



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PEDRO HENRIQUE FERREIRA

NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS:
HISTÓRIA, ÁLGEBRA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

SÃO CARLOS – SP
2025

PEDRO HENRIQUE FERREIRA

NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS:
HISTÓRIA, ÁLGEBRA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS – SP
2025

Ferreira, Pedro Henrique

Números construtíveis: história, álgebra e construções geométricas / Pedro Henrique Ferreira -- 2025.
48f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Wladimir Seixas
Banca Examinadora: Wladimir Seixas, Bruna Oréfice
Okamoto, Fábio Gomes Figueira
Bibliografia

1. Construções geométricas. 2. Números construtíveis. 3.
Geometria euclidiana. I. Ferreira, Pedro Henrique. II.
Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 12/2025/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

PEDRO HENRIQUE FERREIRA

NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: HISTÓRIA, ÁLGEBRA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 27 de fevereiro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Wladimir Seixas
Membro da Banca 1	Bruna Oréfica Okamoto
Membro da Banca 2	Fábio Gomes Figueira



Documento assinado eletronicamente por **Wladimir Seixas, Professor(a) do Ensino Superior**, em 01/04/2025, às 10:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fabio Gomes Figueira, Professor(a) Adjunto(a)**, em 02/04/2025, às 14:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruna Orefice Okamoto, Professor(a) do Ensino Superior**, em 02/04/2025, às 14:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1786016** e o código CRC **36902366**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.007805/2025-89

SEI nº 1786016

RESUMO

Neste trabalho, elaboramos um estudo sobre a história e a teoria algébrica envolvidas nos chamados números construtíveis. Apresentamos também algumas atividades didáticas com o uso do software Geogebra na discussão das construções geométricas. Assim, propomos uma abordagem do estudo dos números construtíveis por meio das construções com régua e compasso em turmas do Ensino Médio, relacionando-o com o estudo da álgebra.

Palavras-chave: Construções geométricas. Números construtíveis. Geometria euclidiana.

ABSTRACT

In this work, we present a study on the history and algebraic theory involved in the so-called constructible numbers. We also introduce some didactic activities using the Geogebra software in the discussion of geometric constructions. Thus, we propose an approach to the study of constructible numbers through ruler and compass constructions in high school classes, relating it to the study of algebra.

Keywords: Geometric constructions. Constructible numbers. Euclidean geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Segmento $\overline{AF} \equiv \overline{BC}$	14
Figura 2 – Retas paralelas	14
Figura 3 – Reta s perpendicular a r em que P pertence a r	15
Figura 4 – Reta s perpendicular a r em que P não pertence a r	16
Figura 5 – Mediatriz de um segmento.	17
Figura 6 – Bisseção de um ângulo com vértice a vista.	18
Figura 7 – Bisseção de um ângulo sem vértice a vista.	19
Figura 8 – Transporte do ângulo α	20
Figura 9 – Ângulos α e β	20
Figura 10 – Adição e subtração de ângulos	21
Figura 11 – Triângulo equilátero.	21
Figura 12 – Quadrado inscrito em uma circunferência	22
Figura 13 – Octógono	23
Figura 14 – Hexágono regular inscrito em uma circunferência	23
Figura 15 – Pentágono regular inscrito em uma circunferência	24
Figura 16 – Segmento dividido em média e extrema razão.	25
Figura 17 – Triângulo EDC	26
Figura 18 – Decágono regular inscrito em uma circunferência	26
Figura 19 – Adição de segmentos.	27
Figura 20 – Subtração de segmentos	28
Figura 21 – Multiplicação de segmentos	29
Figura 22 – Divisão do segmento b pelo segmento a	30
Figura 23 – Divisão de um segmento \overline{AB} por um número positivo n	31
Figura 24 – Segmento $c = \sqrt{b}$	32
Figura 25 – Raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$	33
Figura 26 – Números construtíveis e coordenadas	34
Figura 27 – Coordenadas (a, b)	35
Figura 28 – Números construtíveis e coordenadas	36
Figura 29 – Números construtíveis e coordenadas	36
Figura 30 – Segmentos a, b, c e reta r	41
Figura 31 – Construção do segmento \sqrt{c}	41
Figura 32 – Números construtíveis e coordenadas	42
Figura 33 – Números construtíveis e coordenadas	43
Figura 34 – Razão áurea.	44
Figura 35 – Razão áurea.	44
Figura 36 – Razão áurea.	45
Figura 37 – Razão áurea.	45

LISTA DE SIGLAS

BNCC Base Nacional Comum Curricular

UFSCar Universidade Federal de São Carlos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	HISTÓRIA DOS PROBLEMAS IMPOSSÍVEIS: TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA ANTIGUIDADE	10
3	OS AXIOMAS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	12
4	CORPO DOS NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS	13
4.1	CONSTRUÇÕES ELEMENTARES	13
4.1.1	Retas paralelas	14
4.1.2	Retas perpendiculares	15
4.1.3	Mediatriz de um segmento	16
4.1.4	Bissecção de um ângulo	17
4.1.5	Adição, subtração e transporte de ângulos	19
4.1.6	Triângulo equilátero	21
4.1.7	Quadrado inscrito em uma circunferência	22
4.1.8	Octógono inscrito em uma circunferência	22
4.1.9	Hexágono regular inscrito em uma circunferência	23
4.1.10	Pentágono regular inscrito em uma circunferência	24
4.2	OPERAÇÕES ELEMENTARES	27
4.2.1	Adição	27
4.2.2	Subtração	28
4.2.3	Multiplicação	28
4.2.4	Divisão	29
4.2.5	Divisão de um segmento em n partes	30
4.2.6	Radiciação (raiz quadrada)	31
4.2.7	Solução da equação $ax + b = c$	32
4.2.8	Soluções da equação $x^2 - ax + b = 0$	32
4.3	EXTENSÕES QUADRÁTICAS	34
4.4	NÚMEROS ALGÉBRICOS	37
5	COMENTÁRIOS SOBRE A IMPOSSIBILIDADE DOS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS	38
5.1	QUADRATURA DO CÍRCULO	38
5.2	DUPLICAÇÃO DO CUBO	38
5.3	TRISSEÇÃO DE UM ÂNGULO QUALQUER	38
6	ATIVIDADES	40

6.1	ATIVIDADE 1: CONSTRUÇÃO DO NÚMERO $a + b\sqrt{c}$	40
6.2	ATIVIDADE 2: CONSTRUÇÃO DA RAZÃO ÁUREA ϕ	43
7	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

Uma área interessante dentro da geometria euclidiana é a que aborda as questões de construções com régua e compasso. Trata-se, basicamente, de problemas que investigam o que é ou não possível de ser construído utilizando apenas esses dois instrumentos. Para a régua, não é permitido ter marcações e, a partir de um segmento, podemos estendê-lo até qualquer comprimento (infinito) e de largura nula. O compasso denominado compasso euclidiano, por sua vez, serve apenas para traçar circunferências a partir de um ponto e segmento (raio) dados. Este compasso colapsa após traçar a circunferência. Sendo assim, não pode ser utilizado para se copiar segmentos. Um outro tipo de compasso é denominado compasso moderno. Este compasso permite definir sua abertura a partir de quaisquer dois pontos A e B do plano e, então movê-lo para outro ponto C sem alterar a configuração e desenhar uma circunferência de centro C e raio AB . Ambos compassos são equivalentes e podem ser adotados nas construções geométricas (Martin, 1998). Veremos com mais detalhes a demonstração desse fato no Capítulo 4.

Dessa maneira, partindo das condições para uma construção geométrica, podemos nos perguntar qual o conjunto de elementos do plano pode ser construído. Veremos que o estudo do que não é realmente construtível pode ser a motivação para estudar a teoria de corpos. Os teoremas sobre a multiplicidade de graus mostram-se ferramentas muito úteis no estudo de problemas geométricos, principalmente aqueles sobre quais construções geométricas são impossíveis (Rezende; Queiroz, 2008; Alves, 2020).

2 HISTÓRIA DOS PROBLEMAS IMPOSSÍVEIS: TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA ANTIGUIDADE

Permitirei-me apoiar nas aulas da disciplina de História da Matemática, que além de terem me despertado ainda mais para estudar esse assunto, apresentou-me os três problemas clássicos descritos a seguir.

A construção do presente trabalho foi acompanhada por leituras, não apenas no campo da matemática e história da matemática, mas também por textos de Paulo Freire, a qual considero como leitura obrigatória para guiar-me durante a prática docente. Em [Freire \(2002\)](#), vemos um pequeno ensaio para estudar conhecimentos já produzidos pela humanidade, ver e rever tudo aquilo que já produzimos enquanto seres históricos e sociais. É a partir do conhecimento já existente que produzimos o que ainda não existe, mesmo que esse conhecimento nos dê uma resposta negativa. Um exemplo claro desse fato são os três problemas clássicos da geometria. A partir dessa não-resposta, que também é uma resposta possível e válida para o conhecimento científico, poderemos encontrar motivação para produzir o conhecimento ao qual estamos historicamente condicionados. Sem o velho, o novo não é possível. E, nas palavras de Paulo Freire:

O professor que pensa certo deixa transparecer aos educandos que uma das bonitezas de nossa maneira de estar no mundo e com o mundo, como seres históricos, é a capacidade de, intervindo no mundo, conhecer o mundo. Mas, histórico como nós, o nosso conhecimento do mundo tem historicidade. Ao ser produzido, o conhecimento novo supera outro que antes foi novo e se fez velho e se “dispõe” a ser ultrapassado por outro amanhã. Daí que seja tão fundamental conhecer o conhecimento existente quanto saber que estamos abertos e aptos à produção do conhecimento ainda não existente. Ensinar, aprender e pesquisar lidam com esses dois momentos do ciclo gnosiológico: o em que se ensina e se aprende o conhecimento já existente e o em que se trabalha a produção do conhecimento ainda não existente. A “do-discência” - docência-discência - e a pesquisa, indicotomizáveis, são assim práticas requeridas por estes momentos do ciclo gnosiológico. ([Freire, 2002](#))

Apoiada nessas duas razões é que citarei a seguir os três problemas clássicos da construção por régua e compasso.

Como conta-nos [Boyer e Merzbach \(1996\)](#) ao fazer uma retomada histórica da matemática, em particular da matemática desenvolvida na Grécia Antiga, a partir do século V a.C., traz à luz nomes como Anaxágoras (500 a.C. - 428 a.C.), Demócrito de Abdera (460 a.C. - 370 a.C.), Pitágoras (570 a.C. - 495a.C.), Tales (624 a.C. - 546 a.C.). Seus trabalhos, com novas perspectivas acerca da matemática, ciência e filosofia impactaram no desenvolvimento de um conhecimento científico menos utilitarista, movido pelo desejo de saber. Tem-se creditada a essa época a origem de três grandes problemas, que mais tarde ficaram conhecidos como os “três problemas clássicos da antiguidade”.

Temos por meio de relatos de Plutarco (46 d.C. - 120 d.C.) que enquanto Anaxágoras esteve preso, incumbiu-se de tentar quadrar o círculo, isto é, obter um quadrado de área equivalente a área de um círculo dado. Há no texto de [Boyer e Merzbach \(1996\)](#) uma menção à morte

de Péricles (495 .C. - 429 a.C.), morto pela peste que aniquilou cerca de um quarto da população de Atenas e, cuja catástrofe pode ter originado outro problema matemático famoso. Diz [Boyer e Merzbach \(1996, p. 44\)](#) “uma delegação fora enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar de Apolo, cúbico, deveria ser duplicado”. Temos aqui o problema da duplicação do cubo, que consiste em construir com régua e compasso, a partir da aresta dada de um cubo, a aresta de um segundo cubo com o dobro do volume do primeiro.

O segundo problema clássico consiste em responder a seguinte pergunta: Pode-se fazer a quadratura de um círculo com régua e compasso? Isto é, dado um círculo é possível construir um quadrado de mesma área utilizando-se apenas da régua e do compasso?

Em Atenas, mais ou menos na mesma época, circulava nosso terceiro célebre problema, construir um ângulo que fosse igual a um terço de um ângulo dado arbitrariamente.

