



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



AMANDA DOS SANTOS

GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

SÃO CARLOS – SP
2025



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 1/2025/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

AMANDA DOS SANTOS

GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 18 de fevereiro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Natália Andrea Viana Bedoya
Membro da Banca 1	Liane Bordignon
Membro da Banca 2	Fabio Gomes Figueira



Documento assinado eletronicamente por **Fabio Gomes Figueira, Professor(a) Adjunto(a)**, em 02/04/2025, às 15:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Natalia Andrea Viana Bedoya, Professor(a) Adjunto(a)**, em 16/04/2025, às 13:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Liane Bordignon, Professor(a) do Ensino Superior**, em 16/04/2025, às 20:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1781254** e o código CRC **CB504FE7**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.007417/2025-06

SEI nº 1781254

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

AMANDA DOS SANTOS

GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientadora: Profa. Dra. Natalia A. Viana Bedoya

SÃO CARLOS – SP
2025

AGRADECIMENTOS

A Deus, minha gratidão pela força e motivação que me permitiu superar desafios. Aos meus pais, pelo amor, apoio e ensinamentos que me trouxeram até aqui. Agradeço à minha orientadora pela paciência e dedicação que contribuiu para a realização deste trabalho. Aos meus professores, da escola e da graduação, os quais sempre me inspirei e com os quais tanto aprendi. Agradeço ainda aos meus colegas de estudo, com quem também aprendi, e a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”

(Albert Einstein)

RESUMO

O presente trabalho consiste no estudo dos grupos de permutações, realizado por meio da resolução de exercícios propostos no livro “*Permutation Groups*” de John D. Dixon e Brian Mortimer, publicado pela editora *Springer* em 1996. O texto está dividido em quatro capítulos. No segundo capítulo, apresentamos o trabalho feito no “*Trabalho de Conclusão de Curso 1*”, ele compreende uma breve revisão de alguns dos conceitos fundamentais da teoria de grupos e a resolução de exercícios selecionados das seções 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5 do livro. O terceiro capítulo, referente ao “*Trabalho de Conclusão de Curso 2*”, continua a resolução de exercícios da seção 1.5 e finaliza com a seção 1.6. Quando necessário, apresentamos alguma definição ou notação utilizadas.

Palavras-chave: Permutações. Simetrias. Ações.

ABSTRACT

The present work consists of a study of permutation groups through solving exercises from the book “*Permutation Groups*” by John D. Dixon and Brian Mortimer, published by *Springer* in 1996. The text is divided in four chapters. In the second chapter, we present the work done in “*Undergraduate Thesis 1*”, which includes a brief review of some fundamental concepts in group theory and the solution of selected exercises from sections 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 and 1.5 of the book. The third chapter, related to the “*Undergraduate Thesis 2*”, continues the resolution of exercises from section 1.5 and concludes with section 1.6. When necessary, we present some definitions or notations used.

Keywords: Permutations. Symmetries. Actions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O cubo	20
Figura 2 – A rotação descrita por x	21
Figura 3 – A rotação descrita por z	21
Figura 4 – Simetrias que fixam o vértice 1	22
Figura 5 – A rotação descrita por w	24
Figura 6 –	31
Figura 7 –	31
Figura 8 –	32
Figura 9 –	32
Figura 10 –	33
Figura 11 –	34

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO 1	9
2.1	GRUPOS	9
2.2	PERMUTAÇÕES	11
2.3	AÇÕES DE GRUPOS	16
2.4	ÓRBITAS E ESTABILIZADORES	19
2.5	BLOCOS E PRIMITIVIDADE I	23
3	TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO 2	27
3.1	BLOCOS E PRIMITIVIDADE II	27
3.2	REPRESENTAÇÕES DE PERMUTAÇÕES E SUBGRUPOS NOR- MAIS	36
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

Os grupos de permutações são uma fonte importante de exemplos e contra-exemplos não somente na teoria de grupos mas também em outras áreas da matemática e da física. Em combinatória, se desejamos listar elementos em uma fila, cada ordenação desses elementos é uma permutação entre eles. Na geometria, uma reflexão do quadrado com relação à sua diagonal principal induz uma permutação de seus vértices. Na física, descreve conceitos fundamentais como a simetria.

O teorema de Cayley afirma que qualquer grupo finito pode ser imerso em um grupo de permutações, e assim “se desejamos encontrar um contra-exemplo para uma conjectura sobre grupos, desde que haja um, isto irá ocorrer em um grupo de permutações” (John B. Fraleigh, 2021, p. 79, tradução nossa). ¹ Daqui originou-se, dentre outras, uma motivação para estudar os grupos de permutações.

Estudaremos as definições por meio da resolução detalhada de exercícios selecionados e propostos no livro “*Permutation Groups*” de John D. Dixon e Brian Mortimer, publicado pela editora *Springer* em 1996.

¹ “[...] if we wish to find a counterexample to a conjecture about groups, provided that there is one, it will occur in a permutation group”.

2 TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO 1

Iniciamos este capítulo lembrando os conceitos básicos da teoria de grupos que serão úteis no decorrer do nosso estudo. As definições aqui apresentadas foram retiradas das notas de aula da disciplina de “*Grupos e Representações*” ministrada pelo Professor Dimas José Gonçalves, disciplina na qual estou matriculada atualmente.

2.1 GRUPOS

Definição 2.1. Dado um conjunto G não-vazio, dizemos que uma função

$$* : G \times G \rightarrow G$$

é uma operação binária em G . Se $(a, b) \in G \times G$, denotamos $*((a, b)) = a * b$.

Definição 2.2. Seja $*$ uma operação binária num conjunto G . Dizemos que o par $(G, *)$ é um grupo se são satisfeitas:

- (i) $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in G$;
- (ii) Existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$.
- (iii) Para todo $a \in G$ existe $a' \in G$ tal que $a * a' = e = a' * a$.

Exemplo 2.1. $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo com a operação usual de soma, $e = 0$ e $a' = -a$.

Quando for conveniente, podemos denotar $a * b$ por $a \cdot b$, ou apenas ab , e neste caso denotamos $e = 1$ e $a' = a^{-1}$.

Definição 2.3. Um grupo $(G, *)$ é dito abeliano (ou comutativo) se $a * b = b * a$ para todos $a, b \in G$.

Definição 2.4. A ordem de um grupo $(G, *)$ é a cardinalidade de G , denotada por $|G|$.

Definição 2.5. Sejam $(G, *)$ um grupo e $H \subseteq G$ um subconjunto de G . Dizemos que H é um subgrupo de G (denotamos $H \leq G$) se são satisfeitas:

- (i) $a * b \in H$ para todos $a, b \in H$,
- (ii) $e \in H$,
- (iii) $a' \in H$ para todo $a \in H$.

Definição 2.6. Sejam (G, \cdot) um grupo e $N \leq G$. Dizemos que N é subgrupo normal de G e denotamos $N \trianglelefteq G$ se

$$\{gng^{-1} \mid n \in N\} \subseteq N$$

para todo $g \in G$.

Definição 2.7. Sejam (G, \cdot) um grupo e $H \leq G$. Defina a relação de equivalência \sim em G por

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Denotamos a classe de equivalência de $a \in G$ por

$$a \cdot H = \{a \cdot h \mid h \in H\},$$

e dizemos que $a \cdot H$ é a classe lateral à esquerda de H em G que contém a . Se G/\sim é o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G , denotamos a sua cardinalidade por

$$|G/\sim| = [G : H]$$

e a chamamos de índice de H em G .

Se H é um subgrupo normal, então as classes laterais à esquerda e à direita coincidem.

Teorema 2.1 (Teorema de Lagrange). *Se G é um grupo finito e $H \leq G$, então $|G| = [G : H] \cdot |H|$. Em particular, a ordem de H divide a ordem de G .*

Definição 2.8. Sejam $(G_1, *)$ e (G_2, \diamond) grupos. Um homomorfismo de grupos é uma função $\eta : G_1 \rightarrow G_2$ que satisfaz:

$$\eta(a * b) = \eta(a) \diamond \eta(b)$$

para todos a, b em G_1 .

Um homomorfismo bijetor é chamado de isomorfismo. Finalizamos esta seção com o seguinte resultado:

Teorema 2.2 (Primeiro Teorema do Isomorfismo). *Seja $\eta : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos.*

(i) $\ker(\eta) \trianglelefteq G$ e $\text{Im}(\eta) \leq H$.

(ii) A função $\bar{\eta} : \frac{G}{\ker(\eta)} \rightarrow \text{Im}(\eta)$ dada por $\bar{\eta}(a\ker\eta) = \eta(a)$ é um isomorfismo de grupos.

2.2 PERMUTAÇÕES

Iniciamos nesta seção a resolução de alguns dos exercícios do capítulo 1 do livro “*Permutation Groups*” de John D. Dixon e Brian Mortimer (Dixon; Mortimer, 1996). No enunciado de cada exercício resolvido, indicaremos entre parênteses o número do exercício correspondente no livro.

Definição 2.9. Uma permutação dos elementos de um conjunto Ω é uma função bijetora de Ω nele mesmo.

Se x é uma permutação, podemos utilizar a notação:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ x(\alpha_1) & x(\alpha_2) & \dots & x(\alpha_n) \end{pmatrix},$$

onde a primeira linha representa o domínio e a segunda linha a imagem da permutação x : “[...] fazendo corresponder em uma mesma coluna um elemento e sua imagem” (Medeiros; Fassarella, 2021, p. 20).

Se x_1 e x_2 são permutações, chamamos $x_1 \cdot x_2$ de “produto” das permutações x_1 e x_2 , onde $x_1 \cdot x_2 = x_2 \circ x_1$. O conjunto de todas as permutações do conjunto Ω com a operação de composição de funções forma um grupo, chamado grupo simétrico. Denotaremos este grupo por $(Sim(\Omega), \circ)$ ou simplesmente $Sim(\Omega)$. Se $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ onde n é um número natural, denotamos $Sim(\Omega) = S_n$.

Exercício 2.2.1 (1.2.1). Sejam Ω e Ω' dois conjuntos não-vazios de mesma cardinalidade. Mostre em detalhes que a função

$$\begin{aligned} \eta : Sim(\Omega) &\rightarrow Sim(\Omega') \\ x &\mapsto x' \end{aligned}$$

definida por “ x' leva α' em β' quando x leva α em β ” (*), é um isomorfismo de $Sim(\Omega)$ em $Sim(\Omega')$.

Demonstração. Mostremos que η é um isomorfismo.

a) η é homomorfismo: Sejam x_1 e x_2 permutações distintas em $Sim(\Omega)$. Tome $a' \in \Omega'$ e seja $b' = x'_1(a')$, então

$$\begin{aligned} (\eta(x_1) \cdot \eta(x_2))(a') &= (x'_1 \cdot x'_2)(a') = (x'_2 \circ x'_1)(a') \\ &= x'_2(b') \\ &= k' \end{aligned}$$

por (*) temos que $x_1(a) = b$ e $x_2(b) = k$. Por outro lado,

$$(\eta(x_1 \cdot x_2))(a') = (x_1 \cdot x_2)'(a') = c'.$$

Como $(x_1 \cdot x_2)(a) = x_2(x_1(a)) = x_2(b) = k = c$ e também por (*) que $k' = c'$.

b) η é injetiva: Sejam x_1, x_2 permutações em $Sim(\Omega)$. Se $\eta(x_1) = \eta(x_2)$ então, dado $\alpha' \in \Omega'$ qualquer,

$$(\eta(x_1))(\alpha') = (\eta(x_2))(\alpha') \Rightarrow x_1'(\alpha') = x_2'(\alpha').$$

De (*) segue que $x_1(\alpha) = x_2(\alpha)$.

c) η é sobrejetora: Segue diretamente da definição em (*).

□

Quando não houver risco de confusão podemos omitir o símbolo “.” no produto $x_1 \cdot x_2$ de permutações.

Exercício 2.2.2 (1.2.2). Seja Ω um conjunto finito com n elementos. Mostre que $|Sim(\Omega)| = n!$.

