{\eta}_1^2 \wedge \bar{\omega}^1 = (\bar{\omega}_1^2 - \bar{\eta}_1^2) \wedge \bar{\omega}^1.$$

Como $\bar{\eta}_2^1 - \bar{\omega}_2^1$ é combinação linear de $\bar{\omega}^1$ e $\bar{\omega}^2$, podemos escrever $\bar{\eta}_2^1 - \bar{\omega}_2^1 = A\bar{\omega}^1 + B\bar{\omega}^2$. Portanto, substituindo esta expressão nas equações acima segue que, para a primeira equação,

$$0 = (\bar{\eta}_2^1 - \bar{\omega}_2^1) \wedge \bar{\omega}^2 = (A\bar{\omega}^1 + B\bar{\omega}^2) \wedge \bar{\omega}^2 = A \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2.$$

O que implica que $A = 0$. Da mesma forma, tomando a segunda equação, concluímos analogamente que $B = 0$. Portanto, a 1-forma $\bar{\omega}_2^1$ é determinada unicamente. \square

A seguir, provaremos que a curvatura gaussiana é intrínseca, isto é, somente depende das formas do correferencial, ou seja, da primeira forma fundamental da superfície.

Proposição 3.3.2. *Seja $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ uma imersão cuja imagem $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ é uma superfície regular. Nestas condições, sendo as 1-formas diferenciais $\bar{\omega}^1$ e $\bar{\omega}^2$ determinadas pela primeira forma fundamental de Σ e a 1-forma diferencial $\bar{\omega}_2^1$ a conexão de Levi-Civita, dada pela Definição 3.3.1, tem-se que*

$$d\bar{\omega}_2^1 = \mathcal{K} \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2,$$

com \mathcal{K} sendo a curvatura gaussiana de Σ . Isso implica que a curvatura gaussiana é intrínseca.

Demonstração. De fato, façamos a derivada exterior da conexão de Levi - Civita. Assim, pelo Teorema 3.1.1 e pela Definição 3.1.6, tem-se que

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_2^1 &= \bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^3 = (h_{11}\bar{\omega}^1 + h_{12}\bar{\omega}^2) \wedge (h_{12}\bar{\omega}^1 + h_{22}\bar{\omega}^2) \\ &= (h_{11}h_{22} - h_{12}^2) \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2 = \det([h_{ij}]) \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2 = \mathcal{K} \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura gaussiana de uma superfície somente depende do correferencial do referencial móvel adaptado ortonormal escolhido. \square

Do Teorema 3.1.1, segue que as outras equações de estrutura, ou seja, equações de Cartan, podem ser escritas como

$$d\bar{\omega}_2^1 = \bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^3, \quad d\bar{\omega}_1^3 = \bar{\omega}_2^3 \wedge \bar{\omega}_2^1 \quad \text{e} \quad d\bar{\omega}_2^3 = -\bar{\omega}_1^3 \wedge \bar{\omega}_2^1.$$

A primeira equação é chamada de *equação de Gauss* e as outras duas equações restantes são denominadas de *equações de Codazzi-Mainardi*.

Com todo esse conhecimento desenvolvido durante o capítulo em questão, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Bonnet). *Sejam $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_2^3)$ as 1-formas no domínio $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$, satisfazendo as condições:*

1. $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2)$ são linearmente independentes para todo ponto $p \in \mathcal{U}$;
2. $\bar{\omega}_i^3$ é uma combinação linear de $\bar{\omega}^i$, com $i = 1, 2$.

Suponha que, juntas com a conexão de Levi-Civita $\bar{\omega}_2^1$ determinada por $\bar{\omega}^1$ e $\bar{\omega}^2$, tais formas satisfazem as equações de estrutura. Então, existe uma superfície imersa $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$, única a menos de movimento rígido², de tal modo que as primeira e segunda formas fundamentais da superfície $\Sigma = \varphi(\mathcal{U})$ são

$$I = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2 \quad \text{e} \quad II = \bar{\omega}_1^3 \bar{\omega}^1 + \bar{\omega}_2^3 \bar{\omega}^2.$$

A demonstração do teorema é longa e foge do escopo desse trabalho, mas pode ser encontrada nas páginas 229 à 232 de [Guggenheimer \(1977\)](#).

O Teorema 3.3.1 nos dá as condições necessárias para que, dadas as 1-formas satisfazendo a hipótese, tem-se que é possível encontrar uma imersão $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ de tal modo que a sua imagem seja uma superfície cuja as formas fundamentais sejam $I = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2$ e $II = \bar{\omega}_1^3 \bar{\omega}^1 + \bar{\omega}_2^3 \bar{\omega}^2$.

Ressalta-se que nem sempre a imersão é facilmente determinada, uma vez que o teorema nos dá somente a existência de uma imersão e não como construí-la. Em um ambiente não parametrizado, estaremos interessados em encontrar as formas diferenciais $(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_2^3)$.

² Entende-se por movimento rígido uma translação, rotação ou reflexão.

4 Equações Diferenciais Pseudoesféricas

Este capítulo será destinado ao estudo de equações diferenciais parciais que descrevem superfícies pseudoesféricas juntamente com sua relevância histórica e geométrica.

Na primeira seção, explicitaremos aspectos históricos desse tipo de equação e perpassaremos sobre equações pseudoesféricas e como surgiram na literatura.

Nas seções que se seguem, trataremos de fazer exemplos de equações pseudoesféricas que são bastante conhecidos, a fim de mostrar ao leitor que tais equações, de fato, cumprem o papel desejado para esta monografia.

4.1 Contexto Histórico e Geométrico

As equações diferenciais que descrevem superfícies de curvatura gaussiana constante e negativa surgiram no século XIX, em diferentes contextos. Dentre eles, destacamos Scott Russel, Korteweg e de-Vries, na hidrodinâmica; e Bäcklund e Bianchi, na geometria.

Figura 4.1.1 – Onda em canal britânico reproduzindo aquela observada por Russel.



Fonte: [Heriot-Watt University \(D. Dugald\)](#).

Em 1834, John Scott Russel observou que uma onda bastante estável se propagava ao longo de um canal britânico, como observado em [Chalub e Zubelli \(2001\)](#). Muitos

tentaram propor um modelo que só veio a ser desenvolvido por Korteweg e de-Vries em 1895, vide [Korteweg e Vries \(1895\)](#), conseguiram uma equação que modelasse este tipo de fenômeno físico, que posteriormente passou a ser chamado de *KdV*.

Foi descoberto por [Zabusky e Kruskal \(1965\)](#) que a *KdV* possui soluções que parecem interagir elasticamente. Tais soluções são chamadas de *solitons*, termo cunhado por eles. Entre as equações mais importantes que possuem soluções com propriedades similares à descritas acima está a equação de interesse para este trabalho, ou seja, a equação de *sine-Gordon*,

$$u_{xt} = \text{sen}(u). \quad (4.1.1)$$

Sua aparição geométrica se dá durante os cálculos da curvatura gaussiana de certas superfícies que têm tal curvatura constante e negativa. Em outras palavras, dada uma parametrização de uma superfície qualquer e impondo que esta superfície possua curvatura negativa, a Equação (4.1.1) aparece de forma bastante natural nos cálculos que devem ser feitos. Essa equação e suas conexões com a geometria de superfícies foi bastante estudada por [Bianchi \(1899\)](#). O livro de [Rogers e Schief \(2002\)](#) também possui extenso material sobre essa equação.

A referida equação será àquela de destaque neste trabalho pois, a cada solução da Equação (4.1.1), pode-se associar uma superfície pseudoesférica e, dada uma superfície pseudoesférica, pode-se associá-la à uma solução da mesma equação. Veja, por exemplo, [Sander \(2009\)](#), na Proposição 2.3.3. Isto é, existe uma bijeção entre o conjunto de soluções da equação de *sine-Gordon* com as superfícies pseudoesféricas e, por este motivo, qualquer outra equação diferencial que descreva superfícies dessa forma está intimamente relacionada com a equação de enfoque deste trabalho.

Conhecida a equação, queremos encontrar, portanto, suas soluções e uma técnica usada ao estudar-se as soluções da equação de *sine-Gordon* é a transformação de Bäcklund para superfícies pseudoesféricas. De acordo com [Almeida e Pimentel \(1996\)](#), em 1875 ele mostrou que era possível construir uma hierarquia de soluções da equação em questão donde cada solução poderia ser construída a partir de uma solução anterior. Especificamente, ele provou que dada uma superfície com curvatura gaussiana $\mathcal{K} \equiv -1$ existe uma família a dois parâmetros de superfícies de mesma curvatura e relacionadas com a primeira através de um difeomorfismo. As transformações envolvidas são chamadas

de "transformações de Bäcklund". Elas nos permitem construir novas superfícies com curvatura constante e negativa e portanto novas soluções da equação de sine-Gordon.

Na seção seguinte, definiremos o conceito de equação pseudoesférica e a condição para uma solução da equação ser genérica além de darmos o exemplo dessa equação.

4.2 Noções Fundamentais

Durante esta seção, daremos a definição de uma equação diferencial cujas soluções descrevem superfícies pseudoesféricas. É salutar recordar que uma superfície é pseudoesférica quando for hiperbólica e sua curvatura gaussiana \mathcal{K} for constante e negativa. Sem perda de generalidade, podemos supor tal curvatura $\mathcal{K} \equiv -1$. As seguintes definições podem ser vistas em [Chern e Tenenblat \(1986\)](#).

Sejam (x, t) variáveis independentes. Uma equação diferencial parcial da função diferenciável $u : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de ordem $n \in \mathbb{N}$ é genericamente denotada por

$$\mathcal{E}(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}) = 0. \quad (4.2.1)$$

Em (4.2.1), $u_{(j)}$ denota o conjunto de todas as derivadas parciais de u de ordem j .

Definição 4.2.1 (Equação diferencial pseudoesférica). *Uma equação diferencial (4.2.1) é chamada de equação diferencial pseudoesférica, ou uma equação diferencial que descreve superfícies pseudoesféricas, quando existem funções diferenciáveis*

$$f_{ij} = f_{ij}(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(k)}),$$

para algum $k \in \mathbb{N}$, e com $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 2$, tais que as formas diferenciais

$$\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (4.2.2)$$

satisfazem as equações de estrutura de uma superfície pseudoesférica

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3 \quad e \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (4.2.3)$$

quando $u = u(x, t)$ é solução de (4.2.1).

Dado o Capítulo 3, em que, na Seção 3.3, impomos algumas condições sobre as formas diferenciais para que fosse satisfeito o *Teorema de Bonnet*, vide Teorema 3.3.1. Agora imporemos condições sobre as formas diferenciais para que, sendo a Equação (4.2.1) pseudoesférica e $u = u(x, t)$ uma solução da referida equação, a tal solução seja genérica. Tal definição foi introduzida por Chern e Tenenblat [Chern e Tenenblat \(1986\)](#).

Definição 4.2.2 (Condição de solução genérica). *Assuma que a Equação (4.2.1) seja uma equação pseudoesférica e $u = u(x, t)$ uma solução de tal equação diferencial. Então $u = u(x, t)$ é dita ser genérica quando as 1-formas ω_1, ω_2 satisfazem a condição*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0. \quad (4.2.4)$$

Caso contrário, $u = u(x, t)$ é dita ser não-genérica.

Agora, trabalharemos algumas equações pseudoesféricas em cada uma das seções abaixo.

4.3 A Equação de sine-Gordon

Na presente seção, desenvolvemos, a partir das 1-formas e das equações de estrutura de uma equação pseudoesférica, um estudo sobre a equação de *sine-Gordon*, equação que surge da geometria em um ambiente pseudoesférico.

Consideremos as 1-formas, com $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constante, dadas por

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{\eta} \operatorname{sen}(u) dt, \\ \omega_2 = \eta dx + \frac{1}{\eta} \cos(u) dt, \\ \omega_3 = u_x dx. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Verifiquemos as equações da Definição 4.2.1.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d\left(\frac{1}{\eta} \operatorname{sen}(u)\right) \wedge dt = \frac{1}{\eta} d(\operatorname{sen}(u)) \wedge dt \\ &= \frac{1}{\eta} (u_x \cos(u) dx + u_t \cos(u) dt) \wedge dt = \frac{1}{\eta} u_x \cos(u) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

E, também,

$$\omega_3 \wedge \omega_2 = (u_x dx) \wedge \left(\eta dx + \frac{1}{\eta} \cos(u) dt \right) = \frac{1}{\eta} u_x \cos(u) dx \wedge dt.$$

Assim, segue que $d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 \equiv 0$. Façamos o mesmo processo para a segunda equação. Daí,

$$\begin{aligned} d\omega_2 &= d \left(\eta dx + \frac{1}{\eta} \cos(u) dt \right) = \eta d(dx) + \frac{1}{\eta} d(\cos(u) dt) = \frac{1}{\eta} d(\cos(u) dt) \\ &= -\frac{1}{\eta} (u_x \sin(u) dx + u_t \sin(u) dt) \wedge dt = -\frac{1}{\eta} u_x \sin(u) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

E, também,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_3 &= \left(\frac{1}{\eta} \sin(u) dt \right) \wedge (u_x dx) = \frac{1}{\eta} u_x \sin(u) dt \wedge dx \\ &= -\frac{1}{\eta} u_x \sin(u) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Segue que $d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 \equiv 0$. Por fim, façamos o mesmo processo para a terceira equação. Portanto,

$$d\omega_3 = d(u_x dx) = (u_{xx} dx + u_{tx} dt) \wedge dx = u_{tx} dt \wedge dx = -u_{tx} dx \wedge dt.$$

E, também,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= \left(\frac{1}{\eta} \sin(u) dt \right) \wedge \left(\eta dx + \frac{1}{\eta} \cos(u) dt \right) = \eta \frac{1}{\eta} \sin(u) dt \wedge dx \\ &= -\sin(u) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Destas equações, segue que $d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 = -(u_{tx} - \sin(u)) dx \wedge dt$.

Como resultado, nas soluções da equação *sine-Gordon*

$$u_{tx} - \sin(u) = 0,$$

as formas consideradas no exemplo em questão satisfazem as equações da Definição 4.2.1. Como

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\sin(u) dx \wedge dt,$$

então $u = u(x, t)$ será uma solução genérica para a equação de *sine-Gordon* desde que $u \notin \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$. Como visto no Capítulo 3, temos a primeira forma fundamental que a solução genérica $u = u(x, t)$ fornece, a qual é dada por

$$\begin{aligned} I &= \omega_1^2 + \omega_2^2 = \left(\frac{1}{\eta} \operatorname{sen}(u) dt \right)^2 + \left(\eta dx + \frac{1}{\eta} \cos(u) dt \right)^2 \\ &= \eta^2 dx^2 + 2 \cos(u) dx dt + \frac{1}{\eta^2} dt^2. \end{aligned}$$

Sendo assim, tem-se que a primeira forma fundamental, isto é, a métrica, é

$$I = \eta^2 dx^2 + 2 \cos(u) dx dt + \frac{1}{\eta^2} dt^2. \quad (4.3.2)$$

4.4 A Equação de Korteweg de-Vries

Nesta seção, desenvolvemos, a partir das 1-formas e das equações de estrutura de uma equação pseudoesférica, um estudo sobre a equação de *Korteweg de-Vries*.

A equação em questão nasce no contexto físico, no trabalho de [Korteweg e Vries \(1895\)](#), cujo propósito foi discutir uma modelagem de uma mudança de forma de ondas longas que se propagam em um canal retangular e, nele, a referida equação se torna publicamente conhecida. A prova de que esta equação é pseudoesférica se deu no trabalho de [Sasaki \(1979\)](#).

Este exemplo está feito em [Chern e Tenenblat \(1986\)](#), porém aqui daremos mais detalhes da construção.

Consideremos, então, as 1-formas diferenciais, com $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{cases} \omega_1 = (1 - u) dx + [-u_{xx} + \eta u_x + (1 - u)(\eta^2 + 2u)] dt, \\ \omega_2 = \eta dx + (\eta^3 + 2\eta u - 2u_x) dt, \\ \omega_3 = -(1 + u) dx + [-u_{xx} + \eta u_x - (1 + u)(\eta^2 + 2u)] dt. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Verifiquemos as equações de estrutura da Definição 4.2.1 para as 1-formas presentes na Equação (4.4.1).

Sendo assim,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d(1-u) \wedge dx + d[-u_{xx} + \eta u_x + (1-u)(\eta^2 + 2u)] \wedge dt \\ &= u_t dx \wedge dt + (-u_{xxx} + \eta u_{xx} - \eta^2 u_x + 2u_x - 4uu_x) dx \wedge dt \\ &= (u_t - u_{xxx} + \eta u_{xx} - \eta^2 u_x + 2u_x - 4uu_x) dx \wedge dt \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned} \omega_3 \wedge \omega_2 &= -(1+u)(\eta^3 + 2\eta u - 2u_x) dx \wedge dt \\ &\quad - \eta[-u_{xx} + \eta u_x - (1+u)(\eta^2 + 2u)] dx \wedge dt \\ &= -\eta(1+u)(\eta^2 + 2u) + 2u_x(1+u) dx \wedge dt \\ &\quad + \eta(1+u)(\eta^2 + 2u) - \eta(-u_{xx} + \eta u_x) dx \wedge dt \\ &= (2uu_x + 2u_x + \eta u_{xx} - \eta^2 u_x) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Portanto, a primeira condição de compatibilidade, isto é, a primeira equação de estrutura é satisfeita quando

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 \\ &= (u_t - u_{xxx} + \eta u_{xx} - \eta^2 u_x + 2u_x - 4uu_x - 2uu_x - 2u_x - \eta u_{xx} + \eta^2 u_x) dx \wedge dt \\ &= (u_t - u_{xxx} - 6uu_x) dx \wedge dt, \end{aligned}$$

ou seja, a primeira equação de estrutura é verificada nas soluções da equação de Korteweg de-Vries dada por

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x. \quad (4.4.2)$$

Ademais, para a segunda equação de estrutura, tem-se que

$$d\omega_2 = d(\eta^3 + 2\eta u - 2u_x) \wedge dt = (2\eta u_x - 2u_{xx}) dx \wedge dt$$

e, também,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_3 &= (1-u)[-u_{xx} + \eta u_x - (1+u)(\eta^2 + 2u)] dx \wedge dt \\ &\quad + (1+u)[-u_{xx} + \eta u_x + (1-u)(\eta^2 + 2u)] dx \wedge dt \\ &= (2\eta u_x - 2u_{xx}) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Logo, $d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 \equiv 0$.

