UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

IARA CRISTINA DE SOUSA ALBINO

EXPLORANDO EQUAÇÕES ALGÉBRICAS COM MATERIAIS DIDÁTICOS

SÃO CARLOS
2024

IARA CRISTINA DE SOUSA ALBINO

EXPLORANDO EQUAÇÕES ALGÉBRICAS COM MATERIAIS DIDÁTICOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador

SÃO CARLOS
2024

Dedico este trabalho com todo o meu amor e gratidão à minha mãe
e aos meus queridos irmãos Ygor, Gabriel e Bianca.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero expressar minha sincera gratidão a Deus, cuja presença e orientação estiveram presentes em cada etapa deste percurso. Sua presença constante me sustentou nos momentos de dúvida e incerteza, proporcionando a força necessária para seguir em frente.

Agradeço à minha mãe, Claudineia, minha fonte inesgotável de amor, apoio e incentivo, dedico minha mais profunda gratidão. Seu sacrifício e dedicação foram fundamentais para que eu pudesse alcançar este momento de vitória. Sempre me incentivando a seguir em frente, você é a minha inspiração.

Ao meu respeitado orientador, Prof. Dr. José Antonio Salvador, sou grata por sua dedicação e orientação ao longo deste trabalho. Sua experiência foi essencial para moldar e aprimorar minhas ideias. Obrigada por acreditar em meu potencial e por sempre me guiar rumo à excelência acadêmica.

E, por fim, gostaria de agradecer a mim mesma. A jornada até este momento não foi fácil, e as adversidades foram inúmeras, mas jamais desisti. Acreditei em meu potencial, enfrentei os desafios e mantive a determinação para alcançar meus objetivos.

A todos que de alguma forma contribuíram para o sucesso deste trabalho, o meu sincero agradecimento. Cada apoio, incentivo e palavra amiga foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui.

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso tem como propósito investigar o potencial do material dourado, com menção também a outros materiais didáticos, como recurso para o ensino e resolução de equações de primeiro, segundo e terceiro graus, mediante uma revisão bibliográfica. A pesquisa concentra-se na análise de estudos e abordagens existentes que exploram o uso desses materiais no ensino dessas equações matemáticas. Apesar da discussão sobre outros materiais didáticos, é importante ressaltar que o foco principal da aplicação prática na escola foi exclusivamente no material dourado. Esse foi introduzido em um ambiente escolar, focalizando especificamente as equações de segundo grau, com o intuito de compreender como os alunos reagiriam a esse método. O objetivo principal é analisar como o material dourado pode contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e promovendo uma aprendizagem mais embasada para os alunos. Ao explorar as fontes bibliográficas relevantes, este trabalho busca oferecer elementos para aprimorar as práticas educacionais relacionadas ao ensino das equações de primeiro, segundo e terceiro graus, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem no campo da matemática.

Palavras-chave: Recurso didático. Equações algébricas. Material dourado.

ABSTRACT

A present work aimed to explore the potential of the Golden Material, along with mention of other didactic materials, as a resource for teaching and solving first, second, and third-degree equations through a literature review. The research focuses on analyzing existing studies and approaches that explore the use of these materials in teaching these mathematical equations. Despite the discussion on other didactic materials, it is important to emphasize that the main focus of practical application in the school was exclusively on the Golden Material. This was introduced in a school environment, specifically focusing on second-degree equations, with the aim of understanding how students would react to this method. The main objective is to analyze how the Golden Material can contribute to a better understanding of the concepts involved, favoring the development of logical reasoning and promoting a more grounded learning experience for students. By exploring relevant bibliographic sources, this study seeks to provide elements to enhance educational practices related to teaching first, second, and third-degree equations, enriching the teaching-learning process in the field of mathematics.

Keywords: Didactic resource. Algebraic equations. Golden material.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Considerando que, na maioria das situações, a matemática é ensinada de maneira tradicional, focando na repetição e memorização dos conceitos apresentados, sem uma compreensão adequada de sua aplicação no cotidiano, o objetivo deste trabalho é apresentar métodos que se afastam do ensino tradicional ao abordar equações algébricas. Mesmo sendo comumente utilizado durante o Ensino Fundamental I para ensinar contagem e operações na base 10, observa-se que o material dourado é pouco empregado no ensino de outros conceitos matemáticos, embora esteja disponível em várias escolas públicas. Acredita-se que a incorporação desse recurso na introdução de outros conceitos pode proporcionar um desenvolvimento mais significativo dos conteúdos, ao mesmo tempo, em que estimula o raciocínio lógico e amplia a compreensão do abstrato por meio do concreto.

> "... Azevedo (1979) apud Fiorentini e Miorim (1990, p. 4) afirma que Montessori acreditava não haver aprendizagem sem ação, pois “nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração”". (FONSECA, 2017).

A citação acima destaca a importância de proporcionar às crianças experiências concretas na aprendizagem matemática, como forma de estimular a compreensão e a transição para o abstrato. Além disso,

> "... Arce (2002) destaca que o educador Pestalozzi afirmava que a educação das crianças deveria começar pela percepção dos objetos concretos com a realização de ações concretas e experimentações, pois a transição do conhecimento concreto para o abstrato deve ocorrer de maneira natural e intuitiva." (FONSECA, 2017).

Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento normativo que estabelece diretrizes para o currículo da educação básica, uma das competências específicas de matemática para o ensino fundamental é a seguinte:

> "Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções." (BRASIL, 2018).

Embora muitas vezes associados ao ensino fundamental, esses recursos podem ser igualmente eficazes no ensino médio, proporcionando uma abordagem visual para o aprendizado de conceitos matemáticos mais avançados. Ao interagir com materiais manipuláveis, que

> "Para Matos e Serrazina (1996), são objetos ou coisas que se pode sentir, manipular, movimentar, tocar. Lorenzato (2006), por sua vez, se refere aos materiais manipuláveis com o termo Material Didático (MD), considerando-os como um instrumento útil no processo de ensino e aprendizagem." (FACCHI, 2022)

os alunos podem explorar e experimentar concretamente os princípios matemáticos, tornando-os mais compreensíveis. Isso não apenas fortalece a compreensão dos conceitos, mas também estimula o raciocínio lógico, a resolução de problemas e o pensamento criativo, criando uma base sólida para o aprendizado contínuo da matemática.

Portanto, o objetivo principal deste trabalho consistiu em realizar um estudo sobre a aplicabilidade de materiais didáticos em sala de aula, explorando conteúdos matemáticos nas áreas de aritmética e álgebra, com foco no ensino de equações algébricas. Além disso, analisamos como os alunos reagiram à resolução de equações do segundo grau por meio da aplicação do material dourado.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico aborda a história de Maria Montessori e o desenvolvimento do material dourado como recurso didático na educação básica. Esse conjunto de peças concretas, representando a base decimal, é utilizado para ensinar conceitos matemáticos de forma manipulativa. Além disso, o estudo explora a possibilidade de construir um material dourado sustentável, utilizando materiais recicláveis.

A utilização do material dourado na educação básica é analisada quanto ao seu potencial para facilitar o aprendizado de operações matemáticas e a resolução de equações de maneira mais intuitiva, promovendo a aprendizagem ativa dos alunos.

2.1 MATERIAL DOURADO

Exploraremos a história de Maria Montessori e o desenvolvimento do material dourado.

Figura 2.1 – Maria Montessori. Fonte: Wikipédia[1].

Maria Montessori (1870-1952), nascida em Chiaravalle, uma cidade na província de Ancona, localizada na Itália, foi filha única de Alessandro Stoppani e Renilde Stoppani. Pertencendo a uma família de classe média, Maria iniciou seus estudos em 1883 na Scuola Técnica Michelangelo Buonarroti. Posteriormente, de 1886 a 1890, frequentou o Instituto Técnico Leonardo da Vinci, onde se graduou aos 20 anos. Durante sua formação, demonstrou habilidades destacadas em Matemática e Ciências.

Apesar da resistência familiar e das convenções sociais da época, Maria Montessori

[1] <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Maria_Montessori_(portrait).jpg>. Acesso em: 06 jun. 2023.

demonstrou sua determinação ao ingressar na Universidade de Roma, tornando-se a primeira mulher italiana a cursar medicina. Ao longo dos anos, ela começou a ganhar reconhecimento em sua área, conquistando prêmios que atestavam sua excelência acadêmica. Em 1894, Montessori foi agraciada com o prêmio da Fondazione Rolli, em reconhecimento aos estudos que vinha desenvolvendo e ao seu compromisso com a excelência na medicina. Essas conquistas evidenciaram seu talento e abriram portas para uma carreira promissora, estabelecendo-a como uma figura respeitada em sua área de atuação.

Após concluir seus estudos e direcionar sua carreira para a Psiquiatria, Montessori iniciou seu trabalho como assistente no hospital San Giovanni e, simultaneamente, em uma Clínica Psiquiátrica de Sciamanna. Nesses ambientes, atuavam médicos renomados da época, incluindo Sante De Sanctis, considerado o pai da neuropsiquiatria italiana. Durante esse período, Montessori teve a oportunidade de conhecer e se interessar pelas obras de Jean Itard e Edward Seguin, cujas ideias se tornaram a base para o desenvolvimento de seu próprio método de ensino, conhecido como Método Montessoriano. Este método ainda é aplicado atualmente em algumas escolas que adotam a abordagem Montessoriana, demonstrando a relevância e a duradoura influência do trabalho de Montessori na área da educação.

Maria Montessori também foi responsável pela criação de materiais educacionais, com destaque para o material dourado, que será o foco principal deste trabalho. Conhecido na época como “material de contas douradas”, foi inicialmente desenvolvido para atender às necessidades especiais sensoriais de alunos com deficiência auditiva, surdez e cegueira. No entanto, Montessori percebeu que esse recurso poderia ser benéfico para o ensino de todos os alunos, independentemente de suas habilidades sensoriais.

Embora o material dourado tenha sido desenvolvido inicialmente para auxiliar no ensino do sistema de numeração decimal-posicional e das operações fundamentais, sua aplicação não se limita a esses conceitos. O ensino por meio do material dourado pode ser expandido para outras áreas e conteúdos na matemática, abrangendo desde cálculo de área e volume até raiz quadrada, equações e diversas outras atividades. Essa versatilidade do material dourado permite a exploração de uma ampla gama de conceitos matemáticos de maneira concreta, enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

De acordo com Santos e Pereira (2016), a construção do material dourado foi guiada pelos mesmos princípios Montessorianos que orientaram a criação de outros recursos educacionais, como a educação sensorial

- desenvolver na criança a independência, confiança em si mesmo, a concentração, a coordenação e a ordem;

– gerar e desenvolver experiência concretas estruturadas para conduzir, gradualmente, a abstrações cada vez maiores;

– fazer a criança, por ela mesma, perceber os possíveis erros que comete ao realizar uma determinada ação com o material;

– trabalhar com os sentidos da criança;

Inicialmente, o material dourado foi projetado para permitir que as próprias crianças produzissem dezenas e centenas. No entanto, ao longo do tempo, surgiram desafios na resolução de algumas atividades, o que levou a uma modificação do material original por Lubienska de Lenval, uma seguidora de Montessori. Essa nova versão, construída em madeira, consistia em cubinhos (unidade), barras (dezena), placas (centena) e um cubo maior (milhar), proporcionando maior clareza no manuseio do material.

O material dourado é apresentado de acordo com a representação ilustrada na figura a seguir.

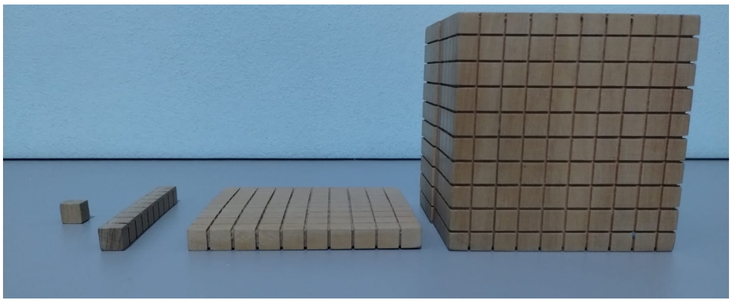


Figura 2.2 – Material Dourado. Fonte: Autora

Por fim, de acordo com Santos e Pereira (2016), o material dourado é um

> "Material concreto com uma enorme capacidade de dar significação aos conteúdos matemáticos auxiliando o professor na construção do saber. Conteúdos antes abordados no ensino tradicional, a partir de treinos cansativos, com alunos sem conseguirem compreender o que fazem, com o Material Dourado a situação é outra: as relações numéricas abstratas passam a ter uma imagem concreta, facilitando a compreensão." (SANTOS; PEREIRA, 2016).

2.2 CONSTRUÇÃO DO MATERIAL DOURADO

É possível encontrar o material dourado em várias lojas especializadas em materiais escolares, já prontos para uso. No entanto, existe a possibilidade de construir, de forma didática, um material dourado utilizando materiais recicláveis, como papelão, papel cartão, cartolina, entre outros. Neste contexto, será apresentado um passo a passo detalhado para a construção do material dourado utilizando papelão.

Materiais necessários:

- Papelão;
- Folha sulfite;
- Estilete ou tesoura;
- Régua;
- Cola.

Passo a passo:

a) Utilizando uma folha sulfite, desenhe um quadrado com lados medindo 10 centímetros. Em seguida, recorte cuidadosamente o quadrado com o auxílio de uma tesoura. Esse quadrado recortado servirá como molde para a construção de uma placa equivalente à placa do material dourado;

b) "Com o molde previamente preparado, o próximo passo é transferir a figura para o papelão. Existem duas opções para fazer isso: a primeira é utilizar um lápis para contornar diretamente o molde no papelão. A segunda opção é posicionar o molde sobre o papelão e, com cuidado, recortar ao redor da figura utilizando um estilete;

c) Com a placa do material dourado já confeccionada, é possível utilizá-la como molde para recortar mais 9 placas adicionais. Dessa forma, obteremos um conjunto de 10 placas iguais que, quando empilhadas, formam um cubo equivalente ao cubo maior do material dourado. Utilize o molde da placa previamente cortada para traçar as linhas sobre o papelão e, em seguida, recorte cuidadosamente ao redor delas. Repita esse processo mais 8 vezes para garantir que todas as placas estejam prontas. Ao final, empilhe as placas para formar o cubo maior;

d) Utilizando uma régua como guia, divida uma das placas em 10 partes iguais. Marque os pontos de divisão ao longo da placa de papelão. Em seguida, com o auxílio de um estilete ou tesoura, realize os recortes nos pontos marcados, separando a placa em 10 partes menores. Cada uma dessas partes corresponderá a uma barra equivalente às barras do material dourado;

e) Utilizando uma das barras previamente construídas como molde, é possível produzir, no mínimo, mais 10 barras adicionais. Posicione o molde sobre o papelão e trace o contorno com cuidado. Em seguida, com o auxílio de uma régua, divida uma das barras em 10 partes iguais, marcando os pontos de divisão ao longo dela. Utilizando uma tesoura, faça os recortes nos pontos marcados, separando a barra em 10 partes menores. Essas partes recortadas serão equivalentes aos cubinhos do material dourado.

Diferentes abordagens podem ser adotadas na construção do material dourado, indo além da opção tradicional com papelão. O uso de materiais alternativos, como EVA, espuma, papel cartão, cartolina e até mesmo massa de modelar, oferece possibilidades para a criação das placas, barras e cubos. Além disso, é viável explorar materiais reciclados, como tampas de garrafa e palitos de picolé, para uma versão simplificada do material.

Cada um desses materiais apresenta vantagens próprias em termos de flexibilidade, facilidade de manuseio e adaptação aos diferentes contextos educacionais. É importante garantir que as peças construídas sejam visualmente distintas e estejam conforme com os conceitos e proporções do material dourado tradicional. Dessa forma, os educadores têm a flexibilidade de escolher a abordagem mais adequada para atender às necessidades e recursos disponíveis em suas práticas pedagógicas.

Durante a construção do material dourado em sala de aula, o professor tem a oportunidade de explorar diversos conceitos matemáticos, incluindo os aspectos geométricos. Por meio da elaboração das peças, como o cubo maior, as placas e as barras, os alunos podem participar de atividades relacionadas ao cálculo de áreas, perímetros e volumes. Esse processo de construção ativa o interesse dos alunos, tornando o aprendizado mais significativo, ao mesmo tempo, em que desenvolve habilidades como coordenação motora e raciocínio lógico.

> "A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Ao contrário, ela se torna mecânica ou repetitiva, uma vez que se produziu menos essa incorporação e atribuição de significado, e o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva." (Pelizzari et al, 2002)

Conforme ressaltado por Pelizzari et al. (2002, p. 38), a aprendizagem significativa exige a compreensão de um processo de modificação do conhecimento, em vez de se concentrar apenas em comportamentos externos observáveis. É fundamental reconhecer a importância dos processos mentais nesse desenvolvimento.

2.3 A UTILIZAÇÃO DO MATERIAL DOURADO NO ENSINO BÁSICO

Conforme abordado na seção 2.1, é amplamente reconhecido que o Material Dourado está comumente associado ao ensino infantil. No entanto, é importante destacar que o uso desse material concreto pode ser estendido às demais séries escolares, atendendo às competências e habilidades estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Ao adaptar atividades e estratégias de ensino, é possível explorar os recursos do Material Dourado para promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos em todas as etapas da educação básica. Assim, o Material Dourado torna-se uma ferramenta versátil para o desenvolvimento dos estudantes, alinhando-se às diretrizes educacionais propostas pela BNCC.

No contexto da educação infantil, o emprego do Material Dourado é amplamente reconhecido como uma abordagem eficaz para o ensino de conceitos matemáticos fundamentais às crianças. Esse recurso proporciona uma experiência visual, contribuindo para um aprendizado mais significativo. Ao utilizar o Material Dourado, as crianças têm a oportunidade de desenvolver habilidades matemáticas essenciais intuitivamente, permitindo que elas se engajem de maneira natural com os conceitos numéricos, a contagem, as operações básicas e outras noções fundamentais. Dessa forma, o uso do Material Dourado na educação infantil proporciona um ambiente lúdico, favorecendo o desenvolvimento cognitivo e o interesse das crianças pela matemática.

É amplamente reconhecido que uma compreensão sólida dos conceitos fundamentais da matemática, como contagem, adição, subtração, multiplicação e divisão, proporciona uma base sólida para o aprendizado de outros conceitos matemáticos durante a educação fundamental. O ensino da matemática é um processo construtivo, no qual os professores devem aprofundar as habilidades progressivamente, retomando os conhecimentos prévios dos alunos a cada ano letivo. Nesse sentido, é crucial manter a utilização do material dourado como recurso no ensino-aprendizagem de outros conceitos matemáticos, pois pode desempenhar um papel facilitador na compreensão dos alunos. O material dourado permite uma representação concreta dos conceitos matemáticos, tornando-os mais tangíveis aos alunos, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa. Portanto, a continuidade do uso desse material demonstra-se necessário para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem da matemática, fornecendo um apoio pedagógico consistente para o desenvolvimento dos estudantes.

