

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**Análise não linear geométrica e física global/local de pilares
de edifícios em concreto armado**

Angelo Giovanni Bonfim Corelhano

São Carlos
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**Análise não linear geométrica e física global/local de pilares
de edifícios em concreto armado**

Angelo Giovanni Bonfim Corelhano

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação
em Engenharia Civil da Universidade Federal de São
Carlos para obtenção do título de Doutor em
Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas e Geotecnia

Orientador: Prof. Dr. Fernando Menezes de
Almeida Filho

Coorientador: Prof. Dr. André Luis Christoforo

São Carlos

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado do candidato Angelo Giovanni Bonfim Corelhan, realizada em 07/02/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Fernando Menezes de Almeida Filho (UFSCar)

Prof. Dr. Marcelo de Araujo Ferreira (UFSCar)

Prof. Dr. Rodrigo Barros (UFRN)

Prof. Dr. Luiz Antônio Melgaço Nunes Branco (UFMG)

Prof. Dr. Rodrigo Gustavo Delalibera (UFU)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Aos meus pais, Antonio e Branca com amor e gratidão.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, meus pais e minha avó por me guiarem até aqui.

Ao excelente trabalho de orientação dos professores Dr. Fernando Menezes de Almeida Filho e Dr. André Luis Christoforo.

Aos meus grandes amigos de república durante os anos de graduação em Maringá: Géter, Moisés, Rodrigo e Walter.

Aos amigos da época do mestrado em São Carlos: Hugo, Wanderson e Rodrigo, com quem tive o privilégio de conviver durante o desenvolvimento do trabalho de mestrado.

A todos os professores que passaram pela minha formação, desde os primeiros anos de ensino fundamental até a pós-graduação.

A todas as pessoas que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

A UTFPR-CM pela concessão do afastamento integral para a realização deste trabalho.

Resumo

CORELHANO (2025). Análise não linear geométrica e física global/local de pilares de edifícios em concreto armado. Tese de Doutorado, 165 f., Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFSCar, SP.

Neste trabalho foram abordados os aspectos inerentes à análise não linear física e geométrica de pilares pertencentes a estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado. O trabalho focou a análise estrutural dos pilares por meio do uso de uma ferramenta computacional capaz de realizar uma análise não linear refinada, usando modelos usuais com o emprego do método dos elementos finitos. São avaliadas as reduções de inércia que ocorrem nos pilares, bem como os efeitos das não linearidades em análise global, e local de forma integrada em um único modelo. Os modelos foram pré-dimensionados de forma a apresentarem taxas de armadura, menores que a máxima permitida pela ABNT NBR 6118:2014. Foram analisados modelos com três diferentes relações entre lados de pilares, e três classes de resistência do concreto. Os resultados mostraram que a rigidez de vigas e pilares para a modelagem global é próxima às propostas pela ABNT NBR 6118:2014 para classe de resistência C25 e indica que são menores para classes de resistências maiores, além de indicar que a rigidez relativa viga/pilar é menor que 0,5 como dada pela referida normativa. Os efeitos de segunda ordem locais foram muito pequenos, mesmo para os modelos mais deslocáveis.

Palavras-chave: Concreto armado, pilares, não linearidade geométrica, não linearidade física.

Abstract

CORELHANO (2025). Nonlinear geometric and physical global/local analysis of reinforced concrete building columns. Doctoral Thesis, 165 f., Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFSCar, SP.

In this thesis, aspects inherent to the nonlinear physical and geometric analysis of columns of bracing structures for buildings in reinforced concrete will be addressed. The paper focused on the structural analysis of the columns through the use of a computational tool capable of performing rigorous non-linear analysis, studying conventional models using the finite element method. The inertia reductions in the columns are evaluated, as well as the effects of nonlinearities in global and local analysis in an integrated way in a single model. The models were previously designed to present reinforcement rates lower than the maximum allowed by ABNT NBR 6118:2014. Models with three different relationships between column sides and three concrete strength classes were analyzed. The results showed that the stiffness of beams and columns for global modeling is close to those proposed by ABNT NBR 6118:2014 for concrete C25 and indicates that they are lower for higher concrete classes, in addition to indicating that the relative stiffness beam/column is lower than 0.5 as given by the aforementioned standard. Local second-order effects were very small, even for the most displaceable models.

Keywords: Reinforced concrete, columns, geometric non-linearity, physical non-linearity.

Lista de Tabelas

Tabela 2-1: Rigidez penalizada ABNT NBR 6118:2014.....	31
Tabela 2-2: Rigidez penalizada ACI 318:2019.....	31
Tabela 2-3: Rigidez penalizada ACI 318:2019.....	32
Tabela 4-1: Coordenadas e rotações do nó extremo da viga engastada	93
Tabela 4-2: Propriedades do aço.....	94
Tabela 4-3: Propriedades dos concretos para NLF	94
Tabela 5-1: Propriedades do aço.....	97
Tabela 5-2: Propriedades dos concretos para análise estrutural	98
Tabela 5-3: Propriedades dos concretos para dimensionamento e NLF.....	98
Tabela 5-4: Cargas uniformemente distribuídas nas lajes	100
Tabela 5-5: Cargas lineares linearmente distribuídas nas vigas	100
Tabela 5-6: Parâmetros de cálculo da velocidade básica.	101
Tabela 5-7: Equações das Combinações de cálculo no ELU.....	102
Tabela 5-8: Cargas distribuídas nas vigas.....	104
Tabela 5-9: Parâmetros e valores dos coeficientes de arrasto.	104
Tabela 5-10: Parâmetros e valores de força do vento em cada pavimento.....	105
Tabela 5-11: Equações das Combinações de cálculo no ELU.....	105
Tabela 5-12: Cargas nas vigas com valores de cálculo	105
Tabela 5-13: Ação do vento com valores de cálculo.....	106
Tabela 5-14: Cargas distribuídas nas vigas.....	117
Tabela 5-15: Parâmetros e valores dos coeficientes de arrasto.....	117
Tabela 5-16: Parâmetros e valores de força do vento em cada pavimento.....	118
Tabela 5-17: Equações das Combinações de cálculo no ELU.....	118
Tabela 5-18: Cargas nas vigas com valores de cálculo	118
Tabela 5-19: Ação do vento com valores de cálculo.....	119
Tabela C-1: Propriedades do aço.....	158
Tabela C-2: Propriedades dos concretos para NLF	158
Tabela C-3: Deslocamentos horizontais dos pavimentos do pórtico	161

Lista de Figuras

Figura 1-1:Trecho de pórtico a), Momentos fletotes nas barras b), Modelo de pilar c)	17
Figura 1-2: Fluxograma da análise e dimensionamento	18
Figura 1-3: Fluxograma da análise e dimensionamento considerando o Método Geral	19
Figura 1-4:Fluxograma da análise e dimensionamento do modelo integrado.	20
Figura 2-1:Vinculação dos pilares isolados Vinculação dos pilares isolados	35
Figura 2-2: Vinculação dos pilares isolados.	37
Figura 3-1:Fluxograma da análise e dimensionamento considerando o Modelo	44
Figura 3-2: Planta de formas típica dos exemplos de aplicação.	45
Figura 3-3: Largura do edifício para o cálculo de I_1 e I_2	47
Figura 4-1: Graus de liberdade e sistema de coordenadas locais.	50
Figura 4-2: Sistema de coordenadas globais.	50
Figura 4-3: Nó mestre N, e nó K , a) e Movimento de corpo rígido do pavimento, b)	52
Figura 4-4: Discretização dos elementos estruturais.	60
Figura 4-5: Diagrama Tensão x Deformação do concreto com deformação de encurtamento.	61
Figura4-6: Diagrama Tensão x Deformação do concreto com deformação de alongamento.	63
Figura 4-7: Diagrama Tensão x Deformação simplificado do aço.	64
Figura 4-8: Domínios de deformação no Estado Limite Último	65
Figura 4-9: Seção transversal típica a), configuração de deformações na seção nos domínios 2, b) 3, c), 4, d), 4a, e) e 5, f)	66
Figura 4-10: Seção transversal, deformações, tensões e forças resultantes	69
Figura 4-11:Seção transversal dividida em fatias	70
Figura 4-12:Seção transversal típica, linha neutra e parâmetros geométricos.	72
Figura 4-13: Seção transversal dividida em elementos de área de concreto e barras de aço.	74
Figura 4-14:Posição de partida da linha neutra.	75
Figura 4-15: Posição da linha neutra dentro da seção.	76
Figura 4-16: Posição da linha neutra fora da seção.	77
Figura 4-17: Posição de partida da linha neutra para , a) e , b)	77
Figura 4-18: : Relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$.	80
Figura 4-19: Discretização, deslocamentos e esforços em um trecho da estrutura ..	82

Figura 4-20: Esforços, disposição de armaduras e relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ em um trecho da estrutura.....	83
Figura 4-21: Esforços, e rigidez em função das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ e da intensidade dos momentos em um trecho da estrutura.....	83
Figura 4-22: Curvatura da seção e as deformações de referência.....	84
Figura 4-23: Linha neutra e curvaturas.....	85
Figura 4-24: Rigidez secante sem linearização.....	87
Figura 4-25: Rigidez secante linearizada.....	88
Figura 4-26: Rigidez secante oblíqua.....	89
Figura 4-27: Viga engastada sujeita a momento aplicado na extremidade.....	92
Figura 4-28: Configurações deslocadas da viga em função do carregamento.....	93
Figura 4-29: Geometria, carregamento e seções do pórtico.....	94
Figura 4-30: Geometria, carregamento e seções do pórtico.....	95
Figura 5-1: Planta de formas típica dos exemplos de aplicação.....	98
Figura 5-2: Planta de formas do exemplo 1.....	103
Figura 5-3: Esquema de níveis do exemplo 1.....	103
Figura 5-4: Momentos fletores em torno de X: Pilar P7, combinação 1.....	106
Figura 5-5: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, combinação 1.....	107
Figura 5-6: Deslocamentos horizontais na direção X: Pilar P7, combinação 1.....	107
Figura 5-7: Deslocamentos horizontais na direção Z: Pilar P7, combinação 1.....	107
Figura 5-8: Momentos fletores em torno de X: Pilar P12, combinação 1.....	109
Figura 5-9: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, combinação 1.....	109
Figura 5-10: Deslocamentos horizontais na direção X: Pilar P12, combinação 1....	109
Figura 5-11: Deslocamentos horizontais na direção Z: Pilar P12, combinação 1....	110
Figura 5-12: Momentos fletores em torno de X: Pilar P7, combinação 3.....	110
Figura 5-13: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, combinação 3.....	111
Figura 5-14: Deslocamentos horizontais na direção X: Pilar P7, combinação 3.....	111
Figura 5-15: Deslocamentos horizontais na direção Z: Pilar P7, combinação 3.....	111
Figura 5-16: Momentos fletores em torno de X: Pilar P12, combinação 3.....	112
Figura 5-17: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, combinação 3.....	112
Figura 5-18: Deslocamentos horizontais na direção X: Pilar P12, combinação 3....	113
Figura 5-19: Deslocamentos horizontais na direção Z: Pilar P12, combinação 3....	113
Figura 5-20: Planta de formas dos modelos 19/76_C25, 19/76_C40, e 19/76_C70,	115
Figura 5-21: Planta de formas dos modelos 27/54_C25, 27/54_C40, e 27/54_C70,	116

Figura 5-22: Planta de formas dos modelos 38/38_C25, 38/38_C40, e 38/38_C70,	116
Figura 5-23: esquema de níveis do Exemplo 2.....	116
Figura 5-24: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 19/76_C25.....	119
Figura 5-25: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 19/76_C25	120
Figura 5-26: Relações entre esforços e deslocamentos: Pilar P7, modelo 19/76_C25	120
Figura 5-27: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 19/76_C40.....	120
Figura 5-28: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 19/76_C40	121
Figura 5-29: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 19/76_C40	121
Figura 5-30: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 19/76_C70.....	121
Figura 5-31: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 19/76_C70	122
Figura 5-32: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 19/76_C70	122
Figura 5-33: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 27/54_C25.....	123
Figura 5-34: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 27/54_C25	123
Figura 5-35: Relações entre esforços e deslocamentos: Pilar P7, modelo 27/54_C25	123
Figura 5-36: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 27/54_C40.....	124
Figura 5-37: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 27/54_C40	124
Figura 5-38: Relações entre esforços e deslocamentos: Pilar P7, modelo 27/54_C40	124
Figura 5-39: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 27/54_C70.....	125
Figura 5-40: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 27/54_C70	125
Figura 5-41: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 27/54_C70	125
Figura 5-42: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 38/38_C25.....	126
Figura 5-43: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 38/38_C25	126

Figura 5-44: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 38/38_C25	127
Figura 5-45: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 38/38_C40	127
Figura 5-46: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 38/38_C40	127
Figura 5-47: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 38/38_C40	128
Figura 5-48: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 38/38_C70	128
Figura 5-49: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 38/38_C70	128
Figura 5-50: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 38/38_C70	129
Figura 5-51: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 19/76_C25	130
Figura 5-52: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 19/76_C25	130
Figura 5-53: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 19/76_C25	130
Figura 5-54: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 19/76_C40	131
Figura 5-55: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 19/76_C40	131
Figura 5-56: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 19/76_C40	131
Figura 5-57: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 19/76_C70	132
Figura 5-58: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 19/76_C70	132
Figura 5-59: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 19/76_C70	132
Figura 5-60: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 27/54_C25	133
Figura 5-61: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 27/54_C25	133
Figura 5-62: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 27/54_C25	134
Figura 5-63: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 27/54_C40	134
Figura 5-64: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 27/54_C40	134
Figura 5-65: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 27/54_C40	135

Figura 5-66: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 27/54_C70	135
Figura 5-67: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 27/54_C70	135
Figura 5-68: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 27/54_C70	136
Figura 5-69: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 38/38_C25	136
Figura 5-70: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 38/38_C25	137
Figura 5-71: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 38/38_C25	137
Figura 5-72: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 38/38_C40	137
Figura 5-73: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 38/38_C40	138
Figura 5-74: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 38/38_C40	138
Figura 5-75: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 38/38_C70	138
Figura 5-76: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 38/38_C70	139
Figura 5-77: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 38/38_C70	139
Figura 5-78: Razões entre deslocamentos para NLG+NLF/ NLG+NBR.....	140
Figura 5-79: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para momentos na base P7	141
Figura 5-80: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para momentos no topo P7	141
Figura 5-81: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para momentos na base P12	142
Figura 5-82: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para momentos no topo P12.....	142
Figura 5-83: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para Normal no pilar P7	143
Figura 5-84: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para Normal no pilar P12	143
Figura C-1: Geometria e carregamento do pórtico apresentado em PINTO (2002)	159
Figura C-2: Discretização das barras do pórtico apresentado em PINTO (2002)....	160
Figura C-3: Deslocamento horizontal ao nível de cada pavimento: A	161
Figura C-4: Deslocamento horizontal ao nível de cada pavimento: B	162
Figura C-5: Deslocamento horizontal ao nível de cada pavimento: C	162

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	16
1.2	OBJETIVOS	21
1.2.1	<i>Objetivos específicos</i>	21
1.2.2	<i>Delimitação do trabalho</i>	21
1.3	JUSTIFICATIVA	23
1.4	ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS	24
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	25
2.2	VIGAS DE TIMOSHENKO	25
2.3	NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	26
2.4	NÃO LINEARIDADE FÍSICA	28
2.5	NÃO LINEARIDADE FÍSICA GLOBAL DO PONTO DE VISTA NORMATIVO	30
2.5.1	<i>ABNT NBR 6118:2014</i>	30
2.5.2	<i>ACI 318:2019</i>	31
2.5.3	<i>EN 1992-1-1: Eurocode 2</i>	32
2.6	NÃO LINEARIDADE FÍSICA LOCAL	33
2.7	PILARES EM CONCRETO ARMADO DO PONTO DE VISTA NORMATIVO	34
2.7.1	<i>ABNT NBR 6118:2014</i>	35
2.7.2	<i>ACI 318:2019</i>	36
2.7.3	<i>EN 1992-1-1: Eurocode 2</i>	36
2.8	CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO	38
3	METODOLOGIA	39
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE A FERRAMENTA COMPUTACIONAL	39
3.1.1	<i>Pórtico tridimensional</i>	39
3.1.2	<i>Não linearidade geométrica</i>	40
3.1.3	<i>Dimensionamento à flexão composta normal e oblíqua</i>	40
3.1.4	<i>Não linearidade Física</i>	40
3.2	ESTRATÉGIAS DE VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO	40
3.2.1	<i>Validação:</i>	40
3.2.2	<i>Análise dos exemplos de Aplicação:</i>	40
3.2.3	<i>Exemplos de Aplicação</i>	41
3.3	VALIDAÇÃO DAS ROTINAS	41
3.3.1	<i>Dimensionamento à Flexão composta Normal e Oblíqua</i>	41
3.3.2	<i>Verificação de resistência à Flexão composta Normal e Oblíqua</i>	41

3.3.3	<i>Diagramas Momento Normal Curvatura</i>	41
3.3.4	<i>Demais rotinas</i>	41
3.4	ANÁLISE DOS EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	42
3.4.1	<i>Geometria e entrada de dados</i>	42
3.4.2	<i>Análise inicial</i>	42
3.4.3	<i>Dimensionamento de armaduras de vigas e pilares</i>	43
3.4.4	<i>Análise refinada iterativa</i>	43
3.5	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	45
3.5.1	<i>Tipologia de estruturas analisadas</i>	45
3.5.2	<i>Ações</i>	46
3.5.3	<i>Parâmetros avaliados</i>	47
3.6	CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO	48
4	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	49
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	49
4.2	ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL E SISTEMA DE COORDENADAS	49
4.3	HIPÓTESE DE DIAFRAGMA RÍGIDO PARA OS PAVIMENTOS	52
4.4	CONSIDERAÇÃO DA DEFORMAÇÃO POR CISLHAMENTO	56
4.5	NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	56
4.6	DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA	59
4.7	MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS	61
4.7.1	<i>Concreto</i>	61
4.7.2	<i>Aço</i>	64
4.8	HIPÓTESES BÁSICAS	65
4.9	DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO ÀS SOLICITAÇÕES NORMAIS	67
4.9.1	<i>Dimensionamento à flexão simples</i>	68
4.9.2	<i>Verificação à flexão simples</i>	71
4.9.3	<i>Dimensionamento à flexão composta oblíqua</i>	71
4.9.4	<i>Verificação à flexão composta oblíqua</i>	79
4.10	NÃO LINEARIDADE FÍSICA	79
4.10.1	<i>Construção da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$</i>	84
4.10.2	<i>Rigidez por meio da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$</i>	86
4.10.3	<i>Roteiro para análise dos exemplos de validação</i>	91
4.10.4	<i>Roteiro para análise dos exemplos de aplicação</i>	91
4.11	VALIDAÇÃO DAS ROTINAS RELACIONADAS A NLG	92
4.12	VALIDAÇÃO DAS ROTINAS RELACIONADAS A NLG+NLF	94
4.13	CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO	95

5	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	97
5.1.1	<i>Propriedades dos materiais.....</i>	<i>97</i>
5.1.2	<i>Geometria dos exemplos.....</i>	<i>98</i>
5.1.3	<i>Ações</i>	<i>99</i>
5.2	EXEMPLO 1.....	103
5.2.1	<i>Materiais</i>	<i>103</i>
5.2.2	<i>Geometria</i>	<i>103</i>
5.2.3	<i>Elementos e variáveis analisados.....</i>	<i>104</i>
5.2.4	<i>Ações e combinações</i>	<i>104</i>
5.2.5	<i>Resultados.....</i>	<i>106</i>
5.3	EXEMPLO 2.....	115
5.3.1	<i>Materiais</i>	<i>115</i>
5.3.2	<i>Geometria</i>	<i>115</i>
5.3.3	<i>Elementos e variáveis analisadas.....</i>	<i>117</i>
5.3.4	<i>Ações e combinações</i>	<i>117</i>
5.3.5	<i>Resultados.....</i>	<i>119</i>
6	CONCLUSÕES	145
6.1	CONCLUSÕES.....	145
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	146
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	148
	APÊNDICES	152

1 Introdução

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise estrutural pode ser considerada a etapa mais importante na elaboração de um projeto estrutural, pois seus resultados são fundamentais para o dimensionamento, detalhamento e análise da estrutura em serviço. Tal afirmação senso comum entre uma série de autores. Consiste na determinação, avaliação e eventual validação da resposta da estrutura em função das ações que lhe foram impostas.

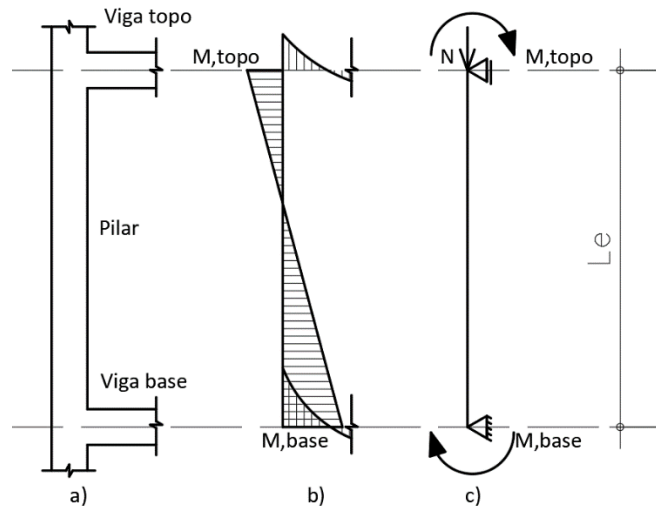
A análise estrutural está sempre atrelada a um modelo estrutural global que pode ser mais ou menos realista e preciso. O modelo estrutural é uma representação idealizada da estrutura por meio da adoção de uma série de modelos, idealizações e eventuais simplificações. Desde os anos 90, o meio técnico e científico tem usado o modelo global de pórtico tridimensional, com elementos de barra com seis graus de liberdade por nó para representar vigas e pilares. A influência das lajes no modelo global pode ser considerada por meio da hipótese de diafragma rígido, sem efetivamente estar presente no modelo global, ou mais recentemente, pode ser incorporada ao modelo global por meio de elementos de barra de grelha ou elementos finitos planos com ou sem a consideração da hipótese de diafragma rígido.

O meio científico, incentivado pelo aumento da capacidade de processamento dos microcomputadores, tem desenvolvido nas últimas décadas poderosas ferramentas computacionais de análise não linear de estruturas de concreto armado. Apesar do avanço científico, existe uma defasagem de alguns anos ou décadas entre tecnologias desenvolvidas e o seu emprego no meio técnico. As razões são diversas, tais como maior complexidade das rotinas envolvidas, maior necessidade de conhecimento das teorias de análise, maior tempo de processamento, e ajustes às rotinas de produção de projetos.

Mesmo com os avanços acima citados, ainda hoje, para a análise e dimensionamento de pilares são usados dois modelos estruturais distintos, um primeiro modelo global, que pode ou não contar com análise não linear, a depender da deslocabilidade horizontal do edifício, mas não é capaz de quantificar os efeitos locais das não linearidades e um segundo modelo local, onde o pilar é analisado isoladamente, com os esforços nas extremidades oriundos da primeira análise global. A figura 1-1 mostra os esforços na barra de pilar pertencente ao pórtico

e o modelo simplificado de barra isolada com os momentos fletores aplicados nas extremidades.

Figura 1-1: Trecho de pórtico a), Momentos fletotes nas barras b), Modelo de pilar c)

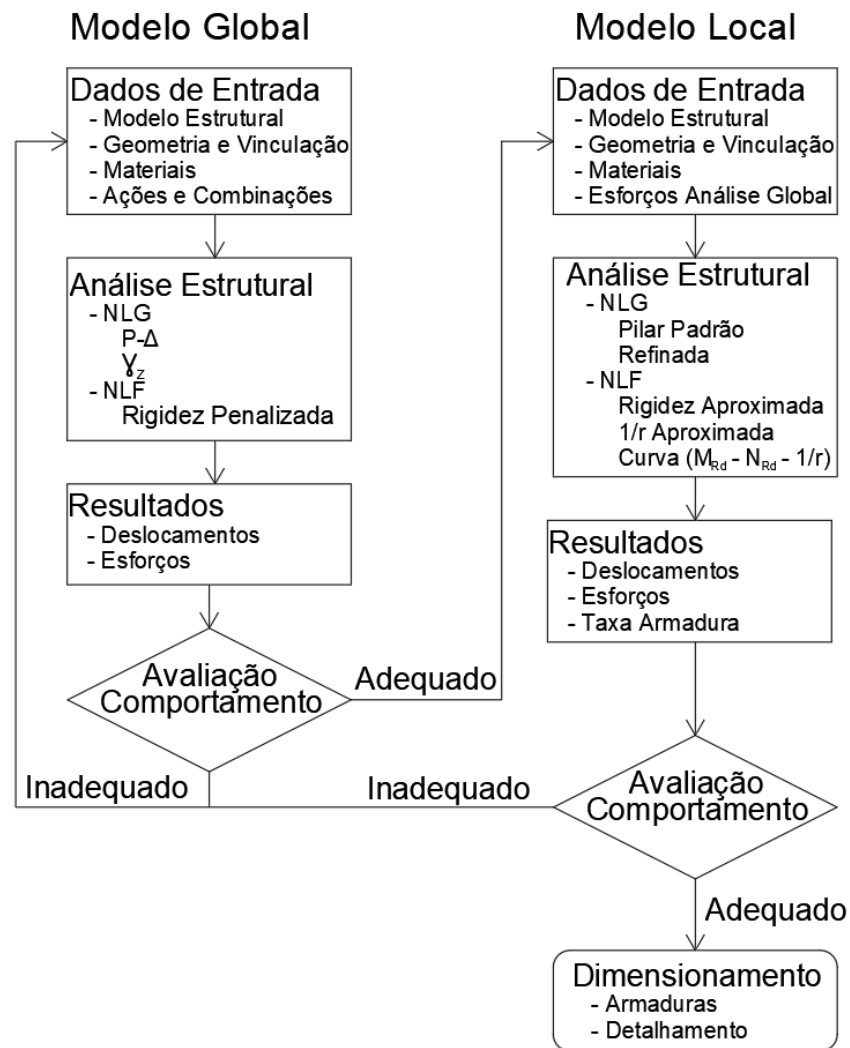


Fonte: Autor (2025)

Tradicionalmente a análise e dimensionamento dos elementos é feito de acordo com os fluxogramas das figuras 1-2 e 1-3, onde parte-se de um modelo global para a determinação dos esforços nas barras dos elementos estruturais, sendo que no caso dos pilares há a necessidade de uma segunda análise em escala local para a determinação dos efeitos de segunda ordem ao longo do tramo, entre pavimentos. A análise local pode ser realizada por meio de métodos simplificados tal como Pilar Padrão com Curvatura aproximada ou rigidez aproximada, ou, por meio de análise mais refinadas como o chamado Método Geral, que consiste em um tratamento mais refinado da não linearidade geométrica e da não linearidade física.

Por simplicidade, alguns termos repetidos ao longo do texto foram abreviados, sendo o método dos elementos finitos chamado de MEF, as não linearidades geométrica e física serão chamadas por NLG e NLF, respectivamente, e a relação Momento x Normal x Curvatura, chamada de $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$.

Figura 1-2: Fluxograma da análise e dimensionamento



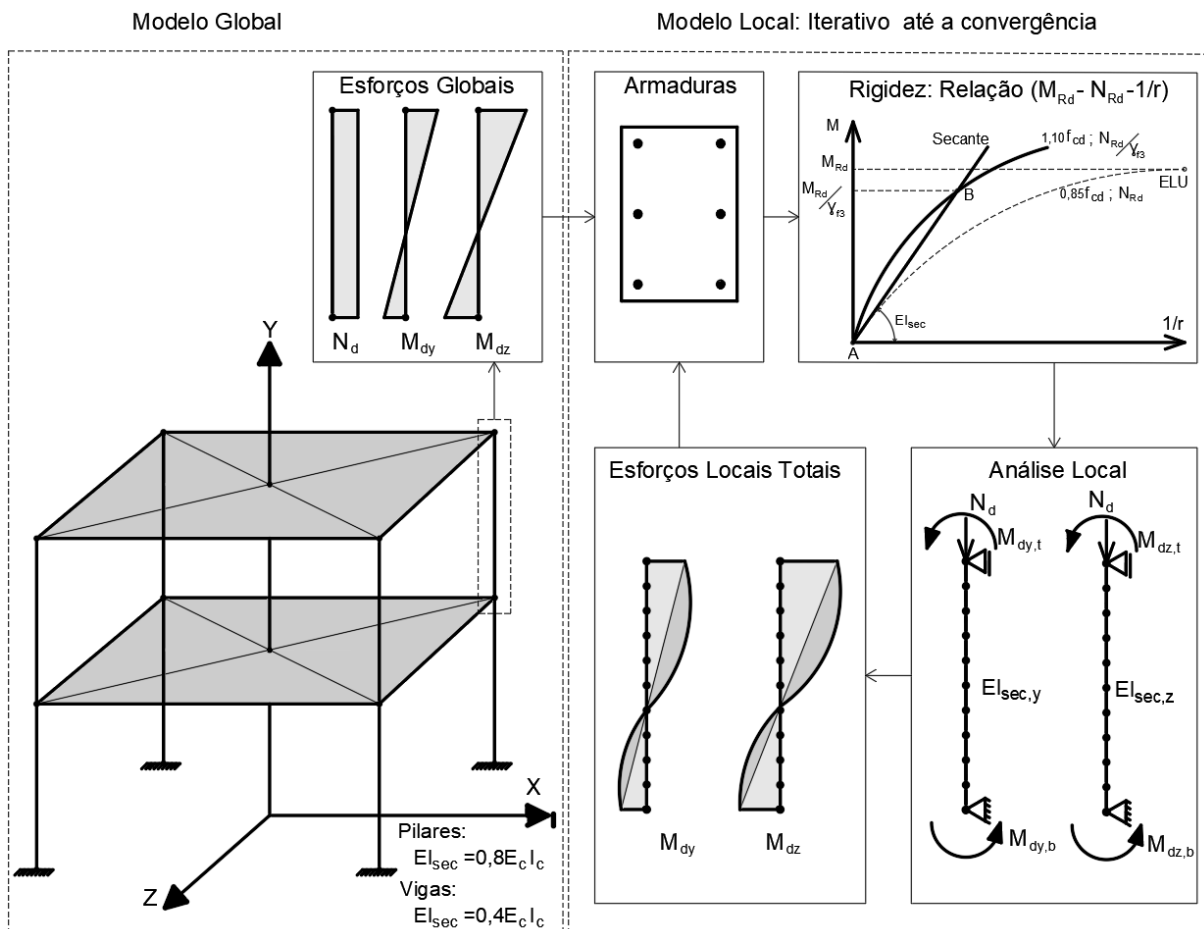
Fonte: O Autor (2025)

A metodologia acima descrita pode levar a uma perda da resposta mais próxima do comportamento real, uma vez que não há um modelo de referência físico consolidado. Na análise local não são consideradas as rigidezes da ligação do pilar com os trechos adjacentes ou fundações, ou com as vigas que se conectam a estes, assim, em geral, para a determinação dos efeitos das não linearidades os pilares são considerados biarticulados ou engastados na base e livres no topo.

A figura 1-3 mostra o fluxograma ilustrado da análise estrutural e dimensionamento de pilares considerando o Método Geral, onde parte-se de um modelo global considerando a NLG, e a NLF por meio da penalização da rigidez de vigas pilares e eventualmente lajes, para obtenção dos esforços nos elementos estruturais. Na sequência considera-se um modelo local onde o tramo de pilar tem a vinculação simplificada conforme citado anteriormente, e subdividido ao longo do comprimento. A NLG é considerada de forma refinada e a NLF por

meio da rigidez obtida pelas relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$. Após a análise local, em função dos esforços, é definida uma armadura para a seção, tal armadura possibilita a definição da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, em função de tal relação determinam-se as rigidezes, que são aplicadas ao modelo de pilar discretizado, que após análise estrutural, leva a novos diagramas de esforços, então uma nova armadura é dimensionada para tais esforços. O processo se repete até que haja convergência considerando uma tolerância adequada.

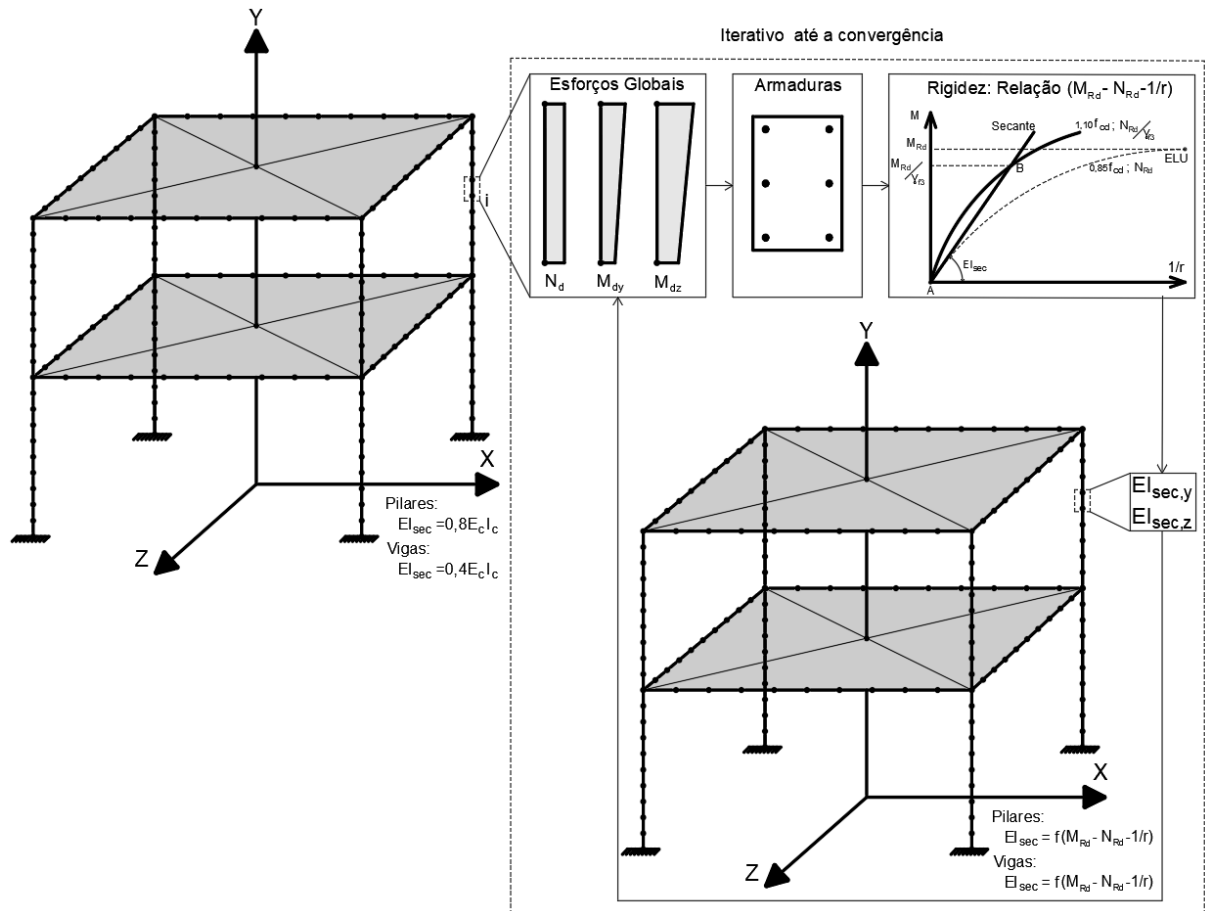
Figura 1-3: Fluxograma da análise e dimensionamento considerando o Método Geral



Fonte: O Autor (2025)

O trabalho focou a análise estrutural dos elementos por meio de uma ferramenta computacional capaz de realizar uma análise não linear refinada integrada que consiga determinar em um mesmo modelo global os efeitos não lineares geométricos e físicos globais e locais conforme fluxograma da figura 1-4 que mostra as principais etapas da análise proposta no trabalho.

Figura 1-4: Fluxograma da análise e dimensionamento do modelo integrado.



Fonte: O Autor (2025)

Considerando o fluxograma ilustrado da figura 1-4, para a análise integrada parte-se de um modelo global considerando a NLG, e a NLF por meio da penalização da rigidez de vigas pilares e eventualmente lajes, para obtenção dos esforços nos elementos estruturais. Na sequência, em função dos esforços, é definida uma armadura para a seção de cada elemento, tal armadura possibilita a definição da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, em função de tal relação determinam-se as rigidezes, que são aplicadas ao modelo global, que após análise estrutural considerando NLG e NLF com as rigidezes obtidas das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ leva a novos diagramas de esforços, então uma nova armadura é dimensionada para tais esforços. O processo se repete até que haja convergência considerando uma tolerância adequada.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral do trabalho foi a adaptação e desenvolvimento de uma ferramenta computacional que possibilitasse o estudo do comportamento de pilares de concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua, pertencentes aos edifícios multipavimentos considerando a análise não linear (física e geométrica) em uma única etapa, sendo esta uma alternativa à tradicional forma de análise de pilares que é dividida em duas etapas, global e local.

1.2.1 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo principal, os seguintes objetivos específicos foram delimitados:

- Adaptação do código existente desenvolvido por CORELHANO (2010) em FORTRAN, que era capaz de realizar análise não linear geométrica de pórticos tridimensionais e análise não linear física em elementos submetidos à flexão composta normal, além da consideração da hipótese de diafragma rígido para os pavimentos;
- Implementação de rotinas para o dimensionamento de seções retangulares submetidas à flexão composta normal e flexão composta oblíqua;
- Implementação de rotinas para a análise não linear física para barras submetidas à flexão composta normal e oblíqua por meio das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$;
- Validação da ferramenta dentro de seu campo de aplicação por meio da comparação dos resultados obtidos pela ferramenta com estudos numéricos da bibliografia correlata por meio da verificação de esforços resistentes e deslocamentos;
- Análise de exemplos de aplicação para avaliação dos parâmetros estabelecidos nos objetivos principais, contemplando a análise e dimensionamento de elementos de vigas e pilares.

Tais análises foram realizadas considerando as prescrições da ABNT NBR 6118:2014, e foram avaliadas as influências dos seguintes parâmetros: Esbeltez dos pilares, resistência à compressão do concreto, intensidade da força normal, posição dos pilares em planta, e relação entre lados das seções dos pilares

1.2.2 Delimitação do trabalho

A ferramenta desenvolvida ao longo do trabalho foi capaz de realizar análises não lineares física e geométrica de estruturas reticuladas pertencentes a edifícios multipavimentos considerando pilares e vigas com seções retangulares. Foram usados elementos de barra de

pórtico tridimensional com seis graus de liberdade por nó. Foram consideradas ações estáticas verticais e horizontais (vento e desaprumo). As lajes não foram incorporadas nos modelos, e sua influência no sistema de contraventamento foi considerada por meio da imposição da hipótese de diafragmas rígidos nos pavimentos.

Do ponto de vista normativo foi considerada a versão de 2014 da ABNT NBR 6118:2014, pois a atualização de 2023 não contemplam itens abordados no trabalho, com exceção de um fator de redução de resistência do concreto com resistências maiores que 40 MPa que é objeto de discórdia do meio técnico e científico.

Do ponto de vista dos materiais, adotaram-se os modelos constitutivos dados pela ABNT NBR 6118:2014, embora haja vasta bibliografia com modelos mais precisos, optou-se pelos modelos normativos, pois a abordagem do trabalho tem um enfoque maior nos aspectos de análise e dimensionamento voltados aos projetos de estruturas. Foram considerados os concretos das classes de resistência I e II, e armaduras passivas.

As seções foram discretizadas em pequenas áreas de aço e concreto, e a integração das tensões para o cálculo dos esforços resistentes foi feito numericamente. Foram contempladas seções retangulares para vigas e pilares, sendo que para as vigas as armaduras podem ser simples ou duplas, distribuídas junto ao topo e à base, e os pilares que estiverem submetidos à flexão composta, as armaduras podem ser assimétricas distribuídas de maneira independentes nas faces verticais e horizontais, e para os pilares submetidos à flexão composta oblíqua, as armaduras foram simétricas e distribuídas de maneira independentes nas faces verticais e horizontais.

As validações foram feitas em etapas, uma vez que não há modelos experimentais de pórticos tridimensionais para comparação dos resultados do modelo global. O uso de modelo numérico também é inviável, pois os softwares de análise são incapazes de representar adequadamente o comportamento das seções de acordo com a teoria do concreto armado, considerando a variação das deformações de acordo com os domínios de deformação até atingir o Estado Limite Último.

Os exemplos numéricos foram divididos em dois grandes grupos. O primeiro em sua maioria relacionado às rotinas de verificação de esforços resistentes e deslocamentos, úteis às validações da ferramenta numérica. O segundo grupo está relacionado aos exemplos de aplicação, onde promoveu-se análise e dimensionamento dos elementos considerando a ação conjunta e integrada das não linearidades.

1.3 JUSTIFICATIVA

A evolução da concepção arquitetônica tem levado a soluções estruturais cada vez mais ousadas e esbeltas. A busca pelo equilíbrio entre segurança e economia tem exigido um grau crescente de aprimoramento dos métodos de análise empregados. Desta forma, os métodos de análise, dimensionamento, e detalhamento de estruturas evoluíram de forma considerável. Apesar da evolução nos métodos em geral, ainda há alguns aspectos que demandam atenção do meio científico e técnico, como a consideração dos efeitos de segunda ordem local em pilares, tema contemplado por extensa bibliografia, mas que ainda possui simplificações que não condizem com o avanço e sofisticação das ferramentas disponíveis.

Existem diversos trabalhos referentes às não linearidades geométrica e física, além da consideração dos efeitos construtivos de elementos estruturais de concreto pertencentes a pórticos planos e tridimensionais, mas ainda há carência de estudos sobre o efeito conjunto em um único modelo destes efeitos em escala global e local, bem como de indicadores de parâmetros que possam ser empregados em análises simplificadas. (KIMURA: 2019; CORELHANO: 2010)

No meio técnico, por falta de informações específicas, as não linearidades são tratadas em modelos distintos, primeiramente em um modelo global e posteriormente em modelos locais isolados onde a ligação dos pilares com seus trechos adjacentes e vigas são tratados como rótulas, levando a uma diminuição da rigidez do trecho analisado e conseqüente maiores efeitos de segunda ordem locais. (FUSCO, 1981; ARAUJO, 1993; FRANÇA, 1991; KIMURA: 2019)

Simplificações similares, tais como: as rótulas com alguma variação no grau de sofisticação, são prescritas em vasta bibliografia, por exemplo: (ARAUJO, 1993; KIMURA, 2019), inclusive nas principais normativas correlatas tais como ABNT NBR 6118:2014, ACI 318:2019, e EN 1992-1-1: Eurocode 2.

Os modelos experimentais presentes na bibliografia, como os de WILBY e PANDIT (1967), MACGREGOR e HAGE (1977). VECHIO e EMARA (1992), tratam de pórticos bidimensionais submetidos a ações horizontais e verticais simultâneas com o intuito da determinação dos deslocamentos horizontais no nível dos pavimentos além da proposição de valores de rigidez equivalente para análises simplificadas. Há uma lacuna no que diz respeito a modelos experimentais de modelos de pórtico tridimensional para análises dos efeitos globais e locais. Assim não há modelos de referência para eventuais calibrações do modelo numérico.

Por isso, o presente trabalho visou estudar o comportamento conjunto das não linearidades em uma análise global e local integradas adotando para a não linearidade

geométrica uma formulação consolidada e amplamente usada em pesquisas, além de modelos constitutivos normativos consolidados. Para a análise não linear geométrica é usada a formulação de WEN e RAMIZADEH (1983), e para a análise não linear física são usados os modelos constitutivos do aço e concreto prescritos pela ABNT NBR 6118:2014.

1.4 ORGANIZAÇÃO DOS CAPÍTULOS

No segundo capítulo é mostrada a revisão bibliográfica, sendo abordados os aspectos da modelagem de estruturas tridimensionais de edifícios multipavimentos e o desenvolvimento das análises não lineares geométrica e física.

No terceiro capítulo é feita uma descrição generalista dos aspectos considerados na modelagem, análise, e dimensionamento das estruturas considerando os aspectos relacionados à análise não linear geométrica em pórticos tridimensionais.

No quarto capítulo são mostrados os aspectos relativos a implementação numérica / computacional, assim como a formulação utilizada para a análise não linear física, bem como os modelos constitutivos do aço e do concreto com as principais rotinas, organização, fluxogramas e os exemplos de validação dentro dos respectivos campos de aplicação para as análises não lineares geométrica e física.

No quinto capítulo são mostradas as estruturas analisadas e utilizadas para o estudo da influência da análise integrada dos pilares. São mostrados dois exemplos, sendo o primeiro com 4 pavimentos e uma única classe de resistência do concreto, e o segundo com seis pavimentos e uma combinação de três seções transversais de pilares com três classes de resistência do concreto.

No sexto capítulo são mostradas as conclusões do trabalho, bem como algumas sugestões para futuros trabalhos de pesquisa.

Na sequência é mostrada a bibliografia consultada para o desenvolvimento da pesquisa.

Nos apêndices são mostrados detalhes mais extensos das formulações empregadas, os exemplos de validação dentro dos respectivos campos de aplicação, além dos dados mais específicos e detalhados dos resultados dos exemplos de aplicação.

2 Revisão bibliográfica

A revisão da literatura foi dividida em tópicos relacionados a cada um dos grupos de temas estudados ao longo do trabalho. Alguns dos temas foram estudados em conjunto com áreas correlatas impossibilitando que sejam mostrados de forma completamente isolada, assim são mostrados considerando o tema principal do estudo.

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A pesquisa abordou várias teorias e metodologias necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Cada uma destas encontra-se em diferentes estágios de evolução e entendimento, sendo que algumas estão consolidadas há algumas décadas, como por exemplo a consideração da deformação por força cortante em barras de pórtico tridimensional, assim como a análise não linear geométrica de pórticos tridimensionais. Por outro lado, algumas das metodologias que foram usadas neste trabalho ainda carecem de avanços em seu entendimento, são os casos da definição da rigidez em barras sob flexão composta oblíqua e a deslocabilidade de modelos isolados de pilares. (CORRÊA, 1991; CORELHANO, 2010; KIMURA, 2019)

2.2 VIGAS DE TIMOSHENKO

A teoria tradicionalmente utilizada para a flexão de elementos de barra, conhecida como teoria de Euler-Bernoulli, data de 1705. A teoria de viga de Timoshenko, que considera a deformação por cisalhamento, foi exposta inicialmente pelo autor em 1921. Em seu artigo, já se colocava a necessidade de um fator de forma, que introduzisse os efeitos da tensão de cisalhamento.