Já para a terceira e última equação de estrutura, tem-se que

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= -d(1+u) \wedge dx + d[-u_{xx} + \eta u_x - (1+u)(\eta^2 + 2u)] \wedge dt \\ &= u_t dx \wedge dt + (-u_{xxx} + \eta u_{xx} - \eta^2 u_x - 4uu_x - 2u_x) dx \wedge dt \\ &= (u_t - u_{xxx} + \eta u_{xx} - \eta^2 u_x - 4uu_x - 2u_x) dx \wedge dt \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (1-u)(\eta^3 + 2\eta u - 2u_x) dx \wedge dt \\ &\quad - \eta[-u_{xx} + \eta u_x + (1-u)(\eta^2 + 2u)] dx \wedge dt \\ &= [-2u_x(1-u) - \eta(-u_{xx} + \eta u_x)] dx \wedge dt \\ &= (-2u_x + 2uu_x + \eta u_{xx} + \eta^2 u_x) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Portanto, a terceira equação de estrutura é satisfeita quando

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= (u_t - u_{xxx} + \eta u_{xx} - \eta^2 u_x - 4uu_x - 2u_x) dx \wedge dt \\ &\quad - (-2u_x + 2uu_x + \eta u_{xx} + \eta^2 u_x) dx \wedge dt \\ &= (u_t - u_{xxx} - 6uu_x) dx \wedge dt, \end{aligned}$$

ou seja, a primeira equação de estrutura é verificada nas soluções da Equação (4.4.2).

Como

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-2u_x + 2uu_x + \eta u_{xx} + \eta^2 u_x) dx \wedge dt,$$

então, pela Definição 4.2.2, a solução da Equação é genérica quando

$$2uu_x + \eta u_{xx} + \eta^2 u_x - 2u_x \neq 0.$$

Ademais, pelo Capítulo 3, é possível calcular a primeira forma quadrática fundamental que a solução genérica $u = u(x, t)$ nos fornece. Dessa forma, a primeira forma fundamental é dada por

$$\begin{aligned} I &= \omega_1^2 + \omega_2^2 \\ &= [\eta^2 + (1-u)^2] dx^2 \\ &\quad + 2[(1-u)(-u_{xx} + \eta u_x + (1-u)(\eta^2 + 2u)) + \eta(\eta(\eta^2 + 2u) - 2u_x)] dx dt \\ &\quad + [(-u_{xx} + \eta u_x + (1-u)(\eta^2 + 2u))^2 + (\eta(\eta^2 + 2u) - 2u_x)^2] dt^2. \end{aligned}$$

4.5 A Equação de Korteweg de-Vries modificada

Durante esta seção faremos, a partir das 1-formas e das equações de estrutura de uma equação pseudoesférica, o exemplo da equação de *Korteweg de-Vries modificada*.

Tal equação nasce, também, num contexto físico, sendo apresentada, pela primeira vez em [Miura \(1968\)](#), cujo propósito foi, além de generalizar a equação de *Korteweg de-Vries*, formular uma equação auxiliar para estudar propriedades de integrabilidade da mesma equação. Posteriormente, descobriu-se que ela também tinha as mesmas propriedades. A prova que a equação de *Korteweg de-Vries modificada* ser também pseudoesférica foi mostrada por Sasaki em [Sasaki \(1979\)](#).

Este exemplo está feito em [Chern e Tenenblat \(1986\)](#), porém aqui daremos mais detalhes da construção.

Consideremos, então, as 1-formas, com $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{cases} \omega_1 = -\eta u_x dt, \\ \omega_2 = \eta dx + \left(\frac{\eta}{2}u^2 + \eta^3\right) dt, \\ \omega_3 = u dx + \left(u_{xx} + \frac{1}{2}u^3 + \eta^2u\right) dt. \end{cases} \quad (4.5.1)$$

Apliquemos a Definição 4.2.1 nas 1-formas presentes em (4.5.1).

Dessa forma, tem-se que, para a primeira equação,

$$d\omega_1 = -\eta d(u_x) \wedge dt = -\eta u_{xx} dx \wedge dt$$

e, também,

$$\begin{aligned} \omega_3 \wedge \omega_2 &= \left[u \left(\frac{\eta}{2}u^2 + \eta^3 \right) - \eta \left(u_{xx} + \frac{1}{2}u^3 + \eta^2u \right) \right] dx \wedge dt \\ &= \left(\frac{\eta}{2}u^3 + \eta^3u - \eta u_{xx} - \frac{\eta}{2}u^3 - \eta^3u \right) dx \wedge dt = -\eta u_{xx} dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Note que $d\omega_1 - \omega_2 \wedge \omega_3 \equiv 0$ e, portanto, a primeira equação está satisfeita.

Para a segunda equação, tem-se que

$$d\omega_2 = d\left(\frac{\eta}{2}u^2 + \eta^3\right) \wedge dt = \eta uu_x dx \wedge dt$$

e, também,

$$\omega_1 \wedge \omega_3 = \eta uu_x dx \wedge dt.$$

Segue que $d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 \equiv 0$ e, portanto, a segunda equação está satisfeita.

Para a terceira equação, tem-se que

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= d(u) \wedge dx + d\left(u_{xx} + \frac{1}{2}u^3 + \eta^2 u\right) \wedge dt \\ &= -u_t dx \wedge dt + \left(u_{xxx} + \frac{3}{2}u^2 u_x + \eta^2 u_x\right) dx \wedge dt \\ &= \left(-u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2}u^2 u_x + \eta^2 u_x\right) dx \wedge dt \end{aligned}$$

e, também,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \eta^2 u_x.$$

Portanto, a terceira equação é satisfeita quando $d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 \equiv 0$, ou seja, nas soluções da equação

$$u_t = u_{xxx} + \frac{3}{2}u^2 u_x,$$

que é denominada de Equação de *Korteweg de-Vries modificada*.

Ressalta-se que, como a condição de solução genérica, vide Definição 4.2.2, deve ser satisfeita, toda solução genérica satisfará $u_x \neq 0$, o que implica em

$$u(x, t) \neq k, \quad k \in \mathbb{R},$$

para todo (x, t) no domínio de u .

Uma vez tendo o correferencial, a métrica definida por ele é, como visto no capítulo anterior,

$$I = \omega_1^2 + \omega_2^2 = \eta^2 dx^2 + \eta \left(\frac{\eta}{2}u^2 + \eta^2\right) dxdt + \left[\eta^2 u_x^2 + \left(\frac{\eta^2}{2}u^2 + \eta^3\right)^2\right] dt^2.$$

4.6 A Equação de Camassa-Holm

Durante esta seção faremos, a partir das 1-formas e das equações de estrutura de uma equação pseudoesférica, o exemplo da equação de *Camassa-Holm*.

Tal equação foi obtida através de trabalhos realizados por Camassa e Holm, [Camassa e Holm \(1993\)](#), como um modelo de propagação de ondas em águas rasas. Posteriormente, Reyes, em [Reyes \(2002\)](#), provou que esta equação é do tipo pseudoesférica.

Este exemplo está feito em [Freire \(2025b\)](#), porém aqui daremos mais detalhes da construção.

Considere as 1-formas, com $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $m = u - u_{xx}$,

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} - m \right) dx + \left(mu + \frac{\eta}{2}u - \frac{1}{2\eta}u - \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dt, \\ \omega_2 = -u_x dt, \\ \omega_3 = \left(m - \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \right) dx + \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2}u - \frac{1}{2\eta}u - \frac{1}{2} - mu \right) dt. \end{cases} \quad (4.6.1)$$

Apliquemos a Definição 4.2.1 nas 1-formas presentes em (4.6.1).

Dessa forma, tem-se que, para a primeira equação,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -d(m) \wedge dx + d\left(mu + \frac{\eta}{2}u - \frac{u}{2\eta}\right) \wedge dt \\ &= m_t dx \wedge dt + \left[ud(m) + md(u) + \frac{\eta}{2}d(u) - \frac{1}{2\eta}d(u)\right] dt \\ &= m_t dx \wedge dt + \left(m_x u + u_x m + \frac{\eta}{2}u_x - \frac{1}{2\eta}u_x\right) dx \wedge dt \\ &= \left(m_t + m_x u + u_x m + \frac{\eta}{2}u_x - \frac{1}{2\eta}u_x\right) dx \wedge dt \end{aligned}$$

e, também,

$$\omega_3 \wedge \omega_2 = -u_x \left(m - \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \right) dx \wedge dt = \left(-u_x m + \frac{\eta}{2}u_x - \frac{1}{2\eta}u_x \right) dx \wedge dt.$$

Sendo assim, a diferença entre as equações é dada por

$$\begin{aligned} d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 &= \left(m_t + m_x u + u_x m + \frac{\eta}{2} u_x - \frac{1}{2\eta} u_x \right) dx \wedge dt \\ &\quad + \left(u_x m - \frac{\eta}{2} u_x + \frac{1}{2\eta} u_x \right) dx \wedge dt \\ &= (u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx}) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Para satisfazer a primeira equação, temos que

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0.$$

Portanto, a primeira equação de estrutura é satisfeita nas soluções da equação de *Camassa-Holm*.

Para a segunda equação, tem-se que

$$d\omega_2 = -d(u_x) \wedge dt = u_{xx} dx \wedge dt$$

e, também,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_3 &= \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} - m \right) \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2} u - \frac{u}{2\eta} - \frac{1}{2} - mu \right) dx \wedge dt \\ &\quad - \left(m - \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \right) \left(mu + \frac{\eta}{2} u - \frac{u}{2\eta} - \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dx \wedge dt \\ &= \left[\frac{\eta^3}{4} - \frac{\eta^2}{4} u - \frac{\eta^2}{2} m + \left(m^2 - \frac{1}{2} \right) u - \frac{1}{4\eta^2} u - \frac{1}{4\eta} + \frac{1}{2} m \right] dx \wedge dt \\ &\quad - \left[\frac{\eta^3}{4} - \frac{\eta^2}{4} u - \frac{\eta^2}{2} m + \left(m^2 + \frac{1}{2} \right) u - \frac{1}{4\eta^2} u - \frac{1}{2} m - \frac{1}{4\eta} \right] dx \wedge dt \\ &= (m - u) dx \wedge dt = u_{xx} dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Note que $d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 \equiv 0$. Assim, a segunda equação é satisfeita.

Para a terceira equação, tem-se que

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= d(m) \wedge dx - d\left(\frac{\eta}{2} u + \frac{1}{2\eta} u + mu \right) \wedge dt \\ &= -m_t dx \wedge dt - \left(\frac{\eta}{2} u_x + \frac{1}{2\eta} u_x + m_x u + u_x m \right) dx \wedge dt \\ &= -\left(m_t + \frac{\eta}{2} u_x + \frac{1}{2\eta} u_x + m_x u + u_x m \right) dx \wedge dt \end{aligned}$$

e, também,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -u_x \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} - m \right) = \left(-\frac{\eta}{2}u_x - \frac{1}{2\eta}u_x + u_x m \right) dx \wedge dt.$$

Sendo assim, a diferença entre as equações é dada por

$$\begin{aligned} d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 &= - \left(m_t + \frac{\eta}{2}u_x + \frac{1}{2\eta}u_x + m_x u + u_x m \right) dx \wedge dt \\ &\quad - \left(-\frac{\eta}{2}u_x - \frac{1}{2\eta}u_x + u_x m \right) dx \wedge dt \\ &= - (u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx}) dx \wedge dt \end{aligned}$$

Para satisfazer a terceira equação, temos que

$$u_t - u_{txx} + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0.$$

Portanto, a terceira equação de estrutura é satisfeita, assim como a primeira, nas soluções da equação de *Camassa-Holm*.

Vamos investigar as soluções genéricas da equação de *Camassa-Holm*. Como já visto,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = - \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} - m \right) u_x.$$

Desde que $u = u(x, t)$ seja uma solução da equação supracitada, então $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$ em algum ponto se, e somente se,

$$u_x = 0 \quad \text{ou} \quad m = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta}.$$

Notemos que, se $u_x = 0$, encontramos que $u_t = 0$ e, por este motivo, uma das soluções não genéricas para este caso são as funções constantes $u(x, t) = k$, com $k \in \mathbb{R}$. Ademais, para o outro caso, façamos a substituição $y(\cdot) = u(\cdot, t)$ e, dessa forma, o segundo caso se reduz a avaliar a equação diferencial ordinária dada por

$$y - \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\eta^2 + 1}{2\eta},$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$y(x) = u(x, t) = f(t)e^x + g(t)e^{-x} + \frac{\eta^2 + 1}{2\eta},$$

em que $f, g \in \mathcal{C}^1$ são funções quaisquer.

Ademais, esta equação define uma superfície com primeira forma fundamental dada por

$$\begin{aligned} I &= \omega_1^2 + \omega_2^2 = \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} - m \right)^2 dx^2 \\ &+ 2 \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} - m \right) \left(mu + \frac{\eta}{2}u - \frac{1}{2\eta}u - \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dxdt \\ &+ \left[\left(mu + \frac{\eta}{2}u - \frac{1}{2\eta}u - \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + u_x^2 \right] dt^2. \end{aligned}$$

4.7 Uma Equação de Novikov

Durante esta seção faremos, a partir das 1-formas e das equações de estrutura de uma equação pseudoesférica, o exemplo da equação de *Novikov*. A equação em questão foi, pela primeira vez, deduzida num trabalho de [Novikov \(2009\)](#), o qual tinha por intuito generalizar a equação de *Camassa-Holm*. Este exemplo está feito em [Freire e Tito \(2021\)](#), o qual também prova que a equação que consideraremos a seguir é uma equação pseudoesférica.

Considere as 1-formas, com $m = u - u_{xx}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = m dx + (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dt, \\ \omega_2 = \left(\eta m + \sqrt{1 + \eta^2} \right) dx + \eta (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dt, \\ \omega_3 = \left(\sqrt{1 + \eta^2} m + \eta \right) dx + \sqrt{1 + \eta^2} (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dt. \end{array} \right. \quad (4.7.1)$$

Apliquemos a Definição 4.2.1 nas 1-formas presentes em (4.7.1). Dessa forma, tem-se que, para a primeira equação,

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d(m) \wedge dx + d(2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) \wedge dt \\ &= -m_t dx \wedge dt + (2m_x u + 2u_x m + 4u_x^2 + 4uu_{xx} - 4u_x u_{xx} - 4uu_x) dx \wedge dt \\ &= (-m_t + 2m_x u + 2u_x m + 4u_x^2 + 4uu_{xx} - 4u_x u_{xx} - 4uu_x) dx \wedge dt \\ &= (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 4uu_{xx} + 4u_x^2) dx \wedge dt \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned}\omega_3 \wedge \omega_2 &= \eta \left(\sqrt{1 + \eta^2} m + \eta \right) (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dx \wedge dt \\ &\quad - \sqrt{1 + \eta^2} (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) \left(\eta m + \sqrt{1 + \eta^2} \right) dx \wedge dt \\ &= - (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dx \wedge dt \\ &= (2uu_{xx} - 4uu_x + 2u_x^2) dx \wedge dt.\end{aligned}$$

Sendo assim, a diferença entre as equações é dada por

$$\begin{aligned}d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 &= (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 4uu_{xx} + 4u_x^2) dx \wedge dt \\ &\quad - (2uu_{xx} - 4uu_x + 2u_x^2) dx \wedge dt \\ &= (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 2uu_{xx} + 2u_x^2 + 4uu_x) dx \wedge dt.\end{aligned}$$

Para satisfazer a primeira equação, temos que

$$u_t - u_{xxt} = 4uu_x + 2u_x^2 + 2uu_{xx} - 6u_x u_{xx} - 2uu_{xxx}. \quad (4.7.2)$$

Portanto, a primeira equação de estrutura é satisfeita nas soluções da equação de *Novikov*.

Para a segunda equação, tem-se que

$$\begin{aligned}d\omega_2 &= \eta d(m) \wedge dx + \eta d(2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) \wedge dt \\ &= -\eta m_t dx \wedge dt + \eta (2m_x u + 2u_x m + 4u_x^2 + 4uu_{xx} - 4u_x u_{xx} - 4uu_x) dx \wedge dt \\ &= \eta (-m_t + 2m_x u + 2u_x m + 4u_x^2 + 4uu_{xx} - 4u_x u_{xx} - 4uu_x) dx \wedge dt \\ &= \eta (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 4uu_{xx} + 4u_x^2) dx \wedge dt\end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_3 &= \sqrt{1 + \eta^2} (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) m dx \wedge dt \\ &\quad - \left(\sqrt{1 + \eta^2} m + \eta \right) (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dx \wedge dt \\ &= \eta (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dx \wedge dt \\ &= \eta (2mu - 2u_{xx} + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dx \wedge dt.\end{aligned}$$

Sendo assim, a diferença entre as equações é dada por

$$\begin{aligned}d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3 &= \eta (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 4uu_{xx} + 4u_x^2) dx \wedge dt \\ &\quad - \eta (2uu_{xx} - 4uu_x + 2u_x^2) dx \wedge dt \\ &= \eta (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 2uu_{xx} + 2u_x^2 + 4uu_x) dx \wedge dt.\end{aligned}$$

Para satisfazer a segunda equação, temos que vale a Equação (4.7.2). Portanto, a segunda equação de estrutura também é satisfeita nas soluções da equação de *Novikov*.

Para a terceira equação, tem-se que

$$\begin{aligned} d\omega_3 &= \sqrt{1+\eta^2}d(m) \wedge dx + \sqrt{1+\eta^2}d(2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) \wedge dt \\ &= \sqrt{1+\eta^2} [d(m) \wedge dx + d(2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) \wedge dt] \\ &= \sqrt{1+\eta^2} (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 4uu_{xx} + 4u_x^2) dx \wedge dt \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= \eta m (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dx \wedge dt \\ &\quad - (\eta m + \sqrt{1+\eta^2}) (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dx \wedge dt \\ &= -\sqrt{1+\eta^2} (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dx \wedge dt \\ &= \sqrt{1+\eta^2} (2uu_{xx} - 4uu_x + 2u_x^2) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Sendo assim, a diferença entre as equações é dada por

$$\begin{aligned} d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 &= \sqrt{1+\eta^2} (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 4uu_{xx} + 4u_x^2) dx \wedge dt \\ &\quad - \sqrt{1+\eta^2} (2uu_{xx} - 4uu_x + 2u_x^2) dx \wedge dt \\ &= \sqrt{1+\eta^2} (-u_t + u_{xxt} - 2uu_{xxx} - 6u_x u_{xx} + 2uu_{xx} + 2u_x^2 + 4uu_x) dx \wedge dt. \end{aligned}$$

Para satisfazer a terceira equação, encontramos, novamente, a Equação (4.7.2). Portanto, a terceira equação de estrutura é satisfeita, assim como a primeira, nas soluções da equação de *Novikov*.