Durante a educação fundamental, o material dourado revela-se uma ferramenta valiosa para o ensino de uma variedade de conceitos matemáticos, tais como contagem, valor posicional, frações, decimais, geometria, entre outros. Sua utilização permite que os alunos tenham uma compreensão visual desses conceitos. Já no ensino médio, embora o uso do material dourado possa ser mais limitado, ele desempenha um papel facilitador na compreensão de conceitos abstratos. Por exemplo, no estudo da geometria tridimensional, o material dourado auxilia no cálculo de áreas e volumes, proporcionando uma compreensão mais concreta dessas grandezas. Além disso, o material dourado pode ser usado para explorar relações trigonométricas, equações e outros tópicos, contribuindo para a consolidação dos conhecimentos matemáticos dos estudantes no ensino médio.

2.3.1 Equações algébricas e materiais manipuláveis/concretos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que define os conteúdos, competências e habilidades a serem ensinados nas escolas brasileiras ao longo da educação básica. Ela estabelece as diretrizes para os currículos escolares, garantindo uma educação uniforme e de qualidade em todo o país. A BNCC foi aprovada pelo Conselho Nacional de Educação em dezembro de 2017 e serve como referência para a elaboração dos currículos escolares, visando assegurar que os estudantes desenvolvam as aprendizagens essenciais para sua formação acadêmica. Neste trabalho, abordaremos a segunda unidade temática do documento, que se concentra na área da álgebra.

> "A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações". (BNCC, 2018, p. 271)

Dentro desse contexto, na segunda temática, é oportuno abordar a resolução de equações de primeiro grau e a solução de problemas relacionados. Além disso, torna-se pertinente investigar a resolução de expressões algébricas e compreender os procedimentos de fatoração dessas expressões, destacando suas conexões com os produtos notáveis. Esse conjunto de conhecimentos proporcionará a habilidade de resolver e formular problemas representados por equações polinomiais de segundo grau. Portanto, esta é a temática escolhida para este trabalho, onde exploraremos o ensino de equações com o auxílio de materiais didáticos. A combinação desses elementos se revela fundamental para proporcionar uma compreensão sólida desse importante tópico da educação matemática.

Entre as habilidades estabelecidas pela BNCC, destacam-se aquelas relacionadas ao tema de equações algébricas. Dessa forma, é importante que o professor planeje suas aulas de maneira a alinhar-se com essas competências:

Tabela 2.1 – Habilidades indicadas na BNCC

Nivel	Documento	Anos	Habilidade
EF	BNCC	7° ano	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
EF	BNCC	8° ano	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
EF	BNCC	8° ano	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
EF	BNCC	8° ano	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
EF	BNCC	9° ano	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
EM	BNCC	1° ao 3° ano	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Fonte: (BNCC, 2018, p. 307, 313, 317 e 536).

Na tabela abaixo, encontram-se as habilidades relacionadas ao uso de materiais concretos e manipuláveis:

Tabela 2.2 – Habilidades indicadas na BNCC

Nivel	Documento	Anos	Habilidade
EF	BNCC	1° ano	**(EF01MA07)** Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo.
EF	BNCC	1° ano	**(EF01MA08)** Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
EF	BNCC	2° ano	**(EF02MA04)** Compor e decompor números naturais de até três ordens, com suporte de material manipulável, por meio de diferentes adições.
EF	BNCC	2° ano	**(EF02MA07)** Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
EF	BNCC	2° ano	**(EF02MA08)** Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
EF	BNCC	4° ano	**(EF04MA08)** Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Fonte: (BNCC, 2018, p. 279, 283 e 291).

Dado que este trabalho está focado no ensino de equações com o auxílio de materiais didáticos, concretos e manipuláveis, é relevante destacar que, embora esses recursos sejam originalmente propostos para o ensino fundamental I, suas aplicações podem ser adaptadas para outros níveis da educação básica. Isso ocorre porque as habilidades da BNCC que fazem uso desses materiais, mesmo que inicialmente direcionadas aos primeiros anos, podem ser expandidas e aprofundadas à medida que os estudantes progridem em sua educação. Portanto, a abordagem com materiais didáticos concretos e manipuláveis não só é benéfica para o ensino fundamental I, mas também pode enriquecer o aprendizado em níveis posteriores da educação básica, promovendo uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos relacionados às equações algébricas.

3 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS UTILIZANDO O MATERIAL DOURADO

3.1 HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

A história das equações de primeiro, segundo e terceiro grau remonta há séculos passados, abrangendo uma rica trajetória de contribuições por parte de matemáticos e civilizações em diversas partes do mundo.

As equações de primeiro grau, também conhecidas como equações lineares, têm suas raízes nas antigas civilizações da Babilônia e Egito, onde conhecimentos matemáticos já eram aplicados para resolver problemas envolvendo esse tipo de equação. Por outro lado, o método da falsa posição possui uma origem mais obscura e incerta.

> "É muito difícil traçar a origem exata do método da falsa posição. Tanto os autores quanto as datas de importantes documentos da História Antiga da Matemática são de atribuições bastante imprecisas. Certo é que tanto no antigo Egito quanto na China, o referido método era há muito conhecido, ainda que com denominações diversas e com distintas convicções quanto à sua validade e generalidade." (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004)

De acordo com Medeiros e Medeiros (2004), em um estudo sobre a história do método da falsa posição, destaca-se o papiro Rhind como um dos documentos mais antigos que mencionam esse método. O papiro foi compilado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. No entanto, é importante ressaltar que esse texto é um registro de conhecimentos que remontam a períodos ainda mais antigos e não pode ser atribuído exclusivamente a Ahmes. Portanto, a determinação precisa dos verdadeiros autores das ideias ali expostas e a época em que surgiram torna-se uma tarefa difícil de ser realizada.

O método da falsa posição, na forma utilizada pelos antigos egípcios, não constitui exatamente uma Álgebra, não apenas devido à falta de símbolos, mas também porque os egípcios não tinham plena consciência da justificativa e generalidade desse método.

> "Caso tivesse havido essa consciência acerca da justificativa e da generalidade de seu método, poderiam ter sido os egípcios, efetivamente, os primeiros usuários de uma Álgebra retórica. Entretanto, a ausência dessa consciência no cálculo de “aha” para problemas tidos hoje como relativos às equações lineares, coloca os antigos egípcios apenas como legítimos precursores da Álgebra retórica." (MEDEIROS; MEDEIROS, 2004)

Além disso, seguindo a abordagem de Medeiros e Medeiros (2004), é relevante destacar que a versão egípcia do método da falsa posição, embora implicitamente presente no cálculo da incógnita “aha”, demonstra-se válida para a resolução de equações lineares. No entanto, parece que os escribas egípcios não tinham plena consciência dessa propriedade, o que fica evidenciado pelo fato de que seu uso não era consistente. Eles não possuíam o conhecimento de que o método poderia ser aplicado de maneira abrangente, talvez acreditando que outros métodos descritos no papiro Rhind também tivessem uma validade geral.

O estudo mais formal dessas equações foi desenvolvido pelos matemáticos árabes, com destaque para Al-Khwarizmi no século IX. Em sua obra “Al-Jabr wa’l Muqabalah”, Al-Khwarizmi estabeleceu as bases para o desenvolvimento da álgebra. Ele nomeou seu livro como “Hisob al-jabr wa’l muqabalah”, termo que mais tarde originou o nome ’álgebra’. Conforme afirmado por Boyer (1974):

> "Através de sua aritmética, o nome de al-Khwarizmi tornou-se uma palavra vernácula; através do título do seu livro mais importante, Hisob al-jabr wa’l muqabalah, ele nos deu uma palavra ainda mais familiar. Desse título veio o termo álgebra, pois foi por esse livro que mais tarde a Europa aprendeu o ramo da matemática que tem esse nome." (Boyer, 1974, p.156).

As equações de segundo grau, também conhecidas como equações quadráticas, passaram por um desenvolvimento ao longo de séculos, percorrendo diversas civilizações, como Egito, Mesopotâmia, Grécia, Índia, Arábia, China e Europa Ocidental, onde, conforme destacado por Pedroso (2010).

> "Acredita-se que a dificuldade no tratamento com os números, racionais e irracionais, e a falta de praticidade do sistema de numeração grego, que era literal, além do gosto natural pela geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre os quais, a solução de equações do 2° grau. Em "Os Elementos" de Euclides particularmente encontra-se algumas proposições desse tipo de equação." (PEDROSO, 2010).

Acredita-se que as equações de segundo grau tiveram avanços significativos na Grécia Antiga, especialmente com a contribuição de matemáticos como Euclides. No entanto, foi o matemático persa Al-Khwarizmi quem trouxe importantes contribuições para a resolução dessas equações em seu livro “Al-Jabr wa’l Muqabalah”. Essa obra teve uma grande repercussão, influenciando matemáticos posteriores. Um exemplo notável é François Viète, que, de acordo com Brandemberg (2017), em 1591, fez uma importante contribuição ao introduzir uma forma sistemática de notação algébrica em seus estudos de Geometria. Viète estabeleceu um sistema de símbolos e operações que simplificou a representação matemática.

Após François Viète, outros matemáticos, incluindo René Descartes, desempenharam um papel fundamental na construção da parte simbólica da álgebra. Suas contribuições foram essenciais para o desenvolvimento de técnicas e convenções que possibilitaram a representação algébrica por meio de símbolos e fórmulas. Conforme Brandemberg (2017) destaca, em 1637, o renomado filósofo e matemático francês René Descartes, em sua obra intitulada “La Géometrie”, introduziu uma convenção notacional inovadora. Ele escolheu usar as letras iniciais do alfabeto, como “a”, “b” e “c”, para representar as quantidades conhecidas em um problema matemático, enquanto reservou as letras finais, como “x”, “y” e “z”, para representar as incógnitas a serem descobertas. Essa abordagem notacional simplificada contribuiu para a resolução sistemática de equações e problemas geométricos, deixando um impacto duradouro no desenvolvimento da álgebra.

As equações de terceiro grau, também conhecidas como equações cúbicas, despertaram o interesse de matemáticos medievais, incluindo Leonardo de Pisa (Fibonacci) e Tartaglia. No entanto, foi Gerolamo Cardano, um matemático italiano, que fez contribuições significativas nessa área. Em seu livro “Ars Magna”, publicado em 1545, Cardano apresentou soluções gerais para equações cúbicas e até mesmo para equações de quarto grau, conhecidas como equações quárticas. Essa obra foi fundamental para aprofundar os estudos sobre equações cúbicas e quárticas por outros matemáticos, como Lodovico Ferrari e Rafael Bombelli.

Ao longo dos séculos subsequentes, uma série de renomados matemáticos, incluindo Descartes, Fermat, Viète, Galois e outros, desempenharam papéis essenciais no desenvolvimento da teoria das equações algébricas. Suas contribuições foram fundamentais para estabelecer os fundamentos e permitir um estudo mais amplo e aprofundado das equações de diversos graus.

Em síntese, as equações de primeiro, segundo e terceiro grau possuem uma história vasta e complexa, com notáveis contribuições de matemáticos de diversas civilizações e épocas. Esses estudos fundamentais serviram como base para o avanço da álgebra e da teoria das equações, desempenhando um papel crucial no desenvolvimento da matemática como a conhecemos hoje.

Atualmente, o ensino de equações na educação básica muitas vezes se limita à memorização de fórmulas e à prática repetitiva de exercícios, sem proporcionar uma compreensão verdadeira do conteúdo. Isso torna algo que já é complexo por sua natureza abstrata ainda mais desafiador para os estudantes, pois eles possuem dificuldade em visualizar o significado e a aplicação desses conceitos em seu cotidiano.

Nesse contexto, a utilização do material dourado como recurso pedagógico no ensino de equações na educação básica revela-se uma estratégia altamente eficaz para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, proporcionando-lhes uma aprendizagem mais relevante. Através desse enfoque, os estudantes são incentivados a explorar e compreender os conceitos matemáticos de maneira concreta, estabelecendo conexões entre os elementos tangíveis do material e as equações abstratas. Dessa forma, a utilização do material dourado amplia a compreensão dos alunos, permitindo que visualizem e experimentem os princípios matemáticos de forma mais concreta.

3.2 O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

Como mencionado na seção anterior, no contexto dos antigos documentos matemáticos que chegaram até os dias atuais, destaca-se o Papiro de Ahmes, também conhecido como Papiro de Rhind. Este papiro consiste em um extenso rolo de papiro egípcio datado de aproximadamente 1650 a.C., que registra 85 soluções de problemas relacionados à Aritmética e Geometria. A descoberta desse papiro é creditada ao egiptólogo britânico Rhind, que a realizou no final do século XIX. Atualmente, o Papiro de Ahmes encontra-se em exposição no Museu Britânico, em Londres.

Figura 3.1 – Papiro de Ahmes. Fonte: Wikipédia. [1]

O Papiro de Ahmes é notável por registrar o nome do que pode ser considerado o matemático mais antigo da história, Ahmes. Tanto o Papiro de Ahmes quanto outros documentos semelhantes da época apresentam problemas que, sutilmente e não convencional, envolvem equações de primeiro grau. É relevante destacar que a notação matemática utilizada nessa época era substancialmente distinta daquela com a qual estamos familiarizados atualmente. Predominantemente, os números eram representados por palavras, empregando uma forma de expressão que hoje chamamos de “álgebra retórica.”

Para ilustrar essa abordagem, um dos problemas apresentados no Papiro de Ahmes (problema 24) afirmava: “Uma quantidade cuja sétima parte lhe é adicionada resulta em 19.” Transposto para a notação matemática moderna, esse problema seria expresso como $x + \frac{x}{7} = 19$, constituindo uma equação de primeiro grau. É evidente que os egípcios não usavam a simbologia algébrica moderna, uma inovação que surgiu apenas nos últimos séculos. Além disso, eles não dominavam os métodos contemporâneos para resolver equações de primeiro grau. No entanto, empregavam um engenhoso método denominado “Método da Falsa Posição”, como também mencionado na seção anterior.

> "A técnica conhecida como "método da falsa posição"ou "falsa regulação (regula falsi)" envolve começar com um valor inicial incorreto para a incógnita e, a partir desse ponto,

[1] <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Maria_Montessori_(portrait).jpg>. Acesso em: 06 jun. 2023.

> trabalhar em direção ao valor correto. Inicialmente, as operações especificadas no lado esquerdo são realizadas usando o valor incorreto. Em seguida, o resultado obtido é comparado com o valor que deveria ter sido alcançado. Utilizando proporções, chega-se finalmente à resposta correta." (DALCIN; OLAVE, 2007, tradução nossa).

Para demonstrar o método da falsa posição, seguiremos o raciocínio de Roque e Carvalho (2012) em seu estudo.

Começamos com a equação $ax = b$, onde a e b são números reais, e nosso objetivo é encontrar o valor de x que a satisfaz.

O primeiro passo é escolher um valor arbitrário, x_0. Essa escolha é feita para facilitar os cálculos. Por exemplo, se a for uma fração com um denominador complexo, como no exemplo em que a tem denominador 53, é conveniente escolher $x_0 = 53$. Isso é feito para eliminar os denominadores e simplificar os cálculos.

Após escolher x_0, calculamos b_0, o qual é o resultado de ax_0. Ou seja, multiplicamos a por x_0.

$$b_0 = ax_0$$

A igualdade importante a ser considerada nesse método é $ax_0 = b_0$. Isso significa que o produto de a e x_0 é igual a b_0.

Para obter o valor desejado b no lado direito da equação, é necessário multiplicar ambos os lados da equação $ax_0 = b_0$ por um fator conveniente. Esse fator é $\frac{b}{b_0}$.

$$ax_0 \cdot \frac{b}{b_0} = b_0 \cdot \frac{b}{b_0}$$

No lado direito, b_0 é cancelado quando multiplicado por $\frac{b}{b_0}$, deixando apenas b. Isso simplifica a equação.

$$a \cdot x_0 \cdot \frac{b}{b_0} = b_0 \cdot \frac{b}{b_0} = b$$

$$a \cdot x_0 \cdot \frac{b}{b_0} = b$$

$$a \cdot x_0 \cdot \frac{b}{b_0} = a \cdot x$$

$$x = x_0 \cdot \frac{b}{b_0}$$

Isso significa que $x_0 \cdot \dfrac{b}{b_0}$ é uma solução para a equação $ax = b$.

$\square$

Neste contexto, apresentaremos alguns exemplos que ilustram a aplicação do método da falsa posição.

Exemplo 1: Resolva a equação: $\frac{2}{3}x = 10$.

Solução: Considerando a equação $\frac{2}{3}x = 10$. Para simplificar os cálculos, podemos escolher um valor arbitrário, por exemplo, $x_0 = 3$, o qual é um denominador comum. Em seguida, calculemos $b_0 = \frac{2}{3} \cdot x_0 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$.

O que nos fornece a solução $x = 3 \cdot \dfrac{10}{2} = 15$. Portanto, a solução da equação $\frac{2}{3}x = 10$ é $x = 15$.

Exemplo 2: Resolva a equação: $-\frac{3}{4}x = 9$.

Solução: Considerando a equação $-\frac{3}{4}x = 9$. Para simplificar os cálculos, escolhemos arbitrariamente um valor, por exemplo, $x_0 = 4$, o qual é um denominador comum. Agora, calculemos $b_0 = -\frac{3}{4} \cdot x_0 = -\frac{3}{4} \cdot 4 = -3$.

O que nos fornece a solução $x = 4 \cdot \dfrac{-27}{3} = -12$. Portanto, a solução da equação $-\frac{3}{4}x = 9$ é $x = -12$.

3.3 EQUAÇÃO DE PRIMEIRO GRAU: $ax + b = 0$

A resolução de equações lineares é uma questão central na matemática, e para abordar essas equações de maneira inovadora, propõe-se a utilização do material dourado como recurso pedagógico, combinado com o método da falsa posição. Como visto anteriormente, o método da falsa posição é uma técnica matemática que visa obter solução para equações lineares a partir de uma solução aproximada.

Ao resolver equações lineares utilizando o material dourado, optamos por utilizar apenas os cubinhos desse recurso pedagógico. A escolha de empregar apenas esse elemento específico do material dourado foi inspirada na abordagem proposta por Medeiros e Medeiros (2004) em seu texto “O Método da Falsa Posição na História e na Educação Matemática”. A utilização dos cubinhos proporciona uma representação visual das quantidades envolvidas nas equações lineares, contribuindo para uma compreensão mais tangível dos conceitos matemáticos abordados.

Para demonstrar a eficácia e aplicabilidade da abordagem proposta, apresentaremos exemplos práticos de equações lineares. Esses exemplos serão resolvidos passo a passo, utilizando exclusivamente os cubinhos do material dourado. Essa abordagem permitirá uma visualização concreta do processo de resolução das equações lineares.

Exemplo 1: Resolva a equação: $x + \frac{x}{7} = 16$.