Demonstração. Para a imagem do elemento $1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ temos n possibilidades. Como cada permutação é uma função bijetiva, escolhida a imagem de 1 temos $n - 1$ possibilidades para a imagem de 2. Prosseguindo desse modo, teremos apenas uma possibilidade para o último elemento. Segue que temos $n!$ permutações em S_n . □

Definição 2.10. Uma permutação x em $Sim(\Omega)$ é chamada de *r-ciclo* se existem r elementos distintos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ em Ω tais que

$$(i) \quad x(\alpha_1) = \alpha_2, \quad x(\alpha_2) = \alpha_3, \quad \dots, \quad x(\alpha_{r-1}) = \alpha_r \text{ e } x(\alpha_r) = \alpha_1;$$

$$(ii) \quad x(\beta) = \beta \text{ para todo } \beta \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}.$$

Denotamos esse tipo de permutação por:

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots \ \alpha_{r-1} \ \alpha_r)$$

onde ocultamos os elementos que são fixados por x . Um 2-ciclo é chamado de transposição.

Exemplo 2.2. A permutação a seguir representa um 3-ciclo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3).$$

Temos ainda que, “um r -ciclo qualquer se escreve como um produto de $r - 1$ transposições” (Medeiros; Fassarella, 2021, p. 21): de fato, $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) = (\alpha_1 \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_3) \dots (\alpha_1 \alpha_r)$.

Definição 2.11. Sejam $x, y \in \text{Sim}(\Omega)$.

- (i) Dizemos que x fixa α se $x(\alpha) = \alpha$, e move β se $x(\beta) \neq \beta$.
- (ii) Dizemos que x e y são disjuntas se todo elemento movido por uma é fixado pela outra.

Exemplo 2.3. $(1\ 5\ 6\ 8)$ e $(3\ 2\ 7)$ são permutações disjuntas.

Exercício 2.2.3 (1.2.4). Mostre dois ciclos $(\alpha_1 \dots \alpha_r)$ e $(\beta_1 \dots \beta_s)$ são iguais num mesmo conjunto Ω se, e somente se, $r = s$ e para algum h temos $\alpha_{i+h} = \beta_i$ para cada i , onde os índices são tomados em módulo r .

Demonstração. Sejam $c_1 = (\alpha_1 \dots \alpha_r)$ e $c_2 = (\beta_1 \dots \beta_s)$ ciclos iguais. Suponha sem perda de generalidade $r > s$. Então existe $\alpha_j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ tal que $c_2(\alpha_j) = \alpha_j$. Isto significa que α_j é movido por c_1 e fixado por c_2 , o que contradiz o fato das permutações c_1 e c_2 serem iguais. Seja $\beta_i \in \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. Como os ciclos são iguais existe k tal que $\beta_i = c_1^k(\alpha_i)$, onde c_1^k significa c_1 composto com ele mesmo k vezes. Note que, $c_1(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$, $c_1^2(\alpha_i) = c_1(\alpha_{i+1}) = \alpha_{i+2}$. Por indução podemos provar que $c_1^k(\alpha_i) = \alpha_{i+k}$, logo $\alpha_{i+k} = \beta_i$ e $c_1^r(\alpha_i) = \alpha_i$.

Reciprocamente, suponha que $r = s$ e que existe h tal que $\alpha_{i+h} = \beta_i$ para todo i . Seja $\alpha \in \Omega$ um elemento qualquer. Queremos mostrar que $c_1(\alpha) = c_2(\alpha)$. De fato, se $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ e $\alpha \notin \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ então $c_1(\alpha) = \alpha = c_2(\alpha)$ e acabamos. Se $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ então $\alpha = \alpha_j$ para algum j . Quero mostrar que $c_1(\alpha_j) = c_2(\alpha_j)$. Por hipótese, existe h tal que $c_1^h(\alpha_j) = \beta_j$, equivalentemente: $\alpha_{j+h} = \beta_j$ e $\alpha_{(j+m)+h} = \beta_{j+m}$. Em particular,

$$\alpha_j = \alpha_{j+r} = \alpha_{(j+r-h)+h} = \beta_{j+r-h} \quad (2.1)$$

Assim $\alpha_j \in \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$. Mais ainda, por um lado $c_1(\alpha_j) = \alpha_{j+1}$ e por outro $c_2(\alpha_j) = c_2(\beta_{j+r-h}) = \beta_{j+r-h+1}$. Segue da equação (2.1) que $c_2(\alpha_j) = \alpha_{j+1}$ e então $c_1(\alpha_j) = c_2(\alpha_j)$. O caso $\alpha \in \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ é análogo. \square

A demonstração do próximo exercício foi baseada na demonstração proposta no livro “An Introduction to the Theory of Groups” de Joseph J. Rotman (Rotman, 1995, p. 6). Para fins de simplicidade, enunciaremos tais resultados para o grupo simétrico S_n . Como vimos, é equivalente estudarmos $\text{Sim}(\Omega)$ ou S_n quando $|\Omega| = n$.

Exercício 2.2.4 (1.2.5). Mostre que toda permutação x em S_n pode ser escrita como produto de ciclos disjuntos. Mostre que tal escrita é única, a menos da ordem na qual os ciclos aparecem no produto e da inclusão ou exclusão de 1-ciclos.

Demonstração. Mostremos por indução finita sobre m , onde m é o número de pontos que x move. Se $m = 0$ então x não move nenhum ponto, i.e. x é a permutação identidade e acabamos. Suponha que a afirmação seja verdadeira para $m - 1$ pontos. Seja x uma permutação que move m elementos. Afirimo que x é um único ciclo ou é um produto de ciclos disjuntos. De fato, seja α_1 um elemento movido por x e defina $\alpha_2 = x(\alpha_1)$ e assim por diante. Seja r o menor inteiro positivo tal que $x(\alpha_r) = \alpha_1$. Note que não pode acontecer de $x(\alpha_r) = \alpha_j$ onde $1 < j \leq r$ pois $x(\alpha_{j-1}) = \alpha_j$ o que contradiz o fato de x ser injetora. Se $r = m$ então $(\alpha_1 \dots \alpha_m)$ é um ciclo. Se $r < m$, então $x = y(\alpha_1 \dots \alpha_r)$ onde y é uma permutação de $m - r$ elementos que, pela hipótese, é um produto de ciclos disjuntos. Ainda, y e $(\alpha_1 \dots \alpha_r)$ são disjuntas pois se $\alpha_k \in y$ sabemos que $x(\alpha_k) \neq \alpha_1$ pois x é injetiva e $x(\alpha_r) = \alpha_1$ e $x(\alpha_k) \neq \alpha_j$, $j = 2, \dots, r$ pois $x(\alpha_{j-1}) = \alpha_j$ e x é injetiva. Isto mostra que x é um produto de ciclos disjuntos.

Mostremos a unicidade. Sejam F_1 e F_2 fatorações distintas de x . Então existe um ciclo $c_1 = (a \alpha_1 \dots \alpha_r)$ em F_1 , contendo um ponto $a \in \Omega$ e diferente do ciclo $c_2 = (a \beta_1 \dots \beta_s)$ em F_2 que contém a . Pelo Exercício 2.2.3, $r \neq s$ ou para todo h temos $\alpha_{i+h} \neq \beta_i$ para cada i . Se $r \neq s$ então, por exemplo, $c_1^k(a) = x^k(a)$ e $c_2^k(a) = x^k(a)$ para todo k . Como x é uma permutação, e portanto injetiva, devemos ter $c_1^k(a) = c_2^k(a)$ para todo k e então $c_1 = c_2$, absurdo. Se para cada h temos $\alpha_{i+h} \neq \beta_i$ para cada i , então todos os elementos são distintos. No entanto, a pertence a ambos os ciclos c_1 e c_2 , o que é uma contradição. \square

Definição 2.12. Dizemos que duas permutações x e y em S_n são conjugadas se existir σ em S_n tal que $x = \sigma^{-1}y\sigma$.

Exercício 2.2.5 (1.2.6). Suponha que x e y são permutações em S_n , e que $y = c_1c_2\dots$ é um produto de ciclos disjuntos. Mostre que $x^{-1}yx = c'_1c'_2\dots$ onde cada c_i de y é substituído por um ciclo c'_i de mesmo tamanho, e cada ponto de c_i é substituído em c'_i pela sua imagem sob x . Em particular, se α'_i é a imagem de α_i sob x então

$$x^{-1}(\alpha_1 \dots \alpha_k)x = (x(\alpha_1) \dots x(\alpha_k)) = (\alpha'_1 \dots \alpha'_k).$$

Demonstração. Note que $x^{-1}yx = x^{-1}(c_1 c_2 \dots)x = x^{-1}c_1xx^{-1}c_2x\dots = c'_1c'_2\dots$ e então podemos resumir a prova para um ciclo c_i arbitrário na fatoração de y . Sejam $c_i = (\alpha_1 \dots \alpha_k)$ e $c'_i = (x(\alpha_1) \dots x(\alpha_k))$, vamos mostrar que $x^{-1}c_ix = c'_i$. De fato, seja $x(\alpha_i) \in \{x(\alpha_1), \dots, x(\alpha_k)\}$ temos que $(x^{-1}c_ix)(x(\alpha_i)) = (x \circ c_i \circ x^{-1})(x(\alpha_i)) = (x \circ c_i)(\alpha_i) = x(\alpha_{i+1})$. Por outro lado, temos $c'_i(x(\alpha_i)) = x(\alpha_{i+1})$. Se $b \notin \{x(\alpha_1), \dots, x(\alpha_k)\}$ então $x^{-1}(b) \notin c_i$, daí $(x^{-1}c_ix)(b) = (x \circ c_i \circ x^{-1})(b) = (x \circ x^{-1})(b) = b = c'_i(b)$ e acabamos. \square

Exercício 2.2.6 (1.2.7). Mostre que duas permutações $x, y \in S_n$ são conjugadas se, e somente se, têm a mesma estrutura de ciclos.

Demonstração. Sejam $x, y \in S_n$ duas permutações conjugadas. Por definição, existe $\sigma \in S_n$ tal que $x = \sigma^{-1}y\sigma$. Sabemos que cada permutação pode ser escrita como um produto de ciclos disjuntos (ver Exercício 2.2.4) e que essa escrita é única a menos da inclusão ou exclusão de 1-ciclos. Seja $y = c_1c_2 \dots$ um produto de ciclos disjuntos. Pelo exemplo anterior temos que

$$x = \sigma^{-1}y\sigma = \sigma^{-1}(c_1 c_2 \dots)\sigma = \sigma^{-1}c_1\sigma\sigma^{-1}c_2\sigma \dots = c'_1c'_2 \dots$$

onde cada ciclo c_i é substituído por um ciclo c'_i de mesmo tamanho. Logo, x e y possuem ciclos de mesmo comprimento e o mesmo número de ciclos.

Reciprocamente, sejam $x = c_1c_2 \dots c_i \dots$ e $y = c'_1c'_2 \dots c'_i \dots$ duas permutações em S_n tais que x e y possuem a mesma estrutura de ciclos. Por hipótese, dado um ciclo $c_i = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \dots)$ de x existe $c'_i = (\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_j \dots)$ de mesmo comprimento, com $i \in \{1, 2, \dots\}$. Denotaremos por $\{c_i\}$ o conjunto dos elementos de Ω ² movidos pelo ciclo c_i , ou seja, $\{c_i\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \dots\}$ e $\{c'_i\} = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_j, \dots\}$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots\}$ seja a função (bijetiva)

$$\begin{aligned} \sigma_i : \{c_i\} &\rightarrow \{c'_i\} \\ \alpha_j &\mapsto \alpha'_j \end{aligned}$$

para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Defina $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ por $\sigma(a) = \sigma_i(a)$ se $a \in \{c_i\}$ para algum i , caso contrário $\sigma(a) = a$. Note que σ é injetiva pois os ciclos c'_i são disjuntos. Para cada elemento $b \in \Omega$, ou $b \in c'_i$ para algum i ou $\sigma^{-1}(b) = b$. Segue que σ é sobrejetiva e, portanto, σ é uma permutação dos elementos de Ω . Ainda, para cada c'_i em y temos

$$\begin{aligned} c'_i &= (\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_j \dots) = (\sigma_i(\alpha_1) \sigma_i(\alpha_2) \dots \sigma_i(\alpha_j) \dots) = (\sigma(\alpha_1) \sigma(\alpha_2) \dots \sigma(\alpha_j) \dots) \\ &= \sigma^{-1}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_j \dots)\sigma = \sigma^{-1}c_i\sigma. \end{aligned}$$

Segue que $y = c'_1c'_2 \dots c'_j \dots = \sigma^{-1}c_1\sigma\sigma^{-1}c_2\sigma \dots \sigma^{-1}c_j\sigma \dots = \sigma^{-1}x\sigma$ como desejado. \square

Exemplo 2.4. Sejam $x = (1 \ 2 \ 3 \ \dots)$ e $y = (2 \ 3 \ 4 \ \dots)$ dois ciclos infinitos em $\text{Sim}(\mathbb{N})$. Note que x e y não possuem a mesma estrutura de ciclos. De fato, escrevendo ambas como produto de ciclos disjuntos, podemos ver que $y = (1)(2 \ 3 \ 4 \ \dots)$ possui um ciclo a mais. Segue do Exercício 2.2.6 que x e y não são conjugadas.

