UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LUCAS NOVO DA SILVA

COHOMOLOGIA DE FEIXES

SÃO CARLOS – SP
2024

LUCAS NOVO DA SILVA

COHOMOLOGIA DE FEIXES

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino

SÃO CARLOS – SP
2024

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo a apresentação e estudo da Cohomologia de Feixes, uma teoria usada para medir a obstrução de se transformar soluções de problemas locais em soluções de problemas globais. Para esse fim, discutimos definições e resultados básicos da teoria das categorias, que nos possibilitam um estudo organizado da teoria dos (pré-)feixes e da álgebra homológica, incluindo categorias abelianas, que serão essenciais para o nosso objetivo. Também, definiremos a Cohomologia de Čech, que nos ajuda a calcular a Cohomologia de Feixes em espaços "bem comportados".

Palavras-chave: Cohomologia de Feixes. Cohomologia de Čech. Feixes. Álgebra Homológica. Categorias.

ABSTRACT

This work aims to present and study Sheaf Cohomology, which is a theory used measure the obstruction of solving a problem globally when it can be solved locally. To this end, we discuss basic definitions and results from category theory, which enable us to conduct an organized study of (pre)sheaf theory and homological algebra, including abelian categories, that will be essential for our objective. We will also define the Čech Cohomology, which helps us calculate the Sheaf Cohomology in "well-behaved" spaces.

Keywords: Sheaf Cohomology. Čech Cohomology. Sheaves. Homológical Álgebra. Categories.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma Teoria Cohomológica, de modo intuitivo, pode ser pensada em uma "medida" para espaços topológicos abstratos que não possui uma forma concreta de se medir (como uma "medida" nesses espaço é uma construção mais complexa o resultado da "medida" não é um número, mas uma estrutura algébrica). Em específico, a Cohomologia de Feixes mede a obstrução de se transformar soluções de problemas locais em soluções de problemas globais. Esse problema pode ser capturado na seguinte linguagem: dada uma sequência exata de feixes $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$, a sequência das seções globais é exata a esquerda (em geral não é exata), isto é, somente a sequência $0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{G}) \to \Gamma(\mathcal{H})$ é exata. Para se medir a "distância" à exatidão dessa sequência, queremos encontrar uma maneira canônica de continuar essa sequência para a direta de modo exato. A teoria dos funtores derivados nos permite encontrar de modo único essa sequência exata.

Para esse objetivo, primeiramente faremos uma introdução à Teoria de Categorias, que será a linguagem utilizada no trabalho inteiro. Embora não seja essencial para os tópicos que vamos cobrir, a linguagem das categorias, e principalmente dos funtores e transformações naturais, vai nos permitir abordar os tópicos de maneira muito mais organizada e simples. Dessa teoria, vamos discutir somente o básico, dando vários exemplos significativos; já que com posse de um bom entendimento desses conceitos, o restante do trabalho ficará bem mais claro.

Uma ferramenta que é necessária, mesmo pela própria natureza dessa teoria cohomológica, são os (pré-)feixes (que para a nossa analogia, serão as "réguas" do nosso espaço topológico no qual iremos utilizar a cohomologia "medir" em cima); de fato, eles nos darão os nossos "sistema de coeficientes". Discutiremos então os resultados e definições referentes aos (pré-)feixes que serão significativos para a construção do nosso objetivo principal, além de deixar claro o caráter local dos feixes. Vale notar também que, a teoria de (pré-)feixes é importante por si só, já que desempenha um papel central na Análise Complexa, Geometria Algébrica e em outras teorias da matemática.

A fim de simplificar nossas definições e dar um olhar mais geral para teoria de cohomologia, discutiremos também tópicos pertinentes da Álgebra Homológica. Dessa forma, a apresentação será feita de modo organizado e principalmente mostrará que essa é uma teoria que pode ser usada para extrair informações algébricas de qualquer espaço topológico. Como nosso objetivo é entender a Cohomologia de Feixes, não discutiremos tópicos específicos de topologia algébrica que originam as definições e conceitos que tratamos, essa abordagem foi escolhida com objetivo de simplificar a exposição; embora algumas ideias da Topologia Algébrica sejam importantes para um estudo mais aprofundado, não são necessárias para uma introdução ao assunto. Também, falaremos um pouco da Cohomologia de Čech, que, na prática, servirá para computarmos a Cohomologia de Feixes em espaços "bem comportados".

Depois, discutiremos sobre sobre as Categorias Abelianas, que visam generalizar as categorias dos grupos abelianos e dos R-módulos. Nesse novo ambiente, provaremos resultados importantes da Álgebra Homológica. Em seguida, a fim criar uma linguagem propícia para definirmos facilmente os funtores derivados, discutiremos também a noção de δ-funtores. Essa noção é extremamente útil para simplificar a teoria dos funtores Tor e Ext, que é absolutamente central em Álgebra Homológica; mas não vamos discutir essas ideias nesse trabalho. Enfim, com "terreno preparado" definiremos a Cohomologia de Feixes, provando também que ela está bem definida, e faremos um exemplo que deixará explícito a necessidade de termos estudado a Cohomologia de Čech para aplicarmos em exemplos práticos.

2 INSTRUMENTOS BÁSICOS DA TEORIA DE CATEGORIAS

Começamos com algumas definições básicas da Teoria de Categorias que serão utilizadas mais a frente no trabalho. Para uma discussão mais aprofundada, recomendamos (Lane, 1978).

2.1 CATEGORIAS

Definição 2.1. Uma *categoria* $\mathcal{C}$ consiste em:

- uma classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de *objetos*;
- para todo par $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, um conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ de *morfismos*; denotamos um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ por $f : X \to Y$;
- para toda tripla $X,Y,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ uma função, dita *composição*:

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z),$$

tais que:

(i) se $(X,Y) \neq (Z,W)$, então $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W) = \varnothing$;

(ii) a composição é associativa, isto é, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ quando os dois lados estão definidos;

(iii) para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, existe um *morfismo identidade* $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$, ou seja, um morfismo tal que $f \circ id_X = f$ e $id_X \circ g = g$, quando as composições estão bem definidas.

Exemplo 2.1. Segue alguns exemplos de categorias:

(i) Denotamos por Grp a categoria dos grupos, definida da seguinte maneira: Os objetos são os grupos, e os morfismos de G a H são os homomorfismos de grupos de G a H. E, naturalmente, a composição de dois morfismos coincide com a composição de funções.

(ii) Da mesma forma, temos a categoria Ab dos grupos abelianos. Essa categoria é definida análoga à anterior, porém os objetos são os grupos abelianos. Também, de forma mais geral, temos a categoria R-Mod dos módulos a esquerda sobre um anel R.

(iii) Fixando um corpo $\mathbb{K}$, temos a categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ dos espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Nessa categoria, os objetos são os espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, e os morfismos de V a W são as funções $\mathbb{K}$-lineares de V a W e a composição coincide com a composição de funções.

(iv) Denotamos por Sets a categoria dos conjuntos. Nessa categoria, os objetos são os conjuntos, e os morfismos de X a Y são funções de X a Y e a composição de dois morfismos é a composição de funções.

(v) Denotamos por Top a categoria dos espaços topológicos, definida da seguinte maneira. Os objetos são os espaços topológicos, os morfismos de X a Y são as funções contínuas de X a Y, e a composição coincide com a composição de funções.

(vi) Podemos definir a categoria das variedades topológicas/suaves/complexas da seguinte maneira. Os objetos são as variedades correspondentes; os morfismos de X a Y são as funções contínuas/suaves/holomorfas de X a Y e a composição de dois morfismos coincide com a composição de funções.

Esses exemplos nos mostram categorias bastante concretas, porém a definição nos dá uma grande flexibilidade. Segue alguns exemplos de categorias que podemos construir.

Exemplo 2.2. Seja $\mathcal{C}$ a categoria tal que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{X, Y, Z\}$ e os morfismos são

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) = \{\mathrm{id}_X\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y) = \{\mathrm{id}_Y\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Z) = \{\mathrm{id}_Z\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{*\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) = \{\#\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) = \{\star\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) = \varnothing & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y) = \varnothing & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) = \varnothing. \end{array}$$

A única composição não trivial é $\# \circ * = \star$.

Exemplo 2.3. Seja $\mathcal{D}$ a categoria tal que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{U, V\}$ e os morfismos são

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,U) = \{\mathrm{id}_U\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V,V) = \{\mathrm{id}_V\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,V) = \{*\} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(V,U) = \{\star\}. \end{array}$$

As únicas composições são $\star \circ * = \mathrm{id}_U$ e $* \circ \star = \mathrm{id}_V$.

Definição 2.2. Um morfismo $f : X \to Y$ é dito *isomorfismo* se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. Dois objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ são *isomorfos* se existe um isomorfismo entre eles, para isso usamos a notação $X \simeq Y$.

Exemplo 2.4. Nas categorias definidas no Exemplo 2.1 temos os isomorfismos: em Grp e Ab um isomorfismo é isomorfismo de grupos; na categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ um isomorfismo é uma função $\mathbb{K}$-linear inversível; na categoria Top um isomorfismo é um homeomorfismo; em Sets os isomorfismos são as bijeções. Já no Exemplo 2.2, os únicos isomorfismos são as identidades.

Definição 2.3. Uma categoria $\mathcal{C}'$ é dita *subcategoria* de $\mathcal{C}$ se:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}') \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todo $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$;
- para todos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y,Z)$, a composição $g \circ f$ em $\mathcal{C}'$ coincide com a em $\mathcal{C}$;
- para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, a identidade de X em $\mathcal{C}'$ coincide com a em $\mathcal{C}$.

A subcategoria $\mathcal{C}'$ é dita *cheia* se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ para todos $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$.

Exemplo 2.5. No Exemplo 2.1 Ab é uma subcategoria cheia de Grp.

Exemplo 2.6. Seja $\mathcal{C}$ a categoria do Exemplo 2.2 e $\mathcal{C}'$ a categoria formada pelos objetos X e Y e pelos morfismos id_X, id_Y e $*$ de $\mathcal{C}$. Por construção $\mathcal{C}'$ é uma subcategoria cheia de $\mathcal{C}$. Se considerássemos somente id_X e id_Y como morfismo, continuaria sendo uma subcategoria, porém não seria cheia.

Definição 2.4. Um objeto I em uma categoria $\mathcal{C}$ é dito *objeto inicial* se para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ o conjunto $\mathrm{Hom}(I,X)$ possui exatamente um elemento. De forma dual, um objeto F em $\mathcal{C}$ é dito *objeto final* se para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ o conjunto $\mathrm{Hom}(X,F)$ possui exatamente um elemento. Se o objeto é inicial e final, o chamamos de *objeto nulo.*

Exemplo 2.7. Segue alguns exemplos:

- Na categoria Sets, o vazio é elemento inicial e o conjunto com apenas um elemento é o final.
- Similarmente em Top, o espaço vazio é o objeto inicial e o espaço com um ponto é o objeto final.
- Em Ab o grupo trivial é o objeto nulo. Da mesma forma o R-módulo trivial é o objeto nulo de R-Mod.

2.2 FUNTORES E TRANSFORMAÇÕES NATURAIS

Definiremos agora uma noção que será central para o nosso trabalho, pois nos fornece uma ferramenta natural para estudarmos os pré-feixes e feixes, que serão definidos no próximo capítulo.

Definição 2.5. Um *funtor* $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre duas categorias é definido por:

- uma função $\mathcal{F} : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;
- para todos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, uma função

  $$\mathcal{F}_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y)),$$

  tais que para cada $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ vale

  (i) $\mathcal{F}_{X,Z}(g \circ f) = \mathcal{F}_{Y,Z}(g) \circ \mathcal{F}_{X,Y}(f)$;

  (ii) $\mathcal{F}_{X,X}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$.

  Denotaremos a função $\mathcal{F}_{X,Y}$ por $\mathcal{F}$ subentendendo X e Y.

Exemplo 2.8. Seja $\mathcal{F} : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Sets}$ o funtor que: leva um grupo, que é um objeto de Grp, ao seu conjunto subjacente, que é um objeto de Sets; leva um morfismo entre dois grupos ao mesmo morfismo, pensado como função entre conjuntos. É fácil verificar que se trata realmente de um funtor. Podemos construir um exemplo análogos a partir de qualquer estrutura algébrica. Funtores desse tipo são chamados *funtores esquecedores*, já que "esquecem" as estruturas adicionais.

Exemplo 2.9. Sejam $\mathcal{C}$ a categoria do Exemplo 2.2 e $\mathcal{D}$ a do exemplo 2.2. Fica definido um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ por $\mathcal{F}(X) := \mathcal{F}(Z) := U$, $\mathcal{F}(*) := *$, $\mathcal{F}(\#) := \star$, $\mathcal{F}(\star) := \mathrm{id}_U$.

Exemplo 2.10. Dado uma categoria $\mathcal{C}$, podemos definir o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$ que leva um objeto $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ e um morfismo $f : C \to D$ é levado na função que leva $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ em $f \circ \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D)$.

Toda categoria $\mathcal{C}$ possui um funtor identidade $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, definido como função identidade entre objetos e entre morfismos. Fica também definido para dois funtores $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, a composição $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : C \to \mathcal{E}$ de forma natural.

Definição 2.6. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A *categoria oposta* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ é definida da seguinte maneira:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- para todo $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, definimos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$;
- dados $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y, Z)$, ou seja, $f : Y \to X$ e $g : Z \to Y$ em $\mathcal{C}$, a composição $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Z)$ coincide com a composição $f \circ g : Z \to X$ em $\mathcal{C}$.

Definição 2.7. Um *funtor contravariante* de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ (equivalentemente, é um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$)

Exemplo 2.11. Seja $* : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ o funtor dualidade, que associa um objeto V ao dual V^* e a função linear $f : V \to W$ a função transposta

$$\begin{aligned} f^T : W^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f. \end{aligned}$$

É fácil de ver que se trata de um funtor contravariante de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ em si mesma.

Exemplo 2.12. Dado uma categoria $\mathcal{C}$, podemos definir o funtor contravariante (de modo análogo ao Exemplo 2.10) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$ que leva um um objeto $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ e um morfismo $f : C \to D$ (em $\mathcal{C}$) é levado na função que leva $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A)$ em $\alpha \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$.

Definição 2.8. Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são ditas *isomorfas* se existe dois funtores $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = Id_{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = Id_{\mathcal{D}}$.

Definição 2.9. Dados dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, uma *transformação natural*, ou *morfismo de funtores*, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é definido por um morfismo

$$\varphi(X) : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X)$$

para cada $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, de modo que o seguinte diagrama comute para todo morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & \mathcal{G}(X) \\ {\scriptstyle \mathcal{F}(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}(f)} \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & \mathcal{G}(Y) \end{array} . \tag{2.1}$$

Definição 2.10. Dados dois morfismos de funtores $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, sendo $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, definimos a *composição* entre φ e ψ por

$$(\psi \circ \psi)(X) : \psi(X) \circ \varphi(X)$$

para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Observamos que dadas duas categorias fixadas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, os funtores entre essas categorias se tornam objetos de uma categoria denotada por $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Neste caso, dois funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ são isomorfos se o são como objetos dessa categoria.

Exemplo 2.13. Tome o funtor $** : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, onde $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ é a categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, que associa um espaço vetorial V ao seu bidual V^{**} e uma função linear $f : V \to W$ a dupla transposta $f^{TT} : V^{**} \to W^{**}$. Considerando $Id_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}$ como o morfismo identidade de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, podemos definir o morfismo de funtores $\varphi : Id_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}} \to **$ tal que, para todo objeto V, $\varphi(V) : V \to V^{**}$ é definido por $v \mapsto \alpha_v$, onde $\alpha_v(\xi) := \xi(v)$ para todo $\xi \in V^*$. Considerando apenas os espaços finitos, esse morfismo de funtores se restringe a um isomorfismo (esse resultado segue da proposição abaixo). Vale observarmos também que não conseguiríamos esse isomorfismo no caso do funtor que leva cada espaço no seu dual, já que seria um funtor contravariante; nesse sentido, dizemos que o bidual é natural, mas o dual não.

Proposição 2.1. *Sejam $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores. Um morfismo de funtores $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um isomorfismo se, e somente se, para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, o morfismo $\varphi(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$.*

Definição 2.11. Um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito:

- *fiel* se, para todo $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, a função

  $$\mathcal{F}_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$$

  é injetora;

- *cheio* se, para todo $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathcal{F}_{X,Y}$ é sobrejetora;

- *plenamente fiel* se é fiel e cheio;

- é *essencialmente sobrejetor* se, para todo objeto $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, existe $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que $Y \simeq \mathcal{F}(X)$.

Exemplo 2.14. Seja $\mathcal{F} : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Sets}$ como no Exemplo 2.8. Este funtor não é injetor entre os objetos, pois o mesmo conjunto pode admitir várias estruturas de grupo; porém é fiel, pois um morfismo de grupos é um caso particular de funções entre conjuntos.

Exemplo 2.15. O mergulho de uma subcategoria cheia na categoria maior é um funtor cheio, mas em geral não é sobrejetor entre os objetos. Tome $\mathcal{F} : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Sets}$ novamente, como no Exemplo 2.8, esse funtor é sobrejetor entre os objetos, pois todo conjunto admite pelo menos uma estrutura de grupo, mas não é cheio, pois nem toda função entre os conjuntos subjacentes é um homomorfismo de grupos.

2.3 PRODUTO E COPRODUTO

Essa seção não será imediatamente necessária. Portanto, o leitor, se assim desejar, pode pular essa seção sem nenhuma perda; já que utilizaremos esses conceitos apenas quando abordarmos categorias abelianas.

Definição 2.12. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Um produto em $\mathcal{C}$ entre X e Y é uma tripla $(X \times Y, \pi_X, \pi_Y)$ tal que:

- $X \times Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to Y$ são morfismos;
- dados um objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e dois morfismos $f : Z \to X$ e $g : Z \to Y$, existe um único morfismo $(f, g) : Z \to X \times Y$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "(f,g)"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times Y \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\pi_Y"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Exemplo 2.16. Na categoria Sets, o produto cartesiano $X \times Y$, com as duas projeções naturais, é um produto entre X e Y. Na categoria Top, o produto cartesiano $X \times Y$, dotado da Topologia Produto, com as duas projeções naturais, é um produto entre X e Y. Na categoria $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$, a soma direta, junto com as projeções naturais, é um produto.

Proposição 2.2. *Se o produto de dois objetos existir um uma categoria, é único a menos de um isomorfismo único.*

Demonstração. Seja X e Y dois objetos em uma categoria, e (Z, p_1, p_2) e (W, q_1, q_2) dois produtos de X e Y. Pela definição, temos que valem os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\exists!(p_1,p_2)"] \arrow[drr, bend left, "p_1"] \arrow[ddr, bend right, "p_2"'] & & \\
& W \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "q_2"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dotted, "\exists!(q_1,q_2)"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Assim, temos que $q_1 \circ (p_1, p_2) = p_1$ e $p_1 \circ (q_1, q_2) = q_1$; logo $p_1 \circ (q_1, q_2) \circ (p_1, p_2) = p_1$. Da mesma forma, $p_2 \circ (q_1, q_2) \circ (p_1, p_2) = p_2$. Então, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "(q_1,q_2)\circ(p_1,p_2)"] \arrow[drr, bend left, "p_1"] \arrow[ddr, bend right, "p_2"'] & & \\
& Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

comuta. Mas, por definição, o morfismo $(q_1,q_2)\circ(p_1,p_2): Z \to Z$ é o único que comuta com as projeções, portanto, $(q_1,q_2)\circ(p_1,p_2) = \mathrm{id}_Z$. De forma análoga, temos que $(p_1,p_2)\circ(q_1,q_2) = \mathrm{id}_W$ e temos o isomorfismo. □

O coproduto é definido como o produto na categoria oposta, ou seja, é o dual do produto. Definimos explicitamente abaixo.