Solução: Utilizando os cubinhos do material dourado para expor a solução de tal problema por falsa posição, tome, de início, uma disposição de 16 cubinhos alinhados, para representarmos o valor da soma total.

Figura 3.2 – Representação do valor da soma total. Fonte: Autora

Em seguida, tomamos uma sequência de sete cubinhos alinhados, para representar a quantidade desconhecida e acrescentamos à tal sequência $\frac{1}{7}$ desta mesma sequência para representar a soma $x + \frac{x}{7}$.

Figura 3.3 – Representação da quantidade desconhecida. Fonte: Autora

Colocamos, agora, lado a lado, comparando as duas sequências de barrinhas: a solução tentativa obtida por falsa posição (barra menor) e a solução correta (barra maior). Um simples exame visual deixa transparecer o desacerto da quantidade escolhida.

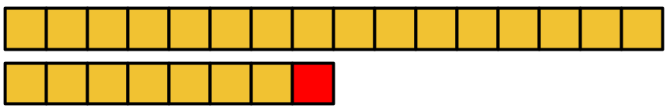


Figura 3.4 – Solução por falsa posição e solução correta. Fonte: Autora

A comparação das barras mostra, também, que a soma obtida por falsa posição (barra pequena) é 2 vezes menor do que o valor correto desta soma (barra maior).

Figura 3.5 – Comparação das somas. Fonte: Autora

Deste modo, a falsa posição escolhida (sequência inicial de sete cubinhos) deve ser igualmente duas vezes maior para obtermos a solução desejada. Tal solução desejada (14) é representada na figura abaixo, em termos do mesmo material concreto até então utilizado.

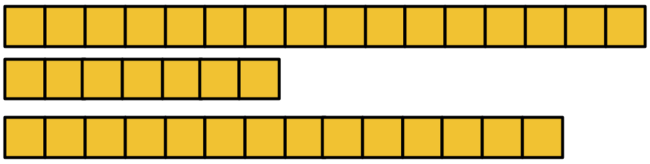


Figura 3.6 – Representação da solução final. Fonte: Autora

A solução desejada representa o valor de x, que é a solução de uma equação linear.

O próximo exemplo é uma equação selecionada do Papiro Rhind, um antigo documento matemático de relevância histórica. Demonstra-se que essa equação pode ser resolvida eficazmente utilizando o método da falsa posição, o qual também foi empregado nos exemplos anteriores.

Exemplo 2: Resolva a equação: $x + \frac{x}{4} = 15$.

Solução: Utilizando os cubinhos do material dourado para expor a solução de tal problema por falsa posição, tome, de início, uma disposição de 15 cubinhos alinhados, para representarmos o valor da soma total.

Figura 3.7 – Representação do valor da soma total. Fonte: Autora

Em seguida, tomamos uma sequência de quatro cubinhos alinhados, para representar a quantidade desconhecida e acrescentamos à tal sequência $\frac{1}{4}$ desta mesma sequência para representar a soma $x + \frac{x}{4}$.

Figura 3.8 – Representação da quantidade desconhecida. Fonte: Autora

Colocamos, agora, lado a lado, comparando as duas sequências de barrinhas: a solução tentativa obtida por falsa posição (barra menor) e a solução correta (barra maior). Um simples exame visual deixa transparecer o desacerto da quantidade escolhida.

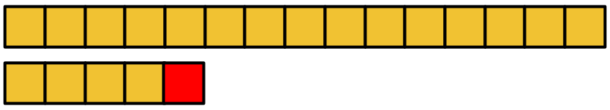


Figura 3.9 – Solução por falsa posição e solução correta. Fonte: Autora

A comparação das barras mostra, também, que a soma obtida por falsa posição (barra pequena) é 3 vezes menor do que o valor correto desta soma (barra maior).

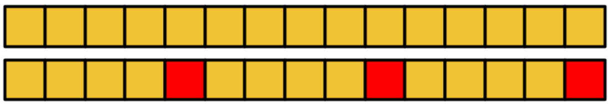


Figura 3.10 – Comparação das somas. Fonte: Autora

Deste modo, a falsa posição escolhida (sequência inicial de dois cubinhos) deve ser igualmente três vezes maior para obtermos a solução desejada. Tal solução desejada (12) é representada na figura abaixo, em termos do mesmo material concreto até então utilizado.

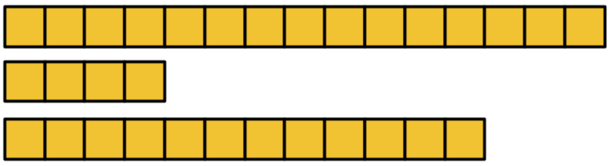


Figura 3.11 – Representação da solução final. Fonte: Autora

A solução desejada representa o valor de x, que é a solução de uma equação linear.

Vale ressaltar que os exemplos apresentados não representam uma demonstração abrangente da generalidade do método em questão. Além disso, a visualização proporcionada pelos cubinhos, conforme demonstrado nos exemplos acima, é possível devido à razão entre a falsa posição e a resposta correta ser um número inteiro. No entanto, é fundamental destacar que, em casos mais complexos, esse método não é aplicável de forma direta ou adequada.

3.4 FORMA FATORADA DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL

Os números reais mostraram-se limitados na abordagem de equações algébricas, levando Raphael Bombelli, um engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1526, a superar esse obstáculo e explorar novos domínios numéricos. Bombelli, um entusiasta da "Ars Magna" de Cardano, publicada em 1545, identificou a necessidade de uma exposição mais clara. Com essa motivação, ele decidiu redigir seu próprio livro, intitulado "L' Algebra parte maggiore dell'Arithmetica", publicado em 1572. Nessa obra, Bombelli investigou a resolução de equações de até quarto grau, dedicando-se também à análise da equação $x^3 = 15x + 4$.

Nas suas explorações matemáticas, conforme descrito em "L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica, Bombelli" ousou conjecturar que os números da forma

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

poderiam ser representados como $a+\sqrt{b}$ e $a-\sqrt{b}$, respectivamente. Por meio de um meticuloso raciocínio, ele chegou à conclusão de que $a = 2$ e $b = -1$, após algumas manipulações algébricas. Esse insight representou um marco significativo ao sugerir que os números complexos poderiam efetivamente se revelar instrumentos úteis na resolução de problemas matemáticos.

Utilizando os princípios do cálculo, Leonhard Paul Euler realizou descobertas de significância crucial. Posteriormente, ele estabeleceu a relação fundamental entre a função exponencial e os números imaginários, expressa como $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$, considerando x em radianos. Notavelmente, para $x = \pi$, essa equação se simplifica para $e^{i\pi} = -1$, estabelecendo uma conexão íntima entre os números transcendentes e, mais especificamente, os números irracionais e e π, o número imaginário i e o valor -1.

Euler emerge como uma figura determinante na compreensão dos números complexos. Sua influência se estende por várias contribuições, sendo sua dedicação ao avanço da simbologia um aspecto particularmente notável. Muitas das notações empregadas atualmente foram pioneiramente introduzidas por Euler. Entre suas representações inovadoras, destaca-se a adoção do símbolo "i" para representar a unidade imaginária, substituindo a raiz quadrada de -1.

No decorrer do século XVIII, surgiu a compreensão de que os números complexos estavam intrinsecamente relacionados com as funções trigonométricas e exponenciais. Contudo, desafios ainda persistiam. Para Euler, a determinação da raiz quadrada de -2, denotada por $\sqrt{-2}$, ainda constituía um enigma a ser desvendado.

Albert Girard (1595-1632) foi um renomado matemático francês que obteve seu diploma na prestigiosa Universidade de Leiden. Os estudos de Girard deixaram uma marca profunda nos campos da álgebra, trigonometria e aritmética. Notavelmente, suas pesquisas em álgebra desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento do amplamente reconhecido Teorema Fundamental da Álgebra.

As relações de Girard desempenham um papel fundamental no avanço da resolução de equações polinomiais, uma vez que permitem a manipulação das raízes e coeficientes dessas equações. Utilizando as relações de Girard, é viável estabelecer um sistema de equações que contém informações essenciais para a resolução da equação original, proporcionando uma abordagem eficaz para a solução desses problemas matemáticos.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) destacou-se como uma das figuras mais notáveis nos séculos XVIII e XIX. Sua extraordinária capacidade matemática se manifestou de maneira impressionante em sua tese de doutorado na Universidade de Helmstedt, redigida quando tinha apenas vinte anos. Nesse trabalho pioneiro, Gauss apresentou a primeira demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

A importância do Teorema Fundamental da Álgebra é amplamente reconhecida e sua utilização perdura há muito tempo. Contudo, a plena compreensão deste teorema aguardou a conclusão da tese de doutorado de um jovem matemático alemão brilhante. Foi Gauss quem finalmente proporcionou a primeira demonstração completamente rigorosa desse fato, marcando um momento crucial na história da matemática.

O Teorema Fundamental da Álgebra é enunciado da seguinte forma:

"Todo polinômio complexo de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa."

Quanto a este trabalho, será realizada uma demonstração do mesmo, tendo como base o trabalho de Salvado (2016). Para iniciar, serão apresentadas algumas propriedades dos números complexos.

C1: O conjugado do conjugado de um número complexo é ele mesmo.

O conjugado de um número complexo $z = a + \mathrm{i}b$, a *e* $b \in \mathbb{R}$, *é definido como o número complexo* $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$. *Assim, temos*

$$\overline{\overline{z}} = \overline{a - \mathrm{i}b} = a + \mathrm{i}b = z.$$

C2: O conjugado da soma é a soma dos conjugados.

Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Considere $A = a + \mathrm{i}b$ e $B = c + \mathrm{i}d$. Então,

$$\begin{aligned}
\overline{A+B} &= \overline{(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)} = \overline{a+c+\mathrm{i}b+\mathrm{i}d} = \overline{(a+c)+\mathrm{i}(b+d)} \\
&= (a+c)-\mathrm{i}(b+d) = a+c-\mathrm{i}b-\mathrm{i}d = a-\mathrm{i}b+c-\mathrm{i}d \\
&= \overline{A}+\overline{B}.
\end{aligned}$$

C3: O conjugado do produto é o produto dos conjugados.

Sejam a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Considere $A = a + \mathrm{i}b$ e $B = c + \mathrm{i}d$. Então,

$$\begin{aligned}
\overline{A.B} &= \overline{(a+\mathrm{i}b).(c+\mathrm{i}d)} = \overline{ac+\mathrm{i}ad+\mathrm{i}cb+\mathrm{i}^2bd} = \overline{ac+\mathrm{i}ad+\mathrm{i}cb-bd} \\
&= \overline{ac-bc+\mathrm{i}(ad+cb)} = ac-bc-\mathrm{i}(ad+cb).
\end{aligned}$$

Agora faremos o produto entre os conjugados de A e B para comparar os dois resultados no final:

$$\begin{aligned}
\overline{A}.\overline{B} &= \overline{(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)} = (a-\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d) = ac-\mathrm{i}ad-\mathrm{i}cb+\mathrm{i}^2bd \\
&= ac-\mathrm{i}ad-\mathrm{i}cb-bd = ac-bd-(ad+cb)\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Repare que o desenvolvimento dos dois lados da igualdade tem o mesmo resultado, portanto, a igualdade é válida.

C4: Se um número é igual ao seu conjugado, então esse número é real.

Sejam a e b reais e $z = a + \mathrm{i}b$. Se $z = \overline{z}$, então

$$a+\mathrm{i}b = a-\mathrm{i}b \Rightarrow \mathrm{i}b = -\mathrm{i}b \Rightarrow b = -b \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Logo, $z = a \in \mathbb{R}$.

C5: A soma de números reais é real

Sejam a e $c \in \mathbb{R}$. Considere $A = a + \mathrm{i}0$ e $B = c + \mathrm{i}0$, números reais. Então,

$$A + B = a + \mathrm{i}0 + c + \mathrm{i}0 = a + c + \mathrm{i}(0 + 0) = a + c \in \mathbb{R}.$$

C6: Se $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer, então existem dois números complexos z_1 e z_2 tais que:

$$P(z) = z^2 + az + b = (z - z_1)(z - z_2), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

A demonstração pode ser encontrada no Lema 4.2 do trabalho de Brandão (2022).

Além das propriedades acima, sejam as seguintes definições:

D1: Um polinômio com coeficientes reais na variável x é uma função matemática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_n \neq 0$ são números reais, denominados coeficientes do polinômio.

O termo de mais alto grau que possui um coeficiente não nulo é chamado termo dominante e o coeficiente deste termo é o coeficiente do termo dominante (ou **coeficiente líder**). Nesse exemplo apresentado, o coeficiente líder é o a_n.

D2: Seja $(\mathbb{A}, +, .)$ um estrutura algébrica com duas operações, + definida como adição e . definida como multiplicação. Esta estrutura será chamada de **corpo** se são válidas as seguintes propriedades:

Adição:

A1: Associativa

$$(x + y) + z = x + (y + z) \;\; \forall\, x, y \text{ e } z \in \mathbb{A}$$

A2: Admite elemento neutro, que definiremos como 0.

$$x + 0 = 0 + x = x \;\; \forall\, x \in \mathbb{A}$$

A3: Todo elemento do conjunto $\mathbb{A}$ possui um simétrico, ou seja, se $x \in \mathbb{A}$, existe $y \in \mathbb{A}$ tal que $x + y = 0$. Denominamos o simétrico de x por $-x$.

$$x + (-x) = (-x) + x = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{A}$$

A4: Comutativa.

$$x + y = y + x \;\; \forall\, x \text{ e } y \in \mathbb{A}$$

Multiplicação:

M1: Associativa;

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \;\; \forall\, x, y \text{ e } z \in \mathbb{A}$$

M2: Admite elemento neutro, que definiremos como 1.

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \;\; \forall\, x \in \mathbb{A}$$

M3: Todo elemento não nulo de $\mathbb{A}$ é inversível, ou seja, se $x \in \mathbb{A}$, existe $y \in \mathbb{A}$ tal que $x.y = 1$. Denominamos o inverso de x por x^{-1}.

$$x \cdot x^{-1} = 1 \;\; \forall\, x \in \mathbb{A}$$

M4: Comutativa.

$$x \cdot y = y \cdot x \ \ \forall \, x \text{ e } y \in \mathbb{A}$$

M5: Distributiva em relação à adição +.

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ e } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Teorema: O conjunto dos números complexos munido das operações adição e multiplicação é um corpo.

Demonstração: Devemos verificar que a estrutura algébrica dos números complexos satisfaz as quatro propriedades para a adição e as cinco para a multiplicação aqui definidas. Utilizaremos os complexos $z = (a, b) = a + \mathrm{i}b$, $w = (c, d) = c + \mathrm{i}d$ e $k = (e, f) = e + \mathrm{i}f$, para fazer tal verificação.

Para a adição temos as seguintes propriedades:

A1: A adição é associativa.

$$(z + w) + k = z + (w + k).$$

De fato,

$$\begin{aligned} (z + w) + k &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= z + (w + k). \end{aligned}$$

A2: A adição admite elemento neutro.

Para qualquer complexo $z = (a, b)$, basta tomar $0 = (0, 0)$ e teremos $z + 0 = z$.

A3: Existência do simétrico.

Para todo $z = (a, b)$ existe o número $-z = (-a, -b)$ tal que $z + (-z) = (0, 0)$.

A4: A adição é comutativa $z + w = w + z$.

$$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = w + z.$$

Para a multiplicação temos as seguintes propriedades:

M1: multiplicação é associativa, isto é, $(z.w).k = z.(w.k)$.

Realmente,

$$\begin{aligned}(z.w).k &= (ac - bd, ad + bc).(e, f)\\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd).f + (ad + bc)e)\\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)\\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))\\ &= (a, b)(ce - df, cf + de)\\ &= z.(w.k).\end{aligned}$$

M2: Admite elemento neutro, dado por $(1, 0) = 1$.

Realmente,

$$z.(1, 0) = (a, b)(1, 0) = (a.1 - b.0, a.0 + b.1) = (a, b) = z.$$

M3: Todo número complexo não nulo é inversível, ou seja, se $z \in \mathbb{C}^*$, existe $w \in \mathbb{C}$, tal que $z.w = 1$, isto é $z.w = (1, 0)$,

$$(a, b).(c, d) = (1, 0) \Longrightarrow (ac - bd, ad + bc) = (1, 0).$$

Temos então que $ac - bd = 1$ e $ad + bc = 0$, resolvendo este sistema encontraremos $c = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ e $d = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$. O inverso multiplicativo de $z \neq 0$ será denotado por $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, -\dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$.

M4: Comutativa, isto é $z.w = w.z$.

Realmente,

$$z.w = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + ad) = w.z.$$

M5: Distributiva em relação à adição, isto é $z.(w + k) = z.w + z.k$.

Realmente,

$$\begin{aligned}z.(w + k) &= (a, b).(c + e, d + f),\\ &= (a.(c + e) - b.(d + f), a.(d + f) + b.(c + e),\\ &= (ac - bd + ae - bf, ad + bc + af + be)\\ &= z.w + z.k.\end{aligned}$$

Assim os números complexos munidos desta estrutura é um corpo algébrico.

□

D3: Progressão Aritmética (PA) é uma sequência de números em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma. Como vimos anteriormente, ela possui um padrão de construção: admite-se um valor r que será subtraído ou adicionado para encontrar o próximo termo.

Para desenvolver uma dessas progressões, admite-se um primeiro elemento, chamado de a_1, um coeficiente r e iniciam-se os cálculos, da seguinte forma:

$$PA = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (a_1, a_1 + r, a_1 + r + r, a_1 + r + r + r, \dots).$$

Note que o número subscrito em a, a_n, representa a posição do elemento dentro da progressão.

Dessa forma, o coeficiente sempre será somado ao termo consecutivo, de maneira que:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_1 + r + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_1 + r + r + r = a_1 + 3r \\ \vdots &= \vdots \\ a_n &= a_1 + (n - 1)r. \end{aligned}$$

A fórmula acima é conhecida como termo geral da PA.

Agora, seja uma progressão aritmética de n elementos. Para encontrarmos a soma de todos esses valores, temos umafórmula que sintetiza os cálculos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

em que n é a posição do elemento final da sequência, a_1 é o elemento inicial da sequência, a_n é o elemento final da sequência e S_n é a soma de todos os elementos da PA.

Lema: O polinômio $Q(z) = P(z).\overline{P(\overline{z})}$ possui coeficientes reais.