² Lembre que $\Omega = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$.

Exercício 2.2.7 (1.2.15). Mostre que para todo $i, 1 < i \leq n$, $\langle (2\ 3 \dots n), (1\ i) \rangle = S_n$.

Demonstração. Note que toda permutação pode ser escrita como um produto de transposições. Mostraremos então que toda transposição $\tau = (j\ k), 1 \leq j, k \leq n$ pode ser gerada por $\langle (2\ 3 \dots n), (1\ i) \rangle$. Fixemos i .

- a) Toda transposição $(1\ k), 1 < k \leq n$ é gerada por $\langle (2\ 3 \dots n), (1\ i) \rangle$. De fato, sabemos que $k = i + h$ com $h \in \{2 - i, 3 - i, \dots, n - i\}$, daí

$$(2\ 3 \dots n)^{-h}(1\ i)(2\ 3 \dots n)^h = (1\ i+h) = (1\ k).$$

Em particular, $(2\ 3 \dots n)^{-1}(1\ i)(2\ 3 \dots n) = (1\ i+1)$.

- b) Toda transposição $(i\ i+1)$ é gerada por $\langle (2\ 3 \dots n), (1\ i) \rangle$. De fato,

$$(1\ i+1)^{-1}(1\ i)(1\ i+1) = (i\ i+1).$$

- c) Seja $\tau = (j\ k)$ uma transposição qualquer. Temos

$$(1\ k)^{-1}(1\ j)(1\ k) = (j\ k).$$

Mostramos que $\langle (2\ 3 \dots n), (1\ i) \rangle$ contém todas as transposições e então $S_n \subseteq \langle (2\ 3 \dots n), (1\ i) \rangle$. Por outro lado, $\langle (2\ 3 \dots n), (1\ i) \rangle \subseteq S_n$ e acabamos. \square

2.3 AÇÕES DE GRUPOS

Definição 2.13. Seja G um grupo e Ω um conjunto não vazio. Uma ação de um grupo G sobre um conjunto Ω é uma função

$$\begin{aligned} \mu : \Omega \times G &\rightarrow \Omega \\ (\alpha, x) &\mapsto \mu(\alpha, x) = \alpha^x \end{aligned}$$

que satisfaz

- (i) $\alpha^1 = \alpha$ para todo $\alpha \in \Omega$ (onde 1 é o elemento identidade de G).
- (ii) $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$ para todo $\alpha \in \Omega$ e $x, y \in G$.

Um subgrupo de $\text{Sim}(\Omega)$ age em Ω , onde α^x é a imagem de α pela permutação x : “quando nada for dito, assumimos que esta é a ação que estamos lidando, sempre que estivermos falando de grupos de permutações” (Dixon; Mortimer, 1996, p. 5, tradução nossa).³

³ “Except when explicitly stated otherwise, we shall assume that this is the action we are dealing with whenever we have a group of permutations.”

“O grupo de simetrias do cubo age em vários conjuntos, incluindo: o conjunto dos oito vértices, o conjunto das seis faces, o conjunto das doze arestas e o conjunto das quatro diagonais principais do cubo” (Dixon; Mortimer, 1996, p. 5, tradução nossa).⁴

Exemplo 2.5. Seja G um grupo agindo em um conjunto Ω . Considere a função $\rho : G \rightarrow \text{Sim}(\Omega)$ dada por $\rho(x) = \bar{x}$, onde $\bar{x} : \Omega \rightarrow \Omega$ é definida por $\bar{x}(\alpha) = \alpha^x$. Então, dados $x_1, x_2 \in G$ e $\alpha \in \Omega$ temos:

$$\begin{aligned} (\rho(x_1)\rho(x_2))(\alpha) &= (\rho(x_2) \circ \rho(x_1))(\alpha) = (\bar{x}_2 \circ \bar{x}_1)(\alpha) = \bar{x}_2(\alpha^{x_1}) = (\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2} \\ &= \overline{x_1 x_2}(\alpha) = \rho(x_1 x_2)(\alpha) \end{aligned}$$

e, portanto, ρ é um homomorfismo.

Definição 2.14. Dizemos que uma representação do grupo G no conjunto Ω é um homomorfismo de G em $\text{Sim}(\Omega)$.

Exercício 2.3.1 (1.3.1). Seja $\rho : G \rightarrow \text{Sim}(\Omega)$ uma representação de um grupo G no conjunto Ω . Mostre que isto define uma ação de G em Ω dada por $\alpha^x := \alpha^{\rho(x)}$ para todo $\alpha \in \Omega$ e $x \in G$, e que ρ é a representação que corresponde a essa ação.

Demonstração. De fato:

- a) $\alpha^1 = \alpha^{\rho(1)} = \alpha^{\bar{1}} = \bar{1}(\alpha) = \alpha$.
- b) $(\alpha^x)^y = (\alpha^{\rho(x)})^{\rho(y)} = (\alpha^{\bar{x}})^{\bar{y}} = \alpha^{\bar{x}\bar{y}} = \alpha^{\rho(xy)} = \alpha^{xy}$.

Note que ρ é a representação correspondente à ação que acabamos de definir, segundo o Exemplo 2.5. □

Exercício 2.3.2 (1.3.2). Explique por que, geralmente, não obtemos uma ação de um grupo G nele mesmo definindo $a^x := xa$. Mostre que, no entanto, $a^x := x^{-1}a$ é uma ação de G nele mesmo. Analogamente, mostre como definir uma ação do grupo G no conjunto das classes laterais à esquerda aH ($a \in G$) de um subgrupo H .

Demonstração. Observe que $a^1 = a$. Também temos que $(a^x)^y = y(xa) = (yx)a$ e, por outro lado, $a^{xy} = (xy)a$. Assim, se G não é abeliano, então a função $a^x := xa$ não é uma ação. Agora, se $a^x := x^{-1}a$ então $a^1 = a$ e $(a^x)^y = y^{-1}(x^{-1}a) = y^{-1}x^{-1}a = (xy)^{-1}a = a^{xy}$. Defina a ação de G no conjunto das classes laterais à esquerda de H em G por $(aH)^x := x^{-1}aH$. Temos que:

- a) $(aH)^1 = aH$.
- b) $((aH)^x)^y = y^{-1}(x^{-1}aH) = y^{-1}x^{-1}aH = (xy)^{-1}aH = (aH)^{xy}$.

□

⁴ “The group of symmetries of the cube acts on a variety of sets including: the set of eight vertices, the set of six faces, the set of twelve edges, and the set of four principal diagonals[...].”

Definição 2.15. Uma ação de um grupo G num conjunto Ω é dita fiel quando a representação correspondente é injetora.

Os exemplos a seguir foram retirados do livro de [Dixon e Mortimer \(1996, p. 6\)](#).

Exemplo 2.6 (Representação de Cayley). Para qualquer grupo G podemos tomar $\Omega := G$ e definir uma ação pela multiplicação à direita: $a^x := ax$ com $a, ax \in \Omega$ e $x \in G$. A representação correspondente de G em $Sim(G)$ é chamada *representação regular à direita*. Ela é fiel pois o núcleo

$$\{x \in G \mid a^x = a, \forall a \in \Omega\}$$

é trivial. Isto mostra que todo grupo é isomorfo a um grupo de permutações, isto é, um subgrupo de $Sim(G)$.

Exemplo 2.7 (Ação nas classes laterais à direita). Para qualquer grupo G e qualquer subgrupo H de G podemos tomar $\Gamma_H := \{Ha \mid a \in G\}$ como o conjunto das classes laterais à direita de H em G , e definir uma ação de G em Γ_H pela multiplicação à direita: $(Ha)^x := Hax$ com $Ha, Hax \in \Gamma_H$ e $x \in G$. Denotamos a representação correspondente de G em Γ_H por ρ_H . Como $Hax = Ha \Leftrightarrow x \in a^{-1}Ha$, temos

$$\ker \rho_H = \bigcap_{a \in G} a^{-1}Ha.$$

Em geral, ρ_H não é fiel.

Exercício 2.3.3 (1.3.3). Mostre que o núcleo de ρ_H no exemplo anterior é igual ao maior subgrupo normal de G contido no subgrupo H .

Demonstração. Seja $N \subset H$ e $N \trianglelefteq G$. Quero mostrar que se $n \in N$ então $n \in \ker(\rho_H)$. Como $N \trianglelefteq G$, existem $n_1 \in N$ e $a \in G$ tais que $a^{-1}n_1a = n$. Logo $n_1 \in a^{-1}Ha$ pois $n_1 \in H$. Então

$$a^{-1}Han_1 = a^{-1}Ha \Leftrightarrow Han_1 = Ha \Leftrightarrow n_1 \in \ker(\rho_H).$$

Como $n_1 \in \ker(\rho_H)$ e o núcleo é um subgrupo normal temos que $n = a^{-1}n_1a \in \ker(\rho_H)$. Portanto $N \subset \ker(\rho_H)$ como desejado. \square

Exercício 2.3.4 (1.3.4). Use o exercício anterior para mostrar que se G é um grupo com um subgrupo H de índice finito n , então G tem um subgrupo normal K contido em H cujo o índice em G é finito e divide $n!$. Em particular, se H tem índice 2 então H é normal em G .

Demonstração. Seja $K = \ker(\rho_H)$. Sabemos que $\rho_H : G \rightarrow Sim(\Gamma_H)$ dada por $\rho_H(g) = \bar{g}$ é um homomorfismo, pois G age em Γ_H . Pelo Teorema 2.2 temos que

$$G/\ker(\rho_H) \simeq \text{Im}(\rho_H) \leq Sim(\Gamma_H)$$

e então $|G/\ker(\rho_H)| = |\text{Im}(\rho_H)| \leq n!$ Pelo Teorema 2.1 segue que $[G : K]$ é finito e divide $n!$. Em particular, se H tem índice 2 então $\Gamma_H = \{eH, aH \mid a \notin H\}$ e daí $H = \ker(\rho_H) \trianglelefteq G$. \square

2.4 ÓRBITAS E ESTABILIZADORES

Definição 2.16. Seja $\mu : \Omega \times G \rightarrow \Omega$ uma ação de um grupo G num conjunto Ω . Defina a seguinte relação de equivalência \sim em Ω :

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \text{existe } x \in G \text{ tal que } \alpha^x = \beta.$$

As classes de equivalência são chamadas de órbitas.

(i) A órbita de α é um subconjunto de Ω definido por:

$$\alpha^G := \{\beta \in \Omega \mid \alpha \sim \beta\} = \{\alpha^x \mid x \in G\}.$$

(ii) O estabilizador de α é um subgrupo de G definido por:

$$G_\alpha := \{x \in G \mid \alpha^x = \alpha\}.$$

Dizemos que o grupo G age transitivamente em Ω (equivalentemente, que G é transitivo em Ω) se para todos $\alpha, \beta \in \Omega$ existe $x \in G$ tal que $\alpha^x = \beta$. Note que nesse caso G possui uma única órbita, isto é $\alpha^G = \Omega$.

Enunciamos a seguir, sem demonstração, o Teorema 1.4A e Corolário 1.4A do livro [Dixon e Mortimer \(1996, p. 8, 9\)](#).