Note que, sendo $u = u(x, t)$ uma solução da equação de *Novikov*, esta é dita ser não genérica quando satisfizer

$$2uu_{xx} - 4uu_x + 2u_x^2 = 0.$$

Fazendo a substituição já feita anteriormente, isto é, $y(\cdot) = u(\cdot, t)$ e reescrevendo a equação acima, encontramos a equação diferencial ordinária dada por

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - 2y \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

Considere a substituição $p = \frac{dy}{dx}$ e, então,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Sendo assim, encontramos a equação diferencial ordinária dada por

$$yp \frac{dp}{dy} - 2yp + p^2 = 0.$$

Suporemos, em primeiro momento, $p \neq 0$ e, portanto, obteremos a equação

$$y \frac{dp}{dy} + p = 2y.$$

Para esta equação, note que o termo à esquerda é uma derivada e, assim, obtemos que

$$p = y + \frac{C}{y},$$

o que implica, pela substituição feita, em

$$y = \sqrt{f(t) e^{2x} + g(t)},$$

com as funções $f, g \in \mathcal{C}^1$. Se $p = 0$, segue que $y = g(t)$, que é contemplada na solução anterior. Portanto, as soluções da equação de *Novikov*, para este caso, que são genéricas são as soluções que diferem de

$$u(x, t) = \sqrt{f(t) e^{2x} + g(t)}.$$

A raiz negativa foi omitida pois a equação diferencial ordinária encontrada possui a simetria discreta $y \mapsto -y$.

Ademais, tais formas diferenciais nos fornecem uma métrica de uma superfície, sendo dada pela primeira forma fundamental

$$\begin{aligned} I &= \omega_1^2 + \omega_2^2 \\ &= \left[m + \left(\eta m + \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 \right] dx^2 \\ &\quad + 2 \left(m + \eta m + \sqrt{1 + \eta^2} \right) (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2) dxdt \\ &\quad + (\eta^2 + 1) (2mu + 4uu_x - 2u_x^2 - 2u^2)^2 dt^2. \end{aligned}$$

5 A Transformação de Bäcklund

Suponha que existam duas equações diferenciais parciais distintas em duas variáveis independentes x e t para duas funções u e v , dadas por

$$F(u) = 0 \quad e \quad G(v) = 0. \quad (5.0.1)$$

Seja $B_i = 0$ um par de relações da forma

$$B_i(x, t, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \dots, u_{(n)}, v_{(n)}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.0.2)$$

entre as funções u e v e suas derivadas.

De acordo com [Drazin e Johnson \(1989\)](#), a relação $B_i = 0$ é uma *Transformação de Bäcklund* se $B_i = 0$ for integrável para v quando $F(u) = 0$ e a função v for solução da equação $G(v) = 0$ e reciprocamente. Ademais, se $F = G$ e u e v satisfazem a mesma equação, então $B_i = 0$, com $i = 1, 2$, é chamada de uma *Autotransformação de Bäcklund*.

Um exemplo de autotransformação de Bäcklund são as relações de Cauchy-Riemann para funções de uma variável complexa, isto é,

$$u_x = v_y \quad e \quad u_y = -v_x. \quad (5.0.3)$$

Tais relações são a autotransformação de Bäcklund da equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ou \quad v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (5.0.4)$$

No presente capítulo, apresentaremos a teoria da Transformação de Bäcklund, utilizando as referências [Rogers e Schief \(2002\)](#) e [Beals, Rabelo e Tenenblat \(1989\)](#) para melhor elucidar o conceito e empregando o conhecimento até então adquirido, ou seja, via formas diferenciais, com enfoque na equação de *sine-Gordon*, dada pela equação diferencial

$$u_{xt} = \text{sen}(u), \quad (5.0.5)$$

a qual pode ser expressa de outras maneiras, as quais serão exploradas na Seção 5.4 deste capítulo. Ademais, encontraremos a autotransformação de Bäcklund da mesma equação

e, também, estudaremos o Teorema da Permutabilidade de Bianchi, [Bianchi \(1899\)](#), o qual aplicaremos à equação (5.0.5).

A transformação de Bäcklund é um artifício poderoso para resolver certas equações diferenciais e seu surgimento deu-se no século XIX, quando Bäcklund estudava certos tipos de equações diferenciais e queria encontrar soluções para tais equações. Hodiername, essa transformação é utilizada, não só no âmbito da análise, mas também na geometria, para encontrar relações entre equações diferenciais que possuem propriedades geométricas. A exemplo, a equação se *sine-Gordon*.

5.1 Preliminares

Nesta seção, serão demonstrados resultados que utilizaremos de maneira constante para as demais seções deste capítulo. Lembremos, que uma equação diferencial

$$\mathcal{E}(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}) = 0 \quad (5.1.1)$$

é dita descrever uma superfície pseudoesférica quando existem funções diferenciáveis $f_{ij} = f_{ij}(x, t, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})$, com $1 \leq i, j \leq 3$, tais que as formas diferenciais dadas por

$$\omega_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (5.1.2)$$

satisfazem as equações de estruturas, veja Definição 4.2.1. Ademais, é salutar recordar que para uma solução de $\mathcal{E} = 0$ ser considerada genérica, deve-se ter $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$ e, caso contrário, a solução é dita ser não-genérica. A partir deste momento, nos referiremos à equação (5.1.2) como simplesmente $\mathcal{E} = 0$.

Agora, provaremos alguns resultados que serão utilizados no decorrer da monografia.

O primeiro teorema a ser provado aparece na Proposição 4.2 de [Chern e Tenenblat \(1986\)](#) e, posteriormente, em outros trabalhos de Tenenblat. Aqui usamos uma formulação mais compatível com aquela apresentada em [Beals, Rabelo e Tenenblat \(1989\)](#).

Teorema 5.1.1. *Seja $\mathcal{E} = 0$ uma equação diferencial que descreve superfícies pseudoesféricas. Considere que as 1-formas associadas à essa equação sejam dadas pela*

por (5.1.2). Então, para cada solução da equação diferencial, o sistema de equações diferenciais em $\phi(x, t)$ dado por

$$\begin{cases} \phi_x = f_{31} + f_{11} \operatorname{sen}(\phi) + f_{21} \cos(\phi), \\ \phi_t = f_{32} + f_{12} \operatorname{sen}(\phi) + f_{22} \cos(\phi), \end{cases} \quad (5.1.3)$$

é integrável.

Observação 5.1.1. Por integrável entendemos $\phi_{xt} = \phi_{tx}$.

Demonstração. Basta verificar que, para cada solução $u = u(x, t)$ da equação diferencial pseudoesférica $\mathcal{E} = 0$ vale a condição de Frobenius, ou seja, $d^2\phi = 0$. Equivalentemente, verifiquemos se o Teorema de Schwarz é válido, isto é, $\phi_{xt} = \phi_{tx}$. Portanto, calculemos as derivadas mistas da função $\phi(x, t)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \phi_{xt} = \partial_x(\phi_t) &= \partial_x[f_{32} + f_{12} \operatorname{sen}(\phi) + f_{22} \cos(\phi)] \\ &= \partial_x f_{32} + \operatorname{sen}(\phi) \partial_x f_{12} + f_{12} \cos(\phi) \phi_x + \cos(\phi) \partial_x f_{22} - f_{22} \operatorname{sen}(\phi) \phi_x \\ &= \partial_x f_{32} + \operatorname{sen}(\phi) \partial_x f_{12} + \cos(\phi) \partial_x f_{22} + [f_{12} \cos(\phi) - f_{22} \operatorname{sen}(\phi)] \phi_x \\ &= \partial_x f_{32} + \operatorname{sen}(\phi) \partial_x f_{12} + \cos(\phi) \partial_x f_{22} \\ &\quad + [f_{12} \cos(\phi) - f_{22} \operatorname{sen}(\phi)] [f_{31} + f_{11} \operatorname{sen}(\phi) + f_{21} \cos(\phi)] \\ &= \partial_x f_{32} + [\partial_x f_{12} - f_{31} f_{22}] \operatorname{sen}(\phi) + [\partial_x f_{22} + f_{31} f_{12}] \cos(\phi) \\ &\quad + [f_{11} f_{12} - f_{21} f_{22}] \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) + f_{12} f_{21} \cos(\phi)^2 - f_{11} f_{22} \operatorname{sen}(\phi)^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que a derivada mista restante é dada por

$$\begin{aligned} \phi_{tx} = \partial_t(\phi_x) &= \partial_t[f_{31} + f_{11} \operatorname{sen}(\phi) + f_{21} \cos(\phi)] \\ &= \partial_t f_{31} + \operatorname{sen}(\phi) \partial_t f_{11} + f_{11} \cos(\phi) \phi_t + \cos(\phi) \partial_t f_{21} - f_{21} \operatorname{sen}(\phi) \phi_t \\ &= \partial_t f_{31} + \operatorname{sen}(\phi) \partial_t f_{11} + \cos(\phi) \partial_t f_{21} + [f_{11} \cos(\phi) - f_{21} \operatorname{sen}(\phi)] \phi_t \\ &= \partial_t f_{31} + \operatorname{sen}(\phi) \partial_t f_{11} + \cos(\phi) \partial_t f_{21} \\ &\quad + [f_{11} \cos(\phi) - f_{21} \operatorname{sen}(\phi)] [f_{32} + f_{12} \operatorname{sen}(\phi) + f_{22} \cos(\phi)] \\ &= \partial_t f_{31} + [\partial_t f_{11} - f_{32} f_{21}] \operatorname{sen}(\phi) + [\partial_t f_{21} + f_{32} f_{11}] \cos(\phi) \\ &\quad + [f_{12} f_{11} - f_{21} f_{22}] \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) + f_{11} f_{22} \cos(\phi)^2 - f_{12} f_{21} \operatorname{sen}(\phi)^2. \end{aligned}$$

Tomando a diferença $\phi_{xt} - \phi_{tx}$, tem-se que

$$\begin{aligned}\phi_{xt} - \phi_{tx} &= \partial_x f_{32} - \partial_t f_{31} + f_{12}f_{21} - f_{11}f_{22} \\ &+ [\partial_x f_{22} - \partial_t f_{21} + f_{31}f_{12} - f_{32}f_{11}] \cos(\phi) \\ &+ [\partial_x f_{12} - \partial_t f_{11} + f_{32}f_{21} - f_{31}f_{22}] \sin(\phi) \\ &= d\omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_2 + [d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3] \cos(\phi) + [d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2] \sin(\phi) = 0.\end{aligned}$$

Sendo assim, o sistema (5.1.3) é integrável para cada solução da equação diferencial pseudoesférica. \square

Os próximos dois resultados relacionam a integrabilidade do sistema de equações (5.1.3) com a integrabilidade de um outro sistema de equações para as soluções $u = u(x, t)$ da equação diferencial pseudoesférica $\mathcal{E}(x, t, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}) = 0$. Considere uma equação diferencial para $\phi = \phi(x, t)$ denotada por $L(\phi) = 0$ e uma função G de tal modo que $u = G(\phi)$. O sistema formado pelas duas equações

$$\begin{cases} L(\phi) = 0, \\ G(\phi) = u, \end{cases} \quad (5.1.4)$$

será usado nos próximos teoremas.

Teorema 5.1.2. *Seja $\mathcal{E} = 0$ uma equação diferencial para $u = u(x, t)$ que descreve uma superfície pseudoesférica. Considere as 1-formas diferenciais associadas à essa equação dadas por (5.1.2), isto é, elas satisfazem equações de compatibilidade (4.2.3). Suponha que o sistema (5.1.3) seja equivalente ao sistema de equações (5.1.4). Dada uma solução $u = u(x, t)$ de $\mathcal{E} = 0$, então o sistema (5.1.3) é integrável e ϕ é solução de $L(\phi) = 0$. Reciprocamente, se ϕ for uma solução de $L(\phi) = 0$ implicar que $u = G(\phi)$ seja uma solução de $\mathcal{E} = 0$, então o sistema (5.1.3) é integrável.*

Demonstração. Seja $u = u(x, t)$ uma solução de $\mathcal{E} = 0$. Pelo Teorema 5.1.1, tem-se que o sistema (5.1.3) é integrável. Ademais, por hipótese, o sistema (5.1.3) é equivalente ao sistema (5.1.4), o que implica que o sistema (5.1.4) é integrável. Dessa forma, segue que $\phi = \phi(x, t)$ é solução de $L(\phi) = 0$. Para a suficiência, suponha que $\phi = \phi(x, t)$ seja uma solução para $L(\phi) = 0$. Por hipótese, segue que $u = G(\phi)$ é solução de $\mathcal{E} = 0$. Pelo Teorema 5.1.1, concluímos que o sistema (5.1.3) é integrável. \square

Teorema 5.1.3. *Seja $\mathcal{E} = 0$ uma equação diferencial para $u = u(x, t)$ que descreve superfícies pseudoesféricas. Considere as 1-formas diferenciais associadas à essa equação dadas por (5.1.2). Suponha que o sistema (5.1.3) seja integrável e equivalente ao sistema de equações (5.1.4). Dada uma solução $u = u(x, t)$ de $\mathcal{E} = 0$, então $L(\phi) = 0$ é integrável. Reciprocamente, se ϕ é uma solução de $L(\phi) = 0$, então $u = G(\phi)$ é solução de $\mathcal{E} = 0$.*

Demonstração. Suponha que $u = u(x, t)$ seja uma solução de $\mathcal{E} = 0$. Pelo Teorema 5.1.1 e pela hipótese da equivalência entre os sistemas (5.1.3) e (5.1.4), o sistema (5.1.4) é integrável e, portanto, $\phi = \phi(x, t)$ é solução de $L(\phi) = 0$. Por outro lado, suponha que $\phi = \phi(x, t)$ é solução de $L(\phi) = 0$. Por hipótese, os sistemas (5.1.3) e (5.1.4) são equivalentes e (5.1.3) é integrável. Portanto, segue que o sistema (5.1.4) também o é. Como ambos os sistemas são integráveis e o sistema (5.1.3) é integrável para toda solução $u = u(x, t)$ de $\mathcal{E} = 0$, então $u = G(\phi)$ é solução de $\mathcal{E} = 0$. \square

Durante o estudo do artigo de [Beals, Rabelo e Tenenblat \(1989\)](#), foram vistas e demonstradas as proposições *A* e *B*, nas páginas 131 e 132. Na Proposição *B* da referência supracitada, o texto original nos dá a entender que existem diferentes interpretações desta proposição, que foram enunciadas e demonstradas acima como os teoremas 5.1.2 e 5.1.3. O primeiro deles foi uma adaptação proposta pelo autor do presente trabalho e, já o segundo dos teoremas acima, foi uma versão sugerida pelo orientador. Tais adaptações foram feitas em um contexto em que se queria buscar a transformação de Bäcklund de uma equação que generaliza a equação de *sine-Gordon*, ou seja, a equação

$$u_{xt} = (1 - \alpha^2 \partial_x^2) \operatorname{sen}(u).$$

Nesse contexto, a proposição supracitada se tornou alvo de discussões sobre sua interpretação e sobre suas hipóteses. Destaca-se, além disso, que sem a hipótese de integrabilidade no sistema (5.1.3), não seria possível provar a versão original lida no artigo e, por este motivo, utilizaremos com mais frequência o Teorema 5.1.3.

Como consequência dos teoremas 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.1.1. Para cada solução $u = u(x, t)$ da equação (5.0.5), o sistema de equações

$$\begin{cases} \phi_x = u_x + \eta \cos(\phi), \\ \phi_t = \frac{1}{\eta} \cos(u - \phi), \end{cases} \quad (5.1.5)$$

é integrável. Além disso, a função

$$u = \phi + \arccos(\eta \phi_t) \quad (5.1.6)$$

é solução da equação (5.0.5).

Demonstração. De fato, basta tomar as 1-formas da Equação (5.0.5), dadas na Subseção 4.3 e substituir no sistema do Teorema 5.1.1. Para a solução da referida equação pseudoesférica, notemos que

$$\phi_t = \frac{1}{\eta} \cos(u - \phi) \iff \eta \phi_t = \cos(u - \phi) \iff u = \phi + \arccos(\eta \phi_t).$$

Pelo Teorema 5.1.3, segue que esta é uma solução da equação de (5.0.5). \square

Com esses resultados já provados, possuímos toda teoria para que desenvolvamos as seções seguintes a fim e obter as transformações de Bäcklund da Equação (5.0.5).

5.2 A Transformação de Bäcklund da Equação de sine-Gordon

Nesta seção, trabalharemos para conseguir uma transformação de Bäcklund da equação de *sine-Gordon*, dada pela Equação (5.0.5), ou seja,

$$u_{xt} = \sin(u).$$

O objetivo, portanto, é utilizar os resultados provados na Seção 5.1 para dar-nos os resultados teóricos dos cálculos e implicações a serem realizadas.

Em Rogers e Schief (2002), pode-se encontrar que a transformação de Bäcklund leva uma solução de uma certa equação diferencial parcial numa outra solução de uma outra equação diferencial parcial. Assim, uma solução para a segunda equação deve ser compatível com a primeira equação. Portanto, a aplicação da transformação de Bäcklund

pode fornecer um método poderoso para gerar soluções para equações diferenciais parciais.

Vale a pena ressaltar que nesta seção faremos, também, a autotransformação de Bäcklund da mesma equação, obedecendo aos resultados já provados e ao que faremos antes de encontramos tal autotransformação. Ademais, diremos que uma transformação de Bäcklund é uma autotransformação de Bäcklund quando as equações diferenciais parciais original e transformada são as mesmas a menos de difeomorfismos.

Para o primeiro resultado envolvendo a transformação de Bäcklund da Equação (5.0.5), tem-se a seguinte proposição que foi vista, originalmente, em Tenenblat (1998), nos teoremas 5.1 e 5.2, nas páginas 44 e 45.

Proposição 5.2.1. *O sistema de equações diferenciais (5.1.5), ou seja,*

$$\begin{cases} \phi_x = u_x + \eta \cos(\phi), \\ \phi_t = \frac{1}{\eta} \cos(u - \phi), \end{cases}$$

é uma transformação de Bäcklund entre as equações diferenciais

$$u_{xt} = \text{sen}(u) \quad e \quad \phi_{xt} = \cos(\phi) \sqrt{1 - \eta^2 \phi_t^2}.$$

Demonstração. Considere a equação de sine-Gordon (5.0.5). Pelo Corolário 5.1.1, o sistema de equações (5.1.5) é integrável e a Equação (5.1.6) é uma solução de (5.0.5). Ademais, tem-se que

$$\partial_t(\phi_x) = u_{tx} - \eta \text{sen}(\phi) \phi_t = \text{sen}(u) - \eta \text{sen}(\phi) \phi_t.$$

Calculando, em termos de ϕ e suas derivadas, o seno da função u , obtemos que

$$\begin{aligned} \text{sen}(u) &= \text{sen}(\phi) \cos(\arccos(\eta \phi_t)) + \text{sen}(\arccos(\eta \phi_t)) \cos(\phi) \\ &= \eta \text{sen}(\phi) \phi_t + \cos(\phi) \sqrt{1 - \cos(\arccos(\eta \phi_t))^2} \\ &= \eta \text{sen}(\phi) \phi_t + \cos(\phi) \sqrt{1 - \eta^2 \phi_t^2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, obtemos

$$\phi_{tx} = u_{tx} - \eta \text{sen}(\phi) \phi_t = \text{sen}(u) - \eta \text{sen}(\phi) \phi_t = \cos(\phi) \sqrt{1 - \eta^2 \phi_t^2}.$$

Portanto, o resultado que desejávamos está demonstrado. □

Façamos, então, um exemplo para ilustrar o teorema recém-provado.