Definição 2.13. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Um coproduto em $\mathcal{C}$ entre X e Y é uma tripla $(X \sqcup Y, i_X, i_Y)$ tal que:

- $X \sqcup Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- $i_X : X \to X \sqcup Y$ e $i_Y : Y \to X \sqcup Y$ são morfismos;
- dados um objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e dois morfismos $f : X \to Z$ e $g : Y \to Z$, existe um único morfismo $f \sqcup g : X \sqcup Y \to Z$ que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z & & \\
& X \sqcup Y \arrow[ul, dashed, "f\sqcup g"'] & X \arrow[l, "i_X"'] \arrow[ull, bend right, "f"'] \\
& Y \arrow[u, "i_Y"'] \arrow[uul, bend left, "g"] &
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Exemplo 2.17. Na categoria Sets, o coproduto é a união disjunta juntamente com as inclusões. Na categoria Top, o coproduto é a união disjunta dos conjuntos subjacentes com a topologia da união disjunta, junto com as inclusões. No caso de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ o coproduto é a soma direta com inclusões.

Proposição 2.3. *Se o coproduto de dois objetos existir um uma categoria, é único a menos de um isomorfismo único.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 2.2 na categoria oposta. □

Enfim, terminamos essa seção observando que, da mesma forma que acabamos de definir produtos e coprodutos de dois objetos, podemos também definir um produto e coproduto de uma família de objetos e todas as propriedades provadas continuam valendo.

2.4 ADJUNÇÕES

Os funtores adjuntos são essenciais em teoria de categorias, eles nos dão uma forma única de entender construções universais (como produtos e coprodutos que vimos na seção passada). Nessa seção, não vamos estudar essas aplicações pois fogem do escopo do trabalho. No entanto, adjunções serão úteis quando definirmos exatidão de funtores em categorias abelianas (cf. Apêndice B) e objetos injetivos, nesse contexto as adjunções nos darão uma ferramenta poderosa para provarmos resultados importantes.

Definição 2.14. Um par de funtores $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ são *adjuntos* se, para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ e $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$, existe uma bijeção natural:

$$\tau_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B)).$$

A naturalidade da bijeção é entendida da seguinte maneira: existe um isomorfismo natural entre os funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(-), B) : \mathcal{A} \to \mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, R(B)) : \mathcal{A} \to \mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$; e entre os funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), -) : \mathcal{B} \to \mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(-)) : \mathcal{B} \to \mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$. De forma concreta, para todo $f : A \to A'$ em $\mathcal{A}$ e $g : B \to B'$ em $\mathcal{B}$ o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A'), B) \arrow[r, "Lf^*"] \arrow[d, "\tau_{A'B}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau_{AB}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B') \arrow[d, "\tau_{AB'}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', R(B)) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B)) \arrow[r, "Rg_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B'))
\end{tikzcd}.$$

Nesse caso, dizemos que L é *adjunto a esquerda* e R *adjunto a direita* desse par.

Exemplo 2.18. O funtor $F : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Grp}$ que leva um conjunto ao seu grupo livre é adjunto a esquerda do funtor esquecedor definido no Exemplo 2.8. O isomorfismo da adjunção é apenas uma reinterpretação da propriedade universal dos grupos livres.

Funtores que são adjuntos dos funtores esquecedores aparecem muito na matemática, geralmente vinculado a problemas de construção de objetos com a “menor estrutura” desejada dado um outro objeto. No exemplo anterior, dado um conjunto, o grupo livre associado a esse conjunto é o objeto com a “menor estrutura” de grupo sobre conjunto. Portanto o leitor, se desejar, pode gerar vários exemplos dessa forma (como o corpo de frações de um anel, abelinização de um grupo, completude de um espaço topológico, etc.). Mais a frente no trabalho, mais exemplos de funtores adjuntos aparecerão de forma natural.

3 PRÉ-FEIXES E FEIXES

Nessa seção, veremos definições e resultados fundamentais da teoria de pré-feixes e feixes. Recomendamos (Bredon, 1997) e (Godement, 1998) como as referências principais para essa seção.

3.1 PRÉ-FEIXES

Nesse trabalho, chamaremos um R-módulo à esquerda somente de R-módulo e denotamos sua categoria por R-Mod. Também, denotamos por Top_X^{op} a categoria onde os objetos são os conjuntos abertos de X e os morfismos são as inclusões. Vale notar que a teoria apresentada nesse capítulo pode facilmente ser feita mais geral considerando outras categorias, como a R-álgebras, ao invés de R-módulos.

Definição 3.1. Um *pré-feixe de R-módulo* em X é um funtor contravariante $\mathcal{P} : Top_X^{\mathrm{op}} \to$ R-Mod.

De forma concreta, essa definição nos diz que para todo aberto $U \subset X$, temos definido um R-módulo $\mathcal{P}(U)$. Se $V \subset U$, temos o morfismo $\mathcal{P}_{U,V} : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$, dito morfismo restrição, de modo que:

(i) $\mathcal{P}_{U,U}$ é a identidade de $\mathcal{P}(U)$.

(ii) $W \subset V \subset U$, então $\mathcal{P}_{U,W} = \mathcal{P}_{V,W} \circ \mathcal{P}_{U,V}$.

Daqui para frente, a fim de brevidade, chamaremos um pré-feixe de R-módulo apenas de pré-feixe. Um importante exemplo é o pré-feixe das funções contínuas, que discutimos abaixo.

Exemplo 3.1. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, para cada aberto U de um espaço topológico X definimos $\mathcal{P}(U) := C^0(U, \mathbb{R})$, que é o conjunto das funções contínuas de U a $\mathbb{R}$ dotado da estrutura de $\mathbb{R}$-módulo. Além disso, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{U,V} : \mathcal{P}(U) &\longrightarrow \mathcal{P}(V) \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{P}_{U,V}(\varphi) := \varphi|_V, \end{aligned}$$

sendo $\varphi \in \mathcal{P}(U)$ e $V \subset U$. Essas associações definem um pré-feixe, chamado pré-feixe de funções reais contínuas no espaço X.

Observamos que, no exemplo anterior, a hipótese da continuidade das funções não foi necessária. Sendo assim, podemos definir o pré-feixe de todas as funções que saem de um espaço topológico X e chegam em um R-módulo qualquer M, da mesma forma que no exemplo anterior. Denotamos esse pré-feixe por $\underline{M}$.

Exemplo 3.2. Seja M um R-módulo fixado qualquer e X um espaço topológico. Definimos então $\mathcal{P}(U) := M$ para cada aberto U de X. Ademais, os morfismos restrição $\mathcal{P}_{U,V}$ são iguais à identidade. Chamamos esse pré-feixe de pré-feixe constante e denotamos por M.

Exemplo 3.3. Sejam X uma variedade suave e $U \subset X$ um aberto. Podemos definir o pré-feixe $\mathcal{P}$ que manda U em $\mathcal{P}(U) := \Omega^p(U)$, o espaço vetorial das p-formas diferenciais ou complexas em U; e manda $\omega \in \Omega^p(U)$ em $\mathcal{P}_{UV}(\omega) := \omega_V$, sendo $\omega \in \mathcal{P}(U)$. Da mesma forma, podemos definir $\mathcal{P}(U) := \Omega^p_{cl}(U)$ ou $\mathcal{P}(U) := \Omega^p_{ex}(U)$, das formas respectivamente fechadas e exatas. Ou ainda, podemos definir $\mathcal{P}(U) := H^p_{dR} = \Omega^p_{cl}(U)/\Omega^p_{ex}(U)$, chamado pré-feixe da cohomologia de de Rham.

Definição 3.2. Um elemento $s \in \mathcal{P}(U)$ é dito *seção local*, ou simplesmente *seção*, de $\mathcal{P}$ em U. Se $U = X$, a seção local s também é dita também *seção global*.

Sejam $s \in \mathcal{P}(U)$ e $V \subset U$, usaremos a notação $s|_V := \mathcal{P}_{U,V}(s)$, pensando na restrição de uma função como exemplo padrão.

Definição 3.3. Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{Q} : Top_X^{\mathrm{op}} \to$ R-Mod dois pré-feixes. Um *morfismo de pré-feixes* de $\mathcal{P}$ ao $\mathcal{Q}$ é um morfismo de funtores $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$.

De forma concreta, um morfismo de pré-feixes $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ é definido da seguinte maneira: para todo $U \subset X$ aberto, é dado um morfismo $\rho(U) : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{Q}(U)$ em R-Mod, de modo que, se $V \subset U$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(U) \arrow[r, "\rho(U)"] \arrow[d, "\mathcal{P}_{U,V}"'] & \mathcal{Q}(U) \arrow[d, "\mathcal{Q}_{U,V}"] \\ \mathcal{P}(V) \arrow[r, "\varphi(Y)"] & \mathcal{Q}(V) \end{tikzcd} . \tag{3.1}$$

Observamos que com essa definição podemos definir a categoria $\mathrm{PreFeixes}_X$ dos pré-feixes de R-módulos em um espaço topológico X.

Exemplo 3.4. Seja $\varphi : M \to N$ um morfismo de R-módulos. Com a notação já estabelecida, fica definido o morfismo de pré-feixes $\rho_\varphi : \underline{M} \to \underline{N}$, tal que

$$\begin{aligned} (\rho_\varphi)_U : \underline{M}(U) &\longrightarrow \underline{N}(U) \\ f &\longmapsto (\rho_\varphi)_U(f) := \varphi \circ f. \end{aligned}$$

De fato, ρ_φ é um morfismo de pré-feixes, já que $(\rho_\varphi)_U(f)|_V = (\varphi \circ f)|_V = \varphi \circ f|_V = (\rho_\varphi)_V(f|_V)$.

Exemplo 3.5. Seja $\varphi : M \to N$ um morfismo de R-módulos. Definimos o morfismo de pré-feixes constantes $\rho_\varphi : M \to N$, sendo $(\rho_\varphi)_U := \varphi$ para todo aberto não vazio $U \subset X$. De fato, é um morfismo de pré-feixes, pois vale $(\rho_\varphi)_U(s)|_V = \varphi(s)|_V = \varphi(s|_V) = (\rho_\varphi)_V(s|_V)$.

3.2 FEIXES E PROPRIEDADES LOCAIS

Definição 3.4. Um pré-feixe de R-módulo $\mathcal{F}$ em um espaço topológico X é dito *feixe de R-módulo* em X se valem as seguintes condições para qualquer conjunto aberto U de X e qualquer cobertura aberta $\{U_i\}$ de U:

(i) Se existem duas seções $s, \overline{s} \in \mathcal{F}(U)$ tais que $s|_{U_i} = \overline{s}|_{U_i}$ para todo U_i, então $s = \overline{s}$;

(ii) Dadas seções $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo i, j, existe uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo i.

A propriedade (ii) da definição anterior nos diz que existe, no mínimo, uma seção que representa colagem de seções locais, já a propriedade (i) nos diz que existe no máximo uma dessas colagens. Intuitivamente, podemos dizer que feixes são pré-feixes determinados por condições locais, noção que logo ficará mais precisa. Da mesma forma que nos pré-feixes, diremos apenas feixe ao nos referirmos aos feixes de R-módulo.

Exemplo 3.6. O pré-feixe $\underline{\mathbb{R}}$, pensando agora somente nas funções contínuas, sobre um espaço topológico X é um feixe. De fato, por se tratar de funções e restrições de funções a unicidade da colagem é clara, a existência é garantida pelo fato que a continuidade é um fenômeno local.

Exemplo 3.7. O pré-feixe constante M definido em um espaço topológico X não é um feixe em geral. De fato, seja $U = U' \cup U''$ uma cisão não trivial de U, ou seja, U'' e U' são dois abertos tais que $U'' \cap U' = \emptyset$ e ambos não vazios. Tome $\alpha, \beta \in M$ dois elementos distintos de M, consideramos $\alpha \in M(U')$ e $\beta \in M(U'')$. Quando consideramos a cobertura $\{U', U''\}$ de U, percebemos que α e β coincidem trivialmente em todas as interseções, porém é impossível encontrar uma seção em $M(U)$ que restrinja a α e β ao mesmo tempo. Segue que M não é um feixe, pois falha na existência da colagem, isto é, na propriedade (ii).

Exemplo 3.8. Seja M um R-módulo e X um espaço topológico. Podemos associar X ao objeto M e cada aberto $U \subsetneq X$ ao objeto trivial $\{0\}$. Ou seja, definimos $\mathcal{P}(U) := \{0\}$ para todo aberto $U \subsetneq X$ e $\mathcal{P}(X) := M$. Assim, os morfismos restrição $\mathcal{P}_{U,V}$ são os morfismos nulos. Podemos facilmente verificar que temos um pré-feixe, porém não é em geral um feixe. De fato, se tomarmos quaisquer seções $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X)$ elas coincidem em quaisquer restrições, porém em geral $\alpha \neq \beta$, ou seja, não vale a unicidade das seções, que é a condição (i).

Exemplo 3.9. Consideremos o pré-feixe $\mathcal{P}$ das funções limitadas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathcal{P}(U) := \{f : U \to \mathbb{R} : f \text{ é limitada}\}$ para todo aberto $U \subset \mathbb{R}$ tal que os morfismos de restrição são as restrições de funções. Podemos facilmente verificar que $\mathcal{P}$ é um pré-feixe, porém não é um feixe. De fato, se considerarmos uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de $\mathbb{R}$ tal que cada U_i é limitado, e tomarmos a função identidade $f(x) = x$ em $\mathbb{R}$ temos que $f|_{U_i} \in \mathcal{P}(U_i)$ para todo U_i, porém $f \notin \mathcal{P}(\mathbb{R})$, ou seja, não temos a existência da colagem.

Definição 3.5. Sejam $f : Y \to X$ uma função contínua e $\mathcal{P} : Top_Y^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ um pré-feixe. O *push-forward* $f_*\mathcal{P} : Top_X^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ é definido por $(f_*\mathcal{P})(U) := \mathcal{P}(f^{-1}U)$ e $(f_*\mathcal{P})_{VU} := \mathcal{P}_{f^{-1}Vf^{-1}U}$.

Discutiremos agora a noção de localidade. Um exemplo dessa noção é o seguinte: para calcular o diferencial de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ em um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ devemos conhecer o comportamento local dessa função, já que não é suficiente conhecer o valor $f(a)$ e não é necessário conhecer o comportamento de f em uma vizinhança fixa U de a. Esse conceito pode ser formalizado utilizando a noção de germe.

Definição 3.6. Seja $\mathcal{P}$ um pré-feixe sobre um espaço topológico X, fixamos um ponto $a \in X$ e denotamos por $\tilde{\mathcal{P}}_a$ o conjunto dos pares (U, s), onde U é uma vizinhança aberta de a e $s \in \mathcal{P}(U)$. Induzimos a seguinte relação de equivalência em $\tilde{\mathcal{P}}_a$:

$$(U, s) \sim (V, t) \iff \exists W \subset U \cap V \text{ aberto} : a \in W \text{ e } s|_W = t|_W.$$

O *talo* de $\mathcal{P}$ em $a \in X$ é o quociente $\mathcal{P}_a := \tilde{\mathcal{P}}_a / \sim$. Um *germe* de $\mathcal{P}$ em a é um elemento do talo $\mathcal{P}_a$, ou seja, uma classe de equivalência, que denotamos por $[(U, s)]$ (quando for necessário especificar o ponto a, escrevemos $[(U, s)]_a$).

Observamos que $\mathcal{P}_a$ se torna naturalmente um R-módulo. Dado $a \in X$ e um morfismo de pré-feixes $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, fica definido o seguinte morfismo entre talos:

$$\begin{aligned} \rho_a : \mathcal{P}_a &\longrightarrow \mathcal{Q}_a \\ [(U, s)]_a &\longmapsto \rho_a([(U, s)]_a) := [(U, \rho_U(s))]. \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que está bem definido que e se trata de um morfismo.

Exemplo 3.10. No pré-feixe constante M sobre um espaço topológico X, como as restrições são as identidades, segue que todo talo é o próprio objeto M.

Exemplo 3.11. Sejam X um espaço topológico, $p \in X$ um ponto qualquer e M um R-módulo fixado. Definimos o feixe p_*M por

$$p_*M(U) := \begin{cases} M & \text{se } p \in U \\ \{0\} & \text{se } p \notin U \end{cases},$$

e com os morfismos de restrição definidos de maneira natural. Podemos facilmente verificar que se trata de um feixe, é comumente chamado de *feixe arranha-céu*. Podemos ver também que o talo de p_*M é dado por

$$(p_*M)_a = \begin{cases} M & \text{se } a \in \overline{\{p\}} \\ \{0\} & \text{se } a \notin \overline{\{p\}} \end{cases}.$$

Exemplo 3.12. Se considerarmos o feixe $\underline{\mathbb{R}}$, mas agora apenas com funções suaves, fica bem definida a derivada para cada germe.

A unicidade da colagem que vale nos feixes nos permite provar a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Seja $\mathcal{F}$ um feixe e duas seções $s,t \in \mathcal{F}(U)$. Se $[(U,s)]_a = [(U,t)]_a$ para todo $a \in X$, então $s = t$.*

Demonstração. Se $[(U,s)]_a = [(U,t)]_a$ para todo $a \in U$, então existe uma vizinhança aberta $V_a \subset U$ tal que $s|_{V_a} = t|_{V_a}$ para cada a. Assim, existe uma cobertura aberta $\{V_a\}_{a\in U}$ de U, mas pela definição de feixe, existe uma única colagem em U das seções $\{s|_{V_a}\}_{a\in U}$ e $\{t|_{V_a}\}_{a\in U}$, portanto $s = t$. □

Dado $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes, dizemos que $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes se é um morfismo de pré-feixes. Fixando um espaço topológico X, fica então definida a categoria Feixes_X.

Além disso, dizemos que um morfismo de pré-feixes $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ em X é injetor/sobrejetor/bijetor se $\rho_U : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{Q}(U)$ é injetor/sobrejetor/bijetor para todo $U \subset X$ aberto. Vale a observação que, embora a injetividade de morfismo de feixes seja a mesma que dos pré-feixes, a sobrejetividade de morfismos de feixes é uma noção mais fraca, intuitivamente um morfismo de feixes é sobrejetor se é localmente sobrejetor. Esse fenômeno será exemplificado mais a frente. É importante notar que dado dois pré-feixes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ e um morfismo $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, podemos definir:[1]

- $(\ker^P \rho)(U) := \ker(\rho_U)$;
- $(\operatorname{im}^P \rho)(U) := \operatorname{im}(\rho_U)$;
- $(\operatorname{coker}^P \rho)(U) := \operatorname{coker}(\rho_U)$;
- $(\operatorname{coim}^P \rho)(U) := \operatorname{coim}(\rho_U)$.

Onde o superscrito "P" faz referência à categoria dos pré-feixes, já que estes são objetos dessa categoria.

Vale notar também que dado um pré-feixe, podemos encontrar a feixificação de modo construtivo. Não faremos a construção aqui, já que o que nos importa é a validade da seguinte propriedade universal.

[1] Lembrando que, em R-Mod, dado um morfismo $f : M \to N$, $\operatorname{coker} f := N/\operatorname{im}(f)$ e $\operatorname{coim} := M/\ker f$.

Proposição 3.2. *Seja $\mathcal{P}$ um pré-feixe em X com valores em $\mathcal{C}$. Para todo morfismo de pré-feixes $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$, sendo $\mathcal{F}$ um feixe, existe um único morfismo de feixes $\tilde{\rho} : \mathcal{P}^\natural \to \mathcal{F}$ e um morfismo de pré-feixes $\xi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^\natural$ tal que $\rho = \tilde{\rho} \circ \xi$, ou seja, tal que o diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\xi"'] & \mathcal{F} \\ \mathcal{P}^\natural \arrow[ur, "\tilde{\rho}"'] & \end{tikzcd} . \tag{3.2}$$

Exemplo 3.13. Seja X um espaço localmente contrátil. Defina $\mathrm{Exp} : \underline{\mathbb{R}} \to \underline{U(1)}$, entendendo $U(1)$ como o grupo multiplicativo dos elementos de $\mathbb{C}$ de módulo 1, tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_U : \underline{\mathbb{R}}(V) &\longrightarrow \underline{U(1)}(V) \\ \varphi &\longmapsto \exp \circ \varphi, \end{aligned}$$

para todo $V \subset X$ aberto, onde $\exp(x) = e^{2\pi i x}$. A imagem de Exp_V é formada por funções de V a $U(1)$ que admitem logaritmo em V. Observamos que, se tomarmos um aberto $V \subset X$ não simplesmente conexo e $\{V_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de V formada por abertos contráteis; se $\varphi : V \to U(1)$ é uma função que não admite um logaritmo em V. Toda restrição φ_{V_i} admite logaritmo e, portanto, pertence a imagem de Exp. Todavia, a única colagem possível é φ mesma, que não pertence à imagem. Ou seja, a imagem de Exp não é um feixe.

Tomando cuidado com o fenômeno do exemplo anterior, da mesma forma que os pré-feixes, dados dois feixes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ e um morfismo $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ podemos definir:

- $(\ker^F \rho) := \ker^P \rho$;
- $(\mathrm{im}^F \rho) := (\mathrm{im}^P \rho)^\natural$;
- $(\mathrm{coker}^F \rho) := (\mathrm{coker}^P \rho)^\natural$;
- $(\mathrm{coim}^F \rho) := (\mathrm{coim}^P \rho)^\natural$.

Observamos que não é necessário feixificar o núcleo, pois esse já é um feixe.

Proposição 3.3. *Seja $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ um morfismo de pré-feixes sobre X.*

(i) Se o morfismo $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ for injetor, então $\rho_a : \mathcal{P}_a \to \mathcal{Q}_a$ é injetor para todo $a \in X$;

(ii) Se o morfismo $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ for sobrejetor, então $\rho_a : \mathcal{P}_a \to \mathcal{Q}_a$ é sobrejetor para todo $a \in X$;

(iii) Se o morfismo $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ for bijetor, então $\rho_a : \mathcal{P}_a \to \mathcal{Q}_a$ é bijetor para todo $a \in X$.

Demonstração. (i) Suponha que $\rho_a[(U,s)] = \rho_a[(V,t)]$ para todo $a \in X$, ou seja, $[(U,\rho_U(s))] = [(V,\rho_V(t))]$. Assim, existe $W \subset U \cap V$ tal que $\rho_U(s)|_W = \rho_V(t)|_W$, mas sabemos que os morfismos comutam com as restrições, segue que $\rho_W(s|_W) = \rho_W(t|_W)$. Como ρ é injetor, segue que $s|_W = t|_W$, que implica que $[(U,s)] = [(V,t)]$.

(ii) Segue direto da definição de ρ_a, e (iii) segue imediatamente das proposições anteriores.

□

Os seguintes exemplos mostram que não vale a volta de nenhum dos resultados, utilizando o que foi definido no Exemplo 3.3.

Exemplo 3.14. Seja $\mathcal{P} = H^p_{dR}$ o pré-feixe da cohomologia de Rham de grau p. O morfismo nulo $H^p_{dR} \to 0$ é injetor nos talos, pois induz $0 \to 0$ para todo $a \in X$, mas não é injetor.

Exemplo 3.15. Sejam $\mathcal{P} = \Omega^p_{ex}$ e $\mathcal{Q} = \Omega^p_{ex}$ os pré-feixes das formas respectivamente exatas e fechadas de grau p. O mergulho $\Omega^p_{ex} \hookrightarrow \Omega^p_{cl}$ é sobrejetor nos talos, dado que toda forma fechada é localmente exata, mas não é sobrejetor.

Exemplo 3.16. Nos dois exemplos anteriores, o morfismo induzido nos talos é bijetor, mas o morfismo não é bijetor.

Exemplo 3.17. O morfismo $Exp : \mathbb{R} \to \underline{U(1)}$, considerado no Exemplo 3.13, não é sobrejetor na categoria dos PreFeixes$_{X,\mathcal{C}}$, pois o mesmo exemplo mostra que a imagem não pode ser $\underline{U(1)}$ todo. Porém, este morfismo é sobrejetor na categoria $Feixes_{X,\mathcal{C}}$, pois a feixificação da imagem são as funções que admitem localmente um logaritmo, isto é, qualquer função com valor em $U(1)$.

Já para os feixes, temos uma relação mais forte com os talos. Na verdade, se considerarmos morfismos de feixes, a volta de todos os itens da proposição anterior também é verdadeira; isso confirma o princípio de localidade dos feixes, que observamos quando os definimos. A fim de simplicidade, vamos enunciar essa propriedade já como definição.

Definição 3.7. Seja $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes sobre X.

(i) O morfismo de feixes $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é injetor se, e somente se, $\rho_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{G}_a$ é injetor para todo $a \in X$;

(ii) O morfismo de feixes $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é sobrejetor se, e somente se, $\rho_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{G}_a$ é sobrejetor para todo $a \in X$;

(iii) O morfismo de feixes $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é bijetor se, e somente se, $\rho_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{G}_a$ é bijetor para todo $a \in X$;

4 ÁLGEBRA HOMOLÓGICA EM R-MOD

Nessa seção, discutiremos definições e resultados básicos da teoria de Álgebra Homológica em R-Mod. Recomendamos (Bruzzo, 2004) e (Godement, 1998) para essa seção; para um complemento recomendamos (Weibel, 1994), (Hilton; Stammbach, 1997) e (Rotman, 1979). Observamos que nesse capítulo vamos interagir somente com as cocadeias e não com cadeias, sua noção dual; mesmo sendo muito importante na álgebra homológica e topologia algébrica, não iremos utilizá-las nesse trabalho. A partir de agora, chamaremos um R-módulo a esquerda somente de R-módulo.

4.1 COMPLEXOS DE COCADEIAS E COHOMOLOGIA

Antes de começarmos nosso estudo sobre as teorias cohomológicas de fato, vamos primeiramente fazer uma breve introdução à álgebra homológica. As definições e conceitos desse capítulo serão essenciais para o nosso objetivo.

Definição 4.1. Um *complexo de cocadeias* $(A^\bullet, \delta^\bullet)$ é uma sequência de morfismos de R-módulos da seguinte forma:

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{i-2}} A^{i-1} \xrightarrow{\delta^{i-1}} A^i \xrightarrow{\delta^i} A^{i+1} \xrightarrow{\delta^{i+1}} \cdots, \tag{4.1}$$

tal que

$$\delta^{i+1} \circ \delta^i = 0$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$. Os morfismos δ^i são chamados *morfismos de cobordo* e os elementos do R-módulo A^i são chamados *cocadeias de grau* i.

Equivalentemente a condição $\delta^i \circ \delta^{i+1} = 0$ pode ser expressa como:

$$\operatorname{im}(\delta^i) \subset \ker(\delta^{i+1}).$$

Essa condição nos permite a seguinte definição.

Definição 4.2. Os *grupos de cohomologia* do complexo de cocadeias (4.1) são os seguintes R-módulos:

$$H^i(A^\bullet) := \frac{\ker(\delta^i)}{\operatorname{im}(\delta^{i-1})}.$$

Utilizaremos a notação: $Z^i(A^\bullet) := \ker(\delta^i)$ e $B^i(A^\bullet) := \operatorname{im}(\delta^{i-1})$. Chamamos os elementos de $Z^i(A^\bullet)$ de *ciclos de grau* i, os do R-módulo $B^i(A^\bullet)$ de *bordos de grau* i e os do R-módulos $H^i(A^\bullet)$ de *classes de cohomologia de grau i*. E assim,

$$H^i(A^\bullet) := \frac{Z^i(A^\bullet)}{B^i(A^\bullet)}.$$

Uma classe de cohomologia $[a] \in H^i(A^\bullet)$ é representada por um ciclo a, ou seja, uma cocadeia $a \in A^i$, tal que $\delta^i a = 0$, sendo $[a] = [a']$ se, e somente se, existe uma cocadeia $b \in A^{i-1}$ tal que $a' = a + \delta^i(b)$.

Definição 4.3. Dados dois complexos de cocadeias $(A^\bullet, \delta_A^\bullet)$ e $(B^\bullet, \delta_B^\bullet)$, um *morfismo de complexos de cocadeias* $\varphi^\bullet : (A^\bullet, \delta_A^\bullet) \to (B^\bullet, \delta_B^\bullet)$ é uma sequência de morfismos de R-módulos $\varphi^i : A^i \to B^i$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_A^{i-2}"] & A^{i-1} \arrow[r, "\delta_A^{i-1}"] \arrow[d, "\varphi^{i-1}"] & A^i \arrow[r, "\delta_A^i"] \arrow[d, "\varphi^i"] & A^{i+1} \arrow[r, "\delta_A^{i+1}"] \arrow[d, "\varphi^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_B^{i-2}"] & B^{i-1} \arrow[r, "\delta_B^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "\delta_B^i"] & B^{i+1} \arrow[r, "\delta_B^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Fica então definida a categoria Cocad(R-mod), onde os objetos são os complexos de cocadeias de R-módulos e os morfismos são os morfismos de complexos de cocadeias.

Dado $\varphi^\bullet : (A^\bullet, \delta_A^\bullet) \to (B^\bullet, \delta_B^\bullet)$ fica definido o morfismo de R-módulos $H^i(\varphi)$, que denotamos por $\varphi^{*,i}$, da seguinte maneira natural:

$$\begin{aligned} \varphi^{*,i} : H^i(A^\bullet) &\longrightarrow H^i(B^\bullet) \\ [a] &\longmapsto [\varphi^i(a)]. \end{aligned}$$

Que é um morfismo bem definido. Com efeito, devemos mostrar que $\varphi^{*,i}$ manda ciclos em ciclos e bordos em bordos; da comutatividade do diagrama (4.2) segue que:

(i) se $a \in Z^i(A^\bullet)$, então $\delta_B^i(\varphi^i(a)) = \varphi^{i+1}(\delta_A^i(a)) = \varphi^{i+1}(0) = 0$; e portanto $\varphi^i(a) \in Z^i(B^\bullet)$.

(ii) se $a \in B^i(A^\bullet)$, existe $a' \in A^{i-1}$ tal que $\delta^{i-1}(a') = a$. Assim, segue que $\varphi^i(a) = \varphi^i(\delta^{i-1}(a')) = \delta_B^{i-1}(\varphi^{i-1}(a'))$, portanto $\varphi^i(a) \in B^i(B^\bullet)$.

Dessa forma, obtemos uma sequência de funtores

$$H^i : \text{Cocad(R-mod)} \longrightarrow \text{R-Mod}.$$

Também, podemos considerar todos os graus ao mesmo tempo. Para isso, definimos a categoria Seq(R-mod) onde os objetos são sequências de R-módulos e os morfismos são sequências de morfismos de R-módulos. Observamos que Seq(R-mod) é uma categoria cheia de Cocad(R-mod), pois uma sequência de R-módulos pode ser pensada como um complexo de cocadeias com morfismos de cobordo todos nulos. Com isso, os R-módulos de homologia definem o seguinte funtor:

$$H^\bullet : \text{Cocad(R-mod)} \longrightarrow \text{Seq(R-mod)}\,. \tag{4.3}$$

Definição 4.4. Um morfismo $\varphi^\bullet : (A^\bullet, \delta_A^\bullet) \to (B^\bullet, \delta_B^\bullet)$ de complexos de cocadeias é dito *homologismo*[2] se as funções $\varphi^{*,i} : H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$ são todos isomorfismos.

4.2 SEQUÊNCIAS EXATAS

Definição 4.5. Uma sequência de morfismos de R-módulos da forma

$$\cdots \xrightarrow{\varphi^{i-2}} A^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} A^i \xrightarrow{\varphi^i} A^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \cdots \tag{4.4}$$

é dita *exata* se $\ker(\varphi^i) = \operatorname{im}(\varphi^{i-1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Caso a família de índices for $\mathbb{Z}$, uma sequência exata é dita também sequência exata longa.

Notemos que um complexo de cocadeias $A^\bullet$ é exato se, e somente se, o morfismo de complexos de cocadeias $0 \to A^\bullet$ é um homologismo. Uma sequência exata longa é um caso particular de complexo de cocadeias, no qual os grupos de cohomologia são todos nulos. Isso nos mostra que os grupos de cohomologia medem a obstrução à exatidão.

Também, fica bem definido a categoria SeqExL(R-mod), onde os objetos são sequências exatas longas de R-módulos e os morfismos são morfismos de sequências exatas longas (que é um morfismo de complexo de cocadeias restrito à sequências exatas longas). Dessa forma definida, SeqExL(R-mod) é uma subcategoria cheia de Cocad(R-mod).

Podemos também reduzir o conjunto de índices. Nesse caso, chamamos a sequência exata de:

(i) *finita* se é do tipo:

$$A^0 \xrightarrow{\varphi^0} A^1 \xrightarrow{\varphi^1} \cdots \xrightarrow{\varphi^{n-2}} A^{n-1} \xrightarrow{\varphi^{n-1}} A^n; \tag{4.5}$$

(ii) *infinita a direita* se é do tipo:

$$A^0 \xrightarrow{\varphi^0} A^1 \xrightarrow{\varphi^1} A^2 \xrightarrow{\varphi^2} \cdots; \tag{4.6}$$

(iii) *infinita a esquerda* se é do tipo:

$$\cdots \xrightarrow{\varphi^{-3}} A^{-2} \xrightarrow{\varphi^{-2}} A^{-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} A^0. \tag{4.7}$$

[2] Também chamado de quase-isomorfismo.

Como já definimos antes, se a sequência for infinita dos dois lados, dizemos que é uma sequência exata longa. Notamos que em todos os casos $\ker(\varphi^i) = \operatorname{im}(\varphi^{i-1})$, caso contrário não a chamamos de exata.

Definição 4.6. Uma *sequência exata curta* é uma sequência exata finita da forma:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0. \tag{4.8}$$

Uma sequência exata curta é um caso particular de uma sequência exata longa, basta estendermos os dois lados com R-módulos triviais e morfismos nulos. Assim, um morfismo de sequência exata longa pode ser adaptada para as curtas, definindo a categoria SeqExC(R-mod). Trata-se de uma subcategoria cheia de SeqExL(R-mod).

Observamos que uma sequência exata curta nos dá as seguintes informações:

(i) o morfismo i é injetor, já que o kernel de i é a imagem do morfismo nulo.

(ii) o morfismo π é sobrejetor, já que a imagem de π é o kernel do morfismo nulo.

(iii) o morfismo π induz um isomorfismo $C \simeq \dfrac{B}{i(A)}$. De fato, sendo $\operatorname{im}\pi \simeq \dfrac{B}{\ker\pi}$, o resultado segue do fato que $\ker\pi = \operatorname{im} i$ e $\operatorname{im}\pi = C$.

Exemplo 4.1. O exemplo mais simples de sequência exata curta é

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_C} C \longrightarrow 0, \tag{4.9}$$

onde $i_A(a) := (a,0)$ e $\pi_C(a,c) := c$. Mas, nem toda sequência exata é isomorfa a uma deste tipo.

Definição 4.7. Uma sequência exata cinde se for isomorfa a uma sequência da forma (4.9) na categoria SeqExC(R-mod).

Exemplo 4.2. Consideremos a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

sendo π a projeção canônica ao quociente e $\cdot 2$ a multiplicação por 2. Não é difícil ver que é uma sequência exata curta, porém ela não cinde. De fato, não há isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, já que o último possui elementos de torção.

É claro que, para (4.8) cindir, não é suficiente que $B \simeq A \oplus C$, já que deve existir um isomorfismo de sequências exatas de (4.8) e (4.9), isto é

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi^1"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi^2"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i_A"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

Sempre podemos tomar $\varphi^1 = \mathrm{id}_A$ e $\varphi^3 = \mathrm{id}_C$, e substituindo φ^2 por $((\varphi^1)^{-1}, (\varphi^3)^{-1}) \circ \varphi^2$. Mostraremos um contra exemplo após a proposição.

Proposição 4.1. *Os seguintes fatos são equivalente:*

(i) a sequência exata curta (4.8) cinde;

(ii) existe um morfismo $p : B \to A$ *tal que* $p \circ i = \mathrm{id}_A$*;*

(iii) existe um morfismo $j : C \to B$ *tal que* $\pi \circ j = \mathrm{id}_C$*.*

Demonstração. É fácil mostrar que (i) $\Longrightarrow$ (ii) e (i) $\Longrightarrow$ (iii), basta considerar p como a projeção e j como a inclusão. Mostremos que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Definimos

$$\begin{aligned} \varphi : B &\longrightarrow A \oplus C \\ b &\longmapsto (p(b), \pi(b)), \end{aligned}$$

que é o isomorfismo procurado. De fato, é injetor pois $\varphi(b) = 0$ implica $p(b) = 0$ e $\pi(b) = 0$. Da exatidão, segue que existe um único $a \in A$ tal que $i(a) = b$. Logo, $0 = p(b) = p(i(a)) = a$ e portanto $a = 0$, que implica $b = 0$.

Também é sobrejetor, pois dado $(a, c) \in A \oplus C$, por exatidão, existe $b \in B$ tal que $\pi(b) = c$. Defina $b' := b - i(p(b) - a)$. Assim, $\pi(b') = c - \pi \circ (p(b) - a) = c$ e $p(b') = b(b) - p \circ i(p(b) - a) = p(b) - p(b) + a = a$. Logo, $\varphi(b') = (a, c)$, como queríamos. Colocando $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) = (\mathrm{id}_A, \varphi, \mathrm{id}_C)$, é natural o diagrama comutar. Portanto, φ nos induz um isomorfismo de sequências exatas. De modo análogo, podemos provar (iii) $\Longrightarrow$ (i), basta tomar

$$\begin{aligned} \varphi : A \oplus C &\longrightarrow B \\ (a, c) &\longmapsto i(a) + j(c), \end{aligned}$$

e realizar as contas de modo similar ao que já foi feito. $\square$

Exemplo 4.3. Considere a sequência

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus \mathbb{N}} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z}_2^{\oplus \mathbb{N}} \longrightarrow 0,$$

onde $\mathbb{Z}_2^{\oplus \mathbb{N}}$ é a soma direta de uma família enumerável de cópias de $\mathbb{Z}_2$, $i(n) := (2n, 0, 0, \dots)$ e $\pi(n, k_0, k_1, \dots) := ([n], k_0, k_1, \dots)$. Essa é uma sequência exata,$B = A \oplus C$, mas não cinde. De fato, se cindisse, pela Proposição 4.1, existe $p : B \to A$ tal que $p \circ i = \mathrm{id}_A$. Mas, qualquer morfismo $p : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^{\oplus \mathbb{N}} \to \mathbb{Z}$ anula os elementos de todas as cópias de $\mathbb{Z}_2$, pois são elementos de torção. Portanto, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p(n, k_0, k_1, \cdots) = an$. Logo, $p \circ i(1) = p(2) = 2a \neq 1$, o que contradiz $p \circ i = id_{\mathbb{Z}}$.

5 COHOMOLOGIA DE ČECH

Queremos definir uma cohomologia que associa grupos de cohomologia a um feixe em um espaço topológico X. Uma boa referência para esse capítulo será (Bruzzo, 2004). Começamos considerando um pré-feixe de R-módulos $\mathcal{P}$ em X e uma cobertura aberta $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X, onde I está totalmente ordenado. Definimos também a notação

$$U_{i_0 \dots i_p} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}.$$

Definimos um *complexo de Čech* de $\mathfrak{U}$ com coeficientes em $\mathcal{P}$ como o complexo tal que o p-ésimo termo é o R-módulo

$$\check{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := \bigoplus_{i_0 < \cdots < i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p}),$$

onde $i_0, \dots, i_p \in I$, e naturalmente definimos os $\check{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) = \{0\}$ quando p é menor que zero. Então uma cocadeia de grau p é uma coleção $\{\alpha_{i_0 \dots i_p}\}$, com $i_0 < \cdots < i_p$, de seções de $\mathcal{P}$, tal que cada uma pertence ao espaço de seções sobre uma interseção de $p+1$ conjuntos abertos de $\mathfrak{U}$. Notamos que a ordem total foi assumida em I pois não queremos repetições de interseções.

Devemos agora definir o morfismo de cobordo de Čech:

$$\begin{aligned}
\check{\delta}^p &: \check{C}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \longrightarrow \check{C}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \\
\alpha &= \{\alpha_{i_0 \dots i_p}\} \longmapsto \{\check{\delta}^p(\alpha)_{i_0 \dots i_{p+1}}\},
\end{aligned}$$

onde

$$\check{\delta}^p(\alpha)_{i_0 \dots i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}}|_{U_{i_0 \cdots i_{p+1}}}.$$

De modo que "ˆ" denota a omissão do índice. Note que essa é a definição de cada entrada, portanto a família desses nos dá um elemento da soma direta.

Lema 5.1. *Vale que* $\check{\delta}^{p+1} \circ \check{\delta}^p = 0$, *assim de fato definem morfismos de cobordo.*

Demonstração. Temos

$$
\begin{aligned}
\check{\delta}^{p+1} \circ \check{\delta}^{p}(\alpha) &= \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j (\check{\delta}^p)_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{p+2}} \\
&= \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^{j} \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}} + \sum_{k=j+1}^{p+2} \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+2}} \right) \\
&= \sum_{k<j} (-1)^{j+k} \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_j \dots i_{p+2}} + \sum_{k>j} (-1)^{j+k-1} \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots \hat{i}_k \dots i_{p+2}} \\
&\overset{(*)}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Onde $(*)$ vale pois podemos apenas trocar os "nomes" dos índices j e k e temos duas somas iguais, porém com sinais trocados. □

Exemplo 5.1. Calculemos os morfismos cobordo Čech de grais baixos para termos uma intuição de como funciona:

$$
\begin{aligned}
\check{\delta}^0 : \check{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) &\longrightarrow \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \\
\alpha = \{\alpha_{i_0}\} &\longmapsto \{(\delta\alpha)_{i_0 i_1}\},
\end{aligned}
$$

onde $\check{\delta}^0(\alpha) = \alpha_{i_1}|_{U_{i_0 i_1}} - \alpha_{i_0}|_{U_{i_0 i_1}}$. E para o grau 1, temos

$$
\begin{aligned}
\check{\delta}^1 : \check{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) &\longrightarrow \check{C}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) \\
\alpha = \{\alpha_{i_0 i_1}\} &\longmapsto \{(\delta\alpha)_{i_0 i_1 i_2}\},
\end{aligned}
$$

onde $\check{\delta}^1(\alpha) = \alpha_{i_1 i_2}|_{U_{i_0 i_1 i_2}} - \alpha_{i_0 i_2}|_{U_{i_0 i_1 i_2}} + \alpha_{i_0 i_1}|_{U_{i_0 i_1 i_2}}$. E continuamos da mesma forma.

Definição 5.1. A *cohomologia de Čech* de grau p em relação ao pré-feixe $\mathcal{P}$ e cobertura $\mathfrak{U}$ de X, denotada $\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P})$, fica definida como o grupo de cohomologia de grau p do complexo de Čech. Ou seja,

$$
\check{H}^p(\mathfrak{U}, \mathcal{P}) := H^p(\check{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{P})) = \frac{\ker \delta^p}{\operatorname{im} \delta^{p-1}}.
$$

Lema 5.2. *Se $\mathcal{F}$ é um feixe, temos o isomorfismo $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.*

Demonstração. Sabemos que $\operatorname{im} \delta^{p-1} = 0$, pois δ^{p-1} é o morfismo nulo. Assim $\check{H}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \ker \delta^0$. Mas, pelo Exemplo 5.1, sabemos que $\alpha \in \ker \delta^0$ se, e somente se,

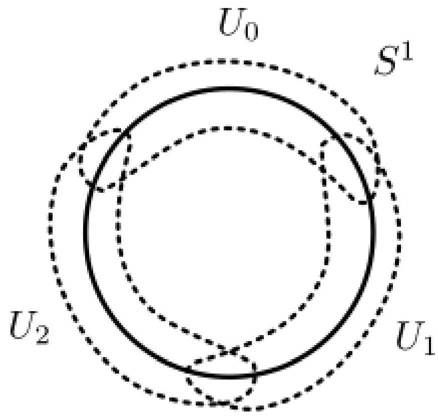
$$
\alpha_{i_1}|_{U_{i_0 i_1}} = \alpha_{i_0}|_{U_{i_0 i_1}}
$$

Do axioma da existência da colagem nos feixes, segue que existe $\tilde{\alpha} \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\tilde{\alpha}|_{U_i} = \alpha_i$. Assim, fica definido o morfismo $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}(X)$, que é claramente sobrejetivo e é injetivo pelo axioma da unicidade da colagem nos feixes. □

Vale notar também que no caso de um pré-feixe $\mathcal{P}$, temos que $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{P}) = \mathcal{P}^\natural(X)$. Assim, temos um significado bem claro para o grupo de cohomologia de grau 0.

Exemplo 5.2. Consideremos uma cobertura aberta $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1, U_2\}$ do círculo S^1 formada por três abertos que se intersectam em pares, como na imagem abaixo abaixo:

Figura 1 – Cobertura $\mathfrak{U}$ de S^1.



Fonte: De autoria própria.

Calculemos a cohomologia de Čech de $\mathfrak{U}$ com coeficientes no feixe constante $\mathbb{Z}$. Primeiramente, observamos que

$$\check{C}^0(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_0) \oplus \mathbb{Z}(U_1) \oplus \mathbb{Z}(U_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \text{ e}$$
$$\check{C}^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_{01}) \oplus \mathbb{Z}(U_{12}) \oplus \mathbb{Z}(U_{02}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Além disso, $\check{C}^k(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) = 0$ para todo $k \geq 2$, pois não temos interseções triplas. O único morfismo de cobordo não nulo é $\delta^0 : \check{C}^0(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) \to \check{C}^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z})$, que é dado por

$$\delta^0(x_0, x_1, x_2) = (x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_2 - x_0).$$

Temos então que

$$\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{P}) = \frac{\ker \delta^0}{\operatorname{im} \delta^{-1}} = \ker \delta^0 = \{(x_0, x_1, x_2) : x_1 = x_0, x_2 = x_1, x_2 = x_0\} \simeq \mathbb{Z}.$$

Que concorda com a proposição anterior. Pode-se também calcular o grupo cohomologia de grau 1:

$$\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{P}) = \frac{\ker \delta^1}{\operatorname{im} \delta^0} = \frac{\check{C}^1(\mathfrak{U},\mathcal{P})}{\operatorname{im} \delta^0} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\operatorname{im} \delta^0} \overset{(*)}{=} \mathbb{Z}.$$

Mostremos que $(*)$ vale. De fato, defina o morfismo:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ (x_0,x_1,x_2) &\longmapsto x_2 - x_1 - x_0.\end{aligned}$$

Devemos mostrar que $\ker\varphi = \operatorname{im}\delta^0$. Temos:

- $(\subset)$ Tome (x_0,x_1,x_1+x_0), que é um elemento genérico de $\ker\varphi$. Observamos que

$$\begin{aligned}\delta^0(-x_1,x_0-x_1,x_0) &= ((x_0-x_1)-(-x_1),x_0-(x_0-x_1),x_0-(-x_1))\\ &= (x_0,x_1,x_1+x_0),\end{aligned}$$

  portanto $(x_0,x_1,x_1+x_0)\in\operatorname{im}\delta^0$.

- $(\supset)$ Tome $(x_1-x_0,x_2-x_1,x_2-x_0)$, um elemento genérico de $\operatorname{im}\delta^0$. Temos

$$\varphi(x_1-x_0,x_2-x_1,x_2-x_0) = (x_2-x_0)-(x_2-x_1)-(x_1-x_0) = 0.$$

Portanto vale $(*)$.

Exemplo 5.3. Consideramos agora o mesmo espaço S^1 e a mesma cobertura $\mathfrak{U}$ do exemplo anterior, mas agora tome o feixe $\underline{\mathbb{R}}$, definido no Exemplo 3.1. Nesse caso, temos que

$$\check{C}^0(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{R}}) = \underline{\mathbb{R}}(U_0)\oplus\underline{\mathbb{R}}(U_1)\oplus\underline{\mathbb{R}}(U_2) = C^0(U_0,\mathbb{R})\oplus C^0(U_1,\mathbb{R})\oplus C^0(U_2,\mathbb{R}).$$

e

$$\check{C}^1(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{R}}) = \underline{\mathbb{R}}(U_{01})\oplus\underline{\mathbb{R}}(U_{12})\oplus\underline{\mathbb{R}}(U_{02}) = C^0(U_{01},\mathbb{R})\oplus C^0(U_{12},\mathbb{R})\oplus C^0(U_{02},\mathbb{R}).$$

Aqui, se $V\subset S_1$ é um aberto, a notação $C^0(V,\mathbb{R})$ denota o conjunto das funções contínuas de V a $\mathbb{R}$. Da mesma forma que o exemplo anterior, $\check{C}^k(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{R}}) = 0$ para todo $k\geq 2$, e o único morfismo de bordo significativo é $\delta^0 : \check{C}^0(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{R}})\to\check{C}^1(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{R}})$, que é dado por

$$\delta^0(f,g,h) = (g|_{U_{01}} - f|_{U_{01}}, h|_{U_{12}} - g|_{U_{12}}, h|_{U_{20}} - f|_{U_{20}}).$$

Assim, nesse caso, o grupo de cohomologia de grau 0 é

$$\check{H}^0(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{R}}) = \ker\delta^0 = \{(f,g,h) : g|_{U_{01}} = f|_{U_{01}}, h|_{U_{12}} = g|_{U_{12}}, h|_{U_{20}} = f|_{U_{20}}\} \simeq \underline{\mathbb{R}}(S^1),$$

como já era esperado. Podemos calcular também o grupo de cohomologia de grau 1:

$$\check{H}^1(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{R}}) = \frac{\ker\delta^1}{\operatorname{im}\delta^0} = \frac{\check{C}^1(\mathfrak{U},\underline{\mathbb{R}})}{\operatorname{im}\delta^0} = \frac{\{\varphi,\psi,\eta\}}{\{g|_{U_{01}} - f|_{U_{01}}, h|_{U_{12}} - g|_{U_{12}}, h|_{U_{20}} - f|_{U_{20}}\}}.$$

tais que $\varphi \in C^0(U_{01},\mathbb{R})$, $\psi \in C^0(U_{12},\mathbb{R})$ e $\eta \in C^0(U_{02},\mathbb{R})$. Provemos que esse quociente é na verdade o R-módulo trivial. De fato, observamos que para isso devemo mostrar que as funções φ,ψ e η podem ser escritas como diferenças de funções f,g e h. Pela partição da unidade, tome funções contínuas em S^1 α,β e γ tal que $\operatorname{supp}\alpha \subset U_0$, $\operatorname{supp}\beta \subset U_1$ e $\operatorname{supp}\gamma \subset U_2$ e $\alpha+\beta+\gamma = 1$ em S^1. Definamos

$$\begin{cases} f = -\gamma\eta - \beta\varphi \\ g = -\gamma\psi + \alpha\varphi \\ h = \alpha\eta + \beta\psi \end{cases}.$$

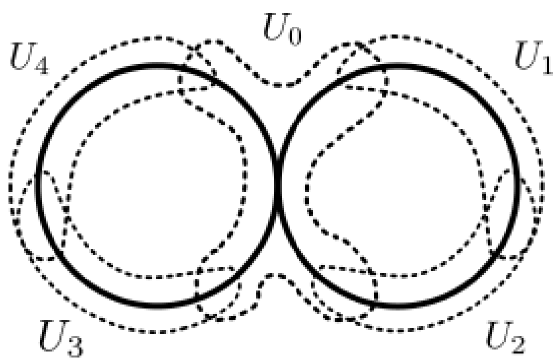
Dessa forma,

$$\begin{cases} g - f = -\gamma\psi + \alpha\varphi + \gamma\eta + \beta\varphi = (\alpha+\beta)\varphi = \varphi, \text{ (em } U_{01}) \\ h - g = \alpha\eta + \beta\psi + \gamma\psi - \alpha\varphi = (\beta+\gamma)\psi = \psi, \text{ (em } U_{12}) \\ h - f = \alpha\eta + \beta\psi + \gamma\eta + \beta\varphi = (\alpha+\gamma)\eta = \eta \text{ (em } U_{20}) \end{cases}$$

E temos o resultado.

Exemplo 5.4. Consideremos a cobertura $\mathfrak{U} = \{U_0,U_1,U_2,U_3,U_4\}$ do símbolo "∞", formada por cinco abertos como na figura abaixo.

Figura 2 – Cobertura $\mathfrak{U}$ do símbolo "∞".



Fonte: De autoria própria.

Tomamos novamente o feixe constante $\mathbb{Z}$. Como foi feito anteriormente temos os

R-módulos

$$\check{C}^0(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_0)\oplus\mathbb{Z}(U_1)\oplus\mathbb{Z}(U_2)\oplus\mathbb{Z}(U_3)\oplus\mathbb{Z}(U_4) = \bigoplus_{i=0}^{4}\mathbb{Z}, \text{ e}$$

$$\check{C}^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(U_{01})\oplus\mathbb{Z}(U_{02})\oplus\mathbb{Z}(U_{03})\oplus\mathbb{Z}(U_{04})\oplus\mathbb{Z}(U_{12})\oplus\mathbb{Z}(U_{34}) = \bigoplus_{i=0}^{5}\mathbb{Z}.$$

E $\check{C}^k(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) = 0$ para todo $k \geq 2$, pois não temos interseções triplas. O único morfismo de cobordo significativo é $\delta^0 : \check{C}^0(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) \to \check{C}^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z})$, que é dado por

$$\delta^0(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0, x_2-x_1, x_4-x_3).$$

Da mesma forma que antes, já sabemos que $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{P}) = \mathbb{Z}$. Calculemos agora o grupo de cohomologia de grau 1:

$$\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{P}) = \frac{\ker\delta^1}{\operatorname{im}\delta^0} = \frac{\check{C}^1(\mathfrak{U},\mathcal{P})}{\operatorname{im}\delta^0} = \frac{\bigoplus_{i=0}^{5}\mathbb{Z}}{\operatorname{im}\delta^0} \overset{(\star)}{=} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

Mostremos que $(\star)$ vale. De fato, defina o morfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{i=0}^{5}\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \\ (x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &\longmapsto (x_1-x_0-x_4, x_3-x_2-x_5) \end{aligned}$$

Devemos mostrar que $\ker\varphi = \operatorname{im}\delta^0$. Para isso, podemos:

- $(\subset)$ Tome $(x_0, x_0+x_4, x_2, x_2+x_5, x_4, x_5)$, que é um elemento genérico de $\ker\varphi$. Observamos que

$$\begin{aligned} &\delta^0(-x_2-x_5, x_0-x_2-x_5, x_0-x_2+x_4-x_5, -x_5, 0) = \\ &\qquad\qquad = (x_0, x_0+x_4, x_2, x_2+x_5, x_4, x_5), \end{aligned}$$

  portanto $(x_0, x_0+x_4, x_2, x_2+x_5, x_4, x_5) \in \operatorname{im}\delta^0$.

- $(\supset)$ Tome $(x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0, x_2-x_1, x_4-x_3)$, um elemento genérico de $\operatorname{im}\delta^0$. Temos

$$\varphi(x_1-x_0, x_2-x_0, x_3-x_0, x_4-x_0, x_2-x_1, x_4-x_3) = 0.$$

Portanto vale $(\star)$.

Observamos que até agora definimos a cohomologia de Čech de um pré-feixe $\mathcal{P}$ sobre um espaço topológico X para uma cobertura $\mathfrak{U}$, então o que podemos fazer para encontrar a cohomologia de Čech intrínseca a $\mathcal{P}$, ou seja, de forma independente da cobertura? Para isso, utilizaremos a noção de refinamento de uma cobertura.

Definição 5.2. Seja X um espaço topológico, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ e $\mathfrak{W} = \{W_k\}_{k\in K}$ duas coberturas de X. Dizemos que $\mathfrak{W}$ é um *refinamento* de $\mathfrak{U}$ se existe uma função, chamada *função refinamento*, $\phi : K \to I$ satisfazendo $W_k \subset U_{\phi(k)}$ para todo $k \in K$.

Sejam $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}$ e ϕ como na definição anterior, e $\mathcal{P}$ um pré-feixe sobre o espaço topológico X. Fica bem definido morfismo

$$\begin{aligned} \phi^* : \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{P}) &\longrightarrow \check{H}^p(\mathfrak{W},\mathcal{P}) \\ [\alpha_{i_0\ldots i_p}] &\longmapsto [\beta_{k_0\ldots k_p}] = [\alpha_{\phi(k_0)\ldots\phi(k_p)}|_{W_{k_0\ldots k_p}}], \end{aligned}$$

onde $\alpha_{\phi(k_0)\ldots\phi(k_p)}$ denota $\alpha_{\sigma(\phi(k_0))\ldots\sigma(\phi(k_p))}$, tal que σ é uma permutação de I que ordena $\phi(k_0)\ldots\phi(k_p)$, já que temos que tomar cuidado com a ordem de I.

Definição 5.3. Sejam $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ e $\mathfrak{W} = \{W_k\}_{k\in K}$ coberturas de um espaço topológico X e $\mathcal{P}$ um pré-feixe no mesmo espaço . O *grupos de cohomologia de Čech de ordem p do par* $(X,\mathcal{P})$ é definido por

$$\check{H}^p(X,\mathcal{P}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{P}) = \{(\mathfrak{U},[\alpha]) : \mathfrak{U} \text{ é cobertura}, [\alpha] \in \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{P})\}/\sim,$$

onde a relação de equivalência "$\sim$" é dada por

$$(\mathfrak{U},[\alpha]) \sim (\mathfrak{V},[\beta]) \iff \exists \mathfrak{W} \text{ refinamento de } \mathfrak{U} \text{ e } \mathfrak{V} : \phi^*[\alpha] = \psi^*[\beta].$$

Sendo $\phi : K \to I$ e $\psi : K \to J$ as funções refinamento e assim os morfismos ϕ^* e ψ^* são definidos como no cometário anterior.

Podemos provar que essa definição é independente da escolha das funções refinamento, porém não faremos a demonstração aqui. Na verdade, o que estamos fazendo nessa definição nada mais é que um limite algébrico, onde dizemos que duas classes de cohomologia são as mesmas se são "eventualmente" as mesmas (com relação aos morfismos induzidos pela restrição).

Vale notar que, nos exemplos feitos, as coberturas utilizadas são *boas coberturas*, isto é, as interseções de todos os graus são espaços contráteis. Isto não é por acaso, na verdade, um grupo de cohomologia de Čech de uma boa cobertura coincide com o grupo de cohomologia do feixe. Esse é o chamado Teorema de Leray, cuja demonstração pode ser encontrado em (Bruzzo, 2004). Portanto, nos exemplos já foi calculado as cohomologias dos respectivos feixes.

6 ÁLGEBRA HOMOLÓGICA EM CATEGORIAS ABELIANAS

Gostaríamos de aplicar a teoria de Álgebra Homológica em objetos mais gerais, não somente R-módulos. Para isso, devemos observar quais propriedades de R-Mod utilizamos para a teoria até agora, vamos fazer isso nessa seção. Em seguida, vamos observar as propriedades essenciais do funtor de cohomologia (que, em suma, torna uma sequência exata curta em uma sequência exata longa) e definir funtores mais gerais com essas propriedades, que serão chamados funtores derivados. A Cohomologia de Feixes, que é o objetivo do trabalho, será um funtor derivado. Enfim, indicamos como referências principais (Weibel, 1994) e (Grothendieck, 1957); também (Rotman, 1979), (Hilton; Stammbach, 1997) e (Freyd, 1964) podem servir como complemento.

6.1 CATEGORIAS ABELIANAS

Dessa seção em diante, vamos considerar todo anel como um anel com unidade. Em alguns momentos emitimos o superscrito "$\bullet$" para indicar um complexo de cocadeias quando for claro.

Definição 6.1. Uma categoria $\mathcal{A}$ é dita Ab-*categoria* se todo conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$, dado qualquer $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, possui uma estrutura de grupo abeliano de tal forma que a composição distribui sobre a adição. Em particular, sejam $A,B,C,D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$, $g,g' \in \mathrm{Hom}(B,C)$ e $h \in \mathrm{Hom}(C,D)$, vale $h(g+g')f = hgf + hg'f$ em $\mathrm{Hom}(A,D)$.

Exemplo 6.1. A categoria Cocad(R-mod) é uma Ab-categoria. De fato, se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ são morfismos de complexos de cocadeias, sua soma será a família de morfismos $\{f_n + g_n\}$.

Podemos agora definir os "morfismos corretos" entre as Ab-categorias.

Definição 6.2. Um *Um funtor aditivo* $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ entre Ab-categorias é um funtor tal que cada $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B',B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(FB',FB)$ é um homomorfismo de grupo.

Definição 6.3. Uma Ab-categoria $\mathcal{A}$ é dita *categoria aditiva* se possui um objeto nulo (cf. Definição 2.4) (que, por abuso de linguagem, denotaremos por 0) existe e um produto $A \times B$ para todo par $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

Essa estrutura já é suficiente pra que exista também o coproduto, e além disso produtos e coprodutos finitos são isomorfos.[3]

[3] Uma formulação equivalente de categoria aditiva é pedir que seja uma Ab-categoria tal que os produto e coprodutos finitos existem, daí é possível provar que o 0 (que é o produto e coproduto vazio) também existe.

Proposição 6.1. *O coproduto finito existe em uma categoria aditiva e é isomorfo ao produto finito.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva, $A \times B$ o produto de $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ e $\pi_A : A \times B \to A$, $\pi_B : A \times B \to B$ as respectivas projeções. Então, da existência do morfismo zero ($\mathcal{A}$ é em particular uma Ab-categoria) e da propriedade universal do produto, existe um único morfismo $i_A : A \to A \times B$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[rd, dotted, "i_A"] \arrow[rdd, bend right, "0"'] & & \\
& A \times B \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"] & A \\
& B &
\end{tikzcd}$$

De forma análoga, existe $i_B : B \to A \times B$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrd, bend left, "0"] \arrow[rd, dotted, "i_B"] \arrow[rdd, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & & \\
& A \times B \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"] & A \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Dessa forma, $(A \times B, i_A, i_B)$ é um coproduto. De fato, suponha outro objeto $C \in (\mathcal{A})$ com morfismos $f : A \to C$ e $g : A \to C$, definimos $h := f\pi_A + g\pi_B \in \mathrm{Hom}(A \times B, C)$. O morfismo $h : A \times B \to C$ torna $A \times B$ um coproduto. De fato:

- $hi_A = (f\pi_A + g\pi_B)i_A = f\pi_A i_A + g\pi_B i_A = f$;
- $hi_B = (f\pi_A + g\pi_B)i_B = f\pi_A i_B + g\pi_B i_B = g$.

Portanto o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
C & & \\
& A \times B \arrow[lu, dotted, "h"] & A \arrow[l, "i_A"'] \arrow[llu, bend right, "f"'] \\
& B \arrow[u, "i_B"] \arrow[luu, bend left, "g"] &
\end{tikzcd} .$$

Resta provar que h é único. Seja $h' : A \times B \to C$ tal que $f = h'i_A$ e $g = h'i_B$, vale

$$h = h(i_A\pi_A + i_B\pi_B) = hi_A\pi_A + hi_B\pi_B \stackrel{(*)}{=} h'i_A\pi_A + h'i_B\pi_B = h'(i_A\pi_A + i_B\pi_B) = h'$$

onde em $(*)$ usamos as hipóteses sobre h' e na primeira e na última igualdade usamos que $\mathrm{id}_{A\times B} = i_A\pi_A + i_B\pi_B$, provemos esse fato. De fato, o diagrama abaixo comuta pela definição de i_A e i_B.

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[dr, dotted, "i_A\pi_A+i_B\pi_B"] \arrow[drr, bend left, "\pi_A"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_B"'] & & \\
& A\times B \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"] & A \\
& B &
\end{tikzcd} .$$

Da propriedade universal do produto, como $id_{A\times B}$ também faz o diagrama cima comutar, segue o fato. O resultado para o produto de n fatores segue por indução. $\square$

Exemplo 6.2. A categoria Cocad(R-mod) é uma categoria aditiva. De fato, objeto nulo é o complexo formado pelos R-módulos triviais e, dada uma família $\{A^\alpha\}$ de complexos de R-módulos, o produto $\prod A^\alpha$ é da forma

$$\cdots \xrightarrow{\prod_\alpha d^{\alpha,i-2}} \prod_\alpha A^{\alpha,i-1} \xrightarrow{\prod_\alpha d^{\alpha,i-1}} \prod_\alpha A^{\alpha,i} \xrightarrow{\prod_\alpha d^{\alpha,i}} \prod_\alpha A^{\alpha,i+1} \xrightarrow{\prod_\alpha d^{\alpha,i+1}} \cdots .$$

De forma similar o coproduto $\bigoplus A^\alpha$ é da forma

$$\cdots \xrightarrow{\bigoplus_\alpha d^{\alpha,i-2}} \bigoplus_\alpha A^{\alpha,i-1} \xrightarrow{\bigoplus_\alpha d^{\alpha,i-1}} \bigoplus_\alpha A^{\alpha,i} \xrightarrow{\bigoplus_\alpha d^{\alpha,i}} \bigoplus_\alpha A^{\alpha,i+1} \xrightarrow{\bigoplus_\alpha d^{\alpha,i+1}} \cdots .$$

Definição 6.4. Sejam $B, C \in$ Cocad(R-mod), temos as seguintes definições:

(i) B é chamado de *subcomplexo* de C se cada B^n é submódulo de C^n e os morfismos de cobordo de B são restrições dos morfismos de cobordo de C. Ou seja, quando a inclusão $i_n : B^n \hookrightarrow C^n$ é um morfismo de complexo de cocadeias de B para C;

(ii) no caso do exemplo anterior, podemos montar o complexo de cocadeias

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-2}} C^{i-1}/B^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i/B^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1}/B^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots ,$$

denotado por C/B e chamado *complexo quociente*;

(iii) dado um morfismo $f : B \to C$ de complexos de cocadeias, a família $\{\ker(f^n)\}$ forma um subcomplexo de B, denotado por $\ker(f)$. Também, temos que a família $\{\mathrm{coker}(f^n)\}$ forma um complexo quociente de C denotado por $\mathrm{coker}(f)$.

Com a noção de objeto nulo, podemos definir a noção de kernel e cokernel.

Definição 6.5. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva, $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, temos as definições:

(i) o *kernel* de um morfismo $f : B \to C$ é um morfismo $i : A \to B$ tal que $fi = 0$ e é universal com respeito a essa propriedade; isto é, para todo morfismo $i' : A' \to B$, com $A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, tal que $fi' = 0$ existe um único morfismo $\lambda : A' \to A$ tal que $i\lambda = i'$, como no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[dr, "i'"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dd, dotted, "\exists!\lambda"'] & & \\ & B \arrow[r, "f"] & C \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & & \end{tikzcd} . \tag{6.1}$$

(ii) De forma dual, o *cokernel* de um morfismo $f : B \to C$ é um morfismo $e : C \to D$ que é universal com respeito a propriedade $ef = 0$; isto é, para todo morfismo $e' : C \to D'$, com $D' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, tal que $e'f = 0$ existe um único morfismo $\lambda : D \to D'$ tal que $\lambda e = e'$, como no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} & & D \arrow[dd, dotted, "\lambda"] \\ B \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & C \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "e'"] & \\ & & D' \end{tikzcd} . \tag{6.2}$$

(iii) Um morfismo $i : A \to B$ é um *monomorfismo* se $ig = 0$ implica $g = 0$ para todo morfismo $g : A' \to A$.

(iv) De forma dual, um morfismo $e : C \to D$ é um *epimorfismo* se $he = 0$ implica $h = 0$ para todo morfismo $h : D \to D'$.

Vale deixar claro que, por definição, kernel e cokernel são morfismos porém muitas vezes vamos nos referir à eles como objetos.

Proposição 6.2. *Em uma categoria aditiva, o kernel é um monomorfismo e um cokernel um epimorfismo.*

Demonstração. Seja $f : B \to C$ um morfismo em uma categoria aditiva $\mathcal{A}$, e $i : \ker f \to B$ seu kernel, que implica $fi = 0$. Assim dado um morfismo $g : A \to \ker f$ tal que $ig = 0$, então $f(ig) = 0$. Pela propriedade do $\ker f$, sabemos que deve existir um único morfismo $\lambda : A \to \ker f$ tal que $\lambda i = ig = 0$, portanto $\lambda = 0$ e i é um monomorfismo. Para mostrar que o cokernel é um epimorfismo, basta aplicar o dual desse argumento. $\square$

É natural nos perguntarmos se a volta dessa proposição vale. Na verdade, precisamos impor sua validade através de mais axiomas.

Definição 6.6. Uma *categoria abeliana* é uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ tal que:

(i) todo morfismo em $\mathcal{A}$ possui kernel e cokernel;

(ii) todo monomorfismo em $\mathcal{A}$ é o kernel de seu cokernel;

(iii) todo epimorfismo em $\mathcal{A}$ é o cokernel de seu kernel.

Como já comentamos anteriormente, o exemplo prototípico de uma categoria abeliana é R-Mod.

Definição 6.7. Em uma categoria abeliana se $f : B \to C$ é um monomorfismo, dizemos que B é um *subobjeto* de C. A *imagem* (respectivamente, *coimagem*) de um morfismo qualquer $f : B \to C$ em uma categoria abeliana é o subobjeto $\ker(\operatorname{coker}(f))$ (respectivamente, $\operatorname{coker}(\ker(f))$) de C e é denotada por $\operatorname{im}(f)$ (respectivamente, $\operatorname{coim}(f)$).

Uma observação importante é que em uma categoria aditiva qualquer um quociente de dois objetos A e B, onde A é subobjeto de B, pode ser entendido como o cokernel do monomorfismo $A \hookrightarrow B$.

Exemplo 6.3. Na categoria R-Mod a imagem de $f : B \to C$ é dada por $\operatorname{im}(f) = \{f(b) : b \in B\}$.

Uma observação importante é que qualquer morfismo $f : B \to C$ em uma categoria abeliana pode ser fatorado da seguinte maneira:

$$B \xrightarrow{e} \operatorname{im}(f) \xrightarrow{m} C.$$

Já sabemos que na categoria dos R-módulos essa fatoração é válida, garantimos que também será válida em uma categoria abeliana qualquer; que ficará claro o motivo quando enunciarmos Imersão de Freyde-Mitchell (Teorema 6.2).

Definição 6.8. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, uma sequência exata de morfismos de $\mathcal{A}$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

é exata em B se $\ker g = \operatorname{im} f$.

Notemos que dessa maneira, podemos repetir a discussão feita nas Seções 4.1 e 4.2 para qualquer categoria abeliana $\mathcal{A}$. Dessa forma, podemos reescrever toda teoria de Álgebra Homológica dentro de qualquer categoria abeliana $\mathcal{A}$, generalizando as noções já conhecidas. Denotaremos a categoria dos complexos de cocadeias de $\mathcal{A}$ por $\operatorname{Cocad}(\mathcal{A})$. Dessa forma, o funtor cohomologia definido em (4.3) pode ser generalizado para

$$H^\bullet : \operatorname{Cocad}(\mathcal{A}) \longrightarrow \operatorname{Seq}(\mathcal{A}).$$

Teorema 6.1. *A categoria* Cocad($\mathcal{A}$) *para uma categoria abeliana* $\mathcal{A}$ *é também uma categoria abeliana.*

Demonstração. Provemos os itens da Definição 6.6:

(i) Vamos provar a existência do kernel, a prova do cokernel é dual. Seja $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ um morfismo de complexo de cocadeias, o $\ker f^\bullet$ é o complexo formado pelos $\ker f^i$ como no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \ker f^{j-1} \arrow[r, "d^{j-1}_{\ker f}"] \arrow[d, "i^{j-1}"] & \ker f^j \arrow[r, "d^j_{\ker f}"] \arrow[d, "i^j"] & \ker f^{j+1} \arrow[r, "d^{j+1}_{\ker f}"] \arrow[d, "i^{j+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{j-1} \arrow[r, "d^{j-1}_A"] \arrow[d, "f^{j-1}"] & A^j \arrow[r, "d^j_A"] \arrow[d, "f^j"] & A^{j+1} \arrow[r, "d^{i+1}_A"] \arrow[d, "f^{j+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{j-1} \arrow[r, "d^{j-1}_B"] & B^j \arrow[r, "d^j_B"] & B^{j+1} \arrow[r, "d^{j+1}_B"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Mostremos que $d^j_{\ker f} : \ker f^j \to \ker f^{j+1}$ de fato existe para todo j. Da comutatividade do diagrama, temos que $f^{j+1} d^j_A i^j = d^j_B f^j i^j = 0$; que, pela propriedade do kernel de f^{j+1}, implica que existe um único $d^j_{\ker f}$ tal que $i^{j+1} d^j_{\ker f} = d^j_A i^j$, isto é, $\ker f^\bullet$ é um complexo de cocadeias e $i^\bullet$ é um morfismo de complexo de cocadeias.

Resta mostrar que $\ker f^\bullet$ satisfaz a propriedade universal do kernel em Cocad($\mathcal{A}$). Suponha um morfismo $g^\bullet : C^\bullet \to A^\bullet$ tal que $f^\bullet g^\bullet = 0$. Nesse caso, temos que $f^j g^j = 0$ para todo j, e pela propriedade universal do $\ker f^j$, sabemos que existe morfismo um único $\lambda^j : C^j \to \ker f^j$ tal que $i^j \lambda^j = g^j$, afirmamos que $\lambda^\bullet : C^\bullet \to \ker f^\bullet$ é um morfismo de cocadeias, ou seja, $g^{j+1} d^j_C = d^j_{\ker f} g^j$. De fato, pela comutatividade do diagrama cima, não é difícil ver que $d^j_A g^j = i^{j+1} d^j_{\ker f} \lambda_j$; como por hipótese $g^\bullet$ é um morfismo de cocadeias, sabemos que $d^j_A g^j = g^{j+1} d^j_C$, e então, $g^{j+1} d^j_C = i^{j+1} d^j_{\ker f} \lambda_j$. Substituindo $i^j \lambda^j = g^j$ na equação anterior, temos $i^{j+1} \lambda^{j+1} d^j_C = i^{j+1} d^j_{\ker f} \lambda_j$, que implica $i^{j+1}(\lambda^{j+1} d^j_C - d^j_{\ker f} \lambda_j) = 0$, mas como i^{j+1} é um monomorfismo (cf. Proposição 6.2), segue que $\lambda^{j+1} d^j_C = d^j_{\ker f} \lambda_j$.

(ii) Primeiramente observamos que $f^\bullet : A^\bullet \to B^\bullet$ é um monomorfismo; mas isso acontece se, e somente se, cada f^i é um monomorfismo para todo i. De fato, basta observamos que $f^\bullet$ é um monomorfismo se, e somente se, $\ker f^\bullet$ é zero (direto da definição de monomorfismo), se, e somente se, $\ker f^i = 0$ para todo i, se e somente se, f^i é monomorfismo para todo i.

Seja $e^\bullet : B^\bullet \to \operatorname{coker} f^\bullet$ o cokernel de $f^\bullet$ e mostremos que seu kernel é isomorfo à $f^\bullet$, para isso basta mostrar quem $f^\bullet$ satisfaz a propriedade universal do kernel de $e^\bullet$. De fato, suponha $g^\bullet : K^\bullet \to B^\bullet$ tal que $e^\bullet g^\bullet = 0$, como $f^i = \ker e^i$ para todo i (f^i é monomorfismo pelo parágrafo anterior, e $\mathcal{A}$ é abeliana por hipótese), segue que (pela propriedade universal do kernel) existe $\lambda^i : K^i \to A^i$ para todo i, provemos então que $\lambda^\bullet$ é de fato um morfismo de cocadeias, ou seja $d_A^i \lambda^i = \lambda^{i+1} d_K^i$. Observamos que vale

$$f^{i+1} d_A^i \lambda^i \overset{(1)}{=} d_B^i f^i \lambda^i \overset{(2)}{=} d_B^i g^i \overset{(3)}{=} g^{i+1} d_K^i \overset{(4)}{=} f^{i+1} \lambda^{i+1} d_K^i,$$

onde em (1) usamos o fato que $f^\bullet$ é um morfismo de complexo de cocadeias, (2) e (4) usamos que $g^i = f^i \lambda^i$ para todo i (propriedade universal do kernel), e em (3) usamos que $g^\bullet$ também é um morfismo de complexo de cocadeias. Do fato que f^{i+1} é um monomorfismo, $f^{i+1}(d_A^i \lambda^i - \lambda^{i+1} d_K^i) = 0$ implica o desejado.

(iii) Prova é análoga ao item anterior.

□

Notamos que, pela demonstração da proposição anterior, os (co)kernels da categoria $\mathrm{Cocad}(\mathcal{A})$ vem dos (co)kernels da categoria $\mathcal{A}$. Portanto, é direto que uma sequência curta $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ é exata em $\mathrm{Cocad}(\mathcal{A})$ se, e somente se, $0 \to A^i \to B^i \to C^i \to 0$ é exata em $\mathcal{A}$ para todo i.

Proposição 6.3. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria qualquer e $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, a categoria* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$*, dos funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{A}$, é também uma categoria abeliana.*

A demonstração é direta do fato que as operações que são necessárias em uma categoria abeliana estão todas em $\mathcal{A}$.

Exemplo 6.4. Pela Proposição 6.3, $\mathrm{PreFeixes}_X$ é uma categoria abeliana. Não é muito difícil ver que Feixes_X também é uma categoria abeliana.

Definição 6.9. Seja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor aditivo e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ categorias abelianas. F é dito *exato à esquerda* (respectivamente *à direita*) se para toda sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

em $\mathcal{A}$, a sequência

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

(respectivamente, $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$) é exata em $\mathcal{B}$. F é dito *exato* se é exato à esquerda e à direita.

Exemplo 6.5. O funtor inclusão $\mathrm{Feixes}_X \hookrightarrow \mathrm{PreFeixes}_X$ é exato à esquerda[4]. Isso ocorre devido ao fenômeno discutido na Seção 3.2. Sabemos também que esse funtor não é exato

[4] O funtor dessa imersão é o adjunto a direita do funtor da feixificação (diretamente da propriedade universal). Assim, do Apêndice B , segue que a imersão é exata a esquerda.

à direita, como mostra o Exemplo 3.13. Também podemos perceber o mesmo fenômeno notando que Feixes_X não é uma subcategoria abeliana de PreFeixes_X (via a identificação dada pela inclusão), pois os cokernels diferem.

O exemplo anterior é o exemplo mais importante do trabalho, já que mostra exatamente o que a cohomologia de feixes nos ajuda a medir.

Proposição 6.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,-) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ é exato à esquerda.*

Demonstração. Tome uma sequência exata $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ em $\mathcal{A}$, provemos que $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M,B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M,C)$ é exata. Seja $\alpha \in \mathrm{Hom}(M,A)$, então $f_*(\alpha) = f\alpha$; se $f\alpha = 0$ então $\alpha = 0$, pois f é um monomorfismo, mas isso implica que f_* também é um monomorfismo. Também temos que $g_* f_*(\alpha) = gf\alpha = 0$, pois $gf = 0$, assim $\mathrm{im}\, f_* \subset \ker g_*$. Tome agora $\beta \in \ker g_*$, ou seja $g_*(\beta) = g\beta = 0$, que implica que $\mathrm{im}\,\beta \subset \ker g = \mathrm{im}\, f$; sendo f^{-1} a inversa sobre a imagem de f (pois f é monomorfismo) basta definir $\alpha := f^{-1}\beta \in \mathrm{Hom}(M,A)$, dessa forma $f_*(\alpha) = ff^{-1}\beta = \beta$, e portanto $\ker g_* \subset \mathrm{im}\, f_*$ e o resultado segue. □

Corolário 6.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ é exato à esquerda.*

Demonstração. Basta observar que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}(I,-)$ e aplicar o resultado anterior na categoria oposta de $\mathcal{A}$ □

Teorema 6.2 (Imersão de Freyde-Mitchell)**.** *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana pequena, ou seja a classe $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ é um conjunto, então existe um anel R e um funtor exato, cheio e fiel de $\mathcal{A}$ para R-Mod, que imerge $\mathcal{A}$ como uma subcategoria cheia de R-Mod, isto é, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{R-Mod}}(M,N)$.*

Uma prova desse teorema pode ser encontrada em (Freyd, 1964). A importância desse teorema vai ser logo evidenciada, porém cabe adiantar que o utilizaremos para provar a existência de morfismos, exatidão de sequências e comutatividade em diagramas de uma categoria abeliana qualquer. A ideia é simples: dado uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ e um diagrama nessa categoria, tomamos a menor subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$ que contém esse diagrama. Dessa forma, podemos aplicar Imersão de Freyde-Mitchell em $\mathcal{D}$ e teremos uma imersão de $\mathcal{D}$ em R-Mod fiel e cheia, então podemos aplicar técnicas de "seguir diagramas" em R-Mod, que só podem ser feitas em R-Mod, pois sabemos trabalhar com os elementos de cada objeto dessa categoria.[5]

[5] Essas ideais só funcionam pois o funtor que faz a imersão $\mathcal{A} \to$ R-Mod é exato.

6.2 SEQUÊNCIAS EXATAS LONGAS

Provaremos o principal teorema dessa seção, que mostra uma propriedade de central importância do funtor de cohomologia, após enunciarmos o seguinte lema técnico.

Lema 6.1 (Lema da Serpente[6]). *Considere o seguinte diagrama comutativo em* R-Mod*:*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' & \end{tikzcd} . \tag{6.3}$$

Se as linhas são exatas, então existe uma sequência exata

$$\ker(a) \longrightarrow \ker(b) \longrightarrow \ker(c) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(a) \longrightarrow \operatorname{coker}(b) \longrightarrow \operatorname{coker}(c),$$

tal que $\delta(x) = f'^{-1}bg^{-1}(x)$ *para todo* $x \in \ker(c)$*. Além disso, se* $f : A \to B$ *for um monomorfismo, então* $\ker(a) \to \ker(b)$ *também é; e sem* $g' : B' \to C'$ *for um epimorfismo, então* $\operatorname{coker} b \to \operatorname{coker} c$ *também é.*

A prova pode ser encontrada em (Rotman, 1979). Observamos que pelo mergulho de Freyde-Mitchell, o esse lema também vale para qualquer categoria abeliana $\mathcal{A}$.

Teorema 6.3. *Seja*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} B \xrightarrow{g^\bullet} C^\bullet \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de complexos de cocadeias em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$*. Então existe morfismos naturais* $\delta^i : H^i(C) \to H^{i+1}(A)$*, chamados morfismos de conexão, tal que*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{i-1}(A) \arrow[r, "f^{*,i-1}"] & H^{i-1}(B) \arrow[r, "g^{*,i-1}"] & H^{i-1}(C) \arrow[dll, rounded corners, "\delta^{i-1}"'] \\ & H^i(A) \arrow[r, "f^{*,i}"] & H^i(B) \arrow[r, "g^{*,i}"] & H^i(C) \arrow[dll, rounded corners, "\delta^i"'] \\ & H^{i+1}(A) \arrow[r, "f^{*,i+1}"] & H^{i+1}(B) \arrow[r, "g^{*,i+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

é uma sequência exata.

Demonstração. Vamos utilizar alguns argumentos válidos apenas em R-Mod, mas sabemos que pela Imersão de Freyde-Mitchell a prova valerá para qualquer categoria abeliana.

[6] Também conhecido pelo nome em inglês “Snake Lemma”.

Analisemos o seguinte diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & \frac{A^i}{\operatorname{im} d_A^{i-1}} \arrow[r] \arrow[d, "d_A^i"] & \frac{B^i}{\operatorname{im} d_B^{i-1}} \arrow[r] \arrow[d, "d_B^i"] & \frac{C^i}{\operatorname{im} d_C^{i-1}} \arrow[r] \arrow[d, "d_C^i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_A^{i+1} \arrow[r] & \ker d_B^{i+1} \arrow[r] & \ker d_C^{i+1} &
\end{tikzcd}
\tag{6.4}
$$

A função $d_A^n : A^i/\operatorname{im} d_A^{i-1} \to \ker d_A^{i+1}$ está bem definida, pois $\operatorname{im} d_A^{i-1} \subset \ker d_A^i$ e $\operatorname{im} d_A^i \subset \ker d_A^{i+1}$. Observamos agora que $\ker d_A^i = \ker d_A^i/\operatorname{im} d_A^{i-1}$ [7] e $\operatorname{coker} d_A^i = \ker d_A^{i+1}/\operatorname{im} d_A^i$, que são os grupos de cohomologia de A de grau i e grau $i+1$ respectivamente. Os argumentos desse parágrafo valem também para d_B^n e d_C^n.

Portanto, se provarmos que as linhas do diagrama (6.4) são exatas então o diagrama inteiro comuta (o comutar dos quadrados segue da demonstração do Lema da Serpente, ou ainda, observando que as funções horizontais vieram das funções $f^\bullet$ e $g^\bullet$ que são morfismos de complexos de cocadeias). Então, pelo Lema da Serpente (Lema 6.1), temos a sequência exata longa

$$
H^i(A) \longrightarrow H^i(B) \longrightarrow H^i(C) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(A) \longrightarrow H^{i+1}(B) \longrightarrow H^{i+1}(C) \ ,
$$

e colando essas sequências temos o resultado. Provemos então a exatidão das linhas do diagrama (6.4). De fato, se $f^\bullet$ e $g^\bullet$ são morfismos se complexos de cocadeias, então, em particular, o diagrama a seguir comuta.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^i \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, "d_A^i"] & B^i \arrow[r, "g^i"] \arrow[d, "d_B^i"] & C^i \arrow[r] \arrow[d, "d_C^i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{i+1} \arrow[r, "f^{i+1}"] & B^{i+1} \arrow[r, "g^{i+1}"] & C^{1+i} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Aplicando o Lema da Serpente novamente, segue que as linhas do diagrama (6.4) são exatas e portanto o resultado do teorema segue. □

Notamos que podemos, pela definição do morfismo δ em Lema 6.1, encontrar a fórmula do morfismo δ^i do teorema anterior na categoria R-Mod:[8] Tome $z \in H^{i-1}(C)$, representado por um elemento $c \in C^i$, volta-se para um elemento $b \in B^i$ e aplicamos d_B^i, voltamos ele agora para um elemento em $\ker d_A^{i+1}$ que representa o $\delta(z) \in H^n(C)$.

A demonstração não nos mostra o porquê dos morfismos δ^i serem naturais, a seguinte proposição nos mostra isso. Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, $\mathcal{C} := \operatorname{SeqExC}(\operatorname{Cocad}(\mathcal{A}))$,

7 Há um abuso de notação nesse momento, pois o kernel de d_A^i do lado esquerdo na igualdade se refere ao kernel de d_A^i como função de domínio $A^i/\operatorname{im} d_A^{i-1}$, já o kernel de d_A^i do lado direito se refere ao kernel de d_A^i como função de domínio A^i. Outros abusos de notação como esse acontecem na demonstração, mas não vamos apontá-los pois são claros pelo contexto.

8 Pode-se visualizar o caminho pelo diagrama (6.4).

isto é, a categoria cujos elementos são sequências exatas de complexos de cocadeias e um morfismo é um diagrama comutativos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} . \tag{6.5}$$

Vamos também definir $\mathcal{L} := \mathrm{SeqExL}(\mathcal{A})$.

Proposição 6.5. *Podemos definir um funtor $H^\bullet$ de cohomologia de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{L}$, onde dada uma sequência exata curta de complexos de cocadeias o funtor nos dá uma sequência exata longa como no Teorema 6.3.*

Demonstração. Nessa prova vamos supor que $\mathcal{A} = \text{R-Mod}$, mas já sabemos que pela Imersão de Freyde-Mitchell o resultado valerá para uma categoria abeliana qualquer. Queremos mostrar que dado um morfismo de sequência exata curta de complexos de cocadeias, da forma do diagrama (6.5), temos um morfismo de sequências longa do tipo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(B) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(C) \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & H^{i+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^i(A') \arrow[r] & H^i(B') \arrow[r] & H^i(C') \arrow[r, "\delta'^i"] & H^{i+1}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} ,$$

assim queremos mostrar que esse diagrama comuta. Observamos que só é necessário provar que o diagrama a direita comuta, já que os outros comutam pelo fato que H^i é um funtor. Tome $z \in H^i(C)$, que é representado por $c \in C^i$, sua imagem por $H^i(C) \to H^i(C')$ é z', que é representada por pela imagem de c. Seja $b \in B^i$ tal que c é imagem de b por $H^i(B) \to H^i(C)$, então a imagem de b por $H^i(B) \to H^i(B')$ é c'. Então, pela observação feia após o Teorema 6.3, $\delta'^i(z') \in H^{i+1}(A')$ é representada pela imagem de $\delta(b)$, que é a imagem de um representante de $\delta^i(z)$, portanto os caminhos coincidem. $\square$

6.3 HOMOTOPIA DE CADEIAS

Nessa seção, estudaremos as homotopias de cadeias. A motivação para essa seção vem em sua maior parte da Topologia Algébrica; porém, dentro da teoria de Álgebra Homológica que estamos desenvolvendo nesse trabalho, não é estranho nos perguntarmos quando dois complexos de cocadeias induzem o mesmo grupo de cohomologia, a homotopia de cadeias nos ajuda a responder essa pergunta.

Tomemos agora dois complexos de cocadeias $C^\bullet$ e $D^\bullet$ em uma categoria abeliana qualquer, junto com morfismos $s^i : C^i \to D^{i-1}$ quaisquer. Podemos definir morfismos

$f^i = d_D^{i-1}s^i + s^{i+1}d_C^i$, como mostra o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_C^{i-2}"] & C^{i-1} \arrow[r, "d_C^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] \arrow[dl, "s^{i-1}"'] & C^i \arrow[r, "d_C^i"] \arrow[d, "f^i"] \arrow[dl, "s^i"'] & C^{i+1} \arrow[r, "d_C^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] \arrow[dl, "s^{i+1}"'] & \cdots \arrow[dl, "s^{i+2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "d_D^{i-2}"] & D^{i-1} \arrow[r, "d_D^{i-1}"] & D^i \arrow[r, "d_D^i"] & D^{i+1} \arrow[r, "d_D^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

Mostremos que $\{f^i\}$ formam um morfismo de complexo de cocadeias. De fato,

$$d_D^i f^i = d_D^i(d_D^{i-1}s^i + s^{i+1}d_C^i) = d_D^i s^{i+1} d_C^i = (d_D^i s^{i+1} + s^{i+2}d_C^i)d_C^{i+1} = f^{i+1}d_C^i.$$

Como podemos notar, nesses casos, os índices podem nos atrapalhar e nos exibem informações desnecessárias. A partir de agora, vamos começar a omitir os índices para simplificar a notação.

Definição 6.10. Dizemos que um morfismo de complexo de cocadeias $f : C \to D$ possui *homotopia nula*, se existe morfismos $s^i : C^i \to D^{i-1}$ tal que $f = ds + sd$. Os morfismos $\{s_i\}$ é chamado de contração de cocadeia de f.

Definição 6.11. Dizemos que dois morfismos de complexos de cocadeias $f, g : C \to D$ são *homotópicos de cocadeia* se $f - g$ possui homotopia nula, ou seja $f - g = sd + ds$ onde a família $s^i : C^i \to D^{i-1}$ é chamada de *homotopia de cocadeia*. Também, dizemos que $f : C \to D$ é um *homotopismo*[9] se existe um morfismo de complexo de cocadeias $g : D \to C$ tal que fg e gf são homotópicas de cocadeias as identidades.

Lema 6.2. *Se $f : C \to D$ possui homotopia nula, então o morfismo $f^{*,i} : H^i(C) \to H^i(D)$ é zero para todo i. Portanto, se $f, g : C \to D$ são homotópicos de cocadeia, então eles induzem os mesmo morfismos $H^i(C) \to H^i(D)$.*

Demonstração. Utilizando as notações anteriores, seja $f = ds + sd$. Tome $z \in H^i(C)$, representado por $c \in \ker d$. Dessa forma, $f(z) = ds(c) + sd(c) = d(sc)$. Portanto, $f(z)$ está na imagem de d e portanto é zero em $H^i(D)$. E o resultado vale para uma categoria abeliana qualquer pela Imersão de Freyde-Mitchell. □

6.4 δ-FUNTORES E RESOLUÇÕES INJETIVAS

Nesse capítulo, vamos desenvolver a teoria dos δ-funtores, desenvolvida inicialmente em (Grothendieck, 1957), que também é uma ótima referência para essa seção. Utilizaremos a linguagem dos δ-funtores para, em uma próxima seção, a teoria de funtores derivadas se mostrar de forma natural.

[9] Em muitas referências é chamado equivalência homotópica de cocadeias.

Definição 6.12. Um δ-*funtor* cohomológico entre duas categorias abelianas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é o seguinte conjunto de informações:

(i) uma coleção de funtores aditivos $T^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ para $n \geq 0$, por convenção $T^n = 0$ para $n < 0$;

(ii) uma coleção de morfismos $\delta^n : T^n(C) \to T^{n+1}(A)$ para cada sequência exata curta $0 \to A \to B \to C \to 0$ em $\mathcal{A}$.

De tal forma que satisfaz as seguintes condições:

(i) Para cada sequência exata como acima, existe uma sequência exata longa

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T^0(A) \arrow[r] & T^0(B) \arrow[r] & T^0(C) \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[pos=0.75, below]{δ^0} ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\ & T^1(A) \arrow[r] & T^1(B) \arrow[r] & T^1(C) \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[pos=0.75, below]{δ^1} ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\ & T^2(A) \arrow[r] & T^2(B) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

(ii) Para cada morfismo de sequências exatas curtas de $0 \to A \to B \to C \to 0$ para $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ em $\mathcal{A}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd} T^n(C) \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d] & T^{n+1}(A) \arrow[d] \\ T^n(C') \arrow[r, "\delta^n"] & T^{n+1}(A') \end{tikzcd}$$

comutam.

Notamos que a condição (i) implica que T^0 é exato à esquerda. Além disso, a condição (ii) é necessária para assegurarmos a naturalidade de um δ-funtor.

Exemplo 6.6. Pela Proposição 6.5, a cohomologia nos dá uma δ-funtor cohomológico $H^\bullet : \mathrm{Cocad}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, onde $\mathrm{Cocad}^{\geq 0}(\mathcal{A})$ é a categoria dos complexos de cocadeia em $\mathcal{A}$ com índices negativos triviais.

Definição 6.13. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ categorias abelianas; e (T^n, δ_T) e (S^n, δ_S). Um morfismo $(T^n, \delta_T) \to (S^n, \delta_S)$ é um sistema de transformações naturais $f^n : T^n \to S^n$, com $n \geq 0$ que comutam os morfismos δ. Isto é, para toda sequência exata curta $0 \to A \to B \to C \to 0$ em $\mathcal{A}$ os diagramas

$$\begin{tikzcd} T^n(C) \arrow[r, "\delta_T^n"] \arrow[d, "f^n"] & T^{n+1}(A) \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ S^n(C) \arrow[r, "\delta_S^n"] & S^{n+1}(A) \end{tikzcd}$$

comutam.

Definição 6.14. Um δ-funtor cohomológico T é dito *universal* se, dado qualquer δ-funtor S e uma transformação natural $f^0 : T^0 \to S^0$, existe um morfismo único $\{f^n : T^n \to S^n\}$ de δ-funtores que estende f^0.

O nome "universal" vem do fato que esse funtor satisfaz uma propriedade universal na categoria dos funtores derivados: dado qualquer morfismo $f^0 : T^0 \to S^0$ existe um único morfismo $f^n : T^n \to S^n$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} T^n \arrow[r, dotted, "\exists! f^n"] & S^n \\ T^0. \arrow[u] \arrow[ur, "f^0"'] & \end{tikzcd}$$

Nesse diagrama, T^0 é entendido como um δ-funtor cohomológico com grau positivo nulo, f^0 é a composição de f^0 com a "inclusão" de S^0 em S^n, e a seta vertical é a "inclusão" de T^0 em T^n. Portanto em particular, dado um morfismo $f^0 : T^0 \to S^0$, temos essencialmente um único δ-funtor cohomológico que o estende.

Exemplo 6.7. Veremos em breve que $H^\bullet : \mathrm{Cocad}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ é um δ-funtor cohomológico universal.

Dado um funtor aditivo exato à esquerda $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, para toda sequência exata $0 \to A \to B \to C \to D$ em $\mathcal{A}$, gostaríamos de saber se é possível "completar" a sequência exata de modo a conseguir uma sequência exata longa, assim como acontece na cohomologia. Na linguagem que desenvolvemos, isso é equivalente a encontrar um δ-funtor cohomológico T tal que $T^0 = F$. Se esperamos que esse "completamento" seja único, é preciso pedir na verdade um δ-funtor cohomológico universal, pois pela definição deve existir essencialmente um tal que $T^0 = F$. Se tal δ-funtor T existe, os funtores T^n são chamados de *funtores satélite à direita de* F. A noção de funtores derivados (que serão δ-funtores universais) sanará nossas dúvidas, porém primeiramente devemos estudar os elementos injetivos de uma categoria.

Sabemos que, pelo Corolário 6.1, $\mathrm{Hom}(-, I) : A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ é exato à esquerda. Uma pergunta natural a se fazer é: para quais $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ o funtor contravariante $\mathrm{Hom}(-, I)$ exato? Em outras palavras, para quais objetos I qualquer sequência exata $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ em $\mathcal{A}$ a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, I) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, I) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, I) \longrightarrow 0$$

é exata em Ab? Claro que, pelo corolário já citado, basta f^* ser epimorfismo em Ab para todo f monomorfismo em $\mathcal{A}$. Ou seja, para monomorfismo $f : A \to B$ e todo $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, I)$

deve existir $\beta \in \mathrm{Hom}(B,I)$ tal que $f^*(\beta) = \beta f = \alpha$. Daremos um nome para o objeto que definimos.

Definição 6.15. Um objeto I em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ é dito *injetivo* se para todo monomorfismo $f : A \to B$ e para todo morfismo $\alpha : A \to I$ existe ao menos um morfismo $\beta : B \to I$ tal que $\alpha = \beta \circ f$. Em um diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[dl, "\exists\beta"] \\ & I. & \end{tikzcd}$$

Dizemos que $\mathcal{A}$ possui *injetivos o suficiente* se para todo objeto A em $\mathcal{A}$ existe um monomorfismo $A \to I$ com I um injetivo.

Observamos que se $\{I_\alpha\}$ é uma família de injetivos, então o produto $\prod I_\alpha$ também é um injetivo. Pela discussão anterior a definição, o seguinte lema não precisa de uma demonstração.

Lema 6.3. *Seja I um objeto em uma categoria abeliana A, I é injetivo se, e somente se, o funtor contravariante* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,I) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ *é exato.*

Segue um critério que utilizamos para detectar módulos injetivos. Omitiremos a prova, pois é uma prova de existência não construtiva, portanto não nos ajuda a encontrar objetivos injetivos. O Leitor interessado pode encontrá-la em (Weibel, 1994).

Teorema 6.4 (Critério de Baer)**.** *Um R-módulo E é injetivo se, e somente se, para todo ideal a esquerda J de R todo homomorfismo de R-módulos $J \to E$ pode ser estendido para um homomorfismo $R \to E$* [10]*, ou seja, tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d, "i"] & E \\ R \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

comuta, onde i é a inclusão.

Uma aplicação direta do Critério de Baer é o seguinte lema.

Exemplo 6.8. Mostremos $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um objeto injetivo em Ab. Entendendo um grupo abeliano como um $\mathbb{Z}$-módulo, pelo Critério de Baer, basta provarmos que para todo $n\mathbb{Z}$ e para todo morfismo $f : n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, existe um morfismo $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} n\mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, dotted, "F"'] & \end{tikzcd}$$

[10] Entendendo J e R como R-módulos.

comuta. De fato, seja $f : n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(n) = q + \mathbb{Z}$ para algum $q \in \mathcal{Q}$. Definimos $F(z) = (q/n)z + \mathbb{Z}$. De fato F estende f, pois $F(an) = (q/n)an + \mathbb{Z} = aq + \mathbb{Z} = f(an)$.

Não é difícil ver que podemos generalizar o exemplo anterior e enunciar o seguinte corolário.

Corolário 6.2. *Seja R um domínio de ideais principais. Um R-módulo é A injetivo se, e somente se, é divisível, ou seja, para todo $r \in R$ não nulo e todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $a = br$.*

A prova desse corolário é análoga ao exemplo anterior.

Proposição 6.6. *A categoria* Ab *dos grupos abelianos possui injetivos o suficiente.*

Demonstração. Seja A um grupo abeliano. Definimos,

$$I(A) := \prod_{\alpha \in Z} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

sendo $H := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, que é um objeto injetivo de Ab, pelo Exemplo 6.8 anterior e pelo fato que produto de objetos injetivos continua sendo injetivo. Temos então o morfismo natural

$$\begin{aligned} \xi_A : A &\longrightarrow I(A) \\ a &\longmapsto (\alpha(a))_{\alpha \in H}. \end{aligned}$$

Resta mostrar que ξ_A é um injetora. Não é difícil notar, pela definição de ξ_A, para todo $a \in A$ não nulo basta encontrarmos um $\alpha \in H$ tal que $\alpha(a) \neq 0$; vamos construir esse homomorfismo. Fixe um $a \in A$, seja $a\mathbb{Z}$ o subgrupo de A gerado por a, temos dois casos: se a ordem de a é infinita, basta definimos $f : a\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $f(a) = 1/2 + \mathbb{Z}$; caso a ordem de a é um número finito n, definimos $f : a\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $f(a) = 1/n + \mathbb{Z}$, que está bem definido pela ordem de a. Nos dois casos, como pelo lema anterior $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é injetivo, existe $\alpha : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que estende f, isto é $\alpha(a) \neq 0$ como queríamos. $\square$

Definição 6.16. Seja M um objeto de $\mathcal{A}$. Uma *resolução a direita* de M é um complexo de cocadeias $I^\bullet$ com $I^i = 0$ para $i < 0$ e um morfismo $M \to I^0$ tal que o complexo

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots \tag{6.6}$$

é exato. É uma *resolução injetiva* se cada I^i é injetivo.

Observamos que a sequência (6.6) é equivalente a um morfismo de complexos de cocadeias $M \to I^\bullet$; onde M é entendido como o complexo de cocadeias $\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdots$, não trivial apenas no grau 0.

Lema 6.4. *Se uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ possui injetivos o suficiente, então todo objeto em $\mathcal{A}$ possui uma resolução injetiva.*

Demonstração. Inicialmente, escolhemos um objeto injetivo I^0 e um monomorfismo $\lambda^0 : M \to I^0$. Definimos $M^0 := \operatorname{coker}\lambda^0$. Novamente, escolhemos um objeto injetivo I^1 e um monomorfismo $\lambda^1 : M^0 \to I^1$ e definimos $M^1 := \operatorname{coker}\lambda^1$. Repetindo esse processo indutivamente, para cada M^{i-1} escolhemos um elemento injetivo I^i e um monomorfismo $\lambda^i : M^{i-1} \to I^i$. Dessa forma, definimos $d^i := \lambda^{i+1} \circ \operatorname{coker}\lambda^i$, assim como no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
& & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& & & & & M^0 \arrow[ur] \arrow[dr, "\lambda^1"] & & & & M^2 \arrow[ur] \arrow[dr, "\lambda^3"] & & & \\
0 \arrow[rr] & & M \arrow[rr, "\lambda^0"] & & I^0 \arrow[ur, "\operatorname{coker}\lambda^0"] \arrow[rr, "d^0"] & & I^1 \arrow[dr, "\operatorname{coker}\lambda^1"'] \arrow[rr, "d^1"] & & I^2 \arrow[ur, "\operatorname{coker}\lambda^2"] \arrow[rr, "d^2"] & & I^3 \arrow[dr, "\operatorname{coker}\lambda^3"'] \arrow[rr, "d^3"] & & \cdots \\
& & & & & & & M^1 \arrow[ur, "\lambda^2"'] \arrow[dr] & & & & M^3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd}$$

Provemos que é uma sequência exata. De fato, $\operatorname{im} d^i = \operatorname{im}(\lambda^{i+1} \circ \operatorname{coker}\lambda^i) = M^{i+1}$, pois $\operatorname{coker}\lambda^i$ é um epimorfismo e λ^{i+1} é monomorfismo; e também $\ker d^{i+1} = \ker(\lambda^{i+2} \circ \operatorname{coker}\lambda^{i+1}) = \ker(\operatorname{coker}\lambda^{i+1}) = \operatorname{im}\lambda^{i+1} = M^{i+1}$, pois $\operatorname{coker}\lambda^{i+1}$ é um epimorfismo, λ^{i+2} e λ^{i+1} são monomorfismos. $\square$

Teorema 6.5 (Teorema da Comparação)**.** *Seja $N \to I^\bullet$ uma resolução injetiva de N e $f' : M \to N$ um morfismo em $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana A. Então para toda resolução $M \to E^\bullet$ existe um morfismo de cocadeias $F : E^\bullet \to I^\bullet$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & E^0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & E^1 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & E^2 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

comuta. Além disso, o morfismo F é único a menos de homotopia de cocadeia.

Uma prova desse teorema pode ser encontrada em (Weibel, 1994). Devemos mostrar agora que a categoria R-Mod possui injetivos o suficiente.

Lema 6.5. *O funtor esquecedor* [11] *de* R-Mod *para* Ab *possui* $\operatorname{Hom}_{\mathrm{Ab}}(R, -)$ *como um adjunto a direita. De forma explícita, para todo R-módulo a esquerda M, o homomorfismo*

$$\begin{aligned}
\tau : \operatorname{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, A) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\text{R-Mod}}(M, \operatorname{Hom}_{\mathrm{Ab}}(R, A)) \\
f &\longmapsto (m \mapsto (r \mapsto f(rm)))
\end{aligned}$$

[11] Funtor que leva um R-módulo a um grupo abeliano "esquecendo" sua estrutura de multiplicação externa.

é um isomorfismo de R-módulos.[12]

Demonstração. Definimos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \mu : \mathrm{Hom}_{\text{R-Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(R,A)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M,A) \\ g &\longmapsto (m \mapsto g(m)(1)), \end{aligned}$$

e provemos que é a inverso de τ. De fato,

$$\mu(\tau(f)) = \mu(m \mapsto (r \mapsto f(rm))) = m \mapsto f(m) = f,$$

e

$$\tau(\mu(g)) = \tau(m \mapsto g(m)(1)) = m \mapsto (r \mapsto g(rm)(1)) = m \mapsto g(m) = g$$

A naturalidade segue de uma maneira direta. □

Proposição 6.7. *Se um funtor aditivo $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é adjunto a direita a um funtor exato $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e I é um objeto injetivo de $\mathcal{B}$, então $R(I)$ é objeto injetivo de A.*

Demonstração. Pelo Lema 6.3, basta mostrarmos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, R(I))$ é exato; mas pelo Corolário 6.1 já sabemos que é exato à esquerda, ou seja, resta provarmos que ele leva um monomorfismo $f : A \to A'$ de $\mathcal{A}$ em um epimorfismo $f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', R(I)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(I))$. Pela naturalidade da adjunção, segue que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A'), I) \arrow[r, "Lf^*"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), I) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', R(I)) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, R(I)) \end{tikzcd} .$$

Do fato que L é exato e I é injetor, Lf^* é sobrejetora; logo f^* também é. □

Nas hipóteses da proposição anterior, dizemos que R preserva injetivos.

Corolário 6.3. *Se I é um grupo abeliano injetivo, então* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(R, I)$ *é um R-módulo injetivo.*

Proposição 6.8. *A categoria* R-Mod *possui injetivos o suficiente. Em particular, qualquer R-módulo possui uma resolução injetiva.*

Demonstração. Seja $M \in \mathrm{Ob}(\text{R-Mod})$, definimos as notações $I_0 := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $H := \mathrm{Hom}_{\text{R-Mod}}(M, I_0)$ e

$$I(M) := \prod_{f \in H} I_0.$$

[12] Lembrando que podemos dotar $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M,G)$, onde G é um grupo abeliano e M um R-módulo, de um estrutura de R-módulo utilizando $rf : m \mapsto f(rm)$ onde $r \in R$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M,G)$, $m \in M$.

Pelo corolário anterior, I_0 é injetivo, portanto $I(M)$ é injetivo. Mostremos que a função

$$\begin{aligned} e_M : M &\longrightarrow I(M) \\ m &\longmapsto (f(m))_{f \in H} \end{aligned}$$

é injetora. Mas isso equivale a provar que para todo $m \in M$ existe $f \in H$ tal que $f(m) \neq 0$. Observamos que pelo Lema 6.5, $H \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, e, pela sua prova, basta encontrarmos $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tal que $g(m) \neq 0$; construímos agora essa função.

Fixamos um $m \in M$ não nulo. Defina um homomorfismo $\rho : \mathbb{Z} \to M$ dado por $\rho(1) = m$, e seja $n\mathbb{Z}$ seu kernel (que não é $\mathbb{Z}$, pois $\rho(1) = m$). Assim, pelo teorema do isomorfismo, temos o homomorfismo $\lambda : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to M$ injetor. Dividimos então em dois casos: se $n\mathbb{Z} = 0$, definimos uma função $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\zeta(1) = 1/2$; se $n\mathbb{Z} \neq 0$, definimos $\zeta : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\zeta(1) = 1/n$. Em ambos os casos, como λ é injetora e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um objeto injetor (cf. Exemplo 6.8), podemos estender ζ para um morfismo $g : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, que por construção é não nulo em m. $\square$

6.5 FUNTORES DERIVADOS

O objetivo dessa seção é apresentar os funtores derivados e provar que são δ-funtores cohomológicos universais.

Definição 6.17. Seja $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor exato à esquerda entre duas categorias abelianas tal que $\mathcal{A}$ possui injetivos o suficiente. O *o funtor derivado à direita* R^iF, com $I \geq 0$, de F é construído da seguinte maneira: se $A \in \mathrm{Ob}(A)$, escolhemos (uma vez e por todas) um objeto resolução injetiva $A \to I^\bullet$ e definimos

$$R^iF(A) := H^i(F(I^\bullet)).$$

Notamos que $R^0F(A) \simeq F(A)$. De fato, $R^0F(A) = H^0(F(I^\bullet))$, mas, se $F(I^\bullet)$ é $0 \to F(I^0) \xrightarrow{d} F(I^1) \to \cdots$ então $H^0(F(I^\bullet)) = \ker d$. Mas sabemos também que F é exato à esquerda, assim $0 \to F(A) \to F(I^0) \xrightarrow{d} F(I^1)$ é exato, ou seja, $\ker d \simeq F(A)$ e temos o resultado.

Provemos que R^iF está bem definido, isto é, não depende da escolha da resolução injetiva.

Lema 6.6. *Os objetos $R^iF(A)$ de $\mathcal{B}$ estão bem definidos a menos de isomorfismo natural. Ou seja, se $A \to E$ é outra resolução injetiva então existe $R^iF(A) = H^i(F(I)) \xrightarrow{\simeq} H^i(F(E))$.*

Demonstração. Pelo Teoria da Comparação (Teorema 6.5), existe um morfismo de cocadeias $f : I \to E$ que estende id_A único a menos de homotopia de cadeia; portanto pelo Lema 6.2 o morfismo $Ff_* : H^iF(I) \to H^iF(E)$ é único. Da mesma forma, existe um morfismo de cocadeias $g : E \to I$ que estende id_A e teremos um único $Fg_* : H^i F(I) \to H^i F(E)$. Como gf e id_I são ambos morfismos de cocadeias que estendem id_A, segue que $(gf)_* = (\mathrm{id}_I)_* \Rightarrow (FgFf)_* F = (\mathrm{id}_{F(I)})_* \Rightarrow g_* F f_* = (\mathrm{id}_{F(I)})_*$, que é a identidade de $H^i F(I)$. Analogamente, $g_* f_*$ é a identidade de $H^i F(E)$; portanto, Ff^* e Fg^* são isomorfismos. □

Corolário 6.4. *Se A é injetivo, então $R^i F(A) = 0$ para todo $i > 0$.*

Demonstração. Se A é injetivo, então $0 \to A \to A \to 0 \to \cdots$ é uma resolução injetiva, onde o morfismo de A é A é a identidade. Como, pelo lema anterior, $R^i F(A)$ não depende da resolução injetiva, segue o resultado. □

Queremos agora provar que $R^* F$ é um delta funtor cohomológico. O seguinte lema mostra que $R^i F$ possui propriedades funtoriais.

Lema 6.7. *Seja $f : A \to A'$ um morfismo em A. Existe um morfismo natural $R^i F(f) : R^i F(A) \to R^i F(A')$.*

Demonstração. Sejam $A \to I$ e $A' \to I'$ resoluções injetivas. O Teorema da Comparação (Teorema 6.5) nos dá uma morfismo $\overline{f} : A \to A'$ que estende f de modo único a menos de homotopia de cadeia. Assim $F\overline{f}_* : H^i F(I) \to H^i F(I')$ é único e portanto $R^i F(f) := F\overline{f}_*$. □

Teorema 6.1. *Cada $R^i F$ é um funtor aditivo de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Direto do fato que F e o funtor H^i de são aditivos. □

Vamos enunciar o seguinte lema que nos auxiliará a provar que $R^* F$ é de fato um δ-funtor cohomológico.

Lema 6.8 (Lema da Ferradura)**.** *Dado um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I_A^0 \arrow[r] & I_A^1 \arrow[r] & I_A^2 \arrow[r] & \cdots \\
 & B \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & I_C^0 \arrow[r] & I_C^1 \arrow[r] & I_C^2 \arrow[r] & \cdots \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

onde a coluna é exata e as linhas são resoluções injetivas. Definimos $I_B^i = I_A^i \oplus I_C^i$. Dessa forma, I_B^i forma uma resolução injetiva de B e

$$0 \longrightarrow I_A \xrightarrow{i} I_B \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexo de cocadeias (que cinde), onde i e a inclusão π a projeção natural.

Uma prova pode ser encontrada em (Weibel, 1994).

Teorema 6.6. *O funtor derivado R^*F é um δ-funtor cohomológico.*

Demonstração. Dada uma sequência exata curta $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, escolhemos resoluções projetivas $A \to I'$ e $A'' \to I''$. Pelo Lema da Ferradura (Lema 6.8), existe uma resolução projetiva $A \to I$ que torna $0 \to I' \to I \to I'' \to 0$ exata de forma que as sequência $0 \to I'^i \to I^i \to I''^i \to 0$ é exata e cinde para todo i. Como F é um funtor aditivo, cada sequência

$$0 \longrightarrow F(I'^i) \longrightarrow F(I^i) \longrightarrow F(I''^i) \longrightarrow 0$$

é também exata e cinde. Portanto, a sequência

$$0 \longrightarrow F(I') \longrightarrow F(I) \longrightarrow F(I'') \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexo de cocadeias. Pelo fato que H^i é um δ-funtor cohomológico, seque que existem δ's que formam a sequência exata longa abaixo.

$$\cdots \longrightarrow R^iF(A) \longrightarrow R^iF(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A') \longrightarrow R^{i+1}F(A) \longrightarrow \cdots$$

A naturalidade dos δ's segue da naturalidade dos H^i e do Lema da Ferradura. $\square$

Teorema 6.7. *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana com injetivos o suficiente. Então para qualquer funtor exato à esquerda $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, o funtor derivado à direita R^*F é um δ-funtor universal.*

Demonstração. Seja T^* um δ-funtor cohomológico e $\varphi^0 : F \to T^0$ o morfismo de grau 0, mostraremos por indução que podemos estender φ^0 para um morfismo $\varphi : R^*F \to T^*$. Suponha $\varphi^i : T^i \to R^iF$ estão bem definidos para $0 \leq i < n$. Tomamos $A \in \mathcal{A}$ e escolhemos a sequência

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I \longrightarrow K \longrightarrow 0\ ,$$

sendo I injetivo. Dessa forma $R^nF(I) = 0$, e portanto da hipótese injetiva temos que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
T^{n-1}(I) \arrow[r] & T^{n-1}(K) \arrow[r, "\delta_T^{n-1}"] & T^n(A) & \\
R^{n-1}F(I) \arrow[r] \arrow[u, "\varphi^{n-1}"] & R^{n-1}F(K) \arrow[r, "\delta_{RF}^{n-1}"] \arrow[u, "\varphi^{n-1}"] & R^nF(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad . \tag{6.7}$$

Como δ_{RF}^{n-1} é sobrejetora, existe sua inversa $\xi : R^nF(A) \to R^{n-1}F(K)$ (que depende de uma escolha). Mas, pela exatidão da sequência e da comutatividade do diagrama, $\varphi^n := \delta_T^{n-1}\varphi^{n-1}\xi$ está bem definido (independe da escolha). Dessa forma, o diagrama comuta: $\varphi^n\delta_{RF}^{n-1} = \delta_T^{n-1}\varphi^{n-1}\xi\delta_{RF}^{n-1} = \delta_T^{n-1}\varphi^{n-1}$; e claro, para que o diagrama comute, essa definição é única. Vamos mostrar agora que φ^n é uma transformação natural e comuta com todos δ's.

Primeiramente, mostremos que φ^n é uma transformação natural. Seja $f : A \to A'$ e uma sequência exata $0 \longrightarrow A' \longrightarrow I' \longrightarrow K' \longrightarrow 0$, onde I é injetivo. Notemos que como I' é injetivo fica definido $g : I \to I'$, que, por um argumento similar já usado, induz $h : K \to K'$ da forma que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & I \arrow[r] \arrow[d, "g"] & K \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & I' \arrow[r] & K' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

Do fato que R^*f e T^* são δ-funtores cohomológicos e da hipótese de indução, temos que cada quadrilátero do diagrama a seguir comuta, menos a "face frontal" do cubo, que ainda devemos provar a comutatividade.

$$\begin{tikzcd}
& T^{n-1}(K) \arrow[rr, "T^{n-1}(h)"] \arrow[dl, "\delta_T^{n-1}"'] & & T^{n-1}(K') \arrow[dl, "\delta_T^{n-1}"] \\
T^n(A) \arrow[rr, "T^{n-1}(f)"] & & T^n(A') & \\
& R^{n-1}F(K) \arrow[rr, "R^{n-1}F(h)"] \arrow[uu, "\varphi^{n-1}"'] \arrow[dl, "\delta_{RF}^{n-1}"'] & & R^{n-1}F(K') \arrow[uu, "\varphi^{n-1}"'] \arrow[dl, "\delta_{RF}^{n-1}"] \\
R^nF(A) \arrow[rr, "R^{n-1}F(f)"] \arrow[uu, "\varphi^n"] & & R^nF(A') \arrow[uu, "\varphi^n"] &
\end{tikzcd}$$

Pela comutatividade, chegamos que $T^{n-1}(f)\varphi^n\delta_{RF}^{n-1} = \varphi^n R^{n-1}F(f)\delta_{RF}^{n-1}$, como δ_{RF}^{n-1} é epimorfismo (pelo diagrama (6.7)), chegamos que a "face frontal" do cubo também comuta. Dessa comutatividade, se escolhermos $A = A'$ e $f = \mathrm{id}_A$, também concluímos que que φ_n independe da escolha de I.

Por último, provamos a comutatividade de φ^n com os δ's. Dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ escolhemos outra $0 \longrightarrow A \longrightarrow I \longrightarrow K \longrightarrow 0$ com I injetivo. Dessa forma, podemos construir f e g como no diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & I \arrow[r] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}, \tag{6.8}$$

da mesma forma que foi feito anteriormente. Assim aplicando T^* e R^*F temos o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccccc} R^{n-1}F(C) & \xrightarrow{R^{n-1}F(g)} & R^{n-1}F(K) & \xrightarrow{\delta^{n-1}_{RF}} & R^nF(A) \\ \downarrow{\varphi^{n-1}} & & \downarrow{\varphi^{n-1}} & & \downarrow{\varphi^{n}} \\ T^{n-1}(C) & \xrightarrow{T^{n-1}(g)} & T^{n-1}(K) & \xrightarrow{\delta^{n-1}_{T}} & T^n(A) \end{array} .$$

Mas, observamos que a composta dos morfismos horizontais nesse diagrama nos dá o δ^n da primeira linha do diagrama (6.8), portanto segue o resultado. □

Notamos que para essa demonstração foi de suma importância que para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ exista um monomorfismo $i : A \to I$ tal que $F(i) = 0$, que nesse caso foi garantido pois temos injetivos o suficiente em $\mathcal{A}$. Generalizamos essa propriedade na seguinte definição.

Definição 6.18. Um funtor aditivo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dito *apagável*[13] se para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ existe um monomorfismo $i : A \to I$ tal que $F(i) = 0$.

Da demonstração do Teorema 6.7, segue o seguinte teorema mais geral.

Teorema 6.8. *Se T^* é um δ-funtor cohomológico tal que T^n é apagável para todo $i > 0$, então T^* é universal.*

Corolário 6.5. *O funtor cohomologia $H^\bullet : \mathrm{Cocad}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ é um δ-funtor cohomológico universal.*

Demonstração. Dado $A \in \mathrm{Cocad} \geq 0(\mathcal{A})$, a existência de do cone[14] de A o torna $H^\bullet$ um apagável. □

Exemplo 6.9. Pela Proposição 6.4, $\mathrm{Hom}_{\text{R-Mod}}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ é exato à esquerda. Então para todo R-módulo A, podemos definir

$$\mathrm{Ext}^i_R(A, B) = R^i \,\mathrm{Hom}_{\text{R-Mod}}(A, -)(B).$$

O funtor Ext possui um papel central na álgebra homológica, mas não vamos explorá-lo esse trabalho.

Vale observar que a toda a teoria desenvolvida nesse capítulo, resoluções injetivas e funtores derivados a direita, pode ser dualizada chegando na teoria de resoluções projetivas e funtores derivados a esquerda. Como o funtor de seções globais, o qual a cohomologia de feixes é derivado, é exato à esquerda, a teoria que desenvolvemos basta para nossos fins.

13 Também é conhecido pelo nome em francês "effaçable", pela importância de (Grothendieck, 1957).

14 Não vamos nos aprofundar na existência do cone, pois para bem entendê-los é necessário pré-requisitos em álgebra homológica, que sai do foco do nosso trabalho.

7 COHOMOLOGIA DE FEIXES

Nesse capítulo, vamos utilizar a teoria que desenvolvemos para definir a Cohomologia de Feixes, que será o funtor derivado à direita do feixe de seções globais. Já sabemos, pela Proposição 6.3, que a categoria Feixes_X é abeliana, vamos mostrar que possui injetivos o suficiente. Nesse capítulo, X será sempre um espaço topológico.

Lema 7.1. *Fixe $p \in X$. Seja $p_x : \text{R-Mod} \to \mathrm{Feixes}_X$ o feixe que leva um R-módulo M no feixe arranha-céu $p_*(M)$ (cf. Exemplo 3.11) e $\tau_p : \mathrm{Feixes}_X \to \text{R-Mod}$ que leva um feixe $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}_p$, seu talo em p. Então τ_p e p_* formam um par de funtores adjuntos.*

Demonstração. Definimos o isomorfismo natural

$$\xi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\tau_p(\mathcal{F}), M) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Feixes}_X}(F, p_*(M)).$$

da seguinte maneira: dado um aberto $U \subset X$, se $p \in U$ fica definido $\xi(\varphi)_U := \mathcal{F}(U) \to p_*(M)(U)$ por $\xi(\varphi)_U = \varphi \circ \pi_p$[15] para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\tau_p(\mathcal{F}), M)$; se $p \not\in U$, então $\xi(\varphi)_U \equiv 0$. Não é difícil provar que $\xi(\varphi)$ assim definido é um morfismo de $\mathcal{F}$ em $p_*(M)$. A função ξ^{-1} definimos da seguinte maneira: dado $\psi : F \to p_*(M)$, então $\xi^{-1}(\psi)([(s,U)]_p) = [(\psi(s),U)]_p$ para todo o $[(s,U)]_p \in \mathcal{F}_p$ [16]. É fácil ver que de fato ξ^{-1}, assim definida, é a função inversa de ξ. Para a naturalidade, basta observamos que para todo morfismo de feixes $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e par todo homomorfismos de R-módulos $g : M \to N$, o diagrama abaixo de fato comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\tau_p(G), M) \arrow[r, "\tau_p(f)^*"] \arrow[d, "\xi_{\mathcal{G}M}"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\tau_p(\mathcal{F}), M) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau_{\mathcal{F}M}"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\tau_p(\mathcal{F}), N) \arrow[d, "\tau_{\mathcal{F}N}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Feixes}_X}(G, p_*(M)) \arrow[r, "f^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Feixes}_X}(\mathcal{F}, p_*(M)) \arrow[r, "(p_*(g))_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Feixes}_X}(\mathcal{F}, p_*(N))
\end{tikzcd}.$$

□

Corolário 7.1. *Se M é R-módulo injetivo, então $p_*(M)$ é um feixe injetivo. Portanto, $\prod_{p \in X} p_*(M_p)$ se M_p é injetivo para todo $p \in P$.*

Demonstração. Segue direto pelo Lema 7.1 e pela Proposição 6.7. □

Com isso, já podemos mostrar que a categoria dos feixes possui injetivos o suficiente.

Teorema 7.1. *A categoria* Feixes_X *possui injetivos o suficiente.*

Demonstração. Fixemos um feixe $\mathcal{F}$. Pra cada $x \in X$, escolhemos $I_x \in$ R-Mod injetivo tal que $u_x : \mathcal{F}_x \to I_x$ é um monomorfismo (que é possível pois R-Mod possui injetivos o

[15] $\pi_p : F(U) \to \mathcal{F}_p$ é a projeção no talo: dada uma seção $s \in F(U)$, então $\pi_p(s) = [(s,U)]_p$.
[16] ξ^{-1} leva um morfismo de feixes no morfismo induzido no talo de p.

suficiente). Podemos definir então o morfismo de feixes

$$\rho : \mathcal{F} \longrightarrow \prod_{x \in X} x_*(I_x),$$

tal que para todo $U \subset X$ aberto, $\rho_U(s) = \{u_x(\pi_x(s))\}_{x\in X}$, onde π_x é a projeção ao talo de x. Afirmamos que ρ é injetora. De fato, para que $\rho_U(s) = 0$ devemos ter que $u_x(\pi_x(s)) = 0$ para todo $x \in U$, que ocorre se, e somente se, $\pi_x(s) = 0$ para todo $x \in U$ (pois u_x é injetora por hipótese); mas do fato que $\mathcal{F}$ é feixe, segue que é a seção nula em $\rho(U)$. Como ρ_U é injetora para todo aberto $U \subset X$, segue que ρ é injetora, como queríamos. □

Definição 7.1. O *funtor das seções globais* é o funtor $\Gamma : \text{Feixes}_X \to \text{R-Mod}$ tal que $\Gamma(\mathcal{F}) := F(X)$ para todo $F \in \text{Feixes}_X$.

Para que possamos tomar o funtor derivado à direita de Γ, devemos provar que esse é um funtor exato à esquerda.

Lema 7.2. *O funtor das seções globais Γ é adjunto a direita do funtor $\mathcal{C} : \text{R-Mod} \to \text{Feixes}_X$, que leva um R-módulo M no feixe constante M.*

Demonstração. Definimos

$$\xi : \text{Hom}_{\text{Feixes}_X}(\mathcal{C}(M), \mathcal{G}) \xrightarrow{\simeq} \text{Hom}_{\text{R-Mod}}(M, \Gamma(\mathcal{G})).$$

tal que $\xi(\rho) = \rho_X$ para todo $\rho \in \text{Hom}_{\text{Feixes}_X}(\mathcal{C}(M), \mathcal{G})$. Definimos também ξ^{-1} que leva $\varphi \in \text{Hom}_{\text{R-Mod}}(M, \Gamma(\mathcal{G}))$ em $\xi^{-1}(\varphi)_U(s) = \varphi(s)|_U$ para todo aberto $U \subset X$. Não é difícil ver que de fato são inversas e que vale a naturalidade. □

Corolário 7.2. *O funtor das seções globais $\Gamma : \text{Feixes}_X \to \text{R-Mod}$ é exato à esquerda.*

Demonstração. Segue do Lema 7.2 e do Apêndice B . □

Com o trabalho feito nessa seção, podemos finalmente definir a cohomologia de feixes.

Definição 7.2. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um feixe em X. Os *funtores de cohomologia de grau i em X com respeito ao $\mathcal{F}$*, denotados por $H^i(X, \mathcal{F})$, são os funtores derivados a direita do funtor das seções globais Γ. Ou seja,

$$H^i(X, \mathcal{F}) := R^i\Gamma(\mathcal{F}).$$

Exemplo 7.1. Vamos calcular $H^0(S^1, \mathbb{Z})$, ou seja, o grupo de cohomologia de grau 0 do feixe constante $\mathbb{Z}$ no círculo S^1. Encontremos resolução injetiva de $\mathbb{Z}$. Primeiramente, para facilitar a notação, definimos $X := S^1$, $\mathcal{F} := \prod_{x \in X} x_*(\mathbb{Q})$, $\mathcal{G} := \prod_{x \in X} x_*(\mathcal{F}_x/\mathbb{Z})$ e $\mathcal{H} :=$

$\prod_{x \in X} x_*(\mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x)$. Utilizando as ideias do Teorema 7.1, não é difícil ver que a sequência abaixo é de fato uma resolução injetiva de $\mathbb{Z}$.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \cdots.$$

Aplicando Γ, temos

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{f} \Gamma(\mathcal{G}) \xrightarrow{g} \Gamma(\mathcal{H}) \longrightarrow \cdots.$$

Devemos agora calcular o H^0 dessa sequência, que equivale a calcular o kernel de f. Vamos analisar os feixes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Observamos que $\mathcal{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathbb{Q}$, e $\mathcal{F}_x = [(s,U)]_x$ onde $s \in \mathcal{F}(U)$; de forma semelhante

$$\mathcal{G}(U) = \prod_{x \in U} \frac{\mathcal{F}_x}{\mathbb{Z}}.$$

Portanto $\ker f$ é composto das seções globais $s \in \Gamma(\mathcal{F}) = \prod_{x \in X} \mathbb{Q}$ tais que $s_x \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in X$. Mas, como se trata de um feixe e do fato que X é conexa, cada s_x pode se colar em apenas uma seção $s \in \mathbb{Z}$; portanto $H^0(S^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Da mesma forma, poderíamos calcular $H^1(S^1, \mathbb{Z})$. Porém, notamos que há certa dificuldade de calcular esse quociente, e fica bastante complicado aplicar os argumentos topológicos nesse contexto. Daí, fica claro a importância da Cohomologia de Čech como ferramenta para calcular esses grupos, já que nesse caso simples já temos uma enorme dificuldade de computar os grupos de cohomologia.

Esse exemplo então mostra a importância de termos estudado a Cohomologia de Čech. Para uma discussão mais detalhada das relações da Cohomologia de Čech e a Cohomologia de Feixes, incluindo a prova que coincidem em um espaço paracompacto recomendamos (Bruzzo, 2004). Na mesma referência, o leitor também pode entender qual a falha da Cohomologia de Čech em espaços não paracompactos, já que essa não forma uma sequência exata longa como desejaríamos de uma teoria cohomológica; daí fica completamente motivado o estudo da Cohomologia de Feixes.

REFERÊNCIAS

BREDON, Glen. **Sheaf Theory**. 2. ed. New York: Springer–Verlag, 1997. (Graduate Texts in Mathematics). Citado na p. 16.

BRUZZO, Ugo. **Introduction to Algebraic Topology and Algebraic Geometry**. Trieste: International School for Advanced Studies, 2004. Citado nas pp. 23, 28, 34, 60.

FREYD, Peter. **Abelian Categories**: An Introduction to the Theory of Functors. New York: Harper & Row, 1964. (Harper's Series in Modern Mathematics). Citado nas pp. 35, 42.

GODEMENT, Roger. **Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux**. Paris: Hermann, 1998. (Publications de L'lnstitut de Mathématique de L'Université de Strasbourg XIII). Citado nas pp. 16, 23.

GROTHENDIECK, Alexander. Sur quelques points d'algèbre homologique, I. **Tohoku Mathematical Journal**, Tohoku University, Mathematical Institute, v. 9, n. 2, p. 119–221, 1957. DOI: 10.2748/tmj/1178244839. Disponível em: <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244839>. Citado nas pp. 35, 46, 57.

HILTON, Peter J.; STAMMBACH, Urs. **A Course in Homological Algebra**. 2. ed. New York: Springer New York, 1997. (Graduate Texts in Mathematics). Citado nas pp. 23, 35.

LANE, Saunders Mac. **Categories for the Working Mathematician**. 2. ed. New York: Springer, 1978. (Graduate Texts in Mathematics). Citado nas pp. 7, 62.

ROTMAN, Joseph J. **An Introduction to Homological Algebra**. 2. ed. New York: Springer New York, 1979. (Universitext). Citado nas pp. 23, 35, 43.

WEIBEL, Charles A. **An Introduction to Homological Algebra**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. (Graduate Texts in Mathematics). Citado nas pp. 23, 35, 49, 51, 55.

APÊNDICE A – LEMA DE YONEDA

Nesse apêndice, vamos enunciar dois lemas (que são corolários do Lema de Yoneda mais geral, porém são suficientes para nossas necessidades nesse trabalho).

Lema A .1 (Imersão de Yoneda)**.** *Toda categoria aditiva $\mathcal{A}$ pode ser imersa na categoria abeliana* $\mathrm{Funct}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$*, pelo funtor*

$$\begin{aligned} h : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathrm{Func}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) \\ A &\longmapsto h_A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Observamos que como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -)$ é exato a esquerda (cf. Proposição 6.4), segue que h é exato a esquerda.

Lema A .2 (Lema de Yoneda)**.** *Uma sequência* $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *é exata em $\mathcal{A}$ sempre que para todo $M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ a sequência*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$$

é exata.

Uma prova do Lema de Yoneda pode ser encontrada em (Lane, 1978).

APÊNDICE B – FUNTORES ADJUNTOS E EXATIDÃO

Nesse apêndice, discutiremos brevemente a relação entre adjunção e exatidão de funtores.

Teorema B .1. *Seja $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ um par de funtores adjuntos aditivos, ou seja, tal que*

$$\tau_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B)).$$

é um isomorfismo natural. Então L é exato a direita e R é exato a esquerda.

Demonstração. Primeiramente, provemos que que R é exato a esquerda. Seja $0 \to B \to B' \to B'' \to 0$ uma sequência exata em $\mathcal{B}$. Como o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), -)$ é exato a esquerda (cf. Proposição 6.4), segue que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B'')$$

é exata em $\mathcal{A}$. Mas, pela naturalidade dos morfismos τ, segue que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, R(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, R(B')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A, R(B''))$$

é exata. Pelo Lema de Yoneda (cf. Apêndice A), segue que a sequência

$$0 \longrightarrow R(B) \longrightarrow R(B') \longrightarrow R(B'')$$

é exata, portanto R é exato a esquerda. Além disso, dado que L^{op} é adjunto a direita (pois L é adjunto a esquerda), segue que L^{op} é exato a esquerda, portanto L é exato a direita. □

Essa propriedade dos funtores adjuntos é um reflexo do fato que eles preservam (co)limites e (co)limites fracos (em particular, isso implica também que preservam (co)kernels, (co)produtos, objetos injetivos, etc.) Mas, como não tratamos de (co)limites nesse trabalho, o teorema anterior é suficiente para nossas necessidades.