Teorema 2.3. *Suponha que G é um grupo agindo em um conjunto Ω e que $x, y \in G$ e $\alpha, \beta \in \Omega$. Então:*

- (i) *Dois órbitas α^G e β^G são iguais (como conjunto) ou disjuntas, então o conjunto de todas as órbitas forma uma partição de Ω em subconjuntos mutualmente disjuntos.*
- (ii) *O estabilizador G_α é um subgrupo de G e $G_\beta = x^{-1}G_\alpha x$ sempre que $\beta = \alpha^x$. Além disso, $\alpha^x = \alpha^y \Leftrightarrow G_\alpha x = G_\alpha y$.*
- (iii) *(Propriedade da órbita-estabilizador) $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$ para todo $\alpha \in \Omega$. Em particular, se G é finito então $|\alpha^G| |G_\alpha| = |G|$.*

Corolário 2.1. *Suponha que G age transitivamente no conjunto Ω . Então:*

- (i) *Os estabilizadores G_α ($\alpha \in \Omega$) formam uma única classe de conjugação de subgrupos de G .*
- (ii) *O índice $|G : G_\alpha| = |\Omega|$ para cada α .*
- (iii) *Se G é finito então a ação de G é regular $\Leftrightarrow |G| = |\Omega|$.*

Exercício 2.4.1 (1.4.1). *Seja G um grupo agindo transitivamente em um conjunto Ω , H um subgrupo de G e G_α o estabilizador de α em G . Mostre que $G = G_\alpha H \Leftrightarrow G = H G_\alpha \Leftrightarrow H$ é transitivo. Em particular, o único subgrupo transitivo de G contendo G_α é o próprio G .*

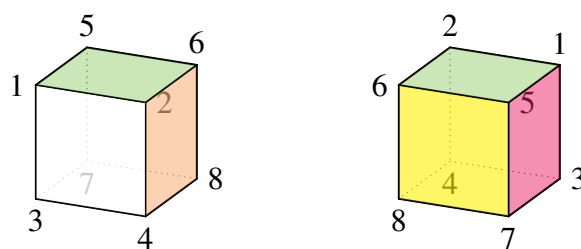
Demonstração. Vamos demonstrar a equivalência “ $G = G_\alpha H \Leftrightarrow H$ é transitivo”. Suponha $G = G_\alpha H$. Como G é transitivo em Ω , para todo $\beta \in \Omega$ existe $g \in G$ tal que $\alpha^g = \beta$. Por hipótese, existem $g_\alpha \in G_\alpha$ e $h \in H$ tais que $g = g_\alpha h$. Segue que $\beta = \alpha^g = \alpha^{g_\alpha h} = \alpha^h$ e então H é transitivo. Reciprocamente, seja H transitivo. É claro que $G_\alpha H \subseteq G$, basta mostrar que $G \subseteq G_\alpha H$. Seja $g \in G$, como G é transitivo $\Omega = \alpha^G = \alpha^H$ e então para este g existe $h \in H$ tal que $\alpha^g = \alpha^h$. Segue que $\alpha^{gh^{-1}} = \alpha$ e então $gh^{-1} \in G_\alpha$. Portanto $g \in G_\alpha H$ como desejado.

Analogamente, mostraremos a equivalência “ $G = H G_\alpha \Leftrightarrow H$ é transitivo”. Suponha $G = H G_\alpha$. Como G é transitivo, para todo $\beta \in \Omega$, existe $g \in G$ tal que $\beta^g = \alpha$. Usando a hipótese, existem $h \in H$ e $g_\alpha \in G_\alpha$ tais que $g = h g_\alpha$. Portanto $\beta^h = \alpha^{g_\alpha^{-1}} = \alpha$ e então H é transitivo. Por outro lado, seja H transitivo. Assim, para todo $g \in G$ existe $h \in H$ tal que $\alpha^{g^{-1}} = \alpha^{h^{-1}}$. Logo $\alpha = \alpha^{h^{-1}g}$ e então $g \in H G_\alpha$ e acabamos. Em particular, se H é um subgrupo transitivo contendo G_α , então $G = G_\alpha H = H$. \square

Exercício 2.4.2 (1.4.2). *Mostre que a ação do grupo de simetrias do cubo no conjunto das seis faces do cubo é transitiva, e deduza que o grupo de simetrias contém um subgrupo de índice 6.*

Demonstração. Seja G o grupo de simetrias do cubo representado abaixo.

Figura 1 – O cubo



Fonte: Elaborado pela autora

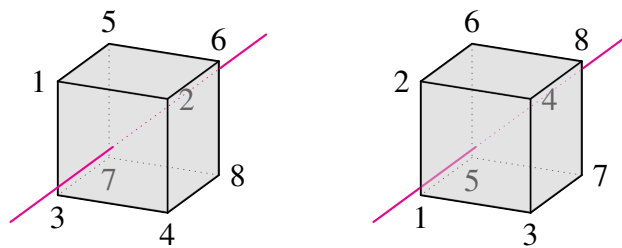
Identificando cada face do cubo pelos vértices correspondentes temos que

$$\mathcal{F} = \{\text{branca:}\{1,2,3,4\}, \text{ azul:}\{3,4,7,8\}, \text{ laranja:}\{2,6,4,8\}, \text{ vermelha:}\{1,5,3,7\}, \\ \text{ amarela:}\{5,6,7,8\}, \text{ verde:}\{1,2,5,6\}\}$$

é o conjunto das faces do cubo.

Seja x em G a rotação do cubo num ângulo de 90° no sentido anti-horário em torno do eixo tomado pelos pontos médios das faces da frente e de trás.

Figura 2 – A rotação descrita por x



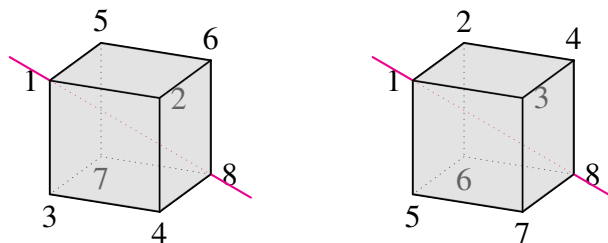
Fonte: Elaborado pela autora

Vejamos, por exemplo, o que a rotação x faz com a face laranja. Temos que $\{2,6,4,8\}^x = \{2^x, 6^x, 4^x, 8^x\} = \{1,5,2,6\}$ e então, $\text{laranja}^x = \text{verde}$. Logo, a permutação induzida por x no conjunto das faces do cubo é

$$\bar{x} = (\text{branca})(\text{amarela})(\text{laranja verde vermelha azul}).$$

Considere agora o rotação z de 120° no sentido anti-horário pelo eixo através dos vértices 1 e 8.

Figura 3 – A rotação descrita por z



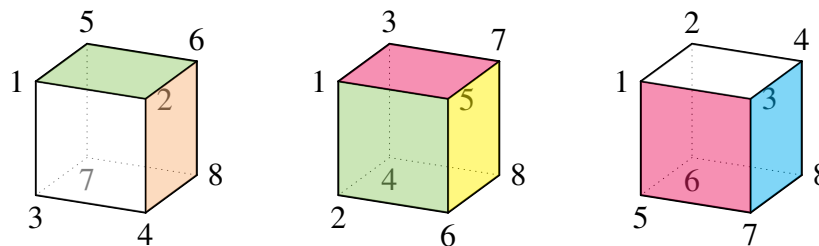
Fonte: Elaborado pela autora

Desse modo, a permutação induzida por z no conjunto das faces do cubo é dada pela permutação $\bar{z} = (\text{branca verde vermelha})(\text{azul laranja amarela})$. Assim, as órbitas do subgrupo $\langle x \rangle$ são $\{\text{branca}\}$, $\{\text{amarela}\}$ e $\{\text{laranja, verde, vermelha, azul}\}$ e as órbitas de $\langle z \rangle$ são $\{\text{branca, verde, vermelha}\}$ e $\{\text{azul, laranja, amarela}\}$. Como as órbitas do subgrupo $\langle x, z \rangle$ são disjuntas segue que $\langle x, z \rangle$ possui uma única órbita, isto é, dadas duas faces α, β existe g em $\langle x, z \rangle$ (e portanto em G) tal que $\alpha^g = \beta$. Portanto G é transitivo em \mathcal{F} . Em particular, segue do Corolário 2.1 que $|G : G_{\text{amarela}}| = 6$. \square

Exercício 2.4.3 (1.4.3). Seja $H = G_1$ o grupo de simetrias do cubo que fixa o vértice 1. Quais são as órbitas de H no conjunto das 12 arestas do cubo?

Demonstração. Seja o cubo como na Figura 1. Note que se x é uma simetria que fixa o vértice 1 então a face branca está ou na frente, ou na esquerda, ou no topo. Os casos estão representados na Figura 4.

Figura 4 – Simetrias que fixam o vértice 1



Fonte: Elaborado pela autora

As órbitas de H no conjunto das arestas são: $(1, 2)^H = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5)\}$, $(2, 4)^H = \{(2, 4), (3, 7), (5, 6)\}$, $(3, 4)^H = \{(3, 4), (5, 7), (2, 6)\}$, $(7, 8)^H = \{(7, 8), (6, 8), (4, 8)\}$. \square

Exercício 2.4.4 (1.4.5). Seja K um grupo. Mostre que podemos definir uma ação do produto direto $K \times K$ no conjunto K por: $a^{(x,y)} := x^{-1}ay$ para todo $a \in K$ e $(x, y) \in K \times K$. Mostre que esta ação é transitiva e encontre o estabilizador K_1 . Quando a ação é fiel?

Demonstração. De fato, por definição

- $a^{(1,1)} = 1^{-1}a1 = a$, onde $(1, 1)$ denota o elemento identidade de $K \times K$.
- $(a^{(x_1, y_1)})^{(x_2, y_2)} = x_2^{-1}(x_1^{-1}ay_1)y_2 = (x_1x_2)^{-1}ay_1y_2 = a^{(x_1x_2, y_1y_2)} = a^{(x_1, y_1)(x_2, y_2)}$, onde $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K \times K$.

Mostremos que a ação é transitiva. Seja $a \in K$ temos,

$$a^{K \times K} = \{a^{(x,y)} \mid (x,y) \in K \times K\} = \{x^{-1}ay \mid (x,y) \in K \times K\} = K$$

como desejado. O estabilizador $K_1 = \{(x, y) \in K \times K | x^{-1}1y = 1\} = \{(x, y) \in K \times K | y = x\}$. A representação correspondente à ação é dada por:

$$\begin{aligned} \rho : K \times K &\rightarrow \text{Sim}(K) \\ (x, y) &\mapsto \overline{(x, y)} \end{aligned}$$

onde $\overline{(x, y)}(a) = x^{-1}ay$. A ação é fiel quando $\ker(\rho) = \{(x, y) \in K \times K | x^{-1}ay = a, \forall a \in K\} = \{(1, 1)\}$. Note que se K é abeliano o núcleo não é trivial. \square

Exercício 2.4.5 (1.4.6). Suponha que G é um grupo agindo em um conjunto Ω e H é um subgrupo de G , e seja Δ uma órbita em H . Mostre que Δ^x é uma órbita em $x^{-1}Hx$ para cada $x \in G$. Se G é transitivo em Ω e $H \triangleleft G$, mostre que toda órbita de H tem a forma Δ^x para algum $x \in G$.

Demonstração. Seja $\Delta = \{\alpha^h | h \in H\}$ uma órbita em H , então $\Delta^x = \{\alpha^{hx} | h \in H\}$ com $x \in G$. Temos que $\alpha^x = \beta$ para algum $\beta \in \Omega$. Como $\alpha = \beta^{x^{-1}}$ segue que $\Delta^x = \{\beta^{x^{-1}hx} | h \in H\}$ que é uma órbita em $x^{-1}Hx$. Suponha agora G transitivo em Ω e $H \triangleleft G$. Seja $\Delta' = \{\delta^h | h \in H\}$ uma órbita qualquer em H . Como G é transitivo existe $x \in G$ tal que $\alpha^x = \delta$ e então $\Delta^x = \{(\delta^{x^{-1}})^{hx} | h \in H\}$. Segue da hipótese que $x^{-1}hx \in H$ para todo $h \in H$ e portanto $\Delta^x = \Delta'$. \square

2.5 BLOCOS E PRIMITIVIDADE I

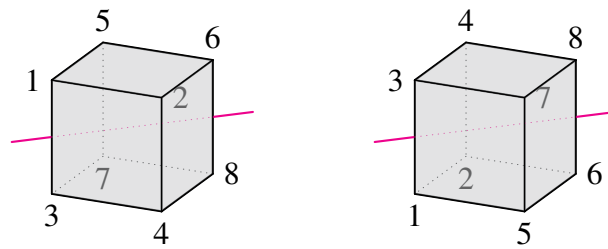
Seja G o grupo das simetrias do cubo (ver Figura 1). Considere a ação de G no conjunto $\Sigma = \{\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ dos pares de vértices das diagonais do cubo.