Seria provado mais de 2200 anos depois que esses três famosos problemas são impossíveis de resolver utilizando apenas régua e compasso. Porém, apesar da impossibilidade de solução desses problemas, a maior parte da matemática grega influenciou muito a investigação matemática posterior, possibilitando o desenvolvimento de novos saberes matemáticos, como cita [Boyer e Merzbach \(1996\)](#) “a idade Heróica fracassou em seu objetivo imediato, sob as regras, mas seus esforços foram coroados por brilhante sucesso em outros pontos”.

3 OS AXIOMAS DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Como comentamos anteriormente neste trabalho, as construções geométricas serão feitas utilizando apenas régua e compasso, sendo uma régua sem quaisquer marcações de medidas ou segmentos, tendo seu uso restrito apenas à marcação de retas. O compasso será utilizado para traçar circunferências e arcos de circunferência, sendo aqui considerado um compasso moderno, que não colapsa após ser retirado do papel, conservando-se a abertura das hastes do instrumento, facilitando assim o transporte de segmentos. Vale ressaltar que considerar um compasso moderno é só uma maneira de pularmos algumas etapas na construção de segmentos e, obviamente, todas as construções seriam possíveis utilizando o compasso euclidiano (para ver como copiar um dado segmento \overline{BC} com extremidade no ponto A , consultar [Neto \(2017\)](#)). Portanto, construir com régua e compasso significa construir utilizando apenas retas e círculos ou arcos de círculos, bem como os pontos extremos dos segmentos e os pontos obtidos por meio da relação entre retas e circunferências, que enunciaremos como Princípios de Continuidade.

Antes de enunciarmos os Princípios de Continuidade, para facilitar o entendimento dos enunciados, vamos recorrer à definição de interior e exterior de um círculo ([Bordignon; Nascimento, 2021](#)).

Definição 1 (interior e exterior de um círculo). Seja γ um círculo com centro O e raio \overline{OR} . Dizemos que um ponto P está no interior de γ se $\overline{OP} < \overline{OR}$, e que está no exterior de γ se $\overline{OP} > \overline{OR}$.

Lembrando que denotamos por \overline{AB} a medida do segmento de reta de extremidades os pontos A e B .

Princípio 1 (Princípio de Continuidade círculo-círculo). Se um círculo γ possuir um ponto no interior e outro no exterior de outro círculo λ , então os círculos se intersectam em dois pontos.

Princípio 2 (Princípio de Continuidade reta-círculo). Se uma reta incide sobre um ponto no interior de um círculo, então essa reta intersecta o círculo em dois pontos.

Princípio 3 (Princípio de Continuidade segmento-círculo). Se um ponto extremo de um segmento estiver dentro de um círculo e o outro fora, então o segmento intersecta o círculo.

Além dos princípios de continuidade mencionados, vamos supor que o leitor esteja familiarizado com as relações de semelhança de triângulos, com os critérios de congruência de triângulos e que, uma vez demonstrada uma construção, podemos utilizá-la futuramente sem justificativas. Utilizaremos um segmento unitário u como referência, sendo considerado de medida igual a 1 e, todos os outros segmentos construídos ou dados serão maior que o segmento unitário u (sendo as construções para um dado segmento $a < 1$ análogas).

4 CORPO DOS NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

Dando início às construções utilizando régua e compasso, precisamos estabelecer algumas regras a priori, isto é, necessitamos definir como serão nossos instrumentos régua e compasso e de que maneira poderão ser utilizados em nossas construções futuras. Como [Davis \(2002\)](#) estabelece, a régua que utilizaremos não deve conter marcações de medidas, sendo possível traçar um segmento de qualquer comprimento passando por dois pontos. Um ponto pode ser formado pela interseção de duas retas, uma reta e uma circunferência ou duas circunferências. Obviamente, ao traçar um segmento de reta, nos é dado dois pontos referentes às extremidades, poderemos utilizá-los. Poderemos traçar circunferências de qualquer tamanho, de acordo com a necessidade, ou seja, dados quaisquer pontos A e B , é permitido centrar o compasso em A e traçar uma circunferência de raio \overline{AB} . O compasso utilizado será idealmente grande (aqui poderemos considerar um compasso moderno), assim como a régua. Além disso, poderemos tomar qualquer ponto em um segmento de reta, em uma circunferência ou no plano para utilizarmos nas construções.

A seguir vamos mostrar como construir, utilizando régua e compasso, as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação, divisão entre dois segmentos e de um segmento por n partes iguais e radiciação. Além disso, vamos construir as raízes das equações de primeiro e segundo grau.

4.1 CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

Adiante vamos mostrar as construções de reta paralela, reta perpendicular, mediatriz de um segmento, bissetão de um ângulo, soma, subtração e transporte de ângulos, utilizando régua e compasso. Mostradas essas construções, podemos admiti-las como sabidas e não detalhar nas construções mais elaboradas que necessitam, nos passos intermediários, de se utilizar das construções elementares.

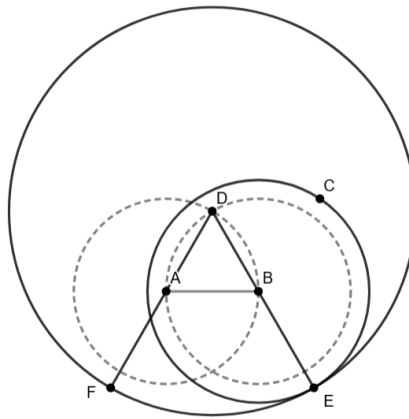
Como dito anteriormente, para esse trabalho vamos considerar o compasso moderno nas construções, cujas hastes não colapsam ao desenhar uma circunferência (compasso euclidiano). Com o compasso moderno podemos construir uma circunferência de centro dado e raio igual ao comprimento de um segmento dado, ou seja, com ele é permitido o transporte de segmentos. Essa diferença pode nos levar a pensar que o compasso moderno é mais poderoso que o compasso euclidiano, porém, vamos demonstrar que com o compasso euclidiano podemos também transportar segmentos, com uma sequência de passos a mais que o compasso moderno, mostrando portanto a equivalência entre eles.

Vamos primeiramente padronizar a notação para as circunferências. Sempre que tivermos uma circunferência traçada a partir de um segmento \overline{AB} , centrada no ponto A , vamos denotar por circunferência C_{AB} . Se tivermos uma circunferência centrada no ponto A e com raio r , denotaremos por C_{Ar} .

O problema aqui consiste em mostrar que, dado um ponto A em um segmento \overline{BC} , conseguimos construir \overline{AF} tal que $\overline{AF} \equiv \overline{BC}$.

Dados 3 pontos A, B e C e seja D ponto de interseção das circunferências $C_A B$ e $C_B A$. Seja E ponto de interseção de C_{BC} e \overrightarrow{DB} tal que B está entre D e E . Seja F ponto de interseção de C_{DE} e \overrightarrow{DA} . Então $\overline{AF} \equiv \overline{BC}$. De fato, temos que $\overline{DA} + \overline{AF} = \overline{DF} \equiv \overline{DE} = \overline{DB} + \overline{BE} \equiv \overline{DA} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AF} \equiv \overline{BC}$

Figura 1 – Segmento $\overline{AF} \equiv \overline{BC}$

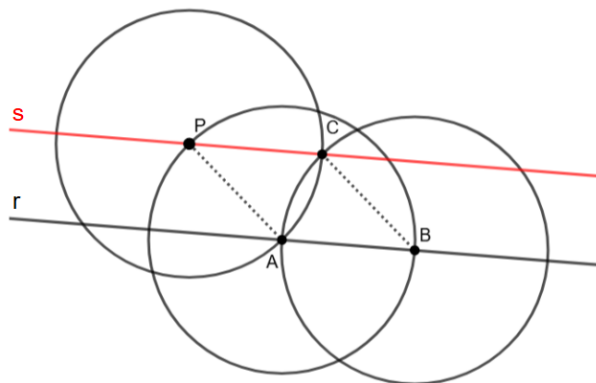


Fonte: Elaborada pelo autor

4.1.1 Retas paralelas

Dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r , construir a reta s paralela a r que contém P . Ver Figura 2.

Figura 2 – Retas paralelas



Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: Todas as circunferências traçadas nessa construção terão o mesmo raio. Começamos traçando uma circunferência com centro em P e que intersecta a reta r . Tomamos o ponto A como uma interseção dessa circunferência com r . Traçamos uma circunferência com centro em A e sobre o ponto B , resultado da interseção dessa circunferência com a reta r , traçamos a última circunferência, que terá como interseção desta com a primeira circunferência o ponto C . A reta s é determinada pelos pontos P e C e s é paralela a r . Temos que $PABC$ é um losango, e portanto seus lados são paralelos 2 a 2.

4.1.2 Retas perpendiculares

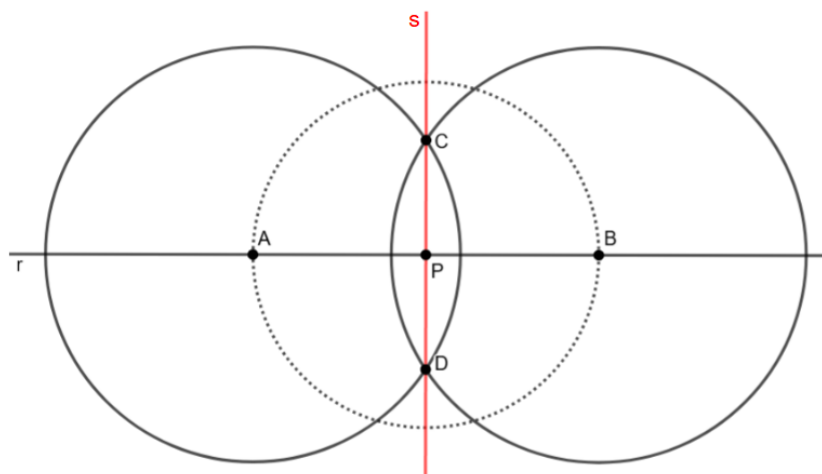
Temos dois casos a considerar:

- construir uma reta s perpendicular a r passando pelo ponto P , em que P pertence a r
- construir uma reta s perpendicular a r passando pelo ponto P , em que P não pertence a r .

As construções que faremos abrangem os dois casos, com uma única particularidade, a primeira circunferência centrada no ponto P , no primeiro caso terá que ter o raio menor que os seguintes, e a do segundo caso terá que ter os raios das circunferências centradas em A e B de comprimento suficiente para que essas circunferências se intersectem em pelo menos um ponto. Nesse caso, é razoável escolhermos fazer as três circunferências com raio de mesmo comprimento.

Começamos pela construção do caso a). Ver Figura 3.

Figura 3 – Reta s perpendicular a r em que P pertence a r .



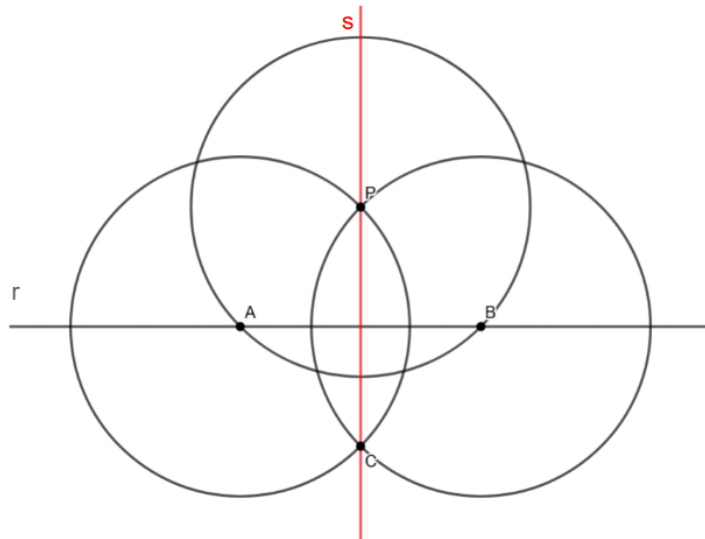
Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: sobre o ponto $P \in r$, traçamos uma circunferência de raio qualquer, que interceptará r em dois pontos obtendo os pontos A e B . As duas próximas circunferências de mesmo raio,

este maior que o raio da primeira circunferência. A primeira circunferência centrada em A e a segunda em B . A interseção dessas duas últimas circunferências nos dará os pontos C e D . A reta formada conectando os pontos C e D é a reta s desejada.