Do ponto de vista da solução via métodos numéricos, vários autores propuseram elementos finitos para a vigas de Timoshenko, podendo-se citar NICKEL & SECOR (1972) e TESSLER & DONG (1981), dentre outros. As formulações diferem entre si apenas na escolha da função de interpolação utilizada para aproximar os deslocamentos transversais e as rotações.

O modelo mais simples para a formulação em elementos finitos, conforme visto em BATHE (1996), é aquele que considera interpolações lineares tanto para os deslocamentos

transversais, quanto para as rotações. No entanto, este modelo se mostra muito rígido para as vigas pouco deformáveis a força cortante. Este comportamento acarreta o bloqueio da solução ou travamento, conhecido como o efeito *shear locking*. O travamento acontece por causa da inconsistência da ordem das funções de deslocamentos transversais e as respectivas rotações. Alguns artifícios matemáticos foram propostos para superá-lo, podendo-se utilizar uma função de interpolação de mesmo grau tanto para os deslocamentos quanto para as rotações, mas utilizando um polinômio de menor grau para a distorção.

NARAYANASWAMI & ADELMAN (1974), concluíram que em qualquer formulação do MEF, em que as deformações causadas por força cortante são consideradas, é essencial que a rotação da reta normal (e não a derivada da linha elástica no ponto) seja tomada como grau de liberdade. Este problema nasce do fato de ser necessária, em um mesmo nó, a continuidade de quaisquer grandezas que se tome como grau de liberdade; se isto não acontecer, a formulação em elementos finitos torna-se inconsistente.

Já que os diagramas de força cortante têm descontinuidades na presença de cargas concentradas transversais e a distorção da seção é proporcional a este esforço, a rotação não é contínua e não pode ser utilizada como parâmetro nodal. Neste trabalho foi empregada a formulação de GERE & WEAVER (1987), a qual leva em consideração o deslocamento total, (flexão mais força cortante), e a rotação associada exclusivamente à flexão. Vale ressaltar que não há literatura técnica mais recente sobre melhorias no modelo de vigas de Timoshenko, por esta razão foi adotado este modelo.

2.3 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Com a evolução dos métodos de análise e do poder de processamento dos microcomputadores, a não linearidade geométrica tem sido incorporada de forma gradual aos projetos de edifícios, embora ainda haja defasagem entre as teorias já consolidadas e as efetivamente empregadas nas rotinas dos escritórios de engenharia ou em softwares comerciais de cálculo e detalhamento de estruturas de concreto armado. (CORRÊA, 1991; CORELHANO, 2010).

Nesta revisão não foram abordadas as pesquisas relacionadas ao método dos elementos de contorno, ou método dos elementos finitos posicional, bem como elementos planos ou tridimensionais.

O trabalho de TURNER et al (1956), considerado pioneiro na apresentação dos fundamentos do MEF aliado ao desenvolvimento da linguagem FORTRAN e a possibilidade de manipulação de um número cada vez maior de variáveis, impulsionou o desenvolvimento

de trabalhos na área de engenharia de estruturas. TURNER et al (1960) publica o primeiro trabalho em que a NLG é tratada via MEF.

MARTIN (1965) introduz o conceito de modelo incremental para NLG de pórticos, no qual a deformação inicial em cada incremento é considerada constante e relacionada à força normal.

MALLET & MARÇAL (1968) desenvolvem o formalismo das matrizes incrementais, empregando o conceito de rigidez tangente e incluindo na matriz de rigidez os termos quadráticos dos deslocamentos.

JENNING (1968) emprega coordenadas eulerianas na formulação da matriz de rigidez tangente, enquanto POWELL (1969), também empregando coordenadas eulerianas, separa os deslocamentos associados às deformações e os de corpo rígido, permitindo, assim, empregar sua formulação para grandes rotações dos nós.

ORAN (1973) apresenta matriz de rigidez tangente para pórticos planos, posteriormente estendida a pórticos tridimensionais, mas alertando para a não comutatividade das rotações no espaço 3D.

ARGYRIS et al (1978) introduzem o conceito de graus de liberdade naturais, separando os deslocamentos oriundos de deformação e os de corpo rígido, estendendo a formulação às estruturas de pórticos tridimensionais mediante o tratamento do problema da não comutatividade de rotações.

WEN et al (1983) apresentam as matrizes de rigidez tangente e secante para pórticos planos e tridimensionais baseadas em uma formulação lagrangeana para pequenas rotações, dispensando um tratamento vetorial às rotações no espaço 3D.

PIMENTA (1989) abrange vários aspectos da análise não linear de pórticos planos sem restrição à ordem de grandeza dos deslocamentos envolvidos. Mais tarde tal formulação seria adaptada e estendida para pórticos tridimensionais pelo referido autor.

CORRÊA (1991) através da formulação mostrada em WEN et al (1983) desenvolve código computacional em FORTRAN para análise não linear geométrica de estruturas tridimensionais de edifícios.

SOLER (1995) apresenta teoria sobre barras retas no espaço 3D, aplicável a estruturas de pórticos tridimensionais; o tratamento das rotações é feito de forma lagrangeana através da fórmula de Euler-Rodrigues, sendo a teoria geometricamente exata.

PAULA (2001) estuda, a partir do emprego do MEF, as formas lagrangeana e euleriana das expressões do equilíbrio. Questões quanto à estabilidade estrutural também são abordadas em seu trabalho.

A partir do fim da década de 90, os trabalhos dedicados estritamente à NLG via MEF para barras deram lugar a trabalhos com tratamento integrado da NLG e NLF.

Outros trabalhos mais recentes abordando estritamente a NLG via MEF tratam de elementos planos ou tridimensionais. Há ainda trabalhos estritamente sobre a NLG de elementos de barra ou planos, mas usando abordagens via Método dos elementos finitos posicionais ou método dos elementos de contorno. No presente trabalho, como será visto no capítulo 3, empregou-se uma formulação de NLG via MEF para barras de pórtico tridimensional, desenvolvida por WEN et al (1983). Tal formulação foi adotada tendo em vista sua eficácia e relativa simplicidade de implementação evidenciados nos trabalhos de CORRÊA (1991) e CORELHANO (2010). Para estruturas típicas de edifícios em concreto armado, a convergência em um único passo de carregamento é alcançada em três a quatro iterações. Em CORELHANO (2010) foi mostrado que para problemas de grandes deslocamentos e grandes giros, desde que o carregamento seja aplicado de forma incremental e a estrutura seja adequadamente discretizada, os resultados obtidos foram teoricamente exatos em relação aos modelos analíticos dadas as devidas idealizações.

2.4 NÃO LINEARIDADE FÍSICA

A implementação de códigos que possibilitem análise da NLF ganhou espaço a partir do final da década de 90, sendo o seu desenvolvimento predominantemente posterior ao início das análises não linear geométricas, em geral os trabalhos contemplam o acoplamento das duas não linearidades, inicialmente em pórticos planos e posteriormente em elementos planos como lajes e pilares parede. Esperava-se que o desenvolvimento do acoplamento entre NLG e NLF ocorreria nos anos seguintes, mas devido às dificuldades relacionadas à flexão composta oblíqua não há trabalhos que contemplem de maneira refinada a interação entre NLG e NLF nas análises globais.

BRANSON (1963) é o autor de uma das metodologias mais difundidas para a determinação da inércia efetiva de vigas e lajes unidirecionais.

ARGYRIS (1965) estuda a NLG e NLF de elementos pertencentes a pórticos planos.

Diversos autores mais recentes desenvolveram códigos eficientes para o tratamento das não linearidades física e geométrica de pórticos planos sendo alguns deles: VECCHIO & EMARA (1992), RASHEED & DINNO (1994). No SET/EESC/USP podem ser citados vários trabalhos que abordam este tipo de análise, dentre eles, SILVA (1996), que desenvolveu rotina computacional capaz de realizar NLG via MEF e NLF em pórticos planos. A NLF foi abordada através do método das fatias, onde a seção transversal é dividida em fatias, de aço e concreto, sendo que cada uma destas conta com modelo constitutivo independente. Ao final foram analisados pórticos planos através do software desenvolvido pelo autor usando sua análise refinada com pórticos modelados considerando a NLF de forma simplificada com a

rigidez de vigas e pilares multiplicadas por um fator menor que a unidade, sugeridos por MACGREGOR e HAGE (1977). Tais valores de penalização de rigidez acabaram sendo incorporados nas normativas brasileira e americana, sendo para vigas 0,40, e para pilares 0,80.

PAULA (2001), faz o acoplamento da NLG à NLF para pórticos planos em concreto armado via MEF, foram realizadas análises estáticas e dinâmicas. O tratamento da NLF foi realizado através da mecânica do dano, com modelos propostos por Mazars e La Borderie. Ao final a autora constatou boa representatividade dos modelos de dano quando comparados a resultados experimentais, sendo o modelo de La Bordeire mais preciso.

PINTO (2002), usou a mesma formulação empregada por SILVA (1996), para realizar um estudo paramétrico em pórticos planos em concreto armado. Variou-se as taxas de armadura bem como a geometria dos pórticos, ao final, verificou-se a mesma tendência observada por SILVA (1996), onde os resultados foram muito próximos aos de análises simplificadas considerando os redutores de rigidez propostos por MACGREGOR e HAGE (1977)

CORELHANO (2010), analisou a rigidez efetiva de paredes pertencentes a núcleos rígidos de edifícios altos. Embora a análise tenha sido realizada em pórticos tridimensionais, as paredes dos núcleos foram discretizadas de acordo com o proposto por YAGUI (1971), onde cada parede tem o comportamento de pilar submetido a flexão composta normal. Para o tratamento da NLG foi empregada a teoria de WEN e RAMIZADEH (1983), válida para pórticos tridimensionais, a NLF foi tratada pelo método das fatias, válido apenas para barras submetidas à flexão composta normal. Os modelos constitutivos empregados foram os mesmos usados por SILVA (1996) e PINTO (2002). Ao final conclui-se que para as paredes dos núcleos, a rigidez efetiva seria de 90% da rigidez bruta.

JUNGES (2016), adaptou e implementou um sistema computacional capaz de realizar análises não lineares física e geométrica refinadas via MEF em pórticos tridimensionais compostos por barras considerando o efeito de diafragma dos pavimentos. Para a consideração da NLF as seções foram discretizadas em filamentos sob estado uniaxial de deformações de concreto e aço com modelos constitutivos independentes, para o concreto pode ser considerado o confinamento dado pelos estribos. A não linearidade geométrica segue a Formulação Lagrangeana Total. O trabalho avaliou os efeitos conjuntos da NLG e NLF, a consideração de diafragma rígido na modelagem dos pavimentos; o efeito da contribuição da laje na rigidez à flexão das vigas; e o efeito de confinamento do concreto propiciado pelos estribos nos pilares.

GOMES (2019) por meio de uma ferramenta computacional capaz de realizar análise não linear física considerando a relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ em pórticos bidimensionais fez a comparação entre os valores de rigidez secante penalizadas proposta pela ABNT NBR 6118:2014, e a rigidez secante obtida pelas relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, tanto para os pilares como para as vigas. Foram estudadas três estruturas, sendo uma viga contínua com dois vãos, um pilar engastado na base e livre no topo e um pórtico plano. Os resultados obtidos para os redutores de rigidez de vigas e pilares são menores que os obtidos pelos demais autores citados ao longo do capítulo, sendo que para vigas, foi de 0,15 e para pilares 0,23.

Ao longo deste item, foi feito um breve histórico dos trabalhos desenvolvidos na linha em que o presente trabalho está inserido. Fica claro o atual nível de desenvolvimento e grande quantidade de trabalhos referentes ao tratamento das NLG e NLF de pórticos planos e modelagem tridimensional de estruturas levando em consideração a NLG. A realização deste trabalho é justificada lacuna existente referente ao tratamento conjunto da NLG e NLF em pórticos tridimensionais.

2.5 NÃO LINEARIDADE FÍSICA GLOBAL DO PONTO DE VISTA NORMATIVO

Do ponto de vista normativo o presente trabalho abrange três normativas, sendo elas a ABNT NBR 6118:2014, ACI 318:2019, e EN 1992-1-1: Eurocode 2. A seguir são discutidos os aspectos relacionados à consideração da NLF para as análises globais de acordo com cada uma das normativas:

2.5.1 ABNT NBR 6118:2014

A normativa nacional prescreve que a NLF pode ser considerada de forma simplificada através da multiplicação da inércia bruta dos elementos por coeficientes de penalização. Análises refinadas podem ser realizadas, mas não há parâmetros ou referências indicadas na normativa, por essa razão não serão discutidas

Para a determinação de esforços no Estado Limite Último, para estruturas reticuladas com número de pavimentos maior ou igual a quatro, as rigidezes secantes a serem consideradas na análise global são mostradas na tabela 2-1.

Tabela 2-1: Rigidez penalizada ABNT NBR 6118:2014

Elementos	Rigidez Secante
Lajes	$EI_{SEC} = 0,3E_C I_C$
Vigas com As maior que As'	$EI_{SEC} = 0,4E_C I_C$
Vigas com As iguais a As'	$EI_{SEC} = 0,5E_C I_C$
Pilares	$EI_{SEC} = 0,8E_C I_C$

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118:2014

Sendo:

EI_{SEC} : Rigidez Secante;

E_C : Módulo de elasticidade representativo do concreto;

I_C : Inércia bruta da seção (incluindo abas de seção T).

Para o Estado Limite de Serviço para deslocamentos horizontais a ABNT NBR 6118:2014 não estabelece penalizador para as rigidezes.

2.5.2 ACI 318:2019

A normativa americana prescreve que a NLF pode ser considerada de forma simplificada através da multiplicação da inércia bruta dos elementos por coeficientes de penalização. Análises refinadas podem ser realizadas, mas, assim como a normativa nacional, não há indicação de parâmetros e metodologias específicas.

Para a determinação de esforços no Estado Limite Último, as rigidezes secantes a serem consideradas na análise global podem ser determinados considerando os valores dados na tabela 2-2 ou alternativamente os valores dados pela tabela 2-3, onde os valores dependem de uma análise e dimensionamento prévios, tornando o processo iterativo.

Tabela 2-2: Rigidez penalizada ACI 318:2019

Elementos	Momento de Inércia
Lajes	$0,25I_g$
Vigas	$0,35I_g$
Paredes não fissuradas	$0,70I_g$
Paredes fissuradas	$0,35I_g$
Pilares	$0,70I_g$

Fonte: Adaptado de ACI 318:2019

Tabela 2-3: Rigidez penalizada ACI 318:2019

Elementos	Mínimo	Momento de Inércia	Máximo
Vigas e Lajes	$0,25I_g$	$(0,10 + 25\rho) \left(1,2 - 0,2 \frac{b_w}{d}\right) I_g$	$0,50I_g$
Pilares e Paredes	$0,35I_g$	$\left(0,8 + 25 \frac{A_{st}}{A_g}\right) \left(1 - \frac{M_u}{P_u h} - 0,5 \frac{P_u}{P_0}\right) I_g$	$0,875I_g$

Fonte: Adaptado de ACI 318:2019

Sendo:

I_g : Inércia bruta;

h : Altura da seção;

b_w : Largura da mesa;

d : Altura útil da seção;

ρ : Taxa de armadura longitudinal;

A_{st} : Área total de armadura passiva na seção;

A_g : Área da seção bruta;

M_u : Momento de cálculo atuante na seção;

P_u : Força normal de cálculo atuante na seção;

P_0 : Força normal nominal resistente, sem excentricidade.

Para o Estado Limite de Serviço para deslocamentos horizontais o ACI 318:2019, prescreve que pode-se usar os valores de momento de inércia da tabela 2-2 multiplicados por 1,40, ou usar alguma metodologia mais precisa, embora assim como na situação de Estado Limite Último também não indique parâmetros para tal análise.

2.5.3 EN 1992-1-1: Eurocode 2

A normativa europeia cita, que em caso de necessidade de análise não linear, a NLF pode ser considerada de forma simplificada por meio da multiplicação do momento de inércia bruto dos elementos por coeficientes de penalização, mas não estabelece ou indica referência para tais valores de penalização. Análises refinadas podem ser realizadas, mas, assim como as demais normativas consultadas neste trabalho, não apresenta parâmetros ou metodologias para tais análises. Assim, pode-se entender que nos projetos europeus, na grande maioria das situações, evita-se que a estrutura de contraventamento apresente efeitos de segunda ordem significativos.

2.6 NÃO LINEARIDADE FÍSICA LOCAL

Para o dimensionamento dos pilares, além do desafio relacionado às dificuldades inerentes à flexão composta oblíqua, na maioria dos casos há a necessidade da avaliação dos efeitos de segunda ordem locais. Com a evolução das metodologias e ferramentas de cálculo, os desafios relacionados à flexão composta oblíqua parecem solucionados considerando as simplificações impostas, mesmo seções com geometria complexa. No entanto, os desafios relacionados aos esforços de segunda ordem locais ainda não estão completamente solucionados, sendo tema de estudo até os dias atuais. (ARAÚJO, 1993; KIMURA, 2019)

As dificuldades na determinação dos efeitos de segunda ordem locais estão relacionadas principalmente com a determinação da rigidez das seções submetidas à flexão composta oblíqua e ao cálculo dos deslocamentos horizontais no modelo isolado. Segundo ARAÚJO (1993) para o concreto armado, a rigidez à flexão varia ao longo do eixo da barra e depende, além de outros fatores, dos valores do momento fletor e da força normal que solicitam a seção. Assim, torna-se impraticável definir uma solução analítica para a equação diferencial. A seguir mostram-se os principais trabalhos sobre o estudo da rigidez das seções submetidas à flexão composta oblíqua.

FRANÇA (1984), em seu trabalho de mestrado realizou um estudo detalhado das relações momento x curvatura e força normal x deformação longitudinal e ao final apresentou uma proposta de formulação geral e integrada das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ em peças submetidas à flexão composta oblíqua.

Posteriormente, em seu trabalho de doutorado, FRANÇA (1991), propôs a linearização do diagrama $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, e seu desacoplamento da flexão composta oblíqua em duas situações de flexão composta normal. O autor verificou que tal simplificação além de facilitar as rotinas de cálculo era conservadora. Outra importante contribuição do autor no mesmo trabalho foi a proposição do método simplificado chamado pilar padrão melhorado, onde a estimativa da rigidez foi baseada nos estudos sobre a relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$. É importante notar que embora os trabalhos de FRANÇA (1984) e FRANÇA (1991), tenham sido realizados há mais de três décadas, ainda servem como referência para demais estudos, com pequenas evoluções em sua abordagem, conforme (CARVALHO, 2009; KIMURA, 2019)

Em RIBEIRO (2011), são mostradas rotinas para o desenvolvimento de diagramas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, assim como o cálculo dos efeitos de segunda ordem, baseado nos métodos prescritos pela ABNT NBR 6118:2007. Ao final o autor propôs que as curvas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ possam ser aproximadas por expressões polinomiais, que poderiam tornar as rotinas de cálculo mais práticas do ponto de vista de aplicação e implementação.

Em CHAVES et al. (2015) é mostrada uma alternativa para a determinação das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ por meio do método de Newton-Raphson, onde a seção transversal é discretizada em fibras com modelos constitutivos independentes. Para a NLG foi considerado o chamado método geral, onde aplica-se uma formulação consistente para a determinação do equilíbrio da estrutura em sua configuração deslocada. Os estudos abrangeram pilares em concreto armado e mistos submetidos à flexão composta normal. Ao final os autores concluíram que o método teve boa correspondência com estudos experimentais e teóricos e que seria uma alternativa viável às metodologias prescritas pelas normativas.

Em KLEIN JÚNIOR (2022) foi feito um estudo de confiabilidade sobre os erros de modelo de cálculo dos efeitos de segunda ordem. Para tanto, o autor organizou um banco de dados com resultados de 210 ensaios experimentais de pilares esbeltos biapoiados de concreto armado com seção retangular submetidos à flexão composta normal com excentricidades iguais nas duas extremidades sob carregamento de curta duração. Foram considerados concretos das duas classes de resistência previstas pela ABNT NBR 6118:2014. Os resultados mostraram um bom desempenho dos modelos previstos pela ABNT NBR 6118:2014, sobretudo os métodos do pilar padrão com curvatura aproximada e o pilar padrão com rigidez aproximada. As médias da relação entre momento fletor experimental e teórico ficaram próximos da unidade, com baixo valor de coeficiente de variação, evidenciando a precisão dos métodos propostos pela referida normativa.

Do ponto de vista da NLG local, todos os trabalhos citados ao longo deste item empregaram métodos simplificados, como pilar padrão e suas variações ou o método geral, onde a o tratamento da NLG é rigoroso, mas ainda há a consideração de que os extremos do pilar tenham uma vinculação do tipo engaste-livre ou biarticulada.

Ao longo deste item foram mostrados alguns dos trabalhos que nortearam o tratamento da NLF local em pilares, além daqueles mais recentes, e pode-se constatar que ainda há necessidade de avanço de metodologias que considerem a deslocabilidade de trechos isolados de pilar, assim como a determinação da rigidez de cada trecho dos pilares. Constatação semelhante é feita por KIMURA (2019).

2.7 PILARES EM CONCRETO ARMADO DO PONTO DE VISTA NORMATIVO

As três normativas tomadas como referência para o presente trabalho prescrevem metodologias e parâmetros para a análise, dimensionamento e detalhamento de pilares, a seguir são mostradas em linhas gerais as metodologias de análise dos efeitos de segunda ordem do ponto de vista de cada normativa.

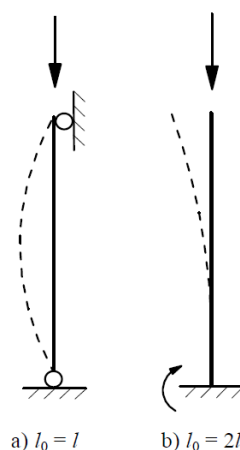
2.7.1 ABNT NBR 6118:2014

A normativa brasileira prescreve procedimentos mais rigorosos quanto maior a esbeltez dos pilares. Prescreve diferentes metodologias para os tratamentos da NLG e da NLF.

Para os pilares chamados curtos, há dispensa da análise não linear (NLG e NLF). Para pilares com esbeltez menor ou igual a 90, a NLG pode ser tratada pelo chamado método do pilar padrão, que é uma simplificação onde se considera que a deformada da barra de pilar seja aproximada por uma curva senoidal, para a NLF admite-se dois métodos, curvatura aproximada e rigidez aproximada. Os efeitos da fluência podem ser desprezados. Para pilares com esbeltez maior que 90 e menor ou igual a 140, a NLG ainda pode ser tratada pelo método do pilar padrão, para a NLF admite-se apenas a rigidez dada pela curva $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, os efeitos da fluência devem ser considerados. Para pilares com esbeltez maior que 140 e menor ou igual a 200, a NLG deve ser tratada de forma refinada, com formulação que possibilite determinar o equilíbrio da estrutura em sua configuração deslocada, para a NLF, admite-se apenas a rigidez dada pela curva $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, os efeitos da fluência devem ser considerados.

Vale notar que para todas as alternativas de tratamento da NLG não há prescrições quanto a consideração de continuidade das barras de pilar com os demais elementos interligados em seu topo ou base. Assim, admite-se que os pilares estejam biarticulados ou engastados na base e livre no topo. Também é interessante notar que a normativa não impõe um limite máximo para a relação entre momentos segunda e primeira ordem. A figura 2-1 mostra as duas situações previstas para a vinculação dos pilares para a análise, sendo a), para pilares que possam ser considerados biarticulados, e b), para pilares considerados engastados e livres.

Figura 2-1: Vinculação dos pilares isolados



Do ponto de vista da consideração das imperfeições geométricas, a ABNT NBR 6118:2014 considera duas metodologias distintas, a primeira delas, mais usada no meio técnico, é a consideração da atuação de um momento mínimo em torno de cada eixo da seção, a segunda consiste em somar os efeitos de uma excentricidade acidental aos diagramas de momento. Embora as alternativas pareçam equivalentes, PINTO (2017) concluiu que há diferenças significativas entre as metodologias, embora o autor não tenha chegado a uma conclusão definitiva, recomendou maiores estudos sobre os efeitos de cada uma das alternativas na determinação dos esforços finais de cálculo.

Do ponto de vista da fluência, há trabalhos recentes que indicaram que os limites estabelecidos pela ABNT NBR 6118:2014, para a dispensa de sua consideração é inadequado (PASTORE, 2020; CASAGRANDE, 2016). Estes autores concluíram que a consideração da fluência no cálculo dos efeitos de segunda ordem em pilares com esbeltez menor que 90 pode ser significativo.

2.7.2 ACI 318:2019

A normativa americana é um pouco mais simplista do ponto de vista das metodologias de análise dos efeitos de segunda ordem em pilares não fazendo distinção dos métodos de análise em função da esbeltez.

Para as situações equivalente aos pilares curtos da ABNT NBR 6118:2014, os efeitos de segunda ordem podem ser dispensados.

Para as situações onde os efeitos de segunda ordem não podem ser dispensados a NLG é tratada de forma diferente para pilares pertencentes a pórticos deslocáveis ou indeslocáveis, a NLF é aproximada por um fator redutor da inércia bruta das seções dos pilares.

Não há a indicação da consideração de imperfeições geométricas de forma direta como na ABNT NBR 6118:2014, há apenas uma consideração sobre o momento de segunda ordem que leva em conta a intensidade da força normal resistente e da altura da seção transversal. Quanto à fluência, sua consideração é feita por meio de um abatimento na rigidez a flexão.

A normativa americana impõe um limite máximo de 1,40 para a relação entre momentos de segunda ordem e de primeira, caso esse limite seja excedido, recomenda a revisão da rigidez do pilar.

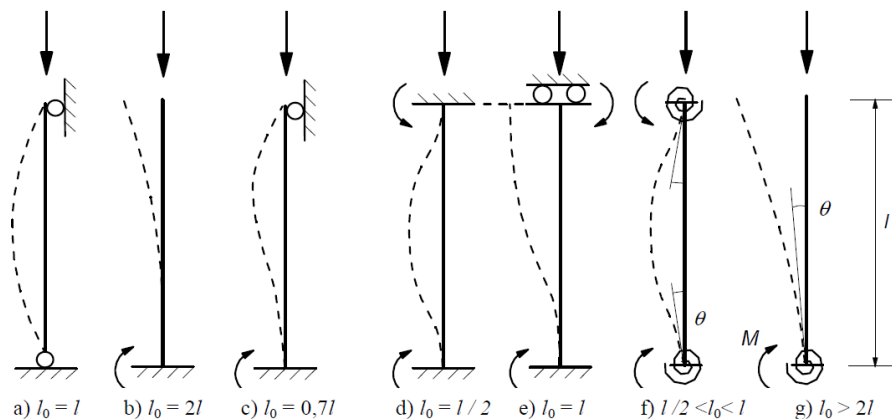
2.7.3 EN 1992 -1-1: Eurocode 2

Assim como as demais normativas consideradas neste trabalho, a europeia também prevê a dispensa da consideração dos efeitos de segunda ordem em pilares com pequena

esbeltez. Para as demais situações, em linhas gerais, apresenta método mais preciso que a ABNT NBR 6118:2014, inclusive com consideração de molas para simular a continuidade no cálculo do comprimento equivalente de flambagem.

Não há uma classificação em função da esbeltez para a definição da metodologia a ser usada no tratamento das não linearidades. Havendo três possibilidades, um chamado método geral, onde prescreve-se uma análise não linear refinada, e dois métodos simplificados, baseados na estimativa da curvatura ou da rigidez. O cálculo do comprimento de flambagem é um pouco mais sofisticado que o definido na ABNT NBR 6118:2014, apresentando mais possibilidades para a vinculação do modelo isolado. A figura 2-3 mostra as situações de vinculações a serem consideradas, em particular as situações f), e g), para pilares pertencentes a pórticos, onde pode-se definir uma constante de mola para os giros em função dos elementos que se conectam ao pilar em suas extremidades.

Figura 2-2: Vinculação dos pilares isolados



Fonte: EN 1992-1-1: Eurocode 2 (1992)

A normativa apresenta formulação específica para o cálculo das constantes de mola e indica que caso os elementos em análise fissurem no Estado Limite Último, o cálculo da rigidez que leva à definição da constante de mola deve ser redefinido considerando tal fato, mas não há uma indicação clara de como proceder para tal penalização na rigidez. É importante notar que não há um limite para esbeltez, como na normativa nacional, pois do ponto de vista da ruptura por instabilidade, o método geral (tratamento rigoroso da NLG), deveria ser capaz de identificar tal tipo de ruptura, e os métodos simplificados foram calibrados para que os momentos da análise não linear sejam sempre maiores que o valor de momento fletor que levaria à ruptura por instabilidade.

Do ponto de vista da consideração das imperfeições geométricas, assim como a ABNT NBR 6118:2014, o EN 1992-1-1: Eurocode 2, apresenta duas metodologias distintas, sendo uma delas a consideração da atuação de um momento mínimo em torno de cada eixo da

seção, a segunda consiste em somar os efeitos de uma excentricidade acidental aos diagramas de momento fletor.

Do ponto de vista da fluência, a normativa europeia é mais restritiva que a ABNT NBR 6118:2014, pois seus efeitos podem ser desconsiderados se as três condições seguintes forem atendidas:

- Esbeltez menor ou igual a 75;
- Coeficiente de fluência menor ou igual a 2,0;
- Solicitação normal com grande excentricidade.

Desta forma, a consideração da fluência independe do método a ser usado para o cálculo dos efeitos de segunda ordem locais.

2.8 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Ao longo do capítulo foram mostradas as principais teorias e métodos para análise de estruturas reticuladas em concreto armado, com especial atenção às análises não lineares globais e locais. Foram consultados textos científicos e normativos.

Do ponto de vista da não linearidade geométrica, a literatura consultada mostra que o nível de desenvolvimento das aplicações para estruturas reticuladas em concreto armado está consolidada, tanto para análises globais quanto para análises locais, uma vez que geralmente pode-se usar a mesma formulação.

A revisão da bibliografia mostrou que a análise não linear física local, considerando os modelos de barras isoladas para pilares tanto do ponto de vista normativo quanto do ponto de vista das aplicações em pesquisa levam a valores de momentos fletores finais de segunda ordem muito próximos de valores obtidos experimentalmente.

Considerando a análise não linear física global, foram realizadas pesquisas numéricas e experimentais em pórticos planos. Ressalta-se que grande parte dos trabalhos numéricos usaram os resultados obtidos nos ensaios experimentais principalmente de MACGREGOR e HAGE (1977), para validar e calibrar seus resultados. A maioria dos trabalhos numéricos buscaram propor valores de penalização da rigidez dos elementos para análises simplificadas considerando a NLF, sendo que houveram pequenas discrepâncias entre os valores obtidos nos ensaios experimentais e nos estudos numéricos.

Ainda sobre a análise não linear física global, não há trabalhos experimentais ou numéricos que contemplem análises refinadas para pórticos tridimensionais. É nesta lacuna de conhecimento que o presente trabalho focou suas análises.

3 Metodologia

Ao longo deste capítulo são discutidas as metodologias e estratégias adotadas no desenvolvimento, adaptação, validação dentro do campo de aplicação, e uso da ferramenta computacional capaz de realizar a análise não linear geométrica e física integrada em barras de pórtico tridimensional, pertencentes a edifícios reticulados multipavimentos em concreto armado. Também é mostrada a tipologia dos exemplos de aplicação. Detalhes sobre a formulação, implementação numérica, estratégias de resolução, e validação das rotinas são mostrados no capítulo 4 (Implementação Numérica), e nos apêndices. As características dos exemplos de aplicação são mostradas no capítulo 5 (Exemplos de aplicação).

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE A FERRAMENTA COMPUTACIONAL.

Considerando que a ferramenta computacional desenvolvida neste trabalho parte da ferramenta computacional desenvolvida em linguagem FORTRAN para a dissertação de mestrado do autor, algumas das funcionalidades requeridas para o desenvolvimento da tese já estavam desenvolvidas, algumas necessitavam de adaptações e outras necessitavam de um desenvolvimento completo.

A ferramenta computacional original é capaz de realizar análise não linear geométrica refinada de pórticos tridimensionais considerando os pavimentos como diafragmas rígidos no seu plano e análise não linear física refinada em paredes de núcleos com seções submetidas à flexão composta normal. Maiores detalhes sobre a implementação podem ser vistos em CORELHANO (2010).

As rotinas da ferramenta existente foram integralmente reescritas em C++. A seguir é mostrada uma breve discussão sobre as principais rotinas da ferramenta computacional e as necessidades de ajustes e implementações:

3.1.1 Pórtico tridimensional

As rotinas relacionadas à análise de pórticos tridimensionais formado por barras com seis graus de liberdade nodais, com consideração da hipótese de diafragma rígido, e deformação por força cortante tiveram ajustes pontuais para melhora do tempo de processamento.

3.1.2 Não linearidade geométrica

As rotinas relacionadas à análise não linear geométrica com passo único ou com carregamento incremental não necessitaram de ajustes.

3.1.3 Dimensionamento à flexão composta normal e oblíqua

As rotinas relativas ao dimensionamento das seções transversais foram criadas integralmente.

3.1.4 Não linearidade Física

As rotinas relacionadas à não linearidade física foram recriadas integralmente, pois a abordagem no presente trabalho é completamente diferente da abordagem usada na ferramenta original.

Os demais aspectos relacionados à entrada e saída de dados sofreram adaptações em função das mudanças de variáveis de interesse entre a versão original da ferramenta e a ajustada e adaptada para este trabalho.

3.2 ESTRATÉGIAS DE VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO

Em linhas gerais, o trabalho avaliou dois grupos de exemplos numéricos, sendo o primeiro dedicado a validação das rotinas dentro dos seus respectivos campos de aplicação e o segundo relacionado aos exemplos de aplicação com interesse no estudo do comportamento estrutural dos modelos propostos.

3.2.1 Validação:

Validação das rotinas por meio da comparação dos resultados obtidos pela ferramenta com estudos numéricos e experimentais da bibliografia correlata por meio da verificação de esforços resistentes, diagramas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ e deslocamentos.

3.2.2 Análise dos exemplos de Aplicação:

Análise de exemplos de aplicação para avaliação dos parâmetros estabelecidos nos objetivos principais, contemplando a análise e dimensionamento de elementos de vigas e pilares. Tais análises foram realizadas considerando as prescrições da ABNT NBR 6118:2014, e foram avaliadas as influências dos seguintes parâmetros: Esbeltez dos pilares, resistência à compressão do concreto, intensidade da força normal, posição dos pilares em planta, relação entre lados dos pilares.

3.2.3 Exemplos de Aplicação

A descrição sucinta dos exemplos de aplicação é feita neste capítulo, sendo mostrada a tipologia e geometria típica dos exemplos além da metodologia para a definição das ações aplicadas. As características dos exemplos de aplicação com maiores detalhes são mostradas e discutidas no capítulo 5.

3.3 VALIDAÇÃO DAS ROTINAS

Para a validação das rotinas relacionadas à NLF houve necessidade de desenvolvimento de rotinas auxiliares como: Dimensionamento e verificação à Flexão Composta Normal e Flexão Composta Obliqua. Tais rotinas são necessárias para o dimensionamento das seções para os exemplos de aplicação assim como para a geração dos diagramas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$.

3.3.1 Dimensionamento à Flexão composta Normal e Obliqua

Para a validação das rotinas de dimensionamento foram usados como referência exemplos da bibliografia correlata além de resultados oriundos de calculadoras comerciais e didáticas de comprovada aplicação em projetos do mercado. As seções retangulares foram avaliadas para as várias possibilidades de disposição de armadura.

3.3.2 Verificação de resistência à Flexão composta Normal e Obliqua

Da mesma forma que o dimensionamento, para a validação das rotinas de verificação foram usados como referência exemplos da bibliografia correlata além de resultados oriundos de calculadoras comerciais e didáticas de comprovada aplicação em projetos do mercado.

3.3.3 Diagramas Momento Normal Curvatura

As rotinas para a montagem dos diagramas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ dependem da rotina de verificação de esforços resistentes, assim como nos casos de dimensionamento e verificação foram usados exemplos da literatura e de calculadoras comerciais e didáticas de comprovada aplicação em projetos do mercado.

3.3.4 Demais rotinas

As rotinas relacionadas ao pórtico tridimensional e NLG não foram alteradas, foram reescritas em linguagem C++ e suas validações são mostradas nos apêndices.

3.4 ANÁLISE DOS EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A seguir são mostradas as etapas e considerações para análise dos exemplos de aplicação. Todas as análises realizadas foram estáticas e nas análises incrementais considerou-se carregamento monotonicamente crescente.

3.4.1 Geometria e entrada de dados

A geração do modelo estrutural incluindo a discretização é feita por meio do tradicional software de pré-processamento *Gmsh*. Após a geração da geometria do modelo, é gerado um arquivo txt formatado de acordo com o arquivo de entrada de dados do software objeto deste trabalho, contendo as tradicionais informações para a análise estrutural, tais como: Número de nós e elementos, coordenadas nodais, incidências, carregamentos nodais e distribuídos nos elementos e demais parâmetros necessários para as análises.

Em termos de discretização, adotou-se um único modelo para todas as análises onde vigas e pilares são subdivididos em 10 elementos cada tramo para atender às necessidades das análises rigorosas. Tal estratégia evita a criação e alocação de dois modelos simultâneos.

3.4.2 Análise inicial

É realizada uma análise estrutural com aspectos muito similares às tradicionalmente realizadas em rotinas de projeto, com as seguintes características:

3.4.2.1 Não Linearidade Física (NLF)

Considera-se o concreto armado um material elástico linear equivalente, com o módulo de elasticidade representativo do concreto, estimado de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, por meio das equações mostradas no capítulo 4, nos itens referentes aos modelos constitutivos dos materiais. A NLF é considerada de maneira simplificada por meio da penalização do momento de inércia de acordo com a ABNT NBR 6118:2014. Os valores dos fatores de penalização são mostrados no capítulo 4.

3.4.2.2 Não Linearidade Geométrica (NLG)

Análise não linear geométrica refinada, de acordo com a formulação mostrada no capítulo 4, é aplicada em um único passo de carregamento, considerando a deformação por força cortante. Itera-se até a convergência em deslocamentos e esforços.

3.4.3 Dimensionamento de armaduras de vigas e pilares

Em função dos esforços obtidos da análise inicial (em 3.4.2), as seções de vigas e pilares são dimensionadas à flexão simples e à flexão composta oblíqua, respectivamente. Os efeitos de segunda ordem locais não consideram os efeitos da NLF, uma vez que a análise inicial considera a NLG de forma rigorosa e a NLF de forma simplificada por meio da penalização da rigidez. Esta etapa tem por finalidade atribuir uma armadura inicial para as análises refinadas das etapas seguintes. Por se tratar de uma estimativa inicial da rigidez do modelo não são considerados os efeitos de segunda ordem locais nos pilares por meio de métodos simplificados como Pilar padrão acoplado à curvatura aproximada ou rigidez aproximada.

A distribuição das armaduras é pré-definida no arquivo de entrada junto à descrição das características de cada seção. Assim, ao final desta etapa, cada seção de viga e pilar terá uma determinada configuração de armadura com um determinado diâmetro. É importante ressaltar que o diâmetro determinado pelo dimensionamento pode ser um valor qualquer, desvinculado dos tradicionais diâmetros comerciais.

3.4.4 Análise refinada iterativa

Após a definição preliminar das armaduras das seções em função da análise inicial, é realizada uma análise estrutural refinada com as seguintes características:

3.4.4.1 Não Linearidade Física (NLF-Rigorosa)

Para cada passo de carregamento considera-se o concreto armado um material elástico linear equivalente, com rigidez à flexão dada pela relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ para cada seção de vigas e pilares. Para cada seção, tais relações são definidas em função das armaduras dimensionadas na etapa anterior e da intensidade dos momentos fletores solicitantes. A análise incremental é necessária em função do elevado grau de NLF.

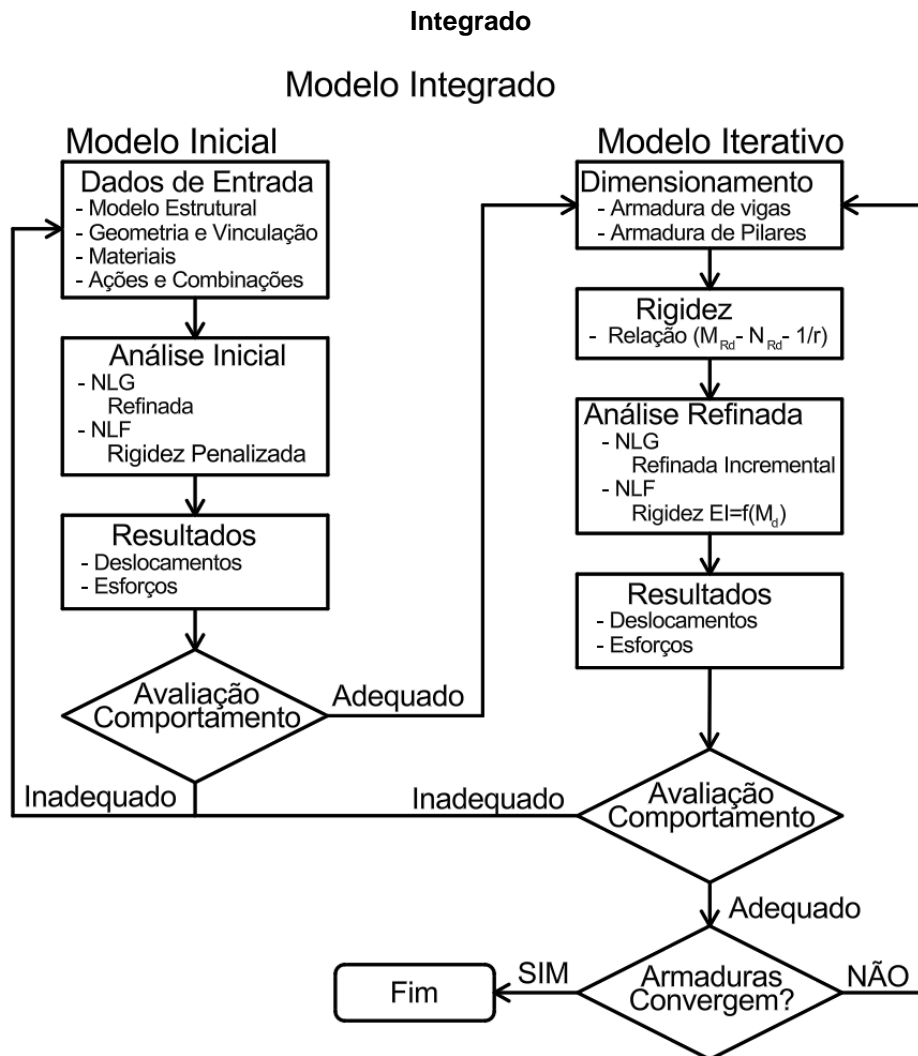
3.4.4.2 Não Linearidade Geométrica (NLG)

Seguindo os mesmos procedimentos da análise inicial, porém a análise não linear geométrica refinada é aplicada de forma incremental, considerando a deformação por força cortante. Tal divisão do carregamento em passos é necessária devido à NLF. Itera-se até a convergência em deslocamentos e esforços.

3.4.4.3 Armaduras de vigas e pilares recalculadas

Em função dos esforços obtidos da análise refinada iterativa (em 3.4.4), as seções de vigas e pilares são dimensionadas à flexão simples e à flexão composta oblíqua, respectivamente. Com as armaduras recalculadas retorna-se ao início da análise refinada iterativa, com determinação de novas relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$. Repete-se o processo até que haja convergência nas armaduras recalculadas. Nas eventuais situações de não convergência, retorna-se à análise inicial com ajustes nos parâmetros geométricos e resistentes do modelo. A figura 3-1 mostra o fluxograma do processo iterativo de análise e dimensionamento.

Figura 3-1: Fluxograma da análise e dimensionamento considerando o Modelo



Fonte: O Autor (2025)

Os valores de tolerâncias para a convergência dos resultados bem como maiores detalhes sobre as rotinas são mostrados no capítulo 4.

3.5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

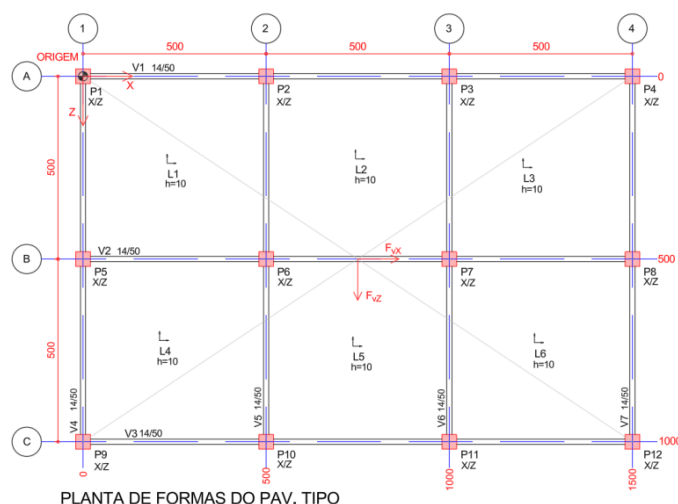
3.5.1 Tipologia de estruturas analisadas

Na figura 3-2 é mostrada a planta de formas típica do pavimento tipo dos exemplos estudados, trata-se de um edifício com planta em formato retangular com dois eixos de simetria. As dimensões das seções de vigas e a distância entre eixos de pilares são constantes para todos os modelos. O pavimento fundação contém apenas os pilares em considerar vigas e eventuais carregamentos. O último pavimento, que usualmente seria a cobertura ou eventualmente casa de máquinas e reservatório, por simplicidade, para todos os exemplos é considerado como se fosse igual ao pavimento tipo, inclusive com os mesmos carregamentos. As dimensões das seções dos pilares variam em função dos parâmetros avaliados.

A vinculação dos pilares na fundação foi considerada como engastamento perfeito, não é objetivo do trabalho e análise da interação solo-estrutura, e tal consideração é razoável para a tipologia dos exemplos analisados.

O pé direito estrutural (topo de laje a topo de laje), possui altura entre 3,00, e 4,40 metros, sendo valores representativos para a grande maioria dos edifícios com mesma tipologia abordada no trabalho.

Figura 3-2: Planta de formas típica dos exemplos de aplicação.



Fonte: O Autor (2025)

Para cada exemplo de aplicação foram analisados dois pilares que tenham posicionamentos distintos na planta de formas. Foram consideradas as tradicionais situações de posicionamento dos pilares em planta, sendo pilares de canto e centrais. Assim, foram tomados como referência os seguintes pilares considerando a figura 3-2:

Pilar de canto: P12

Pilar central: P7

Embora tal classificação possa ser considerada ultrapassada, pois geralmente todos os pilares pertencentes a edifícios com a tipologia abordado no trabalho estariam submetidos à flexão composta oblíqua, ainda serve como orientação para identificar os esforços preponderantes dos pilares.