Exercício 2.5.1 (1.5.1). Mostre que a imagem da representação correspondente de G é todo o grupo simétrico S_4 .

Demonstração. A representação correspondente à ação acima é

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow \text{Sim}(\Sigma) \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

onde $\bar{x}(\alpha) = \alpha^x$. Vamos renomear os elementos de Σ por $a = \{1, 8\}$, $b = \{2, 7\}$, $c = \{3, 6\}$ e $d = \{4, 5\}$. Seja w a rotação do cubo em 180° no sentido anti-horário pelo eixo que passa pelo meio das aresta opostas $(1, 3)$ e $(6, 8)$, como na Figura 5.

Figura 5 – A rotação descrita por w 

Fonte: Elaborado pela autora

A permutação induzida por w em Σ é dada por $\bar{w} = (a\ c)(b)(d)$. Além disso, se δ é a rotação de 240° no sentido anti-horário pelo eixo através dos vértices 1 e 8, então a permutação induzida em Σ é $\bar{\delta} = (a)(b\ c\ d)$. Segue do Exercício 2.2.7 que $\langle (a\ c), (b\ c\ d) \rangle = S_4$. \square

Definição 2.17. Seja G um grupo agindo transitivamente em um conjunto Ω . Um subconjunto não-vazio Δ de Ω é um bloco de G se para cada $x \in G$ ou $\Delta^x = \Delta$ ou $\Delta^x \cap \Delta = \emptyset$.

Exemplo 2.8 (Dixon e Mortimer (1996, p.12)). Todo grupo agindo transitivamente em Ω possui o conjunto Ω e os conjuntos unitários $\{\alpha\}$ ($\alpha \in \Omega$) como blocos; eles são chamados de blocos *triviais*. Qualquer outro bloco é chamado de *não trivial*. Um bloco que é minimal no conjunto de todos os blocos de tamanho > 1 é chamado de bloco *minimal*. Um grupo é dito *primitivo* se seus únicos blocos são os triviais.

Exercício 2.5.2 (1.5.2). Mostre que o grupo cíclico $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \rangle$ agindo em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ possui exatamente 5 blocos não triviais.

Demonstração. Os elementos do grupo G são:

$$\begin{aligned} g_1 &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6), \\ g_2 &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6), \\ g_3 &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^4 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4), \\ g_4 &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^5 = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2), \\ e &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^6 = (1)(2)(3)(4)(5)(6). \end{aligned}$$

Seja Δ qualquer um destes conjuntos. Note que $\Delta^g = \Delta$ ou $\Delta^g \cap \Delta = \emptyset$. Logo, os blocos não triviais são: $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 5\}$ e $\{3, 6\}$. \square

Definição 2.18 (Dixon e Mortimer (1996, p.12)). Suponha que G age transitivamente em Ω e que Δ é um bloco para G . Seja $\Sigma := \{\Delta^x \mid x \in G\}$. Então os conjuntos em Σ formam uma partição de Ω e cada elemento de Σ é um bloco para G (ver Exercício 2.5.3); dizemos que Σ é o *sistema de blocos* contendo Δ .

Exercício 2.5.3 (1.5.3). Mostre que o sistema de blocos Σ definido acima forma uma partição de Ω e que cada um dos seus elementos é um bloco de G . Descreva a ação de G em Σ nos casos onde Δ é um bloco trivial.

Demonstração. Seja Δ um bloco de G e $\Sigma := \{\Delta^x \mid x \in G\}$ o sistema de blocos. Note que cada elemento $\alpha \in \Omega$ está em algum conjunto de Σ . De fato, se $\alpha \in \Delta$ acabamos. Suponha então que $\alpha \notin \Delta$ e $\beta \in \Delta$. Como G é transitivo, existe $x \in G$ tal que $\beta^x = \alpha$ e, portanto, $\alpha \in \Delta^x$. Mostremos que cada elemento de Σ é um bloco de G . Suponha que exista $x \in G$ tal que Δ^x não é bloco. Seja $y \in G$ tal que $\Delta^{xy} \neq \Delta^x$ e $\Delta^x \cap \Delta^{xy} \neq \emptyset$. Seja $a \in \Delta^x \cap \Delta^{xy}$ então $a = b^x$ onde $b \in \Delta$. Analogamente, $a = c^{xy}$ onde $c \in \Delta$. Então $b^x = c^{xy}$ e assim $b = b^{xx^{-1}} = c^{xyx^{-1}}$. Daí $b \in \Delta$ e $b \in \Delta^{xyx^{-1}}$. Como Δ é bloco segue que $\Delta = \Delta^{xyx^{-1}}$ e $\Delta^x = \Delta^{xy}$, o que é um absurdo. Portanto, mostramos que os conjuntos em Σ são dois a dois disjuntos e conseqüentemente Σ forma uma partição de Ω . No caso em que $\Delta = \{\alpha\}$ onde $\alpha \in \Omega$ temos que $\Sigma = \alpha^G$, ou seja, a órbita de α em G . Por fim, se $\Delta = \Omega$ então $\Sigma = \Omega$. \square

Exercício 2.5.4 (1.5.4). Se G é um grupo agindo em um conjunto Ω então uma G -congruência em Ω é uma relação de equivalência \approx em Ω com a propriedade que

$$\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha^x \approx \beta^x \text{ para todo } x \in G.$$

Mostre que se G age transitivamente em Ω e \approx é uma G -congruência, então as classes de equivalência de \approx formam um sistema de blocos para G . Reciprocamente, se Σ é um sistema de blocos para G , então os elementos de Σ são as classes de equivalência para uma G -congruência em Ω . Quais são as G -congruências que correspondem aos blocos triviais?

Demonstração. Note que se $\alpha \in \Omega$ então a classe de equivalência $[\alpha]$ é um bloco. Suponha que $[\alpha]$ não é bloco, então para algum $x \in G$

$$[\alpha]^x \neq [\alpha] \text{ e } [\alpha]^x \cap [\alpha] \neq \emptyset.$$

Seja $a \in [\alpha] \cap [\alpha]^x$ então $a \approx \alpha$ e $a \approx \alpha^x$, daí $\alpha \approx \alpha^x$, o que é uma contradição. Assim $\Sigma = \{[\alpha]^x \mid x \in G\}$ forma um sistema de blocos, já que as classes de equivalência são disjuntas ou iguais. Reciprocamente, se Σ forma um sistema de blocos para G defina a relação de equivalência dada por “ $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha$ e β estão no mesmo bloco”. Se $\Delta = \{\alpha\}$ defina a G -congruência “ $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha$ ”. Por fim, se $\Delta = \Omega$ definimos a G -congruência “ $\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha$ e β estão em Ω ”. \square

Exercício 2.5.5 (1.5.5). Suponha que G é um grupo agindo transitivamente em um conjunto Ω com pelo menos dois pontos, e que Δ é um subconjunto não-vazio de Ω . Mostre que Δ não é um bloco se, e somente se, para cada par de pontos distintos $\alpha, \beta \in \Omega$ existe $x \in G$ tal que exatamente um de α e β está em Δ^x . No caso em que G é finito, mostre que a condição pode ser fortalecida a: $\alpha \in \Delta^x$ mas $\beta \notin \Delta^x$ para algum $x \in G$.

Demonstração. Suponha que $\Delta \subseteq \Omega$ não é bloco. Por absurdo suponha que existem $\alpha, \beta \in \Omega$ tais que, para todo $x \in G$, $\alpha \in \Delta^x$ e $\beta \in \Delta^x$. Em particular, para todo $x \in G$, $\alpha^{-x} \in \Delta$. Como G é transitivo, α^{-x} percorre todo Ω e $\Omega \subset \Delta$. Logo $\Delta = \Omega$ e então Δ é bloco. Suponha agora que, para todos $\alpha, \beta \in \Omega$, existe $x \in G$ tal que $\alpha \in \Delta^x$ e $\beta \notin \Delta^x$. Em particular, se $\alpha \in \Delta$ então $\alpha \in \Delta \cap \Delta^x$ e $\Delta \neq \Delta^x$. Logo Δ não é bloco. \square

3 TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO 2

Continuamos agora, na segunda parte deste trabalho, a resolução de exercícios das seções 1.5 e 1.6 do livro “*Permutation Groups*” de John D. Dixon e Brian Mortimer (Dixon; Mortimer, 1996).

3.1 BLOCOS E PRIMITIVIDADE II

Começamos lembrando algumas definições. Se um grupo G age em um subconjunto $\Delta \subset \Omega$ de modo que, para todo $x \in G$ temos que, ou $\Delta^x = \Delta$ ou $\Delta \cap \Delta^x = \emptyset$, então Δ é chamado de bloco. Dizemos que o grupo G é primitivo se os seus únicos blocos são os conjuntos unitários $\{\alpha\}$ ($\alpha \in \Omega$) ou todo o conjunto Ω . Antes de começarmos o primeiro exercício precisamos ainda de mais uma definição:

Definição 3.1 (Dixon e Mortimer (1996, p.13)). Sejam G um grupo agindo em um conjunto Ω e $\Delta \subseteq \Omega$. Defini-se o *estabilizador pontual* de Δ em G por:

$$G_{(\Delta)} := \{x \in G \mid \delta^x = \delta, \forall \delta \in \Delta\}$$

e o *estabilizador por conjunto* de Δ em G por:

$$G_{\{\Delta\}} := \{x \in G \mid \Delta^x = \Delta\}.$$

Exercício 3.1.1 (1.5.6). Se G age transitivamente em Ω , e Δ é um bloco para G , mostre que $G_{\{\Delta\}}$ age transitivamente em Δ .

Demonstração. Suponha G agindo transitivamente em Ω e Δ bloco de G . Sejam $\alpha, \beta \in \Delta \subset \Omega$. Por hipótese, existe $x \in G$ tal que $\alpha^x = \beta$. Note que, $\beta \in \Delta^x$ e então $\beta \in \Delta \cap \Delta^x$. Como Δ é bloco, devemos ter $\Delta^x = \Delta$ e, portanto, $x \in G_{\{\Delta\}}$. Segue que $G_{\{\Delta\}}$ age transitivamente em Δ . \square

Exercício 3.1.2 (1.5.7). Seja $G \leq Sim(\Omega)$ um grupo transitivo e sejam Γ e Δ subconjuntos finitos de Ω . Suponha que $G_{(\Gamma)}$ e $G_{(\Delta)}$ agem primitivamente em $\Omega \setminus \Gamma$ e $\Omega \setminus \Delta$, respectivamente, e $G = \langle G_{(\Gamma)}, G_{(\Delta)} \rangle$. Mostre que o grupo G é primitivo.

Demonstração. Suponha que $\Lambda \subset \Omega$ é um bloco de G . Vamos mostrar que Λ é trivial. Temos que:

$$(1) \ G_{(\Gamma)} \text{ age primitivamente em } \Omega \setminus \Gamma.$$

$$(2) \ G_{(\Delta)} \text{ age primitivamente em } \Omega \setminus \Delta.$$

Se Λ está contido em $\Omega \setminus \Gamma$ ou em $\Omega \setminus \Delta$ então, por (1) e (2), Λ é trivial. Então, sejam $a \in \Lambda \cap \Gamma$ e $b \in \Lambda \cap \Delta$. Pode acontecer de $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ ou $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Suponha $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. Se $g \in G_{(\Delta)}$

então $\Lambda^g = \Lambda$ pois $b^g = b$. Se $g \in G_{(\Gamma)}$ então $\Lambda^g = \Lambda$ pois $a^g = a$. Se $g \in G$, g é o produto de elementos de $G_{(\Delta)}$ e $G_{(\Gamma)}$. Então para todo $g \in G$, $\Lambda^g = \Lambda$. Logo $\Lambda = \Omega$, pois do contrário a ação não é transitiva. Suponha agora que $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Vamos olhar para os pontos de Λ que estão em $\Delta \cap \Gamma$, pois os demais caem no caso anterior. Seja então $a \in \Delta \cap \Gamma \cap \Lambda$. Se $g \in G_{(\Delta)}$ então $a^g = a$. Se $g \in G_{(\Gamma)}$ então $a^g = a$. Segue que, para todo $g \in G$, $\Lambda^g = \Lambda$. Como a ação é transitiva, concluímos que $\Lambda = \Omega$. \square

Observação 3.1. Sejam G um grupo agindo transitivamente em um conjunto Ω e Δ um bloco para G . Então “todos os blocos de um sistema de blocos completo possuem o mesmo tamanho” [Wielandt \(1964, p.12, tradução nossa\)](#)⁵: de fato, todos os blocos em $\Sigma = \{\Delta^x \mid x \in G\}$ possuem o mesmo tamanho e como vimos no exercício 2.5.3, a união de todos esses blocos em Σ é todo o conjunto Ω . Logo, o tamanho do bloco deve dividir a cardinalidade do conjunto Ω .