Exemplo 5.2.1. Tomemos $\phi = \frac{\pi}{2}$ uma solução da equação diferencial para ϕ , ou seja, $\phi_{xt} = \cos(\phi) \sqrt{1 - \eta^2 \phi_t^2}$. Pelo Corolário 5.1.1, o sistema (5.1.5) é integrável e a função u da Equação (5.1.6) é solução da equação de sine-Gordon. Sendo assim, se $\phi = \frac{\pi}{2}$, tem-se que

$$u = \frac{\pi}{2} + \arccos(\eta \cdot 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad (5.2.1)$$

é solução da Equação (5.0.5). Em particular, essa solução também nos diz que $u \equiv 0$ é solução da equação de sine-Gordon.

Encontramos, portanto, uma primeira transformação de Bäcklund para a equação (5.0.5). A partir deste momento, usaremos a equação

$$\phi_{xt} = \cos(\phi) \sqrt{1 - \eta^2 \phi_t^2}, \quad (5.2.2)$$

obtida via transformação de Bäcklund da Equação (5.1.1), para obter a autotransformação de Bäcklund da equação de sine-Gordon.

Observação 5.2.1. Note que o sistema de equações diferenciais (5.1.6) é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} u = \phi + \arccos(\eta \phi_t), \\ \phi_{xt} = \cos(\phi) \sqrt{1 - \eta^2 \phi_t^2}. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Ademais, segue-se dos teoremas da Seção 5.1 e do Corolário 5.1.1 que dada uma solução da equação de sine-Gordon, então para cada constante real $\eta \neq 0$ o sistema (5.1.4) é completamente integrável e ϕ é solução da Equação (5.2.2). Reciprocamente, se ϕ é uma solução da Equação (5.2.2), então (5.1.6) é solução de (5.0.5).

Para encontrar a autotransformação de Bäcklund, basta ver que a equação (5.2.2) é invariante pela transformação

$$(\phi, \eta) \longmapsto (\pi - \phi, -\eta).$$

De fato, fazendo a substituição, obtemos que

$$\begin{aligned}(\pi - \phi)_{xt} &= \cos(\pi - \phi) \sqrt{1 - (-\eta)^2 (\pi - \phi)_t^2} \\ -\phi_{xt} &= -\cos(\phi) \sqrt{1 - \eta^2 \phi_t^2} \\ \phi_{xt} &= \cos(\phi) \sqrt{1 - \eta^2 \phi_t^2}.\end{aligned}$$

Com esta mudança de parâmetros, o sistema de equações diferenciais (5.1.5) é modificado para o sistema de equações

$$\begin{cases} \phi_x = -u_x - \eta \cos(\phi), \\ \phi_t = -\frac{1}{\eta} \cos(u + \phi). \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Tomando duas soluções da equação de *sine-Gordon* dadas pelas funções $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$, tem-se que

$$u = \pi - \phi + \arccos(\eta \phi_t) \quad e \quad v = \pi - \phi + \arccos(\eta \phi_t).$$

Fazendo, então, a diferença entre as duas soluções, encontramos uma relação entre as soluções u e v , π e ϕ dada por

$$\phi = \frac{u - v + \pi}{2}. \quad (5.2.5)$$

Substituindo a função ϕ encontrada nas equações do sistema de equações diferenciais em (5.1.5), obtemos que

$$\begin{aligned}\phi_x = u_x + \eta \cos(\phi) &\iff \left(\frac{u - v + \pi}{2}\right)_x = u_x + \eta \cos\left(\frac{u - v + \pi}{2}\right) \\ &\iff u_x - v_x = 2u_x - 2\eta \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right) \\ &\iff v_x + u_x = 2\eta \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right).\end{aligned}$$

E, também,

$$\begin{aligned}\phi_t = \frac{1}{\eta} \cos(u - \phi) &\iff \left(\frac{u - v + \pi}{2}\right)_t = \frac{1}{\eta} \cos\left(u - \frac{u - v + \pi}{2}\right) \\ &\iff u_t - v_t = \frac{2}{\eta} \cos\left(\frac{u + v - \pi}{2}\right) \\ &\iff u_t - v_t = \frac{2}{\eta} \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right).\end{aligned}$$

Os desenvolvimentos anteriores motivam o seguinte resultado presente em [Chern e Tenenblat \(1986\)](#), na página 79.

Teorema 5.2.1. *Seja a equação de sine-Gordon dada por (5.0.5). Então, o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{cases} u_x + v_x = 2\eta \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right), \\ u_t - v_t = \frac{2}{\eta} \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right), \end{cases} \quad (5.2.6)$$

é uma autotransformação de Bäcklund para a referida equação.

Demonstração. Para que seja demonstrado este teorema, calculemos a derivada com respeito à variável t da primeira equação do sistema e a derivada com respeito à variável x da segunda equação do mesmo sistema. Daí, segue que

$$\partial_t(u_x + v_x) = \partial_t \left[2\eta \operatorname{sen}\left(\frac{u - v}{2}\right) \right] \implies u_{tx} + v_{tx} = 2\eta \left(\frac{u - v}{2}\right)_t \cos\left(\frac{u - v}{2}\right).$$

Usando a segunda equação do sistema em (5.2.6), concluímos que

$$\begin{aligned}u_{tx} + v_{tx} = 2\eta \left(\frac{u - v}{2}\right)_t \cos\left(\frac{u - v}{2}\right) &\implies u_{tx} + v_{tx} = 2 \cos\left(\frac{u - v}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right) \\ &\implies u_{tx} + v_{tx} = \operatorname{sen}(u) + \operatorname{sen}(v)\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\partial_x(u_t - v_t) = \partial_x \left[\frac{2}{\eta} \operatorname{sen}\left(\frac{u + v}{2}\right) \right] \implies u_{tx} - v_{tx} = \frac{2}{\eta} \left(\frac{u + v}{2}\right)_x \cos\left(\frac{u + v}{2}\right).$$

Agora, usando a primeira equação do sistema em (5.2.6), obtemos

$$\begin{aligned} u_{tx} - v_{tx} &= \frac{2}{\eta} \left(\frac{u+v}{2} \right)_x \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \implies u_{tx} - v_{tx} = 2 \cos \left(\frac{u+v}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{u-v}{2} \right) \\ &\implies u_{tx} - v_{tx} = \operatorname{sen}(u) - \operatorname{sen}(v). \end{aligned}$$

Dos cálculos acima, obtemos as equações dadas por

$$u_{tx} + v_{tx} = \operatorname{sen}(u) + \operatorname{sen}(v) \quad (5.2.7)$$

e

$$u_{tx} - v_{tx} = \operatorname{sen}(u) - \operatorname{sen}(v). \quad (5.2.8)$$

Somando as equações (5.2.7) e (5.2.8) e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$u_{xt} = \operatorname{sen}(u), \quad (5.2.9)$$

que é a equação de *sine-Gordon* para u . Ademais, fazendo a subtração entre as equações (5.2.8) e (5.2.7), obtemos a equação de *sine-Gordon* para a função v , ou seja,

$$v_{xt} = \operatorname{sen}(v), \quad (5.2.10)$$

Portanto, o sistema é uma autotransformação de Bäcklund para a Equação (5.0.5). \square

Em posse destes resultados, podemos, assim, encontrar a solução para a equação de *sine-Gordon* via transformação de Bäcklund. O método que será utilizado agora pode ser visto em [Rogers e Schief \(2002\)](#) e [Chern e Tenenblat \(1986\)](#). Começemos com uma solução inicial. Claramente a função $v \equiv 0$, vide Exemplo 5.2.1, é uma solução da equação em questão e, portanto, o sistema de equações (5.2.6) é da forma

$$\begin{cases} u_x = 2\eta \operatorname{sen} \left(\frac{u}{2} \right), \\ u_t = \frac{2}{\eta} \operatorname{sen} \left(\frac{u}{2} \right). \end{cases} \quad (5.2.11)$$

Supondo $u \neq 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$ e dividindo u_x por u_t , obtemos a equação diferencial dada por

$$u_x - \eta^2 u_t = 0. \quad (5.2.12)$$

Agora, resolvemos a equação diferencial de primeira ordem acima. As curvas características dessa equação são as retas dadas por

$$t = -\eta^2 x + k,$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Considere o difeomorfismo

$$\tau(x, t) = t + \eta^2 x \quad e \quad s(x, t) = x$$

e pondo

$$w(s, \tau) = u(x, t),$$

conseguimos simplificar a Equação (5.2.12) na equação

$$w_s = 0, \tag{5.2.13}$$

cuja solução da equação (5.2.13) é uma função dependendo somente da variável τ . Assim,

$$w(s, \tau) = f(\tau) \implies u(x, t) = f(t + \eta^2 x). \tag{5.2.14}$$

Nosso objetivo é, agora, encontrar a função $f \in \mathcal{C}^1$ de modo que cumpra as condições do sistema de equações diferenciais (5.2.11). Então, pondo a função $f \in \mathcal{C}^1$ na primeira equação do sistema (5.2.11), temos que

$$\partial_x f = 2\eta \operatorname{sen} \left(\frac{f}{2} \right) \implies \eta^2 \frac{df}{d\tau} = 2\eta \operatorname{sen} \left(\frac{f}{2} \right) \implies \frac{df}{d\tau} = \frac{2}{\eta} \operatorname{sen} \left(\frac{f}{2} \right).$$

Claramente esta equação diferencial é separável. Portanto, fazendo a separação de variáveis e integrando de ambos os lados, obtemos a seguinte configuração, para qualquer $C \in \mathbb{R}$,

$$\frac{2}{\eta} \tau = 2 \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{f}{4} \right) \right) + C. \tag{5.2.15}$$

Portanto, uma outra solução para a mesma equação é a função, com $c \in \mathbb{R}$ uma outra constante,

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(c e^{\frac{t}{\eta} + \eta x} \right), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5.2.16}$$

Como vemos, a solução encontrada depende, continuamente, do parâmetro real $\eta \neq 0$ proveniente das 1-formas, dadas pelo sistema (4.3.1), que satisfazem as equações

de estrutura para superfície, dadas pelas equações em (4.2.3). Ressalta-se que esse fato produz uma família a 1-parâmetro de soluções.

Notemos que, uma vez tendo a transformação de Bäcklund ao nosso dispor, em princípio podemos obter quantas soluções quisermos para a mesma equação diferencial pseudoesférica. É salutar dizer que a transformação de Bäcklund não é única e, também, para uma composição de transformações de Bäcklund, tal composição comuta. Porém, a comutatividade dessas transformações ficará mais clara na seção a seguir, cujo enfoque será no Teorema da Permutabilidade de Bianchi.

5.3 Teorema da Permutabilidade de Bianchi

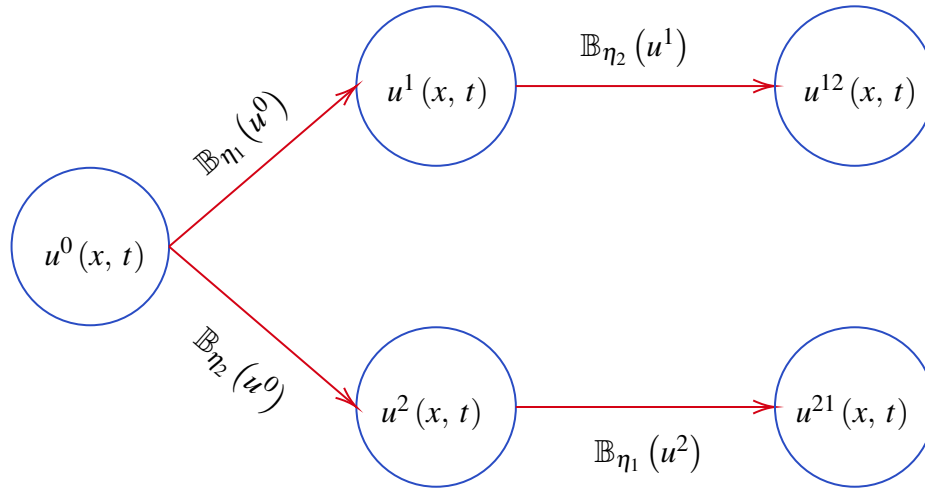
Nesta seção, exploraremos o *Teorema de Permutabilidade de Bianchi*, bem como suas consequências, a fim de encontrar novas soluções e, após a obtenção tais soluções, parametrizar as superfícies que tais soluções da Equação (5.1.1) nos fornece através de transformações de Bäcklund.

O teorema em questão aparece no trabalho de Bianchi, [Bianchi \(1899\)](#) e, como observado por [Griffiths \(2012\)](#), é feito sob demanda para cada equação.

Começemos com $u^0 = u^0(x, t)$ sendo uma solução inicial para a equação de *sine-Gordon* $u_{xt} = \sin(u)$. Daí, denotemos por $\mathbb{B}_{\eta_j}(u^0)$ a transformação de Bäcklund da solução $u^0(x, t)$ com respeito ao parâmetro η_j , tal que $j = 1, 2$.

Ainda, sejam as soluções u^1, u^2 da mesma equação tais que $u^1 = u^1(x, t) = \mathbb{B}_{\eta_1}(u^0)$ e $u^2 = u^2(x, t) = \mathbb{B}_{\eta_2}(u^0)$. Portanto, tem-se que existem três soluções distintas da Equação (5.1.1) dadas pelo conjunto $\{u^0, u^1, u^2\}$. Consideremos, também, as transformações de Bäcklund das soluções u^1 e u^2 dadas por $u^{12} = u^{12}(x, t) = \mathbb{B}_{\eta_2}(u^1)$ e $u^{21} = u^{21}(x, t) = \mathbb{B}_{\eta_1}(u^2)$. O diagrama das transformações de Bäcklund feitas até o presente momento é ilustrado na Figura (5.3.1).

Figura 5.3.1 – Diagrama das transformações de Bäcklund.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A pergunta natural a se fazer nesse momento, também explorada em [Rogers e Schief \(2002\)](#), é se existem condições que devemos impor para que $u^{12} = u^{21}$.

Do sistema de equações diferenciais da autotransformação de Bäcklund da Equação (5.1.1), ou seja, o sistema (5.2.6), com a mudança de parâmetros a fim de deixar a derivada em x com a diferença das soluções, dado por

$$u_x - v_x = 2\eta \operatorname{sen} \left(\frac{u+v}{2} \right) \quad e \quad u_t + v_t = 2\eta \operatorname{sen} \left(\frac{u-v}{2} \right) \quad (5.3.1)$$

tomemos a primeira das equações com respeito as soluções u^1 e u^2 e com respeito às suas transformações de Bäcklund associadas, ou seja,

$$u_x^1 - u_x^0 = 2\eta_1 \operatorname{sen} \left(\frac{u^1 + u^0}{2} \right), \quad (5.3.2)$$

$$u_x^2 - u_x^0 = 2\eta_2 \operatorname{sen} \left(\frac{u^2 + u^0}{2} \right), \quad (5.3.3)$$

$$u_x^{12} - u_x^1 = 2\eta_2 \operatorname{sen} \left(\frac{u^{12} + u^1}{2} \right), \quad (5.3.4)$$

$$u_x^{21} - u_x^1 = 2\eta_1 \operatorname{sen} \left(\frac{u^{21} + u^2}{2} \right). \quad (5.3.5)$$

Fazendo a soma das diferenças entre as equações consecutivas, ou seja, calculando a soma (5.3.2) - (5.3.3) + (5.3.4) - (5.3.5), juntamente com a hipótese de que

$$u^{12} = u^{21} = u^3, \quad (5.3.6)$$

obtemos a equação dada por

$$\eta_1 \left[\operatorname{sen} \left(\frac{u^1 + u^0}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{u^3 + u^2}{2} \right) \right] - \eta_2 \left[\operatorname{sen} \left(\frac{u^3 + u^1}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{u^2 + u^0}{2} \right) \right] = 0. \quad (5.3.7)$$

Para encontrarmos a condição para a função $u^3 = u^3(x, t)$, definamos os ângulos

$$\lambda = \frac{u^3 - u^0}{4} \quad e \quad \mu = \frac{u^2 - u^1}{4}$$

e, dessa forma, utilizando as *Relações de Werner*, mais precisamente a relação dada por

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

e a soma de arcos na função seno, tem-se que

$$\cos \left(\frac{u^0 + u^1 + u^2 + u^3}{2} \right) [\eta_2 \operatorname{sen}(\lambda - \mu) - \eta_1 \operatorname{sen}(\lambda + \mu)] = 0. \quad (5.3.8)$$

Supondo que

$$\cos \left(\frac{u^0 + u^1 + u^2 + u^3}{2} \right) \neq 0$$

então

$$\eta_2 \operatorname{sen}(\lambda - \mu) - \eta_1 \operatorname{sen}(\lambda + \mu) = 0,$$

ou seja,

$$(\eta_2 - \eta_1) \operatorname{sen}(\lambda) \cos(\mu) = (\eta_2 + \eta_1) \cos(\lambda) \operatorname{sen}(\mu). \quad (5.3.9)$$

Da Equação (5.3.9), podemos obter a relação entre as tangentes dos ângulos λ e μ da forma

$$\operatorname{tg}(\lambda) = \frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \operatorname{tg}(\mu).$$

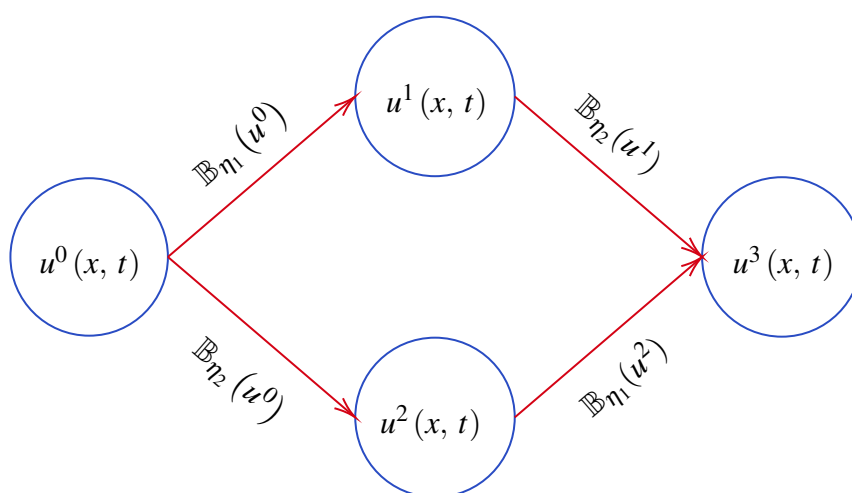
Assim, se a condição de comutatividade (5.3.6) for válida, então é necessário que

$$u^3 = u^0 + 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \operatorname{tg} \left(\frac{u^2 - u^1}{4} \right) \right]. \quad (5.3.10)$$

Esta condição é chamada de *Princípio de Superposição de Bianchi*.