3.5.2 Ações

As ações típicas de edifícios multipavimentos foram definidas de acordo com as normativas ABNT NBR 6120:2019, ABNT NBR 6123:2014, e ABNT NBR 6118:2014, para cargas verticais, ação do vento, e desaprumo.

3.5.2.1 Ações verticais

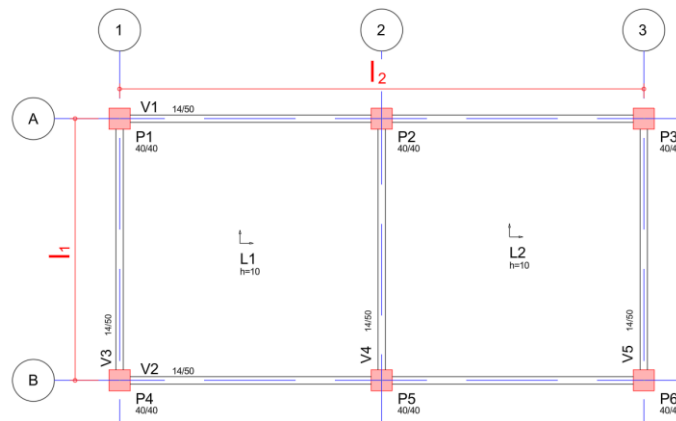
O peso próprio dos elementos estruturais foi calculado em função da geometria e peso específico do concreto armado. As cargas relativas aos revestimentos e paredes são estimadas em função da geometria e peso específico dos materiais. As cargas acidentais foram determinadas em função do uso dos ambientes dos edifícios. As cargas verticais permanentes e variáveis uniformemente distribuídas aplicadas nas lajes são distribuídas para as vigas através do processo clássico de charneiras, prescrito pela ABNT NBR6118:2014.

Foi considerado que haveria a presença de paredes em alvenaria de blocos cerâmicos sobre todas as vigas. Em resumo, o peso próprio de pilares é determinado pelo software e as demais ações verticais, são inseridas através do arquivo de entrada de dados.

3.5.2.2 Ações horizontais

A ação do vento foi determinada considerando que os edifícios estejam localizados em uma região hipotética com terreno plano e vento de baixa turbulência. Para o cálculo dos coeficientes de arrasto, as dimensões l_1 e l_2 , foram tomadas com relação aos eixos das vigas nas extremidades das fachadas, tal simplificação foi adotada em função da variabilidade das dimensões dos pilares no modelos, o que impactaria as dimensões das fachadas, assim, por simplicidade, para um mesmo modelo as áreas de fachada e coeficientes de arrasto são os mesmos. A figura 3-3 mostra a simplificação.

Figura 3-3: Largura do edifício para o cálculo de I1 e I2



Fonte: O Autor (2025)

A ação do vento é aplicada como uma força horizontal concentrada no nó mestre de cada pavimento, sendo este localizado no centro geométrico de cada pavimento. A avaliação da necessidade da consideração do desaprumo como um acréscimo na ação do vento é feita de acordo com a ABNT NBR 6118:2014. O cálculo das forças horizontais de vento e desaprumo, assim como os parâmetros adotados para cada modelo são mostrados no capítulo 5 (Exemplos de aplicação).

3.5.2.3 Combinações

São escolhidas previamente as combinações que possam ser consideradas as mais críticas, pois ao considerar todas as possibilidades de combinação para o estado limite último haveria um número muito grande de análises a serem realizadas e posteriormente tratadas. Para cada modelo são consideradas no máximo duas combinações últimas normais, sendo uma delas com o vento na direção horizontal ou vertical (plano horizontal) como ação variável principal e uma outra sem atuação do vento.

3.5.3 Parâmetros avaliados

A seguir são mostrados os parâmetros avaliados nas análises dos exemplos de aplicação. Para que o número de modelos simulados não torne as análises inviáveis, cada parâmetro a ser avaliado tem até três valores dentro de suas faixas de representatividade.

3.5.3.1 Esbeltez:

O pré-dimensionamento foi realizado de forma que os pilares tenham valores de esbeltez em três faixas, uma considerada baixa, uma intermediária e outra mais elevada

próxima de 90. Dada a tipologia dos exemplos, para chegar a valores mais elevados de esbeltez houve a necessidade da consideração de pé direito maior que os usuais 3,00m para os pavimentos em análise.

3.5.3.2 Resistência à compressão do concreto:

Para os exemplos destinados a avaliação da influência da resistência do concreto, o dimensionamento foi realizado considerando três classes de resistência do concreto, sendo 25MPa, 40 MPa, e 70MPa.

3.5.3.3 Intensidade da força normal:

O pré-dimensionamento dos pilares foi realizado de forma que haja três situações de taxas de força normal adimensional, uma próxima de 0,30, uma próxima de 0,80, e uma próxima de 1,10. Tais valores coincidem com o senso comum do meio técnico e científico relativo às taxas de força normal adimensional baixas, médias e altas.

3.5.3.4 Relação entre lados dos pilares:

O pré-dimensionamento dos pilares foi realizado de forma que haja três situações de seção transversal sendo a relação entre os lados nas proporções 1/1, 1/2 e 1/4.

3.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Neste capítulo foram discutidas em linhas gerais as metodologias e estratégias adotadas para a validação e aplicação da ferramenta computacional para o desenvolvimento do presente trabalho. Foram mostrados também os aspectos básicos dos exemplos de aplicação estudados no capítulo 5. Os exemplos de aplicação possuem geometria e carregamento representativo de edifícios residenciais e comerciais, a simplicidade da geometria é relacionada à facilidade de montagem dos arquivos de entrada e principalmente à maior clareza na análise e interpretação dos resultados.

4 Implementação numérica

Ao longo deste capítulo são abordados os aspectos relacionados à implementação numérica/computacional das metodologias empregadas no desenvolvimento e adaptação da ferramenta computacional capaz de realizar a análise não linear geométrica e física refinada integrada em barras de pórtico tridimensional. São indicadas as metodologias usadas assim como suas referências, que mostram com maior clareza a formulação e etapas das respectivas implementações.

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.

Para a análise das estruturas, foi adaptado e desenvolvido neste trabalho um código computacional baseado no MEF. Este software possibilita a modelagem de estruturas compostas por barras de pórtico tridimensional considerando as não linearidades geométrica e física de maneira simultânea.

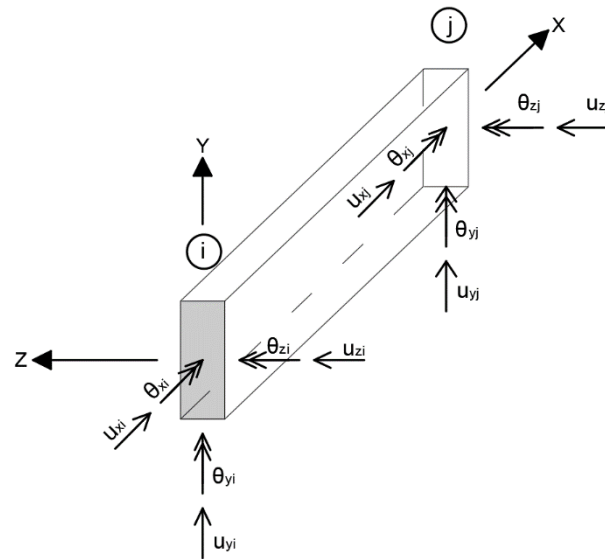
Para o tratamento da não linearidade geométrica foi adotada uma estratégia secante de resolução de sistemas não lineares. O controle da convergência é verificado em forças e deslocamentos simultaneamente.

A não linearidade física é considerada através da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$. Em termos de implementação, a estratégia de solução não linear adotada é a mesma usada para a não linearidade geométrica, assim como para a consideração simultânea das não linearidades geométrica e física.

4.2 ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL E SISTEMA DE COORDENADAS

A modelagem das barras considera o tradicional elemento de pórtico tridimensional com 6 graus de liberdade por nós, sendo três translações e três giros relacionados aos eixos X, Y, e Z. A figuras 4-1 mostra o elemento de barra, seu sistema de eixos locais e os respectivos graus de liberdade de seus nós.

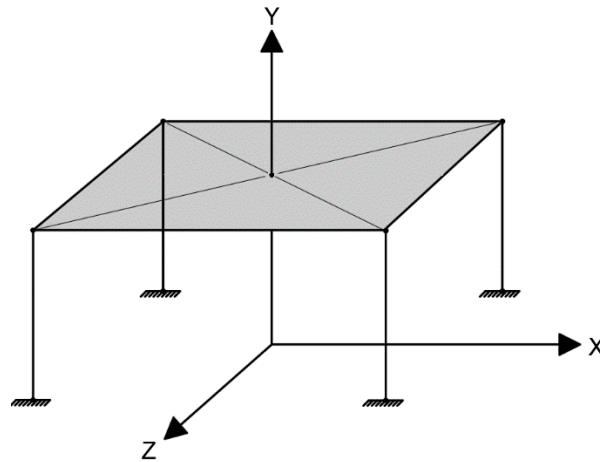
Figura 4-1: Graus de liberdade e sistema de coordenadas locais



Fonte: O Autor (2025)

A figura 4-2 mostra o sistema de eixos globais adotado para os modelos.

Figura 4-2: Sistema de coordenadas globais



Fonte: O Autor (2025)

A determinação da matriz de rigidez e do vetor de cargas de cada elemento no sistema global a partir do sistema local requer uma transformação de coordenadas através de matrizes de rotação no espaço tridimensional.

Tomando o eixo X como o eixo longitudinal do elemento, e sendo α , β e γ os giros em torno dos eixos X, Y e Z, respectivamente, e as coordenadas dos extremos de cada elemento dadas por:

x_i : Coordenada X inicial;

x_f : Coordenada X final;

y_i : Coordenada Y inicial;

y_f : Coordenada Y final;
 z_i : Coordenada Y inicial;
 z_f : Coordenada Z final.

Assim, o comprimento L de cada elemento é dado pela Equação 4-1. Os coeficientes, e a matriz de rotação são dados pelas Equações 4-2 a 4-8.

$$L = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (z_f - z_i)^2 + (z_f - z_i)^2} \quad (4-1)$$

Os coeficientes C_x , C_y , C_z e C_{xz} são dados por:

$$C_x = \frac{x_f - x_i}{L} \quad (4-2)$$

$$C_y = \frac{z_f - z_i}{L} \quad (4-3)$$

$$C_z = \frac{z_f - z_i}{L} \quad (4-4)$$

$$C_{xz} = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \quad (4-5)$$

A matriz de transformação R é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} [Y] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [Y] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [Y] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [Y] \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

Sendo γ dada por:

$$\gamma = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x \cdot C_y \cdot \cos\alpha - C_z \cdot \text{sen}\alpha}{C_{xz}} & C_{xz} \cdot \cos\alpha & \frac{-C_y \cdot C_z \cdot \cos\alpha + C_x \cdot \text{sen}\alpha}{C_{xz}} \\ \frac{C_x \cdot C_y \cdot \text{sen}\alpha - C_z \cdot \cos\alpha}{C_{xz}} & -C_{xz} \cdot \text{sen}\alpha & \frac{C_y \cdot C_z \cdot \text{sen}\alpha + C_x \cdot \cos\alpha}{C_{xz}} \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

Para barras verticais, por exemplo, a matriz de transformação γ é dada pela equação 4-8.

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cdot \cos\alpha & 0 & \text{sen}\alpha \\ C_y \cdot \text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

4.3 HIPÓTESE DE DIAFRAGMA RÍGIDO PARA OS PAVIMENTOS.

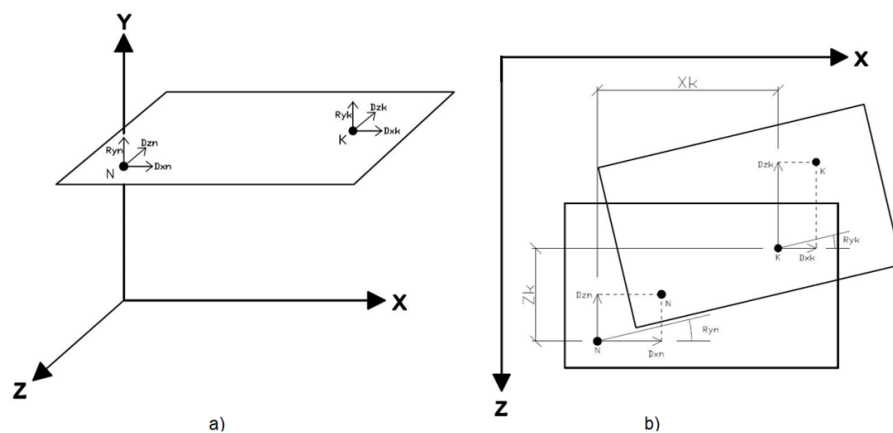
Segundo CORRÊA (1991), na modelagem de edifícios de andares múltiplos é razoável admitir o pavimento como infinitamente rígido em seu plano e perfeitamente flexível em sua direção normal, desde que as lajes não apresentem aberturas muito grandes ou o pavimento não apresente em planta uma das dimensões muito maior que a outra. Segundo a ABNT NBR 6118:2014, a relação entre lados deve ser menor ou igual a três, mas não há uma indicação sobre valores máximos de dimensões de aberturas nos pavimentos.

O pavimento considerado como um diafragma rígido (comportamento de chapa), que distribui as ações horizontais entre os vários painéis de contraventamento existentes na estrutura. Assim, a modelagem da laje na estrutura de contraventamento pode ser dispensada.

Adotado esse comportamento para a estrutura, a solução do sistema de equações fica simplificado, com a possibilidade de vinculação de três graus de liberdade de cada elemento ao nível dos pavimentos ao nó mestre.

Para barras de pórtico tridimensional com 6 graus de liberdade por nó, ao nível dos pavimentos, tem-se 3 graus de liberdades dependentes do movimento de corpo rígido da laje na direção horizontal, que são as translações nas direções X e Z e a rotação em torno do eixo Y. Sendo K um nó pertencente ao pavimento que tem como nó mestre o nó N, a figura 4-3 mostra os deslocamentos dependentes do movimento de corpo rígido do pavimento.

Figura 4-3: Nó mestre N, e nó K , a) e Movimento de corpo rígido do pavimento, b)



Fonte: O autor (2025)

Considerando que os deslocamentos e giros são pequenos, os deslocamentos do nó (K) podem ser escritos a partir dos deslocamentos do nó mestre (N) de acordo com as Equações 4-9 a 4-25.

$$D_{xk} = D_{xn} - Z_k \cdot R_{zn} \quad (4-9)$$

$$D_{zk} = D_{zn} + X_k \cdot R_{zn} \quad (4-10)$$

$$R_{yk} = R_{yn} \quad (4-11)$$

Matricialmente tem-se:

$$\begin{bmatrix} D_{xk} \\ D_{zk} \\ R_{yk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Z_k \\ 0 & 1 & X_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{xn} \\ D_{zn} \\ R_{yn} \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

$$\begin{bmatrix} D_{xk} \\ D_{zk} \\ R_{yk} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} D_{xn} \\ D_{zn} \\ R_{yn} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

$$\begin{bmatrix} D_{xk} \\ D_{zk} \\ R_{yk} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} D_{xn} \\ D_{zn} \\ R_{yn} \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

Levando-se em conta que as barras de pilares são dotadas de 6 graus de liberdade por nó, tem-se:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ rx_1 \\ ry_1 \\ rz_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ rx_2 \\ ry_2 \\ rz_2 \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

Assim, para um pilar que tem sua extremidade inferior (nó um) em uma laje n e sua outra extremidade (nó dois) na laje n+1, tem-se que a matriz de transformação é dada por:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xn} - Z_k \cdot R_{zn} \\ v_1 \\ D_{zn} + X_k \cdot R_{zn} \\ rx_1 \\ R_{yn} \\ rz_1 \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

$$\begin{bmatrix} q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{xn+1} - Z_{k+1} \cdot R_{zn+1} \\ v_2 \\ D_{zn+1} + X_{k+1} \cdot R_{zn+1} \\ rx_2 \\ R_{yn+1} \\ rz_2 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

Assim para o nó um:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{xn} \\ v_1 \\ D_{zn} \\ rx_1 \\ R_{yn} \\ rz_1 \end{bmatrix} = [T_k] \cdot \begin{bmatrix} D_{xn} \\ v_1 \\ D_{zn} \\ rx_1 \\ R_{yn} \\ rz_1 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

Para o nó dois:

$$\begin{bmatrix} q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{k+1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{xn+1} \\ v_2 \\ D_{zn+1} \\ rx_2 \\ R_{yn+1} \\ rz_2 \end{bmatrix} = [T_{k+1}] \cdot \begin{bmatrix} D_{xn+1} \\ v_2 \\ D_{zn+1} \\ rx_2 \\ R_{yn+1} \\ rz_2 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

Assim, reunindo-se os 12 graus de liberdade em um só vetor:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_k] & [0] \\ [0] & [T_{k+1}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{xn} \\ v_1 \\ D_{zn} \\ rx_1 \\ R_{yn} \\ rz_1 \\ D_{xn+1} \\ v_2 \\ D_{zn+1} \\ rx_2 \\ R_{yn+1} \\ rz_2 \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} D_{xn} \\ v_1 \\ D_{zn} \\ rx_1 \\ R_{yn} \\ rz_1 \\ D_{xn+1} \\ v_2 \\ D_{zn+1} \\ rx_2 \\ R_{yn+1} \\ rz_2 \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

A matriz de rigidez transformada é dada por:

$$K_M = T^T \cdot K \cdot T \quad (4-21)$$

Assim, para um elemento de pilar em que apenas a sua extremidade inferior seja vinculada, tem-se:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_k] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{xn} \\ v_1 \\ D_{zn} \\ rx_1 \\ R_{yn} \\ rz_1 \\ D_{xn+1} \\ v_2 \\ D_{zn+1} \\ rx_2 \\ R_{yn+1} \\ rz_2 \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

Dessa maneira a matriz de transformação T é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_k] & [0] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (4-23)$$

Onde [I], é uma matriz identidade 6x6.

De maneira análoga, para elementos de pilar em que somente a extremidade superior seja vinculada ao diafragma, obtém-se:

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [T_k] \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

Para elementos de viga pertencentes ao pavimento em que se considera a existência de diafragma rígido, como os dois nós estão contidos nesse pavimento, basta montar a matriz de transformação T com a transformação nos nós inicial e final da barra referidos ao mesmo nó mestre.

Assim:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_k] & [0] \\ [0] & [T_k] \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

Sendo cada nó dotado de 6 graus de liberdade, então os nós vinculados ao pavimento que tiveram suas rigidezes transferidas ao nó mestre ficarão destituídos destas, enquanto o nó mestre contará apenas com as rigidezes referentes aos deslocamentos de corpo rígido do pavimento. Desta forma o sistema fica indeterminado. Uma forma muito simples de se contornar este problema, mostrado em CORRÊA (1991), é a vinculação dos deslocamentos nas direções destituídas de rigidez após a transformação e translação de rigidezes.

4.4 CONSIDERAÇÃO DA DEFORMAÇÃO POR CISALHAMENTO.

A princípio a teoria de vigas de Timoshenko é a extensão da teoria de Euler Bernoulli, levando em consideração o efeito da deformação por esforço cortante. Assim, a hipótese de que as seções planas permanecem planas após a deformação é mantida, mas a perpendicularidade com o eixo não é mais imposta. Admite-se, então, uma deformação adicional à curvatura de flexão, sendo, portanto, a distorção diferente de zero.

Para contornar os problemas de travamento de solução e a não continuidade das rotações totais das seções, este trabalho contempla a flecha total correspondente aos esforços de flexão e cisalhamento e a rotação devida apenas à flexão, que são graus de liberdade contínuos em todo o intervalo do problema. O acoplamento da deformação por esforço cortante é introduzido somente sobre a parcela linear da matriz de rigidez dos elementos, considerando que não existam maiores implicações sobre o comportamento não linear físico ou geométrico dos elementos. A matriz de rigidez do elemento de barra de pórtico tridimensional adotada no presente trabalho é a mostrada em GERE & WEAVER (1981), mostrada na equação 4-26. As matrizes que compõem K_T são mostradas nos apêndices.

$$K_T = \begin{bmatrix} K_{TAA} & K_{TAB} \\ SIM & K_{TBB} \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

4.5 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

O tratamento da não linearidade geométrica foi feito conforme o mostrado em CORRÊA (1991), no qual são adotados o tensor de tensões de Piola Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformações de Green-Lagrange.

Dentre as várias possibilidades de estratégia de solução do problema não linear será adotado o método da iteração direta, o qual faz uso das matrizes de rigidez secantes.

Seja uma estrutura constituída por barras interconectadas pelas suas extremidades (nós), em regime elástico, a energia potencial da estrutura é dada pela Equação 4-27.

$$\Pi = U - F^T Q \quad (4-27)$$

Sendo:

Π : Energia potencial total;

U : Energia de deformação das barras;

F^T : Vetor que reúne os esforços nodais;

Q : Vetor que reúne os deslocamento nodais.

A energia de deformação é dada pelas Equações 4-28 e 4-29.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV \quad (4-28)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T E \varepsilon dV \quad (4-29)$$

Sendo:

ε : Tensor das deformações;

E: Módulo de elasticidade do material;

σ : Tensor das tensões;

V : Volume do elemento de barra.

Usando um vetor B que relacione as deformações aos deslocamentos, a equação da energia pode ser representada pela Equação 4-30.

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} Q^T B^T E Q B dV_e - F^T Q \quad (4-30)$$

Sendo:

e: Número de elementos;

V_e : Volume de cada elemento;

B: Vetor que relaciona as deformações aos deslocamentos.

Devido ao vetor de deformações adotado, a energia de deformações passa a ter uma relação não linear com os deslocamentos é dada pelas Equações 4-31 e 4-32.

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} Q^T B^T E Q B dV_e - F^T Q \quad (4-31)$$

$$\Pi = U(Q) - F^T Q \quad (4-32)$$

Como o equilíbrio da estrutura ocorre na condição em que as derivadas parciais do funcional em relação a cada deslocamento são nulas, tem-se as Equações 4-33 e 4-34:

$$\frac{\partial U}{\partial Q} - F = 0 \quad (4-33)$$

Ou, ainda, matricialmente:

$$K_s U = F \quad (4-34)$$

Os deslocamentos axiais são admitidos lineares e os deslocamentos transversais cúbicos. Assim, as funções aproximadoras dos deslocamentos são dadas pelas Equações 4-35 a 4-37.

$$u_i(x) = N_1(x) \cdot q_1 + N_7(x) \cdot q_7 \quad (4-35)$$

$$v_i(x) = N_2(x) \cdot q_2 + N_6(x) \cdot q_6 + N_8(x) \cdot q_8 + N_{12}(x) \cdot q_{12} \quad (4-36)$$

$$w_i(x) = N_3(x) \cdot q_3 + N_5(x) \cdot q_5 + N_9(x) \cdot q_9 + N_{11}(x) \cdot q_{11} \quad (4-37)$$

A medida de deformação de Green é dada pela equação 4-38.

$\varepsilon_x = (u_0' - Y \cdot v_0'' - Z \cdot w_0'') + \frac{1}{2} (u_0' - Y \cdot v_0'' - Z \cdot w_0'')^2 + \frac{1}{2} \cdot (v_0')^2 + \frac{1}{2} \cdot (w_0')^2$	(4-38)
---	---------------

Como a parcela $\frac{1}{2} (u_0' - Y \cdot v_0'' - Z \cdot w_0'')^2$ é muito pequena em comparação com as demais parcelas, será desprezada. Adicionalmente será utilizada a média ponderada da derivada do deslocamento transversal e não o seu valor pontual, assim como feito em WEN et al (1983), dessa forma, a deformação passa a ser dada pela Equação 4-39:

$$\varepsilon_x = (u_0' - Y \cdot v_0'' - Z \cdot w_0'') + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cdot (v_0')^2 \cdot dx + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cdot (w_0')^2 \cdot dx \quad (4-39)$$

Definido o tensor de deformações, o cálculo da energia de deformações é dado pelas Equações 4-40 e 4-41.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x^2 E \, dV \quad (4-40)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[(u_0' - Y \cdot v_0'' - Z \cdot w_0'') + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cdot (v_0')^2 \cdot dx + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \cdot (w_0')^2 \cdot dx \right]^2 E \, dV \quad (4-41)$$

Os desenvolvimentos subseqüentes até a determinação das matrizes de rigidez secante e tangente são mostrados em detalhes na tese de doutorado de CORRÊA (1991). As matrizes de rigidez secante e tangente são dadas respectivamente pelas Equações 4-42 e 4-43.

$$K_S = K_0 + \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{3}K_2 \quad (4-42)$$

$$K_T = K_0 + K_1 + K_2 \quad (4-43)$$

Sendo as matrizes K_0 , K_1 e K_2 mostradas nos apêndices

Dado o baixo nível de não linearidade geométrica associada às estruturas usuais de edifícios, a formulação acima descrita dispensa o caráter incremental dos carregamentos, bastando um único passo de carregamento. Para análises não lineares geométrica e física, devido a um maior nível de não linearidade introduzida pelo material, há a necessidade da divisão do carregamento, tornando indispensável o tratamento incremental dos carregamentos.

Para uma análise em que o carregamento é incremental, quando se passa de um nível de carregamento para o seguinte, além da atualização de coordenadas da estrutura deve-se considerar o nível de tensões a que a estrutura está sujeita até o início do novo incremento. A informação quanto ao nível de tensões é dado pela tradicional matriz geométrica, K_G mostrada nos apêndices.

Assim para um incremento i qualquer, o equilíbrio da estrutura é expresso pela Equação 4-44

$${}^iF + \left[{}^{i-1}K_G + {}^iK_0 + \frac{1}{2} {}^iK_1 + \frac{1}{3} {}^iK_2 \right] \Delta {}^iQ = {}^{i+1}F \quad (4.44)$$

Sendo:

iF e iK_G devidos às deformações até o início do incremento

iK_0 , iK_1 e iK_2 devidos às deformações do atual incremento

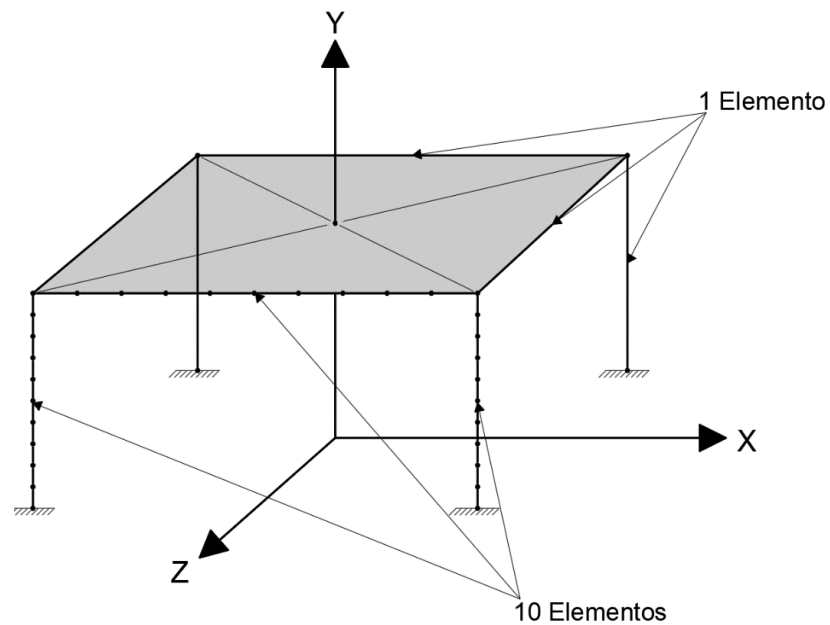
4.6 DISCRETIZAÇÃO DA ESTRUTURA

Para a consideração apenas da não linearidade geométrica em escala global em edifícios de concreto armado convencionais, CORRÊA (1991) mostra que não há necessidade de subdivisão das barras de pórtico, assim, para um pilar, um único elemento com nós nas extremidades (base e topo) seria suficiente. Para a consideração conjunta das não

linearidades física e geométrica, devido ao maior nível de não linearidade do comportamento estrutural fica evidente que mesmo em uma escala global há a necessidade de uma discretização maior da estrutura.

Para análise não linear geométrica e física global, PINTO (2002) e CORELHANO (2010) afirmam que as barras de pilares devem ser divididas em pelo menos quatro ou cinco elementos. Para análises locais, KIMURA (2019), afirma que os pilares devem ser divididos em pelo menos 10 elementos de barra. A Figura 4-4 mostra os elementos e suas subdivisões, onde pode-se notar que para cada pavimento, as barras dos pilares poderiam ser modeladas com apenas dois nós para análises globais considerando a NLG e a NLF de forma simplificada.

Figura 4-4: Discretização dos elementos estruturais.



Fonte: O autor (2025)

Não foi encontrado na literatura correlata estudos paramétricos relacionando a precisão dos resultados a uma maior discretização, portanto no presente trabalho onde são realizadas análises que contemplem simultaneamente os efeitos globais e locais, é adotado um número de divisões igual a dez para pilares e vigas.

4.7 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

A seguir são mostradas as hipóteses e modelos adotados para o comportamento dos materiais e das seções submetidas a solicitações normais de acordo com a ABNT NBR 6118:2014. Os valores das resistências de cálculo do concreto e do aço são dados pelas Equações 4-45 a 4-46, respectivamente:

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c \quad (4-45)$$

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf} / \gamma_c \quad (4-46)$$

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (4-47)$$

Sendo:

f_{cd} : Resistência de cálculo à compressão do concreto;

f_{ck} : Resistência característica à compressão do concreto;

f_{ctd} : Resistência de cálculo do concreto à tração direta;

$f_{ctk,inf}$: Resistência inferior à tração do concreto;

f_{yd} : Resistência de cálculo ao escoamento do aço;

f_{yk} : Resistência característica ao escoamento do aço;

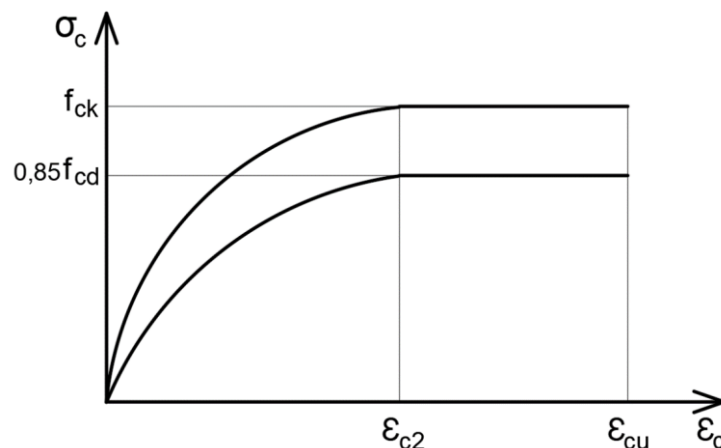
γ_c : Coeficiente de ponderação do concreto;

γ_s : Coeficiente de ponderação do aço.

4.7.1 Concreto

A Figura 4-5, mostra a relação Tensão x Deformação característica e de cálculo para o concreto sob deformações de encurtamento.

Figura 4-5: Diagrama Tensão x Deformação do concreto com deformação de encurtamento



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118:2014

A curva do trecho parabólico é descrita pela Equação 4-48, e seus parâmetros são definidos pelas Equações 4-49 a 4-51.

$$\sigma_{cd} = 0,85 f_{cd} [1 - (1 - \varepsilon_c / \varepsilon_{c2})^n] \quad (4-48)$$

Para concreto de classes até C50:

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$$

$$n = 2$$

Para concreto de classes até C55 até C90:

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰} + 0,085\text{‰} (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (4-49)$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} [(90 - f_{ck}) / 100]^4 \quad (4-50)$$

$$n = 1,4 + 23,4 [(90 - f_{ck}) / 100]^4 \quad (4-51)$$

Sendo:

σ_{cd} : Tensão de compressão de cálculo em uma fibra qualquer;

f_{cd} : Resistência de cálculo à compressão do concreto;

f_{ck} : Resistência característica à compressão do concreto;

ε_{c2} : Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico;

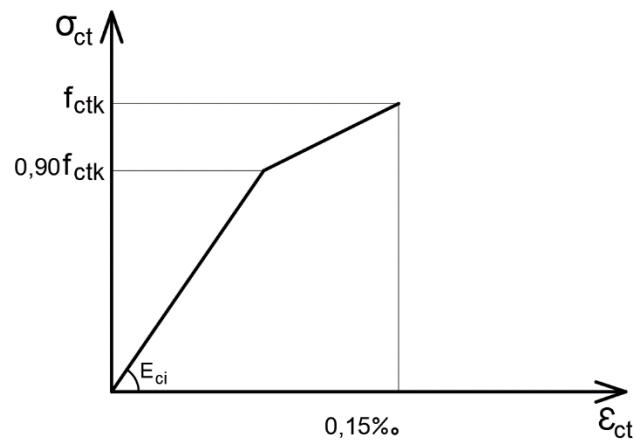
ε_{cu} : Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;

ε_c : Deformação específica de encurtamento do concreto em uma fibra qualquer;

n : Coeficiente adimensional que depende da resistência do concreto;

Para o concreto com deformações de alongamento é adotado o diagrama bilinear. A Figura 4-6, mostra a relação Tensão x Deformação característico e de cálculo para o concreto sob deformações de alongamento.

Figura4-6: Diagrama Tensão x Deformação do concreto com deformação de alongamento



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118:2014

Sendo:

σ_{ct} : Tensão de tração característica em uma fibra qualquer;

f_{ctk} : Resistência característica à tração do concreto;

E_{ci} : Módulo de elasticidade inicial do concreto;

ϵ_{ct} : Deformação específica de alongamento do concreto em uma fibra qualquer;

Na falta de ensaios para a determinação da resistência à tração do concreto, pode-se estimar através das Equações 4-52 e 4-53, em MPa.

Para concreto de classes até C50:

$$f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (4-52)$$

Para concreto de classes até C55 até C90:

$$f_{ct,m} = 2,12 \ln[1 + 0,1(f_{ck} + 8)] \quad (4-53)$$

Com f_{ck} em MPa

O módulo de elasticidade inicial pode ser estimado pelas Equações 4-54 e 4-55, em Mpa.

Para concreto de classes até C50:

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 f_{ck}^{1/2} \quad (4-54)$$

Para concreto de classes até C55 até C90:

$$E_{ci} = \alpha_E 21500 (f_{ck} / 10 + 1,25)^{1/3} \quad (4-55)$$

Com f_{ck} em Mpa

Sendo:

$\alpha_E = 1,2$ para basalto e diabásio;

$\alpha_E = 1,0$ para granito e gnaisse;

$\alpha_E = 0,9$ para calcário;

$\alpha_E = 0,7$ para arenito.

O módulo de elasticidade secante pode ser estimado pelas Equações 4-56 e 4-57, em MPa.

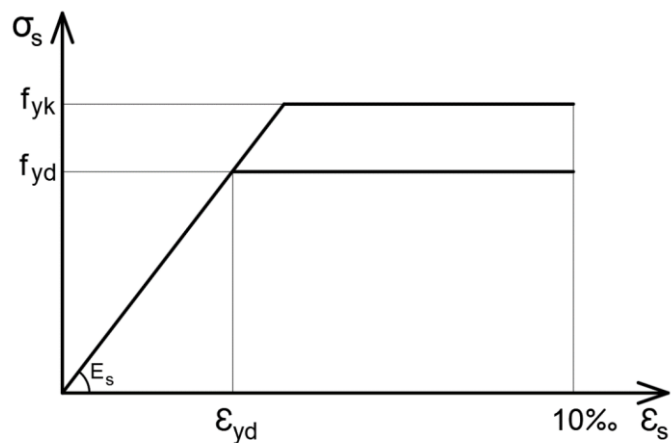
$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad (4-56)$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 f_{ck} / 80 \leq 1,0 \quad (4-57)$$

4.7.2 Aço

Para o aço com deformações de encurtamento ou alongamento é adotado o tradicional diagrama elasto-plástico perfeito. A Figura 4-7, mostra a relação Tensão x Deformação característica e de cálculo dos aços considerados neste trabalho.

Figura 4-7: Diagrama Tensão x Deformação simplificado do aço.



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118:2014

Sendo:

σ_s : Tensão na armadura;

f_{yd} : Resistência de cálculo ao escoamento do aço;

f_{yk} : Resistência característica aos escoamento do aço;

ε_s : Deformação específica na armadura;

ε_{yd} : Deformação específica ao escoamento de cálculo;

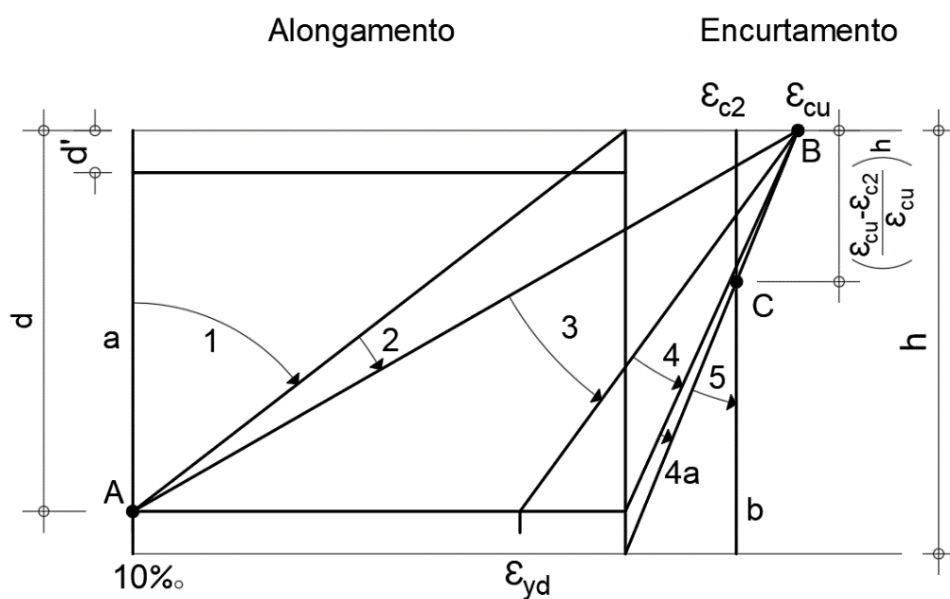
E_s : Módulo de elasticidade do aço.

4.8 HIPÓTESES BÁSICAS

A seguir são mostradas as hipóteses básicas de cálculo adotadas para o dimensionamento das seções no estado limite último assim como para o cálculo das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$

- Seções planas permanecem planas após as deformações;
- Aderência perfeita entre aço e concreto;
- Carregamento crescente monotônico;
- Distribuição de tensões no concreto de acordo com o diagrama Tensão x Deformação mostrado no item 4.7.1;
- Tensões nas armaduras de acordo com o diagrama mostrado no item 4.7.2;
- No estado limite último, a ruína é caracterizada pela distribuição de deformações de acordo com os domínios de deformação conforme a figura 4.

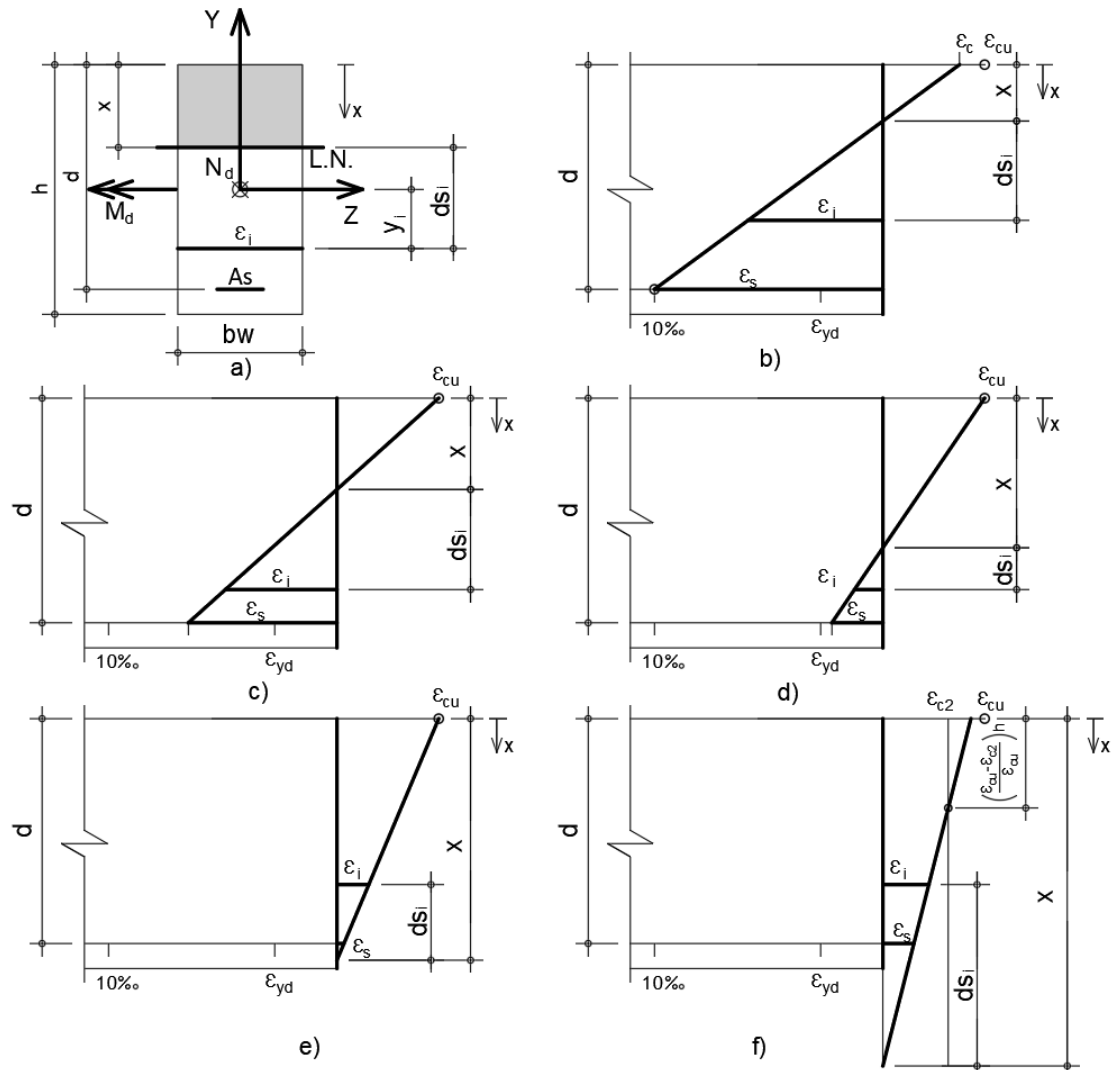
Figura 4-8: Domínios de deformação no Estado Limite Último



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118:2014

Tomando como referência a Figura 4-9 que mostra para uma seção transversal (a), a configuração deformada da seção para os domínios 2 a 5 (b-f). A coordenada ds_i é calculada pela Equação 4-58, e a deformação em uma fibra genérica ε_i com coordenada ds_i em relação à linha neutra x , pode ser determinada por meio das Equações 4-59 a 4-61.

Figura 4-9: Seção transversal típica a), configuração de deformações na seção nos domínios 2, b) 3, c), 4, d), 4a, e) e 5, f)



Fonte: O autor (2025)

Sendo:

M_d : Momento fletor solicitante de cálculo no estado limite último;

N_d : Força normal solicitante de cálculo no estado limite último;

h : Altura da seção transversal;

b_w : Largura da seção transversal;

ε_s : Deformação na armadura junto à borda tracionada pelo momento fletor;

ε_i : Deformação em uma fibra genérica i ;

x : Profundidade da linha neutra;

y_i : Coordenada da fibra genérica i , em relação ao centro geométrico da seção.

ds_i : Coordenada da fibra genérica i , em relação à linha neutra da seção.

As deformações são dadas pela Equação 4-59, para o domínio 2, Equação 4-60 para os domínios 3, 4 e 4a, e Equação 4-61 para o domínio 5.

$$ds_i = y_i - x \quad (4-58)$$

$$\varepsilon_i = \left(\frac{ds_i}{d - x} \right) 10\% \quad (4-59)$$

$$\varepsilon_i = \left(\frac{ds_i}{x} \right) 3,5\% \quad (4-60)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{c2} ds_i}{x - \left(\frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \right) h} \quad (4-61)$$

Os valores de x que delimitam os domínios são dados pelas equações 4-62 a 4-65

$$x_{23} = \frac{\varepsilon_{cu} d}{\varepsilon_{cu} + 10\%} \quad (4-62)$$

$$x_{34} = \frac{\varepsilon_{cu} d}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \quad (4-63)$$

$$x_{44a} = d \quad (4-64)$$

$$x_{4a5} = h \quad (4-65)$$

4.9 DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO ÀS SOLICITAÇÕES NORMAIS

Considerando que os elementos estruturais em análise pertencem a estruturas reticuladas de edifícios multipavimentos, pode-se considerar que as vigas sejam solicitadas por flexão simples em torno de seu eixo Z local, (Figura 4-1), e que os pilares sejam solicitados por flexão composta oblíqua. O foco do trabalho foi o dimensionamento das seções considerando os efeitos não lineares descritos anteriormente, ainda assim há a necessidade de desenvolvimento de rotinas de verificação de esforços resistentes por duas razões, sendo:

A primeira pela aferição dos resultados por meio de exemplos da bibliografia, e a segunda, e mais relevante, a geração das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, onde para uma dada normal e curvatura deve-se determinar os momentos fletores resistentes. Nos próximos itens são mostradas as formulações e estratégias adotadas para o dimensionamento e verificação de esforços resistentes das seções transversais de vigas e pilares.

4.9.1 Dimensionamento à flexão simples

O dimensionamento à flexão foi feito considerando as hipóteses básicas descritas anteriormente além da formulação de segurança dada pela ABNT NBR 6118:2014. Para que a seção atenda ao ELU, a condição da Equação 4-66 deve ser atendida. A Figura 4-10 mostra a seção transversal submetida a um momento fletor solicitante de cálculo M_d assim como as deformações, tensões e forças resultantes internas para uma situação genérica com eventual armadura dupla.

$$M_{Rd} \geq M_d \quad (4-66)$$

Sendo:

M_{Rd} : Momento resistente de cálculo no estado limite último;

M_d : Momento solicitante de cálculo no estado limite último;

h : Altura da seção transversal;

b_w : Largura da seção transversal;

d : Distância da borda comprimida pelo momento fletor até a armadura tracionada;

x : Distância da borda comprimida pelo momento fletor até linha neutra;

d' : Distância da borda comprimida pelo momento fletor até a armadura comprimida;

A_s : Armadura tracionada;

A_s' : Armadura comprimida;

ε_s : Deformação específica na armadura tracionada;

ε_s' : Deformação específica na armadura comprimida;

ε_c : Deformação específica na borda comprimida pelo momento fletor;

σ_{sd} : Tensão de cálculo na armadura tracionada;

σ_{sd}' : Tensão de cálculo na armadura comprimida;

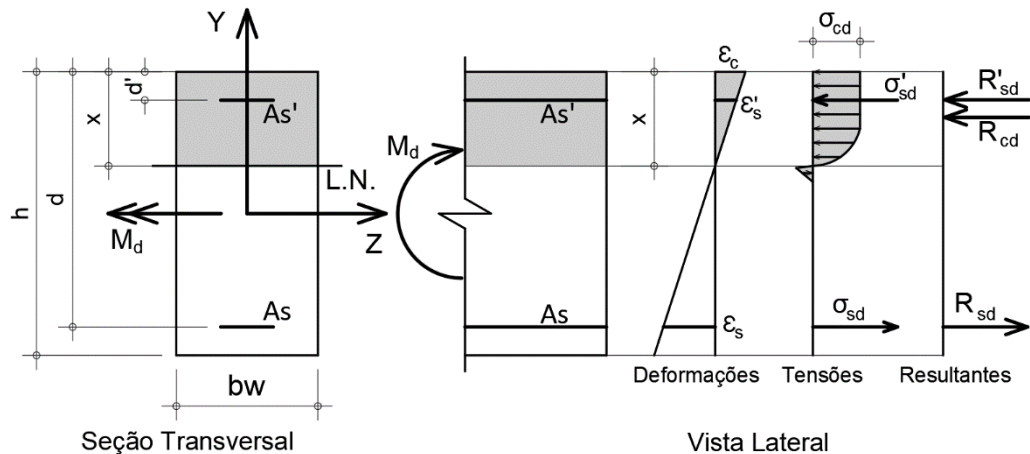
σ_{cd} : Tensão de cálculo no concreto com deformação de encurtamento;

R_{sd} : Força resultante de cálculo na armadura tracionada;

R_{sd}' : Força resultante de cálculo na armadura comprimida;

R_{cd} : Força resultante de cálculo no concreto;

Figura 4-10: Seção transversal, deformações, tensões e forças resultantes



Fonte: O autor (2025)

Assim, devem ser atendidas as equações de equilíbrio de momentos e de forças, dadas pelas Equações 4-67 e 4-68, observando o valor limite da profundidade da linha neutra, dada pelas equações 4-69 e 4-70.

$$M_{Rd} = M_d \quad (4-67)$$

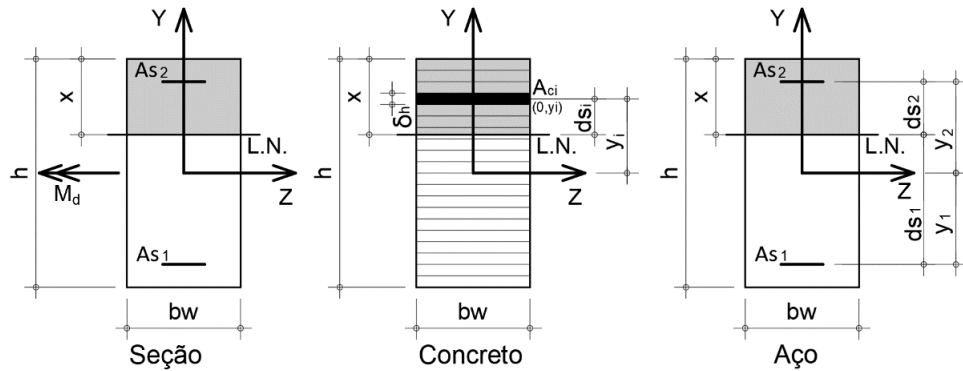
$$R_{sd} = R_{cd} + R'_{sd} \quad (4-68)$$

$$x \leq 0,45d \text{ para } f_{ck} \leq 50MPa \quad (4-69)$$

$$x \leq 0,35d \text{ para } f_{ck} > 50MPa \quad (4-70)$$

Para a consideração dos diagramas Tensão x Deformação descritos no item 4.7, adotou-se um procedimento numérico para a busca da linha neutra, onde a seção transversal é dividida em fatias, e a cada uma destas aplica-se modelo constitutivo independente tomando como referência a deformação do centro de cada fatia. A Figura 4-11 mostra a divisão da seção transversal em fatias.

Figura 4-11: Seção transversal dividida em fatias



Fonte: O Autor (2025)

As deformações em cada fatia, em função de x , de acordo com a Figura 4-11 para os domínios 2 e 3, são dadas pelas Equações 4-59 e 4-60. Assim, varia-se a profundidade da linha neutra x até que a Equação 4-67 seja atendida considerando uma tolerância adequada. A resultantes de tração e compressão no aço são calculadas a cada iteração pela Equação 4-68. Se $x < x_{lim}$ é dimensionada apenas uma armadura de tração A_{s1} , caso contrário adota-se $x = x_{lim}$ e dimensiona-se as armaduras de tração e compressão, A_{s1} e A_{s2} respectivamente.

O cálculo do momento fletor resistente M_{Rd} , é feito de acordo com a Equação 4-71, com auxílio das Equações 4-72 a 4-75, sendo considerado o somatório da contribuição de cada camada de concreto e de aço pelos seus respectivos braços de alavanca até a linha neutra x .

$$M_{Rd} = \sum_{i=1}^n R_{cdi} ds_i + R_{sd1} ds_1 + R_{sd2} ds_2 \quad (4-71)$$

$$R_{cdi} = \sigma_{cdi} b_w \delta_h \quad (4-72)$$

$$\delta_h = h/n_{cam} \quad (4-73)$$

$$R_{sd1} = \sigma_{sd1} A_{s1} \quad (4-74)$$

$$R_{sd2} = \sigma_{sd2} A_{s2} \quad (4-75)$$

Sendo:

R_{cd} : Força resultante no concreto na seção;

R_{cdi} : Força resultante no concreto na camada i ;

R_{sd1} : Força resultante na armadura A_{s1} ;

R_{sd2} : Força resultante na armadura A_{s2} ;

A_{s1} : Área de armadura tracionada na seção;

A_{s2} : Área de armadura comprimida na seção;

ds_i : Coordenada da camada de concreto A_{ci} em relação à linha neutra;

ds_1 e ds_2 : Coordenadas das armaduras A_{s1} e A_{s2} em relação à linha neutra;

n_{cam} : Número de camadas de concreto.

4.9.2 Verificação à flexão simples

O procedimento para verificação do momento resistente à flexão simples usa a mesma formulação do dimensionamento, a diferença está na abordagem do problema, onde toda a geometria, inclusive as armaduras são conhecidas, e busca-se o momento fletor resistente.

A linha neutra parte de $x = 0$ e é incrementada até que as forças resultantes na seção estejam em equilíbrio, por meio da equação 4-68. Alcançado o equilíbrio de forças, o momento fletor resistente é calculado por meio da equação 4-71. É importante esclarecer que enquanto no dimensionamento o valor de x_{lim} deve ser observado, na verificação não há tal consideração, pois não há evidências de que o exemplo de aplicação tenha tido preocupação com a ductilidade da estrutura.

4.9.3 Dimensionamento à flexão composta oblíqua

A maioria dos processos de dimensionamento à flexão composta oblíqua é feito por meio de sucessivas verificações, onde uma armadura com distribuição e diâmetro pré-definidos é imposta à seção, varia-se inclinação e profundidade da linha neutra buscando o equilíbrio da força normal solicitante, e determinam-se os pares de momentos fletores resistentes para cada par de inclinação e profundidade de linha neutra que equilibre a força normal solicitante.

Neste trabalho, para o dimensionamento à flexão composta oblíqua, partiu-se de um arranjo de barras com armaduras com mesmo diâmetro distribuídas simetricamente nas faces da seção retangular, conforme a figura 4-12.

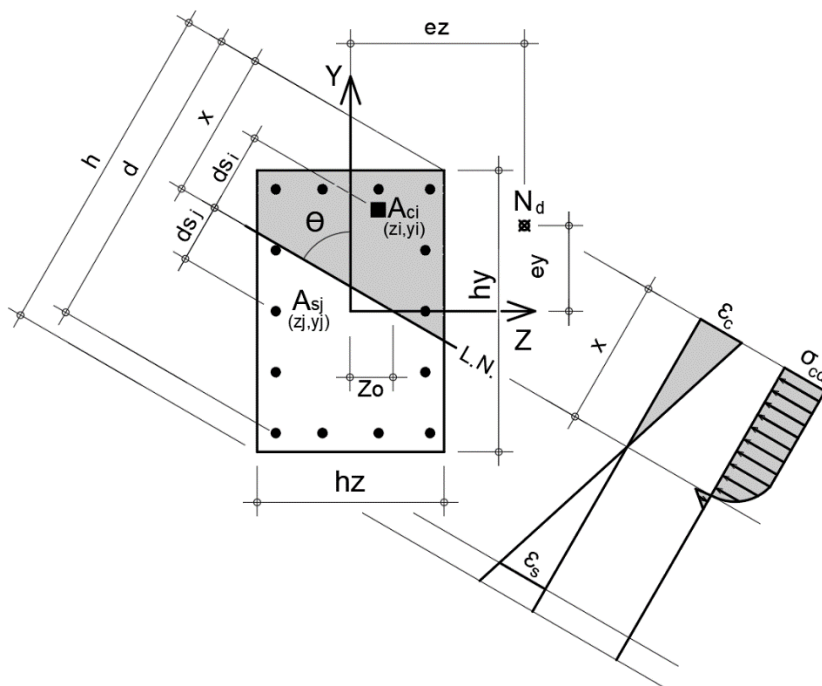
Segundo Santos (1994) tal abordagem oferece algumas vantagens como as seguintes: Considerando a distribuição de armadura fornecer a menor área de aço possível; é válido para qualquer seção transversal; e, pode ser implementado para todos os domínios

de deformação. Ainda segundo o autor, há algumas desvantagens como: Maior complexidade nos controles de convergência e diâmetros das barras diferentes dos comerciais. A seguir são mostradas as delimitações adotadas para o dimensionamento no presente trabalho:

- Arranjos das barras: Distribuição simétrica nas faces da seção;
- Seção: Apenas seções retangulares;
- Domínios de deformação: Todos os domínios, exceto domínio 1.

O dimensionamento à flexão composta oblíqua leva em consideração as hipóteses básicas descritas anteriormente além da formulação de segurança dada pela ABNT NBR 6118:2014. Para que a seção atenda ao estado limite último, as condições das Equações 4-76 a 4-78 devem ser atendidas. A Figura 4-12 mostra uma seção transversal submetida a uma força normal solicitante de cálculo N_d com excentricidades nas direções z e y (e_z e e_y), que resultam nos momentos solicitantes de cálculo M_{dy} e M_{dz} , respectivamente. São mostrados também as dimensões, sistema de eixos locais, a linha neutra, a distribuição de armaduras, as deformações, as tensões nas fibras de concreto e as variáveis relacionadas ao posicionamento da linha neutra ($L.N.$) em relação à seção.

Figura 4-12: Seção transversal típica, linha neutra e parâmetros geométricos.



Fonte: O Autor (2025)

$$N_{Rd} \geq N_d \quad (4-76)$$

$$M_{Rdz} \geq M_{dz} \quad (4-77)$$

$$M_{Rdy} \geq M_{dy} \quad (4-78)$$

Sendo:

N_{Rd} : Normal resistente de cálculo no estado limite último;

N_d : Normal solicitante de cálculo no estado limite último;

ds_i : Coordenada da área de concreto i em relação à linha neutra;

ds_j : Coordenada da barra de aço j em relação à linha neutra;

M_{Rdz} : Momento resistente de cálculo no estado limite último em torno do eixo x ;

M_{dz} : Momento solicitante de cálculo no estado limite último em torno do eixo x ;

M_{Rdy} : Momento resistente de cálculo no estado limite último em torno do eixo y ;

M_{dy} : Momento solicitante de cálculo no estado limite último em torno do eixo y ;

h : Altura da seção transversal, medida na direção perpendicular à linha neutra;

b_w : Largura da seção transversal;

d : Distância do vértice comprimido pelo momento fletor até a barra de aço mais distante;

x : Distância do vértice comprimido pelo momento fletor até linha neutra;

θ : Inclinação da linha neutra em relação ao eixo Y ;

Z_0 : Coordenada z da intercessão entre a reta que define a linha neutra e o eixo Z ;

ε_s : Deformação na armadura com maior alongamento;

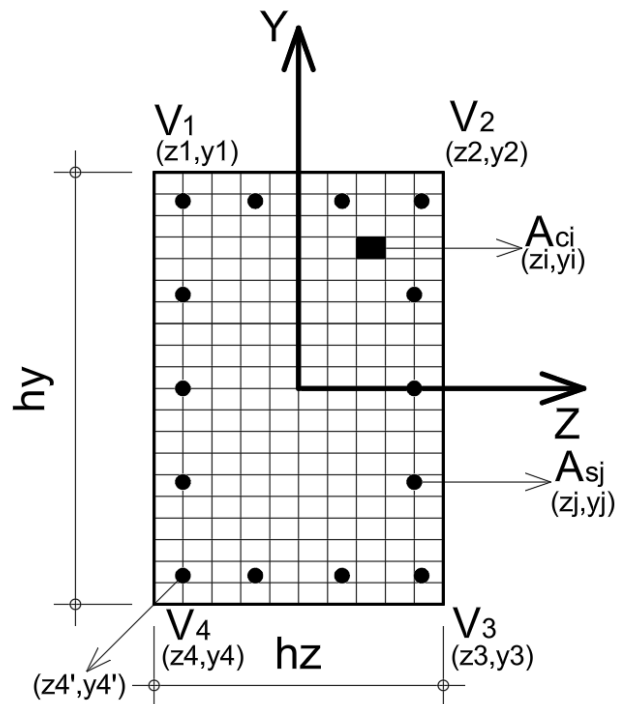
ε_c : Deformação na fibra de concreto com maior deformação de encurtamento.

Considerando que a disposição das armaduras foi pré-definida, o dimensionamento consiste na determinação do diâmetro das armaduras de tal forma que as equações 4-76 a 4-78 atinjam a igualdade considerando uma tolerância adequada. Para tanto algumas etapas são necessárias e são mostradas no decorrer do item.

A seção transversal é dividida em elementos de área de concreto e elementos de filamento de barra de aço conforme a figura 4-13. Em um primeiro instante os pontos a serem destacados são os vértices e suas coordenadas em relação ao centro geométrico que é coincidente com o sistema de eixos da seção, além das coordenadas da barra de aço mais próxima do vértice inferior esquerdo. As coordenadas dos vértices, e das barras de aço são

definidas em função dos parâmetros geométricos da seção, sendo: As dimensões da seção, o número de barras por face, o cobrimento, o diâmetro dos estribos e o diâmetro das barras longitudinais, as áreas de concreto são função dos parâmetros geométricos e do número de divisões adotadas para cada direção.

Figura 4-13: Seção transversal dividida em elementos de área de concreto e barras de aço.



Fonte: O Autor (2025)

Sendo:

hz : Dimensão da seção paralela ao eixo Z;

hy : Dimensão da seção paralela ao eixo Y;

z_i, y_i : Coordenadas das áreas de concreto A_{ci} ;

z_j, y_j : Coordenadas das áreas de aço A_{sj} ;

$z_1 \dots z_4$: Coordenadas Z dos vértices 1 a 4;

$y_1 \dots y_4$: Coordenadas Y dos vértices 1 a 4;

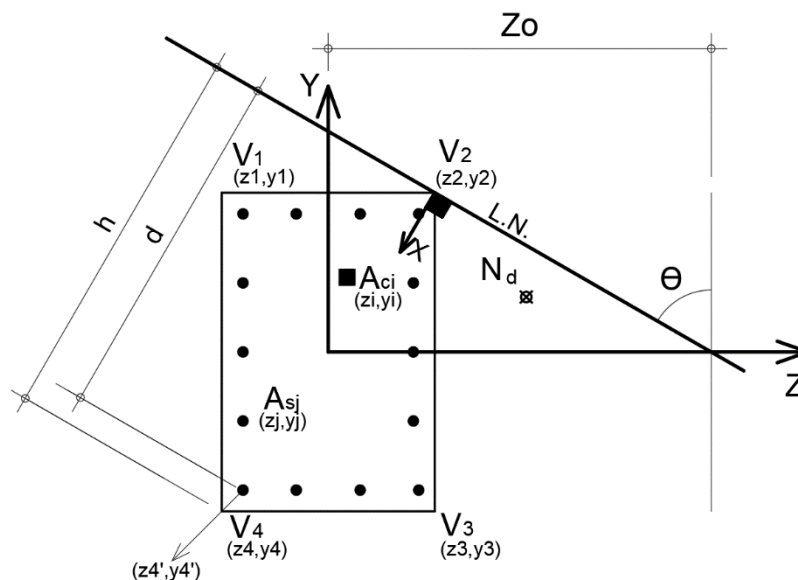
z_4, y_4 : Coordenadas Z e Y dos vértices da barra de aço mais próxima ao vértice V4;

n_z : Número de elementos de área A_{ci} na direção Z;

n_y : Número de elementos de área A_{ci} na direção Y.

A reta que define a linha neutra ($L.N.$) é definida de acordo com a convenção da figura 4-14, partindo sempre do vértice superior direito (V_2). A reta fica definida pelos parâmetros Z_0 e θ . Para cada iteração é fixado o valor de θ em um intervalo ($0 \leq \theta < 90^\circ$) e varia-se x em um intervalo ($0 \leq x < \infty$). Tal processo é repetido até que haja convergência entre os valores dos esforços resistentes e solicitantes. No início de cada iteração, define-se os valores de Z_0 , d , e h , em função dos parâmetros da reta ($L.N.$) quando $x = 0$. Tais variáveis são definidas pelas equações 4-79 a 4-81.

Figura 4-14: Posição de partida da linha neutra.



Fonte: O Autor (2025)

$$Z_0 = z_2 + y_2 \tan \theta \quad (4-79)$$

A coordenada de uma fibra genérica de concreto i ou aço j , até a reta que define a linha neutra ($L.N.$) pode ser determinada pelas equações tal e tal

$$ds_i = (z_i - Z_0) \cos \theta + y_i \sin \theta \quad (4-80)$$

$$ds_j = (z_j - Z_0) \cos \theta + y_j \sin \theta \quad (4-81)$$

Aplicando a equação 4-81 para as coordenadas do vértice (V_2) e a equação 4-81 para a armadura mais próxima ao vértice 4, no início de cada iteração ($x = 0$) com coordenadas

(z_4, y_4) define-se por meio das equações 4-82 e 4-83 h e d (respectivamente), que são constantes para cada valor de θ .

$$d = (z_4 - Z_0) \cos \theta + y_4 \cdot \text{sen} \theta \quad (4-82)$$

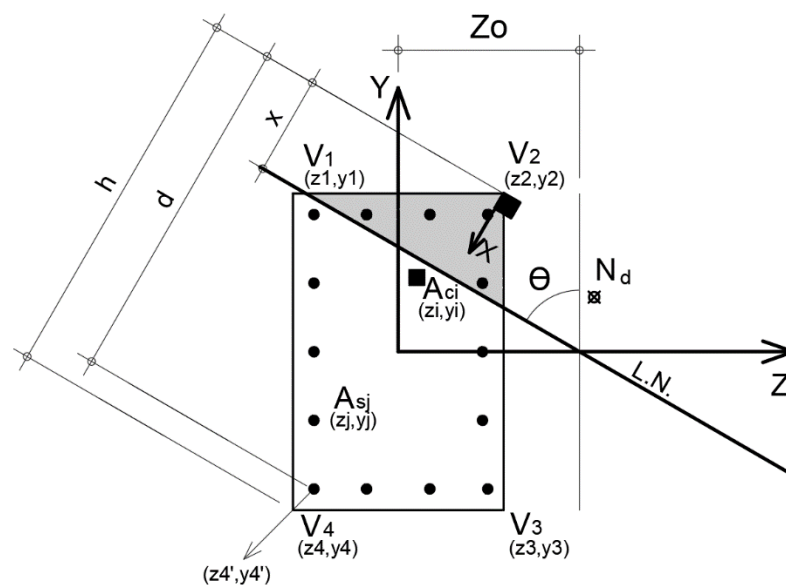
$$h = (z_4 - z_0) \cos \theta + y_4 \cdot \text{sen} \theta \quad (4-83)$$

Para um mesmo ângulo θ em cada iteração com variação do valor de x a equação da reta tem seu parâmetro Z_0 alterado. Assim a equação 4-84 mostra a relação entre Z_0 e x :

$$Z_0 = \frac{z_2 \cos \theta + y_2 \cdot \text{sen} \theta - x}{\cos \theta} \quad (4-84)$$

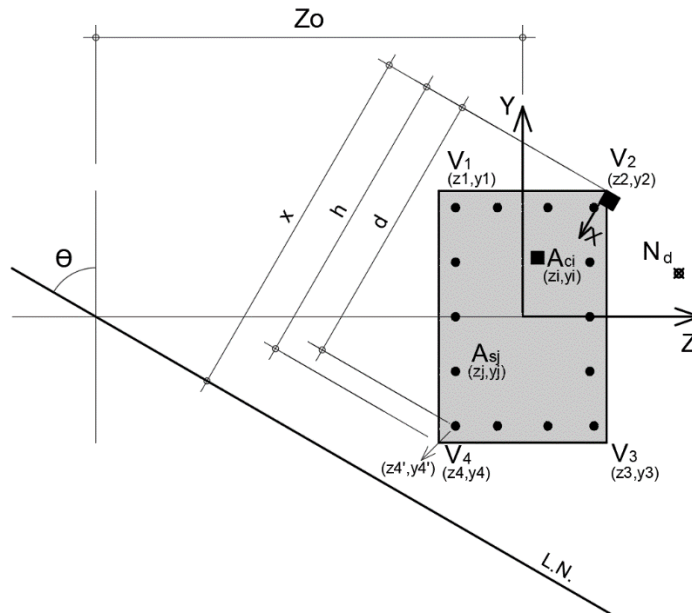
A posição da linha neutra ($L.N.$) percorre toda a seção para cada valor de θ até que seja encontrado um valor de armadura que equilibre os esforços solicitantes, assim as possibilidades de configuração da linha neutra em relação à seção são mostradas nas figuras 4-15 a 4-17.

Figura 4-15: Posição da linha neutra dentro da seção.



Fonte: O Autor (2025)

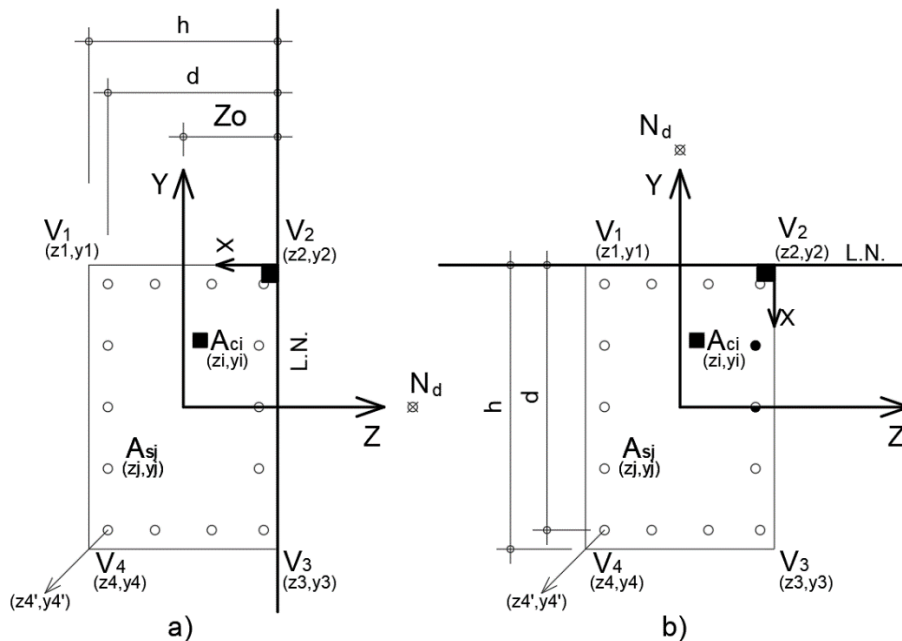
Figura 4-16: Posição da linha neutra fora da seção.



Fonte: O Autor (2025)

Há a possibilidade de duas situações particulares com ângulo $\theta = 0$, e $\theta = 90$ que caracterizam flexão composta normal em torno dos eixos Y e Z respectivamente, a configuração de partida da linha neutra é mostrada na figura 4-17 a) e b) respectivamente. Para $\theta = 0$ não há necessidade de cuidados adicionais na formulação, para $\theta = 90^\circ$ deve-se ajustar a solução, bastando suprimir a coordenada z , da formulação.

Figura 4-17: Posição de partida da linha neutra para , a) e , b)



Fonte: O Autor (2025)

Para o dimensionamento, deve-se buscar a igualdade para as Equações 4-76 a 4-78, considerando-se uma tolerância adequada. No presente trabalho foi adotada uma tolerância de 1% para a diferença entre esforços solicitantes e resistentes.

O cálculo dos momentos fletores resistentes M_{Rdz} e M_{Rdy} , é feito de acordo com as equações 4-87 e 4-88, com auxílio das equações 4-89 e 4-91. Foi considerado o somatório da contribuição de cada elemento de área de concreto e, de aço pelos seus respectivos braços de alavanca até a linha neutra x .

$$N_{Rd} = \sum_{i=1}^{nAci} R_{cdi} + \sum_{j=1}^{nbar} R_{sdj} \quad (4-85)$$

$$N_{Rd} = \sum_{i=1}^{nAci} R_{cdi} + \sum_{j=1}^{nbar} \sigma_{sdj} A_{sj} \quad (4-86)$$

$$M_{Rdz} = \sum_{i=1}^{nAci} R_{cdi} y_i + \sum_{j=1}^{nbar} R_{sdj} y_j \quad (4-87)$$

$$M_{Rdy} = \sum_{i=1}^{nAci} R_{cdi} z_i + \sum_{j=1}^{nbar} R_{sdj} z_j \quad (4-88)$$

$$R_{cdi} = \sigma_{cdi} A_{ci} \quad (4-89)$$

$$A_{ci} = \frac{hz \cdot hy}{nz \cdot ny} \quad (4-90)$$

$$R_{sdj} = \sigma_{sdj} A_{sj} \quad (4-91)$$

Sendo:

R_{cdi} : Força resultante na área A_{ci} ;

R_{sdj} : Força resultante na barra A_{sj} ;

A_{sj} : Área de aço de cada barra;

$nAci$: Número de elementos de área de concreto A_{ci} ;

$nbar$: Número de elementos de área aço A_{sj} .

Considerando que as barras tenham o mesmo diâmetro, a área de aço pode multiplicar o somatório de tensões para compor o somatório de forças nas barras conforme a equação 4-86. Assim, para cada situação de equilíbrio entre N_{Rd} e N_d , tem-se um valor de armadura, para cada valor de armadura, suas coordenadas são atualizadas em função do diâmetro e os momentos resistentes são calculados por meio das equações 4-87 e 4-88. Havendo a convergência entre os momentos resistentes e solicitantes o processo é encerrado.

4.9.4 Verificação à flexão composta oblíqua

O procedimento para verificação dos esforços resistentes à flexão composta oblíqua usa a mesma formulação do dimensionamento, a diferença está na abordagem do problema, onde toda a geometria, a posição e diâmetro das armaduras são conhecidas, e busca-se o trio de esforços resistentes $(N_{Rd} - M_{Rdz} - M_{Rdy})$. É importante ressaltar que para uma seção com armadura definida há infinitos trios resistentes $(N_{Rd} - M_{Rdz} - M_{Rdy})$. Nos problemas abordados há interesse em conhecer o par $(M_{Rdz} - M_{Rdy})$ para uma força normal N_{Rd} conhecida. Ainda assim há infinitos pares resistentes $(M_{Rdz} - M_{Rdy})$ então há a necessidade de se fixar um dos momentos solicitantes M_{dz} ou M_{dy} para a obtenção do seu respectivo par na outra direção. Tal abordagem tem aplicação na geração dos diagramas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$.

O procedimento é parecido com o descrito para o dimensionamento, onde varia-se a profundidade e inclinação da linha neutra até que as forças resultantes na seção estejam em equilíbrio, e um dos momentos solicitantes seja igual a um dos resistentes.

4.10 NÃO LINEARIDADE FÍSICA

O tratamento da não linearidade física foi feito por meio da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, que prescreve que os efeitos da não linearidade física podem ser considerados por meio do diagrama $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ para cada seção com armadura suposta conhecida e para a força normal de cálculo atuante. A rigidez à flexão depende da capacidade das seções transversais desenvolverem esforços internos resistentes que se opõem à deformação da seção transversal. Assim, considerando a clássica equação da linha elástica de elementos fletidos, pode-se relacionar a rigidez da seção transversal, com armadura conhecida submetida a uma força normal solicitante à curvatura existente, quando submetida a determinados momentos fletores conforme a equação 4-92. O eixo longitudinal local do elemento linear é chamado eixo X.

$$\frac{1}{r} = \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} \quad (4-92)$$

Sendo:

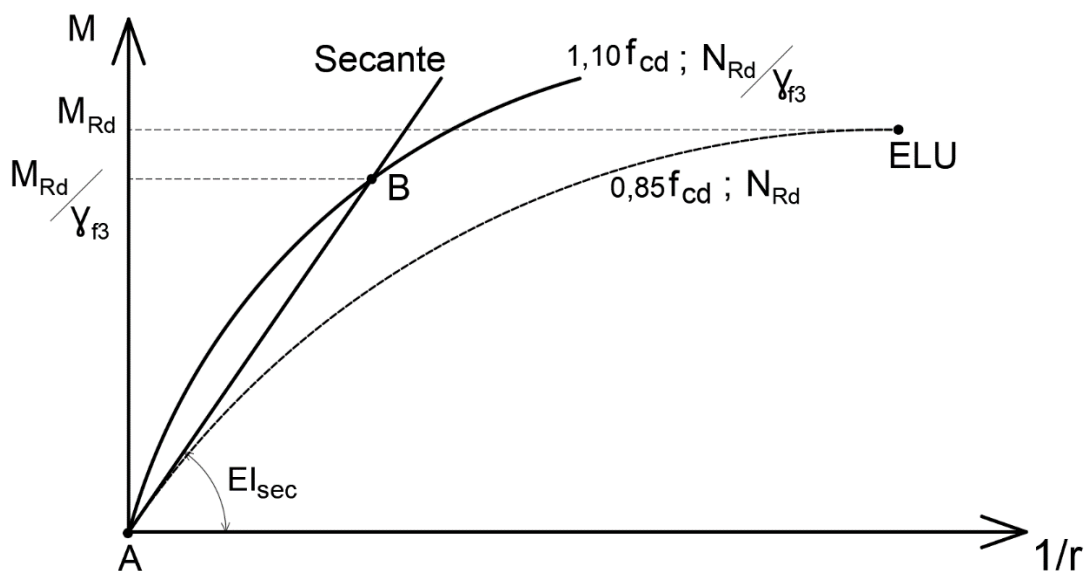
$\frac{1}{r}$: Curvatura da seção transversal;

$M_{(x)}$: Momento fletor solicitante em uma coordenada x;

$EI_{(x)}$: Rigidez à flexão da seção na coordenada x.

A rigidez à flexão é a razão entre o momento fletor solicitante e a correspondente curvatura da peça. Por causa do comportamento não linear dos materiais, a relação entre momentos fletores e a curvatura não é linear. Conseqüentemente, para um elemento que tenha seção transversal e armadura constantes ao longo de seu comprimento, e tenha variação na intensidade do momento fletor solicitante, terá variação na sua rigidez, assim a rigidez será variável ao longo deste elemento. A figura 4-18 mostra o aspecto da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ proposto ABNT NBR 6118:2014. Pode ser considerada a formulação de segurança da referida normativa em que se calculam os efeitos de segunda ordem das ações multiplicadas por γ_f / γ_{f3} e posteriormente são multiplicadas por γ_{f3} com $\gamma_{f3} = 1,1$.

Figura 4-18: : Relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$.



Fonte: Adaptado da ABNT NBR 6118:2014

A figura 4-18 mostra três diagramas, com finalidades distintas, sendo:

1 - A curva tracejada mostra o diagrama obtido considerando a tensão de pico do concreto igual a $0,85 f_{cd}$ e a força normal $N_{Rd} = N_d$ que caracteriza o diagrama até a ruptura no ELU;

2 - A curva cheia representa o diagrama obtido considerando a tensão de pico do concreto igual a $1,10 f_{cd}$ e a força normal $N_{Rd} = N_d / \gamma_{f3}$ tendo sentido até $M = M_{Rd}$;

3 - A reta cheia \overline{AB} representa uma linearização do diagrama obtido considerando a tensão de pico do concreto igual a $1.10 f_{cd}$ e a força normal $N_{Rd} = N_d / \gamma_{f3}$, o ponto A é a origem do sistema e o ponto B corresponde ao momento fletor $M = M_{Rd} / \gamma_{f3}$.

As razões para a adoção da tensão de pico no concreto igual a $1.10 f_{cd}$, segundo França (1991) tendo como referência a normativa europeia EN 1989: Eurocode 2, são as seguintes:

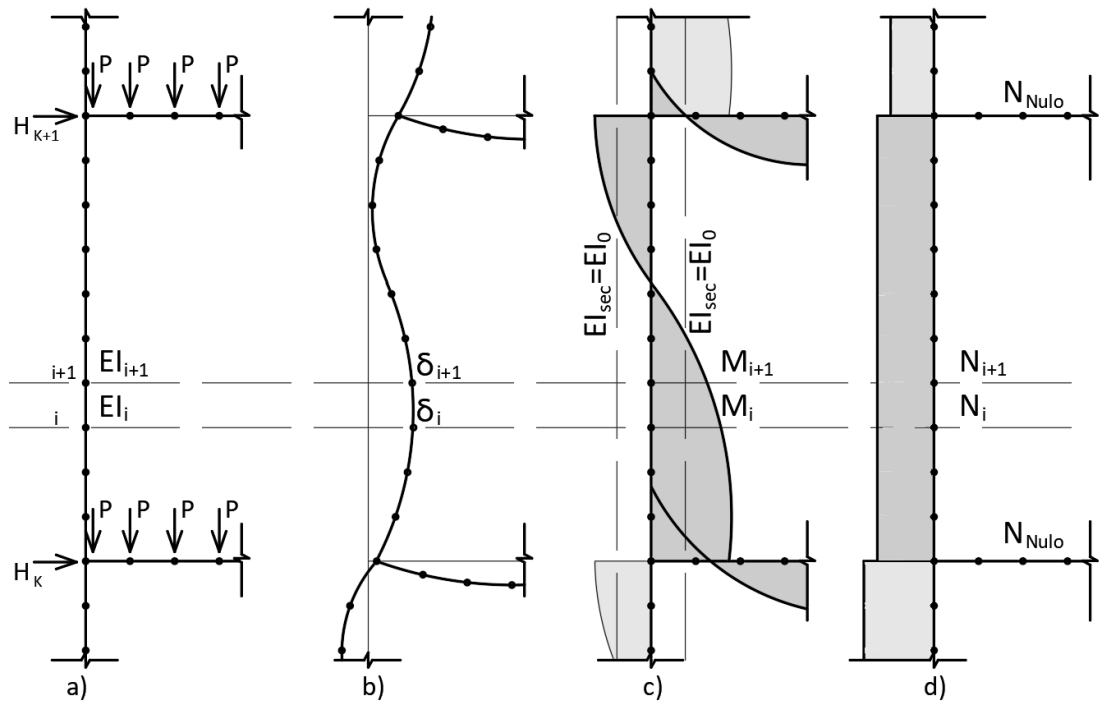
1 - O fator de conversão da resistência medida para um corpo de prova para um elemento estrutural, que está embutido no cálculo σ_{cd} não é aplicável à deformabilidade;

2 - Os valores médios mais baixos para a estrutura como um todo ou um elemento isolado como um pilar são menos prováveis que para uma seção transversal específica.

Maiores detalhes podem ser encontrados na tese do referido autor, inclusive os coeficientes de segurança parciais que levam ao valor de pico de $1.10 f_{cd}$.

No presente trabalho, cada tramo de pilar e trecho de viga foi subdividido em 10 elementos, e considerando que a rigidez à flexão foi determinada para cada elemento, foi adotada a curva $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ obtida para o concreto com tensão de pico igual a $1.10 f_{cd}$, a força normal $\gamma_{f3} = 1,00$ que caracteriza o diagrama relativo ao ELU. A figura 4-19 mostra a divisão de pilares e vigas em elementos menores para avaliação da NLF.

Figura 4-19: Discretização, deslocamentos e esforços em um trecho da estrutura



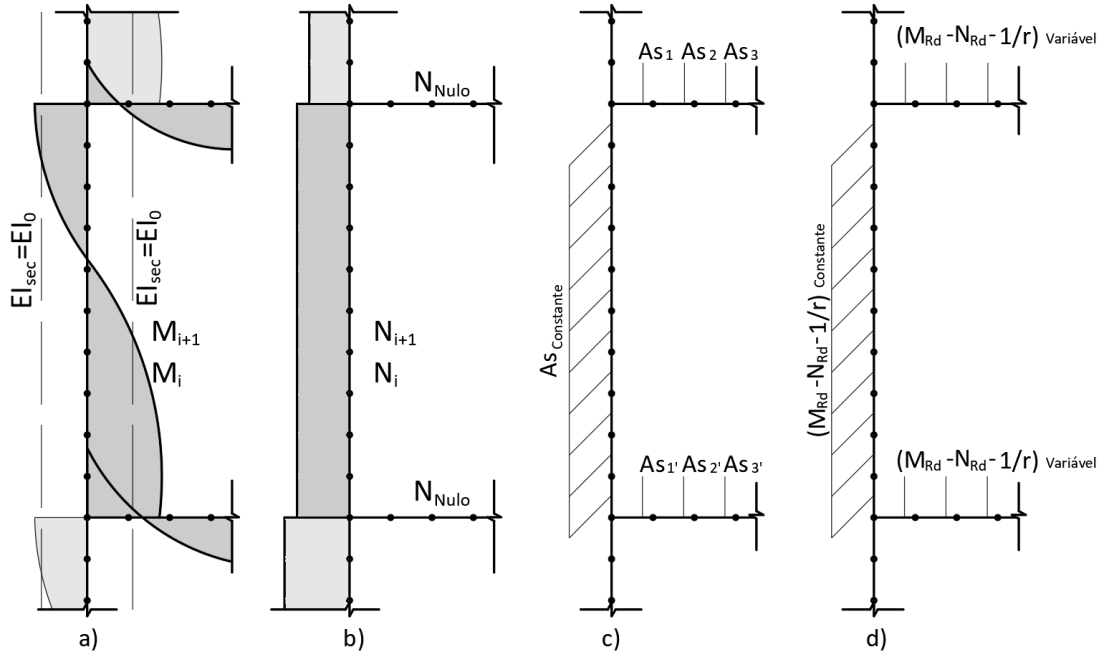
Fonte: O Autor (2025)

É importante ressaltar que na figura 4-19, por simplicidade o diagrama de força Normal dos pilares é representado como constante ao longo do tramo, nas análises, a variação de elemento a elemento em um mesmo tramo devido ao peso próprio é considerada. A força normal nas vigas que pertencem aos pavimentos onde é aplicável a hipótese de diafragma rígido é nula devido à indeformabilidade do pavimento em seu plano. Os diagramas de momentos exemplificados na figura são típicos de edifícios multipavimentos e apenas qualitativos, podendo ter configurações distintas a depender da geometria e combinação de ações imposta à estrutura.

Considerando que a armadura dos pilares deve ser constante ao longo de cada tramo e que a armadura das vigas pode variar ao longo de seu comprimento em função da intensidade do momento fletor, adota-se para os elementos de um mesmo tramo de pilar a máxima armadura determinada para cada elemento que compõe o tramo, assim, o diagrama $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ relacionado à máxima armadura é imposto a todos os elementos do tramo. Para as vigas, cada elemento com valor distinto de armadura conta com um diagrama $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ particular. A figura 4-20 mostra a adoção de armadura constante e diagrama $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ único para os elementos do pilar e armaduras variáveis com diagrama $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ particular para cada elemento de viga.

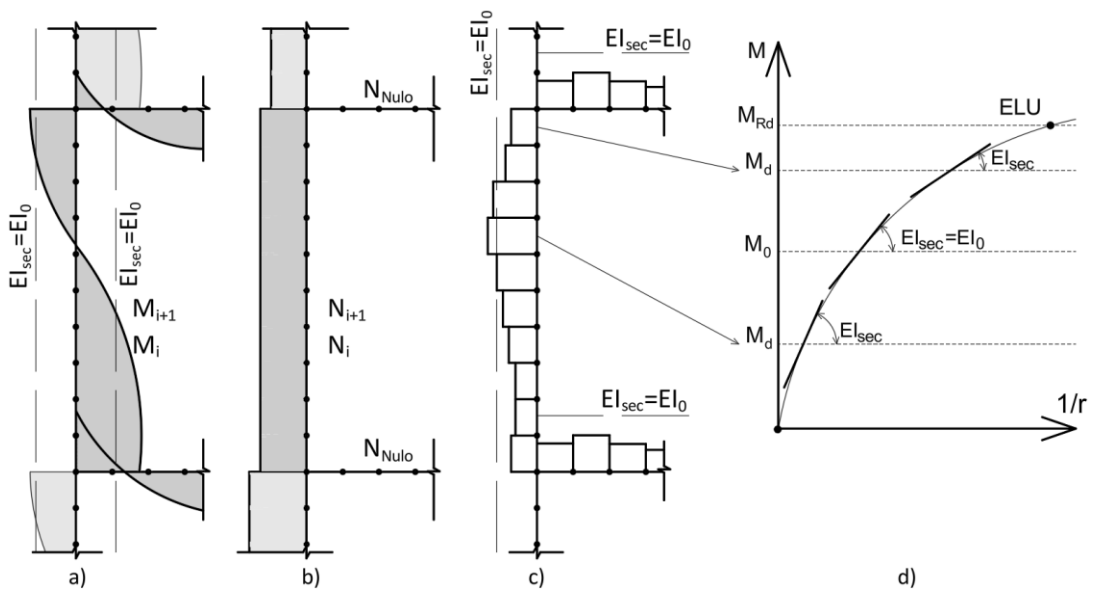
É importante notar que a adoção de um diagrama único para cada tramo de pilar não implica uma rigidez constante, pois a rigidez depende da intensidade do momento fletor solicitante no elemento em análise, a figura 4-21 mostra tal situação.

Figura 4-20: Esforços, disposição de armaduras e relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ em um trecho da estrutura



Fonte: O Autor (2025)

Figura 4-21: Esforços, e rigidez em função das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ e da intensidade dos momentos em um trecho da estrutura.



Fonte: O Autor (2025)

Ainda na figura 4-21, em c) e d) pode-se perceber que para elementos com momentos menores que M_0 que seria o valor de momento onde a rigidez secante é igual a rigidez bruta, a rigidez secante pode ser maior que a rigidez bruta, e para elementos solicitados por momentos maiores que M_0 a rigidez secante é menor que a bruta.

Para a rigidez axial, segundo França (1991), em situações particulares pode-se obter valores negativos de rigidez, o que complica desnecessariamente a análise considerando que sua influência é pequena, assim o referido autor recomendou adotar a rigidez axial bruta, sendo $EA_{\text{sec}} = E_c A_c$, sendo E_c o módulo de elasticidade secante do concreto e A_c a área da seção transversal

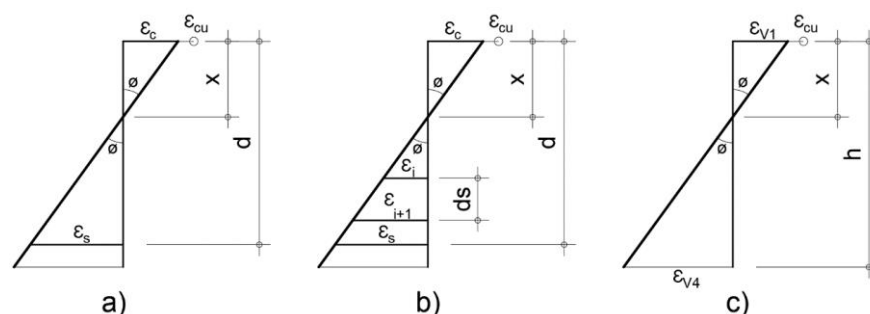
4.10.1 Construção da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$

No presente trabalho é mostrada a metodologia básica para a determinação de tais relações, pois há farta bibliografia mostrando com maiores detalhes as hipóteses e metodologias de cálculo, exemplos são a própria normativa ABNT NBR 6118:2014, SANTOS (1994), KIMURA (2018), KIMURA (2019), PASTORE (2020).

As relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ devem ser determinadas considerando-se o comportamento não linear do aço e do concreto, segundo a ABNT NBR 6118:2014, pode-se usar os modelos constitutivos mostrados no item 4-7.

A curvatura $1/r$ pode ser entendida como o ângulo de rotação da seção transversal quando submetida à força normal e momentos fletores, ou eventualmente apenas a momentos fletores. A figura 4-22 mostra o ângulo de rotação ϕ da seção deformada. Em a) mostra a tradicional notação da curvatura calculada por meio da diferença entre a deformação na fibra do vértice comprimido pelo momento fletor e a deformação na armadura tracionada dividido pela altura útil, em b) e c) mostra que a curvatura pode ser calculada pela diferença de deformações entre duas fibras quaisquer divididas pela distância entre estas fibras.

Figura 4-22: Curvatura da seção e as deformações de referência.



Fonte: O Autor (2025)

Tomando a figura 4-22 como referência, a curvatura pode ser calculada pelas equações 4-93 a 4-95 para as situações mostradas em a), b), e c), respectivamente. Considerando a mesma convenção de sinais para as deformações definidas no item 4-8.

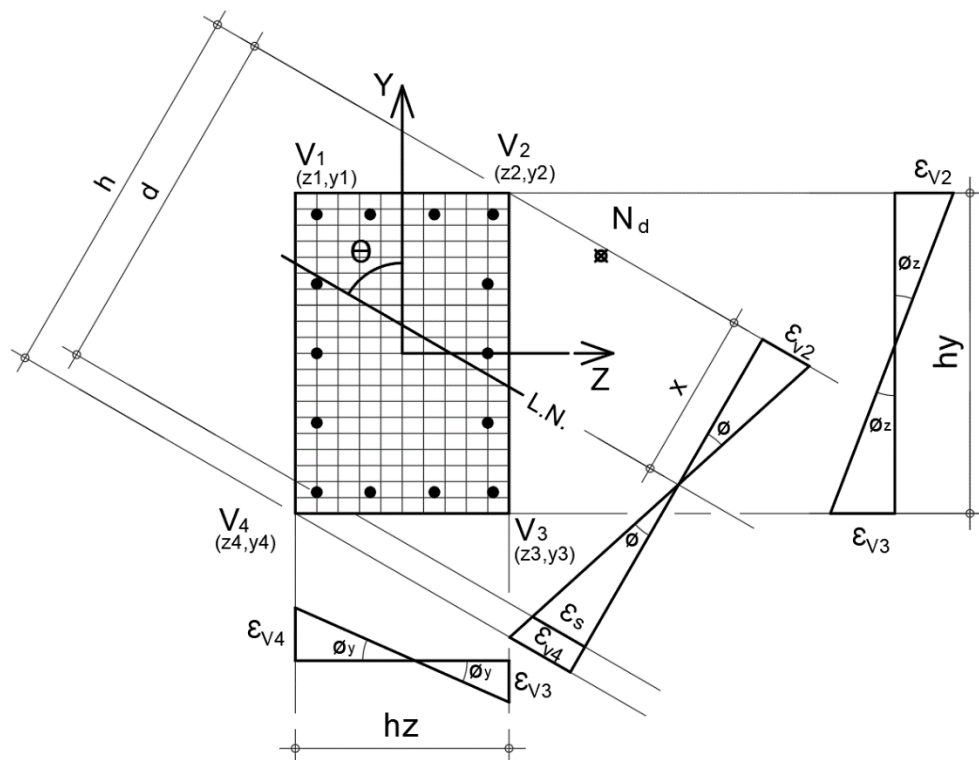
$$\phi = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_s}{d} \quad (4-93)$$

$$\phi = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{ds} \quad (4-94)$$

$$\phi = \frac{\varepsilon_{v4} - \varepsilon_{v1}}{h} \quad (4-95)$$

Considerando uma seção submetida à flexão composta oblíqua, a curvatura ϕ medida perpendicularmente à linha neutra, que tenha uma inclinação θ em relação ao eixo Y, pode ser decomposta segundo as direções dos eixos principais da seção em componentes de curvatura ϕ_y e ϕ_z conforme a figura 4-23. A curvatura e suas componentes segundo os eixos são calculadas pelas equações 4-96 a 4-98.

Figura 4-23: Linha neutra e curvaturas



Fonte: O Autor (2025)

$$\phi = \frac{\varepsilon_{v4} - \varepsilon_{v2}}{h} \quad (4-96)$$

$$\phi_y = \frac{\varepsilon_{v4} - \varepsilon_{v3}}{hz} \quad (4-97)$$

$$\phi_z = \frac{\varepsilon_{v3} - \varepsilon_{v2}}{hy} \quad (4-98)$$

$$\phi_y = \phi \cos \theta \quad (4-99)$$

$$\phi_z = \phi \sin \theta \quad (4-100)$$

Alternativamente as componentes das curvaturas segundo os eixos Y e Z podem ser calculadas pelas equações 4-99 e 4-100. A seguir são listados os passos básicos necessários para a determinação dos pontos do diagrama para uma seção com armadura conhecida solicitada por qualquer solicitação normal:

- 1- Calcular o momento fletor resistente M_{Rd} em função da normal N_d e das armaduras, procedimento idêntico ao descrito em 4-9, assim como a curvatura última ϕ que configura o ELU hipotético ($\sigma_{cd} = 1,10 f_{cd}$);
- 2- Definir o número de pontos N do diagrama, a variação da curvatura δ_ϕ para cada ponto do diagrama é dada por: $\delta_\phi = \phi / (N - 1)$;
- 3- Para cada ponto i do diagrama, com a curvatura $\phi_i = i \delta_\phi$, buscar o valor de x que equilibre a força normal N_d ;
- 4- Calcular o momento resistente por meio do mesmo procedimento mostrado em 4-9, gerando um par (ϕ_i, M_{Rdi}) para o ponto i do diagrama;
- 5- Repetir os passos 3 e 4 até que a curvatura ϕ_i seja igual à curvatura última ϕ , o último ponto do diagrama coincide com a curvatura última e o momento resistente de cálculo que configura o ELU hipotético ($\sigma_{cd} = 1,10 f_{cd}$).

4.10.2 Rigidez por meio da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$

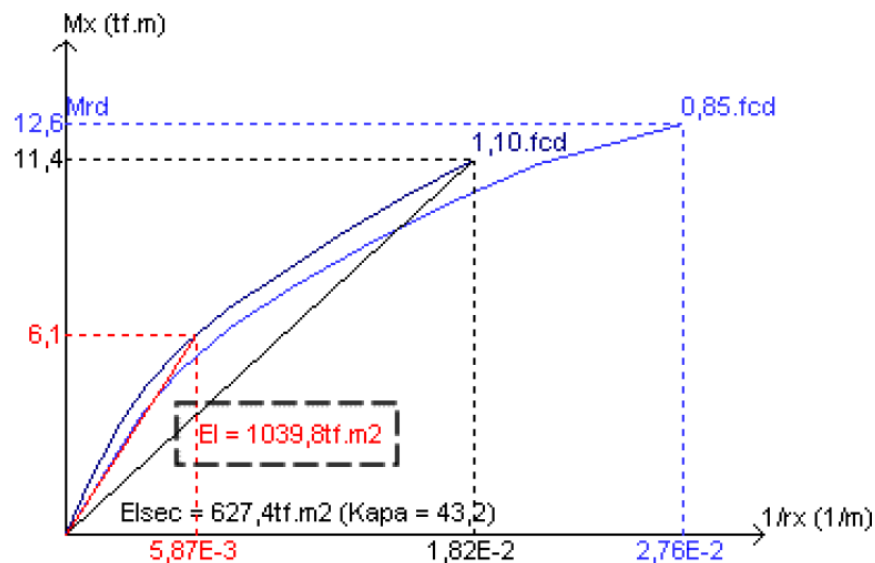
Embora a construção das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ seja independentes das solicitações normais solicitantes, a determinação da rigidez em função de tais relações precisam de alguns ajustes em função do tipo de solicitação, segundo KIMURA (2019), há três alternativas distintas para a determinação da rigidez através da relação

$(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, em função do tipo de solicitação. A seguir são mostradas as particularidades para as seções submetidas à flexão composta normal e oblíqua

4.10.2.1 Flexão composta normal

Para seções submetidas à flexão composta normal a determinação da rigidez por meio da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ pode seguir a definição dada pela equação 4-92 onde a rigidez é a inclinação da curva $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ para um dado momento. Assim, pode-se considerar que a rigidez seja variável em função do momento solicitante, o referido autor chama de Rigidez secante sem linearização, mostrada na figura 4-24, onde mostra-se a curva (linha azul), e o valor da rigidez definido em função da intensidade do momento fletor solicitante na seção analisada (traço vermelho).

Figura 4-24: Rigidez secante sem linearização



Fonte: KIMURA (2019)

O procedimento para a determinação da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ é exatamente o mesmo descrito no item 4.10.1.

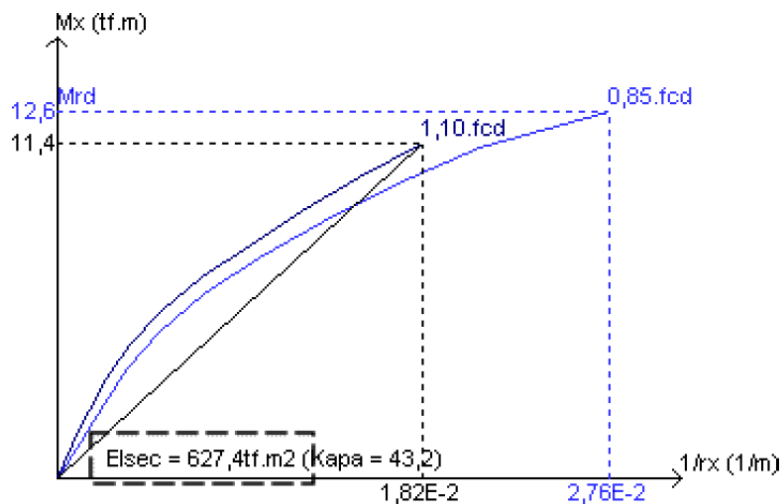
4.10.2.2 Flexão composta oblíqua

Para a flexão composta oblíqua, segundo o referido autor, há duas alternativas distintas para a determinação da rigidez, sendo chamadas Rigidez secante linearizada e Rigidez secante oblíqua. As características de cada uma das alternativas são mostradas a seguir:

4.10.2.2.1 Rigidez secante linearizada

É a forma mais simples de determinação da rigidez, pois não considera a interação da flexão composta oblíqua, assim é definida para cada eixo como se a seção estivesse submetida à duas flexões composta normal independentes. Como é feita uma linearização da curva, e esta é aplicada para todo o lance do pilar, ainda assim é conservadora. É mostrada na figura 4-25, onde mostra-se a curva (linha azul), e sua respectiva linearização, (linha preta).

Figura 4-25: Rigidez secante linearizada



Fonte: KIMURA (2019)

O procedimento geral para a determinação da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ descrito em 10.2.1 precisa ser ajustado. Não há interesse no diagrama como um todo, como há a sua linearização, os pontos de interesse são a origem e o ponto onde a curvatura leva a um momento (calculado com $\sigma_{cd} = 1,10 f_{cd}$) igual ao momento resistente (calculado com $\sigma_{cd} = 0,85 f_{cd}$). A seguir são listados os passos básicos necessários para a determinação dos pontos do diagrama considerando a rigidez secante linearizada:

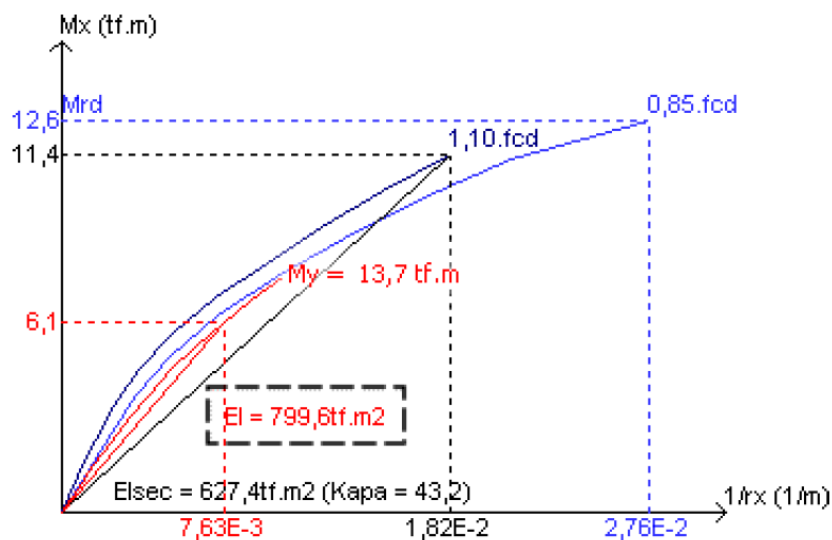
- 1- Calcular os momentos fletores resistentes M_{Rdy} e M_{Rdz} isoladamente em flexão composta normal em função da normal N_d e das armaduras, procedimento idêntico ao descrito em 4.9.4, assim como as curvaturas últimas para cada eixo ϕ_y e ϕ_z ;
- 2- Definir o número de divisões N das curvaturas δ_ϕ dada por: $\delta_\phi = \phi / (N - 1)$ para cada direção, definindo assim o valor de variação das curvaturas para cada tentativa;

- 3- Para cada ponto $\phi_i = i\delta_\phi$, buscar o valor de x que equilibre a força normal N_d (FCN);
 - 4- Calcular o momento resistente por meio do mesmo procedimento mostrado em 4.9.4, gerando um par (ϕ_i, M_{Rdi}) ;
 - 5- Comparar o valor do momento resistente dado pelo par (ϕ_i, M_{Rdi}) com o momento resistente de cálculo;
 - 6- Repetir os passos 3 a 5 até que o momento resistente dado pelo par (ϕ_i, M_{Rdi}) seja igual ao momento resistente último, para cada uma das direções.
- Ao final são gerados dois diagramas (retas) $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, em flexão composta normal para cada direção.

4.10.2.2.2 Rigidez secante oblíqua

A curva é determinada considerando a interação entre as flexões na flexão composta oblíqua. Não há linearização, assim pode ser aplicada para cada seção do pilar em função da intensidade dos momentos fletores solicitantes em flexão composta oblíqua. Seria a forma mais precisa para a definição da rigidez das seções dos pilares. É mostrada na figura 4-26, onde mostra-se a curva (linha azul), e o valor da rigidez definido em função da intensidade do momento fletor atuante na seção analisada (traço vermelho).

Figura 4-26: Rigidez secante oblíqua



Fonte: KIMURA (2019)

O procedimento geral para a determinação da relação $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ descrito em 10.2.1 precisa ser ajustado. A principal diferença em relação ao método anterior é que além

da necessidade de se determinar os esforços resistentes de cálculo há também a necessidade de se conhecer os esforços solicitantes de cálculo oriundos de uma análise anterior para a determinação da rigidez oblíqua. A seguir são listados os passos básicos necessários para a determinação dos pontos do diagrama considerando a rigidez secante oblíqua:

- 1- Determinar os esforços solicitantes de cálculo em análise preliminar;
- 2- Calcular os momentos fletors resistentes M_{Rdy} e M_{Rdz} em flexão composta oblíqua, assim como as curvaturas últimas para cada eixo ϕ_y e ϕ_z considerando:
 Para o cálculo de M_{Rdy} e ϕ_y , considerar as atuações de N_d e M_{dz} ;
 Para o cálculo de M_{Rdz} e ϕ_z , considerar as atuações de N_d e M_{dy} ;
- 3- Definir o número de pontos N do diagrama, a variação da curvatura δ_ϕ para cada ponto do diagrama é dada por: $\delta_\phi = \phi / (N - 1)$;
- 4- Para cada ponto i do diagrama, para cada direção, com a curvatura $\phi_i = i\delta_\phi$, buscar o valor de x e θ que equilibre a força normal N_d e o momento fletor M_d na direção perpendicular (FCO);
- 5- Para cada direção, calcular o momento resistente por meio do mesmo procedimento mostrado em 4-9, gerando um par (ϕ_i, M_{Rdi}) para o ponto i do diagrama;
- 6- Repetir os passos 4 e 5 até que a curvatura ϕ_i seja igual à curvatura última ϕ , o último ponto do diagrama coincide com a curvatura última e o momento resistente de cálculo que configura o ELU hipotético ($\sigma_{cd} = 1,10 f_{cd}$).

Devemos lembrar que para as vigas, excluindo as questões relacionadas à ancoragem das armaduras e às envoltórias de esforços, é usual que a armadura varie ao longo do vão em função da intensidade do momento, ou seja podemos adotar um valor de (As) para cada seção a depender do momento atuante. Assim, podemos admitir que todas as seções estejam no ELU. Tal situação é considerada no trabalho, o que pode levar a valores de rigidez menores que os dados pela bibliografia correlata, uma vez que para a determinação de tais rigidezes em geral se considera a armadura efetiva que contempla uma envoltória de combinações que a viga esteja solicitada. No presente trabalho considera-se apenas a armadura calculada para a combinação em análise.

Para os pilares, a situação é diferente, pois a boa prática assim como as normativas preconizam que para um mesmo tramo, deve-se repetir para todas as seções, a armadura (As) calculada para a seção mais crítica. Assim, apenas a seção crítica estaria no ELU, enquanto as demais teriam armadura maior que a necessária para atingir o ELU.

As armaduras calculadas no dimensionamento não foram ajustadas para arranjos em bitolas comerciais, assim, área de aço efetiva é igual à calculada.

A tolerância para o equilíbrio de forças tanto no dimensionamento quanto no cálculo dos momentos resistentes para o diagrama $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ foi de 0,5%. Testes realizados durante o estudo mostraram que não há diferenças significativas para tolerâncias de até 1%.

4.10.3 Roteiro para análise dos exemplos de validação

Para os exemplos de validação, onde as armaduras são conhecidas, a depender do tipo de solicitação do elemento, os passos básicos são descritos a seguir:

- 1- Entrada de dados com geometria, seção e armaduras, propriedades dos materiais e carregamentos;
- 2- Análise inicial: Cálculo dos esforços com rigidez penalizada (simplificada) para obtenção dos esforços iniciais $(N_d - M_{dy} - M_{dz})$: Os esforços iniciais são necessários para a definição das curvas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$;
- 3- Definição da curva $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ para cada elemento;
- 4- Definição da rigidez:
 - Elementos em FCN: Rigidez secante sem linearização;
 - Elementos em FCO: Rigidez secante oblíqua;
- 5- Análise estrutural incremental iterativa (NLG + NLF);
- 6- Em função dos novos esforços da análise do passo 5, voltar ao passo 3 até que os deslocamentos sejam iguais aos do passo anterior, a menos de uma tolerância.

4.10.4 Roteiro para análise dos exemplos de aplicação

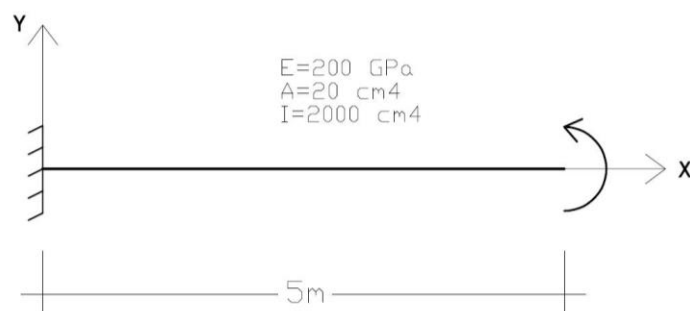
Para os exemplos de aplicação, onde as armaduras são dimensionadas considerando uma distribuição prévia, a depender do tipo de solicitação do elemento, os passos básicos são descritos a seguir:

- 1- Entrada de dados com geometria, seção, propriedades dos materiais e carregamentos;
- 2- Análise inicial: Cálculo dos esforços com rigidez penalizada (simplificada) para obtenção dos esforços iniciais ($N_d - M_{dy} - M_{dz}$);
- 3- Dimensionamento das armaduras em função do arranjo prévio, arranjo das armaduras;
- 4- Definição da curva ($M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r$) para cada elemento;
- 5- Definição da rigidez:
 - Elementos em FCN: Rigidez secante sem linearização;
 - Elementos em FCO: Rigidez secante oblíqua;
- 6- Análise estrutural incremental iterativa (NLG + NLF);
- 7- Em função dos novos esforços da análise do passo 6, voltar ao passo 3 até que a armadura calculada seja igual à do passo anterior, a menos de uma tolerância.

4.11 VALIDAÇÃO DAS ROTINAS RELACIONADAS A NLG

Para mostrar a eficácia da formulação utilizada na solução da não linearidade geométrica, são mostrados os resultados em deslocamentos de uma viga engastada sujeita a um momento em sua extremidade conforme a figura 4-27 proposta por PIMENTA (1986). Para a análise, a viga foi dividida em 10 elementos e o carregamento dividido em 10 passos de acordo com a tabela 4-1.

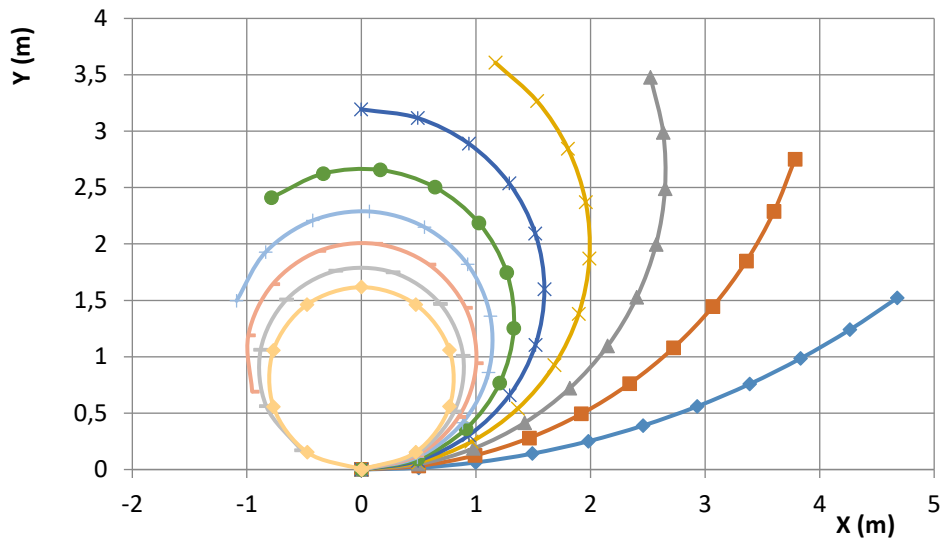
Figura 4-27: Viga engastada sujeita a momento aplicado na extremidade



Fonte: CORELHANO (2010)

A figura 4-28 mostra a configuração deslocada da barra para cada passo de carregamento.

Figura 4-28: Configurações deslocadas da viga em função do carregamento



Fonte: O Autor(2025)

A tabela 4-1 mostra as coordenadas e rotações dos nós em função da intensidade do carregamento.

Tabela 4-1: Coordenadas e rotações do nó extremo da viga engastada

Coordenadas do extremo da viga									
M	Este trabalho			PIMENTA (1986)			PIMENTA (1986)/Este trabalho		
(kN.m)	X (m)	Y(m)	Rot. (rad)	X (m)	Y(m)	Rot. (rad)	X (m)	Y(m)	Rot. (rad)
0,00	5,000	0,000	0,000	5,000	0,000	0,000	1,000	-	-
5,00	5,000	0,016	0,006	4,999	0,016	0,006	1,000	0,999	1,000
14,13	5,000	0,044	0,018	4,999	0,044	0,018	1,000	1,000	1,000
30,80	4,999	0,096	0,039	4,998	0,096	0,038	1,000	1,000	1,000
50,00	4,997	0,156	0,063	4,996	0,156	0,063	1,000	1,000	1,000
502,65	4,678	1,520	0,628	4,678	1,516	0,624	1,000	0,998	0,993
1380,29	2,866	3,349	1,726	2,863	3,344	1,725	0,999	0,999	0,999
2909,87	-0,658	2,597	3,637	-0,654	2,584	3,637	0,994	0,995	1,000
3674,91	-1,090	1,222	4,596	-1,081	1,217	4,594	0,992	0,996	1,000
4439,45	-0,606	0,231	5,553	-0,604	0,232	5,549	0,996	1,005	0,999
5026,55	0,004	0,000	6,280	0,000	0,000	6,283	0,000	0,000	1,000

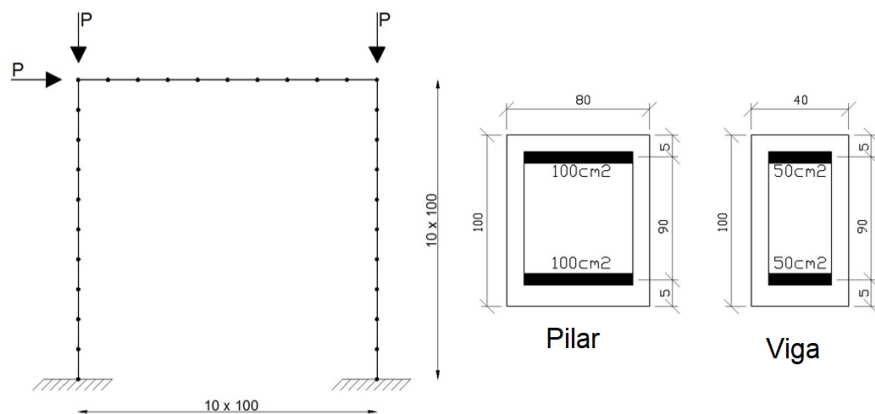
Fonte: O Autor (2025)

Na comparação com os deslocamentos apresentados por PIMENTA (1986), que utiliza uma formulação para grandes deslocamentos e rotações, os deslocamentos obtidos com a formulação empregada neste trabalho apresentam boa representatividade.

4.12 VALIDAÇÃO DAS ROTINAS RELACIONADAS A NLG+NLF

A figura 4-29 mostra o pórtico simples modelado por SILVA (1996), e PAULA (2001), empregando uma discretização em dez elementos para cada barra, mesma discretização adotada neste trabalho.

Figura 4-29: Geometria, carregamento e seções do pórtico



Fonte: CORELHANO (2010)

A tabela 4-2 mostra os parâmetros do aço e a tabela 4-3 os parâmetros do concreto.

Tabela 4-2: Propriedades do aço

f_{yk} (kN/cm ²)	γ_s	E_s (kN/cm ²)	ϵ_{yd} (1/1000)
48,3	1,15	21000	2,00

Fonte: O Autor (2025)

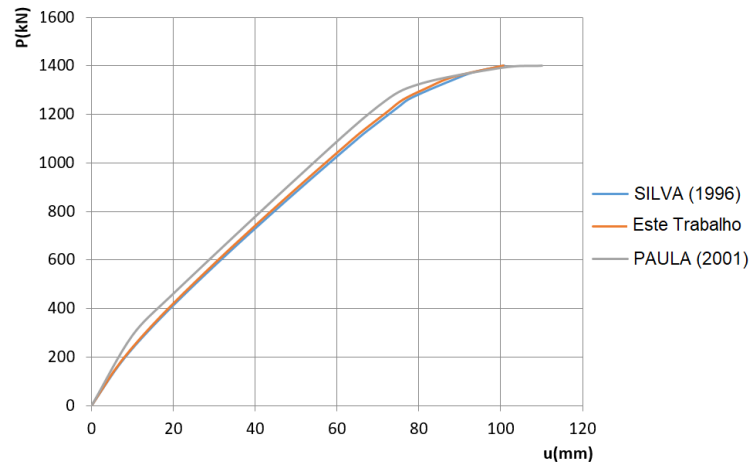
Tabela 4-3: Propriedades dos concretos para NLF

Concreto								
f_{ck} (MPa)	γ_c	n	α_E	E_{ci} (MPa)	ϵ_{c2}	ϵ_{cu}	f_{ctm} (MPa)	f_{ctk} (MPa)
14	1,40	2,00	1,00	20950,00	2,00	3,50	1,12	0,78

Fonte: O Autor (2025)

A figura 4-30 mostra a curva carregamento P versus deslocamento horizontal do topo do pórtico.

Figura 4-30: Geometria, carregamento e seções do pórtico



Fonte: O Autor (2025)

Figura 4-30 mostra que os deslocamentos são praticamente iguais aos apresentados pelas referências, os pontos de inflexão e carga máxima também estão bem representados.

No apêndice é mostrado mais um exemplo maior proposto por PINTO (2002).

4.13 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Ao longo do capítulo foram mostradas as formulações e estratégia de resolução para a implementação numérica para análise de estruturas reticuladas em concreto armado, com especial atenção às análises não lineares globais e locais.

Foram mostradas as formulações para a consideração da hipótese de diafragma rígido para os pavimentos sem a necessidade de modelagem das lajes, assim como a formulação para a consideração da deformação por força cortante, que é relevante para análise de elementos estruturais com maior altura relativa na direção da força cortante

Do ponto de vista da não linearidade geométrica, foi mostrada a formulação básica além das estratégias de solução incremental, de fundamental importância para o acoplamento entre NLG e NLF.

Foram discutidas as estratégias de implementação para a consideração das hipóteses básicas da teoria do concreto armado para o dimensionamento levando em conta modelos constitutivos normativos.

Do ponto de vista da NLF, houve maior atenção às estratégias e formulação inicialmente para a determinação dos diagramas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$ para seções solicitadas por FCN e FCO e também como considerar a rigidez à flexão por meio dos diagramas para seções de pilares solicitadas por FCO.

Foram listados os roteiros para a verificação e precisão da ferramenta computacional por meio de exemplos da literatura, além do roteiro para as análises dos exemplos de aplicação, que englobam toda a estratégia de implementação discutida ao longo do capítulo

Por último são mostrados exemplos comparativos para validação dentro do campo de aplicação da ferramenta para as rotinas mais importantes. Vale lembrar que ao longo do desenvolvimento do trabalho foram feitos testes parciais para validação de cada rotina, desde as que já estavam consolidadas na versão destinada ao trabalho de mestrado do autor até as novas funcionalidades necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

5 Exemplos de aplicação

Neste capítulo são mostradas as características dos modelos usados para aplicação do método proposto no trabalho. São mostrados os parâmetros dos materiais, carregamentos, geometria, análises realizadas bem como as variáveis investigadas. Foram analisados dois exemplos de aplicação, sendo o primeiro com o objetivo de avaliar a metodologia e os efeitos de segunda ordem locais e globais. O segundo exemplo tem o objetivo de avaliar a influência da esbeltez e resistência do concreto nos efeitos de segunda ordem locais e globais, além da intensidade dos esforços e dos deslocamentos horizontais dos pavimentos.

Para cada um dos modelos dos exemplos foram realizadas duas análises distintas, descritas a seguir:

NLG/NLF: É a análise objeto deste trabalho, que consiste em uma análise não linear geométrica e física rigorosas conforme descrito nos capítulos 3 e 4.

NLG/NBR: Consiste em uma análise não linear geométrica rigorosa e uma análise não linear física simplificada por meio da penalização da rigidez de vigas e pilares de acordo com a ABNT NBR 6118:2014. Tal análise é similar à análise global desenvolvida na prática de projetos. características comuns aos modelos

A seguir são mostradas as características que são comuns aos exemplos de aplicação. As características particulares de cada modelo são mostradas junto aos itens relacionados ao modelo em análise.

5.1.1 Propriedades dos materiais

As propriedades dos materiais foram determinadas de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, as tabelas 5-1 a 5-3 mostram as propriedades do aço e concreto usados nos exemplos de aplicação.

Tabela 5-1: Propriedades do aço

f_{yk} (kN/cm ²)	γ_s	E_s (kN/cm ²)	ε_{yd} (1/1000)
50	1,15	21000	2,07

Fonte: O Autor (2025)

Para a análise global da estrutura a ABNT NBR 6118:2014, prescreve que pode-se considerar o módulo de elasticidade representativo do concreto dado pela equação 5-1:

$$E_c = 1,10E_{cs} \quad (5-1)$$

Tabela 5-2: Propriedades dos concretos para análise estrutural

Concreto						
f_{ck} (MPa)	α_E	E_{ci} (MPa)	E_{cs} (MPa)	E_c (MPa)	ν	G_c (MPa)
25	1,00	28000,00	24150,00	26565,00	0,20	9660,00
40	1,00	35417,51	31875,76	35063,33	0,20	12750,30
70	1,00	43443,33	42357,25	46592,97	0,20	16942,90

Fonte: O Autor (2025)

Tabela 5-3: Propriedades dos concretos para dimensionamento e NLF

Concreto								
f_{ck} (MPa)	γ_c	n	α_E	E_{ci} (MPa)	ε_{c2}	ε_{cu}	f_{ctm} (MPa)	f_{ctk} (MPa)
25	1,40	2,00	1,00	28000,00	2,00	3,50	2,56	1,80
40	1,40	2,00	1,00	35417,51	2,00	3,50	3,51	2,46
70	1,40	1,44	1,00	43443,33	2,42	2,66	4,61	3,23

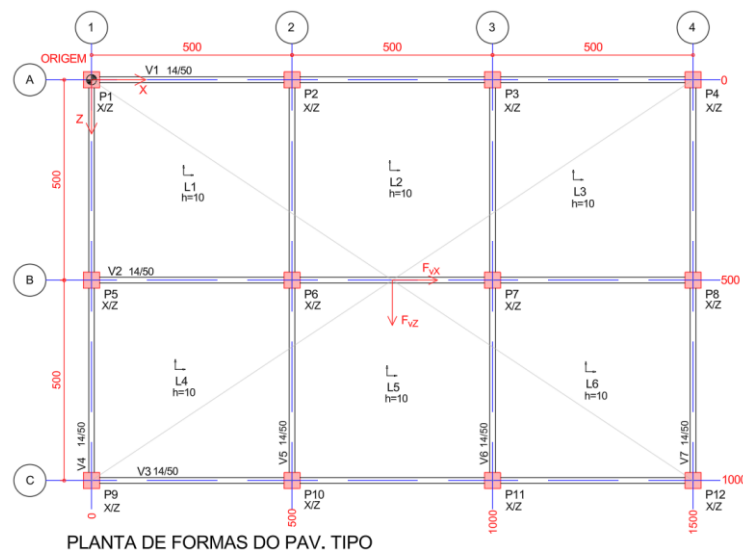
Fonte: O Autor (2025)

5.1.2 Geometria dos exemplos

5.1.2.1 Formas dos pavimentos

Planta de formas típica é mostrada na figura 5-1. A diferença entre os modelos está na seção dos pilares. Para o exemplo 1 os pilares possuem seção de 25/25 cm. No exemplo 2 as dimensões dos pilares são variáveis para a relação entre os lados, sendo tais relações nas proporções de 1/4, 1/2, e 1/1.

Figura 5-1: Planta de formas típica dos exemplos de aplicação.



Fonte: O Autor (2025)

5.1.2.2 Pilares analisados

Os pilares estudados nos exemplos de aplicação, considerando a figura 5-1, foram os pilares P7 (interno) e o pilar P12 (canto). Tais pilares foram escolhidos em função dos esforços preponderantes típicos que os solicitam, sendo o pilar P7 solicitado preponderantemente por força normal e o pilar P12 solicitado preponderantemente por flexão oblíqua.

5.1.2.3 Altura e número de pavimentos

O exemplo 1 possui 4 pavimentos iguais (inclusive carregamentos), com pé direito estrutural de 3,00m, totalizando 12m de altura. O exemplo 2 possui 6 pavimentos iguais (inclusive carregamentos), com pé direito estrutural de 4,40m, totalizando 26,4m de altura. Os esquemas de elevação com o número de pavimentos e altura dos edifícios são mostrados nos itens específicos de cada exemplo.

5.1.2.4 Cobrimentos

Para todos os exemplos foi considerada classe de agressividade ambiental II, não foi considerada a possibilidade de redução do cobrimento em função da adoção de classe de resistência maior que o mínimo estabelecido para a classe de agressividade em análise. Assim os cobrimentos adotados para as seções de vigas e pilares são os seguintes:

Pilares: *Cobrimento* = 3,0cm

Vigas: *Cobrimento* = 3,0cm

Por simplicidade, foi considerado para todas as seções que o diâmetro dos estribos seria de 6.3mm.

5.1.3 Ações

As ações foram calculadas considerando as normativas ANBR NBR 6118:2014, ABNT NBR 6120:2019, e ABNT NBR 6123:2023

5.1.3.1 Cargas verticais

Considerando as variáveis a seguir, foram determinadas as cargas acidentais devido ao peso próprio da estrutura e dos elementos não estruturais:

G_{1k} : Peso próprio das lajes;

G_{2k} : Peso próprio dos revestimentos (Piso e Forro);

G_{3k} : Peso próprio das vigas;

G_{4k} : Peso próprio das paredes;

Q_k : Carga accidental sobre as lajes;

P_{gk} : Carregamento característico Permanente linearmente distribuído nas vigas;

P_{gk} : Carregamento característico Acidental linearmente distribuído nas vigas;

Do ponto de vista do carregamento relativo aos elementos de fechamento e revestimento, considerou-se que todos os exemplos possuem revestimento cerâmico, e paredes de fechamento em alvenaria de blocos cerâmicos sobre todas as vigas. Do ponto de vista das cargas relativas ao uso, foi considerado que o exemplo 1 é um edifício residencial e o exemplo 2 um edifício comercial destinado a salas de escritórios. O peso próprio dos elementos foi considerado, calculado considerando o peso específico do concreto armado como 25kN/m³.

As tabelas 5-4 e 5-5 mostram os valores de carregamentos considerados nas lajes e nas vigas, respectivamente.

Tabela 5-4: Cargas uniformemente distribuídas nas lajes

Exemplo	Laje	Cargas uniformemente distribuídas nas lajes		
		G_{1k} (kN/m ²)	G_{2k} (kN/m ²)	Q_k (kN/m ²)
Exemplo 1	L1 a L6	2,50	1,20	1,50
Exemplo 2	L1 a L6	2,50	1,20	3,00

Fonte: O Autor (2025)

Tabela 5-5: Cargas lineares linearmente distribuídas nas vigas

Exemplo	Viga	Cargas linearmente distribuídas nas vigas	
		G_{3k} (kN/m)	G_{4k} (kN/m)
Exemplo 1	V1 a V7	1,75	6,50
Exemplo 2	V1 a V7	1,75	6,50

Fonte: O Autor (2025)

Os carregamentos lineares resultantes nas vigas são mostrados nos itens específicos de cada exemplo.

5.1.3.2 Vento

Considerando as variáveis a seguir, foram determinadas as forças horizontais devido ao vento nas direções globais X e Z. A força horizontal equivalente ao desaprumo foi

calculada de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, sendo considerado desprezível, pois seu efeito foi menor que 30% do efeito do vento (foi considerado o momento de tombamento na base como referência).

V_0 : Velocidade básica do vento;

S_1 : Fator topográfico;

S_2 : Fator de rugosidade e regime de escoamento;

S_3 : Fator estatístico;

Y : Cota do pavimento a partir do solo;

q : Pressão do vento na cota Y ;

Af_x : Área de fachada para o vento na direção X ;

Af_z : Área de fachada para o vento na direção Z ;

Ca_x : Coeficiente de arrasto para o vento na direção X ;

Ca_z : Coeficiente de arrasto para o vento na direção Z ;

Fv_{xk} : Força do vento característica no pavimento na direção X ;

Fv_{zk} : Força do vento característica no pavimento na direção Z ;

l_1 : Comprimento da fachada perpendicular à direção do vento em análise;

l_2 : Comprimento da fachada paralela à direção do vento em análise;

h : Altura da edificação acima do solo;

Os parâmetros considerados para o cálculo da velocidade básica para todos os exemplos são mostrados na tabela 5-6.

Tabela 5-6: Parâmetros de cálculo da velocidade básica.

V_0 (m/s)	45,00
Classe Edificação	Exemplo 1: A
	Exemplo 2: B
Rugosidade do terreno	III
Fator Topográfico S_1	1,00
Fator Estatístico S_3	1,00
Turbulência	Baixa

Fonte: O Autor (2025)

As forças resultantes concentradas na altura de cada pavimento são mostradas no exemplos específicos.

5.1.3.3 Combinações e ações de cálculo

A seguir são mostrados os coeficientes considerados para descrever as combinações normais últimas de interesse para os exemplos de aplicação.

Considerando:

P_d : Carregamento de cálculo linearmente distribuído nas vigas;

Fv_{xd} : Força do vento de cálculo no pavimento na direção X ;

Fv_{zd} : Força do vento de cálculo no pavimento na direção Z ;

γ_g : Coeficiente de seguranças das ações permanentes;

γ_q : Coeficiente de seguranças das ações variáveis;

ψ_0 : Coeficiente de simultaneidade das ações variáveis para o ELU;

Coeficientes de segurança:

Ações permanentes:

$$\gamma_g = 1,4$$

Ações variáveis:

$$\gamma_q = 1,4$$

$\psi_0 = 0,5$: Carga acidental (Exemplo 1);

$\psi_0 = 0,7$: Carga acidental (Exemplo 2);

$\psi_0 = 0,6$: Vento;

Por simplicidade, foram consideradas apenas as combinações de ações que foram consideradas mais importantes para as análises dos parâmetros de interesse, listadas na tabela 5-7. Foram consideradas as combinações onde não há atuação do vento para identificar os deslocamentos horizontais dos pilares entre dois pavimentos consecutivos, e as combinações onde o vento é a ação variável principal para avaliar os deslocamentos horizontais e momentos máximos que ocorrem nos extremos dos tramos de pilares. Os valores das ações de cálculo são mostrados nos exemplos específicos.

Tabela 5-7: Equações das Combinações de cálculo no ELU

Combinação	Ação Variável Principal	Equação
1	P_{qk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4P_{qk}$
2	V_{xk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4(V_{xk} + \psi_0 P_{qk})$
3	V_{zk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4(V_{zk} + \psi_0 P_{qk})$

Fonte: O Autor (2025)

5.2 EXEMPLO 1

A seguir são mostradas as características particulares do Exemplo 1.

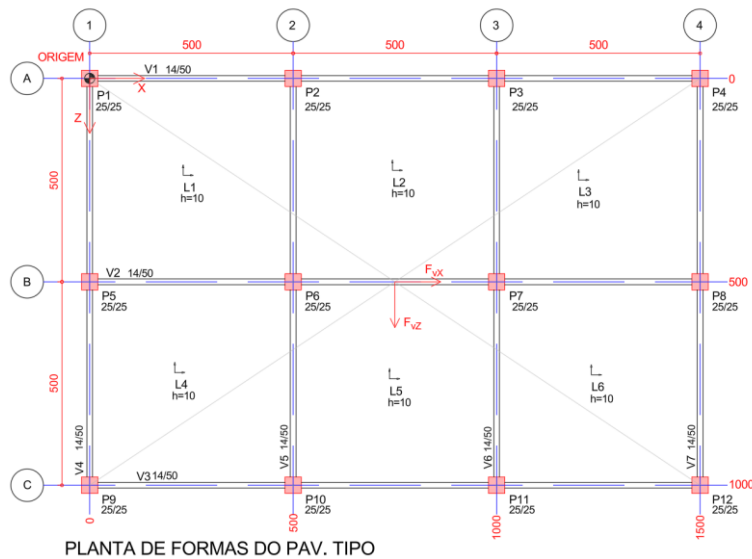
5.2.1 Materiais

Foram considerados concreto da classe C25 e aço CA 50. As propriedades dos materiais estão descritas nas tabelas 5-1 a 5-3.

5.2.2 Geometria

A figura 5-2 mostra a planta de formas dos pavimentos, e a figura 5-3 mostra o esquema de níveis da estrutura.

Figura 5-2: Planta de formas do exemplo 1



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-3: Esquema de níveis do exemplo 1



Fonte: O Autor (2025)

5.2.3 Elementos e variáveis analisados

Foram analisados os pilares P7 e P12 considerando duas combinações normais últimas, sendo a primeira considerando apenas ações verticais e a segunda considerando o vento na direção Z como ação variável principal.

Para cada uma das combinações foram avaliadas as seguintes variáveis:

- Momentos fletores em torno dos dois eixos globais (X e Z);
- Deslocamentos horizontais ao longo da altura dos pilares para as direções globais (X e Z).

5.2.4 Ações e combinações

5.2.4.1 Cargas verticais

As cargas resultantes nas vigas, com valores característicos são mostrados na tabela 5-8.

Tabela 5-8: Cargas distribuídas nas vigas

Viga	Cargas Lineares nas vigas					
	Trecho 1		Trecho 2		Trecho 3	
	P_{gk} (kN/m)	P_{qk} (kN/m)	P_{gk} (kN/m)	P_{qk} (kN/m)	P_{gk} (kN/m)	P_{qk} (kN/m)
V1=V3	11,63	1,37	10,92	1,08	11,63	1,37
V2	19,97	4,75	17,50	3,75	19,97	4,75
V4=V7	11,63	1,37	11,63	1,37	-	-
V5=V6	19,71	4,65	19,71	4,65	-	-

Fonte: O Autor (2025)

5.2.4.2 Ações horizontais

As forças horizontais devido ao vento com valores característicos, concentradas na altura de cada pavimento, são mostrados na tabela 5-10. Os coeficientes de arrasto são mostrados na tabela 5-9.

Tabela 5-9: Parâmetros e valores dos coeficientes de arrasto.

Vento	l_1 (m)	l_2 (m)	h (m)	l_1/l_2	h/l_1	C_a
V_{xk}	10,00	15,00	12,00	0,67	1,20	1,00
V_{zk}	15,00	10,00		1,50	0,80	1,19

Fonte: O Autor (2025)

Tabela 5-10: Parâmetros e valores de força do vento em cada pavimento.

Pav.	Y (m)	S_2	q (kN/m ²)	C_{ax}	C_{az}	Af_x (m ²)	Af_z (m ²)	F_{V_x} (kN)	F_{V_z} (kN)
1	3,00	0,83	1,03	1,00	1,19	30	45	31,03	55,40
2	6,00	0,89	1,11			30	45	33,26	59,37
3	9,00	0,93	1,15			30	45	34,64	61,83
4	12,00	0,96	1,19			30	45	35,65	63,63

Fonte: O Autor (2025)

5.2.4.3 Combinações e ações de cálculo

Considerando que o Exemplo 1 é um edifício residencial, as equações das combinações são mostradas na tabela 5-11. Para este exemplo foram consideradas apenas as combinações 1 e 3.

Tabela 5-11: Equações das Combinações de cálculo no ELU

Combinação	Ação Variável Principal	Equação
1	P_{qk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4P_{qk}$
2	V_{xk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4(V_{xk} + 0,5P_{qk})$
3	V_{zk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4(V_{zk} + 0,5P_{qk})$

Fonte: O Autor (2025)

As tabelas 5-12, e 5-13, mostram as ações de cálculo para cada uma das combinações de interesse.

Tabela 5-12: Cargas nas vigas com valores de cálculo

Viga	P_d (kN/m): Combinação 1			P_d (kN/m): Combinação 3		
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3
V1=V3	18,20	16,81	18,20	17,24	16,05	17,24
V2	34,61	29,75	34,61	31,29	27,13	31,29
V4=V7	18,20	18,20	-	17,24	17,24	-
V5=V6	34,10	34,10	-	30,85	30,85	-

Fonte: O Autor (2025)

Tabela 5-13: Ação do vento com valores de cálculo

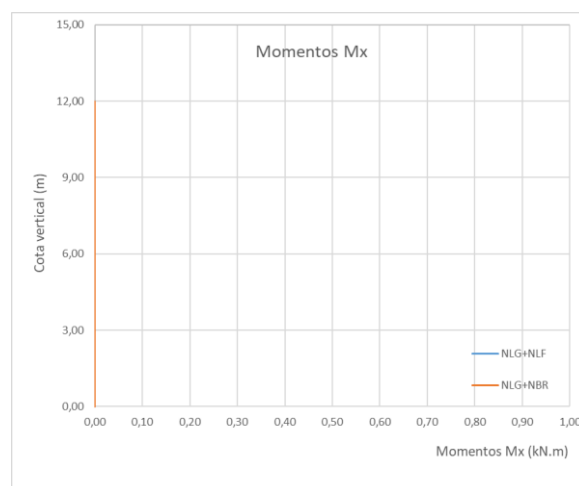
Pavimento.	Combinação 1		Combinação 3	
	$F_{V_{Xd}}$ (kN)	$F_{V_{Zd}}$ (kN)	$F_{V_{Xd}}$ (kN)	$F_{V_{Zd}}$ (kN)
1	0,00	0,00	0,00	77,56
2				83,12
3				86,56
4				89,09

Fonte: O Autor (2025)

5.2.5 Resultados

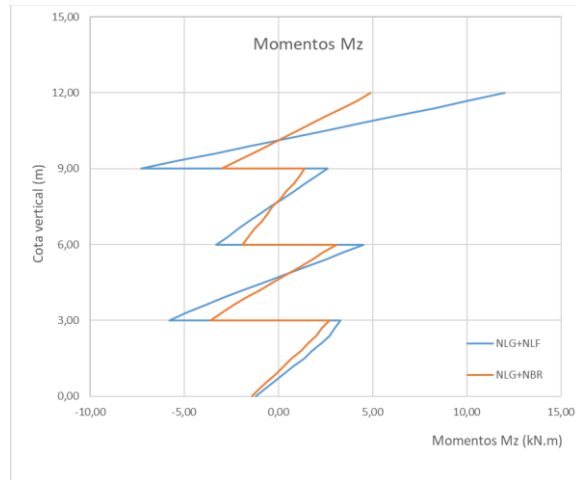
Para cada um dos modelos são mostrados quatro gráficos comparando os resultados de cada análise, sendo o primeiro mostrando os momentos fletores em torno do eixo X, o segundo, os momentos fletores em torno do eixo Z, o terceiro e quarto mostrando os deslocamentos horizontais para as direções X e Z, respectivamente.

As figuras 5-4 a 5-11 mostram o quatro gráficos acima descritos para os pilares P7 e P12 considerando a Combinação 1.

Figura 5-4: Momentos fletores em torno de X: Pilar P7, combinação 1

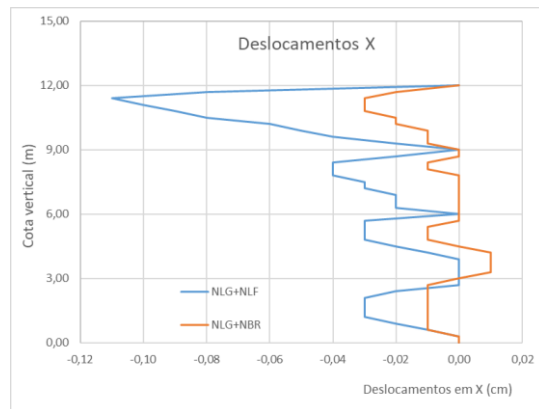
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-5: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, combinação 1



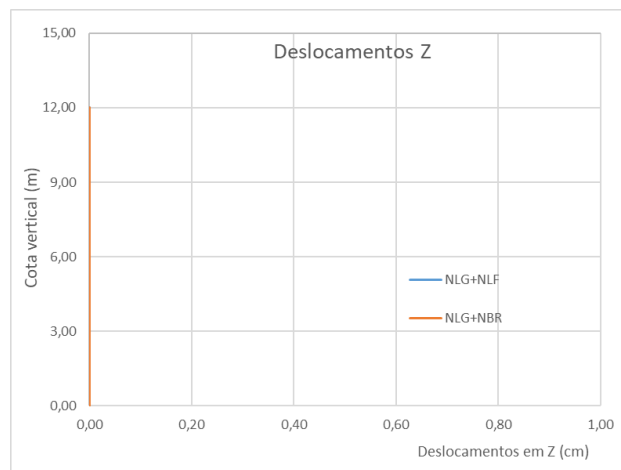
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-6: Deslocamentos horizontais na direção X: Pilar P7, combinação 1



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-7: Deslocamentos horizontais na direção Z: Pilar P7, combinação 1



Fonte: O Autor (2025)

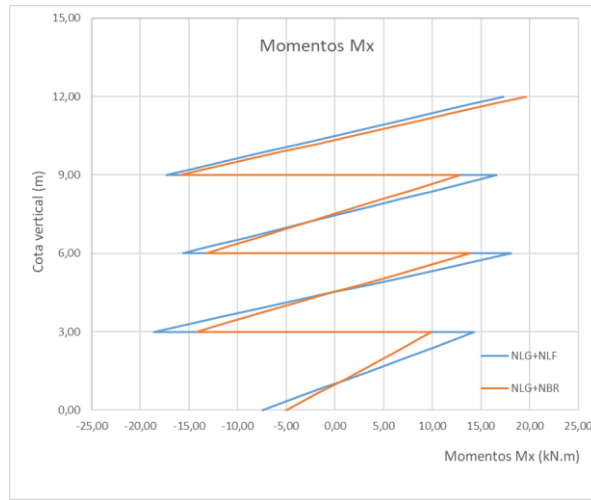
Considerando que a estrutura está carregada apenas por ações verticais e é simétrica em relação aos eixos globais, espera-se que os efeitos de segunda ordem globais sejam nulos. Assim, os eventuais deslocamentos horizontais que ocorram entre pavimentos ao longo dos pilares são estritamente devidos aos efeitos de segunda ordem locais.

Tal comportamento pode ser constatado pois para as duas análises (NLG+NLF e NLG+NBR) as figuras 5-4 e 5-7 mostram que os momentos em torno do eixo X e os deslocamentos na direção Z foram nulos. Os momentos em torno de Z foram relativamente pequenos pois apesar do pilar P7 ser classificado como central, há dois trechos de viga à sua esquerda e apenas um à sua direita, causando assim uma assimetria. Tais momentos levam ao surgimento de deslocamentos horizontais na direção de X ao longo do pilar entre pavimentos sucessivos, que podem ser vistos na figura 5-6. Tais deslocamentos foram pequenos comparados com os valores previstos pela ABNT NBR 6118:2014, evidenciando que os deslocamentos de segunda ordem locais foram muito pequenos para a situação analisada.

Os deslocamentos horizontais na direção de X foram maiores para a análise NLG+NLF, o que evidenciou que a rigidez ao longo dos pilares foi menor que a rigidez penalizada proposta pela ABNT NBR 6118:2014 para análise global, ainda assim, os valores de deslocamentos foram da ordem de 10% se comparados aos deslocamentos previstos pela referida normativa para análise local isolada. Para exemplificar, considerando o método do pilar padrão com curvatura aproximada, para o primeiro pavimento que tem uma força normal de cálculo de 1343kN para a combinação em análise, tal deslocamento horizontal seria de 1,05cm.

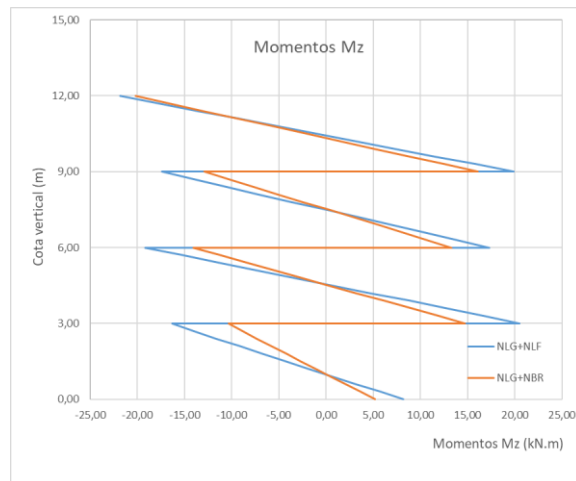
O deslocamento horizontal relativamente alto no tramo do último pavimento é justificado, pois para níveis pequenos de força normal a rigidez do pilar tem valores menores, próximo dos valores sugeridos para as vigas.

Figura 5-8: Momentos fletores em torno de X: Pilar P12, combinação 1



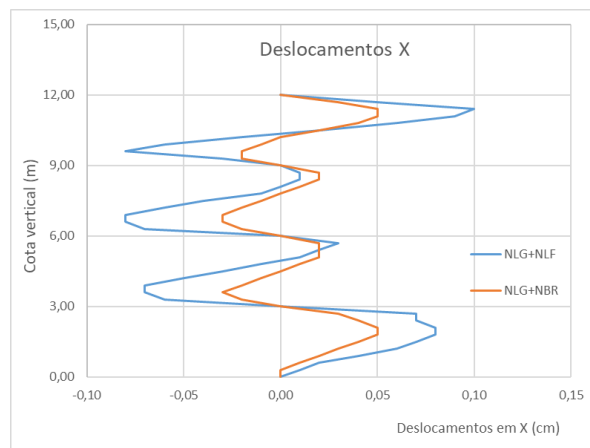
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-9: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, combinação 1



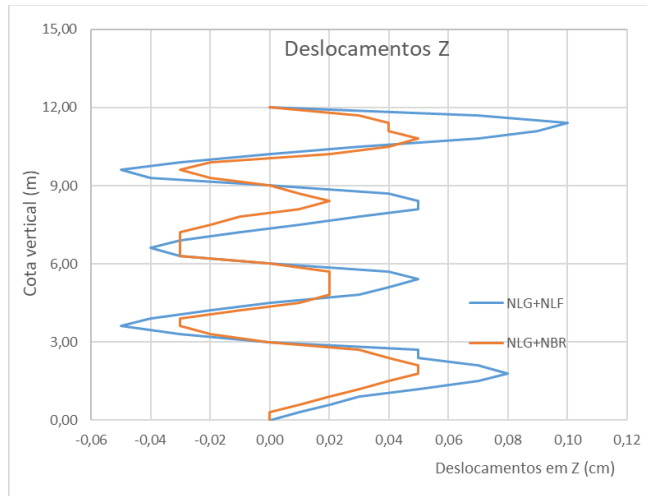
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-10: Deslocamentos horizontais na direção X: Pilar P12, combinação 1



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-11: Deslocamentos horizontais na direção Z: Pilar P12, combinação 1

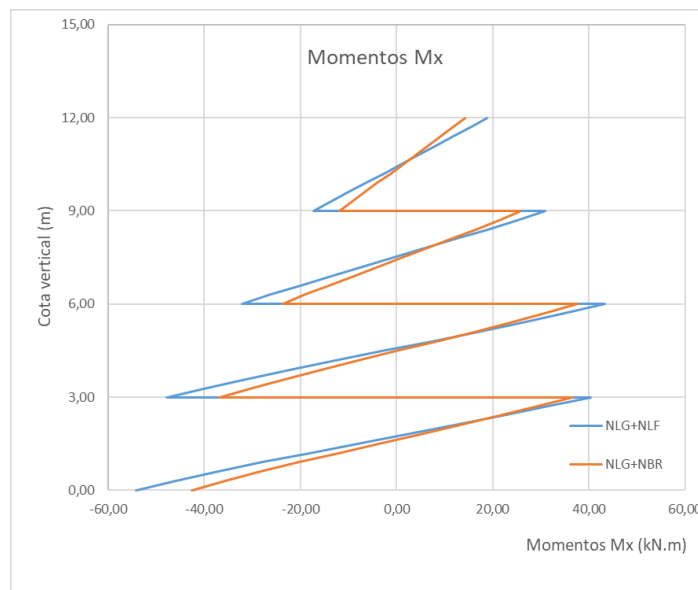


Fonte: O Autor (2025)

Considerando os diagramas de momentos fletores dos pilares P7 e P12, os valores dos momentos nas extremidades dos tramos foram menores para a análise NLG+NBR, o que evidenciou que os momentos negativos nas vigas (diferença entre momentos dos pilares no pavimento em análise) foram menores, tal fato evidencia que para a combinação em análise a rigidez relativa viga/pilar foi menor que 0,50 dada pela ABNT NBR 6118:2014.

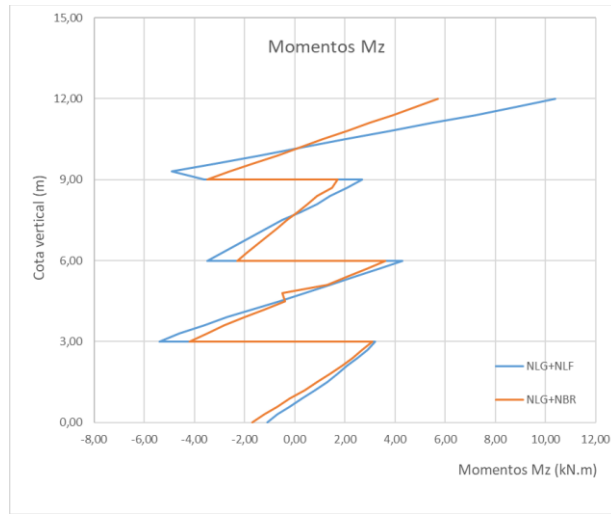
As figuras 5-12 e 5-19 mostram os gráficos para os pilares P7 e P12 considerando a Combinação 3.

Figura 5-12: Momentos fletores em torno de X: Pilar P7, combinação 3



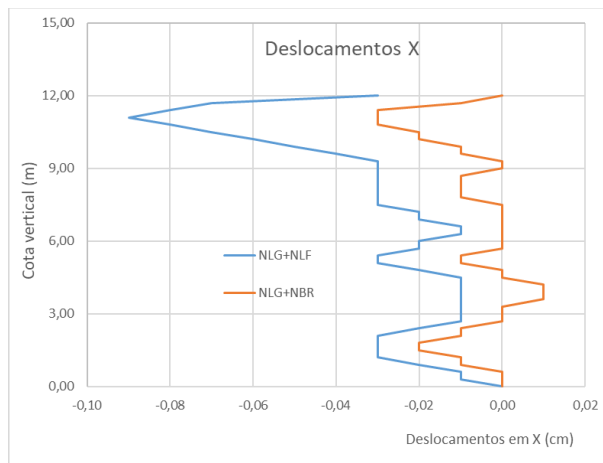
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-13: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, combinação 3



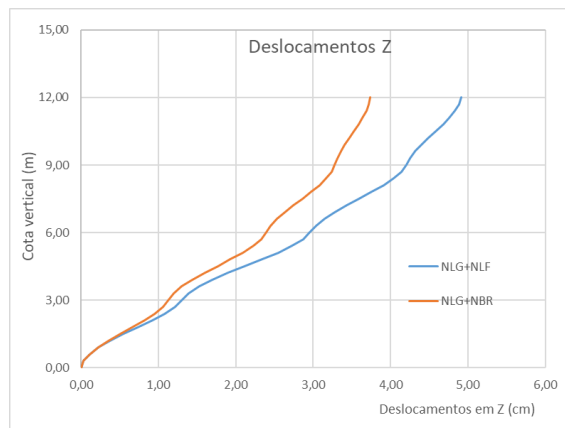
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-14: Deslocamentos horizontais na direção X: Pilar P7, combinação 3



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-15: Deslocamentos horizontais na direção Z: Pilar P7, combinação 3

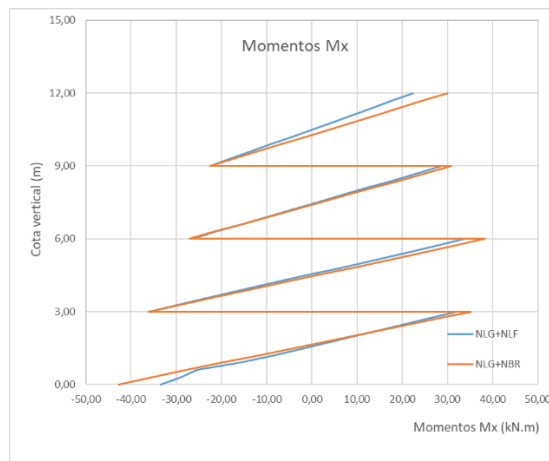


Fonte: O Autor (2025)

Considerando a combinação 3, onde há força horizontal na direção do eixo global Z, os deslocamentos na direção X e os momentos fletores em torno do eixo Z não foram afetados pelo vento, e tiveram comportamento parecido com a combinação 1, o que pode ser constatado nas figuras 5-13 e 5-14. Entretanto, os deslocamentos horizontais mostrados na figura 5-14 são oriundos da posição do pilar P7 em planta.

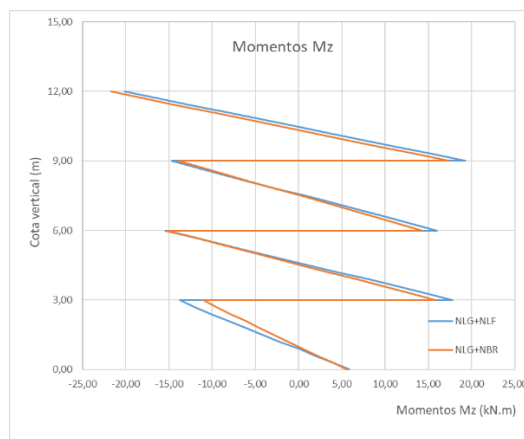
Para os deslocamentos na direção Z o comportamento foi completamente diferente dos modelos anteriores, com uma predominância de deslocamentos globais sobre os locais, que podem ser notados como pequenas saliências nos diagramas de momentos fletores da figura 5-15. Os deslocamentos para a análise NLG+NLF foram maiores, assim como os momentos fletores em torno do eixo X no nível de cada pavimento. A maior deslocabilidade da estrutura está associada a uma menor rigidez das vigas em relação à sua rigidez considerada na análise NLG+NBR, que elevou os momentos de segunda ordem globais vistos nos pilares para a análise NLG+NLF.

Figura 5-16: Momentos fletores em torno de X: Pilar P12, combinação 3



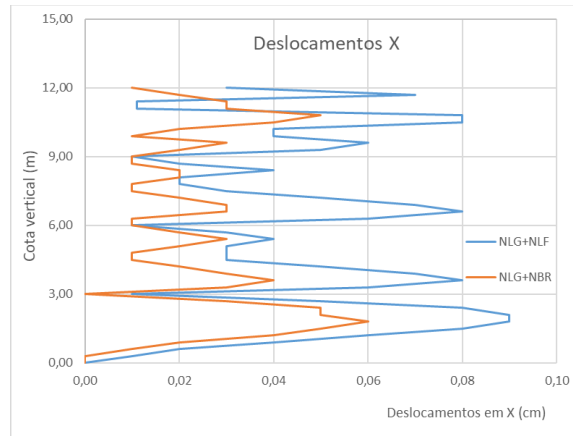
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-17: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, combinação 3



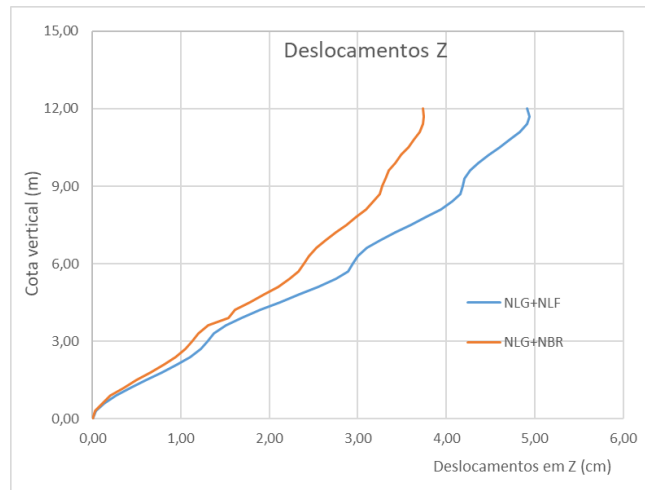
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-18: Deslocamentos horizontais na direção X: Pilar P12, combinação 3



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-19: Deslocamentos horizontais na direção Z: Pilar P12, combinação 3



Fonte: O Autor (2025)

Para o pilar P12, pode-se constatar o mesmo comportamento do pilar P7, com deslocamentos de segunda ordem local muito menores na direção de X em relação aos deslocamentos globais e locais na direção de Z.

Os pilares e combinações analisados no exemplo 1 mostraram que os efeitos de segunda ordem locais foram menores, da ordem de no máximo 10%, tanto para sua atuação isolada sem a presença de efeitos globais de segunda ordem quanto com a atuação conjunta com a segunda ordem global (combinação 3). Os deslocamentos totais para as situações em que há força horizontal sugerem que a rigidez média das vigas seja menor que o valor proposto pela ABNT NBR 6118:2014, pois os pórticos mostraram deslocamentos maiores para as análises rigorosas (NLG+NLF) quando comparadas com as análises simplificadas

(NLG+NBR), enquanto os pilares mostraram valores maiores de momentos fletores para as análises rigorosas quando comparados com as simplificadas, o que sugere que a relação entre rigidezes foi diferente do proposto pela ABNT NBR 6118:2014 que é 0,4/0,8, que daria uma relação de 0,5 para rigidez relativa Viga/Pilar.

5.3 EXEMPLO 2

A seguir são mostradas as características particulares do Exemplo 2. Para facilitar o entendimento, os modelos foram nomeados de acordo com suas características. Cada modelo possui três seções transversais distintas para os pilares e três classes de resistência do concreto à compressão, as vigas tem sempre a mesma seção, totalizando nove modelos. Desta forma o nome de cada modelo foi dado da seguinte forma:

Nome: dimX / dimZ_Cclas

Sendo:

dimX: Dimensão da seção na direção principal X (planta);

dimZ: Dimensão da seção na direção principal Z (planta);

clas: Classe de resistência do concreto.

Por exemplo, para os modelos onde a seção do pilar seja 19/76 cm, e o concreto da classe C25, o nome do modelo será: 19/76_C25.

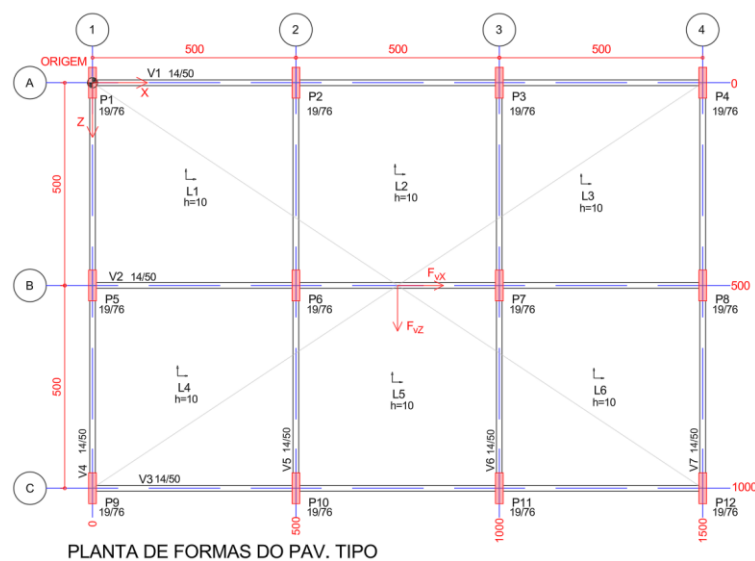
5.3.1 Materiais

Foram considerados concretos das classes C25, C40, e C70, e aço CA 50. As propriedades dos materiais estão descritas nas tabelas 5-1 a 5-3.

5.3.2 Geometria

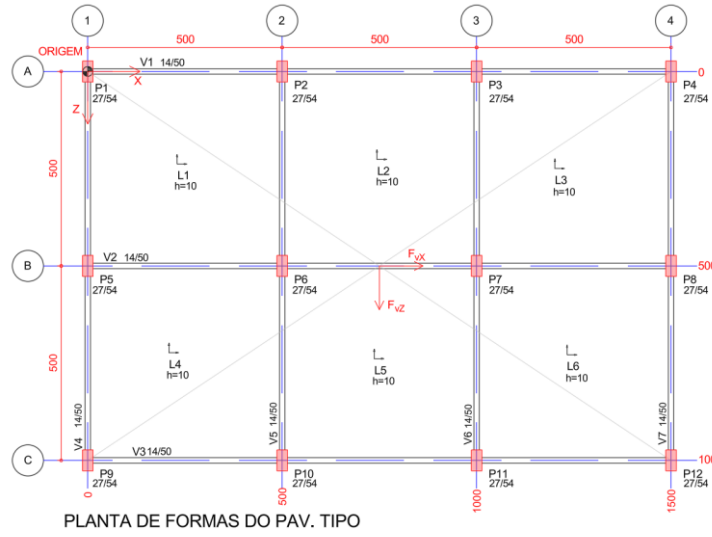
As figuras 5-20 a 5-22 mostram as plantas de formas dos pavimentos dos modelos e a figura 5-23 mostra o esquema de níveis da estrutura.

Figura 5-20: Planta de formas dos modelos 19/76_C25, 19/76_C40, e 19/76_C70,



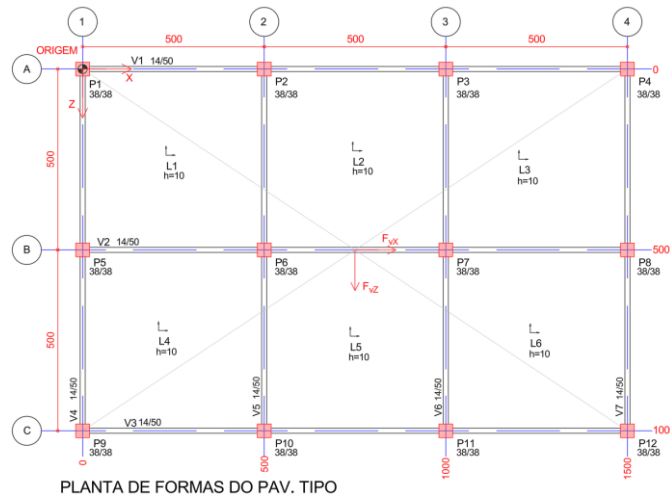
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-21: Planta de formas dos modelos 27/54_C25, 27/54_C40, e 27/54_C70,



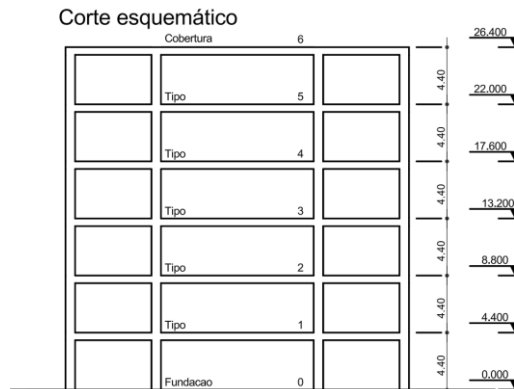
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-22: Planta de formas dos modelos 38/38_C25, 38/38_C40, e 38/38_C70,



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-23: esquema de níveis do Exemplo 2



Fonte: O Autor (2025)

5.3.3 Elementos e variáveis analisadas

Foram analisados os pilares P7 e P12 considerando apenas uma combinação normal última com o vento na direção X como ação variável principal.

Para cada uma das combinações foram avaliadas as seguintes variáveis:

- Força normal;
- Momentos fletores em torno do eixo principal Z;
- Deslocamentos horizontais ao longo da altura dos pilares para a direção global X.

Tais direções de deslocamentos e momentos foram adotadas por serem as mais críticas para os deslocamentos horizontais da estrutura.

5.3.4 Ações e combinações

5.3.4.1 Cargas verticais

As cargas resultantes nas vigas, com valores característicos são mostrados na tabela 5-14.

Tabela 5-14: Cargas distribuídas nas vigas

Viga	Cargas Lineares nas vigas					
	Trecho 1		Trecho 2		Trecho 3	
	P_{gk} (kN/m)	P_{qk} (kN/m)	P_{gk} (kN/m)	P_{qk} (kN/m)	P_{gk} (kN/m)	P_{qk} (kN/m)
V1=V3	11,63	2,74	10,92	2,17	11,63	2,74
V2	19,97	9,50	17,50	7,50	19,97	9,50
V4=V7	11,63	2,74	11,63	2,74	-	-
V5=V6	19,71	9,29	19,71	9,29	-	-

Fonte: O Autor (2025)

5.3.4.2 Ações horizontais

As forças horizontais devido ao vento com valores característicos, concentradas na altura de cada pavimento, são mostrados na tabela 5-16. Os coeficientes de arrasto são mostrados na tabela 5-15.

Tabela 5-15: Parâmetros e valores dos coeficientes de arrasto.

Vento	l_1 (m)	l_2 (m)	h (m)	l_1/l_2	h/l_1	C_a
V_{xk}	10,00	15,00	26,40	0,67	2,64	1,12
V_{zk}	15,00	10,00		1,50	1,76	1,33

Fonte: O Autor (2025)

Tabela 5-16: Parâmetros e valores de força do vento em cada pavimento.

Pav.	Y (m)	S_2	q (kN/m ²)	C_{ax}	C_{az}	Af_x (m ²)	Af_z (m ²)	F_{V_x} (kN)	F_{V_z} (kN)
1	4,40	0,85	1,05	1,12	1,33	44	66	51,70	92,09
2	8,80	0,91	1,13			44	66	55,60	99,04
3	13,20	0,95	1,18			44	66	58,02	103,35
4	17,60	0,98	1,21			44	66	59,80	106,52
5	22,00	1,00	1,24			44	66	61,22	109,04
6	26,40	1,02	1,27			44	66	62,40	111,15

Fonte: O Autor (2025)

5.3.4.3 Combinações e ações de cálculo

Considerando que o Exemplo 2 é um edifício comercial, as equações das combinações são mostradas na tabela 5-17. Para este exemplo foi considerada apenas a combinação 2.

Tabela 5-17: Equações das Combinações de cálculo no ELU

Combinação	Ação Variável Principal	Equação
1	P_{qk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4P_{qk}$
2	V_{xk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4(V_{xk} + 0,7P_{qk})$
3	V_{zk}	$F_d = 1,4P_{gk} + 1,4(V_{zk} + 0,7P_{qk})$

Fonte: O Autor (2025)

As tabelas 5-18 e 5-19 mostram as ações de cálculo para cada uma das combinações de interesse.

Tabela 5-18: Cargas nas vigas com valores de cálculo

Viga	P_d (kN/m): Combinação 2		
	Trecho 1	Trecho 2	Trecho 3
V1=V3	18,97	17,41	18,97
V2	37,27	31,85	37,27
V4=V7	18,97	18,97	-
V5=V6	36,71	36,71	-

Fonte: O Autor (2025)

Tabela 5-19: Ação do vento com valores de cálculo

Pavimento.	Combinação 2	
	$F_{V_{Xd}}$ (kN)	$F_{V_{Zd}}$ (kN)
1	72,38	0
2	77,84	
3	81,23	
4	83,72	
5	85,70	
6	87,36	

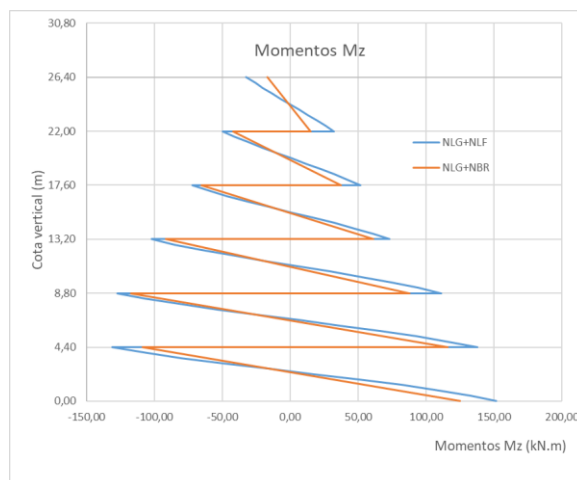
Fonte: O Autor (2025)

5.3.5 Resultados

Para cada um dos modelos foram mostrados três gráficos comparando os resultados de cada análise, sendo o primeiro mostrando os momentos fletores em torno do eixo Z, o segundo mostrando os deslocamentos horizontais para a direção X, e o terceiro mostrando as relações entre forças normais, momentos fletores na base dos pilares, momentos fletores no topo dos pilares, e deslocamentos horizontais na direção X para cada pavimento. Ao final são mostrados gráficos comparando as relações entre os resultados da análise NLG+NLF divididos pelos resultados da análise NLG+NBR para cada uma das variáveis descritas acima.

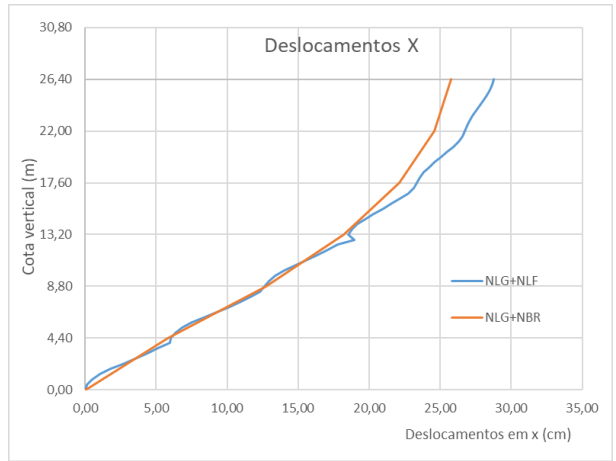
As figuras 5-24 a 5-50 mostram os três gráficos descritos para o pilar P7 para cada um dos modelos.

Figura 5-24: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 19/76_C25



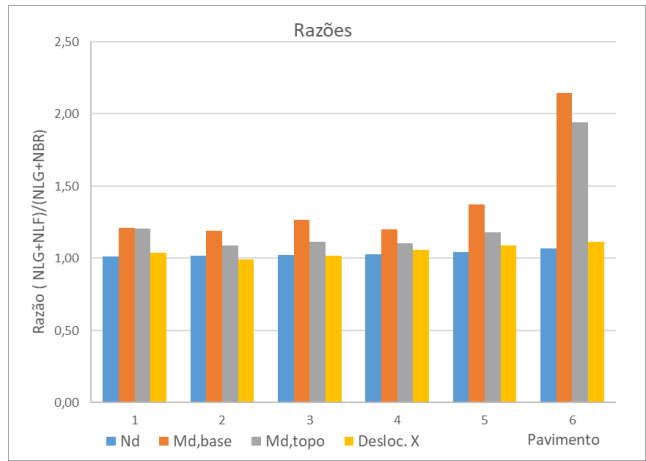
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-25: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 19/76_C25



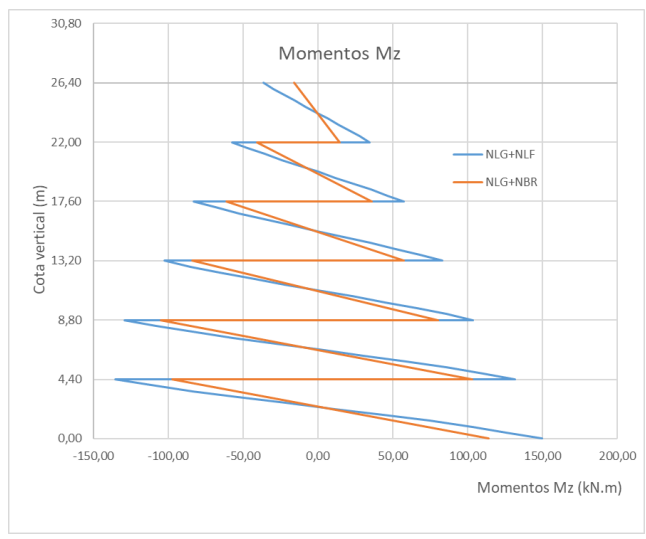
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-26: Relações entre esforços e deslocamentos: Pilar P7, modelo 19/76_C25



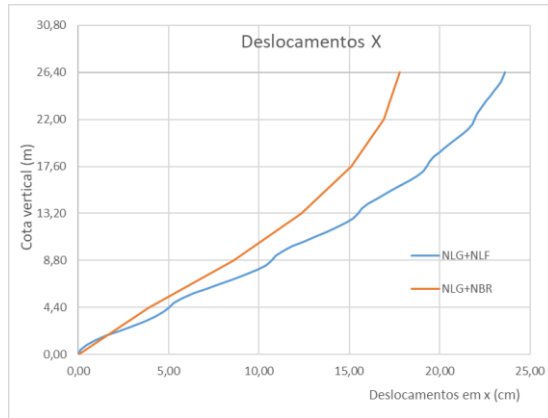
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-27: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 19/76_C40



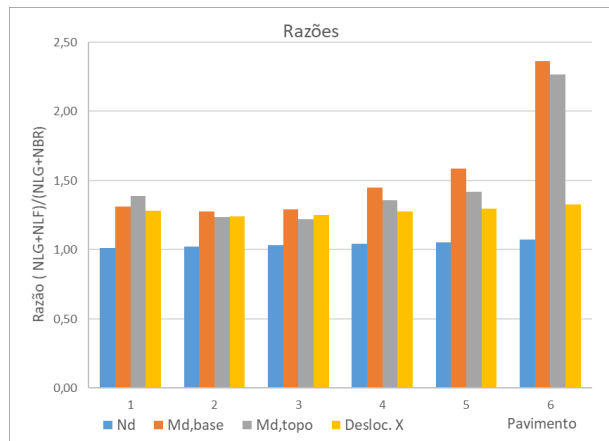
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-28: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 19/76_C40



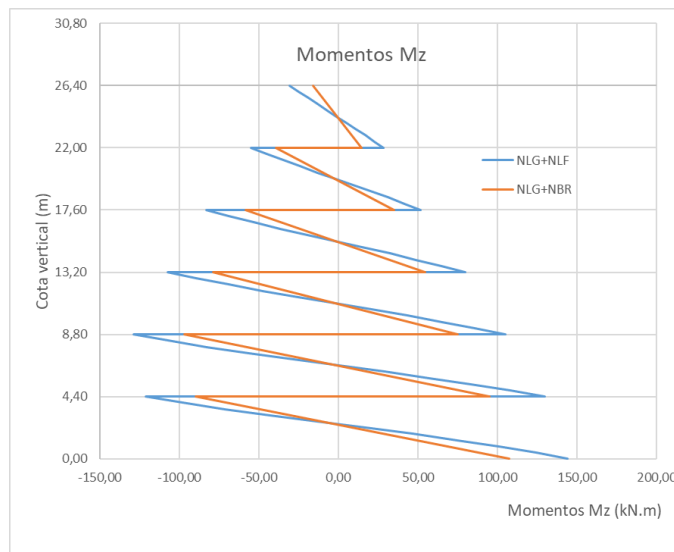
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-29: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 19/76_C40



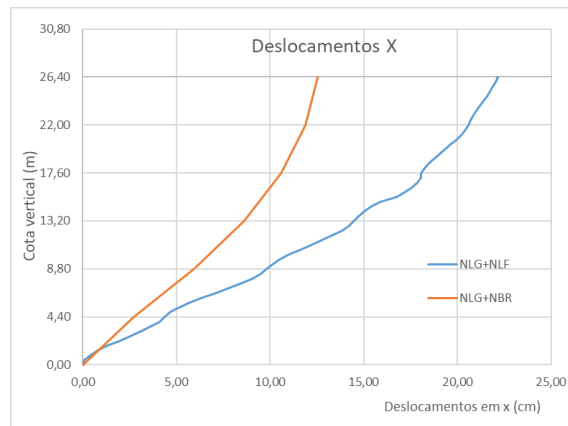
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-30: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 19/76_C70



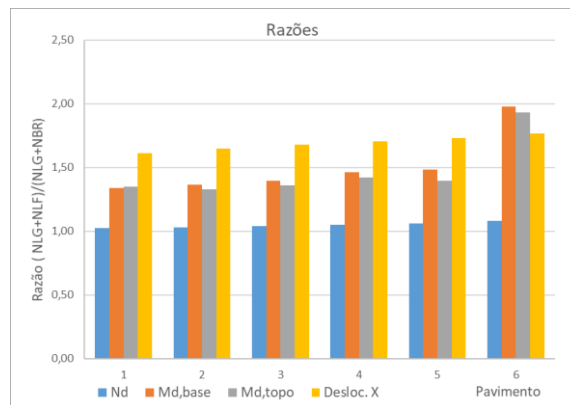
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-31: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 19/76_C70



Fonte: O Autor (2025)

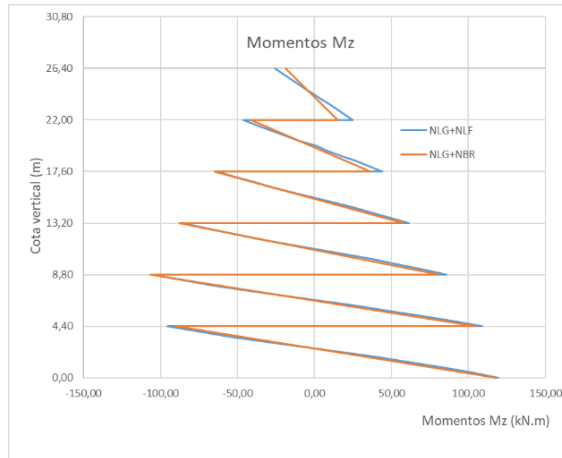
Figura 5-32: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 19/76_C70



Fonte: O Autor (2025)

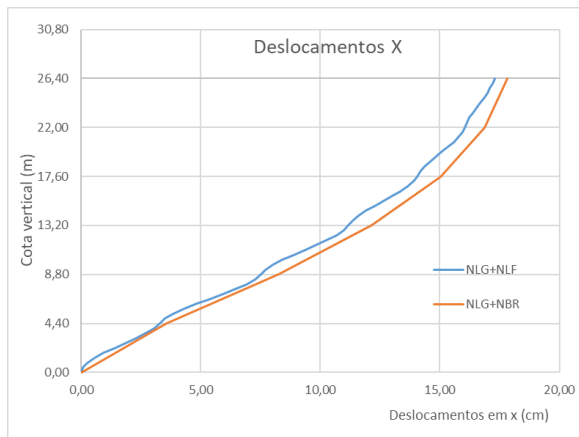
Os resultados mostraram que os modelos com maior classe de resistência do concreto tiveram maior diferença em momentos e deslocamentos, sugerindo que os valores de rigidez penalizada adotada pela ABNT NBR 6118:2014 foram maiores que os valores de rigidez dados pela análise rigorosa.

Figura 5-33: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 27/54_C25



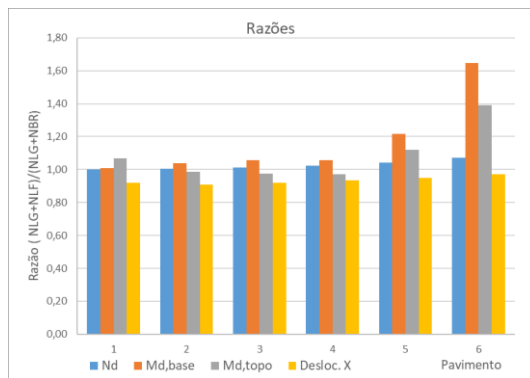
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-34: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 27/54_C25



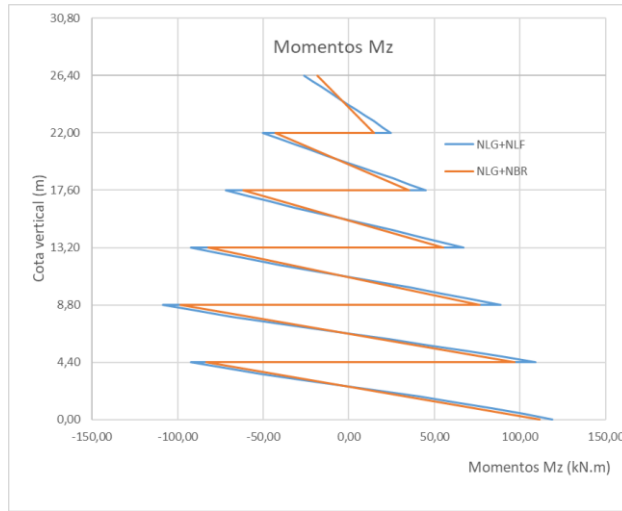
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-35: Relações entre esforços e deslocamentos: Pilar P7, modelo 27/54_C25



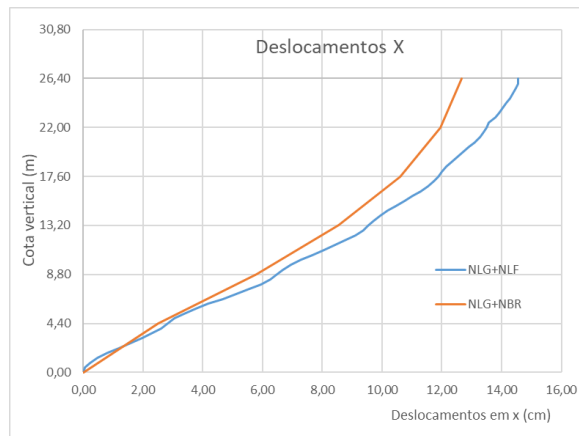
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-36: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 27/54_C40



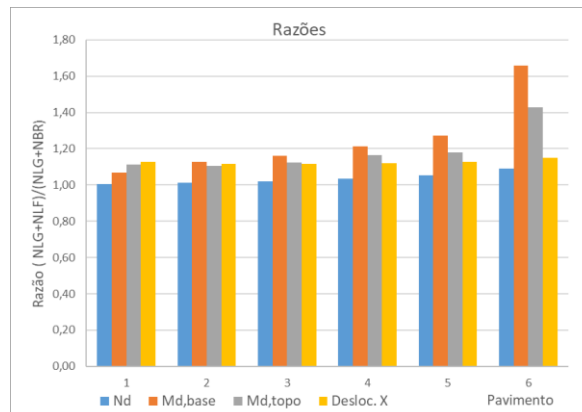
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-37: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 27/54_C40



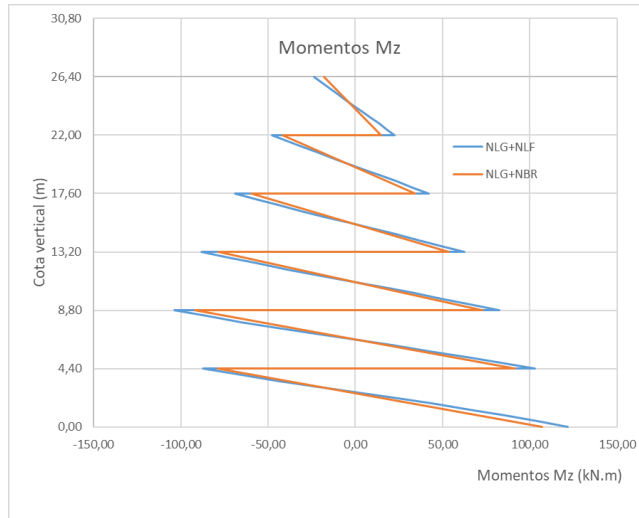
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-38: Relações entre esforços e deslocamentos: Pilar P7, modelo 27/54_C40



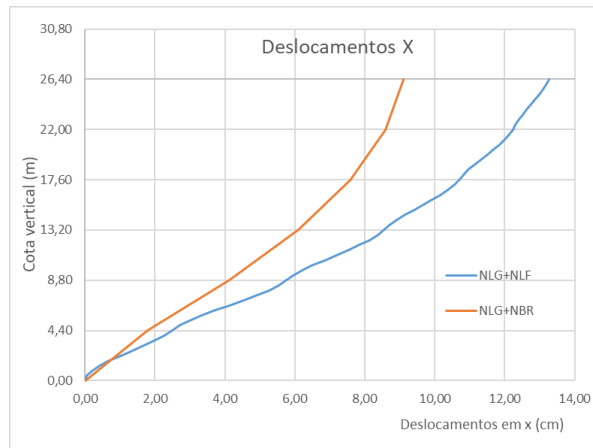
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-39: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 27/54_C70



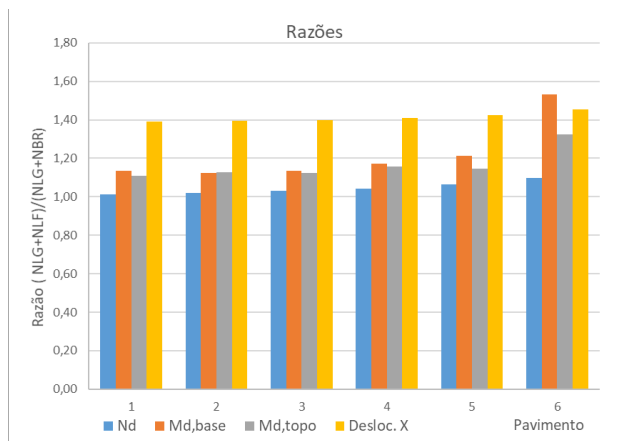
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-40: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 27/54_C70



Fonte: O Autor (2025)

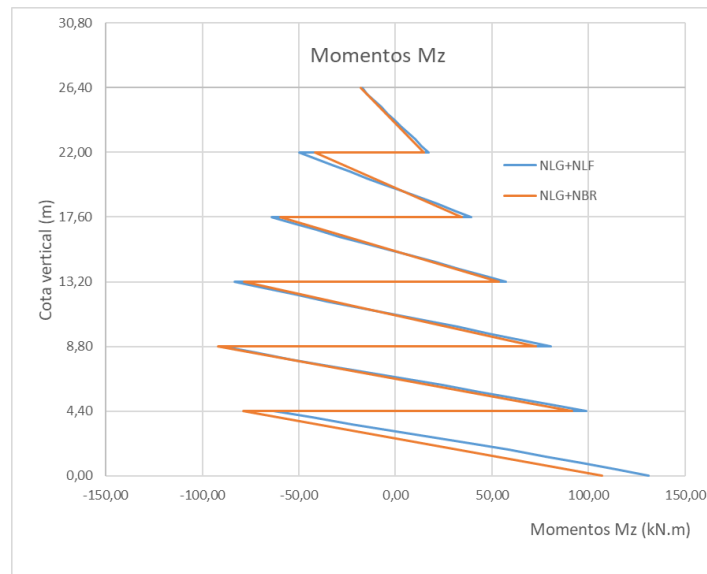
Figura 5-41: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 27/54_C70



Fonte: O Autor (2025)

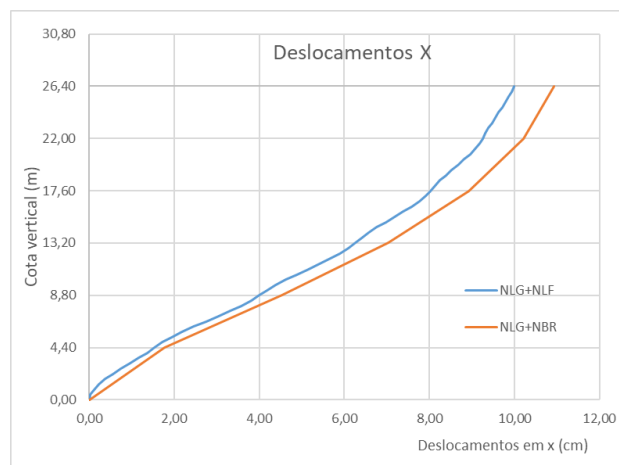
Os resultados mostraram que os modelos com maior classe de resistência do concreto tiveram maior diferença em deslocamentos, mantendo a mesma tendência dos modelos 19/76_CXX, mas os momentos fletores tem menor diferença em função do tipo de análise.

Figura 5-42: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 38/38_C25



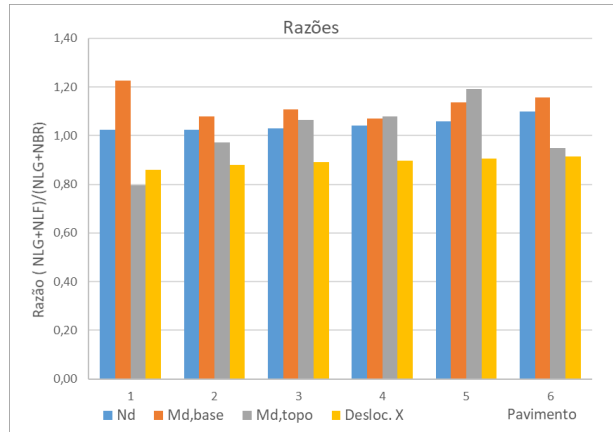
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-43: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 38/38_C25



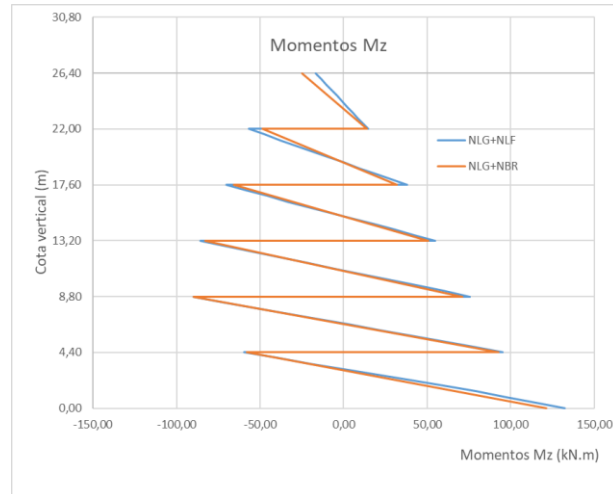
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-44: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 38/38_C25



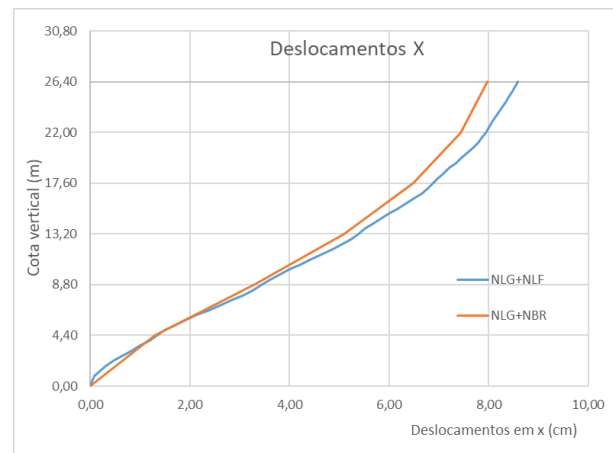
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-45: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 38/38_C40



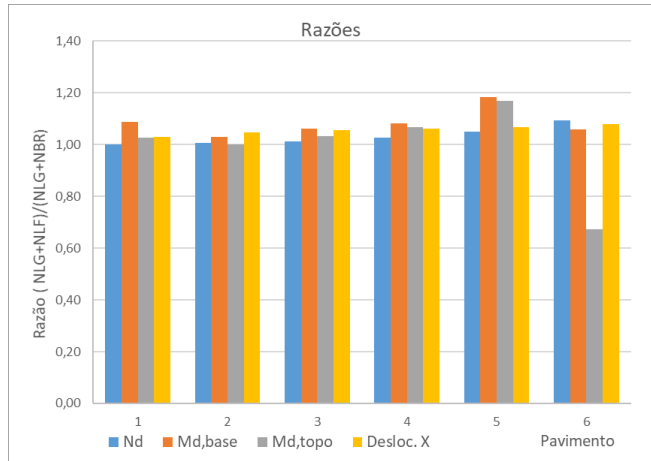
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-46: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 38/38_C40



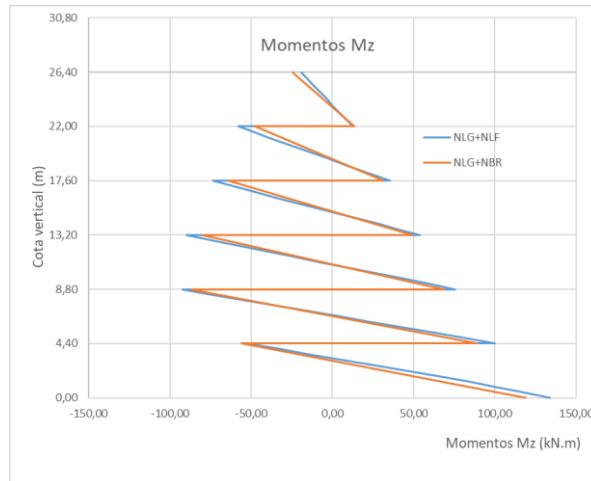
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-47: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 38/38_C40



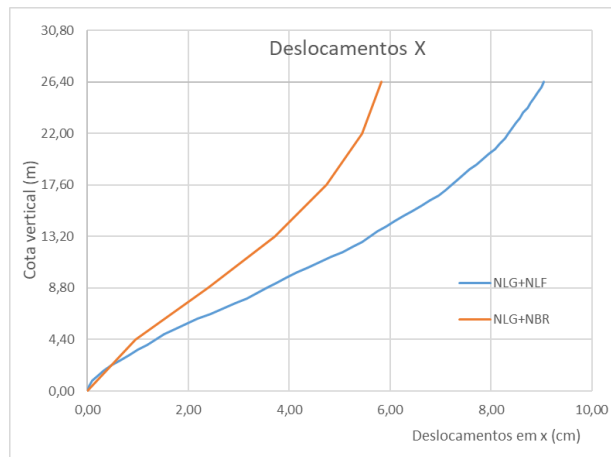
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-48: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P7, modelo 38/38_C70



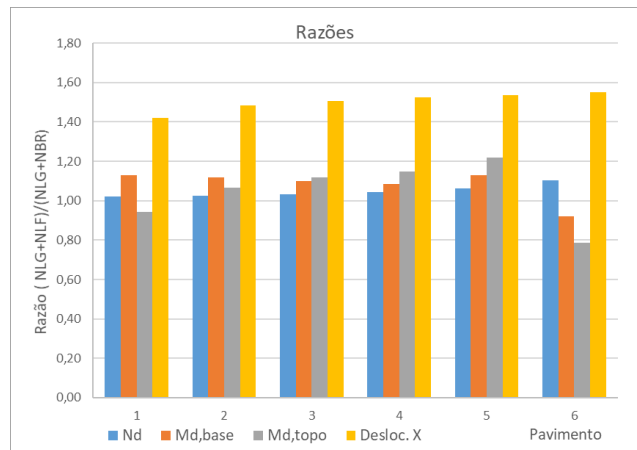
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-49: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P7, modelo 38/38_C70



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-50: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P7, modelo 38/38_C70



Fonte: O Autor (2025)

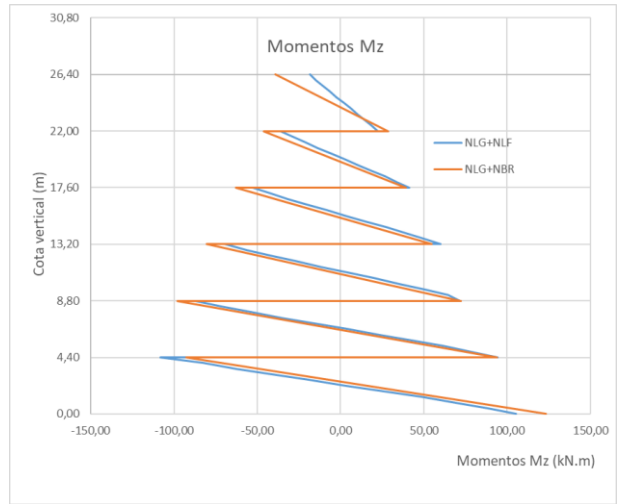
Os resultados mostraram que os modelos com maior classe de resistência do concreto tiveram maior diferença em deslocamentos, porém, percebeu-se a influência da deslocabilidade em função da geometria da estrutura, pois a relação entre deslocamentos para as análises NLG+NLF/NLG+NBR começou menor que 1,00 para o modelo 38/38_C25 e chegou a aproximadamente 1,40 para o modelo 38/38_C70. A diferença entre valores de momentos para as análises foi a menor entre os três modelos de geometria.

Para todos os modelos a variação da força normal foi relativamente pequena, função da diferença de rigidez à flexão dos distintos modelos.

Os deslocamentos de segunda ordem locais que ocorreram ao longo da altura do pilar entre pavimentos, que podem ser identificados como ondulações no diagrama de deslocamentos foram desprezíveis em todos os modelos, mesmo no modelo 19/76_C25 que teve a maior esbelteza e menor classe de resistência do concreto e teve a maior deslocabilidade horizontal.

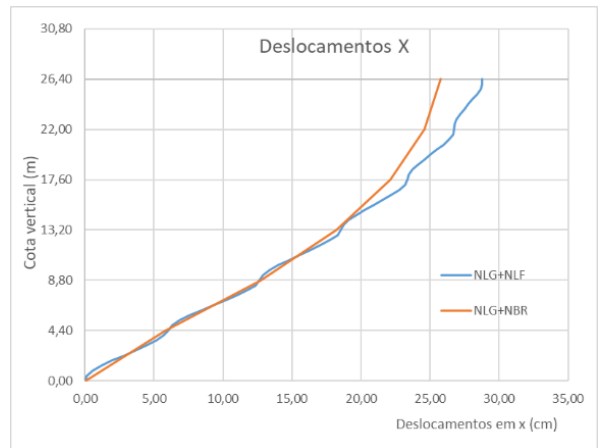
As figuras 5-51 a 5-77 mostram os três gráficos acima descritos para o pilar P12 para cada um dos modelos:

Figura 5-51: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 19/76_C25



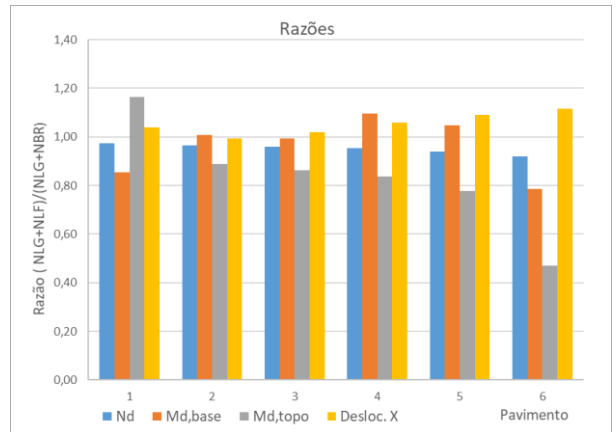
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-52: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 19/76_C25



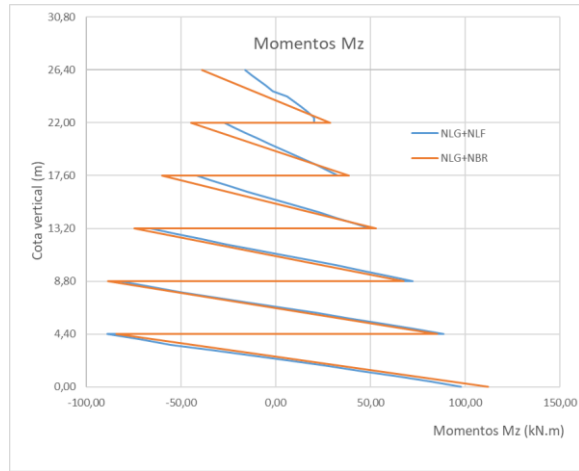
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-53: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 19/76_C25



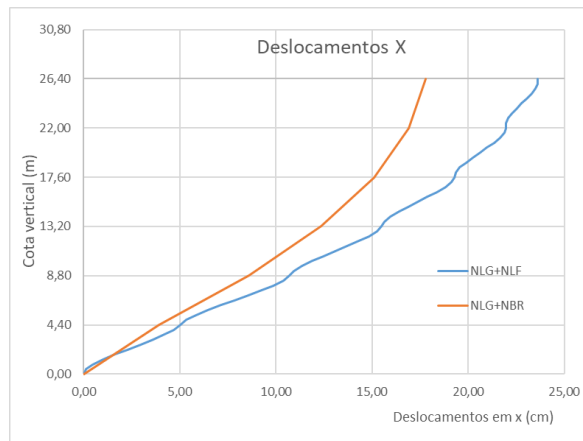
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-54: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 19/76_C40



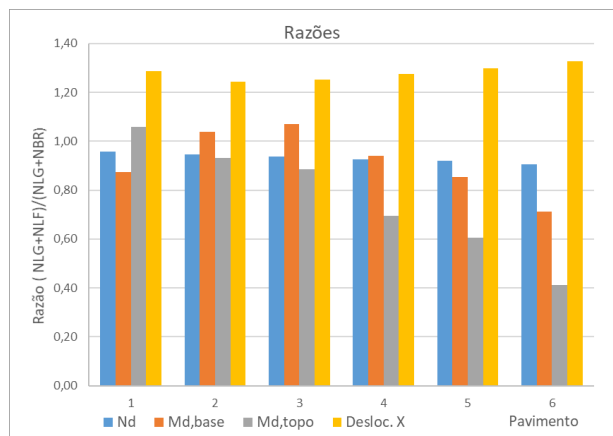
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-55: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 19/76_C40



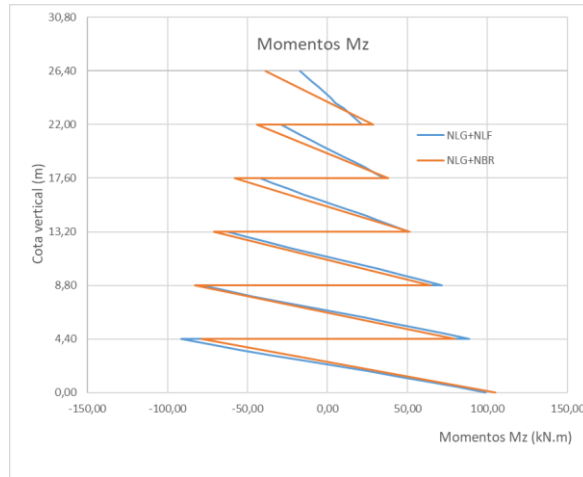
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-56: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 19/76_C40



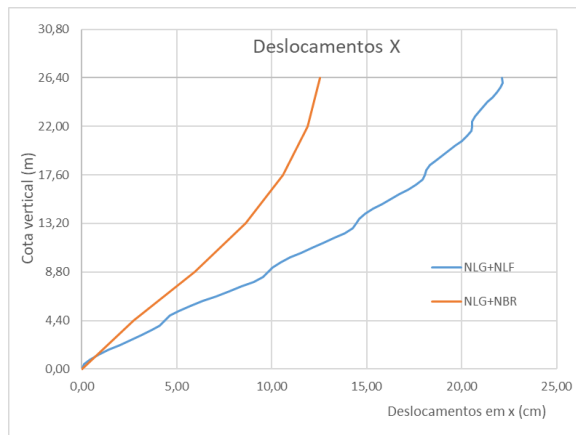
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-57: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 19/76_C70



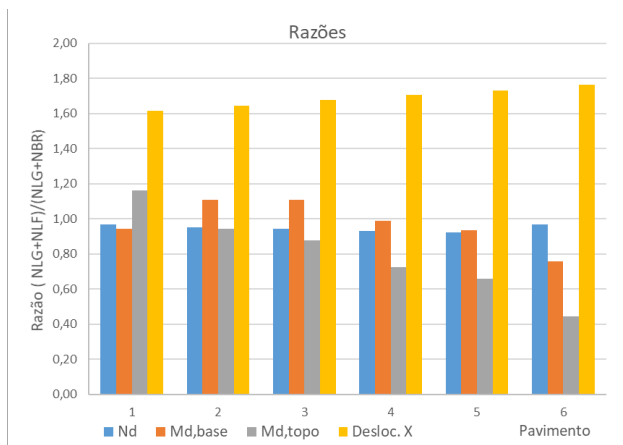
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-58: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 19/76_C70



Fonte: O Autor (2025)

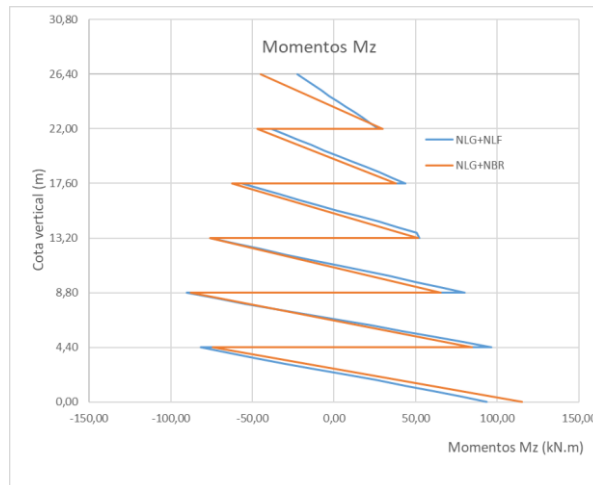
Figura 5-59: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 19/76_C70



Fonte: O Autor (2025)

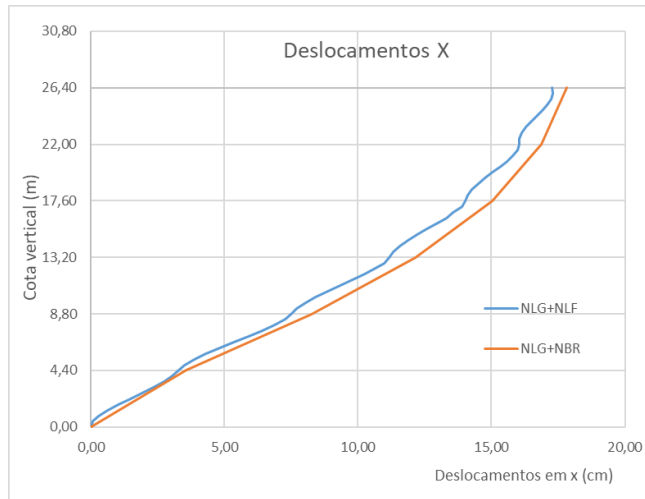
Os deslocamentos foram os mesmos do pilar P7 pois o pavimento se comporta como um diafragma rígido, porém os momentos dados pela análise NLG+NLF foram menores que os dados pela análise NLG+NBR, o que indica que o pilar P12, submetido à flexão oblíqua mais pronunciada teria uma rigidez menor que o pilar P7. As diferenças em termos de momentos, assim como no pilar P7 foram menores para a classe C25 e foi mais acentuada para a classe C70.

Figura 5-60: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 27/54_C25



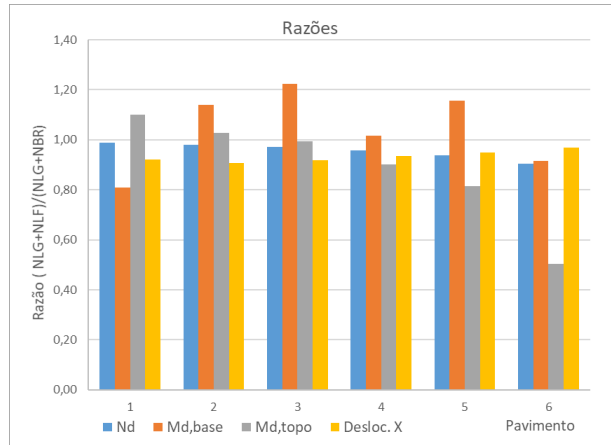
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-61: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 27/54_C25



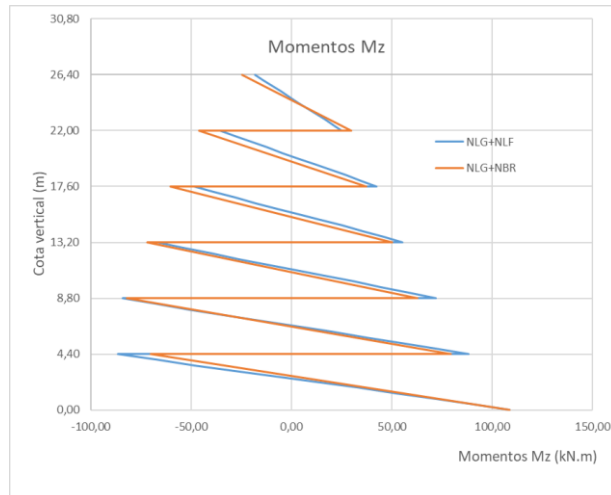
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-62: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 27/54_C25



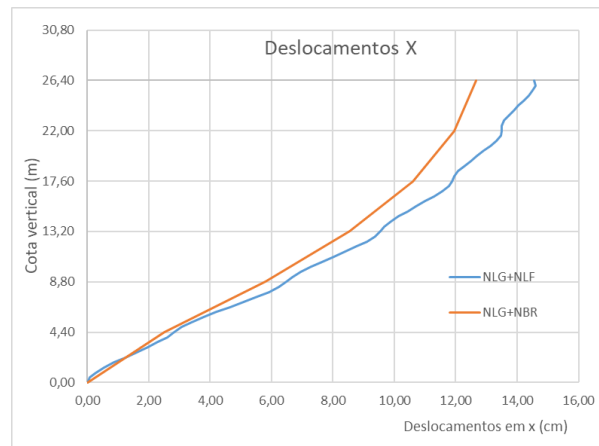
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-63: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 27/54_C40



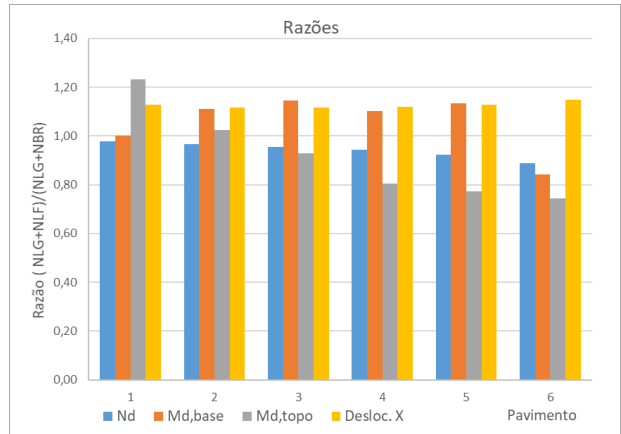
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-64: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 27/54_C40



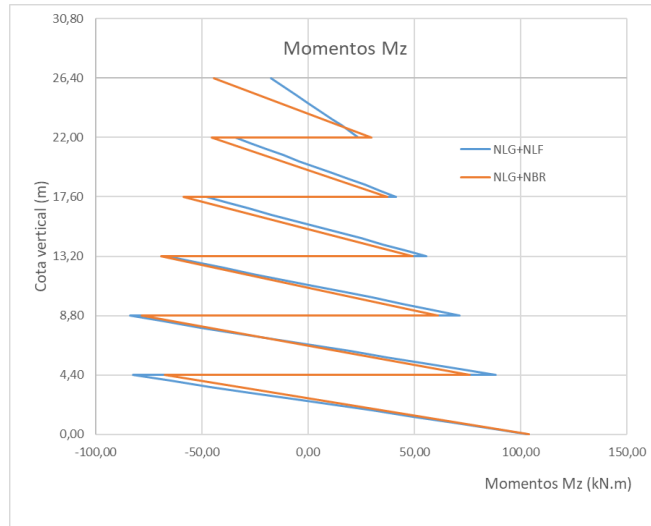
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-65: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 27/54_C40



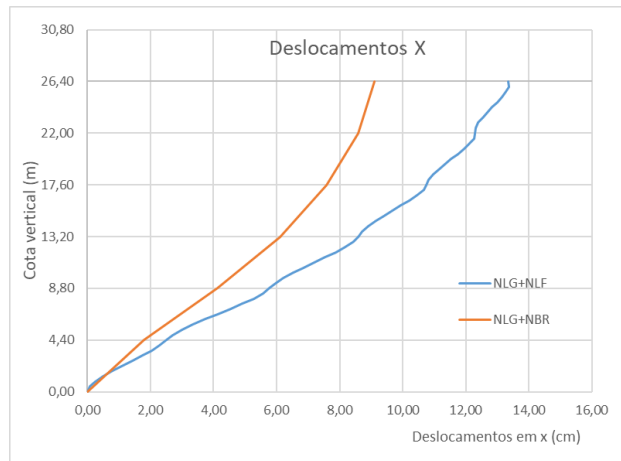
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-66: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 27/54_C70



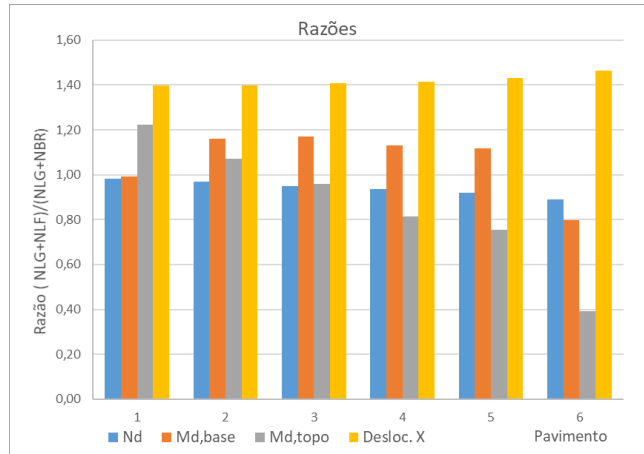
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-67: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 27/54_C70



Fonte: O Autor (2025)

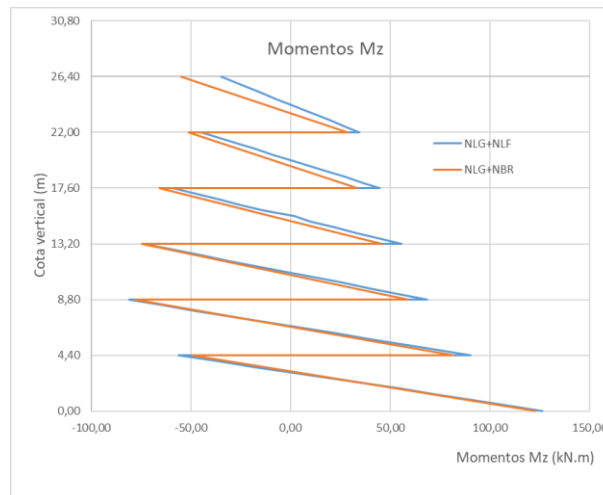
Figura 5-68: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 27/54_C70



Fonte: O Autor (2025)

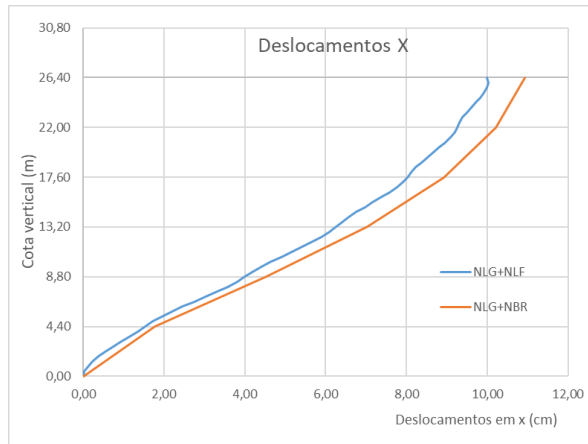
Nos modelos 27/54 percebe-se a mesma tendência dos modelos 19/76, independente da classe de resistência do concreto.

Figura 5-69: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 38/38_C25



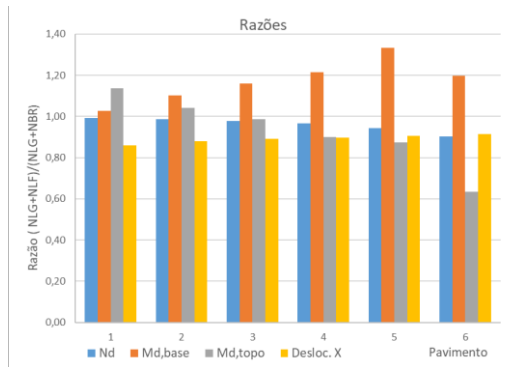
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-70: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 38/38_C25



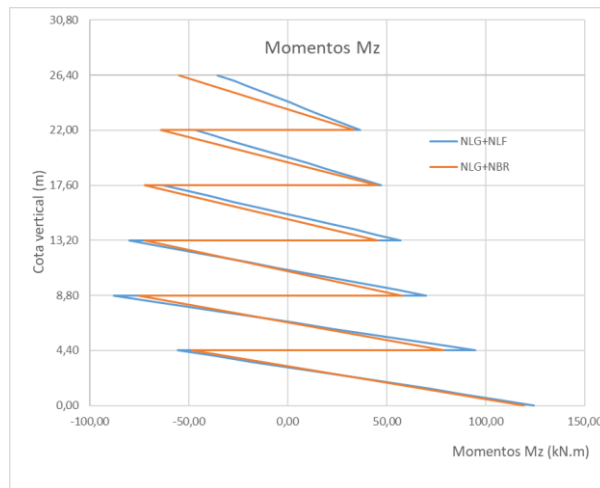
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-71: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 38/38_C25



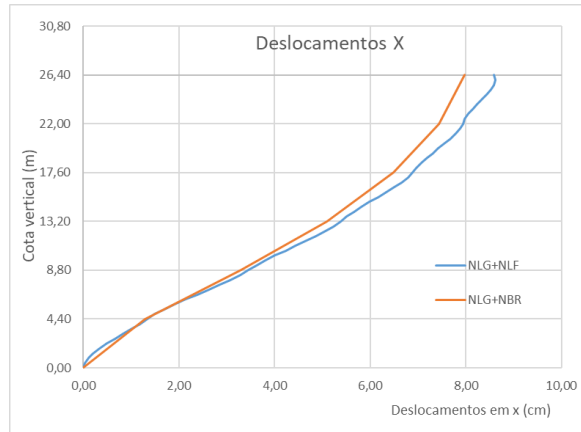
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-72: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 38/38_C40



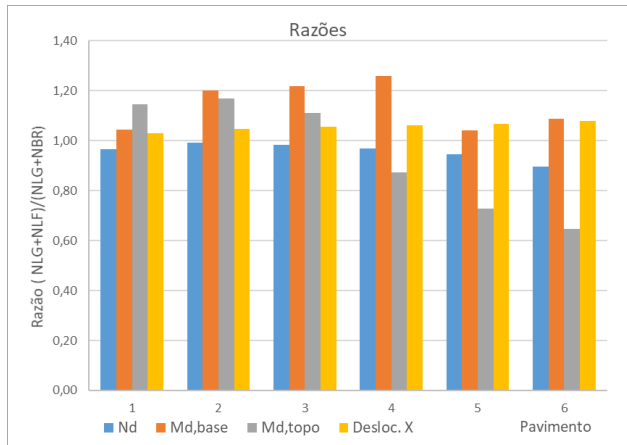
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-73: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 38/38_C40



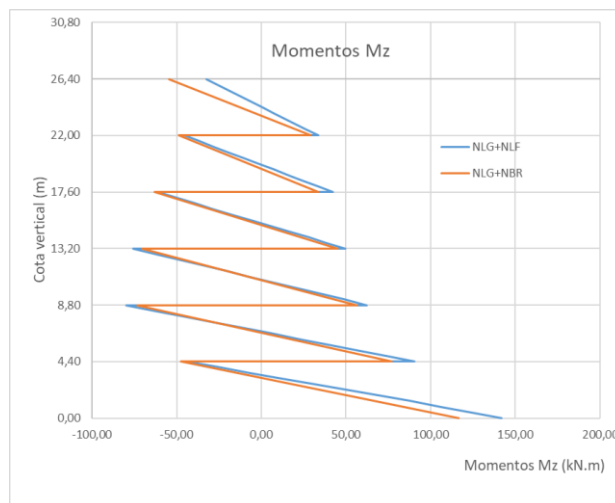
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-74: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 38/38_C40



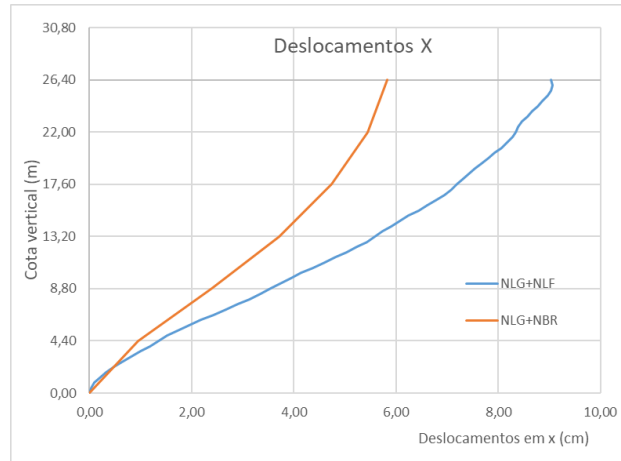
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-75: Momentos fletores em torno de Z: Pilar P12, modelo 38/38_C70



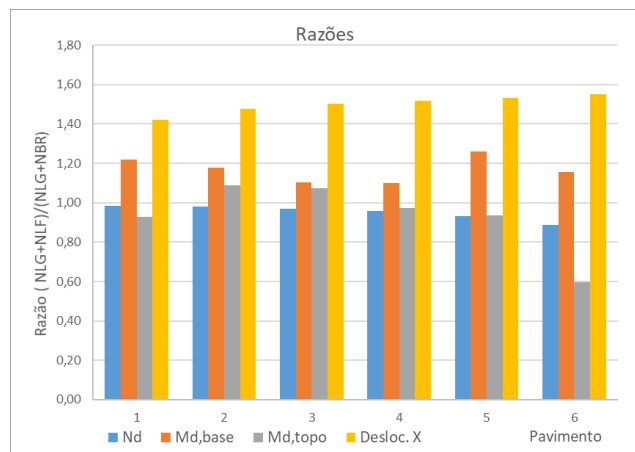
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-76: Deslocamentos Horizontais na direção X: Pilar P12, modelo 38/38_C70



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-77: Relações entre esforços E deslocamentos: Pilar P12, modelo 38/38_C70



Fonte: O Autor (2025)

Percebeu-se a mesma tendência dos modelos anteriores, onde houve maior discrepância em deslocamentos e momentos nos modelos com classe de resistência maior. A força normal mostrou variações pequenas, assim como nos modelos anteriores.

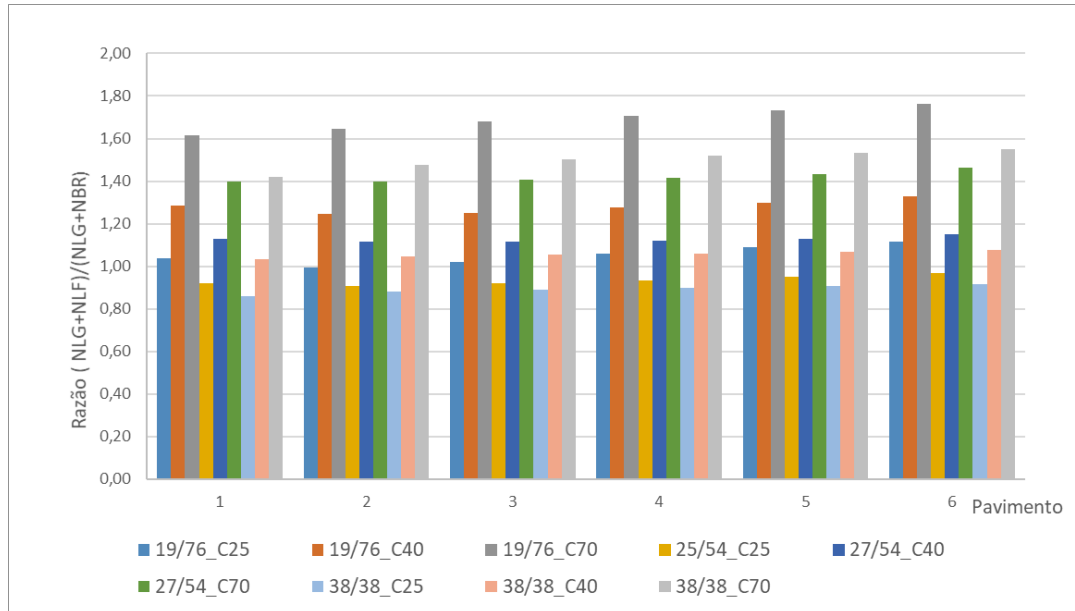
A seguir são mostradas as razões resumidas entre os resultados dados pela análise rigorosa e a análise simplificada (NLG+NLF/NLG+NBR).

5.3.5.1 Deslocamentos

Considerando que os pavimentos têm comportamento de diafragma rígido, os deslocamentos horizontais dos pilares P7 e P12 no nível de cada pavimento foram iguais. Considerando também que os deslocamentos horizontais devido aos efeitos de segunda ordem locais ao longo dos pilares foram pequenos, similares ao exemplo 1, pode-se tomar como referência para os deslocamentos o pilar P7 ou P12.

A figura 5-78 mostra as razões entre deslocamentos (NLG+NLF/NLG+NBR) para cada pavimento, para cada modelo na mesma ordem de legenda.

Figura 5-78: Razões entre deslocamentos para NLG+NLF/ NLG+NBR



Fonte: O Autor (2025)

Pode-se observar que os modelos com classe C25 tiveram relação próxima de 1,00 para todos os pavimentos e modelos, já os modelos com classe C40 mostraram relações entre 1,22 e 1,37, e por fim, os modelos com classe C70 mostram relações acima de 1,60 para os modelos com seção 19/76, aproximadamente 1,40 para as seções 27/54 e aproximadamente 1,50 para seções 38/38.

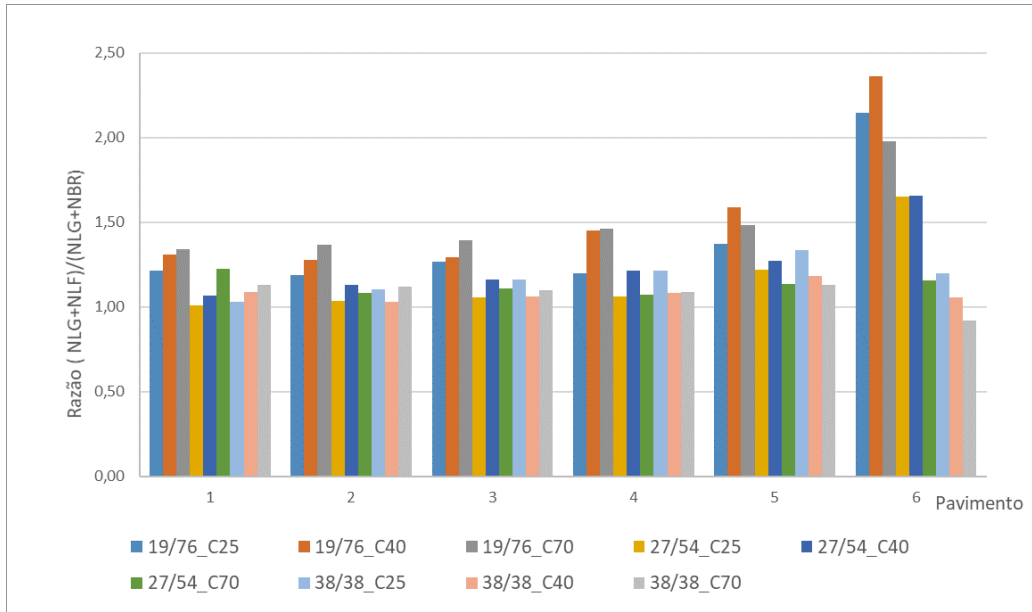
Tais valores indicam que há dois fatores principais que influenciam na diferença dos deslocamentos para cada uma das análises, sendo eles:

- Deslocabilidade relacionada ao momento de inércia das seções dos pilares: Quanto mais deslocável o pórtico, maiores as diferenças nos deslocamentos.
- Classe de resistência: Quanto maior a classe de resistência, maior a diferença nos deslocamentos.

5.3.5.2 Momentos fletores

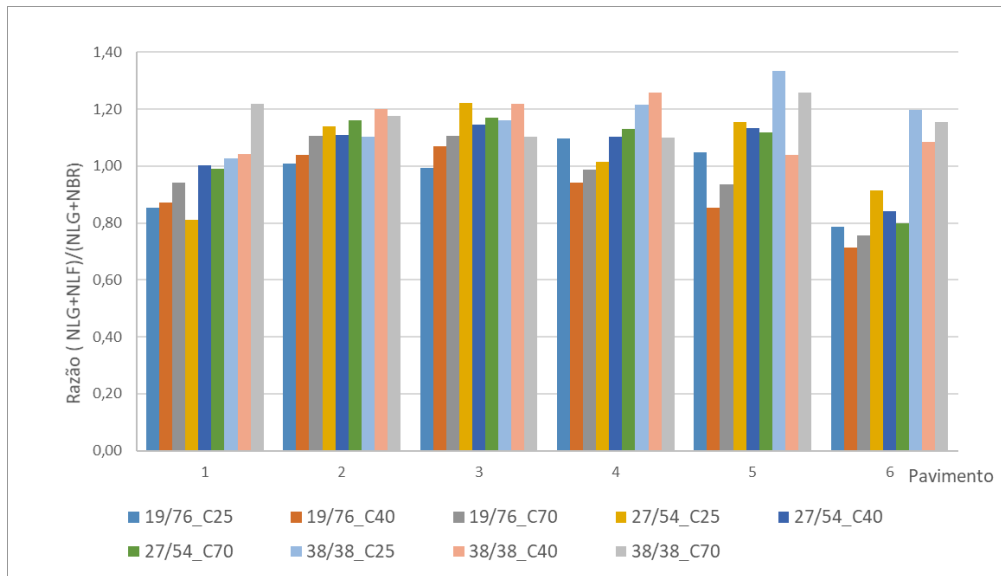
As figuras 5-79 e 5-80 mostram as razões entre momentos fletores na base, e momentos fletores no topo dos pilares (NLG+NLF/NLG+NBR) para cada pavimento, para cada modelo na mesma ordem da legenda para o pilar P7. As figuras 5-81 e 5-82 mostram as mesmas relações para o pilar P12.

Figura 5-79: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para momentos na base P7



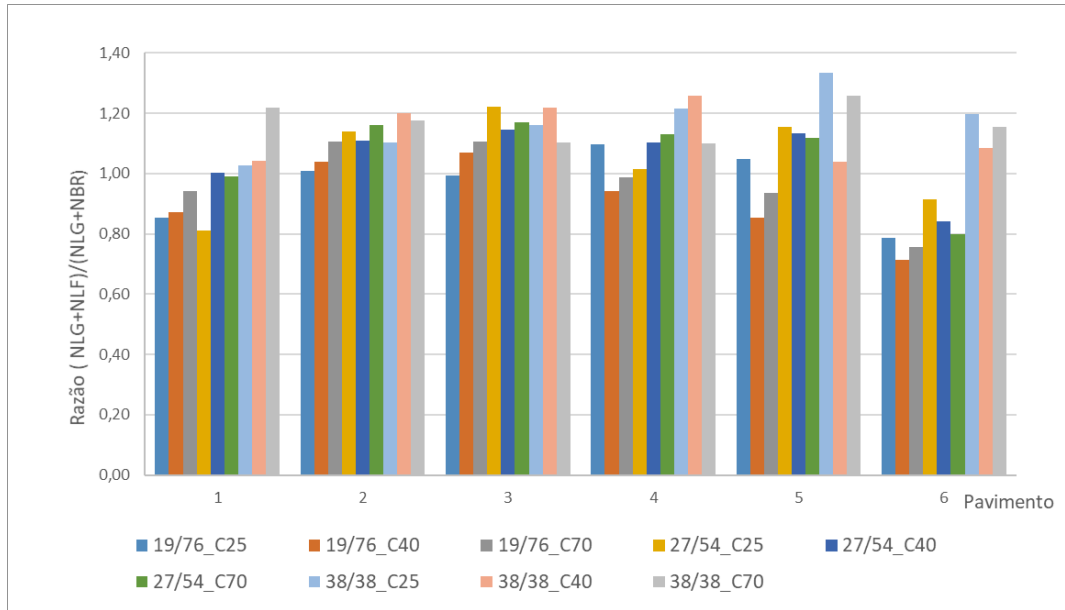
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-80: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para momentos no topo P7



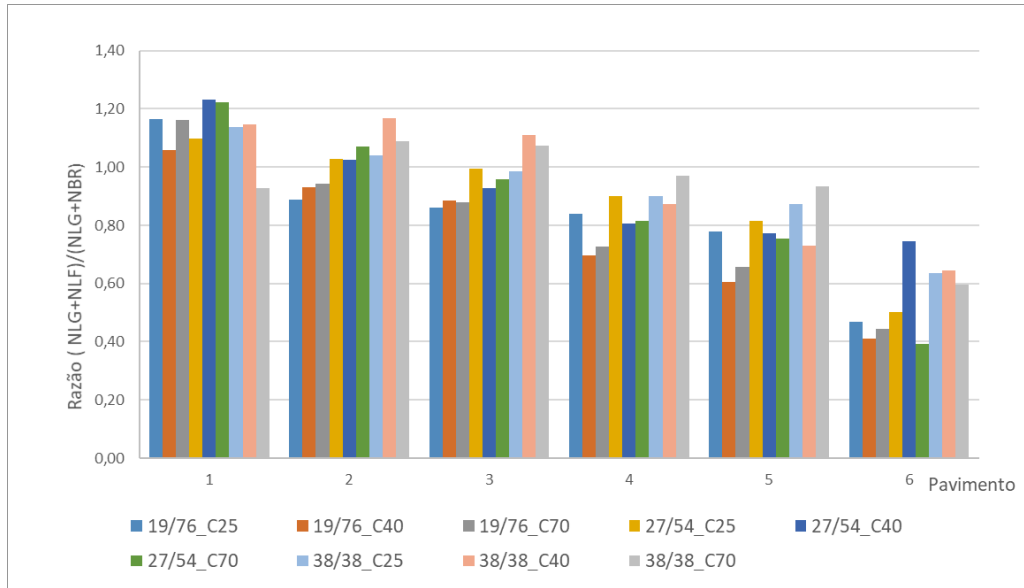
Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-81: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para momentos na base P12



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-82: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para momentos no topo P12



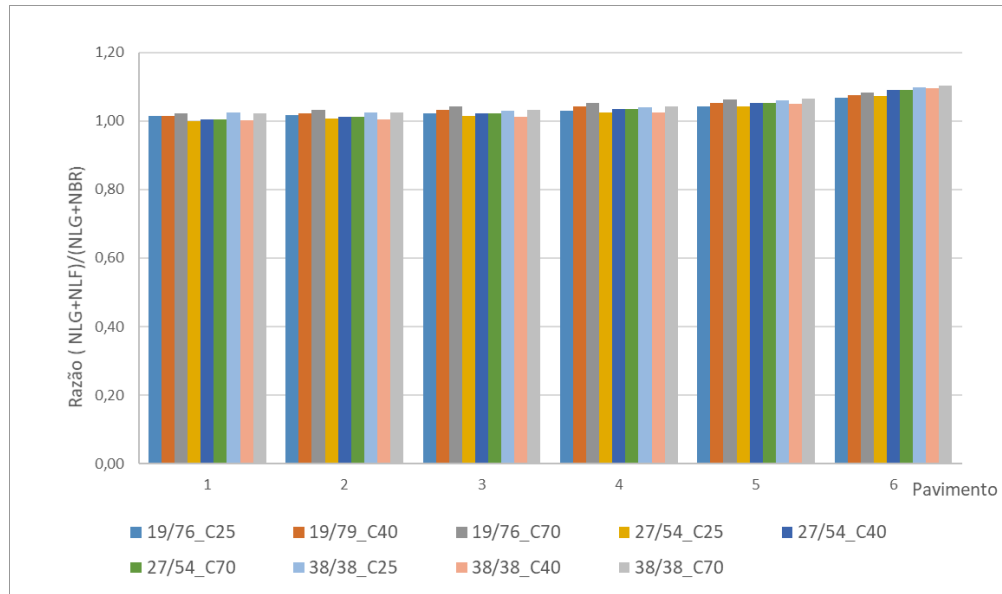
Fonte: O Autor (2025)

Ao comparar as relações entre os pilares P7 e P12, percebeu-se que para a maioria dos modelos e na maioria dos pavimentos o pilar P7 possui uma relação maior, o que indica que sua rigidez relativa ao pilar P12 é maior, o que é razoável uma vez que o pilar P7 está submetido a forças normais menores e momentos fletores em FCO maiores que o pilar P7.

5.3.5.3 Força Normal

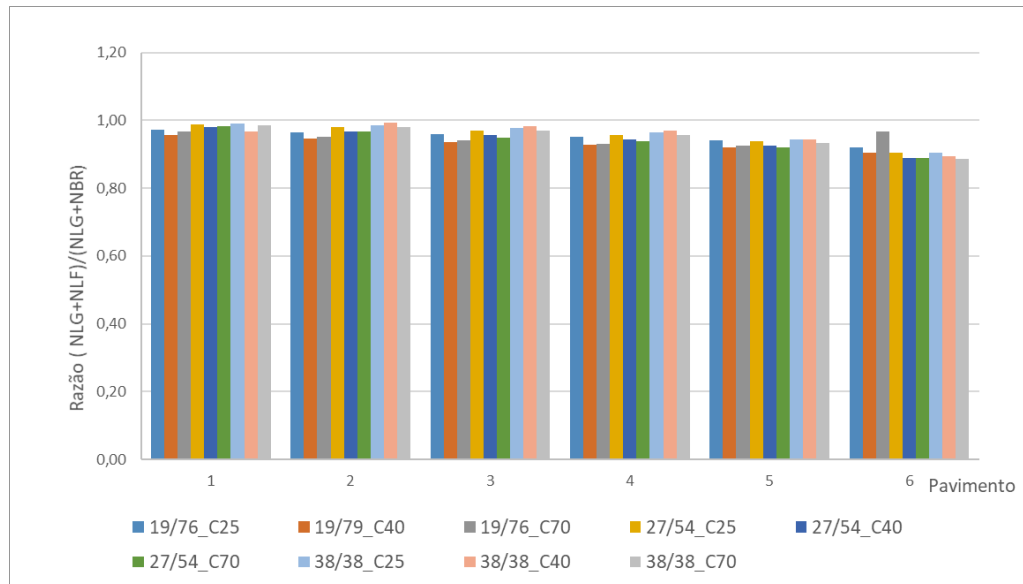
As figuras 5-83 e 5-84 mostram as razões entre forças normais na base dos pilares (NLG+NLF/NLG+NBR) para cada pavimento, para cada modelo na mesma ordem da legenda para os pilares P7 e P12, respectivamente.

Figura 5-83: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para Normal no pilar P7



Fonte: O Autor (2025)

Figura 5-84: Relação NLG+NLF/ NLG+NBR para Normal no pilar P12



Fonte: O Autor (2025)

Tomando como referência o primeiro piso, que é o mais relevante do ponto de vista da intensidade da força normal, pode-se observar na figura 5-83, para o pilar P7, que as relações foram um pouco maiores que 1,00, e que tais relações para o pilar P12 na figura 5-83 foram

um pouco menores que 1,00. Tal comportamento indica que a rigidez do pilar P7 foi maior que a rigidez do pilar P12, em acordo com o observado nos itens anteriores.

6 Conclusões

6.1 CONCLUSÕES.

Este trabalho acoplou teorias consolidadas para a análise não linear física e geométrica de pilares e vigas pertencentes às estruturas de contraventamento de edifícios multipavimentos de concreto armado.

Na análise da revisão bibliográfica observou-se que há uma lacuna de trabalhos específicos sobre a análise de estruturas reticuladas de edifícios em concreto armado considerando os avanços nas teorias e implementação das análises não lineares, sobretudo da não linearidade física. Além disso, destaca-se que mesmo para as metodologias consolidadas há lacunas de conhecimento a serem investigadas, sendo elas a determinação da rigidez à flexão por meio das relações $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, e a falta de estudos experimentais de referência para calibração de modelos de estruturas reticuladas tridimensionais, onde pode-se destacar ensaios para pilares submetidos a FCO.

Do ponto de vista da implementação numérica foram usadas teorias consolidadas em diferentes graus tais como NLG, e comportamento de diafragma rígido para os pavimentos, que estão bem consolidadas, em contrapartida a implementação relativa à NLF ainda necessita de modelos experimentais para comprovação, assim, para sua validação foram considerados modelos que consideram apenas a aplicação de FCN, pois não há modelos teóricos comprovadamente adequados para análises de seções submetidas à FCO.

As metodologias de análise correntes mais avançadas, levando em conta a teoria do concreto armado, consistem na análise não linear geométrica e física de pórticos bidimensionais e eventualmente tridimensionais onde se conhece, previamente, as armaduras e avalia-se esforços e os deslocamentos. A implementação numérica deste trabalho consistiu em acoplar à análise não linear geométrica incremental a variação de rigidez dos elementos submetidos a FCN e FCO por meio dos diagramas $(M_{Rd} - N_{Rd} - 1/r)$, para a determinação dos esforços globais e locais de forma integrada para o dimensionamento das armaduras em um processo iterativo para estruturas reticuladas tridimensionais.

Sobre o primeiro exemplo, que teve o objetivo de mostrar a influência da variação de rigidez ao longo do comprimento dos pilares, ao longo das vigas e entre pilares de mesma seção. Como resultados, constatou-se que os efeitos de segunda ordem locais foram inferiores aos prescritos pela ABNT NBR 6118:2014, pois os deslocamentos de segunda

ordem foram de no máximo 10% dos valores prescritos pela referida normativa, pois ao se considerar a variação da rigidez ao longo do comprimento de vigas e pilares constatou-se que a rigidez é diferente daquela prescrita pela ABNT NBR 6118:2014, sendo que o comportamento estrutural indica que a rigidez relativa viga/pilar é menor que 0,50 prescrita pela normativa.

Sobre o segundo exemplo, que teve o objetivo de avaliar a influência da esbelteza dos pilares e da classe de resistência a compressão do concreto, constatou-se também que os deslocamentos de segunda ordem locais são menores que 10% dos prescritos pela ABNT NBR 6118:2014, constatou-se que para classes de resistência à compressão do concreto C25 os resultados em termos de deslocamentos e momentos fletores nos pilares são próximos àqueles dados pela análise simplificada preconizada pela ABNT NBR 6118:2014, e que os deslocamentos dados pela análise rigorosa são maiores para classes de resistência à compressão maiores.

Com relação a deslocabilidade dos pórticos constatou-se que para as seções com maior momento de inércia as diferenças entre os resultados das análises foi menor, isto ocorreu em função da diminuição dos efeitos de segunda ordem globais.

Com relação à influência da posição dos pilares pode-se constatar que o pilar interno (P7) teve uma maior rigidez que o pilar de canto (P12), isto se deve ao fato de o pilar P12 estar submetido a uma força normal menor e uma flexão oblíqua mais pronunciada.

Desta forma, os resultados mostrados ao longo do trabalho indicam que o acoplamento das não linearidades física e geométrica a um modelo de pórtico tridimensional é viável e mostra resultados coerentes, entretanto a carência de trabalhos experimentais de referência conduz este trabalho para o campo exploratório, porém a metodologia aplicada é adequada para explicar a influência da variação de rigidez ao longo dos elementos estruturais em função da esbelteza, classe de resistência do concreto, nível de solicitação, e relação de forma entre elementos que se conectam no comportamento global e local da estrutura.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foram notados alguns aspectos importantes a serem estudados em trabalhos futuros, a seguir são citados alguns de maior relevância.

- A consideração da deformação por esforço cortante acoplado às não linearidades física e geométrica de forma consistente.

- Ampliação do estudo realizado, considerando um maior número de estruturas, com variabilidade de planta de formas, número de pavimentos e de seção dos pilares.
- A consideração da fluência acoplado às não linearidades física e geométrica de forma consistente.
- Influência do tipo de consideração da não linearidade física dos pilares sobre os demais elementos da estrutura.
- Extensão da análise não linear rigorosa às lajes.
- Considerar a modelagem de edifícios com núcleos de rigidez e pórticos;
- Ensaios que provejam resultados de referência para modelos teóricos e numéricos, estudos paramétricos com ênfase em concretos do grupo II;
- Consideração da interação solo estrutura de forma consistente.

Referências bibliográficas

- ACI COMMITTEE 318. Building Code Requirements for Structural Concrete(ACI 318-19) and Commentary (ACI 318R-2019). Detroit, MI: ACI Comitee 318, 2019.
- ARAUJO, J. M. Pilares esbeltos de concreto armado: Rio Grande: FURG, 1983. 184 p
- ARGYRIS, J. H., DUNNE, P. C., SCHARPF, D. W.; On large displacement –small strain analysis os structures with rotation degrees of freedom; Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.; 14; 401-451; 1978.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120:2019. Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2014). NBR 6118:2014 Projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2023). NBR 6123:2023, Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro.
- BATHE, K. J. (1996). Finite element procedures. New Jersey, Prentice Hall. REDDY, J. N. (1997). On locking-free shear deformable beam finite elements.Comp Meth. App. Mech. Eng. ,149,9p113-132.
- BRANSON, D. E. (1963). Instantaneous and time dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams. Ala. Hwy. Res. Rep. nº 7, Bureau of Public Roads.
- CASAGRANDE, A. F. Consideração da fluência no cálculo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado. Dissertação (Mestrado) - Florianópolis: UFSC, 2016. 127 p.
- CHAVES, L. E. A. et al. Application of general method for design of concrete columns and encased composite steel and concrete columns. Revista Ibracon de Estruturas e Materiais, v. 8, n. 6, p.755-762, dez. 2015.
- CORELHANO, A. G. B. Análise não linear geométrica e física de núcleos rígidos de edifícios altos em concreto armado. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo - SP, 2010.
- CORRÊA, Marcio Roberto da Silva. (1991). Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios. São Carlos. 331p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). EN 1992-1-1 Eurocode 2: Design of concrete structures – Commission of the European Communities, 1989.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). EN 1992-1-1 Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings, 2004. 227 p.
- FRANÇA, R. L. S. Relações momento-curvatura em peças de concreto armado submetidas a flexão oblíqua composta. São Paulo: POLI-USP, 1984. Dissertação (Mestrado).
- FRANÇA, R. L. S. Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado. São Paulo: POLI-USP, 1991. 202 p. Tese (Doutorado).

FUSCO, P. B. Estruturas de concreto: solicitações normais. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. 464 p.

GERE, J. M. & WEAVER Jr, W. (1987). Análise de estruturas reticuladas. Guanabara Rio de Janeiro, RJ

GOMES, B. C. Ferramenta Gráfico-Interativa para Análise Não Linear Física de Pórticos Planos de Concreto Armado Considerando o Diagrama Momento-Curvatura. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2019. Dissertação (Mestrado)

JENNINGS, A. (1968). Frame analysis including change of geometry. Journal of the Structural Division ASCE, v. 94, c. St 3, p. 627-694, March.

JUNGES, E. Modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de pórticos tridimensionais de edifícios de concreto armado. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. Tese (Doutorado).

KIMURA, A. Cálculo de pilares de concreto armado. São Paulo: ABECE, 2019. Apostila.

KIMURA, A. Informática aplicada a estruturas de concreto armado. São Paulo: Oficina de Textos, 2018. 428 p.

KLEIN JÚNIOR, O. Avaliação da variabilidade dos efeitos de segunda ordem de pilares esbeltos de concreto armado. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022. Tese (Doutorado)

MACGRECOR, J. G. ; HAGE, S., Stability analysis and design of concrete frames. Journal of the Structural Division, (ASCE), v103, n.10, p.1958-1970. October, 1977

MALLET, R., MARÇAL, P. V.; Finite element analysis of nonlinear structures; J. Struct. Div., ASCE; 94; 2081-2105; 1968

MARTIN, H. C.; Finite elements and the analysis of geometrically nonlinear problems; In Gallagher, R. H. et al, ed, Recent Advances In Matrix Methods of Structural Analysis and Design; The University of Alabama Press; Alabama; 343-381; 1969

NARAYANASWAMI, R. & ADELMAN, H. M. Inclusion of transverse shear deformation in finite element displacement formulation. AIAA - Journal vol.12, nº11.P1613-1614 New York, John Wiley.

NICKEL, R. E.; SECOR, G. A. (1972). Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 5, p. 243-253.

ORAN, C.; Tangente stiffness in space frames; J. Struct. Div. , ASCE; 99; 987-1001; 1973

PAULA, C. F. (2001). Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PASTORE, M. F. Análise de pilares esbeltos de concreto armado de seção retangular submetidos à flexão composta oblíqua. 2020. 175p. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

PIMENTA, P. M. (1986). Análise não-linear de pórticos planos. São Paulo, EPUSP. Boletim técnico do departamento de engenharia de estruturas e Fundações, 8611.

PINTO, R.S. (2002). Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2002.

PINTO, V. S. Dimensionamento de pilares de concreto com seção transversal retangular usando envoltórias de momentos. 2017. 312 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

RASHEED, H. A. S.; DINNO, K. S. (1994). An efficient nonlinear analysis of RC sections. Computers and Structures, v. 53, n. 3, p. 613-623.

RASHEED, H. A. S.; DINNO, K. S. (1994). An improved nonlinear analysis of reinforced concrete frames. Computers and Structures, v. 53, n. 3, p. 625-636.

RIBEIRO, K. Diagramas para verificação de pilares retangulares em concreto armado submetidos à flexão composta normal. 2011. 308 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011

SANTOS, L. M. Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado. São Paulo: Editora Thot, 1994. 450 p.

SILVA, R. M. (1996). Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado: modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos - USP.

SOLER, J. G. M. (1995) Análise não-linear de pórticos espaciais de concreto armado. São Paulo. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

TESSLER, A.; DONG, S. B. (1981). On a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements. Computers & Structures, v. 14, n. 3-4, p.335-344.

TIMOSHENKO, S. P. ; GERE, J. M. (1984). Teoria da elasticidade. 2. ed. New York, Graw-Hill.

TURNER, M. J. ;DILL,E.H.; MARTIN, H. C.; TOPP,L.J. Stiffness and Deflection analysis of Complex Structures. J. Aerospace Sciences;23, 805-224. 1965

TURNER, M. J.; CLOGH,R.W.; MARTIN, H. C.; MELSOSH,R.J . Large Deflection on Structures Subjected to Heating and External Loads AND Deflection Analysis of Complex Structures. J. Aerospace sciences; 27. 1960.

VECHIO, F.J ; EMARA, M. B. (1992). Shear deformations in reinforced concrete frames. ACI Structural Journal, v.89, No. 1, January-February 1992.

WEN, R.K.; RAHIMZADEH, J. (1983). Nonlinear elastic frame analysis by finite element. Journal of Structural Engineering, v.109, n.8, p.1952-1971.

WILBY, C. B.; PANDIT, T. (1967). Inelastic behavior of reinforced concrete singlebay portal frames. Civil Engineering Pub. Works Rev. 62, 331-336

YAGUI, T. (1971). Estruturas constituídas de paredes delgadas com diafragmas transversais. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos – EESC – USP.

Apêndices

Nos apêndices são mostrados maiores detalhes sobre as formulações usadas além dos exemplos de validação das rotinas.

A: Deformação por força cortante

$$K_T = \begin{bmatrix} K_{TAA} & K_{TAB} \\ SIM & K_{TBB} \end{bmatrix} \quad (A-1)$$

$$K_{TAA} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EIz}{(1+2Gz)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{(1+2Gz)L^2} & 0 \\ \frac{12EIy}{(1+2Gy)L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{(1+2Gy)L^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Glx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ SIM & \frac{2(2+Gy)EIy}{(1+2Gy)L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2(2+Gz)EIz}{(1+2Gz)L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A-2)$$

$$K_{TAB} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EIz}{(1+2Gz)L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{(1+2Gz)L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EIy}{(1+2Gy)L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{(1+2Gy)L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{Glx}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2(1-Gy)EIy}{(1+2Gy)L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EIz}{(1+2Gz)L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1-Gz)EIz}{(1+2Gz)L} \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

$$K_{T_{BB}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EIz}{(1+2Gz)L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{(1+2Gz)L^2} & 0 \\ \frac{12EIy}{(1+2Gy)L^3} & 0 & \frac{6EIy}{(1+2Gy)L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Glx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIM} & & \frac{2(2+Gy)EIy}{(1+2Gy)L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(2+Gz)EIz}{(1+2Gz)L} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

B: Não linearidade geométrica

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} \\ \frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{-6EIy}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{Glx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-Glx}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 \\ \text{SIM} & & & & & & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & \frac{Glx}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & \frac{4EIy}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{4EIz}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (B-1)$$

$$K_1 = EA \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\varphi_2}{10L} & \frac{\psi_2}{10L} & 0 & \frac{-\varphi_3}{30} & \frac{-\psi_3}{30} & 0 & \frac{\varphi_2}{10L} & \frac{-\psi_2}{L} & 0 & \frac{-\psi_4}{30} & \frac{-\varphi_4}{30} \\ \frac{6\varphi_1}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & \frac{\varphi_2}{10L} & \frac{-6\varphi_1}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1}{10} \\ \frac{6\varphi_1}{5L} & 0 & \frac{-\varphi_1}{10} & 0 & \frac{-\varphi_2}{10L} & 0 & \frac{-\varphi_2}{10L} & 0 & \frac{-6\varphi_1}{5L} & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2\varphi_1L}{15} & 0 & \frac{\psi_3}{30} & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 & \frac{-\varphi_1L}{30} & 0 \\ & & & \frac{-2\varphi_1L}{15} & \frac{\varphi_3}{30} & \frac{-\varphi_1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varphi_1L}{30} \\ & & & & 0 & \frac{-2\varphi_2}{10L} & \frac{2\psi_2}{10L} & 0 & \frac{\psi_4}{30} & \frac{\varphi_4}{30} & \frac{-\varphi_1}{10} & 0 \\ \text{SIM} & & & & & & \frac{6\varphi_1}{5L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{6\varphi_1}{5L} & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{2\varphi_1L}{15} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{2\varphi_1L}{15} & 0 \end{bmatrix}$$

(B-2)

$$K_2 = \begin{bmatrix} K_{2AA} & K_{2AB} \\ SIM & K_{2BB} \end{bmatrix} \quad (B-3)$$

$$K_{2AA} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_5 + \psi_{11}}{L} & \frac{-\varphi_2 \psi_2}{100L} & 0 & \frac{\varphi_2 \psi_3}{300} & \varphi_6 + \frac{\psi_{11}}{12} \\ \frac{\varphi_5 + \psi_{11}}{L} & \frac{\varphi_5 + \psi_{11}}{L} & 0 & -\psi_6 - \frac{\varphi_{11}}{12} & \frac{\psi_2 \varphi_3}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ SIM & & & (\psi_8 + \frac{\varphi_{11}}{9})L & \frac{\varphi_3 \psi_3}{900}L \\ & & & & (\varphi_8 + \frac{\psi_{11}}{9})L \end{bmatrix}$$

(B-3a)

$$K_{2AB} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\varphi_5 - \psi_{11}}{L} & \frac{\varphi_2 \psi_2}{100L} & 0 & \frac{\varphi_2 \psi_4}{300} & \varphi_7 + \frac{\psi_{11}}{12} \\ 0 & \frac{\varphi_2 \psi_2}{100L} & \frac{-\psi_5 - \varphi_{11}}{L} & 0 & \psi_7 + \frac{\varphi_{11}}{12} & \frac{\psi_2 \varphi_4}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\varphi_2 \psi_3}{300} & \psi_6 + \frac{\varphi_{11}}{12} & 0 & (\psi_9 - \frac{\varphi_{11}}{36})L & \frac{\varphi_4 \psi_3}{900}L \\ 0 & -\varphi_6 - \frac{\psi_{11}}{12} & \frac{\psi_2 \varphi_3}{300} & 0 & \frac{\psi_4 \varphi_3}{900}L & (\varphi_9 - \frac{\psi_{11}}{36})L \end{bmatrix}$$

(B-3b)

$$K_{2BB} = EA \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_5 + \psi_{11}}{L} & \frac{-\varphi_2 \psi_2}{100L} & 0 & \frac{-\varphi_2 \psi_4}{300} & -\varphi_7 - \frac{\psi_{11}}{12} \\ \frac{\varphi_5 + \psi_{11}}{L} & \frac{\varphi_5 + \psi_{11}}{L} & 0 & \psi_7 + \frac{\varphi_{11}}{12} & \frac{\psi_2 \varphi_4}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ SIM & & & (\psi_{10} + \frac{\varphi_{11}}{9})L & \frac{\varphi_4 \psi_4}{900}L \\ & & & & (\varphi_{10} + \frac{\psi_{11}}{9})L \end{bmatrix}$$

(B-3c)

Onde:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= (v_2 - v_1)/L & \text{(B-4)...} \\
\theta_1 &= rz_1 \\
\theta_2 &= rz_2 \\
\beta_0 &= (w_1 - w_2)/L \\
\beta\theta_1 &= ry_1 \\
\beta_2 &= ry_2 \\
\varphi_1 &= (u_2 - u_1)/L \\
\varphi_2 &= \theta_1 + \theta_2 - 12\theta_0 \\
\varphi_3 &= 4\theta_1 - \theta_2 - 3\theta_0 \\
\varphi_4 &= 4\theta_2 - \theta_1 - 3\theta_0 \\
\varphi_5 &= (9\theta_1^2 + 9\theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 - 36\theta_1\theta_0 - 36\theta_2\theta_0 + 216\theta_0^2)/100 \\
\varphi_6 &= (6\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 - 54\theta_1\theta_0 + 6\theta_2\theta_0 + 54\theta_0^2)/300 \\
\varphi_7 &= (6\theta_2^2 + \theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 - 54\theta_2\theta_0 + 6\theta_1\theta_0 + 54\theta_0^2)/300 \\
\varphi_8 &= (8\theta_1^2 + 3\theta_2^2 - 4\theta_1\theta_2 - 12\theta_1\theta_0 - 2\theta_2\theta_0 + 27\theta_0^2)/300 \\
\varphi_9 &= (-2\theta_1^2 - 2\theta_2^2 + 6\theta_1\theta_2 - 2\theta_1\theta_0 - 2\theta_2\theta_0 - 3\theta_0^2)/300 \\
\varphi_{10} &= (8\theta_2^2 + 3\theta_1^2 - 4\theta_1\theta_2 - 12\theta_2\theta_0 - 2\theta_1\theta_0 + 27\theta_0^2)/300 \\
\varphi_{11} &= (2\theta_1^2 + 2\theta_2^2 - \theta_1\theta_2 + 3\theta_1\theta_0 - 3\theta_2\theta_0 + 18\theta_0^2)/25 \\
\psi_1 &= (u_2 - u_1)/L \\
\psi_2 &= \beta_1 + \beta_2 - 12\beta_0 \\
\psi_3 &= 4\beta_1 - \beta_2 - 3\beta_0 \\
\psi_4 &= 4\beta_2 - \beta_1 - 3\beta_0 \\
\psi_5 &= (9\beta_1^2 + 9\beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 - 36\beta_1\beta_0 - 36\beta_2\beta_0 + 216\beta_0^2)/100 \\
\psi_6 &= (6\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 - 54\beta_1\beta_0 + 6\beta_2\beta_0 + 54\beta_0^2)/300 \\
\psi_7 &= (6\beta_2^2 + \beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 - 54\beta_2\beta_0 + 6\beta_1\beta_0 + 54\beta_0^2)/300 \\
\psi_8 &= (8\beta_1^2 + 3\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_2 - 12\beta_1\beta_0 - 2\beta_2\beta_0 + 27\beta_0^2)/300 \\
\psi_9 &= (-2\beta_1^2 - 2\beta_2^2 + 6\beta_1\beta_2 - 2\beta_1\beta_0 - 2\beta_2\beta_0 - 3\beta_0^2)/300 \\
\psi_{10} &= (8\beta_2^2 + 3\beta_1^2 - 4\beta_1\beta_2 - 12\beta_2\beta_0 - 2\beta_1\beta_0 + 27\beta_0^2)/300 \\
\psi_{11} &= (2\beta_1^2 + 2\beta_2^2 - \beta_1\beta_2 + 3\beta_1\beta_0 - 3\beta_2\beta_0 + 18\beta_0^2)/25 & \text{...(B-32)}
\end{aligned}$$

Dado o baixo nível de não linearidade geométrica associada às estruturas usuais de edifícios, a formulação acima descrita dispensa o caráter incremental dos carregamentos, bastando um único passo de carregamento. Para análises não lineares geométrica e física, devido a um maior nível de não linearidade introduzida pelo material, há a necessidade da

divisão do carregamento, tornando indispensável o tratamento incremental dos carregamentos.

Para uma análise em que o carregamento é incremental, quando se passa de um nível de carregamento para o seguinte, além da atualização de coordenadas da estrutura deve-se considerar o nível de tensões a que a estrutura está sujeita até o início do novo incremento. A informação quanto ao nível de tensões é dado pela tradicional matriz geométrica, expressa por:

$$K_G = N. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{-6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ & & \frac{6}{5L} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6}{5L} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 \\ & & & 0 & \frac{0}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{0}{5L} & 0 & \frac{0}{10} & 0 \\ & & & & \frac{2L}{15} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{-L}{30} & 0 \\ & & & & & \frac{2L}{15} & 0 & \frac{-1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{30} \\ & & & & & & 0 & \frac{0}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{6}{5L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{10} \\ & & & & & & & & \frac{6}{5L} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & \frac{0}{10} & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & \frac{2L}{15} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}$$

(B-33)

C: VALIDAÇÃO NLG+NLF: Pórtico com 8 pavimentos.

O exemplo a seguir, estudado por vários pesquisadores trata de uma estrutura mais próxima das encontradas em edifícios correntes, com dimensões e carregamentos usuais.

O dimensionamento desta estrutura, de acordo com PINTO (2002), foi feito segundo a NB-1/78. Para uma mesma geometria e carregamento foram obtidas três situações de dimensionamento, nas quais as dimensões dos elementos foram concebidas de forma a apresentar três taxas de armadura diferentes, uma próxima à mínima, uma próxima à média, em torno de 2% para os pilares, e uma próxima a 4%

Os carregamentos verticais e horizontais foram aplicados simultaneamente. A situação que corresponde ao Estado Limite Último, aqui chamado ELU, é aquela em que um fator multiplicador igual a 1,4 é aplicado sobre todos os carregamentos. O estado Limite de Serviço, aqui chamado ELS, é aquele no qual os carregamentos são aplicados com seu valor integral igual ao apresentado nas figuras C-1 e C-2.

Os casos designados pela letra A têm as menores taxas de armadura, os designados por B têm taxas médias, e os indicados pela letra C têm taxas próximas à máxima. A seguir são mostrados geometria, carregamentos e discretização da estrutura. As dimensões nas figuras C-1 e C-2 são dadas em cm. O detalhamento dos elementos é mostrado em CORELHANO (2010).

Os parâmetros do aço e do concreto são mostrados nas tabelas C-1 e C-2

Tabela C-1: Propriedades do aço

f_{yk} (kN/cm ²)	γ_s	E_s (kN/cm ²)	ε_{yd} (1/1000)
50	1,15	21000	2,07

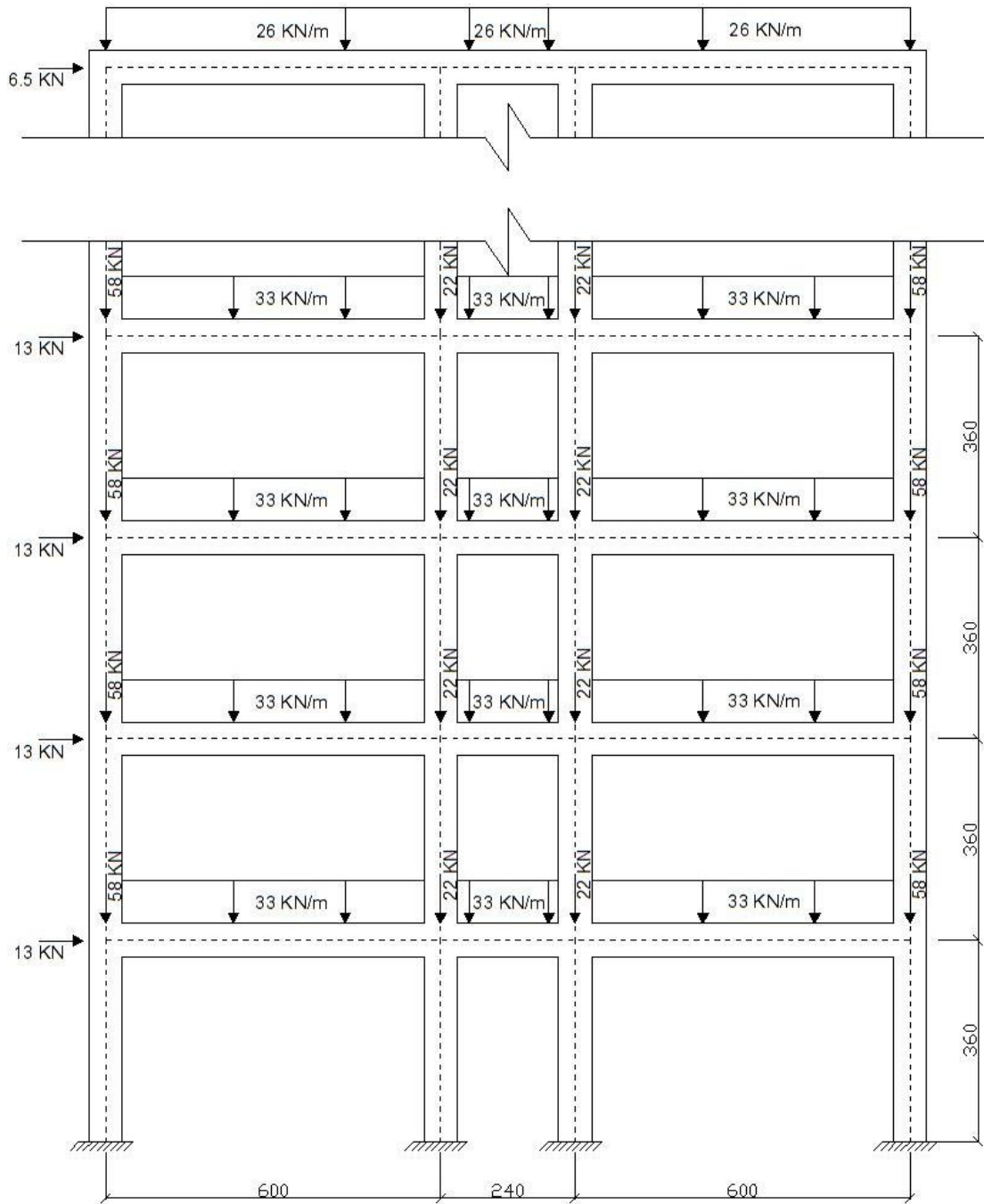
Fonte: O Autor (2025)

Tabela C-2: Propriedades dos concretos para NLF

Concreto								
f_{ck} (MPa)	γ_c	n	α_E	E_{ci} (MPa)	ε_{c2}	ε_{cu}	f_{ctm} (MPa)	f_{ctk} (MPa)
20	1,40	2,00	1,00	25044,00	2,00	3,50	2,20	1,55

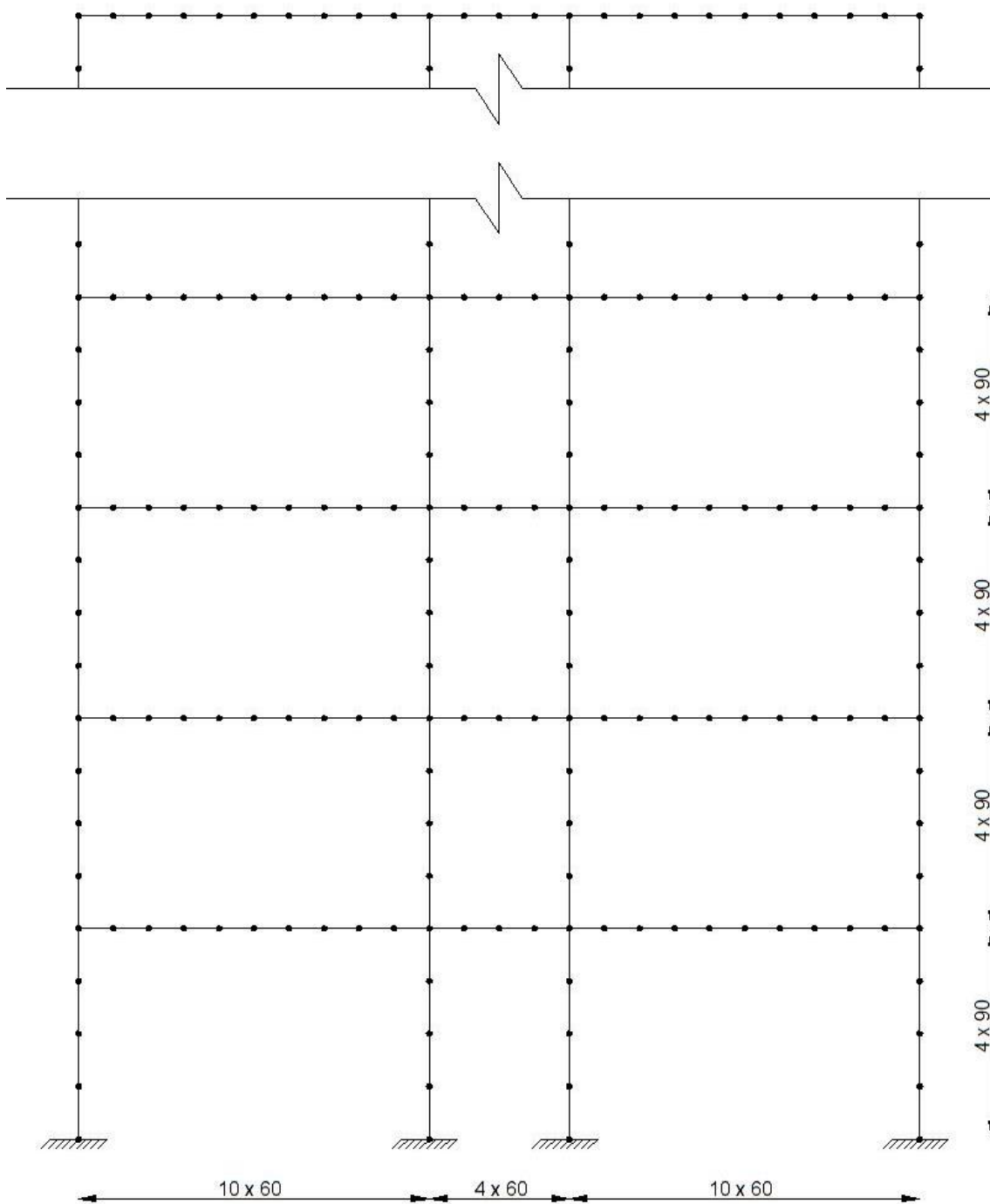
Fonte: O Autor (2025)

Figura C-1: Geometria e carregamento do pórtico apresentado em PINTO (2002)



Fonte: CORELHANO (2010)

Figura C-2: Discretização das barras do pórtico apresentado em PINTO (2002)



Fonte: CORELHANO (2010)

A tabela C-3 mostra os deslocamentos horizontais de cada pavimento para as situações de ELU, ELS para as três taxas de armaduras (A, B, e C) obtidos por PINTO (2002), e este trabalho.

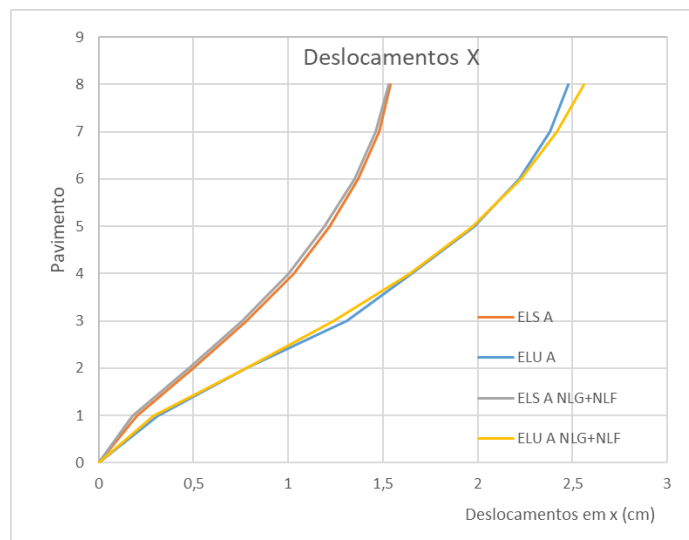
Tabela C-3: Deslocamentos horizontais dos pavimentos do pórtico

Pav.	Deslocamentos (cm) PINTO (2002)						Deslocamentos (cm) Este trabalho					
	A		B		C		A		B		C	
	ELS	ELU	ELS	ELU	ELS	ELU	ELS	ELU	ELS	ELU	ELS	ELU
FUND.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,20	0,31	0,49	0,85	0,64	1,09	0,18	0,29	0,40	0,71	0,60	0,95
2	0,50	0,78	1,11	1,93	1,43	2,42	0,48	0,78	1,02	1,76	1,43	2,32
3	0,78	1,31	1,66	2,84	2,16	3,63	0,76	1,24	1,59	2,70	2,19	3,56
4	1,03	1,65	2,11	3,59	2,75	4,66	1,00	1,64	2,06	3,47	2,84	4,60
5	1,22	1,98	2,48	4,20	3,24	5,44	1,19	1,97	2,44	4,08	3,38	5,45
6	1,37	2,22	2,75	4,63	3,60	6,01	1,35	2,23	2,73	4,55	3,78	6,08
7	1,48	2,38	2,95	4,96	3,85	6,42	1,46	2,42	2,93	4,87	4,05	6,51
8	1,54	2,48	3,08	5,19	4,02	6,72	1,53	2,56	3,05	5,06	4,19	6,74

Fonte: O Autor (2025)

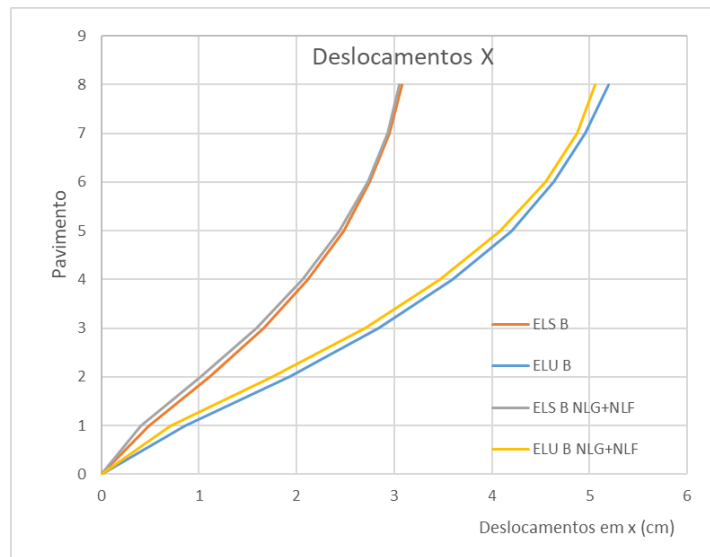
Nas figuras C seguir são mostrados os deslocamentos horizontais de cada pavimento, estes são comparados com os mostrados em PINTO (2002). Os nomes dos exemplos acompanhados de NUC NLGF são referentes aos obtidos com o código desenvolvido neste trabalho, os demais são oriundos da referência acima citada.

Figura C-3: Deslocamento horizontal ao nível de cada pavimento: A



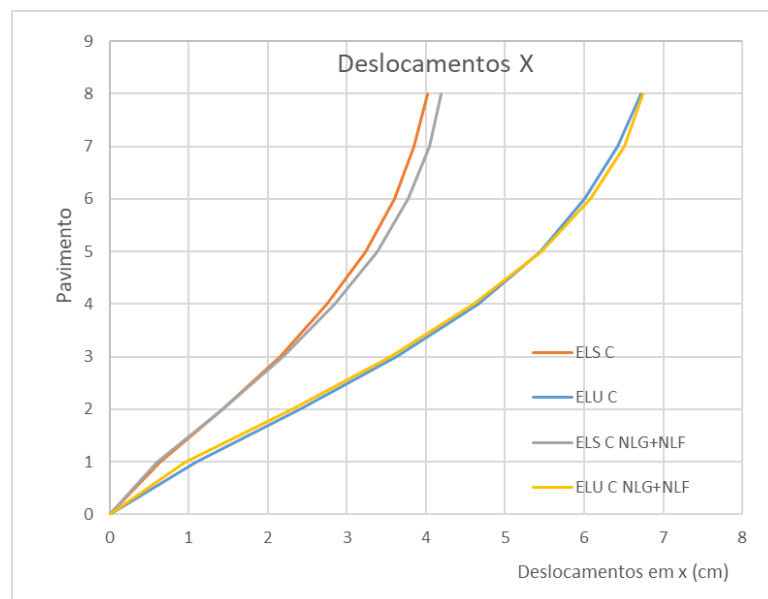
Fonte: O Autor (2025)

Figura C-4: Deslocamento horizontal ao nível de cada pavimento: B



Fonte: O Autor (2025)

Figura C-5: Deslocamento horizontal ao nível de cada pavimento: C



Fonte: O Autor (2025)

Neste exemplo onde são estudadas estruturas mais próximas àquelas usualmente empregadas em edifícios, os deslocamentos obtidos com o código desenvolvido neste trabalho são muito próximos dos mostrados pela referência. Para as três situações de taxa de armadura o nível de representatividade foi praticamente o mesmo, independente do nível de carregamento aplicado, ELS ou ELU.