Enunciamos a seguir, sem demonstração, o Teorema 1.5A do livro ([Dixon; Mortimer, 1996](#), p. 13, 14), que fornece uma relação entre blocos contendo um elemento α em Ω e subgrupos em G contendo o estabilizador G_α deste elemento. Tal resultado nos será útil no próximo exercício.

Teorema 3.1. *Seja G um grupo agindo transitivamente em um conjunto Ω , e seja $\alpha \in \Omega$. Seja \mathcal{B} o conjunto de todos os blocos Δ para G com $\alpha \in \Delta$, e seja \mathcal{S} o conjunto de todos os subgrupos H de G com $G_\alpha \leq H$. Então existe uma bijeção Ψ de \mathcal{B} em \mathcal{S} dada por $\Psi(\Delta) := G_{\{\Delta\}}$ cuja inversa Φ é dada por $\Phi(H) := \alpha^H$. A função Ψ preserva ordem no sentido de que se $\Delta, \Gamma \in \mathcal{B}$ então $\Delta \subseteq \Gamma$ se, e só se, $\Psi(\Delta) \leq \Psi(\Gamma)$.*

Exercício 3.1.3 (1.5.8). Encontre todos os blocos contendo 1 para o grupo

$$G = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (2\ 6)(3\ 5) \rangle \leq S_6.$$

Identifique os subgrupos correspondentes de G contendo G_1 .

Demonstração. Sabemos que o tamanho do bloco deve dividir a cardinalidade do conjunto Ω (ver a Observação 3.1). Então as possibilidades para o tamanho dos blocos contendo 1 são: 1, 2, 3 e 6. É claro que os blocos de tamanho 1 e 6 serão os triviais.

Vamos então encontrar os blocos de tamanho dois, que são do tipo $\Delta = \{1, \alpha\}$. Denotando $x = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ e $y = (2\ 6)(3\ 5)$ temos $\{1, \alpha\}^y = \{1, \beta\}$ onde $\beta = \alpha^y$. Supondo $\Delta = \{1, \alpha\}$ bloco, como $1 \in \Delta \cap \Delta^y$ devemos ter $\Delta = \Delta^y$ o que implica $\alpha = \alpha^y = \beta$. Então y fixa α e isso exclui as possibilidades $\alpha = 2, 3, 5$ ou 6 . Mostremos que $\{1, 4\}$ é bloco para G . Como toda permutação em G é o produto das permutações x e y , basta mostrar que tais permutações respeitam a estrutura do bloco. Como $\{1, 4\}^x = \{2, 5\}$ e $\{2, 5\}^x = \{3, 6\}$, segue que $\{1, 4\}$ é bloco para G , pois $\{1, 4\}^y = \{1, 4\}$.

Agora, vamos determinar os blocos do tipo $\Delta = \{1, \alpha, \beta\}$. Novamente, como Δ é bloco e

⁵ “All blocks of a complete block system have the same length”.

$1 \in \Delta \cap \Delta^y$ devemos ter $\Delta = \Delta^y$. Como y fixa apenas 1 e 4, devemos ter $\alpha^y = \beta$ e $\beta^y = \alpha$. Então temos as possibilidades $\{1, 2, 6\}$ e $\{1, 3, 5\}$. No entanto, dado que $\{1, 2, 6\}^x = \{2, 3, 1\}$ e $\{1, 3, 5\}^x = \{2, 4, 6\}$, concluímos que $\{1, 3, 5\}$ é o único bloco desse tipo. Desse modo, os blocos contendo 1 são: $\{1\}, \{1, 4\}, \{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para identificar os subgrupos de G contendo G_1 usaremos o Teorema 3.1. Assim,

$$\Psi(\{1\}) = G_1;$$

$$\Psi(\{1, 4\}) = G_{\{1,4\}} = \langle e, (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6), (2\ 6)(3\ 5) \rangle;$$

$$\Psi(\{1, 3, 5\}) = G_{\{1,3,5\}} = \langle e, (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6), (2\ 6)(3\ 5) \rangle;$$

$$\Psi(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = G.$$

□

Exercício 3.1.4 (1.5.9). Se Δ é um bloco para um grupo G e $\alpha \in \Delta$, mostre que Δ é uma união de órbitas para G_α .

Demonstração. Note que $G_\alpha < G_{\{\Delta\}}$, de fato: se $x \in G_\alpha$ então $\alpha^x = \alpha$. Como $\alpha \in \Delta \cap \Delta^x$ e Δ é bloco, segue que $\Delta = \Delta^x$. Sabemos que G_α age em Δ . Mas a ação não é transitiva já que $\alpha^{G_\alpha} = \alpha$. Portanto Δ deve ser a união de órbitas para G_α . □

Exercício 3.1.5 (1.5.10). Seja Δ um bloco não trivial para um grupo G agindo em Ω . Se $G_{\{\Delta\}}$ age imprimitivamente em Δ (ver Exercício 3.1.1), e possui um bloco Γ , mostre que Γ é também um bloco para G . Em particular, Δ é um bloco minimal (ver Exemplo 2.8) para G se, e só se, $G_{\{\Delta\}}$ é primitivo em Δ .

Demonstração. Suponha que Γ não é bloco para G . Seja $x \in G$ tal que $\Gamma^x \neq \Gamma$ e $\Gamma \cap \Gamma^x \neq \emptyset$. Seja $\alpha \in \Gamma \cap \Gamma^x$. Então $\alpha \in \Gamma \subset \Delta$ e $\alpha \in \Gamma^x \subset \Delta^x$. Logo $\alpha \in \Delta \cap \Delta^x$. Como Δ é bloco, segue que $\Delta = \Delta^x$ e daí $x \in G_{\{\Delta\}}$. Como Γ é bloco para $G_{\{\Delta\}}$ temos $\Gamma^x = \Gamma$ ou $\Gamma \cap \Gamma^x = \emptyset$, o que é uma contradição. Segue que, Γ é bloco para G .

Seja Δ um bloco minimal e suponha que $G_{\{\Delta\}}$ não é primitivo em Δ . Então $G_{\{\Delta\}}$ possui um bloco $\Gamma \subset \Delta$ não trivial de tamanho > 1 . Mas como mostramos acima, Γ também seria bloco para G , o que contradiz o fato de Δ ser bloco minimal. Logo, $G_{\{\Delta\}}$ age primitivamente em Δ . Reciprocamente, suponha que $G_{\{\Delta\}}$ é primitivo em Δ . Seja Γ um bloco para G tal que $\Gamma \subsetneq \Delta$. Como $G_{\{\Delta\}} \leq G$, Γ é também um bloco para $G_{\{\Delta\}}$. Mas $G_{\{\Delta\}}$ é primitivo em Δ (por hipótese), e então Γ é um conjunto unitário. Portanto Δ é um bloco minimal. □

Exercício 3.1.6 (1.5.11). Seja $z \in \text{Sim}(\mathbb{Z})$ a translação definida por $i^z := i + 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, os inteiros. Mostre que os blocos para $G = \langle z \rangle$ contendo 0 são precisamente os conjuntos da forma $k\mathbb{Z}$ onde $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Note que $z^2(i) = z \circ z(i) = z(i^z) = z(i + 1) = i + 2$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Podemos mostrar por indução que $z(i)^m = i + m$ para todo i inteiro e algum m inteiro. Seja Δ' um bloco

para G contendo 0. Pelo Teorema 3.1, para $\alpha = 0$, $\Delta = \Delta'$ e $\Gamma = \mathbb{Z}$ temos que $\Delta \subseteq \mathbb{Z}$ se, e só se, $\Psi(\Delta) \leq \Psi(\mathbb{Z})$. Então $G_{\{\Delta\}} \leq G_{\{\mathbb{Z}\}} = G$. Note que os subgrupos de G são os subgrupos da forma z^k para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo, se $H = \langle z^k \rangle$ então

$$\Phi(H) = \alpha^H = 0^{\langle z^k \rangle} = k\mathbb{Z}$$

é bloco de G . Portanto, todos os blocos para G contendo 0 são da forma $k\mathbb{Z}$ onde k é um inteiro. \square

Exercício 3.1.7 (1.5.12). Suponha que G é um grupo agindo em um conjunto Ω , com a propriedade de que, para dois pares ordenados (α, β) e (γ, δ) quaisquer, com $\alpha \neq \beta$ e $\gamma \neq \delta$, existe $x \in G$ tal que $\alpha^x = \gamma$ e $\beta^x = \delta$ (tal grupo é chamado *2-transitivo*). Mostre que G é primitivo.

Demonstração. Suponha que exista um bloco $\Delta \subset \Omega$ não trivial. Como Δ não é unitário e nem todo o conjunto Ω , existem $\alpha, \beta \in \Delta$ e $\delta \in \Omega$ com $\alpha \neq \beta$, e $\delta \notin \Delta$. Tome os pares (α, β) e (α, δ) . Como G é 2-transitivo, existe $x \in G$ tal que $\alpha^x = \alpha$ e $\beta^x = \delta$. Segue que, $\Delta \cap \Delta^x \neq \emptyset$ e $\Delta \neq \Delta^x$ (já que $\delta \notin \Delta$), o que contradiz a definição de bloco. Logo, não podem existir blocos não triviais e, portanto, G deve ser primitivo. \square

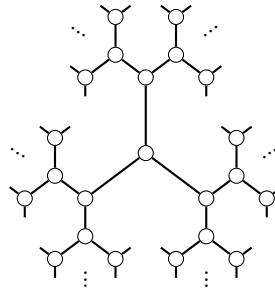
O exemplo abaixo foi retirado do livro [Dixon e Mortimer \(1996, p.15\)](#). Utilizaremos este exemplo nos exercícios 3.1.8, 3.1.9 e 3.1.10.

Exemplo 3.1. Seja \mathcal{T} a árvore trivalente infinita. Isso significa que \mathcal{T} é um grafo com um conjunto infinito e enumerável de vértices, em que cada vértice está conectado, por uma aresta, a exatamente três outros vértices, e o grafo não possui ciclos.

Se iniciamos por qualquer vértice de \mathcal{T} , então a árvore cresce ao longo de três arestas, cada uma das quais se dividem em duas e assim por diante. Um fragmento da árvore pode ser visualizado na Figura 6. Duas árvores quaisquer construídas desse modo serão isomorfas.

Seja A o conjunto de todas as permutações do conjunto de vértices Ω de \mathcal{T} que preservam a estrutura da árvore no sentido de que: se $x \in \text{Sim}(\Omega)$, então $x \in A$ se, e somente se, “dois vértices α, β estão conectados por uma aresta em \mathcal{T} se, e só se, α^x e β^x estão conectados por uma aresta”; A é grupo de automorfismo de \mathcal{T} . Como o grafo parece o mesmo visto de cada vértice, A age transitivamente em Ω . Essa ação não é primitiva pois Ω pode ser particionado em dois blocos Δ e Δ' não triviais (ver Exercício 3.1.8). No entanto, esses são blocos minimais para A , e então $G := A_{\{\Delta\}}$ age primitivamente em Δ . (Ver Exercícios 3.1.9 e 3.1.10 para mais detalhes.)

Figura 6



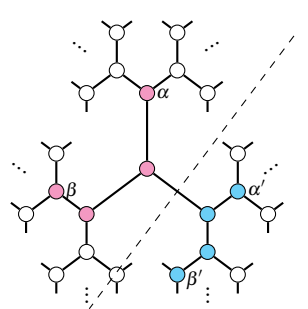
Fonte: Elaborado pela autora

Exercício 3.1.8 (1.5.15). Defina a distância $d(\alpha, \beta)$ entre dois vértices na árvore trivalente \mathcal{T} como o número de arestas no caminho mais curto de α para β . Mostre que:

- (i) se $d(\alpha, \beta) = d(\alpha', \beta')$ então existe $x \in A$ tal que $\alpha^x = \alpha'$ e $\beta^x = \beta'$;
- (ii) o conjunto Ω dos vértices pode ser particionado em dois subconjuntos Δ e Δ' tais que a distância entre qualquer par de vértices no mesmo subconjunto é par;
- (iii) os conjuntos Δ e Δ' são blocos para A .