Agora, o caso b). Ver Figura 4.

Figura 4 – Reta s perpendicular a r em que P não pertence a r .



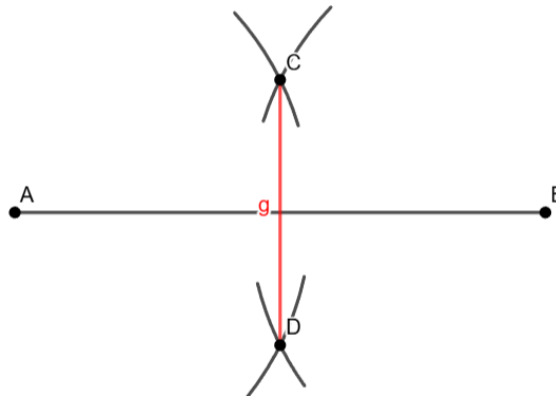
Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: Com centro no ponto P traçamos uma circunferência de modo intersectar r em dois pontos, A e B . As duas próximas circunferências, uma centrada em A e a outra centrada em B , podem ter o raio de mesmo comprimento que o raio da primeira circunferência. Um dos pontos da interseção dessas duas últimas circunferências é o ponto C como mostra a 4. A reta determinada pelos pontos C e P é a reta s desejada.

4.1.3 Mediatriz de um segmento

Dado um segmento \overline{AB} , construir um uma reta que seja a mediatriz de \overline{AB} . Ver Figura 5.

Figura 5 – Mediatriz de um segmento.



Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: Traçamos duas circunferências de mesmo raio, a primeira centrada em A e a segunda em B . Os pontos de interseção dessas circunferências são C e D . A reta \overleftrightarrow{CD} é a reta mediatriz de \overline{AB} pois, por construção $ADBC$ é um losango e suas diagonais são perpendiculares em seus pontos médios.

4.1.4 Bisseção de um ângulo

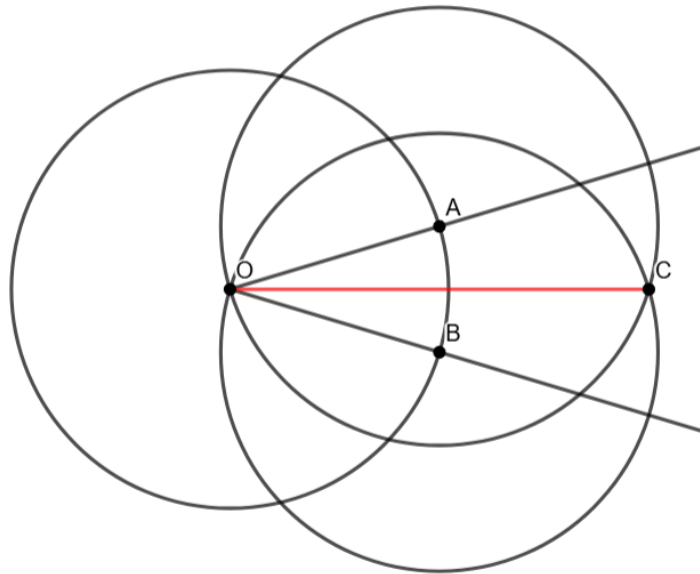
Dado um ângulo com vértice O , construir o segmento que divide o ângulo em dois.

Temos dois casos a considerar:

- a) bisseção de um ângulo com vértice a vista.
- b) bisseção de um ângulo sem vértice a vista

Para o caso a), ver Figura 6

Figura 6 – Bisseção de um ângulo com vértice a vista.

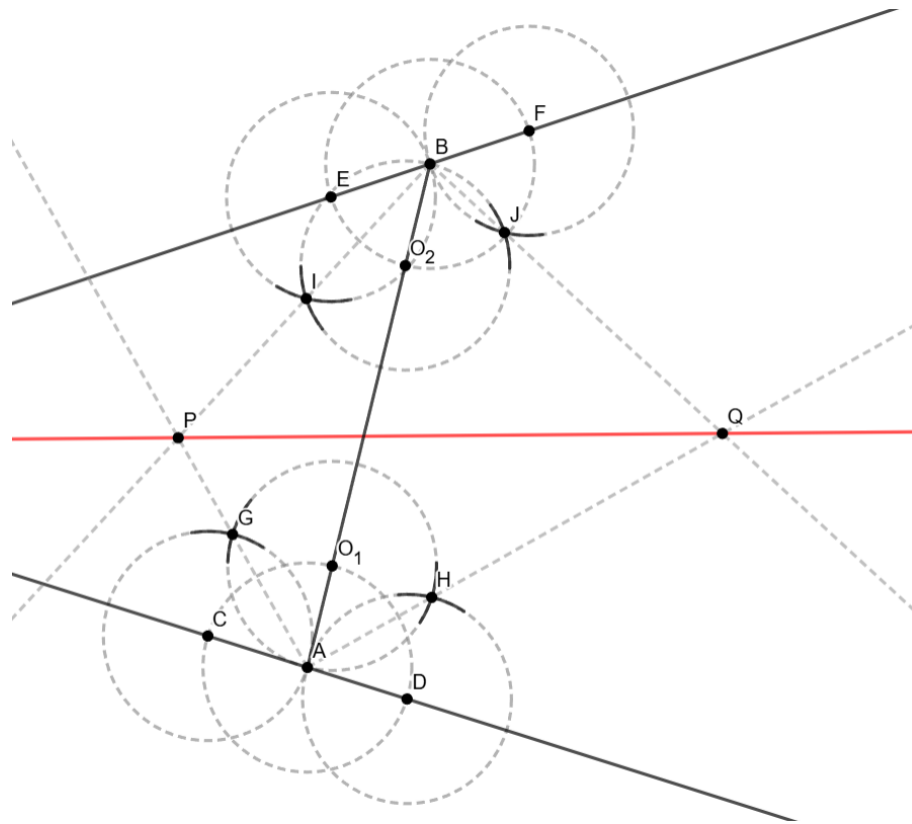


Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a Passo: Colocamos a ponta seca do compasso no vértice O e traçamos uma circunferência de raio qualquer, que terá como interseção dois pontos desse ângulo, o ponto A e B . Traçamos duas circunferências de mesmo raio, uma com centro em A e a outra com centro em B (elas podem ser maiores que a primeira circunferência centrada em O se necessário, o importante é que tenham o mesmo raio). A interseção dessas duas últimas circunferências determina o ponto C . A semirreta \overrightarrow{OC} é a bissetriz desejada do ângulo. Por construção, os pontos A e B estão à mesma distância de O , ao passo que C , interseção das circunferências centradas em A e B , também está equidistante dos pontos A e B . Ou seja, os triângulos OAC e OBC são congruentes pelo critério LLL , garantindo que os ângulos \widehat{AOC} e \widehat{BOC} são congruentes.

Para o caso b), ver Figura 7.

Figura 7 – Bisseção de um ângulo sem vértice a vista.



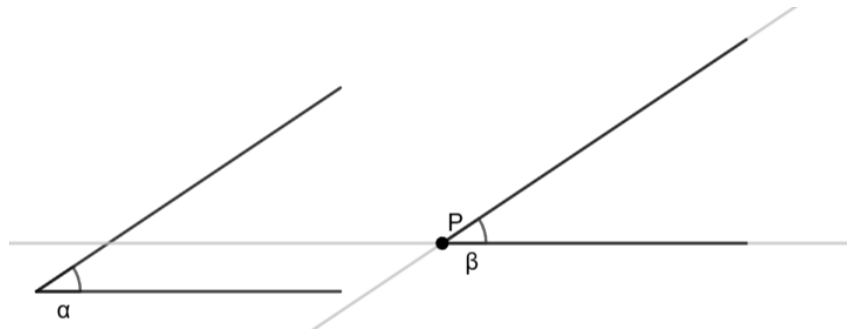
Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: Todas as circunferências traçadas possuem o mesmo raio r . Iniciamos escolhendo pontos em cada lado do ângulo, A e B , conectando-os e determinando o segmento \overline{AB} . Sobre esses pontos, traçamos as circunferências C_{Ar} e C_{Br} , que possuem como interseção com os lados do ângulo os pontos C e D por C_{Ar} e E e F por C_{Br} , e interseções com o segmento \overline{AB} os pontos O_{1r} e O_{2r} . Traçamos circunferências centradas nos pontos, C, D, E, F, O_1 e O_2 . A interseção de C_{Cr} com C_{O_1r} nos dará o ponto G . A interseção de C_{Dr} com C_{O_1r} nos dará o ponto H . A interseção de C_{Er} com C_{O_2r} nos dará o ponto I e a interseção de C_{Fr} com C_{O_2r} nos dará o ponto J . Traçamos as semirretas \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{AH} , \overrightarrow{BI} e \overrightarrow{BJ} , que como interseção entre elas teremos os pontos P e Q . A reta \overleftrightarrow{PQ} é a bissetriz desejada.

4.1.5 Adição, subtração e transporte de ângulos

Dados ângulos α e β , construir um ângulo congruente a $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, no caso em que $\beta \leq \alpha$.

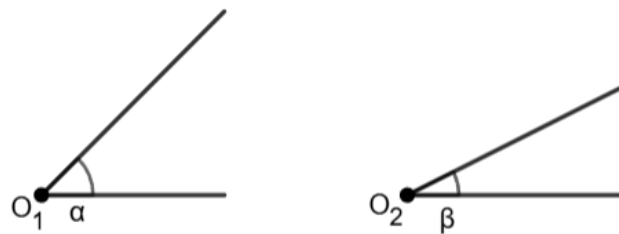
Para isso, utilizaremos a construção do transporte de um ângulo. Ver Figura 8.

Figura 8 – Transporte do ângulo α 

Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo transporte do ângulo α : Para transportar um ângulo α até o ponto P , basta traçarmos por P retas paralelas aos lados do ângulo. Dessa forma, $\beta \equiv \alpha$.

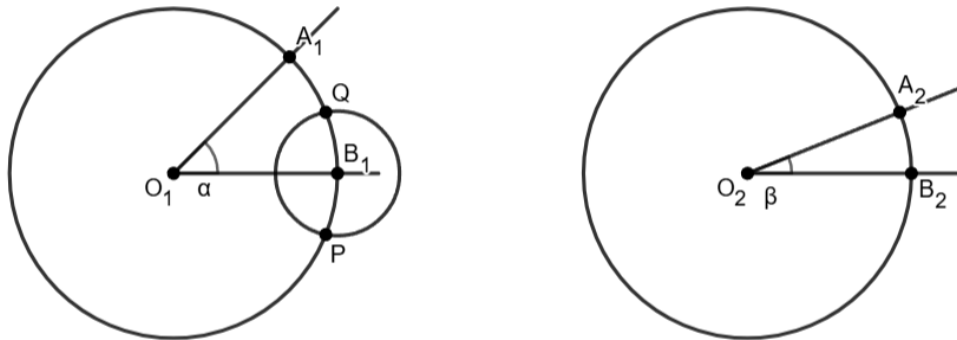
Agora consideremos os ângulos α e β , sobre os vértices O_1 e O_2 respectivamente, conforme mostra a Figura 9.

Figura 9 – Ângulos α e β 

Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo Soma e Subtração de ângulos: Dados os ângulos α e β , queremos construir um ângulo que seja congruente à $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$, com $\beta < \alpha$. Para isso, sobre o vértice O_2 do ângulo β , vamos traçar uma circunferência C_{O_2r} (centrada em O_2 e raio r), que tenha como interseção com os lados do ângulo os pontos A_2 e B_2 . Sobre o ponto O_1 , traçamos uma circunferência C_{O_1r} e transportamos o ângulo α com vértice no ponto O_1 , cuja interseção dos lados desse ângulo com a circunferência C_{O_1r} são os pontos A_1 e B_1 . Sobre B_1 , traçamos uma circunferência com raio igual ao segmento $\overline{A_2B_2}$, que nos dará os pontos P e Q como a interseção dessa circunferência com a circunferência C_{O_1r} . A partir dessa construção teremos, $A_1O_1B_1$ é congruente ao ângulo α . A_1O_1Q é congruente ao ângulo $\alpha - \beta$, com $\beta \leq \alpha$ e A_1O_1P é congruente ao ângulo $\alpha + \beta$ conforme mostra a Figura 10.

Figura 10 – Adição e subtração de ângulos

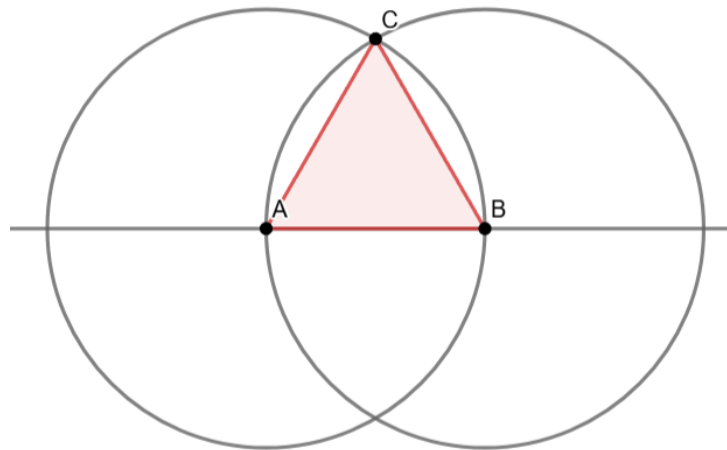


Fonte: Elaborada pelo autor

4.1.6 Triângulo equilátero

Construir um triângulo equilátero de lado \overline{AB} dado. Ver Figura 11.

Figura 11 – Triângulo equilátero



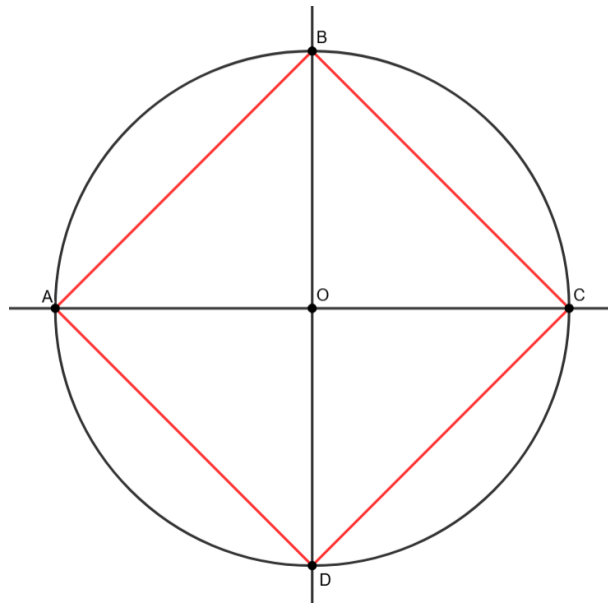
Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo triângulo equilátero: Com compasso com abertura igual ao segmento \overline{AB} traçar duas circunferências, C_{AB} e C_{BA} , a primeira centrada no ponto A e a segunda centrada em B . A interseção dessas duas circunferências fornece dois pontos. Escolhemos um deles, por exemplo, o ponto C e o triângulo ABC é o triângulo equilátero desejado. De fato, por construção, como ambas circunferências têm o mesmo raio \overline{AB} e o ponto C como interseção, segue que $AB \equiv BC \equiv AC$.

4.1.7 Quadrado inscrito em uma circunferência

Dada uma circunferência com centro O , construir um quadrado inscrito na circunferência dada. Ver Figura 12.

Figura 12 – Quadrado inscrito em uma circunferência



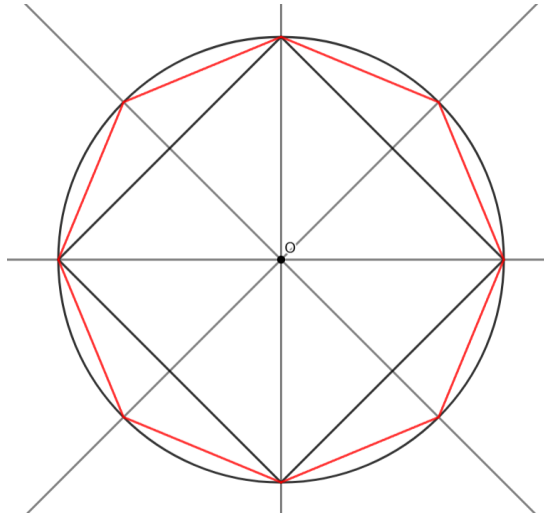
Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: Traçamos uma reta qualquer pelo centro O da circunferência. Os pontos de interseção desta reta com a circunferência determinam os pontos A e C . Construimos a reta perpendicular a \overleftrightarrow{AC} que passa pelo centro O da circunferência. A interseção desta reta com a circunferência dada determinam dois pontos, B e D . O polígono $ABCD$ é o quadrado desejado. Os segmentos \overline{AC} e \overline{BD} são diâmetros da circunferência, diagonais do quadrado e se interceptam no centro.

4.1.8 Octógono inscrito em uma circunferência

Dada uma circunferência com centro O , construir um octógono inscrito na circunferência dada. Ver Figura 13.

Figura 13 – Octógono



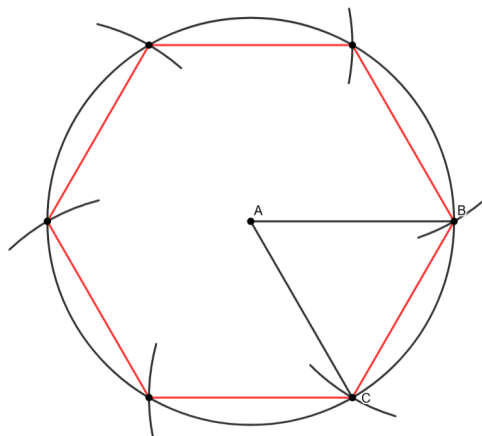
Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: Basta construirmos, a partir do quadrado inscrito na circunferência, mediatrizes dos lados do quadrado. Teremos assim, cada lado dividido em duas partes, resultando em polígono de oito lados.

4.1.9 Hexágono regular inscrito em uma circunferência

Dada uma circunferência de raio \overline{AB} , construir um hexágono regular inscrito nessa circunferência. Ver Figura 14

Figura 14 – Hexágono regular inscrito em uma circunferência

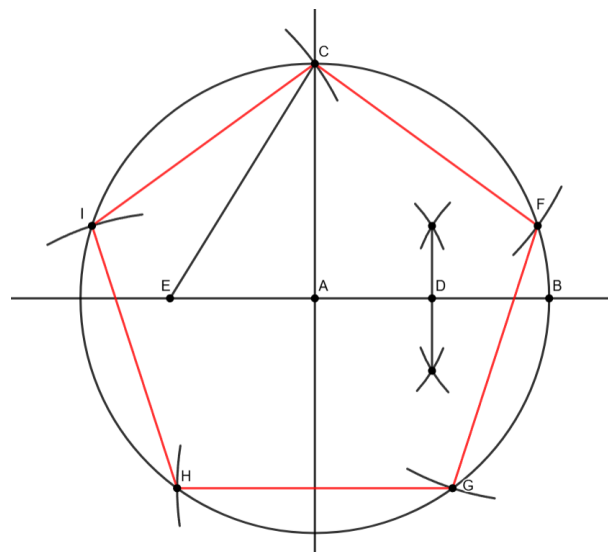


Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: Compasso com abertura igual ao segmento \overline{AB} , construir a circunferência C_{AB} . Traçar consecutivas circunferências de mesmo raio \overline{AB} , centradas primeiro no ponto B , depois em C (interseção da circunferência de centro B e a circunferência inicial) e assim por diante. Como o ângulo central do hexágono regular é igual a 60° e o triângulo ABC é equilátero, temos que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$, portanto o lado do hexágono é igual ao raio da circunferência.

4.1.10 Pentágono regular inscrito em uma circunferência

Figura 15 – Pentágono regular inscrito em uma circunferência

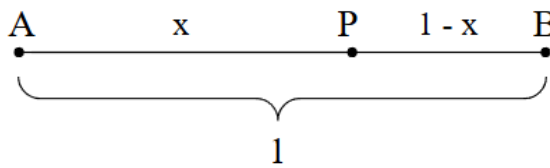


Fonte: Elaborada pelo autor

Passo a passo: Vamos detalhar a construção e detalharemos a justificativa, visto que essa construção não é tão intuitiva quanto as anteriores. Primeiramente, traçamos a circunferência C_{AB} , de centro A e raio \overline{AB} , marcando esses pontos. Estendemos sobre \overleftrightarrow{AB} um diâmetro e construímos a perpendicular \overleftrightarrow{CA} . Construímos a mediatriz de \overline{AB} e marcamos o ponto médio D . Com o compasso sobre o ponto D e abertura igual a \overline{CD} , traçamos um arco cuja interseção com \overline{AB} é o ponto E . O segmento \overline{CE} representa o comprimento dos lados do pentágono regular. Assim, com abertura do compasso igual a \overline{CE} e com a ponta seca em C , traçamos arcos consecutivos sobre a circunferência, marcando os pontos F, G, H, I e, por fim, conectaremos os segmentos $\overline{CF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HI}$ e \overline{IC} , que são os lados do pentágono regular desejado.

O segmento \overline{CE} representa o que os gregos chamavam de segmento dividido em razão média e extrema Miguel (2018). Dizemos que um segmento está dividido em razão média e extrema se, dado um segmento \overline{AB} , existir um ponto P em \overline{AB} tal que a razão entre o segmento todo e o maior seja igual a razão entre o segmento maior e o menor. Ver Figura 16.

Figura 16 – Segmento dividido em média e extrema razão



Fonte: Elaborada pelo autor

Vejamos a seguir, sem perda de generalidade, o caso em que esse segmento todo seja o segmento unitário. Seja

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow 1-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \quad (1)$$

A equação (1) é uma equação de segundo grau cujas raízes são $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$. Como estamos tratando de medidas de segmentos, ficaremos apenas com a raiz positiva $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Outra maneira de abordar essa questão e chegar em um resultado similar é apenas analisando as relação dos segmentos a partir do Teorema de Pitágoras. Voltemos à Figura 15, o ponto E foi construído a partir do arco com raio igual a \overline{DC} , logo $\overline{DC} \equiv \overline{DE}$, ambos são raio da circunferência centrada no ponto D . Temos então as relações:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &\equiv \overline{AC} = r \\ \overline{AD} &= \frac{r}{2} = \frac{\overline{AB}}{2} \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADC temos

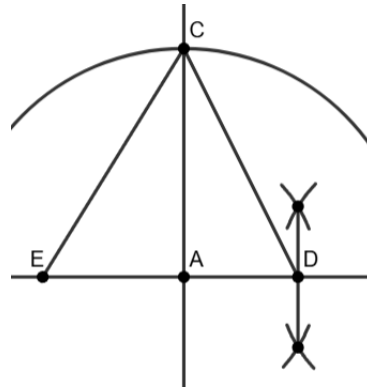
$$(DC)^2 = (AC)^2 + (AD)^2 = (AC)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}.$$

Logo,

$$DC = r \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Como podemos observar na Figura 17, $EA = ED - AD$.

Figura 17 – Triângulo EDC

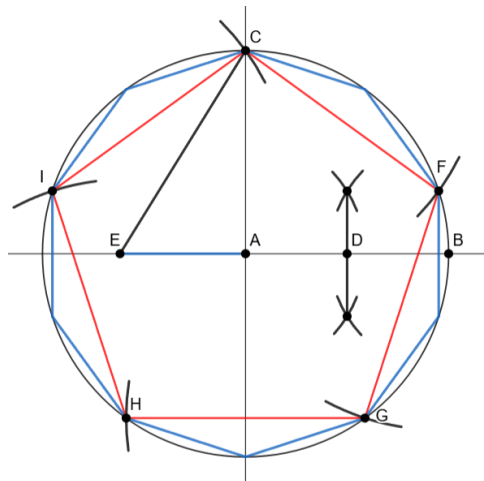


Fonte: Elaborada pelo autor

$$\text{Portanto, } EA = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} = r \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right).$$

No caso particular em que o raio é o segmento unitário, temos que $\overline{EA} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Temos assim que o segmento \overline{EA} é uma razão entre números construtíveis (no numerador temos a diferença entre uma raiz quadrada e um número natural e no denominador temos um número natural), portanto o segmento \overline{EA} é construtível. Observamos também que \overline{EA} pode ser utilizado para construir um decágono regular inscrito em uma circunferência, como vemos na Figura 18.

Figura 18 – Decágono regular inscrito em uma circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma outra maneira de construirmos um pentágono regular é a partir da construção do decágono regular, basta conectarmos os segmentos do decágono alternadamente para obtermos o pentágono, como visto na Figura 18.

4.2 OPERAÇÕES ELEMENTARES

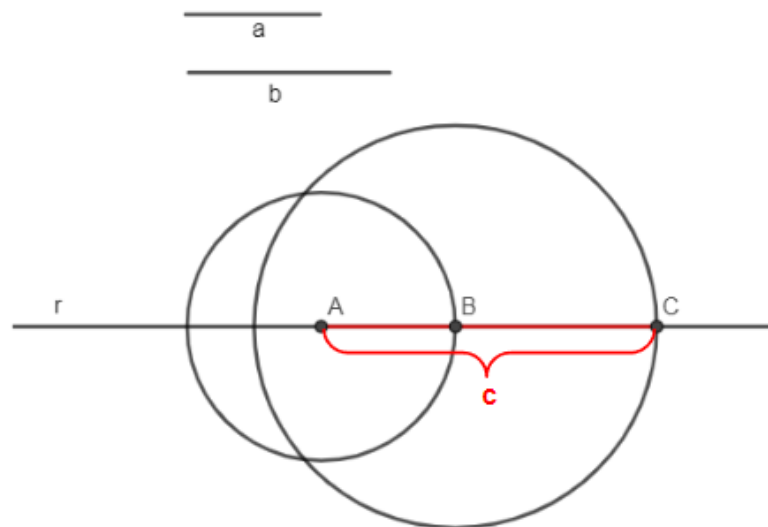
Vamos agora considerar dois segmentos de reta dados de comprimentos conhecidos. Partindo desses segmentos, podemos construir novos segmentos cujos comprimentos são a soma, subtração, multiplicação ou divisão dos comprimentos dos segmentos dados.

4.2.1 Adição

Dados segmentos de medidas a e b e uma reta r . Construir um segmento de medida c , sobre r , tal que $c = a + b$.

Passo a passo: Marcamos sobre a reta r um ponto que chamaremos de A . Com a ponta seca do compasso em A , traçar uma circunferência C_{1a} de raio igual ao segmento de comprimento a . Essa primeira circunferência intersectará r em dois pontos, escolheremos um deles e nomearemos de B . Com a ponta seca do compasso em B , traçamos a circunferência de raio igual ao comprimento b . Novamente, essa segunda circunferência traçada intercepta r , de modo que C está contido na semirreta \overrightarrow{AB} . O segmento \overline{AC} corresponde ao segmento $c = a + b$ desejado. Ver Figura 19.

Figura 19 – Adição de segmentos



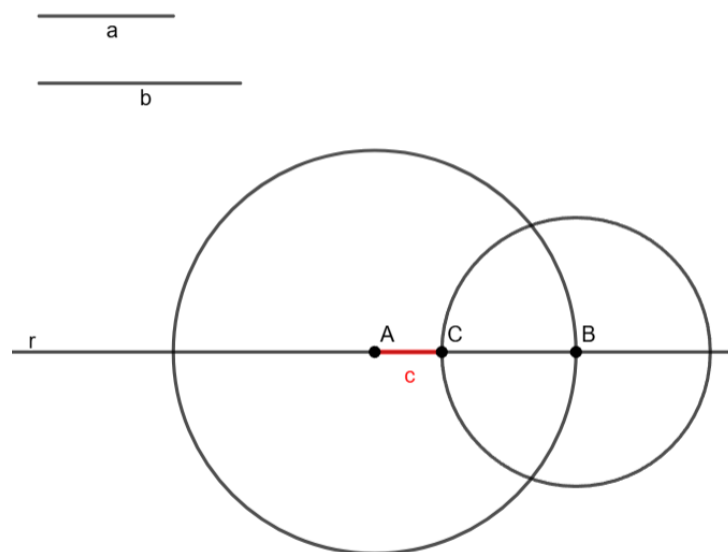
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.2 Subtração

Dados os segmentos de medida a e b , tais que $b > a$, construir sobre uma reta r , o segmento $c = b - a$.

Passo a passo: Marcamos sobre a reta r um ponto que chamaremos de A . Com a ponta seca do compasso em A , traçamos a circunferência de raio igual ao comprimento b do segmento. Essa primeira circunferência intercepta r em dois pontos. Escolhemos um deles que nomearemos de B . Então, temos que o comprimento do segmento \overline{AB} é igual ao comprimento b . Com a ponta seca do compasso no ponto B , traçamos uma circunferência de raio igual ao comprimento de a . Novamente, essa segunda circunferência traçada intercepta r em dois pontos, sendo um deles um ponto que chamamos C , de modo que C esteja entre A e B . O comprimento do segmento \overline{CB} é igual ao comprimento a . Verificamos assim que o segmento \overline{AC} é o resultado da subtração de \overline{AB} por \overline{CB} , isto é, $b - a$, sendo nosso comprimento c desejado. Ver Figura 20.

Figura 20 – Subtração de segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.3 Multiplicação

Dados os segmentos de medidas a e b , construir o segmento de medida $c = a \cdot b$.

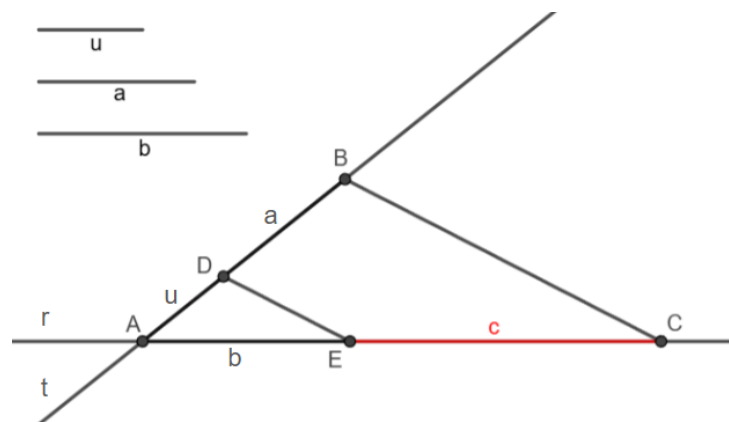
Passo a passo: Consideremos duas retas concorrentes, digamos r e t . Sobre r , traçamos o segmento \overline{AE} congruente ao segmento de comprimento b . Sobre a reta t , traçamos os segmentos \overline{AD} e \overline{DB} , congruentes aos segmentos de medida u (qualquer) e a , sucessivamente. Traçamos

a partir dos pontos D e E o segmento \overline{DE} . Incidindo sobre o ponto B , traçamos uma semirreta paralela à \overline{DE} , de modo que esta intercepta a reta r em um ponto que denominaremos C . Pelo Teorema de Tales, temos que

$$\frac{u}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{ab}{u} \quad (2)$$

Em particular na Equação (2) se u é o segmento unitário, isto é, $u = 1$, então $c = ab$. Ver Figura 21.

Figura 21 – Multiplicação de segmentos



Fonte: Elaborada pelo autor

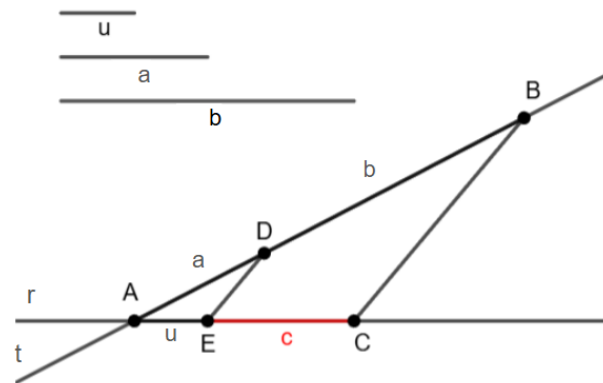
4.2.4 Divisão

Dados os segmentos de medidas a e b , construir o segmento de medida c tal que $c = b/a$.

Passo a passo: Traçamos as retas concorrentes r e t , tendo como interseção o ponto A . Com a ponta seca do compasso em A , traçamos duas circunferências: a primeira de raio de medida igual ao segmento de medida a , cuja interseção com a reta t é o ponto D , e a segunda circunferência de raio de medida igual ao segmento unitário u , cuja interseção com a reta r é o ponto E . Com a ponta seca do compasso sobre o ponto D traçamos a circunferência de raio igual ao segmento de medida b cuja interseção com t é o ponto B . Construimos o segmento \overline{BC} paralelo a \overline{DE} . Pelo Teorema de Tales temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{u}{c} \Rightarrow ac = ub \Rightarrow c = \frac{ub}{a} \Rightarrow c = \frac{b}{a} \quad (3)$$

Em particular, na Equação (3), se u é o segmento unitário, $u = 1$, então $c = b/a$. Ver Figura 22.

Figura 22 – Divisão do segmento b pelo segmento a 

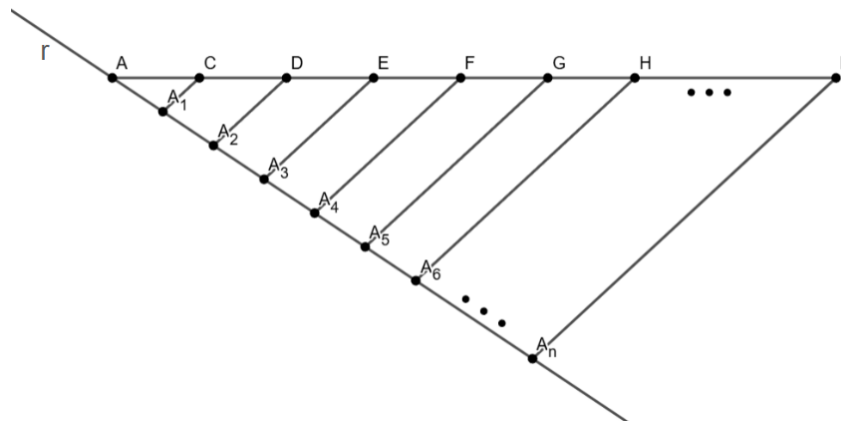
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.5 Divisão de um segmento em n partes

Dividir um segmento \overline{AB} por um número inteiro n positivo.

Passo a passo: Traçamos uma reta r concorrente ao segmento \overline{AB} , de modo que r incida sobre o ponto A . Com a ponta seca do compasso em A e abertura fixa qualquer, traçamos uma circunferência. Essa circunferência irá interceptar a reta r no ponto A_1 . Repetimos o procedimento traçando $n - 1$ circunferências de mesmo raio sobre a reta r com centro A_i e determinando o ponto de interseção seguinte A_{i+1} . As interseções dessas circunferências com r fornece os pontos A_1, A_2, \dots, A_n . Traçamos o segmento $\overline{A_n B}$. Em seguida, traçamos retas paralelas à $\overline{A_n B}$ que irão interceptar o segmento \overline{AB} . Assim, teremos o segmento \overline{AB} dividido em n partes. Ver Figura 23.

Figura 23 – Divisão de um segmento \overline{AB} por um número positivo n



Fonte: Elaborada pelo autor

A justificativa é análoga à divisão e decorre do Teorema de Tales.

4.2.6 Radiciação (raiz quadrada)

Dado um segmento de medida b , construir um segmento $c = \sqrt{b}$.

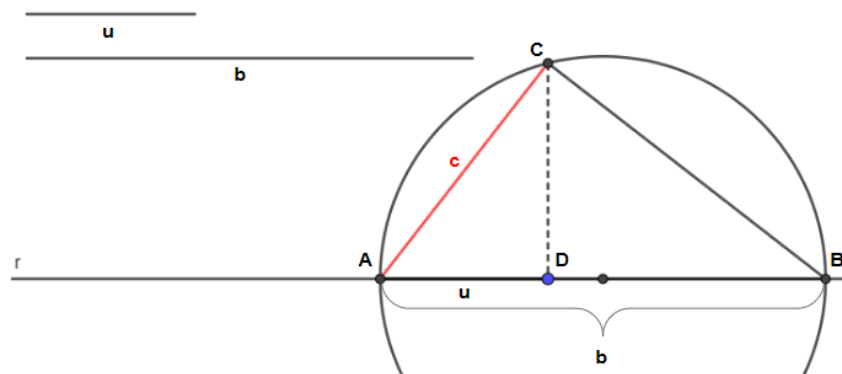
Passo a Passo: Sobre a reta r , construímos uma circunferência de diâmetro igual ao segmento de medida b (basta determinar o ponto médio do segmento), determinando os pontos A e B como a interseção dessa circunferência com a reta r . Sobre a semirreta \overrightarrow{AB} e com a ponta seca do compasso em A , transportamos o segmento unitário u , tendo como extremidades os pontos A e D . Em D , traçamos a perpendicular à \overline{AD} , intersectando a circunferência no ponto C . Traçamos os segmentos \overline{AC} e \overline{CB} . Obtemos os triângulos ADC (retângulo em D) e ABC (retângulo em C). Pela semelhança dos triângulos ABC e ADC (retângulos e ângulo A comum), vale a relação

$$\frac{AB}{CA} = \frac{CA}{AD} \quad (4)$$

Logo,

$$\frac{b}{c} = \frac{c}{1} \quad (5)$$

E daí, $c = \sqrt{b}$. Ver Figura 24

Figura 24 – Segmento $c = \sqrt{b}$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.7 Solução da equação $ax + b = c$

Dados segmentos de medidas a , b e c , construir a solução da equação $ax + b = c$.

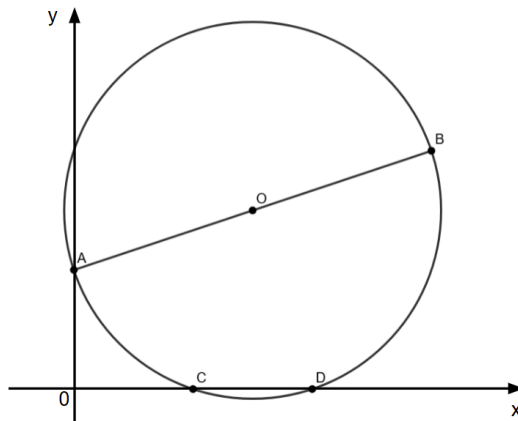
Passo a Passo: Temos que a solução algébrica da equação $ax + b = c$ é $x = (c - b)/a$ com $a \neq 0$. Portanto, basta utilizarmos de construções já mostradas anteriormente, construindo primeiro o segmento $c - b$ e em seguida o segmento $(c - b)/a$

4.2.8 Soluções da equação $x^2 - ax + b = 0$

Dados segmentos de medidas a e b , construir as soluções da equação $x^2 - ax + b = 0$.

Passo a Passo: Para construirmos as raízes da equação quadrática $x^2 - ax + b = 0$, consideraremos $a^2 > 4b$. Com isso, teremos garantia de termos duas raízes reais. Primeiramente, construímos uma circunferência de diâmetro AB , em que $A = (0, 1)$ e $B = (a, 1)$. Temos que as abscissas dos pontos C e D são as raízes da equação quadrática (pontos onde a circunferência intercepta o eixo das abscissas). Ver Figura 25.

Figura 25 – Raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$



Fonte: Elaborada pelo autor

De fato, o centro da circunferência da Figura 25 é o ponto médio do segmento AB . Assim, temos

$$O = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{0+a}{2}, \frac{1+b}{2} \right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2} \right) \quad (6)$$

O raio r da circunferência pode ser obtido calculando a distância entre os pontos O e A . Logo,

$$r^2 = \left(\frac{a}{2} - 0 \right)^2 + \left(\frac{b+1}{2} - 1 \right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}$$

A partir das coordenadas do centro da circunferência obtida em (6) temos que a equação da circunferência é

$$\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2} \right)^2 = r^2$$

Igualando ambas expressões para r^2 , obtemos

$$\frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2} \right)^2 \quad (7)$$

Simplificando os termos ficamos com

$$x^2 + y^2 - ax - y(b+1) + b = 0 \quad (8)$$

Observamos que para determinarmos as abscissas dos pontos C e D , devemos ter $y = 0$. Assim,

substituindo $y = 0$ em (8), obtemos a equação quadrática

$$x^2 - ax + b = 0 \quad (9)$$

Cujas raízes são as abscissas dos pontos C e D . São elas, respectivamente,

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

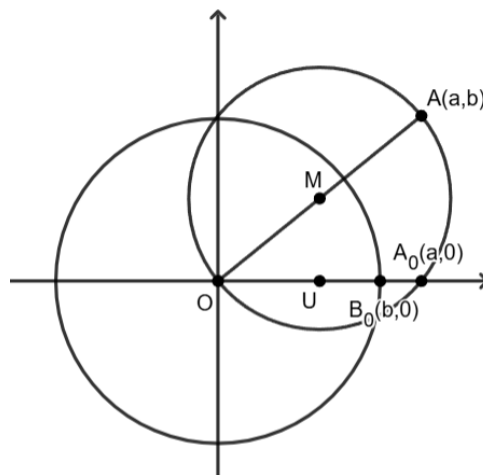
4.3 EXTENSÕES QUADRÁTICAS

Vamos considerar o plano cartesiano \mathbb{R}^2 .

Proposição 1. *Um ponto $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ é construtível se, e somente se, suas coordenadas $a, b \in \mathbb{R}$ são números construtíveis.*

Demonstração. (\Rightarrow) Criaremos eixos coordenados. Vamos tomar o eixo das abscissas sendo representado pela reta determinada pelos pontos O e U , ver Figura 26. Assim, o eixo das ordenadas é a reta perpendicular à \overleftrightarrow{OU} passando sobre a origem O . Seja $A = (a, b)$ um ponto construtível e seja M o ponto médio do segmento \overline{OA} . Segue da geometria elementar que o ponto A_0 tem coordenadas $A_0 = (a, 0)$ e é a interseção da reta \overleftrightarrow{OU} e da circunferência C_{MA} (de centro M passando por A) como mostra a Figura 26.

Figura 26 – Números construtíveis e coordenadas



Fonte: Elaborada pelo autor

Determinado o ponto A_0 encontramos o ponto $B_0 = (b, 0)$, sobre o eixo das abscissas, traçando com centro em O uma circunferência de raio $\overline{OA_0}$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponhamos a e b construtíveis, isto é, $(a, 0)$ e $(b, 0)$ são construtíveis.

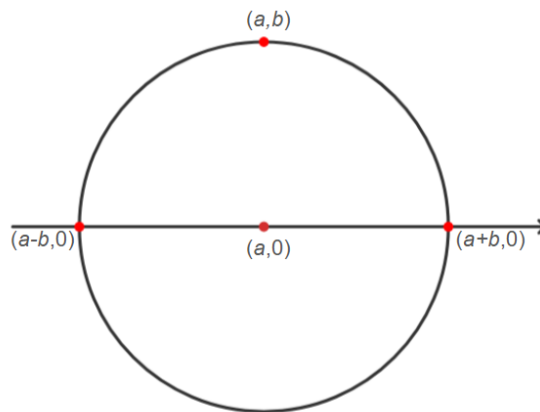
É fácil verificarmos que a reta determinada por 0 e por $(0, 1)$ é construtível. Assim, sabemos construir $(0, b)$ a partir de $(b, 0)$. Como sabemos traçar paralelas e perpendiculares, segue imediatamente a construção de (a, b) a partir de $(a, 0)$ e $(0, b)$. \square

Seja \mathcal{C} o conjunto dos números reais construtíveis. Sabemos que um subconjunto dos números reais que contenha o 0 e 1 e é fechado em relação a adição, multiplicação, e cálculo de simétricos e de inversos (de elementos não nulos) é um subcorpo dos números reais.

Proposição 2. *Os números construtíveis formam um subcorpo dos números reais.*

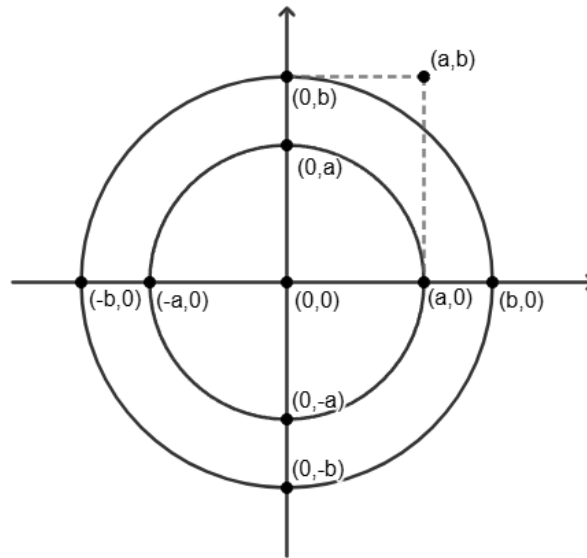
Demonstração. É fácil ver a partir das Figuras 27, 28 e 29 e das operações elementares já demonstradas segue a demonstração desta proposição. Observamos que, dado os pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$ construímos os pontos $P = (ab, 0)$, $Q = (\frac{a}{b}, 0)$, $(a - b, 0)$ e $(a + b, 0)$.

Figura 27 – Coordenadas (a, b)



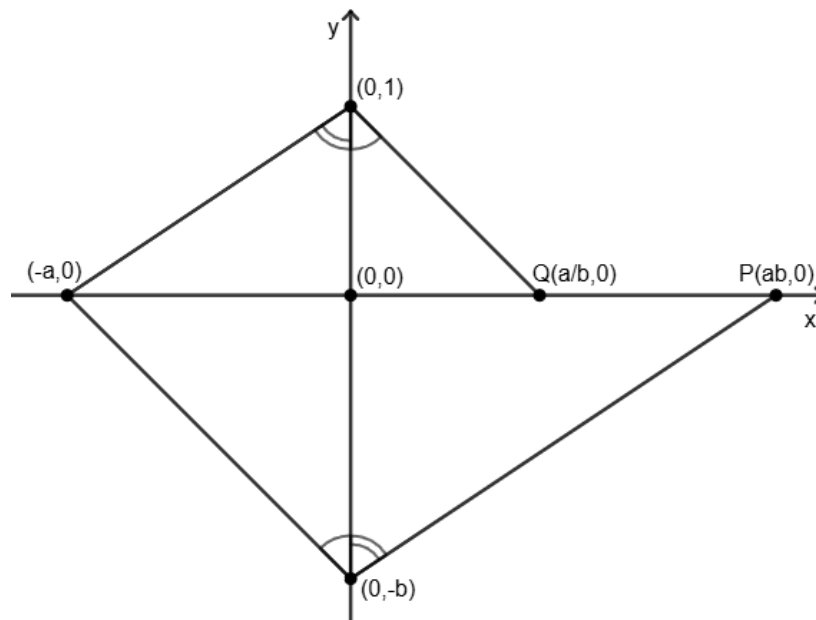
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 28 – Números construtíveis e coordenadas



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 29 – Números construtíveis e coordenadas



Fonte: Elaborada pelo autor

4.4 NÚMEROS ALGÉBRICOS

Definição 2. Um número real α é algébrico sobre um corpo \mathbb{K} se existe uma equação polinomial

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

com coeficientes em \mathbb{K} , da qual α é raiz, ou seja $p(\alpha) = 0$. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, dizemos simplesmente que α é um número algébrico.

Teorema 1 (das raízes racionais). *Seja a função polinomial $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ com $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Se $r = \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$, com $\text{mdc}(s, t) = 1$, é uma raiz de p , isto é, $p(r) = 0$ então s divide a_0 e t divide a_n .*

Demonstração. Por hipótese,

$$a_n \left(\frac{s}{t}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{s}{t}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando por t^n ,

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \dots + a_1 s t^{n-1} + a_0 t^n = 0.$$

Reagrupando os termos,

$$a_0 t^n = -s(a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} t + \dots + a_1 t^{n-1}).$$

Assim, $a_0 t^n$ é múltiplo de s . Por outro lado, como $\text{mdc}(s, t) = 1$ tem-se que $\text{mdc}(s, t^n) = 1$. Logo, s divide a_0 . Podemos reagrupar a equação acima de outra maneira e ficaremos com a seguinte

$$a_n s^n = -t(a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} t + \dots + a_1 s t^{n-2} + a_0 t^{n-1})$$

Do mesmo modo, observamos que t divide $a_n s^n$, mas $\text{mdc}(s, t) = 1$ e tem-se que $\text{mdc}(s^n, t) = 1$, portanto t divide a_n □

Definição 3. O grau de um número algébrico α sobre \mathbb{K} , denominado $\text{deg}(\alpha, \mathbb{K})$, é o grau do polinômio (não nulo) de menor grau, com coeficientes em \mathbb{K} , que tem α como raiz.

Um polinômio $f(x)$, com coeficientes em \mathbb{K} , é irredutível sobre \mathbb{K} se é impossível escrever $f(x)$ como produto de dois polinômios de grau ≥ 1 , ambos com coeficientes em \mathbb{K} . Se α é raiz de um polinômio $f(x)$, irredutível sobre \mathbb{K} , então $\text{deg}(\alpha, \mathbb{K}) = \text{grau de } f(x)$. Por exemplo, $\text{deg}(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 2$ e $\text{deg}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = 3$.

Se a é um número construtível, então a é algébrico sobre \mathbb{Q} e $\text{deg}(a, \mathbb{Q})$ é uma potência de 2 (Rezende; Queiroz, 2008).

5 COMENTÁRIOS SOBRE A IMPOSSIBILIDADE DOS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS

5.1 QUADRATURA DO CÍRCULO

Definição 4. Um número real β não algébrico sobre um corpo \mathbb{K} é chamado número transcendente sobre \mathbb{K} .

Proposição 3 (Lindemann, 1882). π é transcendente. Logo, o número $\sqrt{\pi}$ não é construtível. Logo, o problema da quadratura do círculo não tem solução.

Logo, o problema da quadratura do círculo não tem solução.

5.2 DUPLICAÇÃO DO CUBO

Lembremos que esse problema consiste em construir um segmento múltiplo de $\sqrt[3]{2}$. Porém, o grau de $\sqrt[3]{2}$ é igual a 3 que não é uma potência de 2, já que é solução da equação polinomial $x^3 - 2 = 0$. Logo, não podemos construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado utilizando apenas régua e compasso.

5.3 TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO QUALQUER

Podemos construir um ângulo se for possível construir seu cosseno. Para provarmos que não é possível trissectar qualquer ângulo, basta mostrarmos que não conseguimos trissectar um ângulo específico. Desse modo, vamos analisar a possibilidade da construção da trisseção de $\cos(60^\circ)$. Vamos considerar $\theta = 20^\circ$. Logo $\cos(3\theta) = \cos(60^\circ) = 1/2$. Utilizando as propriedades de seno e cosseno podemos desenvolver as equações a seguir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos\theta - \sin(2\theta)\sin\theta \\ &= (\cos\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta = \cos^3\theta - \sin^2\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = \cos^3\theta - 3(1 - \cos^2\theta)\cos\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \end{aligned}$$

Logo,

$$8\cos^3\theta - 6\cos\theta = 1.$$

Podemos escrever,

$$8\cos^3\theta - 6\cos\theta - 1 = 0.$$

Fazendo $u = 2 \cos \theta$, obtemos a equação $u^3 - 3u - 1 = 0$. Equação polinomial irredutível de grau 3. Portanto $\cos(20^\circ)$ não é construtível e o ângulo de 60° não pode ser trissectado.

6 ATIVIDADES

Abordaremos neste capítulo algumas atividades utilizando construções por régua e compasso que podem ser sugeridas para turmas do Ensino Médio. Recomendamos que seja necessário garantir que alguns conhecimentos sejam prévios, como a noção de bissetção de ângulo, mediatriz de um segmento, resolução de equações do segundo grau.

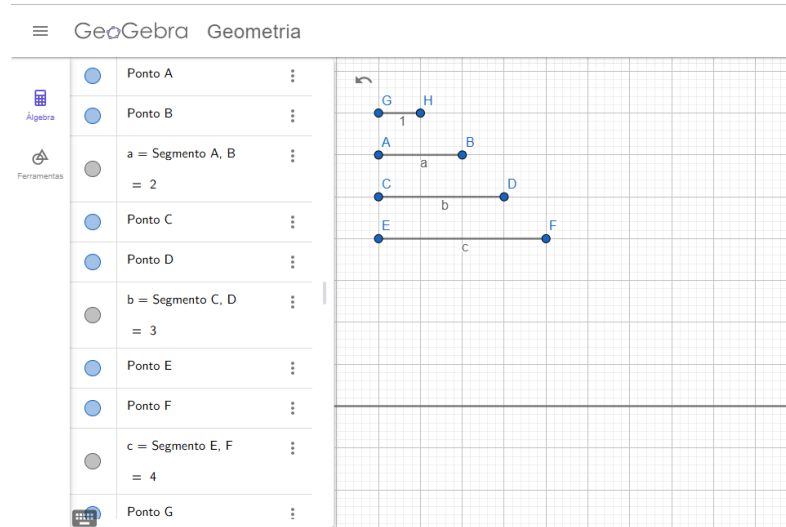
Como já abordamos diversas construções, resumiremos os passos para as seguintes e faremos uso dos recursos do GeoGebra, que também podem ser utilizados pelos alunos após terem estudado as construções elementares anteriores, para evitar uma mera repetição de etapas.

6.1 ATIVIDADE 1: CONSTRUÇÃO DO NÚMERO $a + b\sqrt{c}$

Sabemos como construir adição, subtração, produto, quociente e raiz quadrada de números inteiros. Essa atividade se dedicará à construção de números da forma $a + b\sqrt{c}$ com $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Vale observar que podemos estender esse exemplo e deixar as construções mais elaboradas, distinta a menos de passos que se repetem. Por exemplo, o número c pode ser da forma $x + y\sqrt{z}$, com $x, y, z \in \mathbb{Q}$ e assim sucessivamente, estendendo esse processo indefinidamente. Portanto, focaremos na construção do número $a + b\sqrt{c}$, sem perda de generalidade, com $a < b < c$ e $c > 0$. Utilizaremos as funções pré estabelecidas do programa GeoGebra, que permitirão pular algumas etapas. Seguiremos o passo a passo a partir das imagens da interface do programa que estamos utilizando no momento da construção desse trabalho. Utilizaremos a calculadora geométrica.

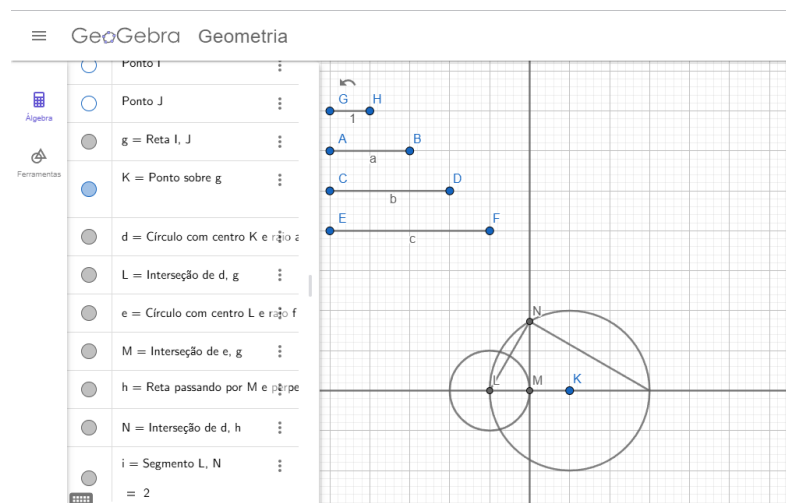
Construiremos o número $a + b\sqrt{c}$ com $a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $a < b < c$ e $c > 0$. Vamos usar a opção de exibir malhas principais e secundárias para nos orientar e utilizaremos cada espaçamento principal como nosso segmento unitário.

1. Começaremos definindo os segmentos a, b e c , cujo comprimento representarão os números racionais a, b, c , respectivamente. Para isso usaremos a ferramenta "Segmento".
2. Usar a ferramenta "Reta" para traçar uma reta r qualquer. Aqui as malhas poderão ajudar a construirmos uma reta horizontal

Figura 30 – Segmentos a, b, c e reta r 

Fonte: Elaborada pelo autor

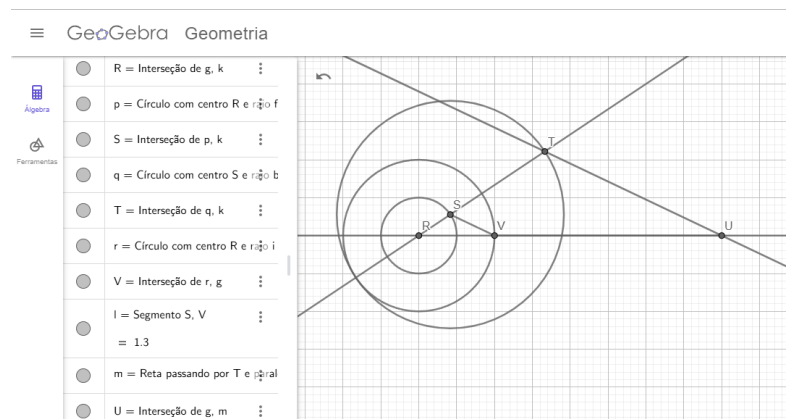
3. Sobre a reta r traçaremos uma circunferência com o "Compasso" e raio igual ao segmento c
4. Com centro em L traçar uma circunferência de raio igual ao segmento a
5. O ponto M é a interseção dessa circunferência com a reta r
6. Traçar uma perpendicular, com a ferramenta "Reta Perpendicular", sobre M , intersectando a circunferência de raio a no ponto N .
7. O segmento \overline{LN} corresponde ao segmento de medida \sqrt{c}

Figura 31 – Construção do segmento \sqrt{c} 

Fonte: Elaborada pelo autor

8. Traçar uma reta transversal s (“Reta”) a r , em que a interseção das duas retas é o ponto R .
9. Com o “Compasso”, traçar uma circunferência sobre r com centro no ponto R e raio \sqrt{c} , marcando o ponto V , interseção dessa circunferência com r . $\overline{RV} = \sqrt{c}$
10. Transportar o segmento unitário, com início no ponto R , seguindo o mesmo procedimento do passo anterior, para a reta s , transversal a r .
11. Repetir o processo para o segmento b , transportando-o sobre a reta s a partir do ponto S . $\overline{ST} = b$
12. Com “Segmento”, marcar \overline{SV}
13. Com “Reta Paralela”, traçar uma reta paralela a \overline{SV} e passando por T . Essa reta paralela a \overline{SV} terá o ponto U como interseção com r
14. $\overline{VU} = b\sqrt{c}$

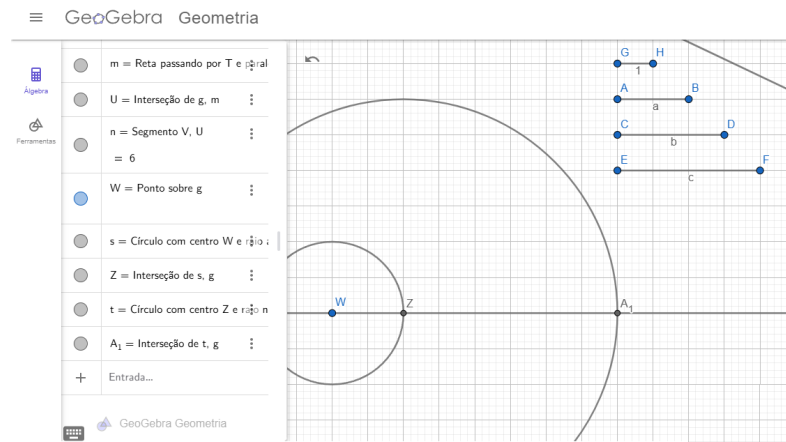
Figura 32 – Números construtíveis e coordenadas



Fonte: Elaborada pelo autor

15. Com “Compasso”, traçar uma circunferência sobre r com centro em W e raio a .
16. Z é a interseção de r com com essa última circunferência.
17. Com centro em Z e raio igual a $\overline{VU} = b\sqrt{c}$, utilizando o “Compasso”, traçar uma circunferência sobre r .
18. O segmento de reta $\overline{WA_1}$ é o nosso segmento desejado $a + b\sqrt{c}$

Figura 33 – Números construtíveis e coordenadas



Fonte: Elaborada pelo autor

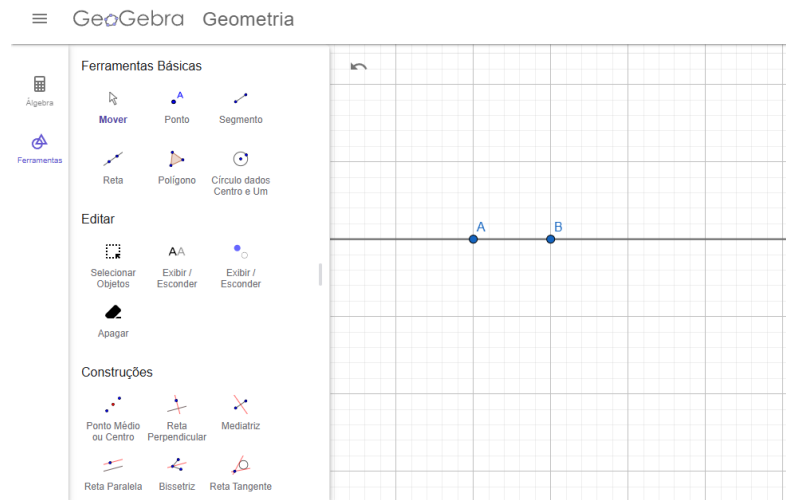
6.2 ATIVIDADE 2: CONSTRUÇÃO DA RAZÃO ÁUREA ϕ

Nessa atividade faremos a construção da Razão Áurea, encontrada tanto no campo de estudo da matemática quanto em algumas manifestações artísticas e arquitetônicas, como por exemplo, na construção do Parthenon na Grécia. Vemos essa razão na relação entre a diagonal de um pentágono regular e um de seus lados, na sequência de Fibonacci, em que a medida que a sequência cresce, aproxima-se de ϕ a razão entre dois termos consecutivos dessa sequência. Há também uma característica curiosa com o número ϕ , ao subtrairmos 1 de ϕ , obtemos seu inverso, ou seja, ele está intimamente conectado a si mesmo.

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi} \approx 0,61803398875$$

1. Construa uma reta f a partir dos pontos A e B , tal que $\overline{AB} = 1$. Aqui as malhas principais ajudarão a posicionar os pontos A e B mais facilmente.

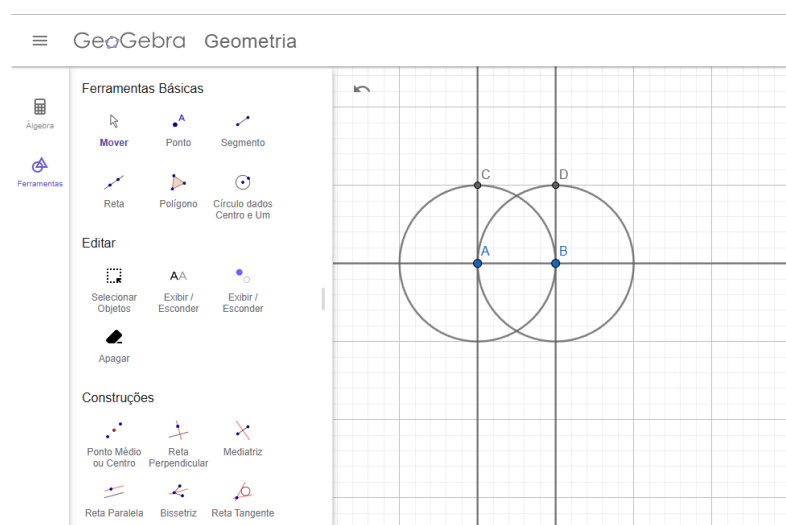
Figura 34 – Razão áurea



Fonte: Elaborada pelo autor

2. Erga duas perpendiculares a f , uma sobre o ponto A e a outra sobre o ponto B
3. Com o “Compasso” de raio igual ao segmento \overline{AB} e centro em A e depois em B , trace circunferências.
4. Essas circunferências vão intersectar as perpendiculares traçadas anteriormente em dois pontos. Usando a ferramenta “Ponto” marque essas interseções como os pontos C e D .

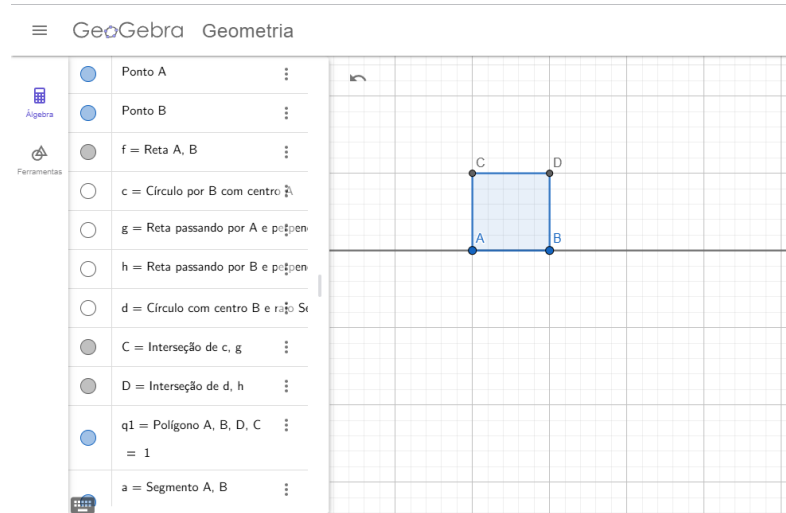
Figura 35 – Razão áurea



Fonte: Elaborada pelo autor

5. Use a “Polígono” para construir o quadrado $ABDC$.

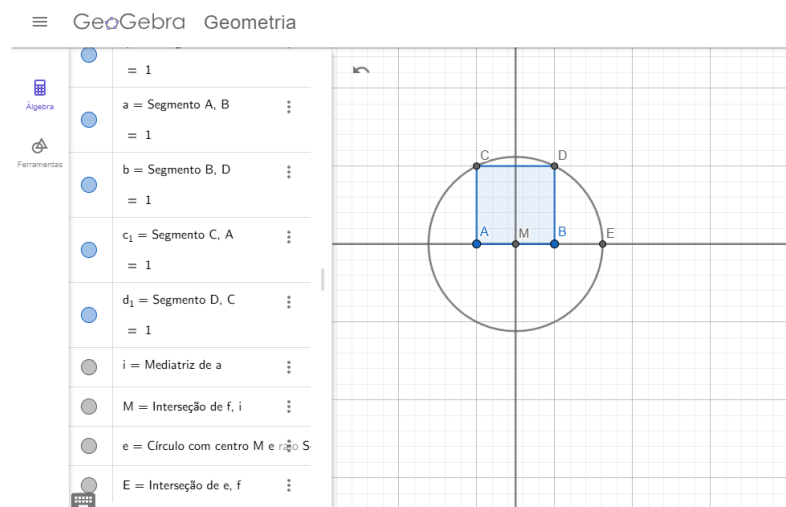
Figura 36 – Razão áurea



Fonte: Elaborada pelo autor

6. Use “Mediatriz” para determinar o ponto M , interseção da mediatriz do segmento \overline{AB} com a reta f . Determine o ponto M . Selecione “Mediatriz” e clique primeiro em A e depois em B , que determinará a mediatriz de \overline{AB} . A interseção dessa mediatriz com a reta f nos fornece o ponto M .
7. Traçar uma circunferência com o “Compasso” abertura igual ao segmento \overline{AC} e centro em M .
8. Essa circunferência intersecta f em dois pontos, marque o ponto E tal que B esteja entre M e E .

Figura 37 – Razão áurea



Fonte: Elaborada pelo autor

9. O segmento \overline{AE} é o segmento que representa a razão áurea ϕ . Vejamos. Podemos observar que $AE = AM + MB$. Temos que

$$AM = \frac{A}{B} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

\overline{AM} é mediatriz de \overline{AB} . Vamos encontrar o comprimento de \overline{ME} . Por construção, $\overline{ME} \equiv \overline{MC}$.

$$\begin{aligned} (MC)^2 &= (AC)^2 + (AM)^2 \\ (MC)^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} \\ (MC)^2 &= \frac{5}{4} \\ MC &= \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} AE &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ AE &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \approx 1,618033988 \end{aligned} \tag{11}$$

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos algumas construções elementares, como a soma de segmentos, multiplicação, divisão, construção da mediatriz de um segmento, bissetão de um ângulo, entre outras. Além disso, abordamos construções mais elaboradas que exigem as construções elementares para seu desenvolvimento. Também discutimos possíveis atividades que podem ser realizadas com alunos do Ensino Médio, relacionando as áreas de álgebra e geometria, interconectando os campos do conhecimento e buscando oferecer aos educandos ferramentas para uma melhor compreensão do estudo da matemática e seu desenvolvimento. Também é possível incluir o contexto histórico desses conhecimentos, a fim de evitar que o ensino da matemática se resuma à resolução de fórmulas e memorização de etapas, mostrando que o ensino da matemática, assim como qualquer área do conhecimento, está historicamente e socialmente determinado. Dessa forma, buscamos afastar o educando do chamado "ensino bancário" Freire (1994), que impõe uma dicotomia entre homem e mundo, distanciando os seres humanos da relação dialógica na construção do conhecimento. Esse modelo impõe à relação educador-educando uma certa posição de superioridade. O educador transfere o conhecimento ao educando como se esse não fosse uma pessoa inserida numa sociedade e contextos próprios, servindo aos interesses liberais de formar pessoas acríticas e passivas com relação ao conhecimento. Seria muita prepotência abordar todo esse tema em um trabalho de conclusão de curso e esperar que essa leitura seja suficiente para criar um senso crítico sobre o ensino-aprendizagem da matemática.

Abordar o estudo de números construtíveis por régua e compasso amplia o escopo do estudo da geometria nos cursos de matemática, o que, embora não seja revolucionário, visa expandir nossa visão sobre o desenvolvimento de teorias matemáticas e suas inter-relações, como, por exemplo, entre álgebra e geometria, aqui discutidos.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Jefferson David. **Números construtíveis e construções geométricas**. 2020. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Unesp, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Citado na p. 9.
- BORDIGNON, Liane; NASCIMENTO, Márcio Lima do. Geometria Axiomática. Notas de aula. São Carlos, 2021. Citado na p. 12.
- BOYER, C.B.; MERZBACH, U.C. **História da matemática**. 2. ed. [S.l.]: Edgard Blucher, 1996. Citado nas pp. 10, 11.
- DAVIS, Tom. Classical Geometric Constructions. Notas de aula. [S.l.], 2002. Disponível em: <<https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC3/construct.ps>>. Citado na p. 13.
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 25. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2002. Citado na p. 10.
- _____. **Pedagogia do Oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1994. Citado na p. 47.
- MARTIN, George E. **Geometric Constructions**. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1998. (Undergraduate Texts in Mathematics). Citado na p. 9.
- MIGUEL, Marcos José. **Construções com régua e compasso**. 2018. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. Citado na p. 24.
- NETO, Angelo Papa. **Geometria plana e construções geométricas**. Fortaleza: IFCE, 2017. Citado na p. 12.
- REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2008. Citado nas pp. 9, 37.

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil



Classe \LaTeX para documentos científicos segundo as normas ABNT
desenvolvido por Wladimir Seixas.