Demonstração: Temos que, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$Q(z) = P(z) \cdot \overline{P(\overline{z})} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{Q(z)} = \overline{P(z) \cdot \overline{P(\overline{z})}} = \overline{P(z)} \cdot P(\overline{z}) = Q(\overline{z}),$$

em que usamos as propriedades **C1** e **C3**, anteriormente apresentadas.
Se $\overline{Q(z)} = Q(\overline{z})$, $\forall z \in \mathbb{C}$, então os coeficientes de Q são reais.
De fato, para todo $z \in \mathbb{C}$, temos

$$\overline{Q(z)} = Q(\overline{z}) \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\overline{Q(z)}} = \overline{Q(\overline{z})} \qquad \Rightarrow \qquad Q(z) = \overline{Q(\overline{z})}. \tag{3.1}$$

Seja $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$. Então, verificando na equação (3.1) e usando a propriedade **C2**, obtemos

$$\begin{aligned} Q(z) &= b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \\ &= \overline{b_n (\overline{z})^n + b_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + b_1 (\overline{z}) + b_0} \\ &= \overline{b_n} (\overline{\overline{z}})^n + \overline{b_{n-1}} (\overline{\overline{z}})^{n-1} + \cdots + \overline{b_1} (\overline{\overline{z}}) + \overline{b_0} \\ &= \overline{b_n} z^n + \overline{b_{n-1}} z^{n-1} + \cdots + \overline{b_1} z + \overline{b_0}. \end{aligned}$$

Comparando termo a termo e utilizando a propriedade **C4**, concluímos que

$$b_n = \overline{b_n}, \dots, b_1 = \overline{b_1}, b_0 = \overline{b_0}, \qquad \text{isto}, \qquad b_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 0, 1, \dots, n.$$

□

Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Inicialmente, tomemos o seguinte polinômio:

$Q(z) = P(z).\overline{P(\overline{z})}$,

em que

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

com $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Considere o lema anteriormente apresentado e além disso, se $z_0 \in \mathbb{C}$ é raiz de $Q(z)$, então z_0 ou $\overline{z_0}$ é raiz de $P(z)$, pois

$$Q(z) = P(z) \cdot \overline{P(\overline{z})} \Rightarrow 0 = Q(z_0) = P(z_0) \cdot \overline{P(\overline{z_0})} \;\Rightarrow \qquad P(z_0) = 0 \;\text{ ou }\; P(\overline{z_0}) = 0.$$

Munidos dessas informações, podemos demonstrar o TFA para um polinômio de coeficientes reais.

a) Vamos demonstrar o TFA usando indução ao maior inteiro não negativo k, tal que 2^k divide o grau n de $P(z)$, lembrando que grau$(P(z)) = n$.

Se $k = 0$, temos $2^k = 2^0 = 1$, então, n é ímpar. Logo, $P(z)$ possui alguma raiz real.

Para demonstrarmos esse resultado, podemos, por simplicidade, trabalhar com a parte real de z, ou seja, podemos analisar o polinômio $P(x)$.

Suponha que $P(x)$ possui grau n ímpar, com o coeficiente líder $a_n > 0$, de acordo com a definição **D1**. Então,

$$P(x) = a_n x^n + \text{termos de ordem inferiores}$$

e n é ímpar.

Dessa forma,

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n \longrightarrow \infty, \qquad \text{com} \quad a_n > 0, \tag{3.2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n \longrightarrow -\infty, \qquad \text{com} \quad a_n > 0 \tag{3.3}$$

e n ímpar.

Da equação (3.2), tomando um $P(x)$ positivo arbitrariamente grande, temos que existe um x_1 com $P(x_1) > 0$. De forma análoga, a partir da equação (3.3), existe um x_2 com $P(x_2) < 0$. Um polinômio real é uma função contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $P(x_1)P(x_2) < 0$, segue, do Teorema do Valor Intermediário, que existe um x_3, entre x_1 e x_2, tal que $P(x_3) = 0$. Portanto, $P(z)$ possui alguma raiz real.

b) Voltando ao processo de indução, considere $k > 0$ e $n = 2^k m$, com m ímpar e n o grau de $P(z)$.

Vamos supor que o Teorema seja válido para todos os polinômios de grau $n = 2^{k-1}m'$, com m' ímpar.

Agora, considere F um corpo, de acordo com a definição **D2**, que contém $\mathbb{C}$ e as raízes de $P(z)$, ou seja, um polinômio com coeficientes complexos. Então existem elementos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de F, as raízes de $P(z)$, que nos permitem escrever

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i). \tag{3.4}$$

Observe que $P(z)$ é simétrico, ou seja, podemos permutar as suas variáveis entre si, que o polinômio não se altera. De fato,

$$\begin{aligned}P(z) = P(z, z_1, z_2, \dots, z_n) &= (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) = (z - z_2)(z - z_1)\dots(z - z_n)\\ &= P(z, z_2, z_1, \dots, z_n) = (z - z_n)(z - z_1)\dots(z - z_{n-1})\\ &= P(z, z_n, z_1, \dots, z_{n-1})\end{aligned}$$

e, dessa forma, podemos realizar todas as outras permutações dos n elementos.

Quando um polinômio é simétrico, ele pode ser escrito em termos de polinômios simétricos elementares, denominados $e_i s$, os quais são determinados por

$$\begin{aligned}
e_0(z_1, \dots, z_n) &= 1,\\
e_1(z_1, \dots, z_n) &= z_1 + \cdots + z_n,\\
e_2(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{i<j} z_i z_j,\\
\vdots \quad &= \quad \vdots\\
e_j(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_j} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_j},\\
\vdots \quad &= \quad \vdots\\
e_n(z_1, \dots, z_n) &= \prod_{i=1}^{n} z_i.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Esses polinômios elementares são os coeficientes da equação geral de grau n nas indeterminadas $z, z_1, \dots, z_n$.

Dessa forma, podemos escrever a equação (3.4) como

$$\begin{aligned}
P(z) &= (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)\\
&= z^n + z^{n-1}(-z_1 - z_2 - \cdots - z_n) + z^{n-2}(z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_{n-1}z_n)\\
&+ z^{n-3}(-z_1z_2z_3 - z_1z_2z_4 - \cdots - z_{n-2}z_{n-1}z_n) + \cdots \pm (z_1z_2\dots z_n)\\
&= z^n - z^{n-1}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + z^{n-2}(z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_{n-1}z_n)\\
&- z^{n-3}(z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + \cdots + z_{n-2}z_{n-1}z_n) + \cdots \pm (z_1z_2\dots z_n)\\
&= e_0(z_1, \dots, z_n)z^n - e_1(z_1, \dots, z_n)z^{n-1} + e_2(z_1, \dots, z_n)z^{n-2} - e_3(z_1, \dots, z_n)z^{n-3} + \dots\\
&\pm e_n(z_1, \dots, z_n).
\end{aligned}$$

Observe que o sinal do coeficiente depende da paridade do mesmo, uma vez que os termos acompanhados de coeficientes pares são positivos e os acompanhados de coeficientes ímpares são negativos. Então, podemos reescrever a equação anterior como

$$P(z) = z^n - e_1(z_1, \dots, z_n)z^{n-1} + e_2(z_1, \dots, z_n)z^{n-2} - \dots (-1)^n e_n(z_1, \dots, z_n). \tag{3.6}$$

Por outro lado, podemos escrever $P(z)$ como

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \tag{3.7}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Comparando os coeficientes das equações (3.6) e (3.7), temos

$$\begin{aligned} a_n &= 1, \\ a_{n-1} &= -e_1(z_1, \dots, z_n), \\ a_{n-2} &= e_2(z_1, \dots, z_n), \\ \vdots &= \quad \vdots \\ a_0 &= (-1)^n e_n(z_1, \dots, z_n). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $P(z)$ é um polinômio simétrico com coeficientes reais $a_i \in \mathbb{R}$, dados por

$$a_{n-j} = (-1)^j e_j(z_1, \dots, z_n),$$

então $e_j(z_1, \dots, z_n)$, $j = 1, 2, \dots, n$ são números reais.

Agora, definimos o seguinte polinômio:

$$Q_t(z) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (z - z_i - z_j - tz_iz_j), \tag{3.9}$$

com $t \in \mathbb{R}$.

De forma análoga ao estudo de $P(z)$, podemos concluir que $Q_t(z)$ também é simétrico nas variáveis z_i e z_j. Além disso, podemos mostrar que seus coeficientes dependem dos polinômios simétricos elementares, apresentados em (3.5), ou seja,

$$\begin{aligned}
Q_t(z) &= (z - z_1 - z_1 - tz_1z_1)(z - z_1 - z_2 - tz_1z_2)\dots(z - z_1 - z_n - tz_1z_n)(z - z_2 - z_2 - tz_2z_2)\cdot \\
&\cdot\ (z - z_2 - z_3 - tz_2z_3)\dots(z - z_2 - z_n - tz_2z_n)\dots(z - z_n - z_n - tz_nz_n) \\
&= z^{n-1}z^{n-2}\dots z + z^{n-1}z^{n-1}\dots z(-z_1 - z_1 - z_2 - z_2 - \cdots - z_n - z_n) + \cdots + (-1)^n t(z_1z_2z_3\dots z_n),
\end{aligned}$$

lembrando que $1 \leq i \leq j \leq n$.

Dessa forma, podemos observar que $Q_t(z)$ possui coeficientes dependentes dos polinômios simétricos elementares apresentados na equação (3.5). Além disso, o grau de $Q_t(z)$ é dado pelo expoente do termo z livre, que corresponde à soma

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

a qual é a soma de uma Progressão Aritmética com $(n-1)$ termos, termo inicial $a_1 = 1$ e termo geral $a_n = n - 1$, em que utilizamos a definição **D3**, previamente apresentada.

Como $n = 2^k m$, com m ímpar, temos que o grau de $Q_t(z)$ é

$$\text{grau}(Q_t(z)) = \frac{2^k m(n-1)}{2} = 2^{k-1}m(n-1),$$

onde $m(n-1)$ é ímpar, de acordo com a hipótese de indução.

Então, $Q_t(z)$ possui alguma raiz real.

Logo, $z_i + z_j + tz_iz_j$ é real e é uma raiz de $Q_t(z)$ associada aos elementos distintos $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como existem uma quantidade finita de pares (i, j), $i < j$, é possível encontrar números reais distintos t e s tais que $z_i + z_j + tz_iz_j$ e $z_i + z_j + sz_iz_j$ sejam reais, associado ao mesmo par (i, j), i e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Dessa forma, o produto entre z_i e z_j pertence aos números reais

$$(z_i + z_j + tz_iz_j) - (z_i + z_j + sz_iz_j) = (t - s)z_iz_j \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad z_iz_j \in \mathbb{R},$$

em que utilizamos a propriedade **C4**, anteriormente apresentada.

Além disso, a soma entre z_i e z_j também pertence aos reais

$$z_i + z_j = z_i + z_j + tz_iz_j - tz_iz_j \in \mathbb{R},$$

em que utilizamos novamente a propriedade **C4**.

Porém, as raízes do polinômio

$$f(z) = z^2 + (z_i + z_j)z + z_i z_j \tag{3.10}$$

são complexas.

De fato, como $z_i + z_j \in \mathbb{R}$ e $z_i z_j \in \mathbb{R}$, fazendo $f(z) = 0$, temos

$$z = \frac{-(z_i + z_j) \pm \sqrt{(z_i + z_j)^2 - 4z_i z_j}}{2} = \frac{-(z_i + z_j) \pm \sqrt{(z_i - z_j)^2}}{2}.$$

Para $(z_i - z_j)^2 \geq 0$, temos que $f(z) = 0$ possui duas raízes reais

$$z_1 = -z_i \qquad \text{e} \qquad z_2 = -z_j.$$

Usando a propriedade **C6**, podemos escrever a equação (3.10) como:

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2).$$

Dessa forma,

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) = [z - (-z_i)][z - (-z_j)] = (z + z_i)(z + z_j) = z^2 + (z_i + z_j)z + z_i.z_j.$$

Então, sabemos que $f(z)$ possui duas raízes z_1 e z_2 se o discriminante $(z_i - z_j)^2 \geq 0$. Assim, para $(z_i - z_j)^2 < 0$, temos

$$z = \frac{-(z_i + z_j) \pm \mathrm{i}(z_i - z_j)}{2}$$

e as raízes de $f(z) = 0$ serão complexas e dadas por

$$z_1 = \frac{-(z_i + z_j) + \mathrm{i}(z_i - z_j)}{2} \qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{-(z_i + z_j) - \mathrm{i}(z_i - z_j)}{2}.$$

Vamos usar, novamente, a propriedade **C6** para escrever a equação (3.10) como:

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2).$$

Então, temos

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (z - z_1)(z - z_2) = \left[z - \frac{-(z_i + z_j) + \mathrm{i}(z_i - z_j)}{2}\right]\left[z - \frac{-(z_i + z_j) - \mathrm{i}(z_i - z_j)}{2}\right] \\
&= \left[\left(z - \frac{-(z_i + z_j)}{2}\right) + \frac{\mathrm{i}(z_i - z_j)}{2}\right]\left[\left(z + \frac{(z_i + z_j)}{2}\right) + \frac{\mathrm{i}(z_i - z_j)}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Como $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ e $(\mathrm{i})^2 = -1$, temos

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \left(z - \frac{-(z_i + z_j)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{i}(z_i - z_j)}{2}\right)^2 \\
&= \left(z^2 + 2\frac{(z_i + z_j)}{2}z + \frac{(z_i + z_j)^2}{4}\right) + \left(\frac{\mathrm{i}^2(z_i - z_j)^2}{4}\right) \\
&= \left(z^2 + (z_i + z_j)z + \frac{(z_i + z_j)^2}{4}\right) + \left(\frac{(-1)(z_i - z_j)^2}{4}\right) \\
&= z^2 + (z_i + z_j)z + \frac{(z_i + z_j)^2}{4} - \frac{(z_i - z_j)^2}{4} \\
&= z^2 + (z_i + z_j)z + \frac{z_i^2 + 2z_iz_j + z_j^2 - z_i^2 + 2z_iz_j - z_j^2}{4} \\
&= z^2 + (z_i + z_j)z + \frac{4z_iz_j}{4} = z^2 + (z_i + z_j)z + 4z_iz_j.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, concluímos que z_i e z_j são números complexos, pois são as raízes desse polinômio.

Portanto, z_i e z_j são as raízes complexas, i e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, do polinômio

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

o que conclui a prova do TFA. $\square$

A partir da demonstração desse teorema, podemos concluir que uma equação polinomial de grau n tem n raízes sendo expressa de forma única na sua forma fatorada.

Considerando que as raízes da equação $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ são $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_n$, então a forma fatorada dessa equação é:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n) = 0.$$

Como estamos apresentando uma abordagem para resolver equações do segundo e terceiro graus que possuam raízes racionais, agora exponhamos a forma fatorada dessas equações com suas raízes racionais.

Suponhamos que as raízes racionais de uma equação do segundo grau sejam $r_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$ e $r_2 = \dfrac{a_2}{b_2}$, com $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ e $b_1, b_2 \neq 0$. Temos então:

$$\begin{aligned}
(x - r_1) \cdot (x - r_2) &= 0 \\
\left(x - \frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(x - \frac{a_2}{b_2}\right) &= 0 \\
\left(\frac{b_1 x - a_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{b_2 x - a_2}{b_2}\right) &= 0 \\
(b_1 x - a_1) \cdot (b_2 x - a_2) &= 0
\end{aligned}$$

Consideremos um retângulo cujos lados são $b_1 x - a_1$ e $b_2 x - a_2$. A área desse retângulo é representada pelo produto desses dois lados, ou seja:

$$A = (b_1 x - a_1) \cdot (b_2 x - a_2)$$

Observem que a expressão que representa a área do retângulo é a mesma que representa a forma fatorada da equação.

Realizando o mesmo procedimento para as equações do terceiro grau, consideremos as raízes racionais de uma equação cúbica como $r_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$, $r_2 = \dfrac{a_2}{b_2}$ e $r_3 = \dfrac{a_3}{b_3}$, onde $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{Z}$ e $b_1, b_2, b_3 \neq 0$. Substituindo essas raízes na forma fatorada, temos:

$$\begin{aligned}
(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) &= 0 \\
\left(x - \frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(x - \frac{a_2}{b_2}\right) \cdot \left(x - \frac{a_3}{b_3}\right) &= 0 \\
\left(\frac{b_1 x - a_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{b_2 x - a_2}{b_2}\right) \cdot \left(\frac{b_3 x - a_3}{b_3}\right) &= 0 \\
(b_1 x - a_1) \cdot (b_2 x - a_2) \cdot (b_3 x - a_3) &= 0
\end{aligned}$$

Consideremos um paralelepípedo cujas dimensões são $b_1 x - a_1$, $b_2 x - a_2$ e $b_3 x - a_3$. O volume desse paralelepípedo é representado pelo produto dessas três dimensões, ou seja:

$$V = (b_1 x - a_1) \cdot (b_2 x - a_2) \cdot (b_3 x - a_3)$$

Notem que a expressão que representa o volume do paralelepípedo é a mesma que representa a forma fatorada da equação.

Portanto, podemos concluir que a determinação das raízes racionais de uma equação do segundo grau pode ser realizada por meio da construção de retângulos. Já no caso das equações do terceiro grau, utiliza-se a construção de paralelepípedos. Essa correspondência entre a forma fatorada das equações e as representações geométricas (área do retângulo para o segundo grau e volume do paralelepípedo para o terceiro grau) evidencia a validade desse método.

3.5 EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU: $ax^2 + bx + c = 0$

A fim de utilizar o material dourado como recurso no ensino de equações de segundo e terceiro grau, é essencial promover adaptações que clarifiquem certos conceitos, como os de valores positivos e negativos. Essas adequações são fundamentais para assegurar que os alunos compreendam plenamente esses conceitos e possam relacioná-los de forma adequada com o material utilizado.

A primeira adaptação a ser realizada diz respeito às cores do material dourado, que geralmente é comercializado em sua forma original de madeira. No entanto, para o ensino de equações, é crucial que os alunos possam distinguir claramente os valores positivos dos negativos. Nesse sentido, uma solução viável é colorir o material com tinta em duas cores distintas. Para o desenvolvimento deste trabalho, serão utilizadas as cores, azul para representar os valores negativos e vermelho para representar os valores positivos. Essa diferenciação cromática facilitará a visualização e compreensão dos conceitos de positivo e negativo, contribuindo para uma aprendizagem mais efetiva das equações e fortalecendo a percepção dos alunos em relação às operações matemáticas envolvidas.

A segunda adaptação envolve a atribuição de significados específicos a cada peça do material dourado, conforme abordado na seção 2.1. Tradicionalmente, as peças desse material possuem as seguintes representações:

Tabela 3.1 – Representação das peças do Material Dourado

Peça	**Representação**
Cubinho	Unidade
Barra	Dezena
Placa	Centena
Cubo	Milhar

Quando o material dourado for utilizado em sala de aula para ensinar aos alunos como resolver equações, é importante considerar que eles devem possuir conhecimentos prévios de geometria. Essa abordagem pode ser desafiadora devido à natureza visualmente abstrata das representações geométricas envolvidas. No entanto, ao trabalhar com o material dourado, os conceitos geométricos relacionados estão principalmente ligados a figuras planas, especialmente às dimensões de área de quadrados e retângulos.

Durante o processo de "completar quadrados", é comum utilizar representações geométricas das equações criadas por meio das peças do material. Nesse caso, adicionam-se ou removem-se peças iguais conforme necessário para equilibrar a equação. Esse enfoque geométrico auxilia os alunos a compreenderem melhor os conceitos subjacentes às equações e a visualizarem as operações realizadas, tornando o aprendizado mais concreto.

Para resolver equações de segundo grau utilizando o Material Dourado, usaremos os cubinhos, barras e placas. Cada peça terá uma representação específica: a placa representará uma área de x^2, a barra será utilizada para representar uma área de x, e o cubinho terá uma área de 1.

Ao utilizar o material, consideraremos as dimensões de largura e comprimento das peças, deixando de lado a altura das mesmas, pois o foco será na representação bidimensional das áreas. A quantidade de peças a ser utilizada para resolver a equação será determinada pelos coeficientes a, b e c presentes na equação de segundo grau.

Tabela 3.2 – Representação das dimensões das peças do Material Dourado que serão utilizados

Peça	**Representação Algébrica**
Cubinho	1
Barra	x
Placa	x^2

De acordo com Costa (2013, p. 63), a resolução de equações de segundo grau envolve uma abordagem dividida em quatro tipos distintos de equações. Essa divisão pretende auxiliar os alunos a se familiarizarem com o método e a desenvolverem confiança na resolução das equações apresentadas pelo professor. Para facilitar esse processo, Costa (2013, p. 63) propõe a seguinte tabela de divisão:

Tabela 3.3 – Tipos de equações do segundo grau

Tipo	**Equações do Segundo Grau:** $ax^2 + bx + c = 0$
Tipo 1	Equações completas com todos os coeficientes positivos.
Tipo 2	Equações completas com coeficientes a e c positivos e b negativo.
Tipo 3	Equações incompletas em c.
Tipo 4	Equações completas com coeficiente c negativo e incompletas em b.

Com o intuito de proporcionar maior clareza, serão apresentadas resoluções de equações do segundo grau para cada um dos tipos mencionados na tabela proposta por Costa (2013, p. 63). É importante ressaltar que o método de completar quadrados, embora tenha sido abordado por Costa em sua dissertação, foi originalmente desenvolvido por Mohammed ibn-Musa Al-Khwarizmi. Portanto, o método utilizado nesta pesquisa é o de Al-Khwarizmi, que combina álgebra com geometria para comprovar geometricamente quando um número é raiz de uma equação do segundo grau, utilizando as adaptações propostas por Costa.

3.5.1 Equações completas com todos os coeficientes positivos.

Na resolução desse tipo específico de equações do segundo grau com todos os coeficientes positivos, é adotado um método visual que envolve a montagem de um retângulo utilizando peças proporcionais aos coeficientes da equação. Essa abordagem permite uma representação concreta do problema, onde a existência de raízes racionais é determinada pela viabilidade de se montar um retângulo com as peças disponíveis. Por outro lado, caso não seja possível formar um retângulo, conclui-se que a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais, não possui raízes racionais. A seguir, serão apresentados exemplos elucidativos dessa técnica.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $2x^2 + 7x + 3 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: duas placas representarão o coeficiente “a”, sete barras representarão o coeficiente “b” e três cubinhos representarão o coeficiente “c”. Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 3.12:

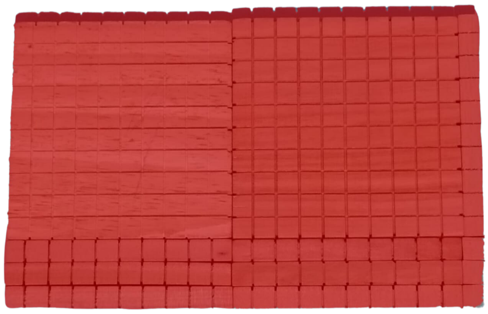


Figura 3.12 – Retângulo obtido atráves da equação $2x^2 + 7x + 3 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (2x+1) e (x+3), determinadas pelos coeficientes da equação.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (2x + 1) \cdot (x + 3).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(2x + 1) \cdot (x + 3) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (2x + 1) \cdot (x + 3)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.13:

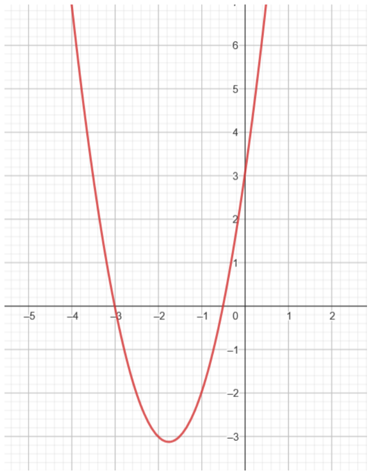


Figura 3.13 – Curva obtida no gráfico da equação $2x^2 + 7x + 3 = 0$. Fonte: Elaborado no GeoGebra

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $3x^2 + 8x + 4 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: três placas representarão o coeficiente "a", oito barras representarão o coeficiente "b" e quatro cubinhos representarão o coeficiente "c". Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 3.14:

Figura 3.14 – Retângulo obtido atráves da equação $3x^2 + 8x + 4 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (3x+2) e (x+2), determinadas pelos coeficientes da equação.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (3x + 2) \cdot (x + 2).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(3x + 2) \cdot (x + 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} 3x + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (3x + 2) \cdot (x + 2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.15:

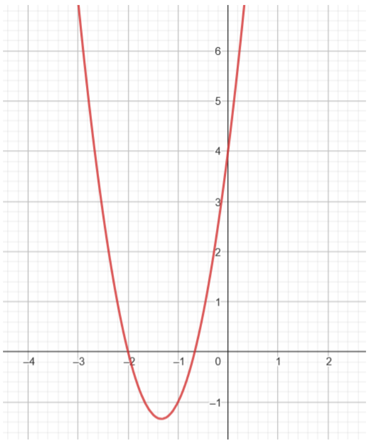


Figura 3.15 – Curva obtida no gráfico da equação $3x^2 + 8x + 4 = 0$. Fonte: Elaborado no GeoGebra

3.5.2 Equações completas com coeficientes a e c positivos e b negativo.

Na resolução desse tipo específico de equações do segundo grau com coeficientes a e c positivos e b negativo, utilizamos um método visual de montagem de retângulos proporcionais aos coeficientes da equação. Essa abordagem determina a existência de raízes racionais com base na possibilidade de formar um retângulo completo. Caso não seja possível montar o retângulo, conclui-se que a equação não possui raízes racionais. Apresentaremos exemplos elucidativos dessa técnica.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: duas placas representarão o coeficiente “a”, cinco barras representarão o coeficiente “b” e dois cubinhos representarão o coeficiente “c”. Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 3.16:

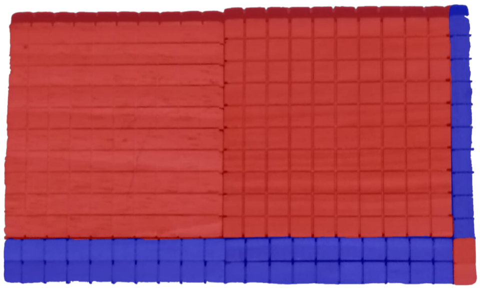


Figura 3.16 – Retângulo obtido atráves da equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (2x-1) e (x-2), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que, nesse caso, estamos atribuindo o valor negativo às peças azuis no material dourado.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (2x - 1) \cdot (x - 2).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(2x - 1) \cdot (x - 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função

$f(x) = (2x - 1) \cdot (x - 2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.17:

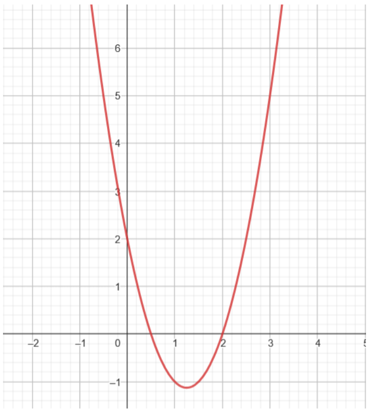


Figura 3.17 – Curva obtida no gráfico da equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Fonte: Elaborado no GeoGebra

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: três placas representarão o coeficiente “a”, sete barras representarão o coeficiente “b” e dois cubinhos representarão o coeficiente “c”. Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 3.18:

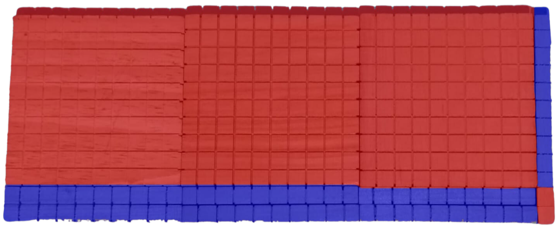


Figura 3.18 – Retângulo obtido atráves da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (3x-1) e (x-2), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que, nesse caso, estamos atribuindo o valor negativo às peças azuis no material dourado.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (3x - 1) \cdot (x - 2).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(3x - 1) \cdot (x - 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (3x - 1) \cdot (x - 2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.19:

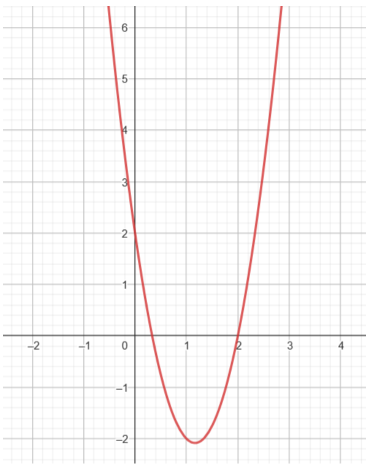


Figura 3.19 – Curva obtida no gráfico da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Fonte: Elaborado GeoGebra

3.5.3 Equações incompletas em c.

Na resolução desse tipo específico de equações do segundo grau incompletas em c, utilizamos uma abordagem que determina a existência de raízes racionais com base na possibilidade de formar um retângulo completo. Nesse caso, a formação do retângulo consiste em juntar todas as barras em um dos lados da equação. Portanto, um dos lados da equação será sempre x, resultando em uma das raízes igual a zero e possibilitando a formação do retângulo. A seguir, apresentaremos exemplos elucidativos dessa técnica.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $x^2 + 5x = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: uma placa representará o coeficiente “a” e cinco barras representarão o coeficiente “b”. Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 3.20:

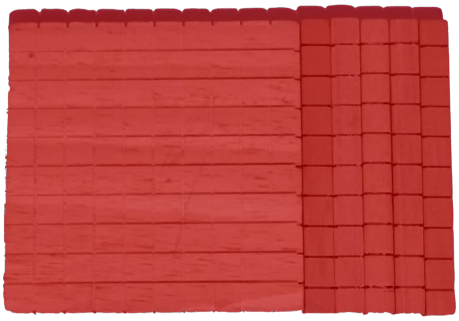


Figura 3.20 – Retângulo obtido atráves da equação $x^2 + 5x = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (x+5) e x, determinadas pelos coeficientes da equação.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (x + 5) \cdot x.$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x + 5) \cdot x = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} x + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 0 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x+5) \cdot (x)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.21:

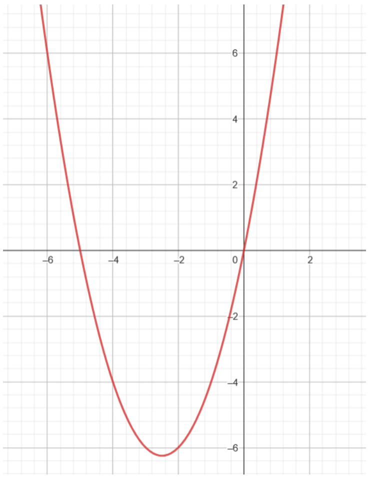


Figura 3.21 – Curva obtida no gráfico da equação $x^2 + 5x + 2 = 0$. Fonte: Elaborado no GeoGebra

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $2x^2 - 4x = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: uma placa representará o coeficiente "a", seis barras representarão o coeficiente "b" e oito cubinhos representarão o coeficiente "c". Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 3.22:

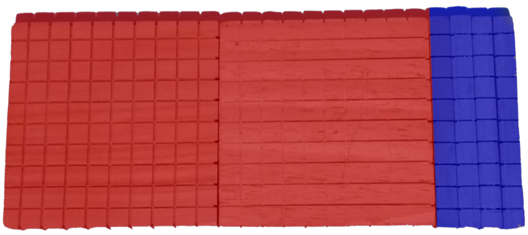


Figura 3.22 – Retângulo obtido atráves da equação $2x^2 - 4x = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (2x-4) e x, determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que, nesse caso, estamos atribuindo o valor negativo às peças azuis no material dourado.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (2x - 4) \cdot x.$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(2x - 4) \cdot x = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (2x - 4) \cdot (x)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.23:

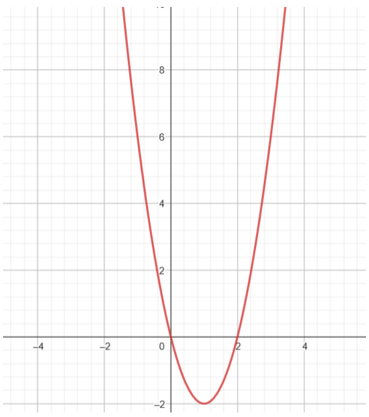


Figura 3.23 – Curva obtida no gráfico da equação $2x^2 - 4x = 0$. Fonte: Elaborado no GeoGebra

3.5.4 Equações completas com coeficiente c negativo e incompletas em b.

Na resolução deste tipo específico de equações com coeficientes c negativo e incompletas em b, as peças obtidas a partir dos coeficientes são sempre insuficientes para montar um retângulo. No entanto, isso não significa que a equação não possua raízes racionais.

Para lidar com esse problema, o aluno pode solicitar peças do tipo barra para tentar montar o retângulo. No entanto, essa solicitação não pode ser feita com qualquer quantidade de peças. É necessário ter um número par de peças, sendo metade azuis (negativas) e metade vermelhas (positivas). Dessa forma, ao acrescentar elementos opostos à equação, não alteramos sua natureza.

É importante ressaltar que, em alguns casos, mesmo formando o retângulo, a equação pode não ter raízes no conjunto dos números racionais. Portanto, é necessário ficar atento ao jogo de sinais. A seguir, apresentaremos exemplos elucidativos dessa técnica.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual empregando peças do material dourado. Nossa representação utilizará uma placa para o coeficiente "a", seis barras para o coeficiente "b" e dezesseis cubinhos para o coeficiente "c". No entanto, é importante ressaltar que apenas com essas peças não será possível resolver a equação por completo. Portanto, será necessário solicitar a inclusão de mais quatro barras, sendo duas positivas e duas negativas, a fim de montar um retângulo, como ilustrado na figura 3.24:

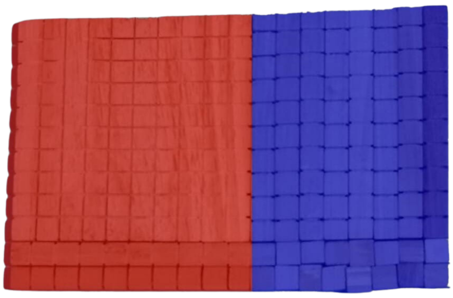


Figura 3.24 – Retângulo obtido atráves da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (x-8) e (x+2), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que acrescentamos a um dos lados -8 e ao outro +2 e o produto destes números é -16. Neste momento, é importante verificar se o número que representa o produto é igual ao número que representa o termo independente da equação. Neste caso, temos 16 cubinhos azuis complementando a figura.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (x - 8) \cdot (x + 2).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x - 8) \cdot (x + 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} x - 8 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x - 8) \cdot (x + 2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.25:

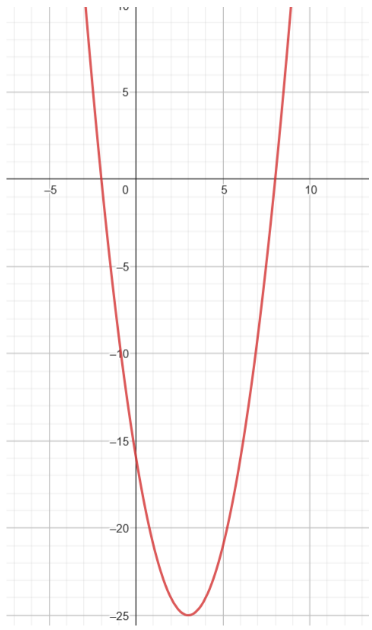


Figura 3.25 – Curva obtida no gráfico da equação $x^2 - 6x - 16 = 0$. Fonte: Elaborado no GeoGebra

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual empregando peças do material dourado. Nossa representação utilizará uma placa para o coeficiente “a”, duas barras para o coeficiente “b” e oito cubinhos para o coeficiente “c”. No entanto, é importante ressaltar que apenas com essas peças não será possível resolver a equação por completo.

Portanto, será necessário solicitar a inclusão de mais quatro barras, sendo duas positivas e duas negativas, a fim de montar um retângulo, como ilustrado na figura 3.26:

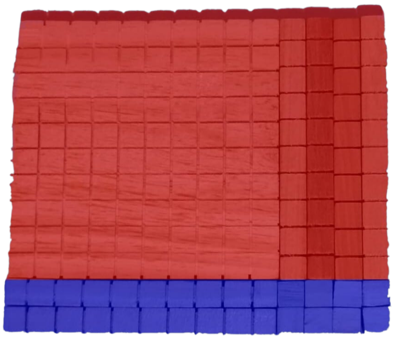


Figura 3.26 – Retângulo obtido atráves da equação $x^2 + 2x - 8 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (x+4) e (x-2), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que acrescentamos a um dos lados +4 e ao outro -2 e o produto destes números é -8. Neste momento, é importante verificar se o número que representa o produto é igual ao número que representa o termo independente da equação. Neste caso, temos 8 cubinhos azuis complementando a figura.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (x + 4) \cdot (x - 2).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x + 4) \cdot (x - 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} x + 4 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x + 4) \cdot (x - 2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 5.20:

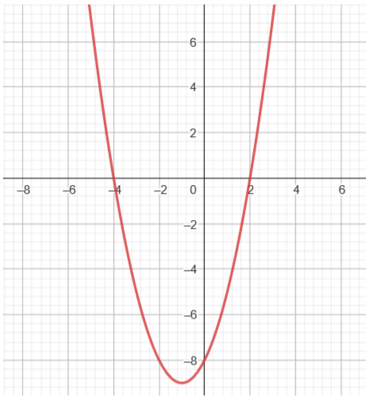


Figura 3.27 – Curva obtida no gráfico da equação $x^2 + 2x - 8 = 0$. Fonte: Elaborado no GeoGebra

Exemplo 3: Determine o conjunto solução da equação $x^2 + 16 = 0$.

Solução: Neste exemplo específico, ao resolver a equação quadrática $x^2 + 16 = 0$, é fundamental notar que não existem raízes racionais para essa equação. No entanto, é possível utilizar o material dourado, como uma placa e dezesseis cubinhos, solicitando quatro barras vermelhas (positivas) e quatro barras azuis (negativas) para construir um retângulo.

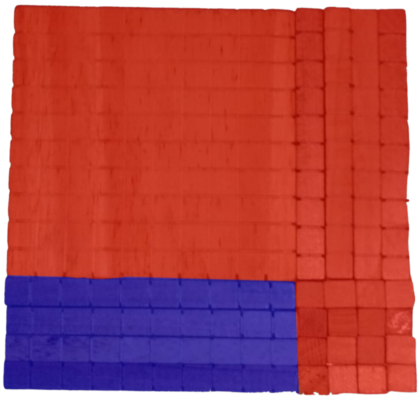


Figura 3.28 – Retângulo obtido atráves da equação $x^2 + 16 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinar essa representação visual, é evidente que adicionamos 4 a um dos lados do retângulo e -4 ao outro lado, resultando em um valor total de -16 (negativo). Entretanto, o termo independente da equação é representado por 16 cubinhos vermelhos (positivo). Isso indica que o retângulo montado não corresponde à solução da equação. Conforme observado nos exemplos anteriores, a multiplicação dos lados do retângulo deve ser igual ao termo independente para a representação ser adequada à solução da equação. Portanto, pode-se concluir que esta equação não possui raízes racionais.

3.6 EQUAÇÃO DE TERCEIRO GRAU: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

No contexto do ensino de equações de terceiro grau, a utilização do Material Dourado requer a realização das adaptações mencionadas anteriormente. Essas modificações são essenciais para proporcionar clareza aos conceitos de valores positivos e negativos.

Assim como nas seções anteriores, as cores das peças do Material Dourado podem ser modificadas para representar valores positivos e negativos. Nesse caso, pode-se adotar a cor azul para as peças que simbolizam valores negativos e a cor vermelha para os valores positivos. Essa diferenciação visual auxilia os alunos na compreensão dos diferentes tipos de valores envolvidos nas equações.

Ao utilizar o Material Dourado para resolver equações $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, consideramos uma nova peça: o cubo. O cubo representa a variável elevada ao cubo (x^3) e possui três dimensões: altura, largura e comprimento, todas correspondentes à variável x. O volume do cubo corresponderá a x^3, refletindo a potência envolvida na equação.

Além do cubo, as outras peças do Material Dourado são as mesmas denotadas nas equações anteriores: cubinhos, barras e placas. Os cubinhos representam o termo independente, com largura e comprimento unitários e área correspondente a 1. As barras representam a variável (x), possuindo largura unitária e comprimento x, resultando em uma área x. As placas representam a variável elevada ao quadrado (x^2), tendo largura e comprimento x, com uma área correspondente a x^2.

Ao utilizar essas peças adaptadas no Material Dourado, os alunos podem visualizar e manipular as representações geométricas das equações de terceiro grau concretamente. A quantidade de peças utilizada na resolução é determinada pelos valores dos coeficientes a, b, c e d da equação.

É importante ressaltar que, diferentemente das resoluções das equações de primeiro e segundo grau, as equações de terceiro grau envolvem o uso das dimensões completas das peças, incluindo altura, largura e comprimento. Essa consideração é essencial para uma representação precisa das potências envolvidas na equação.

Tabela 3.4 – Representação das dimensões das peças do Material Dourado que serão utilizados

Peça	**Representação Algébrica**
Cubinho	1
Barra	x
Placa	x^2
Cubo	x^3

Conforme apresentado por Costa (2013, p. 84), a resolução de equações de terceiro grau é abordada por meio de uma classificação em três tipos distintos de equações. Essa classificação tem como propósito fornecer uma estrutura clara para auxiliar os alunos no processo de familiarização com o método e no desenvolvimento de confiança ao resolver as equações apresentadas pelo professor. Além disso, nas equações de terceiro grau, a figura formada será um paralelepípedo, ou seja, uma figura tridimensional, e o volume deste paralelepípedo fornecerá a forma fatorada da equação de terceiro grau. Com o intuito de facilitar esse processo, Costa (2013, p. 84) propõe a seguinte tabela de divisão:

Tabela 3.5 – Tipos de equações do terceiro grau.

Tipo	**Equações do Terceiro Grau:** $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
Tipo 1	Equações completas com todos os coeficientes positivos.
Tipo 2	Equações completas com coeficientes a e c positivos e b e d negativos.
Tipo 3	As demais equações completas e incompletas.

Visando proporcionar maior clareza, serão apresentadas resoluções de equações do terceiro grau para cada um dos tipos mencionados na tabela proposta por Costa (2013, p. 84).

3.6.1 Equações completas com todos os coeficientes positivos.

A resolução de equações do terceiro grau com coeficientes positivos envolve um método visual que utiliza a montagem de um paralelepípedo proporcional aos coeficientes da equação. Essa abordagem concreta permite determinar a existência de raízes racionais pela possibilidade de formar o paralelepípedo. Caso não seja viável montar o paralelepípedo, conclui-se que a equação não possui todas as raízes racionais. Serão apresentados exemplos ilustrativos dessa técnica.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: um cubo representará o coeficiente "a", três placas representarão o coeficiente "b", três barras representarão o coeficiente "c" e um cubinho representará o coeficiente "d". Com essas peças, é possível montar um paralelepípedo, como ilustrado na figura 3.29:

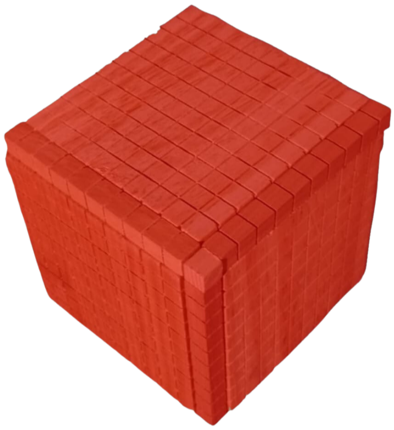


Figura 3.29 – Paralelepípedo obtido atráves da equação $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um paralelepípedo. Esse paralelepípedo possui arestas com medidas correspondentes a (x+1), (x+1) e (x+1), determinadas pelos coeficientes da equação.

Uma observação importante é que o volume desse paralelepípedo representa a forma fatorada da equação em questão. O volume é calculado multiplicando-se os comprimentos das arestas, ou seja,

$$V = (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1).$$

Ao igualar o volume do paralelepípedo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos o volume a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 1) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos três possibilidades:

$$\begin{cases} x+1=0 \\ x+1=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde o volume do paralelepípedo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.30:

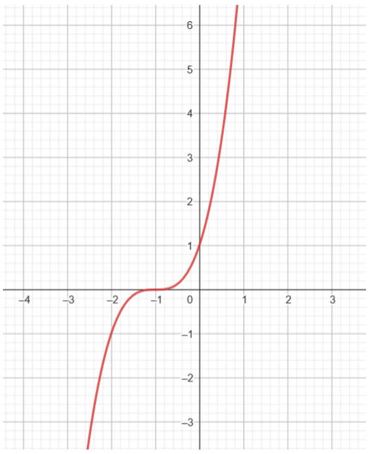


Figura 3.30 – Curva obtida no gráfico da equação $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$. Fonte: GeoGebra

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: um cubo representará o coeficiente "a", seis placas representarão o coeficiente "b", doze barras representarão o coeficiente "c" e oito cubinhos representarão o coeficiente "d". Com essas peças, é possível montar um paralelepípedo, como ilustrado na figura 3.31:

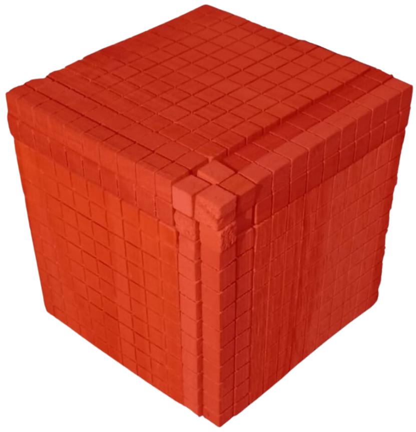


Figura 3.31 – Paralelepípedo obtido atráves da equação $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um paralelepípedo. Esse paralelepípedo possui arestas com medidas correspondentes a (x+2), (x+2) e (x+2), determinadas pelos coeficientes da equação.

Uma observação importante é que o volume desse paralelepípedo representa a forma fatorada da equação em questão. O volume é calculado multiplicando-se os comprimentos das arestas, ou seja,

$$V = (x + 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2).$$

Ao igualar o volume do paralelepípedo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos o volume a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x + 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos três possibilidades:

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde o volume do paralelepípedo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x+2)\cdot(x+2)\cdot(x+2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.32:

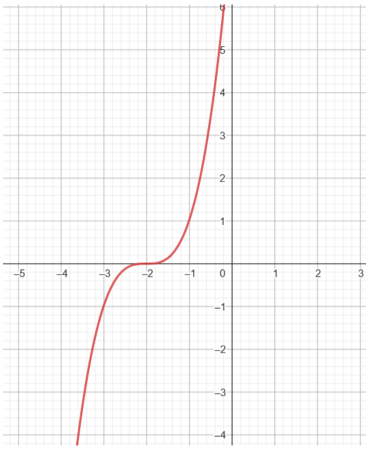


Figura 3.32 – Curva obtida no gráfico da equação $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$. Fonte: GeoGebra

Exemplo 3: Determine o conjunto solução da equação $x^3 + 5x^2 + 6x + 2 = 0$.

Solução: Não é possível resolver esta equação utilizando peças do material dourado, portanto a equação não possui todas as suas raízes racionais.

3.6.2 Equações completas com coeficientes a e c positivos e b e d negativos.

Para resolver equações do terceiro grau com coeficientes a e c positivos, e b e d negativos, utilizamos um método visual de montagem de paralelepípedos proporcionais aos coeficientes. A existência de raízes racionais é determinada pela possibilidade de formar um paralelepípedo completo. Caso não seja viável montar o paralelepípedo, conclui-se que a equação não possui todas as raízes racionais. Serão apresentados exemplos ilustrativos dessa abordagem.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: um cubo representará o coeficiente “a”, sete placas representarão o coeficiente “b”, quatorze barras representarão o coeficiente “c” e oito cubinhos representarão o coeficiente “d”. Com essas peças, é possível montar um paralelepípedo, como ilustrado na figura 3.33:

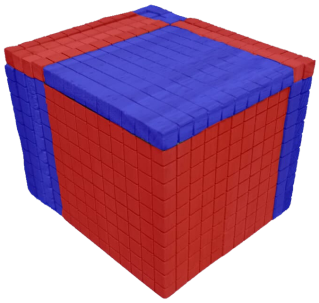


Figura 3.33 – Paralelepípedo obtido atráves da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um paralelepípedo. Esse paralelepípedo possui arestas com medidas correspondentes a (x-2), (x-1) e (x-4), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que, nesse caso, estamos atribuindo o valor negativo às peças azuis no material dourado.

Uma observação importante é que o volume desse paralelepípedo representa a forma fatorada da equação em questão. O volume é calculado multiplicando-se os comprimentos das arestas, ou seja,

$$V = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4).$$

Ao igualar o volume do paralelepípedo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos o volume a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos três possibilidades:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde o volume do paralelepípedo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.34

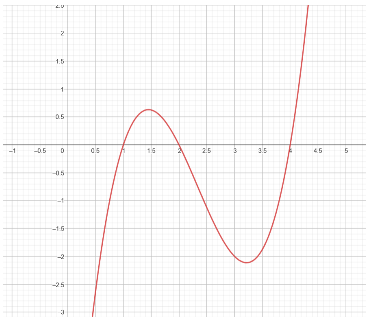


Figura 3.34 – Curva obtida no gráfico da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$. Fonte: GeoGebra

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual utilizando peças do material dourado: um cubo representará o coeficiente "a", nove placas representarão o coeficiente "b", vinte barras representarão o coeficiente "c" e doze cubinhos representarão o coeficiente "d". Com essas peças, é possível montar um paralelepípedo, como ilustrado na figura 3.35:

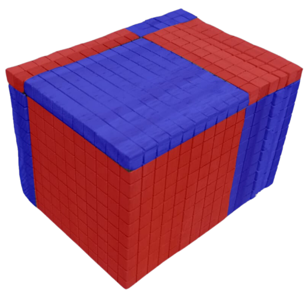


Figura 3.35 – Paralelepípedo obtido atráves da equação $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um paralelepípedo. Esse paralelepípedo possui arestas com medidas correspondentes a (x-2), (x-1) e (x-6), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que, nesse caso, estamos atribuindo o valor negativo às peças azuis no material dourado.

Uma observação importante é que o volume desse paralelepípedo representa a forma fatorada da equação em questão. O volume é calculado multiplicando-se os comprimentos das arestas, ou seja,

$$V = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 6).$$

Ao igualar o volume do paralelepípedo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos o volume a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 6) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos três possibilidades:

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde o volume do paralelepípedo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 6)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.36:

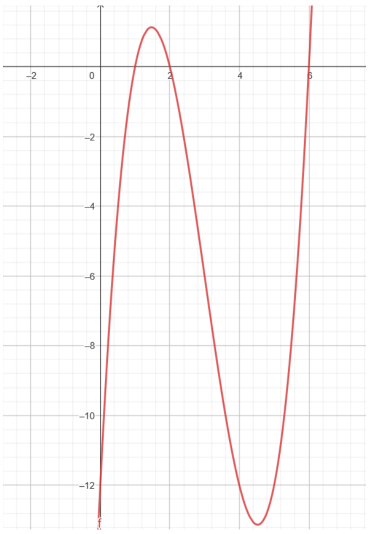


Figura 3.36 – Curva obtida no gráfico da equação $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$. Fonte: GeoGebra

Exemplo 3: Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 2x^2 + 4x - 7 = 0$.

Solução: Não é possível resolver esta equação utilizando peças do material dourado, portanto a equação não possui todas as suas raízes racionais.

3.6.3 As demais equações completas e incompletas.

Ao resolver equações completas e incompletas, as peças proporcionais aos coeficientes obtidos são sempre insuficientes para formar um paralelepípedo. No entanto, isso não implica que a equação não possua raízes racionais. Para lidar com esse desafio, o aluno pode solicitar peças adicionais, como placas e/ou barras, na tentativa de construir o paralelepípedo. É importante notar que essa solicitação deve ser feita com um número par de peças, metade sendo azuis (negativas) e metade vermelhas (positivas), para preservar a natureza da equação. No entanto, mesmo ao formar o paralelepípedo, a equação pode não ter raízes no conjunto dos números racionais, exigindo atenção aos sinais. A seguir, serão apresentados exemplos esclarecedores dessa abordagem.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $x^3 - x^2 - 12x = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, adotaremos uma abordagem visual empregando peças do material dourado. Nossa representação utilizará um cubo para o coeficiente "a", uma placa para o coeficiente "b" e duas barras para o coeficiente "c". No entanto, é importante ressaltar que apenas com essas peças não será possível resolver a equação por completo. Portanto, será necessário solicitar a inclusão de mais seis placas, sendo três positivas e três negativas, a fim de montar um paralelepípedo, como ilustrado na figura 3.37:

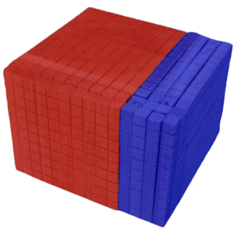


Figura 3.37 – Paralelepípedo obtido atráves da equação $x^3 - x^2 - 12x = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças do material dourado se encaixam de maneira a formar um paralelepípedo. Esse paralelepípedo possui arestas com medidas correspondentes a x, (x-4) e (x+3), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que acrescentamos a um dos lados -4 e ao outro +3 e o produto destes números é -12. Neste momento, é importante verificar se o número que representa o produto é igual ao número que representa o coeficiente "c" da equação. Neste caso, temos 12 barras azuis complementando a figura.

Uma observação importante é que o volume desse paralelepípedo representa a forma fatorada da equação em questão. O volume é calculado multiplicando-se os comprimentos das arestas, ou seja,

$$V = x \cdot (x - 4) \cdot (x + 3).$$

Ao igualar o volume do paralelepípedo formado pelas peças do material dourado a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos o volume a zero, temos a seguinte expressão:

$$x \cdot (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos três possibilidades:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde o volume do paralelepípedo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x) \cdot (x - 4) \cdot (x + 3)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$, conforme a figura 3.38:

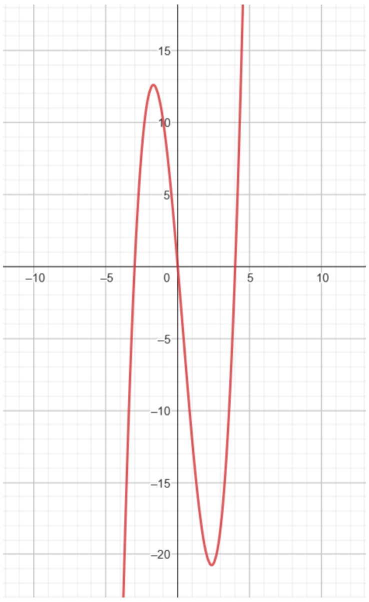


Figura 3.38 – Curva obtida no gráfico da equação $x^3 - x^2 - 12x = 0$. Fonte: GeoGebra

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $x^3 + 2 = 0$.

Solução: Não é possível resolver esta equação utilizando peças do material dourado mesmo solicitando mais peças, portanto a equação não possui todas as suas raízes racionais.

4 RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU UTILIZANDO MATERIAIS DIDÁTICOS

No capítulo anterior, estabelecemos a representação das cores e as representações algébricas utilizando o material dourado, quando utilizado para resolver equações algébricas. No entanto, neste capítulo, manteremos a mesma abordagem, mas faremos a transição para o uso de recursos didáticos, tais como cartolina, EVA, papel paraná, isopor, entre outros. Manteremos a representação das cores, onde o vermelho representa valores positivos e o azul representa valores negativos. Além disso, manteremos as representações algébricas, onde as tiras retangulares representam a variável, denotada por "x", e os quadradinhos representam o termo constante. Nas equações de segundo grau, os quadrados maiores continuarão a representar a variável "x^2.".

Vamos utilizar os estudos de Hellmeister e Galvão (1998, p. 15-22) em seu artigo "Resolvendo fisicamente" como base para nossas atividades.

O objetivo principal dessa atividade é aplicar a modelagem usando peças coloridas construídas por meio de recursos didáticos (cartolina, papel paraná, EVA, entre outros) para representar expressões algébricas de primeiro e segundo grau. Isso proporcionará uma compreensão visual das equações e expressões matemáticas. Além disso, usaremos esse material como uma ferramenta para ilustrar a resolução de equações de primeiro e segundo grau, tornando o processo de aprendizado mais atrativo para os estudantes.

Para resolver as equações, será necessário empregar um conjunto de fichas em duas cores, que identificaremos como vermelho e azul, composto por três tipos de elementos:

a) **Quadrados pequenos (1 × 1):** Estes representarão a unidade 1. Os quadrados vermelhos simbolizarão as unidades positivas, enquanto os quadrados azuis representarão as unidades negativas.

b) **Retângulos (1 × 10):** Os retângulos vermelhos corresponderão à incógnita "x", e os retângulos azuis representarão seu oposto, "$-x$".

c) **Quadrados grandes (10 × 10):** Os quadrados grandes vermelhos corresponderão à incógnita "x^2", e os quadrados grandes azuis representarão seu oposto, "$-x^2$".

4.1 CONSTRUÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

A elaboração deste material didático para a resolução de equações de primeiro e segundo grau será realizada utilizando recursos didáticos à escolha do leitor. Recomenda-se o uso de materiais firmes, como papel paraná, papel cartão, EVA, entre outros, seguindo os passos a seguir.

Materiais necessários:

– Algum recurso didático (papel paraná, papel cartão, EVA, isopor, entre outros) nas cores vermelho e azul.

– Régua

– Tesoura ou estilete

– Caneta

Passo a passo:

a) Com o auxílio de uma caneta e uma régua, desenhe os quadrados maiores (10 x 10) no material;

b) Após traçar as dimensões dos quadrados maiores, proceda ao recorte usando uma tesoura ou um estilete para obter um quadrado semelhante ao da figura 4.1;

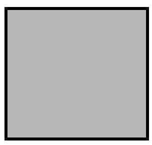


Figura 4.1 – Quadrado (10 x 10). Fonte: Autora

c) Com o quadrado grande em mãos, utilize uma caneta e uma régua para subdividir o quadrado em 10 retângulos, cada um medindo 1 x 10;

d) Após traçar as dimensões dos retângulos, recorte-os com o auxílio de uma tesoura ou um estilete para obter retângulos semelhantes aos da figura. 4.2;

Figura 4.2 – Retângulo (1 x 10). Fonte: Autora

e) Com os retângulos em mãos, utilize uma caneta e uma régua para subdividir cada retângulo em 10 quadrados pequenos, cada um medindo 1 x 1;

f) Após traçar as dimensões dos quadrados pequenos, proceda ao recorte usando uma tesoura ou um estilete para obter quadrados semelhantes aos da figura. 4.3.

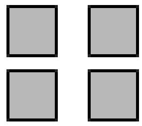


Figura 4.3 – Quadrados pequenos (1 x 1). Fonte: Autora

4.2 EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU

Para resolver equações de primeiro grau, Hellmeister e Galvão (1998, p. 15-22) empregam a propriedade que afirma que uma igualdade se mantém se realizarmos operações idênticas em ambos os lados. Dessa forma, modelam a solução de uma equação de primeiro grau, conforme podemos observar nos exemplos abaixo.

Exemplo 1: Determine a solução da igualdade $2x + 3 = x + 7$.

Solução: Primeiramente, disponha as peças de modo a representar as equações, como ilustrado nas figuras abaixo:

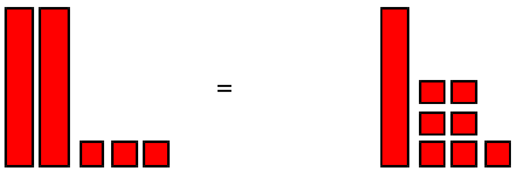


Figura 4.4 – Representação da equação $2x + 3 = x + 7$. Fonte: Autora

Em seguida, retire uma tira vermelha de cada lado, obtendo:

$$2x - x + 3 = x - x + 7 \text{ ou } x + 3 = 7$$

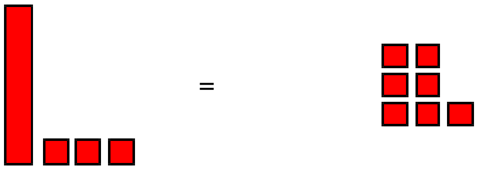


Figura 4.5 – Resultado da primeira manipulação. Fonte: Autora

Logo após, retire três quadradinhos vermelhos de cada lado, obtendo:

$x + 3 - 3 = 7 - 3$ ou $x = 4$, que é a solução.

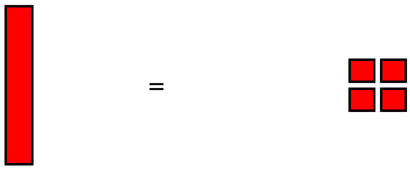


Figura 4.6 – Resultado da segunda manipulação. Fonte: Autora

Por fim, volte à configuração inicial e substitua cada tira vermelha (azul) por quatro quadradinhos vermelhos (azuis) e verifique a igualdade.

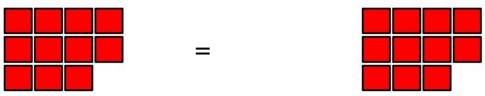


Figura 4.7 – Substituição na configuração inicial. Fonte: Autora

Exemplo 2: Determine a solução da igualdade $3x - 2 = 2x + 5$.

Solução: Primeiramente, disponha as peças de modo a representar as equações, como ilustrado nas figuras abaixo:

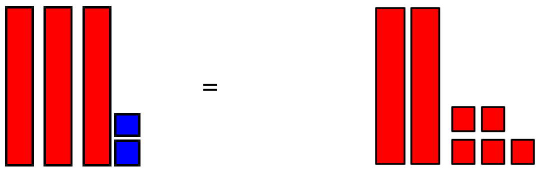


Figura 4.8 – Representação da equação $3x - 2 = 2x + 5$. Fonte: Autora

Em seguida, retire duas tiras vermelhas de cada lado, obtendo:

$$3x - 2x - 2 = 2x - 2x + 5 \text{ ou } x - 2 = 5$$

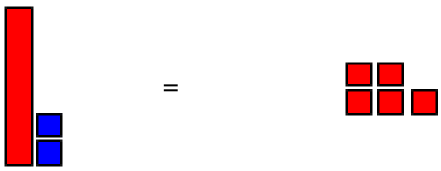


Figura 4.9 – Resultado da primeira manipulação. Fonte: Autora

Logo após, acrescente dois quadradinhos vermelhos de cada lado, obtendo:

$$x - 2 + 2 = 5 + 2 \text{ ou } x = 7, \text{ que é a solução.}$$

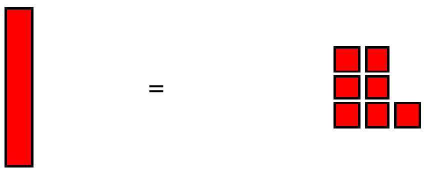


Figura 4.10 – Resultado da segunda manipulação. Fonte: Elaborado pela autora

Por fim, volte à configuração inicial e substitua cada tira vermelha (azul) por sete quadradinhos vermelhos (azuis) e verifique a igualdade.

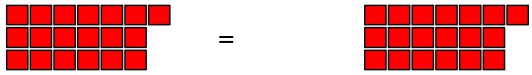


Figura 4.11 – Substituição na configuração inicial. Fonte: Autora

4.3 EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

Na resolução de equações de segundo grau, Hellmeister e Galvão (1998, p. 15-22) aplicam a fatoração de um polinômio, seguindo o modelo estabelecido para equações desse tipo com o uso do material dourado. Para ilustrar esses conceitos de forma prática, serão apresentados exemplos, mantendo as cores e representações algébricas previamente definidas. Ressalta-se que, em substituição ao material dourado, serão utilizadas peças recortadas de um material didático previamente construído.

Exemplo 1: Determine o conjunto solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, utilizaremos as seguintes peças: um quadrado grande representará o coeficiente "a", cinco retângulos representarão o coeficiente "b" e seis quadrados pequenos representarão o coeficiente "c". Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 4.12:

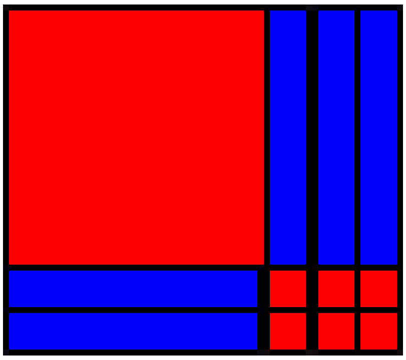


Figura 4.12 – Retângulo obtido atráves da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (x-3) e (x-2), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que, nesse caso, estamos atribuindo o valor negativo às peças azuis.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$\mathrm{A} = (x - 3) \cdot (x - 2).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x - 3) \cdot (x - 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função

$f(x) = (x - 3) \cdot (x - 2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$.

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, utilizaremos as seguintes peças: um quadrado grande representará o coeficiente “a”, quatro retângulos representarão o coeficiente “b” e quatro quadrados pequenos representarão o coeficiente “c”. Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 4.13:

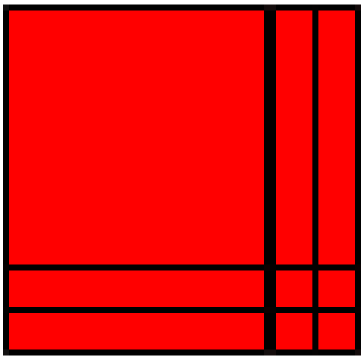


Figura 4.13 – Retângulo obtido atráves da equação $x^2 + 4x + 4 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (x+2) e (x+2), determinadas pelos coeficientes da equação.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (x + 2) \cdot (x + 2).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(x + 2) \cdot (x + 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} x+2=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (x+2)\cdot(x+2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$.

Exemplo 3: Determine o conjunto solução da equação $-3x^2 - 7x - 2 = 0$.

Solução: Para a resolução desta equação, utilizaremos as seguintes peças: três quadrados grandes representarão o coeficiente “a”, sete retângulos representarão o coeficiente “b” e dois quadrados pequenos representarão o coeficiente “c”. Com essas peças, é possível montar um retângulo, como ilustrado na figura 4.14:

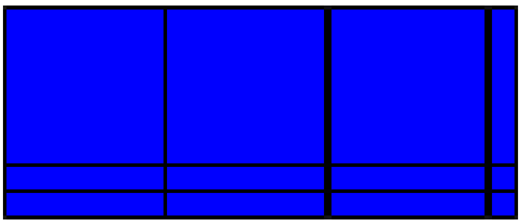


Figura 4.14 – Retângulo obtido atráves da equação $3x^2 - 7x - 2 = 0$. Fonte: Autora

Ao examinarmos a representação visual apresentada na figura acima, é possível notar que as peças se encaixam de maneira a formar um retângulo. Esse retângulo possui lados com medidas correspondentes a (-3x-1) e (-x-2), determinadas pelos coeficientes da equação. É importante ressaltar que, nesse caso, estamos atribuindo o valor negativo às peças azuis.

Uma observação importante é que a área desse retângulo representa a forma fatorada da equação em questão. A área é calculada multiplicando-se os comprimentos dos lados, ou seja,

$$A = (-3x - 1)\cdot(-x - 2).$$

Ao igualar a área do retângulo formado pelas peças a zero, podemos obter uma importante informação sobre a equação em questão.

Se igualarmos a área a zero, temos a seguinte expressão:

$$(-3x - 1) \cdot (-x - 2) = 0$$

Essa igualdade implica que pelo menos um dos fatores precisa ser igual a zero para a multiplicação resultar em zero. Portanto, temos duas possibilidades:

$$\begin{cases} -3x - 1 = 0 \\ -x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

Esses valores de x representam as soluções da equação onde a área do retângulo é igual a zero. Em outras palavras, são os pontos onde a curva correspondente ao gráfico da função $f(x) = (-3x - 1) \cdot (-x - 2)$ cruza ou toca o eixo x, ou seja, são as raízes da equação ou da função $f(x)$.

5 APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Para concluir o trabalho de conclusão de curso, propõe-se a aplicação prática em sala de aula, abordando um dos temas estudados neste trabalho: “Resolução de Equações de Segundo Grau com Material Dourado.” Atualmente, estou realizando o estágio obrigatório em uma Escola Estadual no interior do Estado de São Paulo, atendendo alunos do Ensino Fundamental II (6° ao 8° ano) e Ensino Médio (1º ao 3º ano). A escola conta com 16 salas de aula, um laboratório de informática, um laboratório de ciências, uma cozinha e uma sala de leitura, não possuindo uma biblioteca convencional.

A preceptora, a qual estou acompanhando, autorizou a execução das atividades com a turma do 1°A, composta por 32 alunos, no dia 17/11/2023. Entretanto, apesar de ser uma turma razoavelmente grande, apenas 19 alunos estavam presentes no dia da aula prática. A preceptora prestou auxílio ao longo do processo de aplicação.

Foi elaborada uma sequência didática dividida em três etapas, visando compreender como os alunos reagiriam a esta abordagem distinta da tradicional e avaliar se foi enriquecedor para o seu aprendizado. As etapas são:

Etapa 1: Nesta etapa, os alunos foram submetidos a um questionário diagnóstico composto por cinco perguntas sobre equações. Eles deveriam responder às perguntas e resolver as equações com base em seus conhecimentos prévios, utilizando a fórmula de Bhaskara. O questionário foi aplicado um dia antes da aula prática mencionada neste trabalho, contando com a participação de 16 alunos.

As respostas permitiram visualizar alguns erros comuns cometidos pelos alunos, tais como:

1. Erro na Finalização da Resolução: Alguns alunos apresentaram dificuldade em concluir a resolução da equação após encontrar o valor do discriminante, indicando uma possível lacuna no entendimento do processo de resolução.

2. Não Encontrar a Raiz do Discriminante: Houve casos em que os alunos não encontraram a raiz do discriminante ao calcular as raízes da equação.

3. Dificuldade com Equações Fracionárias: Mais da metade dos participantes não soube resolver equações fracionárias, revelando uma dificuldade significativa em realizar operações com frações.

Seguem abaixo fotografias de algumas atividades com os erros mencionados anteriormente.

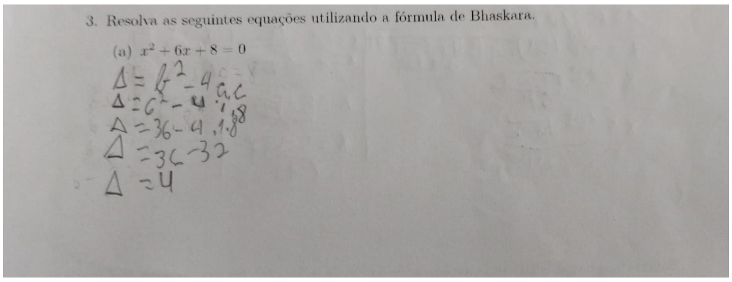


Figura 5.1 – Erro 1: O aluno considerou o discriminante como solução da equação. Fonte: Autora

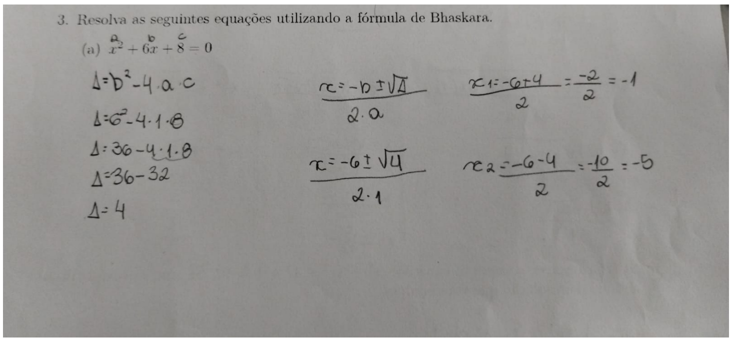


Figura 5.2 – Erro 2: O aluno não calculou a raiz do discriminante. Fonte: Autora

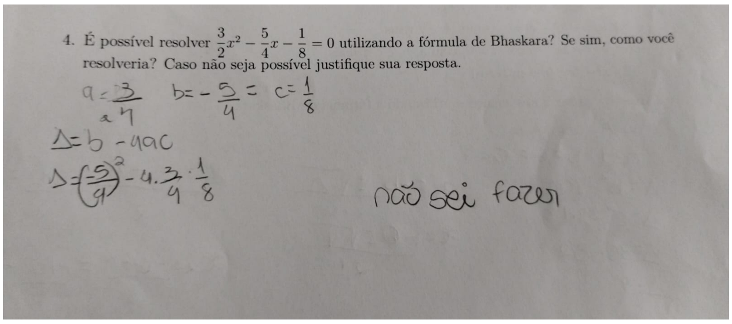
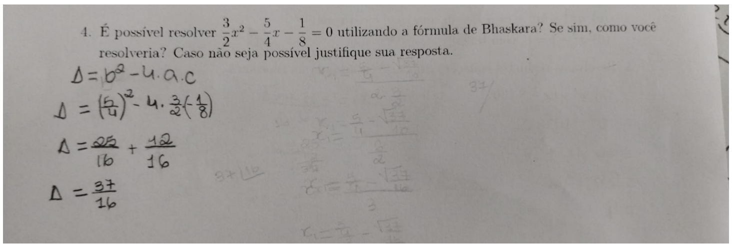


Figura 5.3 – Erro 3: O aluno não soube resolver equação fracionária. Fonte: Autora



4. É possível resolver $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ utilizando a fórmula de Bhaskara? Se sim, como você resolveria? Caso não seja possível justifique sua resposta.

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4.\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{8}\right)$

$\Delta = \frac{25}{16} + \frac{12}{16}$

$\Delta = \frac{37}{16}$

Figura 5.4 – Erro 4: O aluno não soube resolver equação fracionária. Fonte: Autora

Na aula seguinte, no início da aula, realizou-se uma breve retomada para relembrar alguns conceitos de uma equação de segundo grau. Os alunos foram instigados a responder algumas perguntas a fim de completar um pequeno mapa mental na lousa. As perguntas abordaram a forma algébrica, o grau, a maior potência da incógnita, os tipos e o método de resolução mais conhecido para resolver equações de segundo grau. Não restavam dúvidas de que os alunos conseguiriam responder às perguntas, uma vez que haviam acertado as duas primeiras questões do questionário diagnóstico relacionadas à parte teórica.

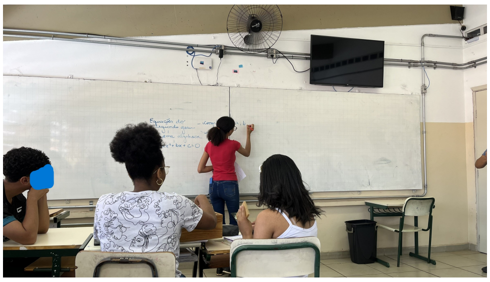


Figura 5.5 – Construção do mapa mental. Fonte: Autora

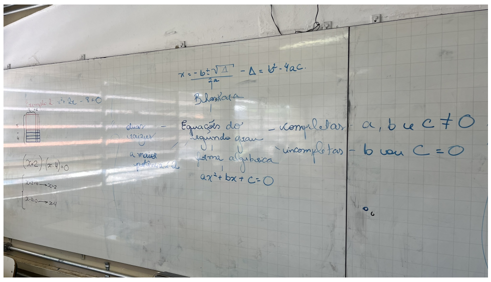


Figura 5.6 – Mapa mental finalizado. Fonte: Autora

Etapa 2: No início desta etapa, solicitou-se que os alunos formassem cinco grupos sendo entregue uma caixa de material dourado a cada grupo. Foi sugerido o uso do material dourado como ferramenta para resolver equações de segundo grau. Inicialmente, em um instante desta etapa, apresentou-se aos alunos a história de Maria Montessori, a fim de que compreendessem um pouco sobre o desenvolvimento do material proposto, quem foi responsável por sua criação e quais eram suas primeiras finalidades.

Para introduzir o material dourado no ensino de resolução de equações de segundo grau, realizou-se uma apresentação detalhada do material e de suas peças. O objetivo era esclarecer ao máximo a relação entre cada peça e sua representação algébrica.

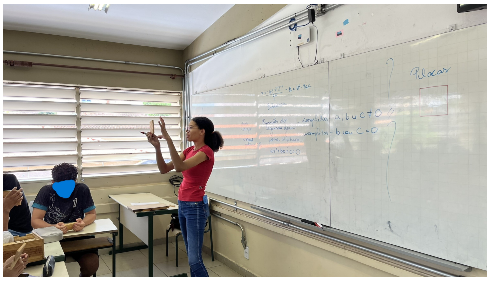


Figura 5.7 – Dialogando sobre o material dourado, sua história e quais são suas peças. Fonte: Autora

Figura 5.8 – Os alunos explorando o material dourado. Fonte: Autora

Figura 5.9 – Explicação da relação entre as peças do material dourado e os coeficientes de uma equação de segundo grau. Fonte: Autora

Após a introdução do material dourado e a explicação de seu uso na resolução de equações de segundo grau, foram apresentados alguns exemplos para os alunos poderem sanar possíveis dúvidas. No final desta etapa, foram sugeridos alguns exemplos para os alunos poderem se familiarizar e compreender como empregar o material dourado para essa finalidade específica. Logo em seguida, pediu-se a alguns alunos que expusessem suas resoluções na lousa.

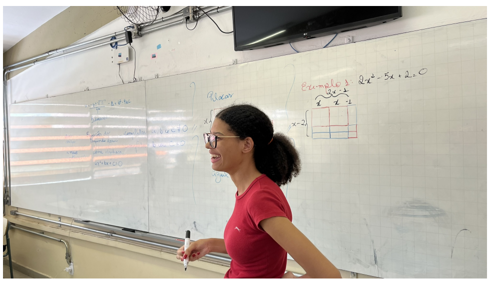


Figura 5.10 – Resolvendo com os alunos a equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Fonte: Autora

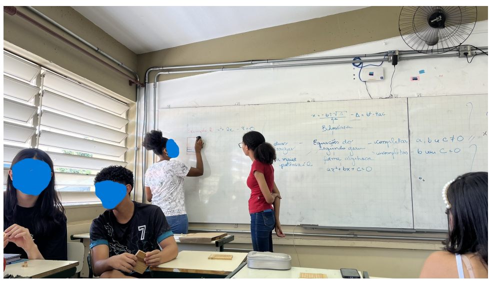


Figura 5.11 – Aluna resolvendo na lousa a equação $x^2 + 2x - 8 = 0$. Fonte: Autora

Etapa 3: Nesta etapa, desafiaram-se os alunos a resolverem a mesma atividade diagnóstica proposta no dia anterior, agora utilizando o material dourado como método de resolução. Os alunos construíram a equação com o material dourado em suas mesas, transferindo a representação geométrica para a folha de resolução. Neste momento, foi possível identificar que a maior dificuldade dos alunos ao utilizar esse método de resolução foi ter a lógica para montar o retângulo utilizando as peças correspondentes aos coeficientes da equação.

Diante dessa dificuldade, surgiu a ideia de solicitar que os alunos indicassem, no final da folha de resolução, qual método consideravam melhor. As respostas foram favoráveis ao material dourado, sendo algumas delas:

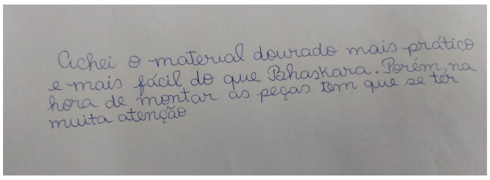


Figura 5.12 – Resposta sobre qual método era mais fácil o entendimento: Bhaskara ou material dourado. Fonte: Autora

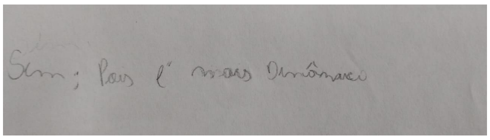


Figura 5.13 – Resposta sobre qual método era mais fácil o entendimento: Bhaskara ou material dourado. Fonte: Autora

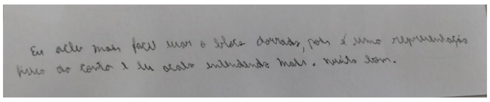


Figura 5.14 – Resposta sobre qual método era mais fácil o entendimento: Bhaskara ou material dourado. Fonte: Autora

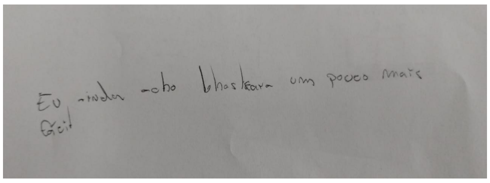


Figura 5.15 – Resposta sobre qual método era mais fácil o entendimento: Bhaskara ou material dourado. Fonte: Autora

Em relação à pesquisa de opinião anterior, obtivemos apenas três respostas que não consideraram o material dourado como o método mais fácil de compreender na resolução de equações de segundo grau. Para encerrar esta etapa, foi sugerido aos alunos que respondessem a um questionário elaborado pela autora no Google Forms, visando avaliar a compreensão e a eficácia do uso do material dourado, marcando assim o encerramento da aula.

O questionário consistia em seis perguntas, sendo cinco objetivas e apenas uma dissertativa. Participaram um total de 10 alunos, e as respostas obtidas foram as seguintes:

Pergunta 1: Você já havia utilizado o material dourado em sala de aula antes?

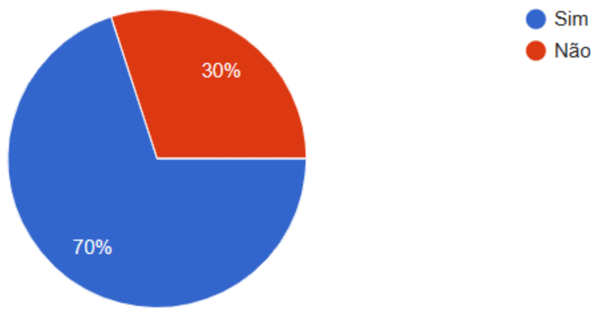


Figura 5.16 – Respostas dos alunos (Pergunta 1). Fonte: Autora

Pergunta 2: Você acha que o material dourado pode contribuir para a aprendizagem de equações?

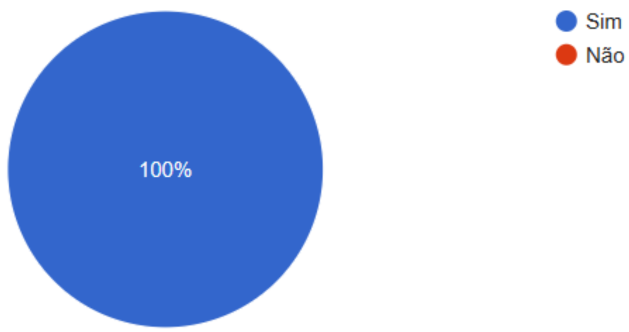


Figura 5.17 – Respostas dos alunos (Pergunta 2). Fonte: Autora

Pergunta 3: Atribuindo uma nota de 1 a 5, sendo 1 para pouco e 5 para muito, o quanto você considera que aprendeu de equações utilizando o material dourado?

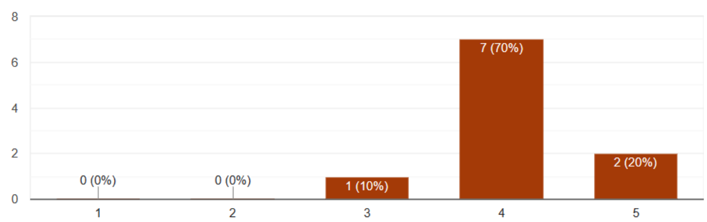


Figura 5.18 – Respostas dos alunos (Pergunta 3). Fonte: Autora

Pergunta 4: Atribuindo uma nota de 1 a 5, sendo 1 para fácil e 5 para difícil, qual a dificuldade que você achou no material dourado para resolver equações?

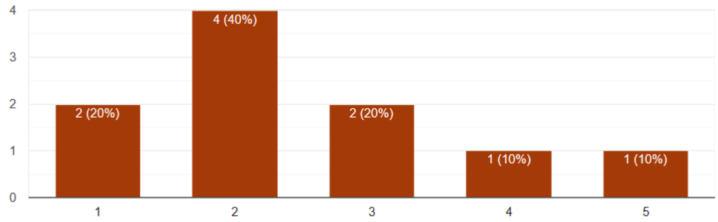


Figura 5.19 – Respostas dos alunos (Pergunta 4). Fonte: Autora

Pergunta 5: Você acha que o material dourado deveria ser utilizado mais vezes na escola quando abordado equações durante as aulas de matemática?

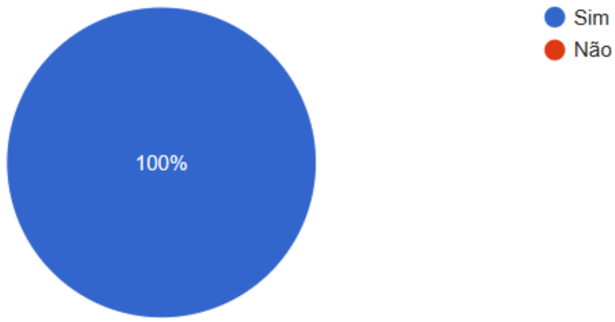


Figura 5.20 – Respostas dos alunos (Pergunta 5). Fonte: Autora

Na pergunta número 6, foi solicitado que os alunos descrevessem as dificuldades iniciais ao utilizarem o material dourado na sala de aula. Entretanto, apenas 4 alunos deixaram um comentário sobre o assunto. Seguem os comentários dos alunos:

> A1: “Eu gostei dessa aula mais de primeira não tinha entendido muito bem a parte do cálculo.”
>
> A2: “A única dificuldade encontrada é a lógica na hora de montar as peças.”
>
> A3: “A ordem e posições das peças foram mais difíceis de serem gravadas.”
>
> A4: “Contar para calcular equação.”

A aplicação desta atividade prática consistiu em analisar a reação dos alunos ao ensino de equações de segundo grau por meio de uma abordagem diferenciada da tradicional, avaliando seu impacto no enriquecimento do aprendizado. O questionário fornecido demonstrou-se esclarecedor, pois todos os alunos que participaram ativamente da aula responderam, e a totalidade concordou que o uso do material dourado pode ser benéfico para o ensino de equações (Pergunta 2), recomendando sua continuidade quando o tema é abordado nas aulas de matemática (Pergunta 5).

Além disso, o uso de metodologias ativas pode fortalecer a compreensão teórica da matemática e estimular o protagonismo dos estudantes na construção de seus próprios conhecimentos. Assim, esta atividade prática não apresentou um desafio particularmente significativo; no entanto, alguns pontos positivos e negativos podem ser destacados, sendo eles:

Pontos positivos

- Os alunos aprenderam um novo método para resolver equações de segundo grau.
- Os alunos gostaram do uso do material dourado por ser algo físico.
- O uso do material dourado desenvolve o raciocínio lógico nos momentos de construir os retângulos para resolver as equações de segundo grau.
- A colaboração entre os grupos potencializa o enriquecimento da atividade, enquanto a troca de conhecimento auxilia no processo de ensino-aprendizagem.

Pontos negativos

- A distração dos alunos ao brincarem com o material dourado durante a explicação teórica.
- Não ter permissão para colorir o material dourado da escola.
- A restrição de tempo, com apenas duas aulas de 45 minutos, limita a profundidade do método.

Em conclusão, a implementação desta metodologia ativa revelou-se valiosa ao proporcionar aos alunos uma abordagem prática diferenciada para a resolução de equações de segundo grau, fortalecendo tanto a compreensão conceitual quanto o raciocínio lógico. Apesar dos benefícios evidentes, alguns desafios surgiram, como a distração ocasional dos alunos e as restrições de tempo, destacando a importância de ajustes para otimizar futuras atividades. O panorama, entretanto, aponta para uma experiência positiva, destacando a eficácia do envolvimento ativo dos estudantes no processo de aprendizagem matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, investigamos a história de Maria Montessori e o desenvolvimento do material dourado, um material didático que tem demonstrado relevância nas práticas educacionais. Exploramos como a visão inovadora de Montessori na educação infantil possibilitou a criação de um material didático, promovendo eficazmente o desenvolvimento cognitivo das crianças.

O uso do material dourado no ensino básico emergiu como uma abordagem promissora, capacitando os alunos a compreenderem conceitos matemáticos fundamentais de maneira concreta. As atividades com os blocos dourados estimulam a interação ativa dos estudantes, levando-os a internalizar o conhecimento de forma mais efetiva. Este método não apenas contribui para a construção de bases sólidas na Matemática, mas também os prepara para desafios mais complexos.

Ao empregar o material dourado no ensino de equações, percebemos como essa metodologia facilita a compreensão desse tema, muitas vezes temido pelos estudantes. A visualização das equações por meio dos blocos dourados tornou o processo de resolução menos abstrato, transformando-o em uma experiência mais tangível. Desta maneira, o material dourado revela-se uma ferramenta valiosa para superar bloqueios relacionados à matemática, incentivando os alunos a enfrentarem as questões matemáticas com confiança. Além disso, observamos a aplicação de materiais didáticos convencionais, como os papéis disponíveis na escola, para a implementação desse método.

Após uma análise teórica aprofundada sobre a aplicação do material dourado, tornou-se necessário implementar esse método na educação básica para avaliar sua eficácia na resolução de equações de segundo grau no ambiente escolar. A execução prática revelou-se efetiva, destacando a importância desta abordagem no ensino de equações. Assim, essa pesquisa desempenhou um papel crucial em minha formação como educadora, proporcionando-me experiências e conhecimentos valiosos para aprimorar minha prática pedagógica e oferecer uma educação mais significativa aos meus futuros alunos.

Além disso, a oportunidade de aplicar o material dourado em sala de aula foi fundamental para superar inseguranças como futura professora, preparando-me desde o planejamento da aula até sua conclusão satisfatória. Essa experiência prática não apenas fortaleceu minha confiança no uso do método, mas também contribuiu para o desenvolvimento de habilidades essenciais no processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

Benjamin Fine, Gerhard Rosenberg. **The Fundamental Theorem of Algebra.** Springer, 1991.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRANDEMBERG, J. C. **Sobre o uso da história da matemática no ensino de equações algébricas. Revista Cocar**, n. 3, p. 167-186, 2017.

COSTA, A. A. et al. **Uma sequência didática para resolver equações do segundo e terceiro graus no conjunto dos números racionais.** 2013.

DALCIN, Mario; OLAVE, Mónica. **Ecuaciones de primer grado: su historia.** 2007.

FACCHI, M. G. **A importância do uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática.** 2022. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

FONSECA, K. M. **O uso de material concreto no ensino e aprendizagem da matemática.** Cadernos do IME - Série Matemática, 2017.

HELLMEISTER, A. C. P.; GALVÃO, M. E. E. L. **Resolvendo fisicamente**. Revista do Professor de Matemática, v. 36, p. 15-22, 1998.

Huan Elvis Campelo Brandão. **Uma Demonstração Algébrica do Teorema Fundamental da Álgebra**. Monografia Graduação, Universidade Estadual do Tocantins, Curso de Matemática, 2022.

MEDEIROS, C. F. de; MEDEIROS, A. **O método da falsa posição na história e na educação matemática.** Ciência e Educação, v. 10, n. 03, p. 545-557, 2004.

Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 15/11/2023.

PEDROSO, H. A. **Uma breve história da equação do 2º grau.** Revista Eletrônica de matemática, p. 1-13, 2010.

PELIZZARI, A. et al. **Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel**. **revista PEC**, v. 2, n. 1, p. 37-42, 2002.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática.** 2012.

SALVADO, C. D.; DE MATTOS GRISI, R. **Teorema Fundamental da Álgebra: Ferramentas para Demonstrar para Alunos do Ensino Médio.** Tese de Doutorado. Dissertação (Trabalho de Graduação (TCC)) - IMPA, 2016. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/TCC_Claudio_Salvado.pdf>. Acesso em: 15/10/2023.

SANTOS, L. S. Dos et al.. **O uso do material dourado como recurso no ensino de matemática: adição e subtração em foco.** Anais IX EPBEM... Campina Grande: Realize Editora, 2016. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/26496>. Acesso em: 25/05/2023.

ANEXOS

Atividade 1: Atividade diagnostica que foi aplicada antes da aula sobre resolução de equações de segundo grau utilizando o material dourado.

– O que é uma equação de segundo grau?

a) uma equação com um único termo

b) uma equação que contém duas incógnitas

c) uma equação em que a maior potência da incógnita é 2

d) uma equação com dois termos positivos

– Qual é a forma geral de uma equação algébrica de segundo grau?

a) $ax + b = 0$, com a e b reais

b) $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais

c) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com a, b, c e d reais

d) $x^2 + b = 0$, com b real

– Resolva as seguintes equações utilizando a fórmula de Bhaskara.

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

b) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

c) $x^2 - 6x - 16 = 0$

– É possível resolver $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ utilizando a fórmula de Bhaskara? Se sim, como você resolveria? Caso não seja possível justifique sua resposta.

– Saberia resolver a seguinte equação: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$? Se sim, resolva utilizando o método de resolução que você conhece.

Atividade 2: Atividade diagnostica que foi aplicada depois da aula sobre resolução de equações de segundo grau utilizando o material dourado.

– O que é uma equação de segundo grau?

a) uma equação com um único termo

b) uma equação que contém duas incógnitas

c) uma equação em que a maior potência da incógnita é 2

d) uma equação com dois termos positivos

– Qual é a forma geral de uma equação algébrica de segundo grau?

a) $ax + b = 0$, com a e b reais

b) $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais

c) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com a, b, c e d reais

d) $x^2 + b = 0$, com b real

– Resolva as seguintes equações utilizando o método ensinado através do material dourado. Para expor sua resolução utilize desenho geométrico.

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

b) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

c) $x^2 - 6x - 16 = 0$

– É possível resolver $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8} = 0$ utilizando o material dourado? Justifique sua resposta.

– Saberia resolver a seguinte equação: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ utilizando material dourado? Se sim, utilize desenho geométrico para expor sua resolução.

É necessário ressaltar que, devido ao tempo limitado disponível para a condução da aula, não foi viável realizar a aplicação das equações de terceiro grau.