Demonstração. (i) Sejam $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Omega$ tais que $d(\alpha, \beta) = d(\alpha', \beta')$ como, por exemplo, na Figura 7.

Figura 7



Fonte: Elaborado pela autora

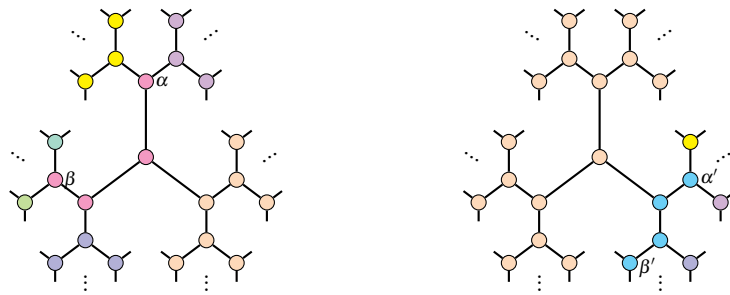
Seja x a permutação tal que:

- a) x leva o caminho ligando α à β no caminho ligando α' à β' de modo que, a ordem dos vértices no caminho se mantém.

- b) O filho à esquerda (direita) de α e seus descendentes é levado pela x no filho à esquerda (direita) de α' e seus descendentes.
- c) O filho à esquerda (direita) de β e seus descendentes é levado pela x no filho à esquerda (direita) de β' e seus descendentes.
- d) Para cada a_i no caminho ligando α à β , diferente de α e β , x leva o filho de a_i , externo ao caminho, e seus descendentes no filho de b_i e seus descendentes, onde $b_i = x(a_i)$.

No exemplo da Figura 7, isto representa uma reflexão em torno do eixo t . Note que $x \in A$ pois preserva a estrutura da árvore, no sentido de que: “dois vértices α, β estão unidos por uma aresta em \mathcal{T} se, e somente se, α^x e β^x estão unidos por uma aresta”. A Figura 8 mostra como a permutação x , definida acima, leva o caminho ligando α à β no caminho ligando α' à β' da Figura 7.

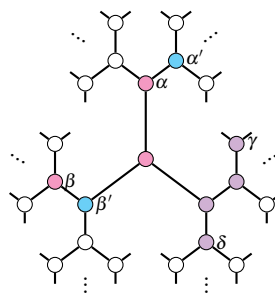
Figura 8



Fonte: Elaborado pela autora

Pode acontecer de os caminhos ligando α à β e α' à β' se sobreporem. Nesse caso, basta levar o caminho ligando α à β em um caminho de mesmo tamanho que não se sobreponha ao caminho ligando α' à β' , digamos o caminho ligando γ à δ .

Figura 9



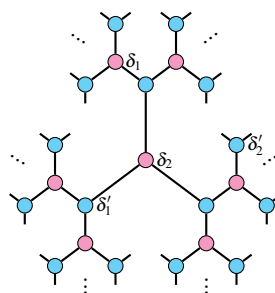
Fonte: Elaborado pela autora

E por fim, levar o caminho ligando γ à δ no caminho ligando α' à β' .

(ii) Seja δ_1 um vértice fixo em \mathcal{T} . Denote por Δ o subconjunto de vértices em Ω que distam par de δ_1 e Δ' o subconjunto de vértices que distam ímpar de δ_1 . Como todo vértice ou dista par ou ímpar de δ_1 temos que $\Delta \cup \Delta' = \Omega$ e a interseção é vazia. Mostremos que a distância entre qualquer par de vértices no mesmo subconjunto é sempre par. De fato, sejam $\delta'_1, \delta'_2 \in \Delta'$. Temos dois casos a considerar. Primeiro, se δ_1 está no caminho ligando δ'_1 e δ'_2 então $d(\delta'_1, \delta'_2) = d(\delta'_1, \delta_1) + d(\delta_1, \delta'_2)$, que é par, e acabamos.

O segundo caso, ilustrado na Figura 10, é quando δ_1 não está no caminho ligando δ'_1 e δ'_2 . Então existe δ_2 um vértice tal que $d(\delta'_1, \delta_1) = d(\delta'_1, \delta_2) + d(\delta_2, \delta_1)$ e $d(\delta'_2, \delta_1) = d(\delta'_2, \delta_2) + d(\delta_2, \delta_1)$. Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos $d(\delta'_1, \delta_1) - d(\delta'_2, \delta_1) = d(\delta'_1, \delta_2) - d(\delta'_2, \delta_2)$. Como o lado esquerdo da última equação é a subtração de ímpares que resulta em par, devemos ter que $d(\delta'_1, \delta_2)$ e $d(\delta'_2, \delta_2)$ são ambos pares ou ambos ímpares. Segue que $d(\delta'_1, \delta'_2) = d(\delta'_1, \delta_2) + d(\delta_2, \delta'_2)$ é par. Logo, a distância entre qualquer par de vértices em Δ' é par. Analogamente, a distância entre qualquer par de vértices em Δ é par.

Figura 10



Fonte: Elaborado pela autora

(iii) Seja $x \in A$. Então α^x e β^x estão unidos por uma aresta em Δ^x se, e só se, α e β estão unidos por uma aresta em Δ . Assim, $\Delta^x = \Delta$ ou $\Delta^x = \Delta'$. Isto é, $\Delta^x = \Delta$ ou $\Delta^x \cap \Delta = \emptyset$. Segue que Δ é bloco. De modo análogo, concluímos que Δ' é bloco. \square

Exercício 3.1.9 (1.5.16). Usando a notação do exercício anterior, mostre que Δ e Δ' são os únicos blocos não triviais para A . Conclua que $G := A_{\{\Delta\}}$ age primitivamente em Δ pelo Exercício 3.1.5. [Dica: Para cada par de vértices distintos (α, β) , existe $x \in A$ tal que $\alpha^x = \alpha$ e $d(\beta, \beta^x) = 2$, portanto todo bloco não trivial contém um par de pontos com distância 2.]

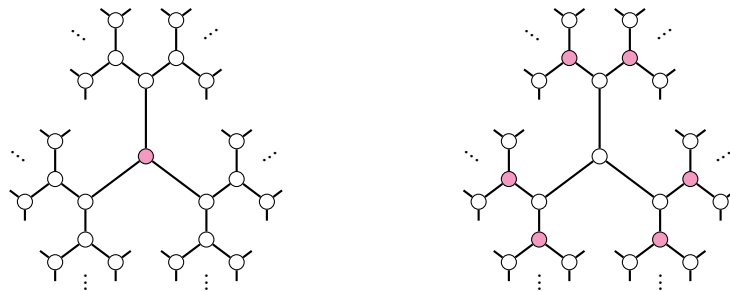
Demonstração. Chamaremos de “filhos” de um vértice α os vértices ligados à α por uma aresta. Sejam ω um bloco não trivial e α, β vértices em ω . Seja β_1 o vértice no caminho ligando α e β , tal que $d(\beta_1, \beta) = 1$. Seja x a permutação que troca os filhos de β_1 que não estão no caminho entre α e β . Temos que $x \in A$, $\alpha^x = \alpha$ e $d(\beta, \beta^x) = 2$. Como ω é bloco e $\alpha \in \omega \cap \omega^x$, devemos ter $\omega = \omega^x$. Segue que $\beta^x \in \omega$ e então ω contém um par de pontos com distância 2. Logo $\omega = \Delta$ ou $\omega = \Delta'$ pois, aplicando o mesmo argumento repetidamente, teremos que ω absorverá todo

elemento a distância par de β . Como Δ é bloco minimal para A , então pelo Exercício 3.1.5 temos que $A_{\{\Delta\}}$ age primitivamente em Δ . \square

Exercício 3.1.10 (1.5.17). Com a notação do exercícios anterior mostre que se $\alpha \in \Delta$ então as órbitas de G_α em Δ são de tamanhos finitos $1, 6, 24, \dots$,

Demonstração. Como α não se move, os filhos devem permutar entre si, pois $G = A_{\{\Delta\}}$ preserva a estrutura da árvore, no sentido de que dois vértices estão unidos por uma aresta em Δ se, e só se, estão unidos por uma aresta em Δ^x . Sabemos que a órbita de α em G_Δ tem tamanho 1. A segunda órbita terá tamanho $3 \cdot 2 = 6$, pois α tem 3 filhos (em Δ') que têm dois filhos cada (em Δ). Esses 6 vértices formam a segunda órbita de G_α . A próxima órbita tem tamanho $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3 = 24$, e assim por diante. \square

Figura 11



Fonte: Elaborado pela autora

Exercício 3.1.11 (1.5.18). Seja F um corpo, Ω o conjunto de todos os vetores não nulos no espaço vetorial F^3 , e seja $G = GL_3(F)$ o grupo de todas as matrizes 3×3 invertíveis com entradas em F . Considere a ação de G em Ω pela multiplicação à direita (de matrizes): $u^X := uX$ ($u \in \Omega$, $X \in G$). Mostre que:

- (i) a ação é transitiva e fiel;
- (ii) o conjunto Δ consistindo dos vetores em Ω cuja as duas primeiras entradas são 0 é um bloco.

Demonstração. (i) Sejam $u = (u_1 \ u_2 \ u_3)$ e $v = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ vetores em Ω . Queremos mostrar que existe uma matriz $X \in G$ de sorte que $u^X = v$. Temos dois casos a considerar. Primeiro, se u e v são linearmente dependentes então $v = \lambda u$, para algum $\lambda \in F$. Tome X como sendo a matriz diagonal

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

e então X é invertível e $uX = v$. Por outro lado, suponha u e v linearmente independentes. Podemos completar bases $\{(u_1 \ u_2 \ u_3), (a_1 \ a_2 \ a_3), (b_1 \ b_2 \ b_3)\}$ e $\{(v_1 \ v_2 \ v_3), (c_1 \ c_2 \ c_3), (d_1 \ d_2 \ d_3)\}$ para o espaço vetorial F_3 . Sejam M e N as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

e note que

$$u = (u_1 \ u_2 \ u_3) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = e_1 M.$$

Assim $X = M^{-1}N$ é tal que $uX = uM^{-1}N = e_1N = v$. Como X é a multiplicação de matrizes invertíveis, X é invertível. Portanto a ação é transitiva. A representação ρ correspondente a ação é dada por $\rho(X) : u \mapsto uX$. Logo,

$$\ker(\rho) = \{X \in G \mid uX = u, \forall u \in \Omega\}.$$

Se

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

em particular para $(1 \ 0 \ 0)$ temos que $(1 \ 0 \ 0)X = (1 \ 0 \ 0)$ e, portanto, $a_{11} = 1$ e $a_{12} = a_{13} = 0$. Analogamente, para $(0 \ 1 \ 0)$ temos $a_{21} = a_{23} = 0$ e $a_{22} = 1$. Por fim, para $(0 \ 0 \ 1)$ implica $a_{31} = a_{32} = 0$ e a_{33} . Portanto,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a ação é fiel.

(ii) Suponha que $\Delta \neq \Delta^x$ e $\Delta \cap \Delta^x \neq \emptyset$ para algum $x \in G$. Seja $u \in \Delta \cap \Delta^x$. Como $u \in \Delta^x$ existe $v \in \Delta$ tal que

$$u = v^x = (0 \ 0 \ v_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{31}v_3 \ a_{32}v_3 \ a_{33}v_3).$$

Como $u \in \Delta$ segue que $a_{31}v_3 = a_{32}v_3 = 0$. Mas $v_3 \neq 0$ e então $a_{31} = a_{32} = 0$. Seja w um vetor qualquer em Δ^x . Por definição, existe $p \in \Delta$ tal que $p^x = w$. Assim,

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{33}p_3 \end{pmatrix}.$$

Logo $\Delta^x \subseteq \Delta$ e como $|\Delta| = |\Delta^x|$ segue que $\Delta = \Delta^x$, o que contradiz nossa hipótese. Portanto Δ é bloco. \square

3.2 REPRESENTAÇÕES DE PERMUTAÇÕES E SUBGRUPOS NORMAIS

Iniciamos esta seção explorando duas definições e o exemplo 1.6.1 retirados da seção 1.6 do livro de [Dixon e Mortimer \(1996, p. 17, 18, 19\)](#), que precisaremos para resolver os exercícios.