Note que essa nova solução é bi-paramétrica. Isso decorre não somente pelo fato de u^1 e u^2 dependerem de parâmetros distintos, mas também pelo fato de que eles aparecem explicitamente na solução, os quais são η_1 e η_2 .

Observação 5.3.1. *Se a Equação (5.3.10) for substituída nas equações (5.3.4) e (5.3.5) no lugar de u^{12} e u^{21} , então pode-se ver que essas equações são satisfeitas módulo (5.3.2) e (5.3.3). Além disso, as relações correspondentes para a derivada com relação a t também são satisfeitas pela Equação (5.3.10). A Figura 5.3.2 mostra o fechamento do diagrama de Bianchi.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, acabamos de provar, para a equação de (5.1.1) o teorema que dá nome a seção e será enunciado a seguir, com a linguagem presente em Griffiths (2012).

Teorema 5.3.1. *Considere a equação de sine-Gordon e sua autotransformação de Bäcklund dada por (5.3.1). Se aplicarmos esta transformação de Bäcklund a uma solução u^0 da equação supracitada com dois parâmetros diferentes, sendo eles $\eta_1 \neq \eta_2$, então existe uma quarta solução que pode ser obtida permutando os dois parâmetros espectrais. Ou seja, as autotransformações de Bäcklund comutam com respeito à composição delas.*

Agora, encontremos a solução u^3 dada pela Equação (5.3.10). Suponha $u^0 \equiv 0$ uma solução inicial e as soluções $u^1 = \mathbb{B}_{\eta_1}(u^0)$ e $u^2 = \mathbb{B}_{\eta_2}(u^0)$ como sendo respectivamente,

$$u^1 = 4 \operatorname{arctg} \left(c e^{\frac{t}{\eta_1} + \eta_1 x} \right) \quad e \quad u^2 = 4 \operatorname{arctg} \left(c e^{\frac{t}{\eta_2} + \eta_2 x} \right).$$

Nosso objetivo, portanto, é encontrar a solução u^3 explicitamente. Com efeito, usando que

$$\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x-y}{1+xy} \right),$$

calculemos

$$\frac{u^2 - u^1}{4} = \operatorname{arctg} \left[\frac{c \left(e^{\frac{t}{\eta_2} + \eta_2 x} - e^{\frac{t}{\eta_1} + \eta_1 x} \right)}{1 - c^2 e^{\left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right) t + (\eta_2 + \eta_1) x}} \right].$$

Note que

$$u^3 = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{c \left(e^{\frac{t}{\eta_2} + \eta_2 x} - e^{\frac{t}{\eta_1} + \eta_1 x} \right)}{1 - c^2 e^{\left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right) t + (\eta_2 + \eta_1) x}} \right) \right].$$

Façamos, então, algumas simplificações. Assim,

$$e^{\frac{t}{\eta_2} + \eta_2 x} - e^{\frac{t}{\eta_1} + \eta_1 x} = \frac{e^{\frac{t}{\eta_2}}}{e^{-\eta_2 x}} - \frac{e^{\frac{t}{\eta_1}}}{e^{-\eta_1 x}} = \frac{e^{\frac{t}{\eta_2} - \eta_1 x} - e^{\frac{t}{\eta_1} - \eta_2 x}}{e^{-(\eta_2 + \eta_1) x}}$$

e, também,

$$1 - c^2 e^{\left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right) t + (\eta_2 + \eta_1) x} = 1 + \frac{c^2 e^{\left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right) t}}{e^{-(\eta_2 + \eta_1) x}} = \frac{e^{-(\eta_2 + \eta_1) x} + c^2 e^{\left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right) t}}{e^{-(\eta_2 + \eta_1) x}}.$$

Fazendo a divisão entre os dois resultados de cada uma das expressões, tem-se que a expressão resultante fica igual a

$$u^3 = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\frac{c \left(e^{\frac{t}{\eta_2} - \eta_1 x} - e^{\frac{t}{\eta_1} - \eta_2 x} \right)}{e^{-(\eta_2 + \eta_1) x} + c^2 e^{\left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right) t}} \right) \right],$$

para uma constante qualquer $c \in \mathbb{R}$.

A propriedade comutativa agora permite a construção de uma *rede de Bianchi* correspondente à aplicação iterativa do Teorema 5.3.1. Soluções da equação de *sine-Gordon* podem, portanto, ser geradas por procedimentos extritamente algébricos.

Nem sempre é fácil encontrar uma outra solução pelo Teorema de Bianchi, uma vez que, por mais algébrico que sejam os cálculos, quanto mais parâmetros forem sendo adicionados, mais difícil a solução é de ser encontrada.

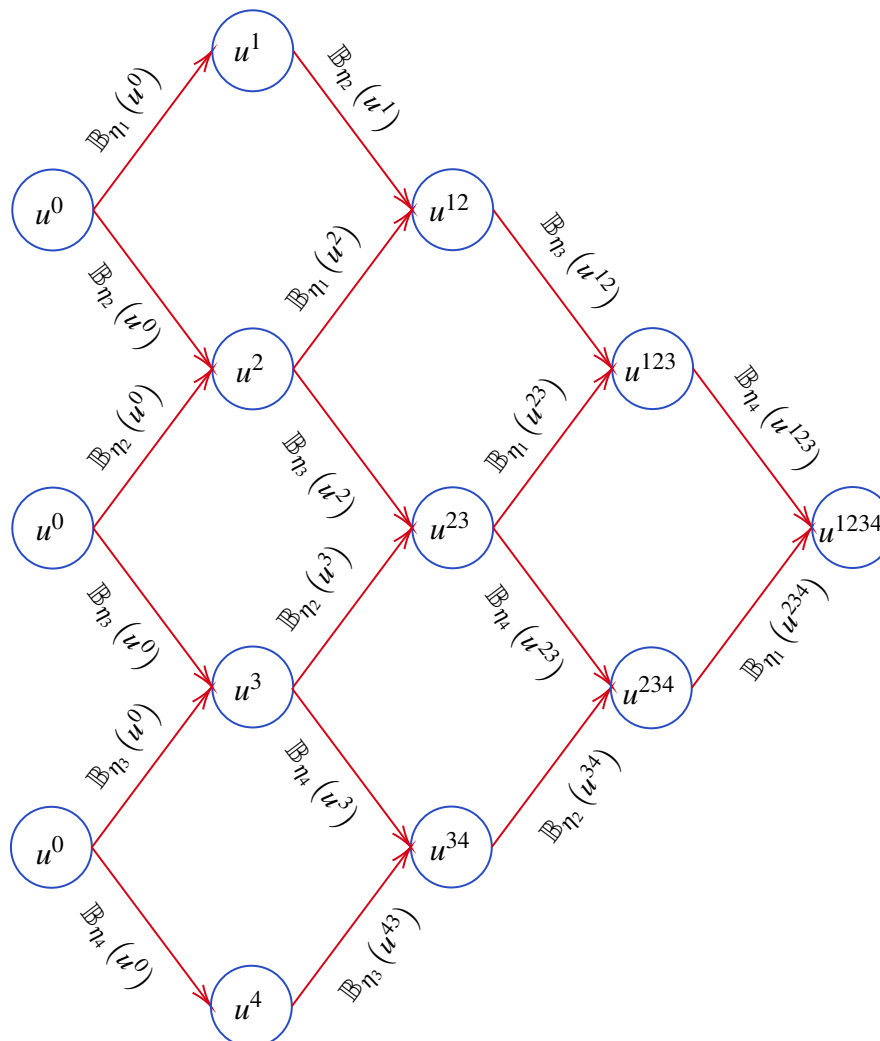
Estes procedimentos, além de representarem uma superposição não-linear de $p \in \mathbb{N}$ soluções de uma única solução com parâmetros de Bäcklund η_j e $j = 1, \dots, p$, a cada vez que se acrescenta uma iteração, o cálculo para que se encontre explicitamente a solução seguinte fica mais complexo.

Vale ressaltar que, assim como já comentado, tal solução u^3 é bi-paramétrica, uma vez que foram utilizadas duas transformações de Bäcklund com parâmetros distintos a fim de se encontrar uma outra solução.

Também, tal função, por mais diferente que possa se apresentar, é uma solução da equação de *sine-Gordon*, justamente por cumprir todos as hipóteses do Teorema 5.3.1 e por ser calculada a partir de duas outras soluções da mesma equação.

Ademais, a cada aplicação da transformação de Bäcklund, um novo parâmetro η_j é introduzido e uma solução é gerada. A Figura (5.3.3) mostra um exemplo em um diagrama de Bianchi com quatro iterações.

Figura 5.3.3 – Quatro iterações do Teorema de Permutabilidade de Bianchi.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na seção seguinte, traremos as demais formas da equação de *sine-Gordon* e suas autotransformações de Bäcklund.

5.4 Outras Transformação de Bäcklund da sine-Gordon

Na presente seção, trabalharemos as demais formas mais conhecidas da Equação (5.1.1). Esta seção se faz importante pela referência [Tenenblat \(1998\)](#), no qual a autora

aborda as demais transformações da equação de *sine-Gordon*. Para que encontremos as outras formas desta equação, é necessário demonstrar o seguinte lema.

Lema 5.4.1. *Considere a equação de sine-Gordon*

$$u_{xt} = \text{sen}(u),$$

em que $u = u(x, t)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Então, existem difeomorfismos distintos $\psi, \gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que, para $u(x, t) = v(\xi, \tau)$ e $u(x, t) = w(y, \theta)$, a equação de sine-Gordon é escrita como

$$v_{\xi\xi} - v_{\tau\tau} = \text{sen}(v) \quad e \quad w_{yy} - w_{\theta\theta} = \text{sen}(w) \cos(w).$$

Demonstração. Para a primeira equação, tomemos a função

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\longmapsto \psi(x, t) = (x+t, x-t), \end{aligned}$$

com $\xi(x, t) = x+t$ e $\tau(x, t) = x-t$. Verifiquemos se esta função é, de fato, um difeomorfismo. Com efeito, calculemos o determinante da matriz jacobiana. Assim,

$$\det(J_\psi) = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \tau_x & \tau_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Agora, façamos as devidas substituições. Como, por hipótese, $u(x, t) = v(\xi, \tau)$, segue, da regra da cadeia, que

$$u_x = v_\xi \xi_x + v_\tau \tau_x = v_\xi + v_\tau \quad e \quad u_t = v_\xi \xi_t + v_\tau \tau_t = v_\xi - v_\tau.$$

Para a derivada mista, tem-se a seguinte igualdade

$$u_{xt} = \partial_t(u_x) = \partial_t(v_\xi + v_\tau) = v_{\xi\xi} \xi_t + v_{\xi\tau} \tau_t + v_{\xi\tau} \xi_t + v_{\tau\tau} \tau_t = v_{\xi\xi} - v_{\tau\tau}.$$

Por $u(x, t) = v(\xi, \tau)$, tem-se

$$v_{\xi\xi} - v_{\tau\tau} = \text{sen}(v).$$

Para a outra equação, note que, da equação em $v(\xi, \tau)$, basta fazer a mudança e parâmetros $v(\xi, \tau) = 2w(y, \theta)$, com $y = \xi$ e $\tau = \theta$. Assim,

$$v_{\xi\xi} - v_{\tau\tau} = 2w_{yy} - 2w_{\theta\theta} \quad e \quad \text{sen}(v) = \text{sen}(2w) = 2 \text{sen}(w) \cos(w).$$

Portanto,

$$2w_{yy} - 2w_{\theta\theta} = 2 \operatorname{sen}(w) \cos(w)$$

e simplificando a equação, temos provado o resultado. \square

Num primeiro momento, vamos encontrar as formas diferenciais da Equação (5.4.1) nos baseando nas formas diferenciais da Equação (5.1.1) dadas pela Equação (4.2.3). Notemos, em primeiro momento, que, fazendo o pullback das 1-formas,

$$d\xi = dx + dt \quad e \quad d\tau = dx - dt \quad (5.4.1)$$

e, portanto, segue que as diferenciais em x e t , em função das diferenciais de ξ e τ são

$$dx = \frac{d\xi + d\tau}{2} \quad e \quad dt = \frac{d\xi - d\tau}{2}. \quad (5.4.2)$$

Dessa forma, as 1-formas da Equação (5.4.1) são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \frac{1}{2\eta} \operatorname{sen}(v) d\xi - \frac{1}{2\eta} \operatorname{sen}(v) d\tau, \\ \Omega_2 = \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \cos(v) \right) d\xi + \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2\eta} \cos(v) \right) d\tau, \\ \Omega_3 = \frac{1}{2} (v_\xi + v_\tau) d\xi + \frac{1}{2} (v_\xi + v_\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (5.4.3)$$

Agora, calculemos as equações de estrutura com respeito a essas 1-formas diferenciais. Portanto, para a primeira equação,

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= d \left(\frac{1}{2\eta} \operatorname{sen}(v) d\xi - \frac{1}{2\eta} \operatorname{sen}(v) d\tau \right) = \frac{1}{2\eta} (v_\xi \cos(v) d\xi + v_\tau \cos(v) d\tau) \wedge d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2\eta} (v_\xi \cos(v) d\xi + v_\tau \cos(v) d\tau) \wedge d\tau = -\frac{1}{2\eta} \cos(v) (v_\xi + v_\tau) d\xi \wedge d\tau. \end{aligned}$$

E, ainda,

$$\begin{aligned}
\Omega_2 \wedge \Omega_3 &= \left[\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \cos(v) \right) d\xi + \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2\eta} \cos(v) \right) d\tau \right] \\
&\wedge \left[\frac{1}{2} (v_\xi + v_\tau) d\xi + \frac{1}{2} (v_\xi + v_\tau) d\tau \right] \\
&= \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \cos(v) \right) \left(\frac{1}{2} (v_\xi + v_\tau) \right) d\xi \wedge d\tau \\
&\quad - \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2\eta} \cos(v) \right) \left(\frac{1}{2} (v_\xi + v_\tau) \right) d\xi \wedge d\tau \\
&= \frac{1}{2\eta} \cos(v) (v_\xi + v_\tau) d\xi \wedge d\tau.
\end{aligned}$$

Assim, $d\Omega_1 - \Omega_3 \wedge \Omega_2 = d\Omega_1 + \Omega_2 \wedge \Omega_3 \equiv 0$.

Para a segunda equação, segue que

$$\begin{aligned}
d\Omega_2 &= d \left[\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \cos(v) \right) d\xi + \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2\eta} \cos(v) \right) d\tau \right] \\
&= -\frac{1}{2\eta} (v_\xi \sin(v) d\xi + v_\tau \sin(v) d\tau) \wedge d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2\eta} (v_\xi \sin(v) d\xi + v_\tau \sin(v) d\tau) \wedge d\tau = \frac{1}{2\eta} \sin(v) (v_\xi + v_\tau) d\xi \wedge d\tau.
\end{aligned}$$

E, também,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 \wedge \Omega_3 &= \left(\frac{1}{2\eta} \sin(v) d\xi - \frac{1}{2\eta} \sin(v) d\tau \right) \\
&\wedge \left(\frac{1}{2} (v_\xi + v_\tau) d\xi + \frac{1}{2} (v_\xi + v_\tau) d\tau \right) \\
&= \frac{1}{4\eta} \sin(v) (v_\xi + v_\tau) d\xi \wedge d\tau + \frac{1}{4\eta} \sin(v) (v_\xi + v_\tau) d\xi \wedge d\tau \\
&= \frac{1}{2\eta} \sin(v) (v_\xi + v_\tau) d\xi \wedge d\tau.
\end{aligned}$$

Portanto, $d\Omega_2 - \Omega_1 \wedge \Omega_3 \equiv 0$.

Para a terceira equação, tem-se

$$\begin{aligned}
 d\Omega_3 &= d\left(\frac{1}{2}(v_\xi + v_\tau) d\xi + \frac{1}{2}(v_\xi + v_\tau) d\tau\right) \\
 &= \frac{1}{2}(v_{\xi\xi} d\xi + v_{\tau\xi} d\tau + v_{\xi\tau} d\xi + v_{\tau\tau} d\tau) \wedge d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{2}(v_{\xi\xi} d\xi + v_{\tau\xi} d\tau + v_{\xi\tau} d\xi + v_{\tau\tau} d\tau) \wedge d\tau \\
 &= \frac{1}{2}(v_{\xi\xi} - v_{\tau\tau}) d\xi \wedge d\tau.
 \end{aligned}$$

Ademais, com o produto exterior,

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 \wedge \Omega_2 &= \left[\frac{1}{2\eta} \operatorname{sen}(v) d\xi - \frac{1}{2\eta} \operatorname{sen}(v) d\tau\right] \\
 &\quad \wedge \left[\left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \cos(v)\right) d\xi + \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2\eta} \cos(v)\right) d\tau\right] \\
 &= \frac{1}{2\eta} \operatorname{sen}(v) \left(\frac{\eta}{2} - \frac{1}{2\eta} \cos(v)\right) + \frac{1}{2\eta} \operatorname{sen}(v) \left(\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2\eta} \cos(v)\right) d\xi \wedge d\tau \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(v) d\xi \wedge d\tau.
 \end{aligned}$$

Notemos que $d\Omega_3 - \Omega_1 \wedge \Omega_2 \equiv 0$ somente nas soluções da equação

$$v_{\xi\xi} - v_{\tau\tau} = \operatorname{sen}(v). \quad (5.4.4)$$

Pelo Capítulo 2, utilizando a Seção 2.4, podemos ter, por meio da primeira forma quadrática fundamental das superfícies geradas pelas soluções da Equação (5.0.5), vista na Equação (4.3.2), a primeira forma quadrática fundamental das superfícies geradas pelas soluções da Equação (5.4.4) pelo difeomorfismo presente no Lema 5.4.1. Assim, para

$$dx = \frac{1}{2}(d\xi + d\tau) \quad e \quad dt = \frac{1}{2}(d\xi - d\tau),$$

a primeira forma quadrática para as soluções da Equação (5.4.4) é

$$\begin{aligned}
 I &= \eta^2 \left[\frac{1}{2}(d\xi + d\tau)\right]^2 + 2\cos(v) \left[\frac{1}{2}(d\xi + d\tau)\right] \left[\frac{1}{2}(d\xi - d\tau)\right] + \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{1}{2}(d\xi - d\tau)\right]^2 \\
 &= \left(\frac{\eta^2}{4} + \frac{1}{2}\cos(v) + \frac{1}{4\eta^2}\right) d\xi^2 + \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2\eta^2}\right) d\xi d\tau \\
 &\quad + \left(\frac{\eta^2}{4} - \frac{1}{2}\cos(v) + \frac{1}{4\eta^2}\right) d\tau^2.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, encontramos a primeira forma quadrática fundamental para as soluções da Equação (5.4.4) é dada por

$$I = \left(\frac{\eta^2}{4} + \frac{1}{2} \cos(v) + \frac{1}{4\eta^2} \right) d\xi^2 + \left(\frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2\eta^2} \right) d\xi d\tau + \left(\frac{\eta^2}{4} - \frac{1}{2} \cos(v) + \frac{1}{4\eta^2} \right) d\tau^2. \quad (5.4.5)$$

Agora, encontraremos a autotransformação de Bäcklund para a equação de *sine-Gordon*, com respeito ao primeiro difeomorfismo, isto é, a Equação (5.4.4).

Da demonstração do Lema 5.4.1, obtemos que a derivada em relação a x e t , são $u_x = v_\xi + v_\tau$ $u_t = v_\xi - v_\tau$ e, portanto, o sistema da autotransformação de Bäcklund, dado pela equação (5.2.6), é modificado para o sistema

$$\begin{cases} v_\xi^1 + v_\xi^2 + v_\tau^1 + v_\tau^2 = 2\eta \operatorname{sen} \left(\frac{v^1 - v^2}{2} \right), \\ v_\xi^1 - v_\xi^2 - v_\tau^1 + v_\tau^2 = \frac{2}{\eta} \operatorname{sen} \left(\frac{v^1 + v^2}{2} \right), \end{cases} \quad (5.4.6)$$

com as funções $v_1, v_2 \in \mathcal{C}^2$ duas soluções da Equação (5.4.4). Somando as duas equações e, após, fazendo a diferença entre elas, obtemos que

$$v_\xi^1 + v_\tau^2 = \eta \operatorname{sen} \left(\frac{v^1 - v^2}{2} \right) + \frac{1}{\eta} \operatorname{sen} \left(\frac{v^1 + v^2}{2} \right), \quad (5.4.7)$$

e, ainda,

$$v_\xi^2 + v_\tau^1 = \eta \operatorname{sen} \left(\frac{v^1 - v^2}{2} \right) - \frac{1}{\eta} \operatorname{sen} \left(\frac{v^1 + v^2}{2} \right). \quad (5.4.8)$$

Desenvolvendo o arco da soma e da diferença, as equações são transformadas em

$$v_\xi^1 + v_\tau^2 = \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{v^1}{2} \right) \cos \left(\frac{v^2}{2} \right) - \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cos \left(\frac{v^1}{2} \right), \quad (5.4.9)$$

e, ainda,

$$v_\xi^2 + v_\tau^1 = \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{v^1}{2} \right) \cos \left(\frac{v^2}{2} \right) - \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cos \left(\frac{v^1}{2} \right). \quad (5.4.10)$$

Portanto, a união das duas equações (5.4.9) e (5.4.10) formam a autotransformação de Bäcklund da Equação (5.4.4), ou seja, o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{\xi}^1 + v_{\tau}^2 = \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \text{sen} \left(\frac{v^1}{2} \right) \cos \left(\frac{v^2}{2} \right) \\ \quad - \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \text{sen} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cos \left(\frac{v^1}{2} \right), \\ v_{\xi}^2 + v_{\tau}^1 = \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \text{sen} \left(\frac{v^1}{2} \right) \cos \left(\frac{v^2}{2} \right) \\ \quad - \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \text{sen} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cos \left(\frac{v^1}{2} \right), \end{array} \right. \quad (5.4.11)$$

forma o sistema de equações diferenciais da autotransformação de Bäcklund da *sine-Gordon* modificada pelo difeomorfismo $(x, t) \mapsto (x+t, x-t)$.

Para a equação $w_{yy} - w_{\theta\theta} = \text{sen}(w) \cos(w)$, basta que multipliquemos esta por $k = 2$ e recuperamos a equação trabalhada acima. Portanto, ambas as equações do Lema 5.4.1 estão contempladas na presente seção.

Agora, temos tudo o que precisamos para encontrar a solução da equação

$$v_{\xi\xi} - v_{\tau\tau} = \text{sen}(v) \quad (5.4.12)$$

por meio da transformação de Bäcklund. Supomos, então, que, para as duas soluções do sistema de equações (5.4.11), a solução $v^2 \equiv 0$ e a solução $v^1 = w$. Sendo assim, temos o sistema dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{\xi} = \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \text{sen} \left(\frac{w}{2} \right), \\ w_{\tau} = \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \text{sen} \left(\frac{w}{2} \right). \end{array} \right. \quad (5.4.13)$$

Tomando a razão entre as equações do sistema acima, temos a equação diferencial parcial linear de primeira ordem

$$(\eta^2 - 1) w_{\xi} - (\eta^2 + 1) w_{\tau} = 0, \quad (5.4.14)$$

com as curvas características sendo dadas por

$$\tau = -\frac{\eta^2 + 1}{\eta^2 - 1}\xi + k, \quad (5.4.15)$$

e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Defina o difeomorfismo

$$k(\xi, \tau) = \tau + \frac{\eta^2 + 1}{\eta^2 - 1}\xi \quad e \quad s(\xi, \tau) = \frac{1}{\eta^2 - 1}\xi$$

e pondo $y(s, k) = w(\xi, \tau)$, conseguimos simplificar a Equação (5.4.14) na equação

$$y_s = 0, \quad (5.4.16)$$

cuja solução da equação (5.4.16) é uma função dependendo somente da variável k . Assim,

$$y(s, k) = f(k) \implies w(\xi, \tau) = f\left(\tau + \frac{\eta^2 + 1}{\eta^2 - 1}\xi\right), \quad (5.4.17)$$

para uma função $f \in \mathcal{C}^1$.

Nosso objetivo é encontrar a função $f \in \mathcal{C}^1$ de modo que cumpra as condições do sistema de equações diferenciais (5.4.13). Então, pondo a função $f \in \mathcal{C}^1$ na primeira equação do sistema (5.4.13), temos que

$$\begin{aligned} \partial_\xi f &= \left(\frac{\eta^2 + 1}{\eta}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{f}{2}\right) \implies \frac{df}{dk} \frac{dk}{d\xi} = \left(\frac{\eta^2 + 1}{\eta}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{f}{2}\right) \\ &\implies \frac{df}{d\tau} = \left(\frac{\eta^2 - 1}{\eta}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{f}{2}\right). \end{aligned}$$

Claramente esta equação diferencial é separável. Portanto, fazendo a separação de variáveis e integrando de ambos os lados, obtemos a seguinte configuração, para qualquer $C \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\eta^2 - 1}{2\eta}k = \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{f}{4}\right)\right) + C. \quad (5.4.18)$$

Portanto, aplicando a exponencial em ambos os lados, encontramos uma solução para a mesma equação sendo, com $c \in \mathbb{R}$ uma outra constante,

$$w(\xi, \tau) = 4 \operatorname{arctg}\left(ce^{\frac{\eta^2 + 1}{2\eta}\xi + \frac{\eta^2 - 1}{2\eta}\tau}\right), \quad c \in \mathbb{R}. \quad (5.4.19)$$

Essa solução é similar à solução encontrada em (5.2.16), pois, a menos de um difeomorfismo, ambas as equações diferenciais são a mesma.

6 Exemplos de Superfícies Pseudoesféricas

Neste capítulo encontraremos algumas parametrizações de superfícies pseudoesféricas e as conectaremos com algumas das soluções da equação de *sine-Gordon*.

Lembremos que, para $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ ser uma superfície parametrizada regular, com $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio e variáveis independentes x e t , as formas quadráticas fundamentais, dadas por I e II , são

$$I = E dx^2 + F dxdt + G dt^2 = \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle dx^2 + \langle \varphi_x, \varphi_t \rangle dxdt + \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle dt^2, \quad (6.0.1)$$

e, também,

$$II = e dx^2 + f dxdt + g dt^2 = \langle \varphi_{xx}, N \rangle dx^2 + \langle \varphi_{xt}, N \rangle dxdt + \langle \varphi_{tt}, N \rangle dt^2, \quad (6.0.2)$$

com N sendo o vetor normal à superfície no ponto em questão, calculado por

$$N = \frac{\varphi_x \times \varphi_t}{\|\varphi_x \times \varphi_t\|}. \quad (6.0.3)$$

Vale, ainda, ressaltar que a curvatura Gaussiana da mesma superfície pode ser expressa pelos coeficientes das formas quadráticas fundamentais a partir da relação

$$\mathcal{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (6.0.4)$$

As parametrizações serão feitas seguindo o Capítulo 1 de [Rogers e Schief \(2002\)](#), a qual contém, mais detalhadamente, as noções que apresentaremos nas seções subsequentes. Nas seções deste capítulo, utilizaremos a equação de *sine-Gordon* dada por

$$u_{xx} - u_{tt} = \text{sen}(u). \quad (6.0.5)$$

Durante esse capítulo, utilizaremos todo o conhecimento adquirido para que possamos obter superfícies de curvatura Gaussiana negativa provenientes das soluções da Equação (6.0.5), ou seja, soluções da forma dada pela Equação (5.4.19).

6.1 A Pseudoesfera de Beltrami

A *Pseudoesfera de Beltrami* é um modelo de superfície de curvatura negativa constante, descoberta pelo italiano Eugenio Beltrami em 1868 para ilustrar a geometria hiperbólica. Ela tem a forma de uma dupla corneta ou trombeta, e foi a primeira superfície a demonstrar que a geometria hiperbólica, que contradiz o quinto postulado de Euclides, é matematicamente válida. Durante essa seção, adotaremos $\eta = 1$ e $c = 1$ na equação (5.4.19), o que implica que, a Equação (5.4.19) se transforma em

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg}(e^x). \quad (6.1.1)$$

Para estabelecer a conexão entre a solução da Equação (6.0.5) e a pseudoesfera, recorda-se que o vetor de posição φ da superfície de revolução gerada pela rotação de uma curva plana $z = \gamma(r)$, com a curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty$ é dada por

$$\varphi(r, s) = (r \cos(s), r \sin(s), \gamma(r)). \quad (6.1.2)$$

Aqui, os círculos $r \equiv k$, com $k > 0$, são os paralelos e as curvas $s \equiv k$, com $k \in \mathbb{R}$, são os meridianos. Assim, calculemos as formas quadráticas fundamentais da superfície em questão.

Para tal, notemos que

$$\begin{cases} \varphi_r = (\cos(s), \sin(s), \gamma'(r)), \\ \varphi_s = (-r \sin(s), r \cos(s), 0). \end{cases} \quad (6.1.3)$$

Sendo assim, a primeira forma quadrática fundamental é

$$I = (\gamma'(r)^2 + 1) dr^2 + r^2 ds^2. \quad (6.1.4)$$

Como $F = 0$, temos que os vetores nas equações (6.1.3) e (6.1.4) são perpendiculares, o que implica que

$$\|\varphi_r \times \varphi_s\| = \|\varphi_r\| \|\varphi_s\| = r \sqrt{\gamma'(r)^2 + 1}. \quad (6.1.5)$$

Para o vetor normal, temos

$$\begin{aligned}\varphi_r \times \varphi_s &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos(s) & \text{sen}(s) & \gamma'(r) \\ -r \text{sen}(s) & r \cos(s) & 0 \end{vmatrix} = -r \cos(s) \gamma'(r) \hat{i} + r \text{sen}(s) \gamma'(r) \hat{j} + r \hat{k} \\ &= (-r \cos(s) \gamma'(r), r \text{sen}(s) \gamma'(r), r)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$N = \left(\frac{-\cos(s) \gamma'(r)}{\sqrt{\gamma'(r)^2 + 1}}, \frac{\text{sen}(s) \gamma'(r)}{\sqrt{\gamma'(r)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma'(r)^2 + 1}} \right). \quad (6.1.6)$$

Encontrando as segundas derivadas da parametrização φ , obtemos

$$\begin{cases} \varphi_{rr} = (0, 0, \gamma''(r)), \\ \varphi_{rs} = (-\text{sen}(s), \cos(s), 0), \\ \varphi_{ss} = (-r \cos(s), -r \text{sen}(s), 0). \end{cases} \quad (6.1.7)$$

Portanto, a segunda forma quadrática fundamental da superfície é

$$II = \frac{\gamma''(r)}{\sqrt{\gamma'(r)^2 + 1}} dr^2 + \frac{r \gamma'(r)}{\sqrt{\gamma'(r)^2 + 1}} ds^2. \quad (6.1.8)$$

Considere o difeomorfismo $\zeta(r, s) = (\xi, s)$ de tal maneira que a Equação (6.1.4) seja reescrita como

$$I = d\xi^2 + r^2 ds^2, \quad (6.1.9)$$

ou seja, um difeomorfismo tal que

$$d\xi = \sqrt{\gamma'(r)^2 + 1} dr, \quad r = r(\xi). \quad (6.1.10)$$

Para a curvatura dessa superfície, tem-se que, pela Equação (6.0.4), esta será dada por

$$\mathcal{K} = \frac{\gamma''(r) \gamma'(r)}{r (\gamma'(r)^2 + 1)^2}. \quad (6.1.11)$$

Porém, calculemos a segunda derivada de $r = r(\xi)$ em relação à ξ . Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dr}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\left(\gamma'(r)^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \right) = -\gamma'(r) \gamma''(r) \left(\gamma'(r)^2 + 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{dr}{d\xi} \\ &= -\gamma'(r) \gamma''(r) \left(\gamma'(r)^2 + 1 \right)^{-2} = -\frac{\gamma'(r) \gamma''(r)}{\left(\gamma'(r)^2 + 1 \right)^2} \end{aligned}$$

e, então, a curvatura pode ser reescrita como

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{d\xi^2}. \quad (6.1.12)$$

Como $\mathcal{K} \equiv -1$, podemos encontrar a função $r = r(\xi)$ resolvendo a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} - r = 0. \quad (6.1.13)$$

Notemos que a solução geral para esta equação é a função

$$r(\xi) = c_1 \cosh(\xi) + c_2 \sinh(\xi). \quad (6.1.14)$$

Fazendo $c_1 = c_2 = c$, obtemos a outra solução particular

$$r(\xi) = ce^\xi. \quad (6.1.15)$$

Note, ainda, que da Equação (6.1.10), tem-se que

$$\gamma'(r) = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dr} \right)^2 - 1} \quad (6.1.16)$$

e, também, pela função $r = r(\xi)$ encontrada na Equação (6.1.15), obtém-se

$$d\xi = \frac{1}{c} e^{-\xi} dr = \frac{1}{r} dr. \quad (6.1.17)$$

Portanto, pelas as equações (6.1.16) e (6.1.17), segue que

$$\gamma'(r) = \sqrt{\left(\frac{1}{r} \right)^2 - 1}. \quad (6.1.18)$$

Dessa equação, encontramos que a diferencial de γ com respeito à diferencial de ξ é

$$\frac{d\gamma}{dr} = \sqrt{\left(\frac{1}{r} \right)^2 - 1} \implies d\gamma = \sqrt{\left(\frac{1}{r} \right)^2 - 1} dr \implies d\gamma = \sqrt{1 - r^2} d\xi. \quad (6.1.19)$$

Integrando, a fim de encontrar a curva γ , ou seja, calculando

$$\gamma(\xi) = \int \sqrt{1 - c^2 e^{2\xi}} d\xi, \quad (6.1.20)$$

e fazendo a substituição de variáveis

$$\text{sen}(\psi) = c e^{\xi}, \quad d\xi = \text{cotg}(\psi) d\psi, \quad (6.1.21)$$

tem-se que a integral da Equação (6.1.20) é dada por

$$\int \sqrt{1 - c^2 e^{2\xi}} d\xi = \int \text{cossec}(\psi) - \text{sen}(\psi) d\psi = \ln \left(\left| \text{tg} \left(\frac{\psi}{2} \right) \right| \right) + \cos(\psi) + C.$$

Tomando $C = 0$ como uma primitiva, tem-se que a parametrização da superfície, com as coordenadas ψ e s é

$$\varphi(\psi, s) = \left(\text{sen}(\psi) \cos(s), \text{sen}(\psi) \text{sen}(s), \ln \left(\left| \text{tg} \left(\frac{\psi}{2} \right) \right| \right) + \cos(\psi) \right), \quad (6.1.22)$$

sendo as formas quadráticas fundamentais da superfície dadas por

$$I = \text{cotg}(\psi)^2 d\psi^2 + \text{sen}(\psi)^2 ds^2 \quad e \quad II = \text{cotg}(\psi) d\psi^2 - \text{sen}(\psi) ds^2. \quad (6.1.23)$$

Se introduzirmos o difeomorfismo $(\xi, s) \mapsto (x, t)$ dado por

$$dx = \text{cossec}(\psi) d\psi \quad e \quad t = s, \quad (6.1.24)$$

encontraremos que

$$x = \ln \left(\left| \text{tg} \left(\frac{\psi}{2} \right) \right| \right) \quad e \quad \psi = 2 \arctg(e^x). \quad (6.1.25)$$

Sendo assim, o objetivo, então, será encontrar $\text{sen}(\psi)$ e $\cos(\psi)$ em função da variável x . Dessa forma, usando as identidades trigonométricas dadas por

$$\text{sen}(2\theta) = 2 \text{sen}(\theta) \cos(\theta) = 2 \frac{\text{tg}(\theta)}{\sec(\theta)^2} = \frac{2 \text{tg}(\theta)}{1 + \text{tg}(\theta)^2} \quad (6.1.26)$$

e

$$\cos(2\theta) = \frac{\text{sen}(2\theta)}{\text{tg}(2\theta)} = \frac{\frac{2 \text{tg}(\theta)}{1 + \text{tg}(\theta)^2}}{\frac{2 \text{tg}(\theta)}{1 - \text{tg}(\theta)^2}} = \frac{1 - \text{tg}(\theta)^2}{1 + \text{tg}(\theta)^2}, \quad (6.1.27)$$

obtemos que, pelas relações (6.1.26) e (6.1.27),

$$\operatorname{sen}(\psi) = \operatorname{sen}(2 \operatorname{arctg}(e^x)) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} = \operatorname{sech}(x) \quad (6.1.28)$$

e, também,

$$\operatorname{cos}(\psi) = \operatorname{cos}(2 \operatorname{arctg}(e^x)) = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -\operatorname{tgh}(x). \quad (6.1.29)$$

Portanto, a parametrização da superfície da *Pseudoesfera de Beltrami*, em coordenadas x e t é

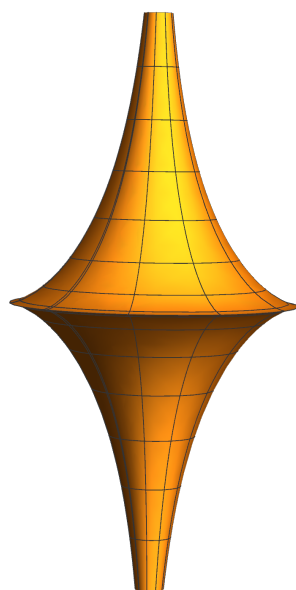
$$\varphi(x, t) = (\operatorname{sech}(x) \operatorname{cos}(t), \operatorname{sech}(x) \operatorname{sen}(t), x - \operatorname{tgh}(x)). \quad (6.1.30)$$

Usando as relações das equações (6.1.23), (6.1.28) e (6.1.29), tem-se que

$$I = \operatorname{tgh}(x)^2 dx^2 + \operatorname{sech}(x)^2 dt^2. \quad (6.1.31)$$

A Figura (6.1.1) mostra a superfície que encontramos.

Figura 6.1.1 – Pseudoesfera de Beltrami.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 A Superfície de Dini

A superfície gerada por uma curva que é rotacionada em torno de um eixo e simultaneamente transladada paralelamente a esse eixo de tal forma que a razão entre a velocidade de translação e a velocidade de rotação seja constante, é conhecida como helicóide. Em particular, um helicóide gerado pela tratriz é pseudoesférico e é conhecido como *Superfície de Dini*.

Durante esta seção, utilizaremos a solução da equação de *sine-Gordon* encontrada na Seção 5.4, dada pela Equação (5.4.19), ou seja,

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(ce^{\frac{\eta^2+1}{2\eta}x + \frac{\eta^2-1}{2\eta}t} \right). \quad (6.2.1)$$

Substituindo $\eta = \operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2} \right)$, para $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, obtemos que

$$\frac{\eta^2 - 1}{2\eta} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2} \right)^2 - 1}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2} \right)} = - \left[\frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2} \right)^2} \right]^{-1} = - [\operatorname{tg}(\zeta)]^{-1} = -\operatorname{cotg}(\zeta),$$

$$\frac{\eta^2 + 1}{2\eta} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2} \right)^2 + 1}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2} \right)} = \frac{\sec \left(\frac{\zeta}{2} \right)^2}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\zeta}{2} \right)} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\zeta}{2} \right) \cos \left(\frac{\zeta}{2} \right)} = \operatorname{cossec}(\zeta).$$

Sendo assim, definamos

$$\chi = \frac{\eta^2 + 1}{2\eta}x + \frac{\eta^2 - 1}{2\eta}t = \operatorname{cossec}(\zeta)x - \operatorname{cotg}(\zeta)t$$

e, dessa forma, a solução para a equação de *sine-Gordon*, vide Equação (6.2.1) é substituída por $u(x, t) = 4 \operatorname{arctg}(ce^\chi)$. Para $\zeta = \frac{\pi}{2}$, tem-se que $\eta = 1$ e, portanto, tal caso é idêntico ao feito na Seção 6.1 para a *Pseudoesfera de Beltrami*. Este caso generaliza o caso já estudado.

Pela característica helicoidal da superfície da presente seção e por ser uma generalização da superfície obtida anteriormente, tem-se que a parametrização desta é dada pelo vetor posição

$$\varphi(x, t) = (\operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{sech}(\chi) \cos(t), \operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{sech}(\chi) \operatorname{sen}(t), x - \operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{tgh}(\chi)). \quad (6.2.2)$$

Note que no caso especial, ou seja, para $\zeta = \frac{\pi}{2}$, obtemos que a parametrização se reduz a

$$\varphi(x, t) = (\operatorname{sech}(x) \cos(t), \operatorname{sech}(x) \operatorname{sen}(t), x - \operatorname{tgh}(x)),$$

idêntica a observada na Equação (6.1.30).

Ademais, calculemos sua primeira forma quadrática fundamental. Assim, tem-se que os vetores derivadas são dados pelas funções componentes

$$\begin{cases} \varphi_x^1(x, t) = -\cos(t) \operatorname{sech}(\chi) \operatorname{tgh}(\chi), \\ \varphi_x^2(x, t) = -\operatorname{sen}(t) \operatorname{sech}(\chi) \operatorname{tgh}(\chi), \\ \varphi_x^3(x, t) = \operatorname{tgh}^2(\chi), \end{cases}$$

e, também,

$$\begin{cases} \varphi_t^1(x, t) = \operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{sech}(\chi) [\operatorname{tgh}(\chi) \operatorname{cotg}(\zeta) \cos(t) - \operatorname{sen}(t)], \\ \varphi_t^2(x, t) = \operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{sech}(\chi) [\operatorname{tgh}(\chi) \operatorname{cotg}(\zeta) \operatorname{sen}(t) + \cos(t)], \\ \varphi_t^3(x, t) = \cos(\zeta) \operatorname{sech}^2(\chi). \end{cases}$$

Portanto, pela Equação (6.0.1), calculemos a primeira forma quadrática fundamental da superfície em questão. Calculando os coeficientes, tem-se, para o primeiro deles,

$$\begin{aligned} E &= \cos(t)^2 \operatorname{sech}(\chi)^2 \operatorname{tgh}(\chi)^2 + \operatorname{sen}(t)^2 \operatorname{sech}(\chi)^2 \operatorname{tgh}(\chi)^2 + \operatorname{tgh}(\chi)^4 \\ &= \operatorname{sech}(\chi)^2 \operatorname{tgh}(\chi)^2 + \operatorname{tgh}(\chi)^4 \\ &= \operatorname{tgh}(\chi)^2 [\operatorname{sech}(\chi)^2 + \operatorname{tgh}(\chi)^2] = \operatorname{tgh}(\chi)^2. \end{aligned}$$

Para o segundo coeficiente, segue que

$$\begin{aligned} F &= -\cos(t) \operatorname{sech}(\chi) \operatorname{tgh}(\chi) \operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{sech}(\chi) [\operatorname{tgh}(\chi) \operatorname{cotg}(\zeta) \cos(t) - \operatorname{sen}(t)] \\ &\quad - \operatorname{sen}(t) \operatorname{sech}(\chi) \operatorname{tgh}(\chi) \operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{sech}(\chi) [\operatorname{tgh}(\chi) \operatorname{cotg}(\zeta) \operatorname{sen}(t) + \cos(t)] \\ &\quad + \operatorname{tgh}(\chi)^2 \cos(\zeta) \operatorname{sech}(\chi)^2 \\ &= -\cos(t)^2 \cos(\zeta) \operatorname{sech}(\chi)^2 \operatorname{tgh}(\chi)^2 + \cos(t) \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{sech}(\chi)^2 \operatorname{tgh}(\chi) \\ &\quad - \operatorname{sen}(t)^2 \cos(\zeta) \operatorname{sech}(\chi)^2 \operatorname{tgh}(\chi)^2 - \operatorname{sen}(t) \cos(t) \operatorname{sen}(\zeta) \operatorname{sech}(\chi)^2 \operatorname{tgh}(\chi) \\ &= -\operatorname{tgh}(\chi)^2 \cos(\zeta) \operatorname{sech}(\chi)^2 + \operatorname{tgh}(\chi)^2 \cos(\zeta) \operatorname{sech}(\chi)^2 = 0. \end{aligned}$$

Por fim, o coeficiente de dt^2 , ou seja, o último coeficiente,

$$\begin{aligned} G &= \operatorname{sen}(\zeta)^2 \operatorname{sech}(\chi)^2 [\operatorname{tgh}(\chi) \operatorname{cotg}(\zeta) \cos(t) - \operatorname{sen}(t)]^2 \\ &\quad + \operatorname{sen}(\zeta)^2 \operatorname{sech}(\chi)^2 [\operatorname{tgh}(\chi) \operatorname{cotg}(\zeta) \operatorname{sen}(t) + \cos(t)]^2 \\ &\quad + \cos(\zeta)^2 \operatorname{sech}(\chi)^4 \\ &= \operatorname{sen}(\zeta)^2 \operatorname{sech}(\chi)^2 \left[\operatorname{tgh}(\chi)^2 \operatorname{cotg}(\zeta)^2 + 1 \right] + \cos(\zeta)^2 \operatorname{sech}(\chi)^4 \\ &= \operatorname{sech}(\chi)^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, a superfície tem a sua primeira forma quadrática fundamental sendo dada por

$$I = \operatorname{tgh}(\chi)^2 dx^2 + \operatorname{sech}(\chi) dt^2. \quad (6.2.3)$$

Note que esta primeira forma fundamental é análoga à encontrada na Seção 6.1 para a *Pseudoesfera de Beltrami*, dada pela Equação (6.1.30). Para obtê-la a partir da encontrada na equação (6.2.3), basta que

$$\zeta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \eta = 1.$$

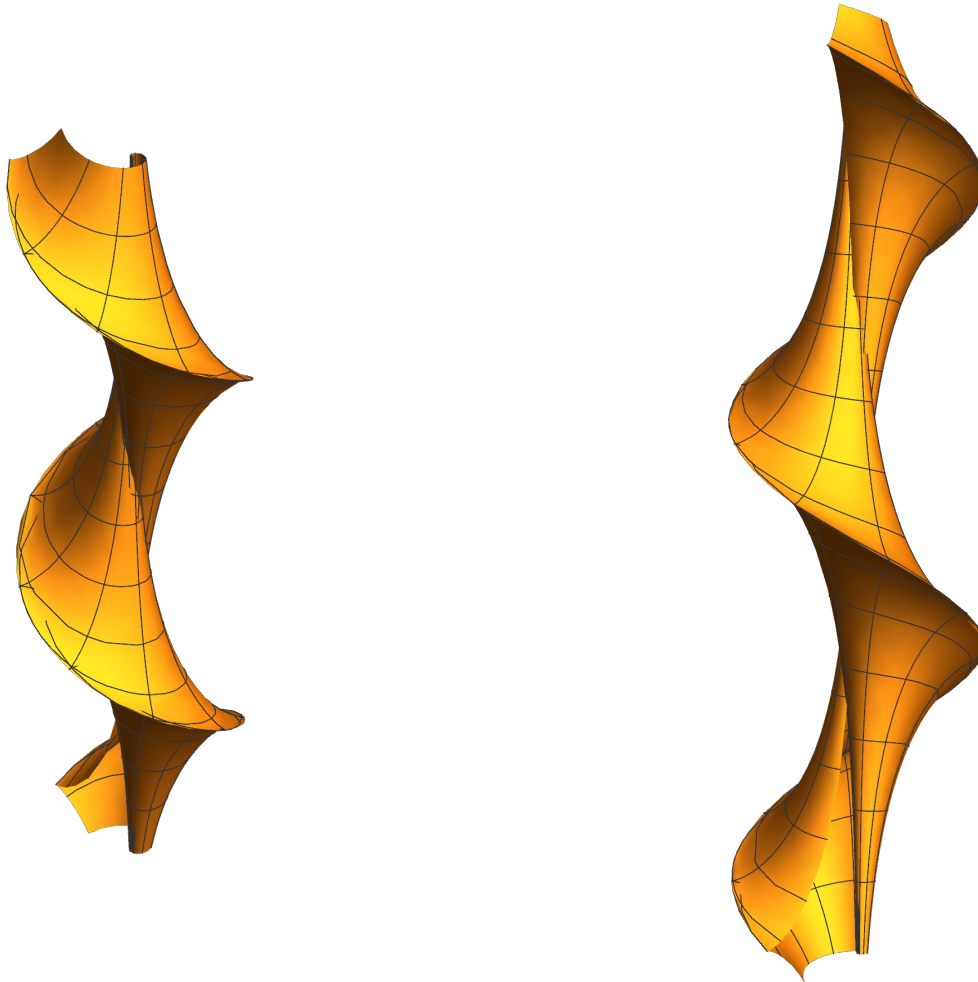
Neste caso, obtemos que $\chi = x$ e, portanto, a Equação (6.2.3) se converte na Equação (6.1.31), confirmando que a *Superfície de Dini* é uma generalização para a *Pseudoesfera de Beltrami*.

As figuras (6.2.1) e (6.2.2) mostram representações desta superfície, com $\zeta = \frac{2\pi}{3}$ e $\zeta = \frac{\pi}{3}$, respectivamente. Existem outras figuras e esta foi retirada do Capítulo 1 de Rogers e Schief (2002).

6.3 Superfícies Pseudoesféricas e o Teorema de Bianchi

Na presente seção, utilizaremos o Teorema de Permutabilidade de Bianchi, vide Teorema 5.3.1, para gerar novas superfícies pseudoesféricas como já foram geradas anteriormente nas seções 6.1 e 6.2. Aqui, faremos uso das seções 1.4.4 e 1.4.5 do Capítulo 1 de Rogers e Schief (2002), o qual contém, mais detalhada, toda a construção que será apresentada a seguir. Tomemos a Equação (5.3.10), ou seja,

$$u^3 = u^0 + 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\eta_2 + \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} \operatorname{tg} \left(\frac{u^2 - u^1}{4} \right) \right],$$

Figura 6.2.2 – Dini; $\zeta = \frac{\pi}{3}$.Figura 6.2.1 – Dini; $\zeta = \frac{2\pi}{3}$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fonte: Elaborada pelo autor.

em que $u_j = \mathbb{B}_{\eta_j}(u^0)$, com $j = 1, 2$ e u^0 uma solução inicial da equação de *sine-Gordon*.

Daí, façamos a seguinte substituição

$$\eta_1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) \quad e \quad \eta_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\zeta_2}{2}\right)$$

e, então, obteremos a expressão

$$u^3 = u^0 + 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)} \operatorname{tg} \left(\frac{u^2 - u^1}{4} \right) \right]. \quad (6.3.1)$$

Assumamos, agora, $u^0 = 0$ e, dessa forma, como já calculado, teremos as soluções encontradas, via transformação de Bäcklund, sendo

$$u^j = 4 \operatorname{arctg} (e^{\chi_j}), \quad (6.3.2)$$

com a variável χ_j , $j = 1, 2$, dada por

$$\chi_j = \operatorname{cosec}(\zeta_j) x - \operatorname{cotg}(\zeta_j) t. \quad (6.3.3)$$

À luz das equações (6.3.2) e (6.3.3), reformulemos a Equação (6.3.1) para uma forma mais adequada para seguirmos a construção das demais superfícies.

Em primeiro lugar, note que $e^{\chi_j} = \operatorname{tg} \left(\frac{u^j}{4} \right)$ e, portanto, usando identidades trigonométricas, obtemos que

$$\sec \left(\frac{u^j}{4} \right) = \sqrt{1 + e^{2\chi_j}},$$

com $j = 1, 2$. Dessa relação, concluímos que

$$\operatorname{sen} \left(\frac{u^j}{4} \right) = \frac{e^{\chi_j}}{\sqrt{1 + e^{2\chi_j}}} \quad e \quad \cos \left(\frac{u^j}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\chi_j}}}.$$

Por essa razão, tem-se que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{u^2 - u^1}{4} \right) &= \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{u^2}{4} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{u^1}{4} \right)}{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{u^2}{4} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{u^1}{4} \right)} = \frac{e^{\chi_2} - e^{\chi_1}}{1 + e^{\chi_1 + \chi_2}} = \frac{(e^{\chi_2} - e^{\chi_1}) e^{-\frac{\chi_2 + \chi_1}{2}}}{(1 + e^{\chi_1 + \chi_2}) e^{-\frac{\chi_2 + \chi_1}{2}}} \\ &= \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\chi_2 + \chi_1}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que a solução (6.3.1), feitas as mudanças descritas anteriormente, se transforma em

$$u^3 = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) \cosh \left(\frac{\chi_2 + \chi_1}{2} \right)} \right]. \quad (6.3.4)$$

Existe uma importante subclasse de soluções periódicas conhecidas como *breathers*¹. Aqui, uma expressão analítica para a solução do tipo *breather* é obtida através do Teorema da Permutabilidade de Bianchi, isto é, o Teorema 5.3.1, e superfícies pseudoesféricas associadas são construídas a seguir.

Tomando a Equação

$$u^3 = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\eta_2 + \eta_1 \frac{\sinh\left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\chi_2 + \chi_1}{2}\right)}}{\eta_2 - \eta_1} \right], \quad (6.3.5)$$

com

$$\chi_j = \frac{\eta_j^2 + 1}{2\eta_j}x + \frac{\eta_j^2 - 1}{2\eta_j}t,$$

e fazendo a substituição complexa $\eta_1 = a + ib$ e $\eta_2 = a - ib = \bar{\eta}_1$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes tais que $a^2 + b^2 \neq 0$, encontremos χ_j , para $j = 1, 2$.

Vale ressaltar que são verdadeiras as propriedades $\eta_2 + \eta_1 = 2a$, $\eta_2 - \eta_1 = -2ib$ e $\eta_1\eta_2 = a^2 + b^2$.

Como cada χ_j pode ser escrito da forma

$$\chi_j = \frac{1}{2}\eta_j(x+t) + \frac{1}{2\eta_j}(x-t),$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &= \frac{1}{2}\eta_1(x+t) + \frac{1}{2\eta_1}(x-t) + \frac{1}{2}\eta_2(x+t) + \frac{1}{2\eta_2}(x-t) \\ &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)(x+t) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}\right)(x-t) \\ &= a(x+t) + \frac{a}{a^2 + b^2}(x-t) \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} [(a^2 + b^2 + 1)x + (a^2 + b^2 - 1)t] \end{aligned}$$

¹ Uma solução do tipo *breather* é um tipo de solução de onda não linear para certas equações diferenciais parciais que descrevem um conjunto de ondas no qual a energia está localizada no espaço, mas oscila, isto é, respira periodicamente no tempo, ou vice-versa. Uma solução do tipo *breather estacionário* é uma solução *breather* que não varia no tempo.

e, também,

$$\begin{aligned}
 \chi_2 - \chi_1 &= \frac{1}{2}\eta_2(x+t) + \frac{1}{2\eta_2}(x-t) - \frac{1}{2}\eta_1(x+t) - \frac{1}{2\eta_1}(x-t) \\
 &= \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1)(x+t) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta_2} - \frac{1}{\eta_1}\right)(x-t) \\
 &= -ib(x+t) + \frac{ib}{a^2+b^2}(x-t) \\
 &= \frac{ib}{a^2+b^2}[(1-a^2-b^2)x - (a^2+b^2+1)t].
 \end{aligned}$$

Defina as funções auxiliares

$$\xi = (a^2 + b^2 + 1)x + (a^2 + b^2 - 1)t \quad e \quad \tau = (1 - a^2 - b^2)x - (a^2 + b^2 + 1)t.$$

Portanto, obtemos que as expressões calculadas acima podem ser reescritas como

$$\chi_1 + \chi_2 = \frac{a}{a^2 + b^2}\xi \quad e \quad \chi_1 - \chi_2 = -\frac{ib}{a^2 + b^2}\tau.$$

Substituindo os resultados encontrados na Equação (6.3.5), obtemos

$$u^3 = 4 \operatorname{arctg} \left[-i \frac{a}{b} \frac{\sinh\left(\frac{ib}{2(a^2+b^2)}\tau\right)}{\cosh\left(\frac{a}{2(a^2+b^2)}\xi\right)} \right]. \quad (6.3.6)$$

Por um cálculo simples usando números complexos, vemos que $\sinh(iz) = i \operatorname{sen}(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto, a Equação (6.3.6) se transforma em

$$u^3 = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{a \operatorname{sen}\left(\frac{b}{2(a^2+b^2)}\tau\right)}{b \cosh\left(\frac{a}{2(a^2+b^2)}\xi\right)} \right]. \quad (6.3.7)$$

Sem perda de generalidade, podemos tomar $a^2 + b^2 = 1$ e, nesse sentido, a Equação (6.3.7) é reescrita como

$$u^3 = -4 \operatorname{arctg} \left[\frac{a \operatorname{sen}(bt)}{b \cosh(ax)} \right]. \quad (6.3.8)$$

A Equação (6.3.8) é conhecida como a solução do tipo *breather estacionário*, uma vez que não é transladada conforme t evolui. A partir de agora, daremos as parametrizações das superfícies pseudoesféricas advindas de soluções como na Equação (6.3.8), as ditas *Superfícies Pseudoesféricas de Breathers Estacionários*.

Recordamos que a solução u^3 pode ser gerada por uma transformação de Bäcklund do tipo $\mathbb{B}_{\eta_i}(u^j)$, com $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$, donde a parametrização da superfície gerada por esta solução, em termos das parametrizações encontradas como na Equação (6.2.2), é dada pela função

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \frac{1}{2}(\psi + \sigma) + \frac{1}{2} \cos(u^3) \left(\frac{\text{sen}(\zeta_2)}{\cos(u^1)} \psi_x + \frac{\text{sen}(\zeta_1)}{\cos(u^2)} \sigma_x \right) \\ &+ \text{sen}(u^3) \left(\frac{\text{sen}(\zeta_2)}{\cos(u^1)} \psi_t + \frac{\text{sen}(\zeta_1)}{\cos(u^2)} \sigma_t \right), \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

em que ψ e σ são as parametrizações obtidas pela solução u^1 e u^2 da equação de *sine-Gordon*, isto é, com o parâmetro η_1 e η_2 de Bäcklund.

Para as soluções do tipo *breathers estacionários*, tomemos

$$\text{sen}(\zeta_1) = \frac{1}{a} = \text{sen}(\zeta_2), \quad \chi_1 = \frac{1}{2}(a + ib) = \overline{\chi_2}, \quad u^1 = \overline{u^2} \quad e \quad \psi = \overline{\sigma}.$$

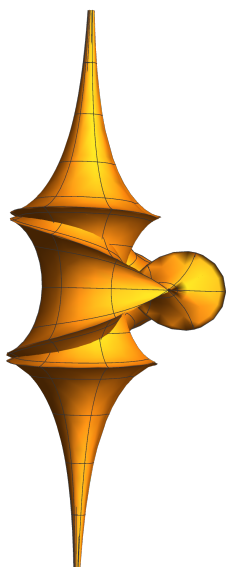
Portanto, ao usar a Equação (6.3.9) com ψ e σ dados por (6.2.2), a superfície pseudo esférica correspondente à solução dada pela Equação (6.3.8) é, para $c = \sqrt{1 - d^2}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \frac{2b \text{sen}(bt) \cosh(ax)}{a(b^2 \cosh(ax)^2 + a^2 \text{sen}(bt)^2)} \begin{bmatrix} \text{sen}(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{2b^2 \cosh(ax)}{a(b^2 \cosh(ax)^2 + a^2 \text{sen}(bt)^2)} \begin{bmatrix} \cos(t) \cos(bt) \\ \text{sen}(t) \cos(bt) \\ -\text{senh}(ax) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

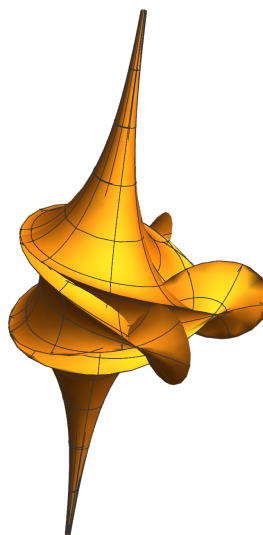
Para cada $b \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, há uma superfície correspondente. Defina $b = \frac{p}{q}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$. As superfícies pseudo esféricas correspondentes a vários valores do parâmetro $b \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ são vistas nas figuras de 6.3.1a à 6.3.1d.

Figura 6.3.1 – Superfícies Pseudoesféricas geradas por soluções (6.3.8) da Equação de *sine-Gordon*.

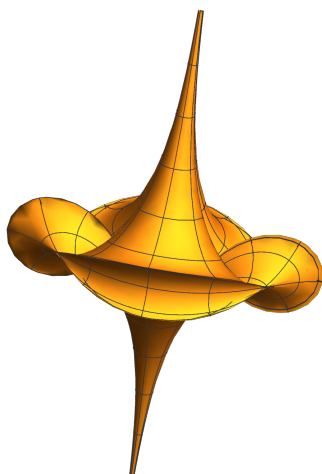
(a) Breather com $b = \frac{1}{4}$.



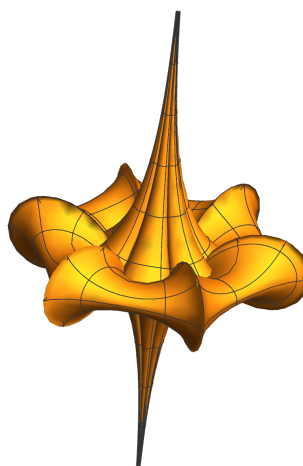
(b) Breather com $b = \frac{3}{8}$.



(c) Breather com $b = \frac{1}{2}$.



(d) Breather com $b = \frac{3}{4}$.



Fonte: Elaboradas pelo autor.

7 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo principal o estudo das transformações de Bäcklund e equações diferenciais que possuem soluções descrevendo superfícies pseudoesféricas. Durante toda a monografia, discorremos sobre distintos assuntos, porém intimamente relacionados, os quais concluiremos agora.

No Capítulo 2, estudamos os tensores e formas diferenciais, bem como sua álgebra de espaço vetorial. Ademais, introduziu-se, no mesmo capítulo, o conceito de forma diferencial e o pullback de formas diferenciais, o qual usamos com bastante frequência no decorrer dos outros capítulos.

No Capítulo 3, nos concentramos em abordar, via formas diferenciais, a geometria diferencial de superfícies, definindo os entes principais de uma superfície, isto é, as formas fundamentais, os referenciais móveis e as curvaturas, bem como o correferencial as equações de estrutura. Também, relembramos a classificação de superfícies de acordo com as curvaturas média e Gaussiana e as curvaturas principais. Por fim, tratamos de enunciar o Teorema de Bonnet, vide Teorema 3.3.1, o que nos dá o necessário para encontrar as superfícies.

No capítulo supracitado, as imersões isométricas e as formas de conexão não foram bastante exploradas e, uma vez que o tempo é de somente um ano, tal investigação tangenciaria o principal ponto desse trabalho. Isto posto, uma continuação da presente monografia seria um estudo mais aprofundado desses entes geométricos e suas consequências.

O conjunto formado pelos capítulos 2 e 3 é a base geral deste trabalho, no qual estabelecemos os fundamentos necessários para lidar com problemas de física-matemática e geometria numa linguagem moderna e pouco convencional em livros didáticos.

No Capítulo 4 abordamos o contexto histórico e geométrico das equações que descrevem superfícies pseudoesféricas, ressaltando a ênfase na equação de *sine-Gordon*, objeto principal do trabalho em questão. Ademais, definimos o que é uma equação diferencial que descreve uma superfície pseudoesférica e condições para a solução ser

genérica, além de explorarmos outros exemplos que não a equação de *sine-Gordon*.

O Capítulo 4 é o cerne desta monografia. Enfatizamos que as referências centrais desse capítulo são artigos científicos, principalmente o trabalho fundamental de [Chern e Tenenblat \(1986\)](#).

Em se tratando do Capítulo 5, fizemos um estudo sobre as transformações de Bäcklund e autotransformações de Bäcklund, definido-as e exemplificando-as, e aplicando este conhecimento à equação de *sine-Gordon*. Durante a feitoria deste capítulo, os teoremas 5.1.2 e 5.1.3 foram adaptações de um teorema em [Beals, Rabelo e Tenenblat \(1989\)](#). Também, durante este capítulo, foi realizado o estudo sobre o Teorema de Permutabilidade de Bianchi, vide Teorema 5.3.1, o qual nos proporcionou encontrar novas soluções para a equação de interesse, isto é, a equação de *sine-Gordon*.

Tal como no Capítulo 4, as referências básicas para esta parte da monografia foram artigos científicos, principalmente o já mencionado [Beals, Rabelo e Tenenblat \(1989\)](#), bem como o trabalho de [Bianchi \(1899\)](#).

Destaco que a dificuldade em trabalhar majoritariamente com referências primárias, ou seja, os artigos científicos, que usualmente não são didáticos, foi uma constante durante o desenvolvimento deste trabalho. No caso particular do trabalho de Bianchi, este tem o agravante de ter sido publicado no século XIX, com uma linguagem não usual hodiernamente. Ademais, a dificuldade de estar num ambiente geométrico, não parametrizado, o qual estava acostumado a lidar desde quando ingressei na geometria, também se fez presente durante a feitoria desta monografia.

Durante o capítulo 5, o objetivo inicial era estudar a transformação de Bäcklund de uma equação que generalizava a equação de *sine-Gordon*, isto é,

$$u_{tx} = (1 - \alpha^2 \partial_x^2) \operatorname{sen}(u),$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer. Por uma questão de tempo, tal equação foi deixada em segundo plano e explorar algo mais concreto foi a saída encontrada. A discussão em torno dessa equação gerou o desdobramento de um teorema no artigo de [Beals, Rabelo e Tenenblat \(1989\)](#), os quais constam na monografia. A concretude da equação de *sine-Gordon* juntamente com o conhecimento já formalizado referente a ela facilitaram a produção do produto final.

Por fim, o Capítulo 6 foi destinado às superfícies de curvatura Gaussiana negativa, oriundas das soluções da Equação (5.0.5), e as parametrizações e figuras que as representam, unindo todos os conhecimentos prévios para a construção de cada uma das superfícies. Utilizamos, também, o Teorema 5.3.1 para, a partir de uma parametrização dada, encontrarmos novas parametrizações de superfícies com a mesma característica.

O assunto em questão é bastante recente e com inúmeras relações entre diferentes áreas da matemática, ocupando um lugar de destaque na comunidade geométrica. Com o tempo, uma evolução natural da monografia é estudar as equações diferenciais que descrevem superfícies esféricas e suas relações com as equações estudadas aqui.

Assim, encerra-se a presente monografia, perpassando pelos temas abordados em cada um dos capítulos que a constituem e pelos anseios, dificuldades, logros e empates do autor.

Referências

- ALMEIDA, S. C. de; PIMENTEL, F. A. A. O Teorema de Bäcklund segundo S. S. Chern. *Matemática Universitária*, vol. 20, 23 - 45, 1996. Citado na página 64.
- BEALS, R.; RABELO, M.; TENENBLAT, K. Bäcklund Transformations and Inverse Scattering Solutions for Some Pseudospherical Surfaces Equations. *Studies in Applied Mathematics*, vol. 81, 125-151, 1989. Citado 4 vezes nas páginas 80, 81, 84 e 122.
- BIANCHI, L. Sulla teoria delle trasformazioni delle superfieie a curvatura costante. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 3, 185 - 298, 1899. Citado 4 vezes nas páginas 64, 81, 92 e 122.
- CAMASSA, R.; HOLM, D. D. An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons. *Physical Review Letters*, vol 71, 1661 - 1664, 1993. Citado na página 73.
- CHALUB, F. A. C. C.; ZUBELLI, J. P. Sólitons: Na crista da onda por mais de 100 anos. *Matemática Universitária*, vol. 30, 41 - 65, 2001. Citado na página 63.
- CHERN, S.-S.; TENENBLAT, K. Pseudospherical Surfaces and Evolution Equations. *Studies in Applied Mathematics*, vol. 74, 55 - 83, 1986. Citado 8 vezes nas páginas 65, 66, 68, 71, 81, 89, 90 e 122.
- CLELLAND, J. N. *From Frenet to Cartan: The Method of Moving Frames*. 1. ed. Washington D. C.: Editora American Mathematical Society, 2017. Coleção Graduate Studies in Mathematics, número 178. Citado 3 vezes nas páginas 46, 51 e 58.
- DRAZIN, P. G.; JOHNSON, R. S. *Solitons: an introduction*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. Citado na página 80.
- FREIRE, I. L. *Cálculo Avançado*. São Carlos: Notas de Aula, 2025. Curso ministrado no Verão de 2025. Citado na página 17.
- FREIRE, I. L. A Look on Equations Describing Pseudospherical Surfaces. ArXiv:2506.23890. 2025. Citado na página 73.
- FREIRE, I. L.; TITO, R. da S. A Novikov equation describing pseudo-spherical surfaces, its pseudo-potentials, and local isometric immersions. *Studies in Applied Mathematics*, vol 148, 758 - 772, 2021. Citado na página 76.
- GRIFFITHS, G. W. *Bäcklund Transformation*. Londres, Reino Unido: Notas de Aula, 2012. Acessado em: <https://www.researchgate.net/publication/269408982>. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 95.

- GUGGENHEIMER, H. W. *Differential Geometry*. 2. ed. Washington D. C.: Dover Publications, 1977. 0486634337. Citado na página 62.
- KORTEWEG, D. J.; VRIES, G. de. Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philosophical Magazine*, Series 5, 422 - 443, 1895. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 68.
- MCINERNEY, A. *First Steps in Differential Geometry: Riemannian, Contact, Symplectic*. 1. ed. Nova York: Editora Springer, 2013. Undergraduate Texts in Mathematics. Citado na página 17.
- MIURA, R. M. Korteweg-de-Vries Equation and Generalizations. I. A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation. *Journal of Mathematical Physics*, vol 9, 1202 - 1204, 1968. Citado na página 71.
- NOVIKOV, V. Generalizations of the Camassa–Holm equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol 42, 1 - 14, 2009. Citado na página 76.
- REYES, E. G. Geometric Integrability of the Camassa-Holm Equation. *Letters in Mathematical Physics*, vol. 59, 117 - 131, 2002. Citado na página 73.
- ROGERS, C.; SCHIEF, W. K. *Bäcklund and Darboux transformations : geometry and modern applications in soliton theory*. 1. ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 2002. 0521012880. Citado 7 vezes nas páginas 64, 80, 85, 90, 93, 106 e 114.
- SANDER, G. P. *Sobre a teoria das transformações de superfícies de curvatura constante*. Dissertação (Mestrado) — ICMC/USP, 2009. Citado na página 64.
- SASAKI, R. Soliton Equations and Pseudospherical Surfaces. *Nuclear Physics*, vol. 154, 343 - 357, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 71.
- SPIVAK, M. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. 1. ed. Boulder, Colorado: Editora Westview Press, 1971. ASIN: 0805390219. Citado na página 17.
- TENENBLAT, K. *Transformations of Manifolds and Applications to Differential Equations*. 1. ed. Reino Unido: Addison Wesley Longman Limited, 1998. 0582316197. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 98.
- TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2. ed. Brasília: Editora Blucher, 2008. Universidade de Brasília. Citado na página 46.
- ZABUSKY, N. J.; KRUSKAL, M. D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters*, vol 15, 240 - 243, 1965. Citado na página 64.

Índice

- k*-Forma, 27
- k*-Tensor, 24
 - Alternado, 24
- 1-Formas
 - da Equação de sine-Gordon usuais, 66
 - da equação de sine-Gordon de laboratório, 100
- Alternador, 25
- Aplicação Normal de Gauss, 51
- Bianchi
 - Teorema de Permutabilidade, 95
- Bäcklund
 - Autotransformação de, 89
 - Transformação de, 86
- Campo
 - de vetores ao longo de Σ , 46
- Condição
 - de Frobenius, 82
 - Superposição de Bianchi, 94
- Conexão
 - de Levi-Civita, 60
- Contravariante, 18
- Correferencial, 47
- Covariante, 18
- Curvatura
 - Gaussiana
 - Fórmula, 106
 - gaussiana, 55
 - Média, 55
 - Normal, 52
 - Principal, 54
- Derivada Exterior, 36
- Direção
 - Assintótica, 53
 - Principal, 54
- Equação
 - de sine-Gordon, 67
- Equação Diferencial
 - Parcial, 65
 - Pseudoesférica, 65
- Equações
 - de Cartan, 49
 - de Codazzi-Mainardi, 62
- Espaço
 - Cotangente, 34
 - Tangente, 33
- Forma
 - Diferencial, 33
 - Exata, 39
 - Fechada, 39
 - Fundamental I, 49
 - Fundamental II, 52
 - Operador de, 51
- Formas
 - de Conexão, 47

Invariante

Intrínseco, 55

Linha Assintótica, 53

Ponto

Elíptico, 56

Hiperbólico, 56

Parabólico, 56

Planar, 56

Umbílico, 57

Princípio

de Superposição de Bianchi, 95

Pseudoesfera de Beltrami, 107

Pullback

de Formas Diferenciais, 39

Referencial

Móvel Adaptado, 47

Principal, 54

Solução

Equação de sine-Gordon, 91

Genérica, 66

Superfície

Elíptica, 58

Esférica, 58

Hiperbólica, 58

Mínima, 59

Parabólica, 58

Plana, 58

Pseudoesférica, 58

Umbílica, 59

Tensor, 18

Variáveis

Independentes, 106

Vetor

Normal, 106