Definição 3.2. Seja G um grupo agindo em um conjunto Ω . Um subconjunto Γ de Ω é *invariante* (ou mais especificamente *G-invariante*) se $\Gamma^x = \Gamma$ para todo $x \in G$. Note que Γ é G -invariante se, e somente se, Γ é uma união de órbitas de G . De fato: se $\forall x \in G, \Gamma^x = \Gamma$ então $\forall \alpha \in \Gamma$ temos $\alpha^G \subset \Gamma$. Logo Γ é a união das órbitas dos seus elementos. Reciprocamente, se $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \alpha^G = \Gamma$ então $\Gamma^G = \Gamma$.

No caso em que Γ é G -invariante, podemos considerar a restrição da ação de G à Γ e obtemos uma ação de G em Γ . Usamos a notação $x \mapsto x^\Gamma$ para denotar a representação correspondente a essa ação em Γ , isto é $x^\Gamma \in \text{Sim}(\Gamma)$, e escrevemos $G^\Gamma := \{x^\Gamma \mid x \in G\}$. A representação $x \mapsto x^\Gamma$ é um homomorfismo de G em G^Γ com núcleo $G_{(\Gamma)}$, de fato: se $\phi : G \rightarrow G^\Gamma$ é dada por $\phi(x) = x^\Gamma$, então $\ker(\phi) = \{x \in G \mid \alpha^x = \alpha, \forall \alpha \in \Gamma\} = G_{(\Gamma)}$. Segue do “primeiro teorema dos isomorfismos” que $G/G_{(\Gamma)} \cong G^\Gamma$.

Definição 3.3. Dois grupos de permutações, digamos $G \leq \text{Sim}(\Omega)$ e $H \leq \text{Sim}(\Omega')$ são chamados *isomorfos por permutação* se existem uma bijeção $\lambda : \Omega \rightarrow \Omega'$ e um isomorfismo de grupos $\psi : G \rightarrow H$ tais que

$$\lambda(\alpha^x) = \lambda(\alpha)^{\psi(x)}$$

para todo $\alpha \in \Omega$ e $x \in G$. Essencialmente, isto significa que os grupos são “os mesmos” exceto pelo nome dos pontos.

Exemplo 3.2. Suponha que G é um grupo agindo imprimitivamente em um conjunto Ω , que H é um subgrupo normal de G e que Σ é o conjunto de órbitas de H . Se $\Delta, \Delta' \in \Sigma$, então $H^\Delta \leq \text{Sim}(\Delta)$ e $H^{\Delta'} \leq \text{Sim}(\Delta')$ são isomorfos por permutação. Além disso, como Σ é um sistema de blocos (ver Exercício 2.4.5) sabemos que $\Delta' = \Delta^c$ para algum $c \in G$, e então podemos definir uma bijeção λ de Δ em Δ' dada por $\lambda(\delta) := \delta^c$. Agora, afirmamos que podemos definir um isomorfismo

$\psi : H^\Delta \rightarrow H^{\Delta'}$ dado por $\psi(x^\Delta) := (c^{-1}xc)^{\Delta'}$. Primeiro, ψ está bem definida e é injetiva, já que para todos $x, y \in H$ temos

$$x^\Delta = y^\Delta \Leftrightarrow xy^{-1} \in H_{(\Delta)} \Leftrightarrow c^{-1}(xy^{-1})c \in H_{(\Delta')} \Leftrightarrow (c^{-1}xc)^{\Delta'} = (c^{-1}yc)^{\Delta'}$$

pois $\Delta' = \Delta^c$. Segundo, ψ é sobrejetiva já que $c^{-1}Hc = H$. Finalmente, como

$$\psi(x^\Delta y^\Delta) = \psi((xy)^\Delta) = (c^{-1}(xy)c)^{\Delta'} = (c^{-1}xc)^{\Delta'}(c^{-1}yc)^{\Delta'} = \psi(x^\Delta)\psi(y^\Delta)$$

para todos $x, y \in H$, concluímos que ψ é um isomorfismo como desejado. Assim λ e ψ definem o isomorfismo por permutação desejado.

Exercício 3.2.1 (1.6.1). Se G e H são ambos subgrupos de $Sim(\Omega)$, mostre que eles são isomorfos por permutação se, e somente se, eles são conjugados em $Sim(\Omega)$.

Demonstração. Seja $x = (\dots \alpha \alpha^x \dots) \in G$. Se G e H são isomorfos por permutações, então existe uma bijeção $\lambda : \Omega \rightarrow \Omega$ e um isomorfismo $\psi : G \rightarrow H$ tais que $\lambda(\alpha^x) = \lambda(\alpha)^{\psi(x)}$. Afirimo que $\psi(x) = \lambda^{-1}x\lambda$: de fato,

$$\lambda^{-1}x\lambda = (\dots \lambda(\alpha) \lambda(\alpha^x) \dots) = (\dots \lambda(\alpha) \lambda(\alpha)^{\psi(x)} \dots) = \psi(x).$$

Logo, como ψ é um isomorfismo temos que $\psi(G) = H$ e $H = \lambda^{-1}G\lambda$. Por outro lado, suponha que G e H sejam subgrupos conjugados em $Sim(\Omega)$, isto é, $g^{-1}Gg = H$ para algum $g \in Sim(\Omega)$. Mostremos que G e H são isomorfos por permutação. Sejam $\lambda = g$ uma bijeção de Ω nele mesmo, e $\psi : G \rightarrow H$ dada por $\psi(x) = g^{-1}xg$. A função ψ é bijetiva pois G e H são conjugados por g e também:

$$\psi(xy) = g^{-1}xyg = g^{-1}xgg^{-1}yg = \psi(x)\psi(y)$$

e então ψ é homomorfismo bijetor (isomorfismo). Ainda,

$$\lambda(\alpha^x) = g(\alpha^x) = g(x(\alpha))$$

e

$$\lambda(\alpha)^{\psi(x)} = g(\alpha)^{\psi(x)} = g(\alpha)^{g^{-1}xg} = (g^{-1}xg)(g(\alpha)) = g(x(\alpha)).$$

Lembre-se que $g^{-1}xg = g \circ x \circ g^{-1}$ na notação que estamos assumindo. □

Exercício 3.2.2 (1.6.2). No Exemplo 3.2, mostre que é possível que os núcleos das ações de H em Δ e em Δ' serem distintos.

Demonstração. Sejam $\rho_1 : H \rightarrow \text{Sim}(\Delta)$ e $\rho_2 : H \rightarrow \text{Sim}(\Delta')$ as representações correspondentes às ações de H em Δ e em Δ' , respectivamente, como no Exemplo 3.2. Temos que:

$$\ker(\rho_1) = \{h \in H \mid h^\Delta = \text{Id}\} = \{h \in H \mid \delta^h = \delta, \forall \delta \in \Delta\} = H_{(\Delta)}$$

e como $\Delta' = \Delta^c$, segue que

$$\begin{aligned} \ker(\rho_2) &= \{h \in H \mid h^{\Delta'} = \text{Id}\} = \{h \in H \mid (\delta')^h = \delta', \forall \delta' \in \Delta'\} \\ &= \{h \in H \mid (\delta^{ch})^{c^{-1}} = \delta, \forall \delta \in \Delta\} = H_{(\Delta')} \end{aligned}$$

Note que a condição $H \trianglelefteq G$ significa que, dados $c \in G$ e h_1 em H , existe $h_2 \in H$ tal que $ch_1c^{-1} = h_2$. Logo, não necessariamente, $ch_1c^{-1} = h_1$, para todo h_1 em G . Assim, os núcleos $\ker(\rho_1)$ e $\ker(\rho_2)$ podem ser distintos. \square

Introduzimos a seguinte notação que utilizaremos no próximo exercício:

Definição 3.4. Suponha que o grupo G age em um conjunto Ω e seja T um subconjunto de G . Definimos o conjunto dos *pontos fixos* de T por

$$\text{fix}(T) := \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^x = \alpha, \forall x \in T\}.$$

Exercício 3.2.3 (1.6.3). Se G age transitivamente em Ω e $\alpha \in \Omega$, mostre que $|N_G(G_\alpha) : G_\alpha| = |\text{fix}(G_\alpha)|$.

Demonstração. Lembremos que o normalizador de G_α em G é o conjunto $N_G(G_\alpha) = \{g \in G \mid g^{-1}G_\alpha g = G_\alpha\}$. Mostremos que $\alpha^{N_G(G_\alpha)} = \text{fix}(G_\alpha)$. Seja $\beta \in \alpha^{N_G(G_\alpha)}$. Então existe $g \in N_G(G_\alpha)$ tal que $\beta = \alpha^{g^{-1}}$. Dado $h \in G_\alpha$ temos que $g^{-1}hg \in G_\alpha$. Assim,

$$\alpha^{g^{-1}hg} = \alpha \Rightarrow \beta^{hg} = \alpha \Rightarrow \beta^h = \alpha^{g^{-1}} = \beta.$$

Como h é arbitrário, concluímos que $\beta \in \text{fix}(G_\alpha)$. Por outro lado, seja $\beta \in \text{fix}(G_\alpha)$. Como G age transitivamente em Ω , existe $g \in G$ tal que $\alpha = \beta^g$, ou seja, $\beta = \alpha^{g^{-1}}$. Como β é fixado por G_α , temos que $\beta^h = \beta, \forall h \in G_\alpha$. Logo

$$\alpha^{g^{-1}} = \beta^h = (\alpha^{g^{-1}})^h = \alpha^{g^{-1}h} \Rightarrow \alpha = \alpha^{g^{-1}hg}$$

para todo $h \in G_\alpha$. Portanto, $g^{-1}hg \in G_\alpha$, para todo $h \in G_\alpha$. Isso implica que $g \in N_G(G_\alpha)$ e então $g^{-1} \in N_G(G_\alpha)$, pois $N_G(G_\alpha)$ é subgrupo. Logo $\beta = \alpha^{g^{-1}} \in \alpha^{N_G(G_\alpha)}$. Assim mostramos que $\alpha^{N_G(G_\alpha)} = \text{fix}(G_\alpha)$.

Além disso, note que o estabilizador de α em $N_G(G_\alpha)$ é o próprio G_α . Portanto, pelo Teorema 2.3, item (iii), obtemos que

$$|\text{fix}(G_\alpha)| = |\alpha^{N_G(G_\alpha)}| = |N_G(G_\alpha) : G_\alpha|$$

como desejado. □

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal iniciar um estudo sobre grupos de permutações, seguindo a proposta do livro referência “*Permutation Groups*” de John D. Dixon e Brian Mortimer (Dixon; Mortimer, 1996): estudar os conceitos através da resolução de exercícios e assim participar do processo de “construção” da teoria. Sem nenhuma dúvida, o método é enriquecedor, mas define um processo lento que demanda de muito tempo.

Tínhamos como objetivo inicial estudar os dois primeiros capítulos, um por semestre: (1) ideias básicas; (2) exemplos e construções. Os conceitos básicos foram todos estudados, mas tivemos tempo de trabalhar somente os exercícios do primeiro capítulo. Ao todo resolvemos 35 exercícios de níveis simples e moderadamente difíceis, e exploramos as entrelinhas das observações e exemplos feitos no livro.

REFERÊNCIAS

DIXON, John D.; MORTIMER, Brian. **Permutation Groups**. 1. ed. Rottenburg: Springer, 1996. (Graduate Texts in Mathematics). Citado nas pp. 11, 16–19, 24, 27, 28, 30, 36, 40.

JOHN B. FRALEIGH, Neal E. Brand. **A First Course in Abstract Algebra**. 8. ed. Hoboken: Pearson, 2021. Citado na p. 8.

MEDEIROS, Nivaldo; FASSARELLA, Thiago. **Notas de Curso, Teoria de Grupos**. Rio de Janeiro: Matemática, Universidade Federal Fluminense, 2021. Citado nas pp. 11, 13.

ROTMAN, Joseph J. **An Introduction to the Theory of Groups**. 4. ed. New York: Springer-Verlag, 1995. (Graduate Texts in Mathematics 148). Citado na p. 13.

WIELANDT, Helmut. **Finite Permutation Groups**. [S.l.]: Academic Press, 1964. Citado na p. 28.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil