



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

## **Grafos de grupos e grupos de Baumslag-Solitar generalizados**

Fernanda Ferrucci Tegen

São Carlos-SP  
Abril de 2024





**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

## **Grafos de grupos e grupos de Baumslag-Solitar generalizados**

Fernanda Ferrucci Tegon

Orientador: Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP  
Abril de 2024



---

# Agradecimentos

---

Gostaria de começar agradecendo a todos que, de alguma forma, fizeram parte dessa caminhada. Este trabalho não representa só a conclusão do mestrado em Matemática, mas também um período de muito aprendizado, crescimento e superação. Passei por momentos difíceis, especialmente durante a pandemia e o isolamento social, que tornaram tudo mais desafiador, mas, apesar disso, sigo com muito carinho por tudo que vivi ao longo do caminho.

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder força, saúde e resiliência para seguir adiante mesmo nos momentos mais difíceis.

À toda minha família, em especial a meus pais, minha irmã e meu companheiro, sou eternamente grata pelo amor incondicional, pela paciência, pelo acolhimento e pelo suporte constante, que foram pilares fundamentais ao longo de todo este processo.

Aos professores que cruzaram meu caminho na graduação e no mestrado, meu reconhecimento e carinho. Em especial, deixo meu agradecimento ao Professor Doutor Daniel Vendruscolo, por sua orientação cuidadosa, disponibilidade generosa e por acreditar no meu trabalho mesmo nos períodos em que nem eu conseguia fazê-lo. Seu apoio foi essencial para que este projeto ganhasse forma.

À Professora Doutora Natalia Andrea Viana Bedoya, minha eterna gratidão. Foi sob sua orientação, ainda na época do TCC, que descobri minha paixão pela Topologia Algébrica - e ao longo dos anos, sua presença foi muito mais do que acadêmica: foi humana, sensível e acolhedora. Obrigada por me escutar, me incentivar e me lembrar, tantas vezes, que eu era capaz.

Agradeço também ao CNPq pelo apoio financeiro, que foi indispensável para que este trabalho pudesse ser realizado com dedicação integral.

A todos vocês, meu muito obrigada.



---

# Resumo

---

A presente dissertação é uma introdução à teoria de Bass-Serre. Em topologia de baixa dimensão o uso de estratégias algébricas é bastante comum e uma ferramenta de grande utilidade. Nesse contexto o estudo da teoria geométrica de grupos incorpora os principais resultados. Dentro da teoria geométrica de grupos a teoria de Bass-Serre é uma das mais bem sucedidas teorias desenvolvidas em topologia de baixa dimensão.

Nesse trabalho apresentamos o conceito de grafos de grupos que tem forte relação com o grupo fundamental de espaços. Estudamos árvores de recobrimentos, também conhecida como árvore de Bass-Serre, que se relaciona com recobrimentos de espaços topológicos e finalizamos por estudar o caso de grafos de grupos onde todos os grupos são cíclicos infinitos. Os grupos associados a estes grafos de grupos são chamados “*grupos de Baumslag-Solitar generalizados*”. Finalizamos com um teorema de simplificação de grafos de grupos nesse caso.

**Palavras-chave:** Teoria de Bass-Serre, Grafos de grupos.



---

# Abstract

---

This dissertation is an introduction to Bass-Serre theory. In low-dimensional topology the use of algebraic strategies is quite common and a very useful tool. In this context, the study of geometric group theory incorporates the main results. Within geometric group theory, Bass-Serre theory is one of the most successful theories developed in low-dimensional topology.

In this study, we present the concept of graph of groups, which is strongly related to with the fundamental group of spaces. We study coverings trees, also known as Bass-Serre tree, which are related to coverings of topological spaces and we finish by studying the case of graph of groups where all the groups are infinite cyclic. The groups associated to these graph of groups are called *generalized Baumslag-Solitar groups*. We finish with a simplification theorem for group graphs in this case.

**Keywords:** Bass-Serre Theory, Graph of groups.



---

# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Grafos</b>	<b>5</b>
1.1 Definições básicas	5
1.1.1 Diagramas	5
1.1.2 Morfismos de grafos	6
1.1.3 Caminhos	7
1.1.4 Circuitos	7
1.2 Árvores	8
1.2.1 Vértice Final	8
1.2.2 Subárvore Maximal	9
1.2.3 Realização de um grafo	9
1.3 Grupos agindo em grafos	9
<b>2 Grafos de Grupos</b>	<b>13</b>
2.1 Definição	13
2.2 Grupo Fundamental de um Grafo de Grupos	14
2.2.1 Outra maneira de definir grupo fundamental	16
2.2.2 Palavra Reduzida	18
2.3 Árvore de Bass-Serre	23
2.4 Relação entre $G$ -árvores e grafos de grupos	30
<b>3 Grupos de Baumslag-Solitar Generalizados</b>	<b>35</b>
3.1 Definição	35
3.2 Movimentos Elementares	36
3.3 Movimentos Elementares nos Grupos de Baumslag-Solitar Generalizados	39
3.4 Redutibilidade	41
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>



---

# Introdução

---

Esta dissertação explora a estrutura dos grafos de grupos, em especial os Baumslag-Solitar generalizados. O primeiro capítulo será dedicado a definições e resultados preliminares sobre grafos, do ponto de vista de sua estrutura geométrica, formado por vértices e arestas, onde cada aresta possui exatamente dois vértices em suas extremidades, não necessariamente distintos. No capítulo seguinte será introduzido uma estrutura de grupo a esses grafos, onde anexaremos a cada vértice e a cada aresta um grupo, e cada grupo relacionado a uma aresta deve ser mergulhado (via homomorfismo) nos grupos relacionados aos vértices de sua extremidade. Essa coleção de grupos e monomorfismos, junto com a estrutura geométrica do grafo, nos fornece um grupo, que será denominado por *grupo fundamental*. Se colocarmos uma estrutura topológica em um grafo, da maneira mais óbvia, então tal grupo é uma generalização do que conhecemos por grupo fundamental de um espaço topológico. Da mesma maneira, construiremos uma *árvore de recobrimento*, também denominada por *árvore de Bass-Serre*, que é uma generalização do espaço de recobrimento universal.

Por fim, o último capítulo será dedicado a um caso particular de grafo de grupos, onde cada grupo de vértice e aresta é cíclico infinito. O grupo fundamental desses grafos são chamados de *grupos de Baumslag-Solitar generalizado* e suas respectivas árvores de recobrimento são chamadas de *árvores de Baumslag-Solitar generalizada*. O último teorema afirma que um grafo de grupos desse tipo, que seja localmente finito, pode se deformar, sem alterar seu grupo fundamental, em um grafo de grupo de Baumslag-Solitar generalizado com estruturas mais simples, que são os chamados *totalmente reduzidos*.



---

## Grafos

---

### 1.1 Definições básicas

Um **grafo**  $\Gamma$  é uma enupla

$$(vert\Gamma, edge\Gamma, \bar{\cdot}, e)$$

onde  $\bar{\cdot} : edge\Gamma \rightarrow edge\Gamma$  é uma involução livre de pontos fixos ( $\overline{\bar{y}} = y \neq \bar{y}$  para todo  $y \in edge\Gamma$ ) e

$$e : edge\Gamma \rightarrow vert\Gamma \times vert\Gamma$$

dada por

$$y \mapsto e(y) = (o(y), t(y))$$

tal que  $t(y) = o(\bar{y})$  para todo  $y \in edge\Gamma$ .

Os elementos de  $vert\Gamma$  serão chamados de **vértices** de  $\Gamma$  e os elementos de  $edge\Gamma$  serão chamados de **arestas** de  $\Gamma$ . A função  $e$  será chamada de **função extremidade**, onde  $o(y)$  e  $t(y)$  serão chamados respectivamente de **origem** e **fim** da aresta  $y$ . Esses dois vértices serão chamados de **extremidades** de  $y$  e  $y$  será um **loop** se ambos coincidirem (isto é, quando  $o(y) = t(y)$ ). Diremos que dois vértices são **adjacentes** se eles forem extremidades de uma mesma aresta. Segue da definição que ambas as extremidades de  $y$  e  $\bar{y}$  coincidem, pois a origem de  $y$  é igual ao fim de  $\bar{y}$  ( $t(\bar{y}) = o(\bar{\bar{y}}) = o(y)$ ).

Para cada aresta  $y$  de  $edge\Gamma$ , a aresta  $\bar{y}$  é denominada **aresta inversa** de  $y$ . Uma **orientação** para um grafo  $\Gamma$  é um subconjunto  $Y_+$  de  $Y = edge\Gamma$  tal que  $Y = Y_+ \sqcup \bar{Y}_+$ , onde  $\bar{Y}_+ = \{\bar{y} : y \in Y_+\}$ .

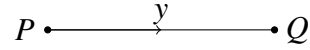
Um **subgrafo**  $\Lambda$  de um grafo  $\Gamma = (vert\Gamma, edge\Gamma, \bar{\cdot}, e)$  é um grafo tal que  $vert\Lambda \subset vert\Gamma$ ,  $edge\Lambda \subset edge\Gamma$ , as funções extremidades coincidem com as em  $\Gamma$  e tal que  $vert\Lambda$  e  $edge\Lambda$  são fechados com respeito as funções  $o, t$  e  $\bar{\cdot}$ .

#### 1.1.1 Diagramas

Os **diagramas** são maneiras de desenhar um grafo. Quando desenhamos um grafo desenhamos um ponto para cada vértice e, para cada par de arestas  $\{y, \bar{y}\}$  com  $o(y) = x$  e  $t(y) = x'$ , desenhamos

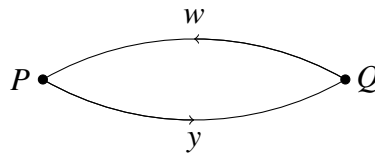
um segmento orientado apontando de  $x$  para  $x'$ .

**Exemplo 1.1.** Um grafo formado por dois vértices  $P$  e  $Q$  e duas arestas  $y$  e  $\bar{y}$ , onde  $o(y) = P$  e  $t(y) = Q$  é representado da seguinte maneira:

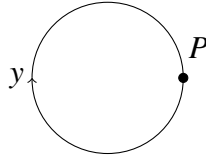


Grafos dessa forma são denominados por **segmentos**.

**Exemplo 1.2.** Um grafo composto de dois vértices  $P, Q$  e dois pares de arestas  $\{y, \bar{y}\}$  e  $\{w, \bar{w}\}$  com  $o(y) = t(w) = P$  e  $t(y) = o(w) = Q$ , pode ser representado da seguinte forma:



**Exemplo 1.3.** Um grafo formado por um loop, ou seja, um único vértice  $P$  e um único par de arestas  $\{y, \bar{y}\}$  tal que  $o(y) = t(y) = P$ , tem diagrama



### 1.1.2 Morfismos de grafos

Um **morfismo**  $\psi$  de  $\Gamma$  em  $\Gamma'$  é um par de aplicações  $\psi_v : \text{vert}\Gamma \rightarrow \text{vert}\Gamma'$  e  $\psi_e : \text{edge}\Gamma \rightarrow \text{edge}\Gamma'$  tal que

1.  $\psi_e(\bar{y}) = \overline{\psi_e(y)}$  para todo  $y \in \text{edge}\Gamma$ .
2.  $o(\psi_e(y)) = \psi_v(o(y))$  para todo  $y \in \text{edge}\Gamma$ .

Denotamos  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ .

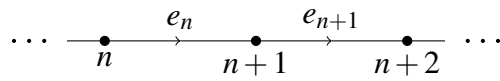
Segue da definição que

$$t(\psi_e(y)) = o(\overline{\psi_e(y)}) = o(\psi_e(\bar{y})) = \psi_v(o(\bar{y})) = \psi_v(t(y))$$

para todo  $y \in \text{edge}\Gamma$ .

Dizemos que um morfismo entre grafos é **injetor** se ambas as funções são injetoras e **sobrejetor** se ambas forem sobrejetoras. Se ambas forem bijetoras, dizemos que o morfismo é um **isomorfismo**. Um isomorfismo de um grafo em si mesmo é chamado de **automorfismo**. O conjunto de automorfismos de um grafo  $\Gamma$  forma um grupo com a operação de composição e será denotado por  $\text{Aut}(\Gamma)$ .

**Exemplo 1.4.** Considere o grafo orientado  $T$  com vértices  $n \in \mathbb{Z}$  e arestas  $e_n = [n, n + 1]$  (com origem no vértice  $n$  e fim no vértice  $n + 1$ ) e suas inversas  $\bar{e}_n = [n + 1, n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  como abaixo:



Temos que  $\phi : T \rightarrow T$  definido por  $\phi_v(n) = n + 1$  e  $\phi_e(e_n) = e_{n+1}$  é um automorfismo de  $T$  (a translação por 1).

Agora, se considerarmos  $\theta : T \rightarrow T$  dado por

$$\theta_v(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$\theta_e(e_n) = \begin{cases} e_0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \bar{e}_0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

temos que  $\theta$  é um morfismo de grafos, porém não é injetor e nem sobrejetor.

### 1.1.3 Caminhos

Um **caminho de comprimento  $n$**  em um grafo  $\Gamma$  é uma sequência finita de arestas  $y_1, \dots, y_n$  com  $t(y_i) = o(y_{i+1})$  para todo  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Se denotarmos por  $P_0 = o(y_1)$  e  $P_i = t(y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , dizemos que o caminho  $c = y_1, \dots, y_n$  é um caminho de  $P_0$  a  $P_n$ , e denotamos as extremidades deste caminho por  $o(c) = P_0$  e  $t(c) = P_n$ .

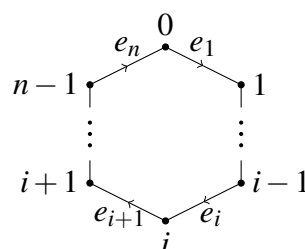
Um caminho  $y_1, \dots, y_n$  é **reduzido** se  $y_{i+1} \neq \bar{y}_i$  para todo  $i$ .

Se tivermos  $y_{i+1} = \bar{y}_i$  em um caminho  $c$ , dizemos que o par  $(y_i, y_{i+1})$  é um **retrocesso**, e podemos considerar o caminho  $c' = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+2}, \dots, y_n)$  obtido de  $c$  retirando as arestas  $y_i$  e  $y_{i+1}$ . Note que  $c'$  continua sendo um caminho de  $P_0 = o(c)$  à  $P_n = t(c)$ , mas de comprimento  $n - 2$ . Repetindo este processo, dado um caminho  $c$  qualquer ligando dois vértices, existe sempre um caminho sem retrocesso que os liga.

**Definição 1.5.** Dizemos que um grafo  $\Gamma$  é **conexo** se dados dois vértices quaisquer, existe pelo menos um caminho ligando eles.

### 1.1.4 Circuitos

Dado  $n \geq 1$ , definimos o grafo  $Circ_n$  como o grafo dado por  $n$  vértices distintos  $0, 1, \dots, n - 1$  e  $n$  arestas distintas  $e_1, e_2, \dots, e_n$  com  $t(e_i) = o(e_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , e  $t(e_n) = o(e_1)$ , como no diagrama abaixo:



**Definição 1.6.** Um **circuito** (de comprimento  $n$ ) em um grafo  $\Gamma$  é um subgrafo isomorfo à  $Circ_n$ .

Note que um circuito de comprimento  $n$  em  $\Gamma$  é definido por um caminho  $c$  composto de  $n$  vértices distintos, sem retrocessos e tal que  $o(c) = t(c)$ . Em particular, os circuitos de comprimento 1 são os loops.

## 1.2 Árvores

**Definição 1.7.** Uma **árvore** é um grafo conexo, não vazio e sem caminhos fechados reduzidos.

Como uma árvore é conexa, dados quaisquer dois vértices sempre existe um caminho que os liga. Além disso, como ela não contém circuitos, tal caminho é único, a menos de retrocessos, pois caso contrário teríamos um circuito de comprimento  $n \geq 1$  (a “justaposição” de dois caminhos distintos: um deles e o inverso do outro). Chamamos o caminho de  $P$  à  $Q$  sem retrocessos de **geodésica ligando  $P$  a  $Q$** . Como ela é única, fica bem definido a **distância entre  $P$  e  $Q$** , denotada por  $l(P, Q)$ , como sendo o comprimento de tal geodésica.

Além disso, cada aresta de uma árvore é unicamente determinada por suas extremidades, então podemos denotar  $y$  por  $[o(y), t(y)]$ . O subconjunto de vértices  $\{o(y), t(y)\}$  determinam unicamente o conjunto  $\{y, \bar{y}\}$  das arestas com extremidades  $o(y)$  e  $t(y)$ , que chamaremos de **aresta geométrica** (neste caso estamos interessados apenas na existência da aresta ligando tais vértices e não na direção delas).

### 1.2.1 Vértice Final

Consideremos  $Y_P$  o conjunto de todas as arestas de um grafo  $\Gamma$  com fim o vértice  $P$ . A cardinalidade de  $Y_P$  é chamada de **índice de  $P$** . Se  $|Y_P| = 0$  dizemos que  $P$  é um **vértice isolado** e se  $|Y_P| \leq 1$  dizemos que  $P$  é um **vértice final**. Neste caso, denotamos por  $\Gamma - P$  o subgrafo de  $\Gamma$  com conjunto de vértice  $(vert\Gamma - P)$  e conjunto de aresta  $(edge\Gamma - (Y_P \cup \bar{Y}_P))$ .

**Proposição 1.8.** *Sejam  $\Gamma$  um grafo e  $P$  um vértice final não isolado de  $\Gamma$ . Então:*

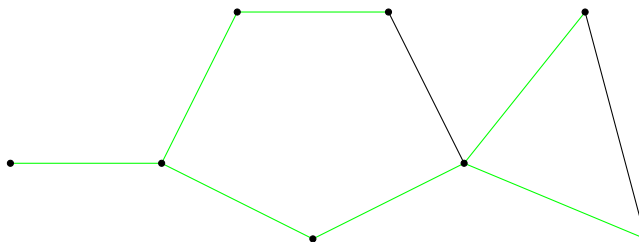
- i.  $\Gamma$  é conexo se, e somente se,  $\Gamma - P$  é conexo.*
- ii. Todo circuito de  $\Gamma$  está contido em  $\Gamma - P$ .*
- iii.  $\Gamma$  é uma árvore se, e somente se,  $\Gamma - P$  é uma árvore.*

*Demonstração.* A hipótese sobre  $P$  equivale a dizer que  $|Y_P| = 1$  e existe uma única aresta  $y$  com origem em  $\Gamma - P$  e fim  $P$ . Assim, vale *i.* Para *ii.*, como qualquer vértice de um circuito tem índice maior ou igual a 2, então  $P$  não pertence a qualquer circuito e, portanto, segue o resultado. Por fim, *iii.* segue de *i.* e *ii.*, uma vez que eles implicam que  $\Gamma$  é conexo e sem circuitos se, e somente se,  $\Gamma - P$  é conexo e sem circuitos.  $\square$

### 1.2.2 Subárvore Maximal

Uma **subárvore** é um subgrafo que é uma árvore. Seja  $\Gamma$  um grafo conexo não vazio. O conjunto de suas subárvores é parcialmente ordenado com relação a inclusão ( $T \leq T' \Leftrightarrow T$  está contida em  $T'$ ) e, pelo Lema de Zorn, tem um elemento maximal. Tal elemento é chamado de subárvore maximal.

**Exemplo 1.9.** Considere a grafo abaixo. Uma subárvore maximal é o subgrafo com as arestas verdes.



Note que uma subárvore maximal não é única.

**Proposição 1.10.** *Seja  $\Lambda$  uma árvore maximal de um grafo  $\Gamma$  conexo e não vazio. Então  $\Lambda$  contém todos os vértices de  $\Gamma$ .*

*Demonstração.* Suponha que existe um vértice em  $\Gamma$  que não está em  $\Lambda$ . Como  $\Gamma$  é conexo, então existe uma aresta  $y$  com origem em  $\Lambda$  e fim  $P$  fora de  $\Lambda$ . Mas pela Proposição 1.8 o subgrafo obtido de  $\Lambda$  acrescentando o vértice  $P$  e a aresta geométrica  $\{y, \bar{y}\}$  é uma árvore (contida em  $\Gamma$ ), contradizendo a maximalidade de  $\Lambda$ . Portanto  $vert\Lambda = vert\Gamma$ .  $\square$

### 1.2.3 Realização de um grafo

Seja  $\Gamma$  um grafo. Considere o espaço topológico  $W = vert\Gamma \sqcup (edge\Gamma \times [0, 1])$  onde  $vert\Gamma$  e  $edge\Gamma$  estão munido com a topologia discreta. Definimos uma relação de equivalência  $\sim$  em  $W$  por:

$$(y, t) \sim (\bar{y}, 1 - t) \quad , \quad (y, 0) \sim o(y) \quad e \quad (y, 1) \sim t(y) \quad , \quad \forall y \in edge\Gamma \quad , \quad t \in [0, 1]$$

Então definimos a **realização do grafo**  $\Gamma$ , que denotaremos por  $real(\Gamma)$ , pelo espaço quociente obtido de  $W$  pela relação de equivalência  $\sim$ :

$$real(\Gamma) = \frac{vert\Gamma \sqcup (edge\Gamma \times [0, 1])}{\sim}$$

## 1.3 Grupos agindo em grafos

Uma **ação** de um grupo  $G$  em um grafo  $\Gamma$  é um homomorfismo  $G \longrightarrow Aut(\Gamma)$ . Mais especificamente,

- Para cada  $g \in G$  e  $P \in vert\Gamma$  uma escolha de um elemento de  $vert\Gamma$ , que denotaremos por  $gP$ ;
- Para cada  $g \in G$  e  $y \in edge\Gamma$  uma escolha de um elemento de  $edge\Gamma$ , que denotaremos por  $gy$ ;

- Para cada  $x$  em  $vert\Gamma$  ou  $edge\Gamma$  temos  $1x = x$ ;
- Para cada  $g, h \in G$  e  $x$  em  $vert\Gamma$  ou  $edge\Gamma$  temos  $g(hx) = (gh)x$ , e
- $o(gy) = g(o(y))$  e  $t(gy) = g(t(y))$ .

Ou seja, é um par de ações de  $G$  em  $vert\Gamma$  e de  $G$  em  $edge\Gamma$  compatíveis com a função extremidade.

Dizemos que uma ação é **sem inversões** se  $gy \neq \bar{y}$  para todo  $g$  em  $G$  e para todo  $y$  em  $edge\Gamma$ . Dizemos que uma ação é **livre** se ela é sem inversões e nenhum elemento  $g \neq 1$  fixa algum vértice.

Se um grupo  $G$  age sem inversões em um grafo  $\Gamma$ , podemos definir o grafo quociente, denotado por  $G \backslash \Gamma$ , cujo conjunto de vértices é o quociente de  $vert\Gamma$  pela ação de  $G$  e o conjunto de arestas é o quociente de  $edge\Gamma$ . Formalmente, definimos o grafo  $G \backslash \Gamma$  por:

$$vert G \backslash \Gamma = \{[v] : v \in vert\Gamma\}, \text{ onde } [v] = \{gv : g \in G\}$$

$$edge G \backslash \Gamma = \{[y] : y \in edge\Gamma\}, \text{ onde } [y] = \{gy : g \in G\}$$

$$\overline{[y]} = [\bar{y}]$$

$$o([y]) = [o(y)]$$

$$t([y]) = [t(y)]$$

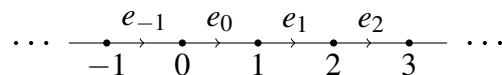
Segue da definição de ação de grupos em grafos que a aplicação  $\bar{\phantom{x}}$  e as aplicações extremidades acima estão bem definidas. A exigência da ação ser sem inversões segue do fato de que, se existir um elemento  $g \in G$  e  $y \in edge\Gamma$  tal que  $gy = \bar{y}$ , então

$$\overline{[y]} = [\bar{y}] = [gy] = [y]$$

o que contradiz a definição de grafo.

Desta maneira, no grafo quociente colapsamos os vértices que pertencem a mesma órbita e o mesmo com as arestas. Assim, cada vértice e cada aresta de  $G \backslash \Gamma$  representa uma (única) órbita de  $G$  em  $\Gamma$ .

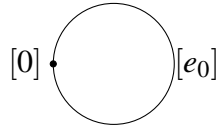
**Exemplo 1.11.** Consideremos  $\Gamma$  como sendo a árvore cuja os vértices são os números inteiros e as arestas são da forma  $e_i = [i, i + 1]$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , como abaixo.



$\mathbb{Z}$  age em  $\Gamma$  por translação da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times vert\Gamma & \longrightarrow & vert\Gamma & & \mathbb{Z} \times edge\Gamma & \longrightarrow & edge\Gamma \\ (n, i) & \longrightarrow & n.i & & (n, e_i) & \longrightarrow & e_{n.i} \end{array}$$

Temos que o grafo quociente  $\mathbb{Z} \backslash \Gamma$  é formado por um único loop.



O próximo teorema garante que o espaço quociente não desfaz circuitos (possivelmente cria, mas nunca desfaz).

**Teorema 1.12.** *Seja  $G$  um grupo agindo sem inversões em um grafo conexo  $\Gamma$ . Então toda subárvore  $T'$  de  $G \backslash \Gamma$  se levanta a uma subárvore de  $\Gamma$ .*

*Demonstração.* Seja  $T'$  uma subárvore de  $G \backslash \Gamma$ . Seja  $\Phi$  o conjunto de subárvores de  $\Gamma$  que se projeta injetivamente em  $T'$ . Temos que  $\Phi$  é parcialmente ordenada com relação a inclusão e, portanto, existe um elemento maximal em  $\Phi$ . Assim, seja  $T_0$  algum tal elemento e seja  $T'_0$  sua imagem em  $T'$ . Queremos provar que  $T'_0 = T'$ . Então suponhamos que  $T'_0 \neq T'$ , ou seja, existe uma aresta  $y'$  em  $T'$  que não pertence a  $T'_0$ . Como  $T'$  é conexa, podemos assumir que  $o(y')$  é um vértice de  $T'_0$ . Então, como  $y' \notin \text{edge}T'_0$  e  $T'_0$  é uma árvore, temos que  $t(y') \notin T'_0$  (caso contrário a geodésica de  $o(y')$  a  $t(y')$  contida em  $T'_0$  unida com a aresta  $\bar{y}'$  formaria um circuito em  $T'$ ). Agora, seja  $y$  um levantamento de  $y'$  e suponha, sem perda de generalidade, que  $o(y)$  pertence a  $T_0$  (podemos substituir  $y$  por  $gy$  para  $g \in G$ ). Então consideremos  $T_1$  o grafo formado pela junção de  $T_0$  com as arestas  $y, \bar{y}$  e o vértice  $t(y)$ . Pela Proposição 1.8 temos que  $T_1$  é uma árvore. Como  $T_1$  é projetado injetivamente em  $T'$ , temos que  $T_0 \subsetneq T_1$ . Absurdo, pela maximalidade de  $T_0$ . Logo  $T'_0 = T'$  e toda subárvore de  $G \backslash \Gamma$  se levanta a uma subárvore de  $\Gamma$ .  $\square$

Dessa maneira fica bem definido:

**Definição 1.13.** *Seja  $\Gamma$  um grafo conexo e  $G$  um grupo agindo sem inversões neste grafo. Definimos uma **árvore de representantes de  $\Gamma$  módulo  $G$**  como sendo uma subárvore  $T$  de  $\Gamma$  que é o levantamento de uma subárvore maximal de  $G \backslash \Gamma$ .*

Note que, como uma subárvore maximal contém todos os vértices do grafo, uma subárvore maximal de  $G \backslash \Gamma$  contém todos os representantes das órbitas dos vértices de  $\Gamma$  módulo  $G$ , logo cada órbita da ação de  $G$  em  $\text{vert}\Gamma$  contém exatamente um elemento de  $\text{vert}T$ .

Atentemos ao fato de que nem todo morfismo de grafos  $f : X \rightarrow X'$  sobrejetor é tal que uma subárvore maximal do contradomínio se levanta a uma subárvore maximal do domínio.



---

## Grafos de Grupos

---

### 2.1 Definição

**Definição 2.1.** Um **grafo de grupos**  $\mathcal{G}$  é uma enupla

$$(Y, (G_P)_{P \in \text{vert}Y}, (G_y)_{y \in \text{edge}Y}, (\alpha_y)_{y \in \text{edge}Y}, (\beta_y)_{y \in \text{edge}Y})$$

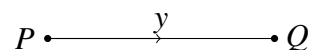
onde

1.  $Y$  é um grafo conexo.
2.  $G_P$  é um grupo para cada  $P \in \text{vert}Y$ .
3.  $G_y$  é um grupo para cada  $y \in \text{edge}Y$  tal que  $G_y = G_{\bar{y}}$ .
4.  $\alpha_y : G_y \rightarrow G_{t(y)}$  e  $\beta_y : G_y \rightarrow G_{o(y)}$  são monomorfismos de grupos, para cada  $y \in \text{edge}Y$ , tais que  $\alpha_{\bar{y}} = \beta_y$ .

Os grupos  $G_P$ ,  $P \in \text{vert}Y$ , são chamados de **grupos de vértice**, e os grupos  $G_y$ ,  $y \in \text{edge}Y$ , são chamados de **grupos de aresta**. Se  $Y$  for uma árvore, dizemos que  $(\mathcal{G}, Y)$  é uma **árvore de grupos**.

Usamos a notação  $G_y^\alpha$  para a imagem de  $G_y$  em  $G_{t(y)}$  por  $\alpha_y$  e  $G_{\bar{y}}^\beta$  para a imagem de  $G_y = G_{\bar{y}}$  em  $G_{o(y)}$  por  $\beta_y$ .

**Exemplo 2.2.** Considere  $T$  como sendo o segmento dado por uma única aresta geométrica  $y$  e suas extremidades  $P$  e  $Q$ , como no diagrama abaixo.



Escolhemos  $G_P = \mathbb{Z}_6$ ,  $G_Q = \mathbb{Z}_9$  como os grupos de vértices associados respectivamente a  $P$  e  $Q$  e  $G_y = \mathbb{Z}_3$  o grupo de aresta associado a  $y$  e  $\bar{y}$ , com mergulhos dados pela inclusão. Ou seja, se denotarmos por  $u, v$  e  $a$  os geradores de  $G_P, G_Q$  e  $G_y$ , respectivamente, temos:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_y : G_y & \longrightarrow & G_Q \\ a & \longmapsto & \alpha_y(a) = v^3 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \beta_y : G_y & \longrightarrow & G_P \\ a & \longmapsto & \beta_y(a) = u^2 \end{array}$$

Ao longo do texto, usaremos também a notação  $(\mathcal{G}, Y)$  para indicar um grafo de grupos  $(Y, (G_P)_{P \in \text{vert}Y}, (G_y)_{y \in \text{edge}Y}, (\alpha_y)_{y \in \text{edge}Y}, (\beta_y)_{y \in \text{edge}Y})$ .

## 2.2 Grupo Fundamental de um Grafo de Grupos

Seja  $(\mathcal{G}, Y) = (Y, (G_P)_{P \in \text{vert}Y}, (G_y)_{y \in \text{edge}Y}, (\alpha_y)_{y \in \text{edge}Y}, (\beta_y)_{y \in \text{edge}Y})$  um grafo de grupos, onde  $Y$  é um grafo conexo e não vazio. Definimos o grupo  $F(\mathcal{G}, Y)$  como sendo o produto livre dos grupos  $G_P$ ,  $P \in \text{vert}Y$ , e dos elementos  $y$  de  $\text{edge}Y$ , sujeito as relações:

$$\bar{y} = y^{-1} \quad \text{e} \quad y\alpha_y(a)y^{-1} = \beta_y(a) \quad \text{para todo } Y \in \text{edge}Y \text{ e } a \in G_y$$

Ou seja,  $F(\mathcal{G}, Y)$  é o quociente do produto livre

$$\left( \prod_{P \in \text{vert}Y} * G_P \right) * \left( \prod_{y \in \text{edge}Y} * \langle y | - \rangle \right)$$

pelo subgrupo normal gerado pelos elementos

$$y\bar{y} \quad \text{e} \quad y\alpha_y(a)y^{-1}(\beta_y(a))^{-1}, \quad \text{com } Y \in \text{edge}Y \text{ e } a \in G_y$$

Seja  $T$  uma subárvore maximal de  $Y$ . Definimos o **grupo fundamental de  $(\mathcal{G}, Y)$  relativo a  $T$** , denotado por  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ , como sendo o quociente de  $F(\mathcal{G}, Y)$  pelo subgrupo normal gerado pelos elementos  $y$  de  $\text{edge}T$ . Ou seja, se denotarmos por  $g_y$  a imagem de  $y$  neste quociente, temos que  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  nada mais é do que o grupo gerado pelos grupos de vértices  $G_P$ ,  $P \in \text{vert}Y$ , e os elementos  $g_y$ ,  $y \in \text{edge}Y$ , com as relações

$$g_{\bar{y}} = g_y^{-1}, \quad g_y\alpha_y(a)g_y^{-1} = \beta_y(a) \quad \text{para todo } y \in \text{edge}Y \text{ e } a \in G_y \quad \text{e} \quad g_y = 1 \text{ se } y \in \text{edge}T$$

Note que  $\alpha_y(a) = \beta_y(a)$  se  $y$  é uma aresta de  $T$ , para todo  $a$  em  $G_y$ , ou seja, as imagens dos monomorfismos coincidem em  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ . A princípio temos que essa definição depende fortemente da escolha da subárvore maximal  $T$ , porém veremos mais adiante que não.

**Exemplo 2.3.** Se  $(\mathcal{G}, Y)$  é um grafo de grupos onde cada  $G_P$  é trivial, então  $F(\mathcal{G}, Y)$  é o grupo gerado pelos  $y$ ,  $y \in \text{edge}Y$ , com a relação

$$\bar{y} = y^{-1}, \quad \text{para todo } y \in \text{edge}Y$$

Se escolhermos uma orientação  $A$  para  $Y$ , temos

$$F(\mathcal{G}, Y) = \underset{y \in A}{*} \langle y \rangle$$

Além disso, seja  $T$  uma subárvore maximal de  $Y$ , temos que  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  é o grupo gerado pelos elementos  $g_y$  sujeitos as relações

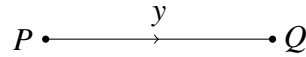
$$g_{\bar{y}} = g_y^{-1} \text{ para todo } y \in \text{edge}Y \text{ e } g_y = 1 \text{ se } y \in T$$

Em outras palavras,

$$\pi_1(\mathcal{G}, Y, T) = \underset{y \in (A - T \cap A)}{*} \langle g_y \rangle$$

Note que, neste caso, o grupo fundamental do grafo de grupos  $(\mathcal{G}, Y)$  coincide com o grupo fundamental, no sentido usual, da realização geométrica de  $Y$ .

**Exemplo 2.4.** Seja  $Y$  um segmento com vértices  $P, Q$  e arestas  $y = [P, Q], \bar{y} = [Q, P]$ , como na figura.

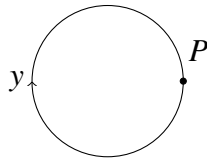


Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos com  $G_P, G_Q$  e  $G_y$  os grupos associados a  $P, Q$  e  $y$ , respectivamente. Então, considerando os mergulhos  $\alpha_y : G_y \hookrightarrow G_Q$  e  $\beta_y : G_y \hookrightarrow G_P$ , e  $T = Y$  na definição de grupo fundamental. Temos que  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, Y)$  é o grupo gerado por  $G_P$  e  $G_Q$  sujeito as relações:

$$\alpha_y(a) = \beta_y(a) \quad \forall a \in G_y$$

uma vez que  $g_y = 1$ . Logo,  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, Y) = G_P *_{\beta_y, G_y, \alpha_y} G_Q$  (produto livre amalgamado).

**Exemplo 2.5.** Seja  $Y$  um loop com vértice  $P$  e aresta  $y$ , como na figura.



Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos com  $G_P$  e  $G_y$  os grupos associados a  $P$  e  $y$ . Temos dois mergulhos  $G_y \hookrightarrow G_P$  dados por  $\alpha_y$  e  $\beta_y$  (um referente a aresta  $y$  e outro a  $\bar{y}$ ). Como a árvore maximal de  $Y$  é formada por seu único vértice  $P$ , seu conjunto de arestas é vazio e, portanto,  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T) = F(\mathcal{G}, Y)$  e é gerado pelo grupo  $G_P$ , as arestas  $y, \bar{y}$  com as relações adicionais:

$$\bar{y} = y^{-1} \text{ e } ya^y y^{-1} = a^{\bar{y}}, \forall a \in G_y$$

Ou seja, se  $G_P = \langle S \mid R \rangle$ , então  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T) = \langle S, y \mid R, ya^y y^{-1} = a^{\bar{y}}, a \in G_y \rangle$ . Este grupo é conhecido como “**extensão HNN**” (de  $G_P$ ), nome atribuído devido aos matemáticos Graham Higman, Bernhard Neumann e Hanna Neumann.

### 2.2.1 Outra maneira de definir grupo fundamental

Outra maneira de definir um grupo fundamental de um grafo de grupos é através de “classes de caminhos fechados”, semelhante ao estudado em espaços topológicos. Aqui consideramos  $F(\mathcal{G}, Y)$  definido anteriormente.

Seja  $c = (y_1, \dots, y_n)$  um caminho sem retrocessos. Seja  $P_i = o(y_{i+1}) = t(y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Uma **palavra do tipo**  $c$  em  $F(\mathcal{G}, Y)$  é um par  $(c, \mu)$  onde  $\mu$  é uma  $(n+1)$ -upla  $(r_0, r_1, \dots, r_n)$  tal que  $r_i \in G_{P_i}$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ . O elemento em  $F(\mathcal{G}, Y)$  dado por

$$|c, \mu| := r_0 y_1 r_1 y_2 \dots r_{n-1} y_n r_n$$

é dito estar **associado** à palavra  $(c, \mu)$ .

Por abuso de notação não distinguiremos um elemento de  $G_P$  e sua imagem sob o homomorfismo canônico  $G_P \rightarrow F(\mathcal{G}, Y)$  (provaremos na próxima seção que este homomorfismo é injetor).

Fixe um vértice  $P_0$  de  $Y$ . Denotamos por  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$  o conjunto dos elementos de  $F(\mathcal{G}, Y)$  da forma  $|c, \mu|$  onde  $c$  é um caminho fechado com extremidades iguais a  $P_0$ , ou seja,  $o(c) = t(c) = P_0$ .  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$  é chamado de **grupo fundamental de  $(\mathcal{G}, Y)$  com relação à  $P_0$** .

**Proposição 2.6.**  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$  é um subgrupo de  $F(\mathcal{G}, Y)$ .

*Demonstração.* De fato, o elemento neutro de  $F(\mathcal{G}, Y)$  pode ser visto como  $|c_0, \mu_0|$ , onde  $c_0$  é o caminho de comprimento zero com origem em  $P_0$  e  $\mu_0 = (e_0)$ , onde  $e_0$  é o elemento neutro de  $G_{P_0}$ . Sejam  $|c_1, \mu_1|, |c_2, \mu_2|$  dois elementos de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$ . Se  $c_1 = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\mu_1 = (r_0, \dots, r_n)$ ,  $c_2 = (e_1, \dots, e_m)$  e  $\mu_2 = (s_0, \dots, s_m)$ , então  $|c_1, \mu_1| \cdot |c_2, \mu_2| = |c, \mu|$  onde  $c = (y_1, \dots, y_n, e_1, \dots, e_m)$  é um caminho fechado cuja o ponto inicial e final são ambos iguais a  $P_0$  e  $\mu = (r_0, \dots, r_n, s_0, \dots, s_m)$ , ou seja,  $|c_1, \mu_1| \cdot |c_2, \mu_2| \in \pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$ . Por fim, se  $|c, \mu|$  é um elemento qualquer de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$ , onde  $c = (y_1, \dots, y_n)$  e  $\mu = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ , então considere o caminho  $c' = (\bar{y}_n, \bar{y}_{n-1}, \dots, \bar{y}_1)$  e a  $(n+1)$ -upla  $\mu' = (r_n^{-1}, \dots, r_1^{-1}, r_0^{-1})$ . Temos que  $|c', \mu'| \in \pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$ , pois  $o(\bar{y}_n) = t(y_n) = P_0$  e  $t(\bar{y}_0) = o(y_0) = P_0$ , e

$$|c, \mu| \cdot |c', \mu'| = (r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n) (r_n^{-1} \bar{y}_n \dots r_1^{-1} \bar{y}_1 r_0^{-1}) = r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n r_n^{-1} y_n^{-1} \dots r_1^{-1} y_1^{-1} r_0^{-1} = 1$$

$$|c', \mu'| \cdot |c, \mu| = (r_n^{-1} \bar{y}_n \dots r_1^{-1} \bar{y}_1 r_0^{-1}) (r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n) = r_n^{-1} y_n^{-1} \dots r_1^{-1} y_1^{-1} r_0^{-1} r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n = 1$$

Logo,  $|c, \mu|^{-1} = |c', \mu'|$  pertence a  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$  e  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$  é um subgrupo de  $F(\mathcal{G}, Y)$ .  $\square$

O próximo resultado garante que as duas maneiras de definir o grupo fundamental de um grafo de grupos são equivalentes (produzem grupos isomorfos) e, portanto, independem da escolha da subárvore maximal ou do ponto base.

**Teorema 2.7.** *Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos. Sejam  $P_0$  um vértice de  $Y$  e  $T$  uma subárvore maximal de  $Y$ . Então a projeção canônica  $p : F(\mathcal{G}, Y) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  (projeção ao quociente) induz um isomorfismo de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$  em  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que existe um homomorfismo  $f : \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$  tal que  $p \circ f$  e  $f \circ p$  são iguais a identidade.

Se  $P \in \text{vert}Y$ , denote por  $c_P$  a geodésica em  $T$  unindo  $P_0$  a  $P$  (lembrando que ela é única, uma vez que  $T$  é uma árvore). Sejam  $y_1, \dots, y_n$  as arestas de  $c_P$ , denote por

$$\gamma_P = y_1 \dots y_n$$

em  $F(\mathcal{G}, Y)$ , ou seja,  $\gamma_P = |c_P, \mu|$  onde  $\mu = (1, \dots, 1)$ . Denote por

$$x' = \gamma_P x \gamma_P^{-1} \text{ se } x \in G_P$$

$$y' = \gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1} \text{ se } y \in \text{edge}Y$$

Defina  $f : \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$  nos geradores de  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  por:

$$f(x) = x' \text{ se } x \in G_P$$

$$f(y) = y' \text{ se } y \in \text{edge}Y$$

Temos:

- Se  $y \in \text{edge}T$ , então temos que  $c_{t(y)} = (c_{o(y)}, y)$  ou  $c_{o(y)} = (c_{t(y)}, \bar{y})$ , onde  $(c_1, c_2)$  denota a concatenação do caminho  $c_1$  com o caminho  $c_2$ . No primeiro caso, considerando  $c_{o(y)} = (y_1, \dots, y_n)$  temos

$$y' = \gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1} = (y_1 \dots y_n) y (\bar{y} \bar{y}_n \dots \bar{y}_1) = y_1 \dots y_n y y^{-1} y_n^{-1} \dots y_1^{-1} = 1$$

e no segundo caso, considerando  $c_{t(y)} = (w_1, \dots, w_m)$  temos

$$y' = \gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1} = (w_1 \dots w_m) \bar{y} (\bar{y} w_m \dots w_1) = w_1 \dots w_m y^{-1} y w_m^{-1} \dots w_1^{-1} = 1$$

em ambos os casos temos sempre que  $y' = 1$  quando  $y \in \text{edge}T$ .

- $(\bar{y})' y' = \gamma_{o(\bar{y})} \bar{y} \gamma_{t(\bar{y})}^{-1} \gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1} = \gamma_{t(y)} \bar{y} \gamma_{o(y)}^{-1} \gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1} = 1$ , para todo  $y \in \text{edge}Y$ .
- Se  $a \in G_y$ , para algum  $y \in \text{edge}Y$ , considerando  $a^y \in G_{t(y)}$  sua imagem no grupo de vértice  $G_{t(y)}$ , temos que

$$y' (a^y)' (y')^{-1} = \gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1} (\gamma_{t(y)} a^y \gamma_{t(y)}^{-1}) \gamma_{t(y)} y^{-1} \gamma_{o(y)}^{-1} = \gamma_{o(y)} y a^y y^{-1} \gamma_{o(y)}^{-1} = \gamma_{o(y)} a^y \gamma_{o(y)}^{-1} = (a^{\bar{y}})'$$

pois  $a^y y^{-1} = a^{\bar{y}} \in G_{o(y)}$  em  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ .

Segue dos três itens acima que  $f$  respeita as relações que definem o grupo  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  e, portanto, é um homomorfismo. Mais que isso,  $p(\gamma_P) = 1$  para todo  $P \in \text{vert}Y$ , pois cada aresta de  $c_P$  está contida em  $T$ . Portanto,

$$p \circ f(x) = p(f(x)) = p(\gamma_P x \gamma_P^{-1}) = p(x) = x, \text{ se } x \in G_P \text{ para algum } P \in \text{vert}Y$$

$$p \circ f(y) = p(f(y)) = p(\gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1}) = p(y) = y, \text{ se } y \in \text{edge} Y$$

ou seja,  $p \circ f = Id$ .

Agora, vamos provar que  $f \circ p = Id$ . Seja  $c$  um caminho fechado com origem em  $P_0$ , arestas  $y_1, \dots, y_n$  e vértices  $P_i = o(y_{i+1}) = t(y_i)$ . Seja  $(c, \mu)$  com  $\mu = (r_0, \dots, r_n)$  uma palavra qualquer do tipo  $c$ . Então

$$\begin{aligned} f \circ p(|c, \mu|) &= f(p(r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n)) = f(r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n) = r'_0 y'_1 r'_1 \dots y'_n r'_n \\ &\quad (\gamma_{P_0} r_0 \gamma_{P_0}^{-1}) (\gamma_{o(y_1)} y_1 \gamma_{t(y_1)}^{-1}) (\gamma_{P_1} r_1 \gamma_{P_1}^{-1}) \dots (\gamma_{o(y_n)} y_n \gamma_{t(y_n)}^{-1}) (\gamma_{P_n} r_n \gamma_{P_n}^{-1}) \\ &= (\gamma_{P_0} r_0 \gamma_{P_0}^{-1}) (\gamma_{P_0} y_1 \gamma_{P_1}^{-1}) (\gamma_{P_1} r_1 \gamma_{P_1}^{-1}) \dots (\gamma_{P_{n-1}} y_n \gamma_{P_n}^{-1}) (\gamma_{P_n} r_n \gamma_{P_n}^{-1}) \\ &= \gamma_{P_0} r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n \gamma_{P_n}^{-1} \\ &= r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n \\ &= |c, \mu| \end{aligned}$$

pois  $\gamma_{P_0} = 1$ . Portanto,  $f \circ p = Id$  e  $p$  é um isomorfismo, como queríamos.  $\square$

## 2.2.2 Palavra Reduzida

Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos e  $c$  um caminho de comprimento  $n$  em  $Y$ , com origem em  $P_0$ , dado pelas arestas  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (possivelmente com retrocessos). Consideremos nesta seção as palavras  $(c, \mu)$  do tipo  $c$ , onde  $\mu = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ , assim como descrito anteriormente.

**Definição 2.8.** Dizemos que  $(c, \mu)$  é **reduzida** se, quando  $n = 0$  tivermos  $r_0 \neq 1$  e, quando  $n \geq 1$ ,  $r_i \notin G_{y_i}^{y_i}$  para cada índice  $i$  tal que  $y_{i+1} = \bar{y}_i$ .

Segue imediatamente da definição que se  $c$  é um caminho de comprimento maior ou igual a 1 e sem retrocessos, então  $(c, \mu)$  é uma palavra reduzida para qualquer  $\mu$ .

A importância do teorema que estudaremos a seguir (Teorema 2.9) está em seus corolários, que serão fundamentais no decorrer da próxima seção. Para demonstrá-lo, usaremos o que [II] chama de “*dévisage*” (que se traduz por desparafusamento ou desaperto, que seria reduzir o problema em casos menos complexos). Vamos primeiro enunciá-lo e demonstrar suas implicações relevantes para este trabalho, e depois seguiremos para sua prova, seguindo os passos de [II].

**Teorema 2.9.** Se  $(c, \mu)$  é uma palavra reduzida, então  $|c, \mu| \neq 1$  em  $F(\mathcal{G}, Y)$ .

**Corolário 2.10.** Os homomorfismos  $G_P \rightarrow F(\mathcal{G}, Y)$  são injetores.

*Demonstração.* Seja  $g \in G_P$ . Sejam  $c$  o caminho de comprimento  $n = 0$  e origem  $P$  e  $\mu = (g)$ . Então  $|c, \mu| = g$  em  $F(\mathcal{G}, Y)$ . Se  $g \neq 1$  em  $G_P$ , então  $|c, \mu|$  é uma palavra reduzida e, pelo Teorema 2.9,  $g = |c, \mu| \neq 1$  em  $F(\mathcal{G}, Y)$ . Logo, o homomorfismo  $G_P \rightarrow F(\mathcal{G}, Y)$  tem núcleo trivial e, portanto, é injetor.  $\square$

Com o corolário anterior podemos considerar  $G_P$  como subgrupo de  $F(\mathcal{G}, Y)$ , para cada  $P \in \text{vert} Y$ .

**Corolário 2.11.** *Se  $(c, \mu)$  é reduzida e o comprimento de  $c$  é maior que zero, então  $|c, \mu| \notin G_{P_0}$ , onde  $P_0 = o(c)$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $(c, \mu)$  é reduzida e  $|c, \mu| = r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n \in G_{P_0}$ . Consideremos  $x = (r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n)^{-1} \in G_{P_0}$  e  $\mu' = (x r_0, r_1, \dots, r_n)$ . Temos

$$|c, \mu'| = (x r_0) y_1 r_1 \dots y_n r_n = (r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n)^{-1} r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n = 1$$

e  $(c, \mu')$  é uma palavra reduzida pois  $(c, \mu)$  o é. Mas isso contradiz o Teorema 2.9. Logo,  $|c, \mu| \notin G_{P_0}$ .  $\square$

**Corolário 2.12.** *Sejam  $T$  uma subárvore maximal de  $Y$  e  $(c, \mu)$  uma palavra reduzida em  $F(\mathcal{G}, Y)$  cujo tipo é um caminho fechado. Então a imagem de  $|c, \mu|$  no quociente  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  é diferente da identidade.*

*Demonstração.* Seja  $P_0 = o(c) = t(c)$ , então  $|c, \mu| \in \pi_1(G, Y, P_0)$  e  $|c, \mu| \neq 1$  em  $F(\mathcal{G}, Y)$  (e portanto no subgrupo  $\pi_1(G, Y, P_0)$ ), pelo Teorema 2.9. Como a projeção  $F(\mathcal{G}, Y) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  induz um isomorfismo de  $\pi_1(G, Y, P_0) \cong \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ , segue que  $|c, \mu| \neq 1$  em  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ .  $\square$

Vamos as preliminares da demonstração do Teorema 2.9: Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos, com  $Y$  conexo e não vazio. Seja  $Y'$  um subgrafo conexo e não vazio de  $Y$  e denote por  $(G|Y', Y')$  a restrição de  $(\mathcal{G}, Y)$  a  $Y'$ . Se assumirmos que o Teorema 2.9 seja verdadeiro para  $(G|Y', Y')$ , então vale o Corolário 2.10 e os homomorfismos  $G_P \rightarrow F(G|Y', Y')$  são injetores ( $P \in \text{vert}Y'$ ).

Seja  $W$  o grafo obtido de  $Y$  contraindo  $Y'$  a um vértice, que denotaremos por  $(Y')$ . Ou seja, os vértices e arestas de  $W$  são dados por:

$$\begin{aligned} \text{vert}W &= (\text{vert}Y - \text{vert}Y') \cup (Y') \\ \text{edge}W &= \text{edge}Y - \text{edge}Y' \end{aligned}$$

onde as extremidades das arestas são dadas por

$$\begin{aligned} o_W(y) &= \begin{cases} o(y) & \text{se } o(y) \notin \text{vert}Y' \\ (Y') & \text{c.c.} \end{cases} \\ t_W(y) &= \begin{cases} t(y) & \text{se } t(y) \notin \text{vert}Y' \\ (Y') & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, definimos o grafo de grupos  $(H, W)$ :

- Se  $P \in \text{vert}Y - \text{vert}Y'$ , defina  $H_P = G_P$ ;
- Se  $P = (Y')$ , defina  $H_P = F(G|Y', Y')$ ;
- Se  $y \in \text{edge}W$ , defina  $H_y = G_y$ ;
- Defina os mergulhos  $H_y \rightarrow H_{t(y)}$  de maneira natural:

- se  $t(y) \neq (Y')$ , então definimos como em  $(\mathcal{G}, Y)$ ;
- se  $t(y) = (Y')$ , então  $H_y \rightarrow H_{t(y)} = F(G|Y', Y')$  é definido como a composição do mergulho  $G_y \rightarrow G_{t(y)}$  (em  $(\mathcal{G}, Y)$ ) com o mergulho  $G_{t(y)} \rightarrow F(G|Y', Y')$  (que é de fato injetor pelo Corolário 2.10).

**Lema 2.13.** *O homomorfismo  $p : F(\mathcal{G}, Y) \rightarrow F(H, W)$  induzido pela projeção  $(\mathcal{G}, Y) \rightarrow (H, W)$  é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Esse isomorfismo segue do fato de podermos construir  $F(\mathcal{G}, Y)$  em dois passos: primeiro pegamos os geradores e relações relativos a  $Y'$  para obter  $H_{(Y')} = F(G|Y', Y')$  e então adjuntamos os outros geradores e as outras relações (contidas em  $Y|Y'$ ) que correspondem à construção de  $F(H, W)$ .  $\square$

Agora vamos associar uma palavra  $(c, \mu)$  em  $F(\mathcal{G}, Y)$  a uma palavra  $(c', \mu')$  em  $F(G|Y', Y')$  de tal forma que  $|c', \mu'| = p(|c, \mu|)$  (imagem pelo isomorfismo acima). Então, seja  $c = (y_1, \dots, y_n)$ , com  $P_{i-1} = o(y_i)$  e  $P_n = t(y_n)$ , e seja  $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ . Para  $0 \leq i \leq j \leq n$ , denotemos por  $(c_{ij}, \mu_{ij})$  a subpalavra de  $(c, \mu)$  onde  $c_{ij} = (y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_j)$  e  $\mu_{ij} = (r_i, \dots, r_j)$ . Se  $c_{ij}$  está contido em  $Y'$ , denotemos por  $r_{ij} = |c_{ij}, \mu_{ij}| \in F(G|Y', Y') = H_{(Y')}$ , ou seja,

$$r_{ij} = r_i y_{i+1} r_{i+1} \dots y_j r_j, \text{ com } y_{i+1}, \dots, y_j \in \text{edge} Y'$$

Assim, definimos uma sequência crescente de números inteiros

$$0 \leq i_0 \leq j_0 \leq i_1 \leq j_1 \leq \dots \leq i_m \leq j_m \leq n$$

tal que

- cada caminho  $c_{i_s j_s}$  ( $0 \leq s \leq m$ ) está contido em  $Y'$ ;
- cada vértice e aresta de  $c$  que está contido em  $Y'$  pertence a algum  $c_{i_s j_s}$ .

Temos que os caminhos intermediários  $c_{j_s i_{s+1}}$  tem comprimento maior ou igual a 1 e nenhuma de suas arestas pertencem a  $Y'$ . Logo, esses caminhos definem caminhos em  $W$ , que denotaremos também por  $c_{j_s i_{s+1}}$ . Com isso, considere  $(c', \mu')$  a palavra em  $(H, W)$  definida por:

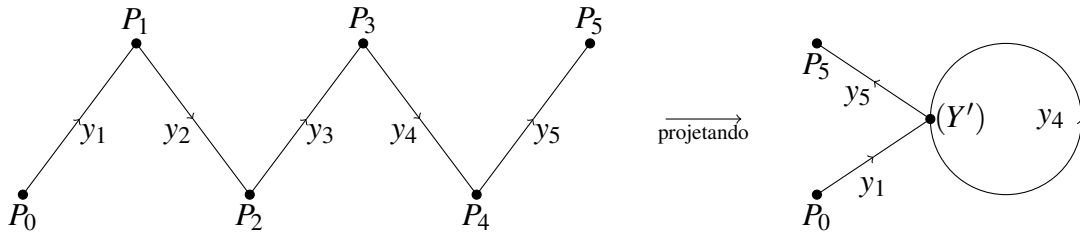
$$\begin{aligned} c' &= (\dots, c_{j_{s-1} i_s}, c_{j_s i_{s+1}}, \dots) \\ \mu' &= (\dots, \mu_{(j_{s-1}+1)(i_s-1)}, r_{i_s j_s}, \mu_{(j_s+1)(i_{s+1}-1)}, \dots) \end{aligned}$$

Note que o caminho  $c'$  começa com  $c_{i_0 j_0}$  e  $\mu'$  começa com  $r_{i_0 j_0}$  se  $P_0$  está contido em  $Y'$ . Caso contrário,  $c'$  começa com  $c_{0 i_0}$  e  $\mu'$  começa com  $\mu_{0(i_0-1)}$ .

Por exemplo, se  $c = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ , como ilustrado abaixo, e suponha que  $P_1, P_2, P_3, P_4, y_2$  e  $y_3$  estão contidos em  $Y'$ . Então  $c' = (y_1, y_4, y_5)$  e  $\mu' = (r_0, r_1 y_2 r_2 y_3 r_3, r_4, r_5)$ . Note que

$$|c', \mu'| = r_0 y_1 r_1 y_2 r_2 y_3 r_3 y_4 r_4 y_5 r_5$$

corresponde exatamente a  $|c, \mu|$  sob o isomorfismo do Lema 2.13.



**Lema 2.14.** *Se  $(c, \mu)$  é uma palavra reduzida de  $F(\mathcal{G}, Y)$ , então  $(c', \mu')$  é uma palavra reduzida de  $F(H, W)$ .*

*Demonstração.* Se o comprimento de  $c'$  for zero, então  $c'$  é igual a um vértice  $P$ . Se  $P \neq (Y')$ , temos que  $c$  já tinha comprimento zero, onde  $c = P$ . Neste caso, como  $(c, \mu)$ , temos que  $\mu = (r_0)$  com  $r_0 \neq 1$  em  $G_P$ . Como  $P \notin Y'$ ,  $H_P = G_P$  e, portanto,  $(c', \mu')$  também é reduzida. Se  $P = (Y')$ , então  $c$  está contido em  $Y'$  e temos que  $|c, \mu| \neq 1$ , uma vez que supomos que o Teorema 2.9 valia para  $(G|Y', Y')$ . Logo, pelo isomorfismo do Lema 2.13,  $|c, \mu| \neq 1$ .

Agora, se o comprimento  $l(c')$  de  $c'$  for maior que zero, sejam  $w_1, \dots, w_p$  as arestas de  $c'$ . Suponha que  $w_{s+1} = \overline{w}_s$ , para algum  $s$ . Precisamos mostrar que  $r'_s \notin H_{w_s}^{w_s}$ , onde  $\mu' = (r'_0, \dots, r'_p)$ , para provar que  $(c', \mu')$  é uma palavra reduzida de  $F(H, W)$ . Então seja  $P = t(w_s)$ . Se  $P \neq (Y')$ , temos que  $r'_s = r_s \notin H_{w_s}^{w_s}$ , uma vez que  $(c, \mu)$  é reduzida. Agora, se  $P = (Y')$ , temos dois casos distintos:

**Caso 1)**  $(w_s, r'_s, w_{s+1})$  é da forma  $(y_i, r_i, y_{i+1})$  onde  $i$  é o índice em  $c$  tal que  $y_{i+1} = \overline{y}_i$ . Ou seja, caso a aresta  $y_{i+2} = w_{s+2}$  não pertence a  $Y'$ . Neste caso, temos que  $r'_s$  é a imagem de  $r_i \in G_{t(y_i)}$  em  $H_{(Y')} = F(G|Y', Y')$ . Por outro lado, como  $(c, \mu)$  é reduzida,  $r_i \notin G_{y_i}^{y_i}$ . Como supomos que o Teorema 2.9 é válido para  $(G|Y', Y')$ , então  $G_{t(y_i)} \rightarrow H_{(Y')}$  é injetor e transforma  $G_{y_i}^{y_i}$  em  $H_{w_s}^{w_s}$ . Logo,  $r'_s$  não pertence a  $H_{w_s}^{w_s}$ .

**Caso 2)**  $(w_s, r'_s, w_{s+1})$  é da forma  $(y_{i_a}, r_{i_a j_a}, y_{j_a+1})$  onde  $i_a < j_a$  e  $r_{i_a j_a} = |c_{i_a j_a}, \mu_{i_a j_a}| \in F(G|Y', Y')$ . Como  $l(c_{i_a j_a}) \geq 1$ , o Corolário 2.11 aplicado a  $(G|Y', Y')$  mostra que  $r_{i_a j_a} \notin G_{t(y_{i_a})}$  ( $t(y_{i_a}) = o(c_{i_a j_a})$ ). Em particular,  $r_{i_a j_a}$  não pertence ao subgrupo  $G_{y_{i_a}}^{y_{i_a}}$ . Logo, assim como no caso anterior,  $r'_s$  não pertence a  $H_{w_s}^{w_s}$ .

Portanto  $(c', \mu')$  é uma palavra reduzida de  $F(H, W)$ , como queríamos. □

**Lema 2.15.** *Se o Teorema 2.9 for verdadeiro para  $(H, W)$ , então também será para  $(\mathcal{G}, Y)$ .*

*Demonstração.* Seja  $(c, \mu)$  uma palavra reduzida em  $(\mathcal{G}, Y)$ . Pelo Lema 2.14,  $(c', \mu')$  é uma palavra reduzida em  $(H, Y)$ . Então, como por hipótese o Teorema 2.9 vale para  $(H, W)$ , temos que  $|c', \mu'| \neq 1$  em  $F(H, W)$ . Como  $F(H, W)$  é isomorfo a  $F(\mathcal{G}, Y)$ , segue que  $|c, \mu| \neq 1$  em  $F(\mathcal{G}, Y)$ . □

Finalmente, vamos a demonstração do teorema, que será dividida em casos particulares a princípio. Seja  $(c, \mu)$  uma palavra reduzida. Vamos provar que  $|c, \mu| \neq 1$  em  $F(\mathcal{G}, Y)$ .

**Caso 1)** Se  $Y$  é um segmento  $\overset{P_{-1}}{\bullet} \xrightarrow{y} \overset{P_1}{\bullet}$

Então

$$|c, \mu| = r_0 y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots y^{e_n} r_n$$

onde  $e_i = \pm 1$ ,  $e_{i+1} = -e_i$  (porque o caminho  $c$  se dá por percorrer  $y$  seguido de  $\bar{y}$  e vice-versa),  $r_0 \in G_{P-e_1}$  e  $r_i \in (G_{P_{e_i}} - G_{y^{e_i}})$  (porque  $(c, \mu)$  é reduzida). Se  $n = 0$ , então  $|c, \mu| = r_0 \neq 1$ . Agora, se  $n \geq 1$ , seja

$$\phi : F(\mathcal{G}, Y) \longrightarrow \pi_1(G, Y, Y) = G_{P-1} *_{G_y} G_{P_1}$$

o homomorfismo canônico. Temos que  $\phi(|c, \mu|) = r_0 r_1 \dots r_n$  e, como  $r_i \notin G_{y^{e_i}}$ , temos que  $r_0 r_1 \dots r_n \neq 1$  (propriedade do produto amalgamado). Logo  $|c, \mu| \neq 1$ .

**Caso 2)** Se  $Y$  é uma árvore.

Um argumento padrão de limite direto nos reduz ao caso em que  $Y$  é finita. Assim, a demonstração será por indução em  $n = \frac{1}{2} \text{Card}(\text{edge}Y)$ . O caso em que  $n = 0$  é trivial. Suponha que o teorema seja válido para árvores com  $\text{Card}(\text{edge}T) \leq 2(n-1)$ . Se  $n \geq 1$ , tomamos  $Y'$  um segmento contido em  $Y$ . Pelo Caso 1, o Teorema se aplica a  $Y'$ . Por outro lado, o grafo  $W$  obtido de  $Y$  por contrair  $Y'$  continua sendo uma árvore e  $\frac{1}{2} \text{Card}(\text{edge}W) = n-1$ . Então o teorema é verdadeiro para  $(H, W)$ , por hipótese de indução. Logo, pelo Lema 2.15, o teorema é verdadeiro para  $(\mathcal{G}, Y)$ .

**Caso 3)** Se  $Y$  é um loop, com vértice  $P$  e arestas  $y$  e  $\bar{y}$ . Vimos no Exemplo 2.5 a estrutura de  $F(\mathcal{G}, Y) = \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ , que é o grupo gerado pelo produto livre de  $G_P$  com o grupo cíclico infinito gerado por  $y$ , sujeito as relações

$$y a^y y^{-1} = a^{\bar{y}}$$

para cada  $a \in G_P$ . Como no Caso 1, temos

$$|c, \mu| = r_0 y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots y^{e_n} r_n$$

com  $r_i \in G_P$ ,  $e_i = \pm 1$  e  $r_i \notin G_{y^{e_i}}$  se  $e_{i+1} = -e_i$  (uma vez que  $(c, \mu)$  é reduzida). Se  $\sum e_i \neq 0$ , temos  $|c, \mu| \notin R$ , onde  $R$  é o menor subgrupo normal de  $\pi_1(G, Y, P)$  contendo a imagem de  $G_P$  (pois as conjugações vem aos pares, o que daria zero no somatório). Então, neste caso,  $|c, \mu| \notin 1$ . Agora, suponha que  $\sum e_i = 0$ . Sejam

$$d_i = e_1 + \dots + e_i, \quad s_i = y^{d_i} r_i y^{-d_i}$$

e

$$G_{d_i} = y^{d_i} G_P y^{-d_i}$$

Temos que

$$\begin{aligned} s_0 s_1 \dots s_n &= y^{d_0} r_0 y^{-d_0} y^{d_1} r_1 y^{-d_1} \dots y^{d_n} r_n y^{-d_n} \\ &= r_0 y^{e_1} r_1 y^{-e_1} y^{e_1+e_2} r_2 \dots y^{\sum e_i} r_n y^{-\sum e_i} \\ &= r_0 y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots r_n \\ &= |c, \mu| \end{aligned}$$

com  $s_i \in G_{d_i}$ ,  $d_0 = d_n = 0$ ,  $d_{i+1} - d_i = e_{i+1} = \pm 1$ , e  $s_i \notin y^{d_i} G_{y^{e_i}} y^{-d_i}$  se  $d_{i+1} = d_{i-1}$  (pois  $(c, \mu)$  é reduzida).

Assim, consideremos a árvore  $T$  cuja o conjunto de vértices é  $\mathbb{Z}$  e cujas arestas geométricas são  $e_n = \{n, n+1\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\cdots \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet_{n-1} \xrightarrow{e_n} \bullet_n \xrightarrow{e_{n+1}} \bullet_{n+1} \xrightarrow{\cdots} \cdots$$

Seja ainda  $(K, T)$  a árvore de grupos definida por  $G_n = y^n G_P y^{-n}$ ,  $G_{e_n} = G_y$  e os mergulhos dados por

$$G_{e_n} = G_y \longrightarrow G_n \quad \text{e} \quad G_{e_n} = G_y \longrightarrow G_{n-1}$$

$$a \longmapsto y^n a^y y^{-n} \quad \text{e} \quad a \longmapsto y^{n-1} a^{\bar{y}} y^{1-n}$$

onde  $a^y$  denota a imagem de  $a \in G_y$  em  $G_P$  no grafo de grupos  $(\mathcal{G}, Y)$  inicial. Temos que  $\pi_1(K, T, T)$  é igual ao produto livre dos  $G_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , com a relação adicional  $y^n a^y y^{-n} = y^{n-1} a^{\bar{y}} y^{1-n}$ , para cada  $a \in G_y$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Ou seja,  $\pi_1(K, T, T) = R$  (lembrando que  $R$  é o menor subgrupo normal de  $\pi_1(G, Y, P)$  contendo a imagem de  $G_P$ ). Temos que  $s_0 s_1 \dots s_n$  está associada a uma palavra reduzida em  $(K, T)$ , cuja o tipo é um caminho fechado (pois  $d_0 = d_n = 0$ , que implica que a origem e o fim do caminho seja o vértice 0). Portanto, pelo Caso 2, temos que o teorema é válido para  $(K, T)$  e, então, pelo Corolário 2.12, temos que  $s_0 s_1 \dots s_n$  é diferente de 1. Logo,  $|c, \mu| \neq 1$ , como queríamos.

**Caso 4)** Caso geral.

Assim como no Caso 2, podemos assumir que  $Y$  é finita, e argumentar por indução sobre  $n = \frac{1}{2} \text{Card}(\text{edge} Y)$ . O caso  $n = 0$  é trivial. Se  $n \geq 1$ , escolhemos um subgrafo  $Y'$  de  $Y$  com duas arestas ( $y$  e  $\bar{y}$ ). Então  $Y'$  é um loop ou um segmento e o teorema é válido para  $(G|Y', Y')$  pelos casos anteriores. Por outro lado, por hipótese de indução, o teorema é válido para  $(H, W)$ , onde  $W$  é obtido de  $Y$  por colapsar  $Y'$ . Portanto, novamente pelo Lema 2.15, segue o resultado.

## 2.3 Árvore de Bass-Serre

Nesta seção vamos construir uma árvore  $\tilde{X}$  relacionada a um grafo de grupos  $(\mathcal{G}, Y)$  da seguinte maneira:  $G = \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  age em  $\tilde{X}$  com  $G \setminus \tilde{X}$  isomorfo a  $Y$ . Tal árvore será chamada de **árvore de recobrimento** ou **árvore de Bass-Serre**.

Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos com  $Y$  conexo e não vazio. Sejam  $T$  uma subárvore maximal de  $Y$  e  $A$  uma orientação para  $Y$ . Defina  $e : \text{edge} Y \longrightarrow \{0, 1\}$

$$e(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \in A \\ 1 & \text{se } y \notin A \end{cases}$$

e denote por  $|y|$  a aresta de  $\{y, \bar{y}\}$  que não pertence a  $A$  e por  $G_{|y|}^{|y|}$  a imagem de  $G_{|y|}$  em  $G_{r(|y|)}$ .

Definimos o grafo  $\tilde{X}$  da seguinte maneira:

$$\text{vert} \tilde{X} = \bigsqcup_{P \in \text{vert} Y} \frac{G}{G_P}$$

$$\text{edge} \tilde{X} = \bigsqcup_{y \in \text{edge} Y} \frac{G}{G_{|y|}^{|y|}}$$

e, se denotarmos por  $\tilde{P}$  e  $\tilde{y}$  a imagem de 1 em  $\frac{G}{G_P}$  e em  $\frac{G}{G_{|y|}}$ , respectivamente, definimos:

$$\overline{g\tilde{y}} := g\tilde{y} \quad (2.1)$$

$$o(g\tilde{y}) := gg_y^{-e(y)}o(\tilde{y}) \quad (2.2)$$

$$t(g\tilde{y}) := gg_y^{1-e(y)}t(\tilde{y}) \quad (2.3)$$

Vamos verificar que 2.1, 2.2 e 2.3 estão bem definidas, ou seja, que independem do representante da classe lateral de  $\tilde{y}$ . Seja  $h \in G_{|y|}$ . Como  $|y| = |\bar{y}|$ , temos  $h \in G_{|\bar{y}|}$ , ou seja,  $hG_{|\bar{y}|} = 1G_{|\bar{y}|}$  (como classes laterais) e então

$$\overline{g(h\tilde{y})} = \overline{(gh)\tilde{y}} = gh\tilde{y} = g\tilde{y}.$$

Portanto 2.1 está bem definida. Para 2.2 precisamos mostrar que  $o(g(h\tilde{y})) = o(g\tilde{y})$ , isto é,

$$ghg_y^{-e(y)}o(\tilde{y}) = gg_y^{-e(y)}o(\tilde{y}).$$

Temos

$$\begin{aligned} ghg_y^{-e(y)}o(\tilde{y}) = gg_y^{-e(y)}o(\tilde{y}) &\Leftrightarrow hg_y^{-e(y)}o(\tilde{y}) = g_y^{-e(y)}o(\tilde{y}) \\ &\Leftrightarrow g_y^{e(y)}hg_y^{-e(y)}o(\tilde{y}) = o(\tilde{y}) \quad . \\ &\Leftrightarrow g_y^{e(y)}hg_y^{-e(y)} \in G_{o(\tilde{y})} \end{aligned}$$

Se  $e(y) = 0$ , temos que  $g_y^{e(y)} = 1$ ,  $|y| = \bar{y}$  e

$$G_{|y|} = G_{\bar{y}} \subset G_{t(\bar{y})} = G_{o(y)}$$

Logo, temos que  $g_y^{e(y)}hg_y^{-e(y)} = h \in G_{o(y)}$ . Se  $e(y) = 1$ , temos que  $|y| = y$  e então  $G_{|y|} = G_y$ . Como  $h \in G_{|y|}$ , então  $h = a^y$  para algum  $a \in G_y$  (uma vez que ele está na imagem de  $G_y$  em  $G_{t(y)}$ ). Por outro lado,  $g_y a^y g_y^{-1} = a^{\bar{y}}$  em  $G = \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ . Logo,

$$g_y^{e(y)}hg_y^{-e(y)} = g_y a^y g_y^{-1} = a^{\bar{y}} \in G_{o(y)}$$

que prova o que queríamos e, portanto, 2.2 está bem definido. Para verificar a última definição, precisamos mostrar que  $t(gh\tilde{y}) = t(g\tilde{y})$ . Temos

$$\begin{aligned} t(gh\tilde{y}) = t(g\tilde{y}) &\Leftrightarrow ghg_y^{1-e(y)}t(\tilde{y}) = gg_y^{1-e(y)}t(\tilde{y}) \\ &\Leftrightarrow g_y^{e(y)-1}hg_y^{1-e(y)} \in G_{t(\tilde{y})} \end{aligned}$$

Se  $e(y) = 1$ , temos  $g_y^{e(y)-1} = g_y^{1-e(y)} = 1$ ,  $|y| = y$  e  $G_{|y|} = G_y \subset G_{t(y)}$ . Então

$$g_y^{e(y)-1}hg_y^{1-e(y)} = h \in G_{t(y)}$$

Se  $e(y) = 0$ , temos  $|y| = \bar{y}$  e  $G_{|y|} = G_{\bar{y}}$ . Como  $h \in G_{|y|}$ , então  $h = a^{\bar{y}}$  para algum  $a \in G_{\bar{y}}$ . Além disso, vale a relação  $g_y a^y g_y^{-1} = a^{\bar{y}}$  em  $G = \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ , então temos

$$g_y^{e(y)-1}hg_y^{1-e(y)} = g_y^{-1}a^{\bar{y}}g_y = a^y \in G_{t(y)}$$

como queríamos. Logo [2.3](#) também está bem definido.

Portanto  $\tilde{X}$  é um grafo (com suas funções extremidades bem definidas). Claramente  $G$  age em  $\tilde{X}$  de maneira natural (por multiplicação a esquerda). Além disso, temos seções

$$\begin{array}{ccc} \text{vert}Y & \longrightarrow & \text{vert}\tilde{X} & \text{e} & \text{edge}Y & \longrightarrow & \text{edge}\tilde{X} \\ P & \longmapsto & \tilde{P} & & y & \longmapsto & \tilde{y} \end{array}$$

cuja estabilizador de cada vértice  $\tilde{P}$  é  $G_P$  e o estabilizador de cada aresta  $\tilde{y}$  é  $G_{\tilde{y}}$ . Temos também um morfismo  $p : \tilde{X} \rightarrow Y$  dado por

$$\begin{array}{ccc} \text{vert}\tilde{X} & \longrightarrow & \text{vert}Y & \text{e} & \text{edge}\tilde{X} & \longrightarrow & \text{edge}Y \\ g\tilde{P} & \longmapsto & P & & g\tilde{y} & \longmapsto & y \end{array}$$

Note que  $p$  é de fato um morfismo de grafos pois

$$p(o(g\tilde{y})) = p(gg_y^{-e(y)}o(\tilde{y})) = o(y) = o(p(g\tilde{y}))$$

e

$$p(t(g\tilde{y})) = p(gg_y^{1-e(y)}t(\tilde{y})) = t(y) = t(p(g\tilde{y}))$$

e  $p$  induz um isomorfismo  $G \backslash \tilde{X} \rightarrow Y$ , como queríamos. Basta agora verificar que de fato  $\tilde{X}$  é uma árvore, ou seja, conexa e sem circuitos.

**Teorema 2.16.** *Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos conexo e não vazio e sejam  $T$  uma subárvore maximal de  $Y$  e  $A$  uma orientação. Então o grafo  $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T)$  construído acima é uma árvore.*

*Demonstração.* Primeiro mostraremos que  $\tilde{X}$  é conexo. Seja  $\tilde{T}$  o levantamento de  $T$  induzido pelas seções  $P \mapsto \tilde{P}$  e  $y \mapsto \tilde{y}$ . Se  $y \in \text{edge}Y$  então, segue da definição,

$$o(\tilde{y}) = o(\tilde{y}) \text{ se } y \in A \text{ ou } t(\tilde{y}) = t(\tilde{y}) \text{ se } y \notin A \quad (2.4)$$

Ou seja, uma das extremidades de  $\tilde{y}$  pertence a  $\tilde{T}$ , uma vez que  $\tilde{T}$  contém todos os vértices da forma  $\tilde{P}$ ,  $P \in \text{vert}Y$ . Seja  $W$  o menor subgrafo de  $\tilde{X}$  que contém todos os  $\tilde{y}$ ,  $y \in \text{edge}Y$ . Temos que  $W$  é a adjunção de  $\tilde{T}$  e as arestas  $\tilde{y}$  tal que  $y \in (\text{edge}Y - \text{edge}T)$ , que é conexo por [2.4](#). Além disso,  $G \cdot W = \tilde{X}$ , pois qualquer aresta de  $\tilde{X}$  é da forma  $g\tilde{y}$  e qualquer vértice é da forma  $g\tilde{P}$ . Seja  $S$  a união disjunta dos  $G_P$ ,  $P \in \text{vert}Y$  e dos  $g_y$ ,  $y \in \text{edge}Y$  (ou seja,  $S$  é o conjunto dos geradores de  $G = \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ ). Então para provar que  $\tilde{X}$  é conexo basta verificarmos que  $W \cup sW$  é conexo, para qualquer  $s \in S$ , pois por indução seguirá que  $\tilde{X}$  é conexo.

Se  $s \in G_P$ , como  $G_P$  é o estabilizador de  $\tilde{P}$ , então  $s\tilde{P} = \tilde{P} \in (\text{vert}W) \cap (\text{verts}W)$  e  $W \cup sW$  é conexo. Se  $s = g_y$  para algum  $y \in \text{edge}Y$ , temos que: se  $e(y) = 1$ ,

$$o(g_y\tilde{y}) = g_y g_y^{-1} o(\tilde{y}) = o(\tilde{y}) \in (\text{vert}g_y W) \cup (\text{vert}W)$$

Se  $e(y) = 0$ ,

$$t(\tilde{y}) = g_y t(\tilde{y}) \in (\text{vert}W) \cup (\text{vert}g_y W)$$

Portanto,  $\tilde{X}$  é conexo.

Agora, mostraremos que  $\tilde{X}$  não contém circuitos. Suponha o contrário, então existe um caminho fechado  $\tilde{c}$  em  $\tilde{X}$  sem retrocessos e de comprimento  $n > 0$ . Seja  $\tilde{c} = (s_1\tilde{g}_{y_1}, s_2\tilde{g}_{y_2}, \dots, s_n\tilde{g}_{y_n})$  e  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  a sequência de vértices da sua projeção  $c = (g_{y_1}, g_{y_2}, \dots, g_{y_n})$  em  $Y$ . Como  $o(\tilde{c}) = t(\tilde{c})$  então  $P_0 = P_n$ . Temos

$$\begin{aligned} P_n = P_0 &\Rightarrow s_n g_{y_n}^{1-e(y_n)} \tilde{P}_0 = s_1 g_{y_1}^{-e(y_1)} \tilde{P}_0 \Rightarrow (s_n g_{y_n}^{1-e(y_n)})^{-1} s_1 g_{y_1}^{-e(y_1)} \in G_{P_0} = G_{P_n} \\ &\Rightarrow s_n g_{y_n}^{1-e(y_n)} r_n = s_1 g_{y_1}^{-e(y_1)} \text{ para algum } r_n \in G_{P_n} \\ &\Rightarrow g_{y_n} r_n = (s_n g_{y_n}^{-e(y_n)})^{-1} s_1 g_{y_1}^{-e(y_1)} \text{ para algum } r_n \in G_{P_n} \end{aligned}$$

e, para cada  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} t(s_i \tilde{y}_i) = o(s_{i+1} \tilde{y}_{i+1}) &\Rightarrow s_i g_{y_i}^{1-e(y_i)} t(\tilde{y}_i) = s_{i+1} g_{y_{i+1}}^{-e(y_{i+1})} o(\tilde{y}_{i+1}) \\ &\Rightarrow s_i g_{y_i}^{1-e(y_i)} \tilde{P}_i = s_{i+1} g_{y_{i+1}}^{-e(y_{i+1})} \tilde{P}_i \\ &\Rightarrow (s_i g_{y_i}^{1-e(y_i)})^{-1} s_{i+1} g_{y_{i+1}}^{-e(y_{i+1})} \in G_{P_i} \\ &\Rightarrow s_i g_{y_i}^{1-e(y_i)} r_i = s_{i+1} g_{y_{i+1}}^{-e(y_{i+1})} \text{ para algum } r_i \in G_{P_i} \\ &\Rightarrow g_{y_i} r_i = (s_i g_{y_i}^{-e(y_i)})^{-1} s_{i+1} g_{y_{i+1}}^{-e(y_{i+1})} \text{ para algum } r_i \in G_{P_i} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Multiplicando temos que  $g_{y_1} r_1 g_{y_2} r_2 \dots g_{y_n} r_n$  é igual a

$$(s_1 g_{y_1}^{-e(y_1)})^{-1} s_2 g_{y_2}^{-e(y_2)} (s_2 g_{y_2}^{-e(y_2)})^{-1} s_3 g_{y_3}^{-e(y_3)} \dots (s_{n-1} g_{y_{n-1}}^{-e(y_{n-1})})^{-1} s_n g_{y_n}^{-e(y_n)} (s_n g_{y_n}^{-e(y_n)})^{-1} s_1 g_{y_1}^{-e(y_1)}$$

ou seja, em  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ , temos

$$g_{y_1} r_1 g_{y_2} r_2 \dots g_{y_n} r_n = 1 \quad (2.6)$$

Por outro lado,  $g_{y_1} r_1 g_{y_2} r_2 \dots g_{y_n} r_n = |c, \mu|$  onde  $\mu = (1, r_1, r_2, \dots, r_n)$ .

**Afirmção:**  $(c, \mu)$  é uma palavra reduzida.

Já sabemos que  $n > 0$  (pois uma ação nunca leva arestas em vértices). Então suponha que  $y_{i+1} = \bar{y}_i$  para algum  $i$ . Vamos provar que  $r_i \notin G_{y_i}^{y_i}$ .

Como  $y_{i+1} = \bar{y}_i$ , então  $g_{y_{i+1}} = g_{y_i}^{-1}$ ,  $e(y_{i+1}) = 1 - e(y_i)$  e, por 2.5,

$$\begin{aligned} g_{y_i} r_i &= (s_i g_{y_i}^{-e(y_i)})^{-1} s_{i+1} g_{y_{i+1}}^{-e(y_{i+1})} = g_{y_i}^{e(y_i)} (s_i^{-1} s_{i+1}) g_{y_{i+1}}^{1-e(y_i)} \\ &\Rightarrow r_i = g_{y_i}^{e(y_i)-1} (s_i^{-1} s_{i+1}) g_{y_{i+1}}^{1-e(y_i)} \end{aligned}$$

Como

$$s_{i+1} \tilde{y}_i = s_{i+1} \overline{\tilde{y}_{i+1}} = \overline{s_{i+1} \tilde{y}_{i+1}} \neq s_i \tilde{y}_i$$

pois  $\tilde{c}$  não tem retrocessos, então  $s_i^{-1} s_{i+1}$  não estabiliza  $\tilde{y}_i$ , ou seja,

$$s_i^{-1} s_{i+1} \notin s_i^{-1} s_{i+1}$$

Se  $e(y_i) = 1$ , então  $y_i \notin A$ ,  $G_{|y_i|}^{y_i} = G_{y_i}^{y_i}$  e

$$r_i = g_{y_i}^{e(y_i)-1} (s_i^{-1} s_{i+1}) g_{y_{i+1}}^{1-e(y_i)} = s_i^{-1} s_{i+1} \notin G_{|y_i|}^{y_i} = G_{y_i}^{y_i}$$

Se,  $e(y_i) = 0$ , então  $y_i \in A$ ,  $G_{|y_i|}^{y_i} = G_{\bar{y}_i}^{y_i} = g_{y_i} G_{y_i}^{y_i} g_{y_i}^{-1}$  (uma vez que  $g_{y_i} a^{y_i} g_{y_i}^{-1} = a^{\bar{y}_i}$  para todo  $a \in G_{y_i}$ ). Além disso

$$r_i = g_{y_i}^{e(y_i)-1} (s_i^{-1} s_{i+1}) g_{y_{i+1}}^{1-e(y_i)} = g_{y_i}^{-1} (s_i^{-1} s_{i+1}) g_{y_{i+1}}$$

Então

$$s_i^{-1} s_{i+1} = g_{y_i} r_i g_{y_{i+1}}^{-1} \notin s_i^{-1} s_{i+1} = g_{y_i} G_{y_i}^{y_i} g_{y_i}^{-1}$$

Portanto,  $r_i \notin G_{y_i}^{y_i}$  e  $(c, \mu)$  é uma palavra reduzida.

Logo, pelo Corolário 2.12,  $|c, \mu| \neq 1$  em  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ , o que contradiz 2.6. Portanto não existem circuitos em  $\tilde{X}$  e  $\tilde{X}$  é uma árvore, como queríamos.  $\square$

Chamamos  $\tilde{X}$  de **árvore de recobrimento do grafo de grupos**  $(\mathcal{G}, Y)$  ou de **árvore de Bass-Serre de**  $(\mathcal{G}, Y)$

**Exemplo 2.17.**  $(\mathcal{G}, Y)$ , com  $Y = \underset{P}{\bullet} \xrightarrow{y} \underset{Q}{\bullet}$  e com  $G_P = \mathbb{Z}_2 = \langle b \rangle$ ,  $G_Q = \mathbb{Z}_2 = \langle c \rangle$  e  $G_y = \{1\}$ .

Temos que os geradores de  $\pi_1(G, Y, Y)$  são  $b$  e  $c$ , pois  $g_y = 1 = g_{\bar{y}}$ . Além disso, como  $G_y$  é trivial, as únicas relações no grupo fundamental são as herdadas de  $G_P$  e de  $G_Q$ , ou seja,  $b^2 = 1$  e  $c^2 = 1$ . Também temos que quando  $b$  age em  $\tilde{y}$ , o vértice  $\tilde{P}$  fica estável (pois  $b$  está no estabilizador de  $\tilde{P}$ ), e quando  $c$  age em  $\tilde{y}$ , o vértice  $\tilde{Q}$  fica estável. Assim,

$$o(b\tilde{y}) = bo(\tilde{y}) = b\tilde{P} = \tilde{P}$$

$$t(b\tilde{y}) = bt(\tilde{y}) = b\tilde{Q}$$

$$o(c\tilde{y}) = co(\tilde{y}) = c\tilde{P}$$

e

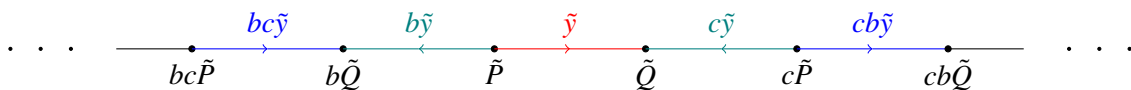
$$t(c\tilde{y}) = ct(\tilde{y}) = c\tilde{Q} = \tilde{Q}$$

(arestas verdes no diagrama abaixo).

Agora vamos calcular as arestas incidentes aos vértices  $b\tilde{Q}$  e  $c\tilde{P}$ :

$$\begin{aligned} t(g\tilde{y}) = b\tilde{Q} &\Leftrightarrow gt(\tilde{y}) = b\tilde{Q} \Leftrightarrow b^{-1}g \in G_Q \Leftrightarrow g = br, r \in G_Q \Rightarrow g = b \text{ ou } g = bc \\ o(g\tilde{y}) = c\tilde{P} &\Leftrightarrow go(\tilde{y}) = c\tilde{P} \Leftrightarrow c^{-1}g \in G_P \Leftrightarrow g = cr, r \in G_P \Rightarrow g = c \text{ ou } g = cb \end{aligned}$$

Com isso, a árvore de Bass-Serre de  $(\mathcal{G}, Y)$  é dada por

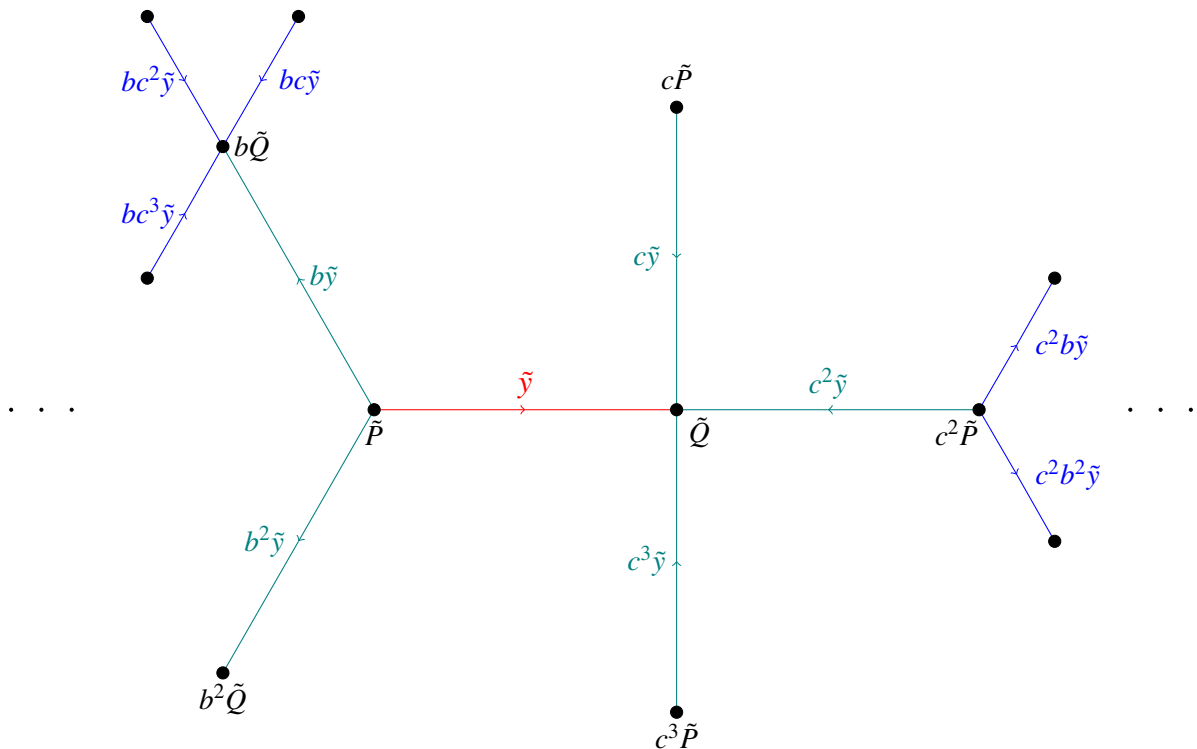


**Exemplo 2.18.** Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  o grafo de grupos com  $Y = \overset{P}{\bullet} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\bullet}$  e com  $G_P = \mathbb{Z}_3 = \langle b \rangle$ ,  $G_Q = \mathbb{Z}_4 = \langle c \rangle$  e  $G_y = \{1\}$ .

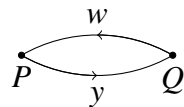
Assim como no exemplo anterior, os geradores de  $\pi_1(G, Y, Y)$  são  $b$  e  $c$ , com as relações  $b^3 = 1$  e  $c^4 = 1$ . Começando com o levantamento de  $y$ , vamos primeiro encontrar as arestas incidentes a  $\tilde{P}$  e  $\tilde{Q}$ :

$$\begin{aligned} o(g\tilde{y}) = \tilde{P} &\Leftrightarrow go(\tilde{y}) = \tilde{P} \Leftrightarrow g\tilde{P} = \tilde{P} \Leftrightarrow g \in G_P \Rightarrow g = 1, b, b^2 \\ t(g\tilde{y}) = \tilde{P} &\Leftrightarrow gt(\tilde{y}) = \tilde{P} \Leftrightarrow g\tilde{Q} = \tilde{P} \Rightarrow P \text{ e } Q \text{ estão na mesma órbita (absurdo!)} \\ o(g\tilde{y}) = \tilde{Q} &\Leftrightarrow go(\tilde{y}) = \tilde{Q} \Leftrightarrow g\tilde{P} = \tilde{Q} \Rightarrow P \text{ e } Q \text{ estão na mesma órbita (absurdo!)} \\ t(g\tilde{y}) = \tilde{Q} &\Leftrightarrow gt(\tilde{y}) = \tilde{Q} \Leftrightarrow g\tilde{Q} = \tilde{Q} \Leftrightarrow g \in G_Q \Rightarrow g = 1, c, c^2, c^3 \end{aligned}$$

Repetindo esse argumento para os vértices encontrados, obtemos a árvore de Bass-Serre de  $(\mathcal{G}, Y)$ :



**Exemplo 2.19.**  $(\mathcal{G}, Y)$ , com  $Y$  como abaixo



e  $G_P = \mathbb{Z}_8 = \langle n \rangle$ ,  $G_Q = \mathbb{Z}_4 = \langle b \rangle$ ,  $G_y = \mathbb{Z}_4 = \langle c \rangle$  e  $G_w = \mathbb{Z}_2 = \langle d \rangle$ , com mergulhos:

$$\alpha_y : G_y = \mathbb{Z}_4 \hookrightarrow G_Q = \mathbb{Z}_4 \quad \alpha_{\tilde{y}} : G_y = \mathbb{Z}_4 \hookrightarrow G_P = \mathbb{Z}_8$$

$$c \mapsto b \qquad c \mapsto n^2$$

$$\alpha_w : G_w = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow G_P = \mathbb{Z}_8 \quad \alpha_{\tilde{w}} : G_w = \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow G_Q = \mathbb{Z}_4$$

$$d \mapsto n^4 \qquad d \mapsto b^2$$

Este exemplo, diferente dos anteriores,  $Y$  não é uma árvore e, portanto, teremos mais um gerador para o grupo fundamental. Seguindo a construção da árvore de recobrimento, considere  $T = \{y\}$  uma subárvore maximal,  $A = \{y, w\}$  uma orientação. Assim,

- $e(y) = 0, e(\bar{y}) = 1, e(w) = 0$  e  $e(\bar{w}) = 1$ ;
- $|y| = \bar{y}$  e  $|w| = \bar{w}$ ;
- O estabilizador de  $\bar{y}$  é  $G_{\bar{y}}$  e o estabilizador de  $\bar{w}$  é  $G_{\bar{w}}$ ;
- $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  é gerado por  $a, b, g_w$ , com as relações  $a^8 = 1, b^4 = 1, g_{\bar{w}} = g_w^{-1}, g_w \alpha_w(a) g_{\bar{w}} = \alpha_{\bar{w}}(a), \forall a \in G_w$  e  $\alpha_y(a) = \alpha_{\bar{y}}(a), \forall a \in G_y$ .

Primeiro vamos encontrar as arestas incidentes a  $\tilde{P}$ :

$$o(g\bar{y}) = \tilde{P} \Leftrightarrow gg_y^{-e(y)} o(\bar{y}) = \tilde{P} \Leftrightarrow g\tilde{P} = \tilde{P} \Leftrightarrow g \in G_P \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } g = 1, \text{ temos a aresta } \bar{y} \\ \text{Para } g = n, \text{ temos a aresta } n\bar{y} \\ \text{Para } g = n^2, \text{ temos a aresta } n^2\bar{y} = \alpha_{\bar{y}}(c)\bar{y} = \bar{y} \\ \text{Para } g = n^3, \text{ temos a aresta } n^3\bar{y} = n.n^2\bar{y} = n\bar{y} \\ \dots \end{cases}$$

$$t(g\bar{y}) = \tilde{P} \Leftrightarrow gg_y^{1-e(y)} t(\bar{y}) = \tilde{P} \Leftrightarrow g\tilde{Q} = \tilde{P} \Rightarrow \text{n\~{o} existe } g\bar{y} \text{ com fim } \tilde{P}$$

$$o(g\bar{w}) = \tilde{P} \Leftrightarrow gg_w^{-e(w)} o(\bar{w}) = \tilde{P} \Leftrightarrow g\tilde{Q} = \tilde{P} \Rightarrow \text{n\~{o} existe } g\bar{w} \text{ com origem } \tilde{P}$$

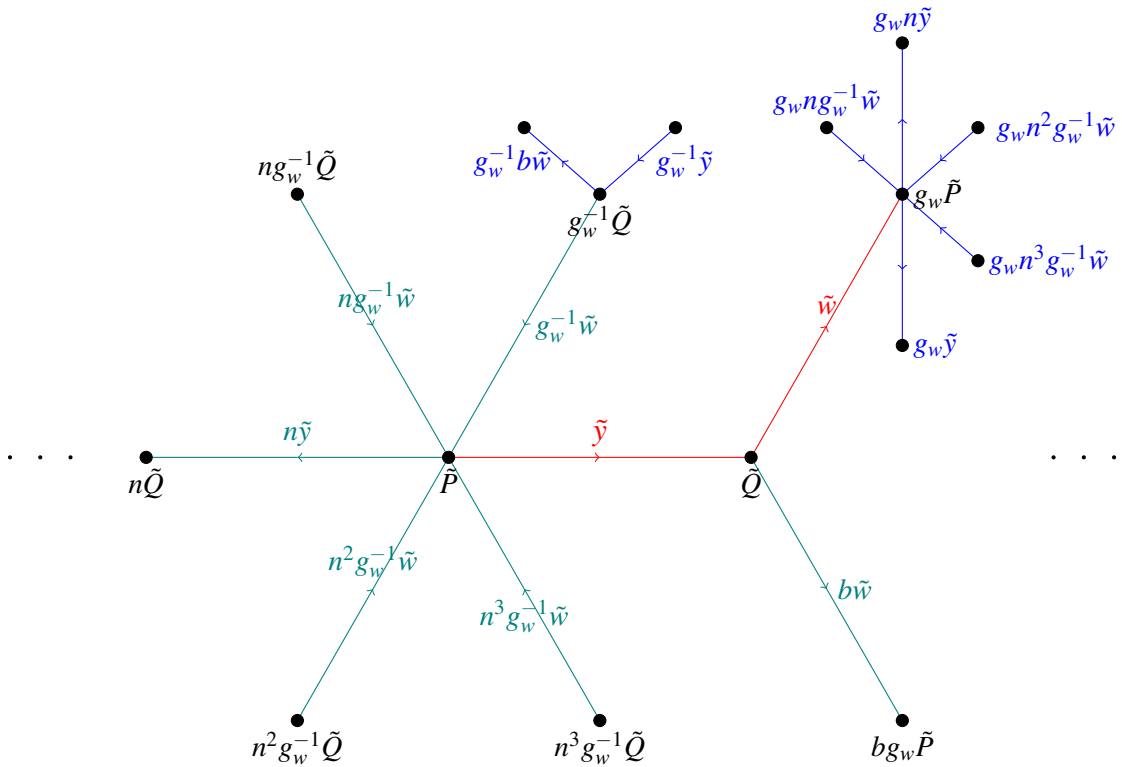
$$t(g\bar{w}) = \tilde{P} \Leftrightarrow gg_w^{1-e(w)} t(\bar{w}) = \tilde{P} \Leftrightarrow gg_w\tilde{P} = \tilde{P} \Leftrightarrow g = rg_w^{-1} \text{ para algum } r \in G_P$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Para } r = 1, \text{ temos } g\bar{w} = g_w^{-1}\bar{w} \\ \text{Para } r = n, \text{ temos } g\bar{w} = ng_w^{-1}\bar{w} \\ \text{Para } r = n^2, \text{ temos } g\bar{w} = n^2g_w^{-1}\bar{w} \\ \text{Para } r = n^3, \text{ temos } g\bar{w} = n^3g_w^{-1}\bar{w} \\ \text{Para } r = n^4, \text{ temos } g\bar{w} = n^4g_w^{-1}\bar{w} = \alpha_w(d)g_w^{-1}\bar{w} = g_w^{-1}\alpha_{\bar{w}}(d)\bar{w} = g_w^{-1}\bar{w} \\ \text{Para } r = n^5, \text{ temos } g\bar{w} = n^5g_w^{-1}\bar{w} = n.n^4g_w^{-1}\bar{w} = ng_w^{-1}\bar{w} \\ \dots \end{cases}$$

Ent\~{a}o as arestas incidentes a  $\tilde{P}$  s\~{a}o  $\bar{y}, n\bar{y}, g_w^{-1}\bar{w}, ng_w^{-1}\bar{w}, n^2g_w^{-1}\bar{w}$  e  $n^3g_w^{-1}\bar{w}$ . Agora vamos encontrar o v\~{e}rtice dessas arestas que \~{e} diferente de  $\tilde{P}$ :

$$\begin{aligned} t(\bar{y}) &= g_y^{1-e(y)} t(\bar{y}) = \tilde{Q} \\ t(n\bar{y}) &= ng_y^{1-e(y)} t(\bar{y}) = n\tilde{Q} \\ o(g_w^{-1}\bar{w}) &= g_w^{-1}g_w^{-e(w)} o(\bar{w}) = g_w^{-1}\tilde{Q} \\ o(ng_w^{-1}\bar{w}) &= ng_w^{-1}g_w^{-e(w)} o(\bar{w}) = ng_w^{-1}\tilde{Q} \\ o(n^2g_w^{-1}\bar{w}) &= n^2g_w^{-1}g_w^{-e(w)} o(\bar{w}) = n^2g_w^{-1}\tilde{Q} \\ o(n^3g_w^{-1}\bar{w}) &= n^3g_w^{-1}g_w^{-e(w)} o(\bar{w}) = n^3g_w^{-1}\tilde{Q} \end{aligned}$$

Repetindo esse processo para encontrar as arestas incidentes a  $\tilde{Q}$  temos que  $\bar{w}$  e  $b\bar{w}$  s\~{a}o as \~{u}nicas com origem em  $\tilde{Q}$  e  $\bar{y}$  \~{e} a \~{u}nica com fim em  $\tilde{Q}$ . Al\~{e}m disso,  $t(\bar{w}) = g_w\tilde{P}$  e  $t(b\bar{w}) = bg_w\tilde{P}$ . A \~{a}rvore de Bass-Serre de  $(\mathcal{G}, Y)$  \~{e}:



**Observação 2.20.** Salvo exceções, estamos interessados em grafos localmente finitos, ou seja, um número de arestas incidentes finitos para cada um de seus vértices. Em particular quando construímos a árvore de recobrimento. Note que sem imposições adicionais, podemos ter que um vértice  $g\tilde{P}$  de  $\tilde{X}$  tenha infinitas arestas incidentes, mesmo que o grafo  $Y$  seja localmente finito, basta pegar um dos  $G_y$  ( $\bar{y} \in E_P$ ) com índice infinito em  $G_P$ . Supomos, assim, que  $Y$  seja localmente finito e que todos os mergulhos  $G_y \hookrightarrow G_{t(y)}$  tenham índice finito, para todo  $y \in \text{edge}Y$ . Então, o número de arestas incidentes a  $g\tilde{P}$ ,  $g \in G = \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$ , independe de  $g$  e é dado pelo seguinte cálculo:

- Olhamos o vértice  $P$  no qual  $g\tilde{P}$  é projetado;
- Como  $|E_P| = n$  é finito, enumeramos suas arestas incidentes:  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ;
- Consideramos cada índice  $[G_{\bar{y}_i} : G_P] = m_i$ ;
- Então

$$|E_{g\tilde{P}}| = \sum_{i=1}^{|E_P|} [G_{\bar{y}_i} : G_P]$$

## 2.4 Relação entre $G$ -árvores e grafos de grupos

Nesta parte do trabalho veremos a relação de unicidade (a menos de isomorfismos) entre a ação de um grupo  $G$  em uma árvore e o grupo fundamental definido pelo grafo de grupos quociente gerado por essa ação.

Seja  $X$  um grafo conexo e não vazio (a princípio pode conter circuitos) e seja  $G$  um grupo agindo sem inversões em  $X$ . Considere  $Y = G \backslash X$  o grafo quociente. Vamos construir um grafo de grupos  $(\mathcal{G}, Y)$  cujo grupo fundamental seja  $G$ . Para isso, precisamos primeiro associar cada vértice e cada aresta a um grupo e definir mergulhos dos grupos de arestas nos grupos de vértices.

Sejam  $T$  uma subárvore maximal de  $Y$ ,  $j : T \rightarrow X$  um levantamento de  $T$  e  $A$  uma orientação de  $Y$ . Defina:

$$e(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \in A \\ 1 & \text{se } y \notin A \end{cases}$$

Primeiro, vamos estender  $j$  para todo  $Y$ . Como  $T$  contém todos os vértices de  $Y$ , então basta definir  $j$  para as arestas de  $Y$  que não estão em  $T$ . Começaremos definindo as imagens, por  $j$ , dessas arestas que também estão em  $A$ . Se  $y \in A - \text{edge}T$ , então escolhemos  $j(y) = \tilde{y} \in \text{edge}X$  tal que  $o(\tilde{y}) \in \text{vert}(j(T))$ , ou seja, escolhemos para ser a imagem de  $y$  uma aresta  $\tilde{y}$  de  $X$  que seja mapeada em  $y$  no quociente e tal que  $o(\tilde{y})$  pertença a imagem de  $T$  pelo levantamento  $j$ . Assim,

$$o(j(y)) = j(o(y))$$

Ainda para essas arestas, escolhemos  $\gamma_y \in G$  tal que  $t(j(y)) = \gamma_y j(t(y))$  (lembrando que  $t(j(y))$  e  $j(t(y))$  estão em uma mesma órbita). Então, definimos

$$j(\bar{y}) = \overline{j(y)}$$

para  $y \notin A$ , e estendemos a escolha de  $\gamma_y$  para todo  $y \in \text{edge}Y$  pela fórmula

$$\gamma_{\bar{y}} = \gamma_y^{-1} \text{ e } \gamma_y = 1 \text{ se } y \in \text{edge}T$$

Assim, para cada aresta  $y$  em  $Y$  temos:

$$\begin{aligned} o(j(y)) &= \gamma_y^{-e(y)} j(o(y)) \\ t(j(y)) &= \gamma_y^{1-e(y)} j(t(y)) \end{aligned}$$

Finalmente, vamos definir o grafo de grupos  $(\mathcal{G}, Y)$ . Se denotarmos por  $G_P$  e  $G_y$  os estabilizadores de um vértice  $P$  e uma aresta  $y$  de  $X$ , respectivamente, então definimos os grupos de vértices e de arestas em  $(\mathcal{G}, Y)$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G_P &= G j(P) \text{ para } P \in \text{vert}Y \\ G_y &= G j(y) \text{ para } y \in \text{edge}Y \end{aligned}$$

e definimos os monomorfismos

$$\begin{aligned} \alpha_y : G_y &\longrightarrow G_{t(y)} \\ a &\longmapsto a^y = \gamma_y^{e(y)-1} a \gamma_y^{1-e(y)} \end{aligned}$$

Temos que  $\alpha_y$  é, realmente, um homomorfismo injetor e está bem definido pois  $\gamma_y^{e(y)-1} G_y \gamma_y^{1-e(y)} \subseteq G_{t(y)}$  (de fato, se  $g \in G_y = G j(y)$ , então  $g j(y) = j(y)$  e, assim,  $g(\gamma_y^{1-e(y)} j(t(y))) = g t(j(Y)) = t(g j(y)) =$

$t(j(y)) = \gamma_y^{1-e(y)} j(t(y))$ , que implica que  $\gamma_y^{e(y)-1} g \gamma_y^{1-e(y)} j(t(y)) = j(t(y)) e \gamma_y^{e(y)-1} g \gamma_y^{1-e(y)} \in G j(t(y)) = G_{t(y)}$ . Com isso fica bem definido o grafo de grupos desejado.

Agora que o grafo de grupos está definido, vamos começar a avançar em direção à demonstração de um isomorfismo entre o grupo fundamental de  $(\mathcal{G}, Y)$  e  $G$ , e de um isomorfismo entre a árvore de recobrimento de  $(\mathcal{G}, Y)$  e  $X$ , caso  $X$  seja uma árvore.

Seja  $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  o grupo fundamental de  $(\mathcal{G}, Y)$  e considere o homomorfismo  $\phi : \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \rightarrow G$  definido pelas inclusões  $G_P = G j(P) \hookrightarrow G$  e por  $\phi(g_y) = \gamma_y$ . Note que, de fato, as relações do grupo fundamental são respeitadas por  $\phi$ :

- Se  $y \in \text{edge} T$ , então  $\phi(g_y) = \gamma_y = 1$ ;
- $\phi(g_{\bar{y}}) = \gamma_{\bar{y}} = \gamma_y^{-1} = \phi(g_y)^{-1}$ ;
- $\phi(g_y a^y g_y^{-1}) = \phi(g_y) \phi(a^y) \phi(g_y^{-1}) = \gamma_y a^y \gamma_y^{-1} = \gamma_y (\gamma_y^{e(y)-1} a \gamma_y^{1-e(y)}) \gamma_y^{-1} = \gamma_y^{e(y)} a \gamma_y^{-e(y)} = \gamma_{\bar{y}}^{-e(y)} a \gamma_{\bar{y}}^{e(y)} = \gamma_{\bar{y}}^{e(\bar{y})-1} a \gamma_{\bar{y}}^{1-e(\bar{y})} = a^{\bar{y}}$ .

Assim, temos que  $\phi$  induz um isomorfismo entre os estabilizadores vértices e arestas de  $\tilde{X}$  e os correspondentes grupos de vértices e arestas em  $X$ .

Seja  $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T)$  a árvore de Bass-Serre de  $(\mathcal{G}, Y)$  e considere  $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$  a aplicação definida por

$$\psi(g\tilde{P}) = \phi(g)j(P) \quad \text{e} \quad \psi(g\tilde{y}) = \phi(g)j(y)$$

Temos que  $\psi$  é um morfismo de grafos. De fato, seja  $g\tilde{y}$  uma aresta de  $\tilde{X}$ , temos:

$$\begin{aligned} o(\psi(g\tilde{y})) &= o(\phi(g)j(y)) = \phi(g)o(j(y)) = \phi(g)\gamma_y^{-e(y)}j(o(y)) \\ \psi(o(g\tilde{y})) &= \psi(gg_y^{-e(y)}o(\tilde{y})) = \phi(gg_y^{-e(y)})j(o(y)) = \phi(g)\phi(g_y^{-e(y)})j(o(y)) = \phi(g)\gamma_y^{-e(y)}j(o(y)) \\ t(\psi(g\tilde{y})) &= t(\phi(g)j(y)) = \phi(g)t(j(y)) = \phi(g)\gamma_y^{1-e(y)}j(t(y)) \\ \psi(t(g\tilde{y})) &= \psi(gg_y^{1-e(y)}t(\tilde{y})) = \phi(gg_y^{1-e(y)})j(t(y)) = \phi(g)\phi(g_y^{1-e(y)})j(t(y)) = \phi(g)\gamma_y^{1-e(y)}j(t(y)) \end{aligned}$$

Portanto,  $o(\psi(g\tilde{y})) = \psi(o(g\tilde{y}))$  e  $t(\psi(g\tilde{y})) = \psi(t(g\tilde{y}))$ . Como temos também que  $\psi$  leva aresta em aresta e vértice em vértice,  $\psi$  é um morfismo de grafos.

Agora, caminhamos para mostrar que  $\phi$  e  $\psi$  são morfismos sobrejetores. Seja  $W$  o menor subgrafo de  $X$  que contém a imagem de  $Y$  por  $j$ . Por construção de  $j$ , cada aresta de  $W$  tem pelo menos uma extremidade em  $j(T)$  e, além disso,  $G \cdot W = X$ . Também temos que, tomando  $g = 1$  na definição de  $\psi$ ,  $W$  está contido na imagem  $\psi(\tilde{X})$ .

Usaremos o lema abaixo para provar a sobrejetividade de  $\phi$  e  $\psi$ .

**Lema 2.21.** *Seja  $G$  um grupo agindo sem inversões em um grafo conexo  $X$ . Considere o grafo quociente  $G \backslash X$  e seja  $T$  um levantamento de uma subárvore maximal desse grafo. Seja  $W$  um subgrafo de  $X$  contendo  $T$  e todas as arestas que tem uma extremidade em  $T$  e tal que  $G \cdot W = X$ . Para cada aresta  $y$  de  $W$  com origem em  $T$ , seja  $\gamma_y$  um elemento de  $G$  tal que  $\gamma_y t(y) \in \text{vert} T$ . Então o grupo  $H$  gerado pelos elementos  $\gamma_y$  e os estabilizadores  $G_P$  dos vértices  $P$  de  $T$  é igual a  $G$ .*

*Demonstração.* Temos que  $H$  é um subgrupo de  $G$  e precisamos provar que  $G \subseteq H$ . Como  $T$  é uma árvore de representantes de  $X$  módulo  $G$ , temos que cada vértice de  $X$  se escreve como  $gv$ , para algum  $g \in G$  e  $v \in \text{vert}T$ . Assim, basta mostrar que  $H \cdot \text{vert}T = \text{vert}X$ .

Mais ainda, como  $H$  contém os elementos  $\gamma_y$ , temos que  $\text{vert}Y \subseteq H \cdot \text{vert}T$ . Então, temos

$$H \cdot \text{vert}W \subseteq H \cdot \text{vert}T \subseteq \text{vert}X$$

Vamos provar que  $H \cdot \text{vert}W = \text{vert}X$ .

Para isso, basta demonstrar que toda aresta com origem em  $H \cdot \text{vert}W$  pertence a  $H \cdot W$ , pois pela conexividade de  $X$  obteremos que todas as arestas de  $X$  estarão em  $H \cdot W$ . Assim, seja  $y$  uma aresta de  $X$  com origem em  $H \cdot \text{vert}W$ . Como  $\text{vert}W \subseteq H \cdot \text{vert}T$  e  $o(y) \in H \cdot \text{vert}W$ , então existem  $h \in H$  tal que  $P := ho(y) = o(hy)$  pertence a  $\text{vert}T$ . Por outro lado, como  $G \cdot W = X$ , existe  $g \in G$  tal que  $g(hy) \in W$ . Vamos provar que  $g \in H$ . Como  $g(hy) \in W$ , temos que  $o(g(hy)) \in \text{vert}T$  ou  $t(g(hy)) \in \text{vert}T$ .

No primeiro caso,  $o(hy) = P$  e  $o(g(hy)) = gP$  são dois vértices de  $T$  que são congruentes módulo  $G$ , portanto, eles são iguais, ou seja,  $gP = P$ . Logo,  $g$  pertence ao estabilizador de  $P$ . Sendo  $P$  um vértice de  $T$ , temos que  $g$  pertence a  $H$ , como queríamos.

No segundo caso, a aresta  $w = \overline{g(hy)}$  tem origem em  $T$ . Então temos que  $\gamma_w t(w) = \gamma_w o(g(hy)) = \gamma_w gP$  pertence a  $\text{vert}T$ . Como no caso anterior, segue que  $P = \gamma_w gP$  e, portanto,  $\gamma_w g$  pertence a  $H$ . Como  $\gamma_w^{-1} \in H$ , segue que  $g \in H$ , como queríamos.  $\square$

Segue imediatamente do lema que  $H = \phi(\pi_1(\mathcal{G}, Y, T))$  é igual a  $G$ , ou seja,  $\phi$  é sobrejetor. Como, além disso,  $G \cdot W = X$  e  $W$  está contido na imagem  $\psi(\tilde{X})$ , segue também que  $\psi$  é sobrejetor.

Além disso, como  $\phi$  induz um isomorfismo entre os estabilizadores dos vértices e arestas, temos que  $\psi$  é localmente injetor.

Antes do próximo teorema, que concluirá toda a construção acima, precisamos de mais um lema.

**Lema 2.22.** *Se  $\tilde{X}$  é um grafo conexo,  $X$  é uma árvore e  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  é um morfismo localmente injetor; isto é, injetor no conjunto de arestas com uma dada origem, então  $f$  é injetor.*

*Demonstração.* Como  $\tilde{X}$  é conexo, provar que  $f$  é injetor é equivalente a provar que  $f \circ c$  é injetor, para todo caminho injetor  $c$  em  $\tilde{X}$ . Assim, seja  $c = (z_1, \dots, z_n)$  um caminho injetor em  $\tilde{X}$ . Vamos mostrar que  $f \circ c$  não tem circuitos e nem retrocessos em  $X$ . Como  $X$  é uma árvore, então  $f \circ c$  não tem circuitos. Agora, suponha que  $f \circ c$  tem retrocessos, então, escrevendo  $f \circ c = (w_1, \dots, w_n)$  onde  $w_i = f(z_i)$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , temos que  $w_{i+1} = \overline{w_i}$  para algum  $i$ . Para tal  $i$ , como  $c$  é injetor, temos que  $z_{i+1} \neq \overline{z_i}$  e, como  $o(z_{i+1}) = t(z_i)$  e  $f$  é localmente injetor, isso implica que  $f(z_{i+1}) \neq f(\overline{z_i})$ . Logo  $w_{i+1} \neq \overline{w_i}$ , absurdo. Portanto  $f \circ c$  é injetor, como queríamos.  $\square$

**Teorema 2.23.** *Com as notações e hipóteses anteriores, são equivalentes:*

1.  $X$  é uma árvore;
2.  $\psi : \tilde{X} \rightarrow X$  é um isomorfismo;

3.  $\phi : \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \longrightarrow G$  é um isomorfismo.

*Demonstração.* (1  $\Rightarrow$  2) : Se  $X$  é uma árvore, como  $\psi$  é um morfismo de grafos localmente injetor e  $\tilde{X}$  é conexo, pelo Lema 2.22 temos que  $\psi$  é injetor. Como acima já mostramos que a sobrejetividade de  $\psi$ , segue que esse morfismo é um isomorfismo.

(2  $\Rightarrow$  1) : Segue do Teorema 2.16.

(2  $\Rightarrow$  3) : Suponha que  $\psi : \tilde{X} \longrightarrow X$  é um isomorfismo. Para provar que  $\phi : \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \longrightarrow G$  é um isomorfismo, basta mostrar que é injetor (a sobrejetividade foi demonstrada anteriormente e independe de  $X$  ter ou não circuitos). Sejam  $g_1, g_2 \in \pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$  tal que  $\phi(g_1) = \phi(g_2)$ . Temos

$$\phi(g_1) = \phi(g_2) \Rightarrow \phi(g_2)^{-1}\phi(g_1) = 1 \Rightarrow \phi(g_2^{-1}g_1) = 1 \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in \text{Ker}\phi$$

Por outro lado, como  $\psi$  é um isomorfismo,

$$\phi(g_1) = \phi(g_2) \Rightarrow \phi(g_1)jP = \phi(g_2)jP \Rightarrow \psi(g_1\tilde{P}) = \psi(g_2\tilde{P}) \Rightarrow g_1\tilde{P} = g_2\tilde{P} \Rightarrow g_2^{-1}g_1 \in G_{\tilde{P}} = G_P$$

Logo,  $g_2^{-1}g_1 \in \text{Ker}\phi \cap G_P$ . Mas  $\phi|_{G_P} : G_P \longrightarrow GjP$  é a identidade, por construção. Logo,  $\text{Ker}\phi \cap G_P$  é trivial e  $g_2^{-1}g_1 = 1$ . Portanto,  $g_2 = g_1$  e  $\phi$  é injetor.

(3  $\Rightarrow$  2) : Agora, suponha que  $\phi : \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \longrightarrow G$  é um isomorfismo. Sejam  $g_1\tilde{P}, g_2\tilde{Q} \in \text{vert}\tilde{X}$  tais que  $\psi(g_1\tilde{P}) = \psi(g_2\tilde{Q})$ . Então  $\phi(g_1)jP = \phi(g_2)jQ$ , que implica que  $P = Q$  e  $\phi(g_2^{-1}g_1) \in GjP$ . Logo,  $g_2^{-1}g_1 \in G_{\tilde{P}}$  e, portanto,  $g_1\tilde{P} = g_2\tilde{P}$  e  $\psi$  é injetor. Como já provamos a sobrejetividade de  $\psi$ , segue o resultado.  $\square$

**Corolário 2.24.** *Suponha que  $X$  é uma árvore e que  $Y = G \setminus X$  é um loop. Então  $G$  é um grupo HNN.*

*Demonstração.* Segue imediatamente do teorema anterior juntamente com o Exemplo 2.5.  $\square$

# Grupos de Baumslag-Solitar Generalizados

## 3.1 Definição

Um caso especial e muito estudado de grupos fundamentais de grafos de grupos são os grupos de Baumslag-Solitar generalizados.

**Definição 3.1.** Um **grupo de Baumslag-Solitar generalizado** é o grupo fundamental de um grafo de grupos cujos grupos de vértices e arestas são todos cíclicos infinitos.

Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos cuja os grupos de vértices e arestas são todos cíclicos infinitos. Denotando

$$G_P = \langle a_P \mid - \rangle$$

$$G_y = \langle a_y \mid - \rangle$$

para cada vértice  $P$  e cada aresta  $y$  de  $Y$  temos que, para cada aresta  $y$  de  $Y$ , existe um único  $i_y \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\alpha_y(a_y) = a_{t(y)}^{i_y}$$

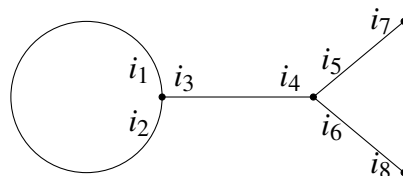
onde  $\alpha_y$  é o mergulho de  $G_y$  em  $G_{t(y)}$  descrito pelo grafo de grupos  $(\mathcal{G}, Y)$ . Chamaremos  $i_y$  de **índice de  $G_y$  em  $G_{t(y)}$** .

Observe que  $n \neq 0$  sempre, pois os homomorfismos são necessariamente injetores.

Desta maneira, o grafo de grupos  $(\mathcal{G}, Y)$  é completamente descrito como um par  $(Y, i)$  onde  $Y$  é um grafo conexo e  $i : \text{edge}Y \rightarrow \mathbb{Z} - \{0\}$  é a função tal que

$$\alpha_y(a_y) = a_{t(y)}^{i(y)}$$

e seu diagrama pode ser representado como o exemplo abaixo.

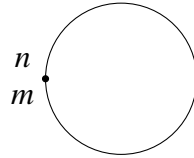


Se  $X$  é a  $G$ -árvore do grafo de grupos  $(A, i)$ , então a função induzida  $i : E(X) \rightarrow (\mathbb{Z} - \{0\})$  é dada por

$$|i(e)| = [G_{i(e)} : G_e]$$

uma vez que os monomorfismos dos grupos de arestas nos grupos de vértices em  $(A, i)$  vêm das inclusões dos estabilizadores de arestas nos estabilizadores de seus vértices adjacentes, e vice-versa.

**Exemplo 3.2.** Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos onde  $Y$  é um loop,  $G_y = \langle a \rangle$  é o grupo de aresta e  $G_P = \langle b \rangle$  é o grupo de vértice, com ambos de ordem infinita. Sejam  $n = i(y)$  e  $m = i(\bar{y})$ , como indicado abaixo.



Então o grupo de Baumslag-Solitar generalizado referente a tal grafo é dado por

$$\langle b, t | t b^n t^{-1} = b^m \rangle$$

que corresponde ao grupo de Baumslag-Solitar  $BS(n, m)$ .

**Exemplo 3.3.** Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos onde  $Y$  é um segmento,  $G_y = \langle a \rangle$  é o grupo de aresta e  $G_P = \langle b \rangle$  e  $G_Q = \langle c \rangle$  são os grupos de vértices, com ambos de ordem infinita. Sejam  $n = i(y)$  e  $m = i(\bar{y})$ , como indicado abaixo.

$$P \cdot \overset{m}{\text{---}} \overset{n}{\text{---}} \cdot Q$$

Então o grupo de Baumslag-Solitar generalizado referente a tal grafo é dado por

$$\langle b, c | c^n = b^m \rangle$$

Se  $n$  e  $m$  são relativamente primos, então este grupo corresponde ao grupo de nó do  $(n, m)$ -nó toral.

**Definição 3.4.** A árvore de Bass-Serre associada ao grafo de grupos cujos grupos de arestas e vértices são todos grupos cíclicos infinitos é chamada de **árvore de Baumslag-Solitar generalizada**.

## 3.2 Movimentos Elementares

De agora em diante denotaremos por  $\alpha_y$  o monomorfismo  $G_y \hookrightarrow G_{t(y)}$ , para cada aresta  $y$  de um dado grafo de grupos.

**MOVIMENTO DE COLAPSO:** para realizar um movimento de colapso em um vértice  $P$  precisamos de uma aresta  $y \in E(P)$  que não é um loop e tal que  $\alpha_y : G_y \rightarrow G_{t(y)}$  é um isomorfismo. Então colapsamos a aresta  $y$  no vértice  $P$  e as arestas incidentes à  $E(t(y))$  “ganham” novos mergulhos, agora em  $G_P$ , dados pela composição:

$$\alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_y^{-1} \circ \alpha_{\bar{e}} : G_e \xrightarrow{\alpha_{\bar{e}}} G_{o(e)} = G_{t(y)} \xrightarrow{\cong} G_y \xrightarrow{\alpha_{\bar{y}}} G_{o(y)} = G_P$$



Note que tal movimento não altera o grupo fundamental do grafo de grupos. De fato, como  $y$  não é um loop, podemos escolher, para calcular o grupo fundamental, uma subárvore maximal  $T$  de  $Y$  tal que  $y \in \text{edge}T$  e assim retirar a aresta  $y$  não diminuirá os geradores do grupo fundamental. Além disso, se denotarmos por  $A$  e  $A'$  os grafos antes e depois do colapso, respectivamente. Em  $A$  temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} f\alpha_f(a)f^{-1} &= \alpha_{\bar{f}}(a), \forall a \in G_f, f \in E(Q) \\ \alpha_y(a) &= \alpha_{\bar{y}}(a), \forall a \in G_y \end{aligned}$$

onde a última pode ser substituída por

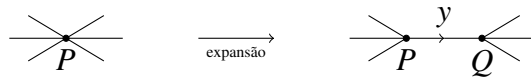
$$\alpha_y \circ \alpha_{\bar{y}}^{-1}(a) = \text{id}(a), \forall a \in G_y$$

Agora, se denotarmos por  $\tilde{\alpha}_{\bar{f}}$  o mergulho de  $G_f$  em  $G_P$  após o colapso, ou seja,  $\tilde{\alpha}_{\bar{f}} = \alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_{\bar{y}}^{-1} \circ \alpha_{\bar{f}}$ , temos que a relação no grupo fundamental referente a uma aresta  $f \in E(Q)$  no grafo de grupos  $A'$  se torna

$$f\alpha_f(a)f^{-1} = \tilde{\alpha}_{\bar{f}}(a) = \alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_{\bar{y}}^{-1} \circ \alpha_{\bar{f}}(a) = \alpha_{\bar{f}}(a), \forall a \in G_f$$

que era a mesma relação antes do colapso.

**MOVIMENTO DE EXPANSÃO:** escolhemos um vértice  $P$  de  $Y$ , um subgrupo  $H \subset G_P$  e uma família de arestas  $\{y_i\}_{i \in S} \subset E(P)$  com origem em  $P$  tal que  $G_{\bar{y}_i} = \alpha_{\bar{y}_i}(G_{y_i}) \subset H$ , para todo  $i \in S$ . Adicionamos, em  $Y$ , uma aresta  $y$  com origem  $o(y) = P$  e redefinimos, para cada  $i \in S$ ,  $o(y_i)$  (que era igual a  $P$ ) por  $t(y)$  (o novo vértice). Em  $(\mathcal{G}, Y)$  associamos à  $y$  e a  $t(y)$  o grupo  $H$  ( $G_y = G_{t(y)} = H$ ) e definimos os mergulhos  $\alpha_y : G_y \rightarrow G_{t(y)}$  e  $\alpha_{\bar{y}} : G_y \rightarrow G_{o(y)} = G_P$  pela identidade e pela inclusão, respectivamente. Os monomorfismos  $\alpha_{\bar{y}_i} : G_{y_i} \hookrightarrow G_P$  são inalterados, uma vez que podem ser vistos como monomorfismos  $\alpha_{\bar{y}_i} : G_{y_i} \hookrightarrow H = G_{t(y)}$ .

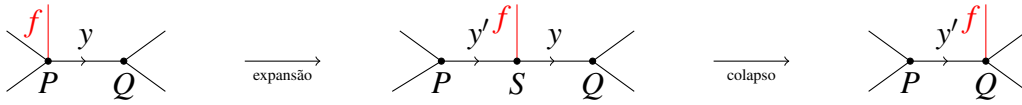


Este movimento é o inverso do movimento de colapso e, portanto, também não altera o grupo fundamental do grafo de grupos inicial.

Os movimentos de colapso e expansão são chamados de **movimentos elementares** e uma sequência finita desses movimentos é chamada de **deformação**.

Dois casos especiais de deformações são os **movimentos deslizante** e os **movimentos de indução**, que são compostos por uma expansão seguida de um colapso.

**MOVIMENTOS DESLIZANTE:** Sejam  $y, f \in E(P)$  (arestas adjacentes) tal que  $G_{\bar{f}} \subset G_{\bar{y}} \subset G_P$  (é permitido que  $y$  seja um loop) e  $f \neq y, \bar{y}$ . Expandimos em  $P$  criando uma nova aresta  $y'$  e novo vértice  $S = t(y')$  tal que  $o(y') = P$  e  $E(S) = \{y, \bar{y}', f\}$  (aqui a escolha foi  $H = G_{\bar{y}}$  e  $\{y_i\}_{i \in S} = \{y, f\}$ ). Depois colapsamos  $\bar{y}$ .



O grafo final resulta na “troca”  $y$  por  $y'$  e o mergulho  $\alpha_{\bar{f}} : G_f \hookrightarrow G_{o(f)} = G_P$  (que pode ser pensado como  $\alpha_{\bar{f}} : G_f \hookrightarrow G_{\bar{y}} \cong G_y$ ) por

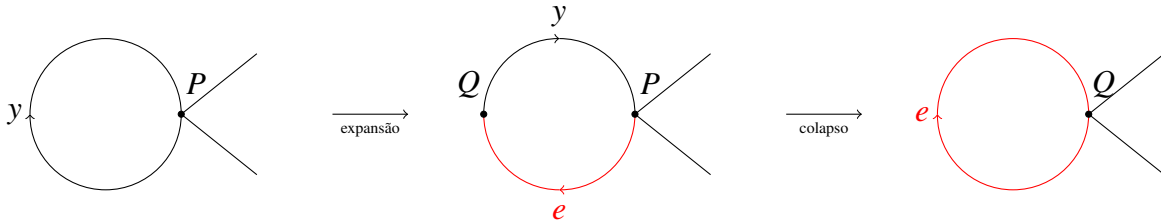
$$\alpha_y \circ \alpha_{\bar{y}}^{-1} \circ \alpha_{\bar{f}} : G_f \hookrightarrow G_{\bar{y}} \xrightarrow{\cong} G_y \hookrightarrow G_{t(y)}$$

A aresta  $f$  que antes era incidente a  $P$ , torna-se incidente a  $Q$ .

Antes do próximo caso particular de deformação, precisamos da seguinte definição:

**Definição 3.5.** Seja  $(\mathcal{G}, Y)$  um grafo de grupos e  $e$  um loop em  $Y$  com vértice  $P$ . Se  $\alpha_e$  ou  $\alpha_{\bar{e}}$  é um isomorfismo, então dizemos que a aresta  $e$  é um **loop ascendente**. A **monodromia**  $G_P \rightarrow G_P$  associada a  $e$  é a composição  $\alpha_{\bar{e}} \circ \alpha_e^{-1}$  se  $\alpha_e$  é um isomorfismo, ou  $\alpha_e \circ \alpha_{\bar{e}}^{-1}$  caso  $\alpha_{\bar{e}}$  é um isomorfismo.

**MOVIMENTO DE INDUÇÃO:** Seja  $y$  um loop ascendente com vértice  $P$  e monodromia  $\phi : G_P \rightarrow G_P$ . Seja  $B$  um subgrupo de  $G_P$  tal que  $\phi(G_P) \subseteq B \subseteq G_P$ . Suponha que  $\alpha_y$  seja um isomorfismo (neste caso,  $\phi = \alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_y^{-1}$ ). Então o movimento de indução se dá pela expansão de uma nova aresta  $e$  e um novo vértice  $Q = t(e)$ , com  $G_e = G_Q = B$  onde  $\alpha_e$  é a identidade e  $\alpha_{\bar{e}}$  é a inclusão, seguida de um colapso da aresta  $y$ .



Depois do colapso, o mergulho  $\alpha_e$  não se altera (continua sendo a identidade) e o mergulho  $\alpha_{\bar{e}}$ , que antes era dado pela inclusão  $B \hookrightarrow G_P$ , passa a ser a composição

$$\alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_y^{-1} \circ \alpha_{\bar{e}} = \phi \circ \alpha_{\bar{e}} = \phi|_B$$

Desta forma, o novo loop  $e$  é um loop ascendente com monodromia igual a restrição de  $\phi$  ao subgrupo  $B$ .

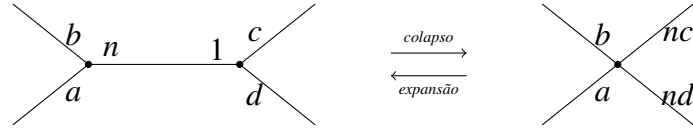
Além disso, se  $f$  é uma aresta incidente a  $P$  antes do movimento de indução, então o novo mergulho  $G_f \hookrightarrow G_{o(f)} = G_Q$  será dado pela composição

$$\alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_y^{-1} \circ \alpha_{\bar{f}} = \phi \circ \alpha_{\bar{f}}$$

onde  $\alpha_{\bar{f}} : G_f \hookrightarrow G_P$  é o mergulho no grafo de grupos inicial.

### 3.3 Movimentos Elementares nos Grupos de Baumslag-Solitar Generalizados

**Proposição 3.6.** *Se um movimento elementar é realizado em uma árvore de Baumslag-Solitar Generalizada, então o grafo de grupos quociente muda localmente da seguinte forma:*



*Demonstração.* Seja  $X$  um  $G$ -árvore de Baumslag-Solitar generalizada e seja  $(\mathcal{G}, Y)$  seu grafo de grupos quociente.

Seja  $y$  uma aresta de  $Y$  que será colapsada. Então  $\alpha_y$  ou  $\alpha_{\bar{y}}$  necessariamente é um isomorfismo (para que esse movimento seja possível). Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $\alpha_y$  é um isomorfismo e que  $i(y) = 1$ . Sejam  $P = o(y)$ ,  $Q = t(y)$  e  $i(\bar{y}) = n \in \mathbb{Z}$ .

Se  $f$  é uma aresta incidente a  $Q$  com índice  $i(\bar{f}) = c$ , então depois de colapsar  $y$  em  $P$ , temos

$$\tilde{\alpha}_{\bar{f}} = \alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_y^{-1} \circ \alpha_{\bar{f}}$$

onde  $\alpha_{\bar{f}}$  é o mergulho  $G_f \hookrightarrow G_Q$  antes do colapso e  $\tilde{\alpha}_{\bar{f}}$  é o mergulho  $G_f \hookrightarrow G_P$  depois do colapso.

Abrindo cada homomorfismo acima, e considerando  $u, v, w$  e  $z$  os geradores de  $G_f, G_Q, G_y$  e  $G_P$ , respectivamente, temos:

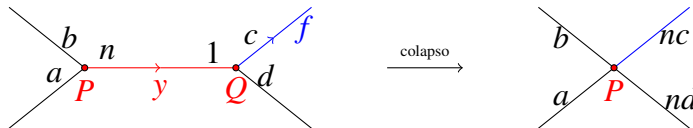
$$\begin{array}{ccc} \alpha_{\bar{y}} : G_y & \longrightarrow & G_P \\ w & \longmapsto & z^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \alpha_y : G_y & \longrightarrow & G_Q \\ w & \longmapsto & v \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \alpha_{\bar{f}} : G_f & \longrightarrow & G_Q \\ u & \longmapsto & u^c \end{array}$$

Portanto,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\alpha}_{\bar{f}} : G_f & \longrightarrow & G_P \\ u & \longmapsto & \alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_y^{-1} \circ \alpha_{\bar{f}}(u) = \alpha_{\bar{y}} \circ \alpha_y^{-1}(v^c) = \alpha_{\bar{y}}(w^c) = (z^n)^c = z^{nc} \end{array}$$

e, assim, depois do colapso temos  $i(\bar{f}) = nc$ .

Logo, a mudança no grafo de grupos quociente se dará pela multiplicação de  $n = i(\bar{y})$  no índice de cada aresta de  $E(Q)$ , assim como na figura abaixo, como queríamos.



Agora, seja  $P$  um vértice de  $(\mathcal{G}, Y)$  que sofrerá expansão, onde  $y$  será a nova aresta e  $Q$  o novo vértice, com  $P = o(y)$  e  $Q = t(y)$ . Sejam  $H$  um subgrupo de  $G_P$  e  $\{f_i\}_{i \in S}$  uma família de arestas de  $E(P)$  (ou seja, com origem em  $P$ ), tais que  $G_{\bar{f}_i}^{\bar{f}_i} = \alpha_{f_i}(G_{f_i}) \subseteq H$  envolvidos com esse movimento. Como todos os grupos de vértice e aresta são cíclicos infinitos, então, se  $G_P = \langle x \rangle$ , temos que existem  $n$  e  $n_i, i \in S$ , tais que  $H = \langle x^n \rangle$  e  $G_{\bar{f}_i}^{\bar{f}_i} = \langle x^{n_i} \rangle$ . Além disso, como por hipótese  $G_{\bar{f}_i}^{\bar{f}_i} \subseteq H$ ,

temos que  $n$  divide  $n_i$ , ou seja,  $n_i = n \cdot c_i$ , para cada  $i \in S$ . Assim, considerando  $G_{f_i} = \langle w_i \rangle$ , depois da expansão, os mergulhos

$$\begin{aligned} \alpha_{f_i} : G_{f_i} &\longrightarrow G_P \\ w_i &\longmapsto x^{n_i} \end{aligned}$$

tornam-se

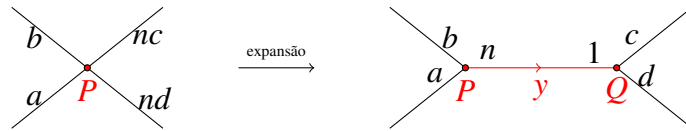
$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{f_i} : G_{f_i} &\longrightarrow G_Q \\ w_i &\longmapsto x^{n_i} = (x_i^n)^{c_i} \end{aligned}$$

Logo, o índice de  $G_{f_i}$  em  $G_Q$  é  $c_i$ , para cada  $i$ .

Ainda, os mergulhos do novo grupo de aresta  $G_y = H$  serão:

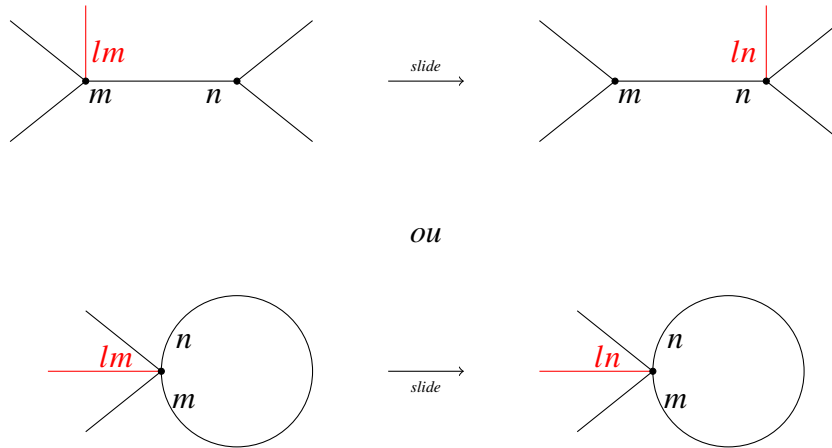
$$\begin{aligned} \alpha_y : G_y = H &\longrightarrow G_Q = H & \alpha_{\bar{y}} : G_y = \langle x^n \rangle &\longrightarrow G_P = \langle x \rangle \\ x^n &\longmapsto x^n & x^n &\longmapsto x^n \end{aligned}$$

ou seja,  $\alpha_y$  é a identidade com índice  $i(y) = 1$  e  $\alpha_{\bar{y}}$  é a inclusão com índice  $i(\bar{y}) = n$ . Assim, o grafo de grupos quociente muda localmente da seguinte forma:

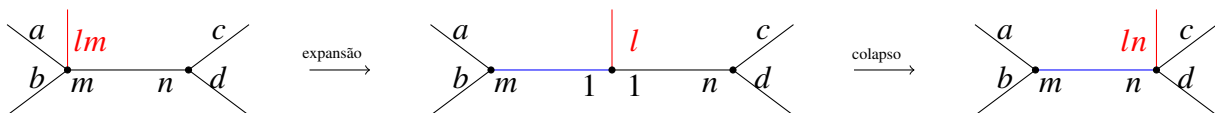


□

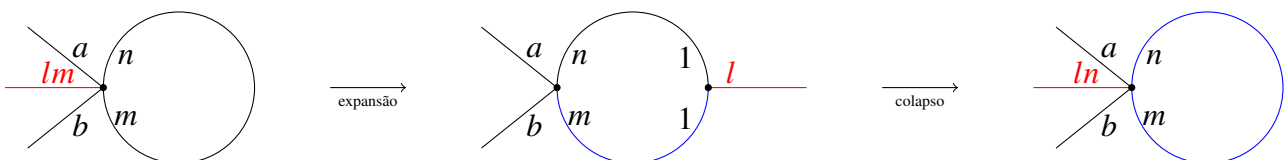
**Corolário 3.7.** Se um movimento deslizante é realizado em uma árvore de Baumslag-Solitar Generalizada, então o grafo de grupos quociente muda localmente da seguinte forma:



*Demonstração.* Como um movimento deslizante é dado por uma expansão seguida de um colapso, pela proposição anterior, o grafo de grupos quociente muda localmente da seguinte forma:

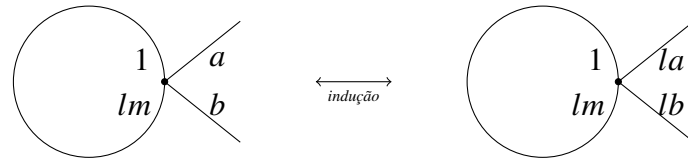


Se  $y$  for um loop, então o movimento deslizante se da por:

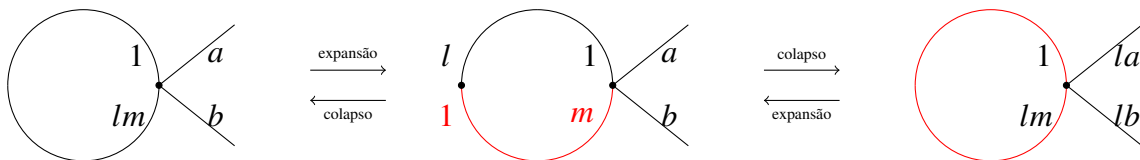


□

**Corolário 3.8.** *Se um movimento de indução é realizado em uma árvore de Baumslag-Solitar Generalizada, então o grafo de grupos quociente muda localmente da seguinte forma:*



*Demonstração.* Como um movimento indução é dado por uma expansão seguida de um colapso em um loop ascendente, pela Proposição 3.6, o grafo de grupos quociente muda localmente da seguinte forma:



□

### 3.4 Redutibilidade

**Definição 3.9.** Seja  $G$  um grupo. Dizemos que uma  $G$ -árvore é:

1. **própria** se todo estabilizador de aresta é estritamente menor que os estabilizadores de seus vértices adjacentes.
2. **cocompacta** se o grafo de grupos quociente é finito.
3. **reduzida** se, sempre que um estabilizador de aresta é igual ao estabilizador de uma de suas extremidades, ambas as extremidades estão na mesma órbita.
4. **totalmente reduzida** se, sempre que um estabilizador de vértice contém outro estabilizador de vértice, esses vértices estão em uma mesma  $G$ -órbita.

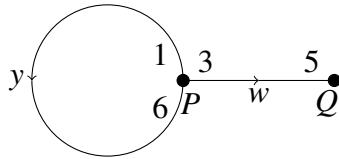
Correspondentemente, um grafo de grupos é **reduzido** se, sempre que um dos mergulhos de um grupo de aresta em um grupo de vértice adjacente for um isomorfismo, então a aresta é um loop. Note que isso equivale a dizer que um grafo de grupos é reduzido se não admite movimento de colapso. Segue também que um grafo de grupos é **totalmente reduzido** se nenhum grupo de vértice pode ser conjugado em outro grupo de vértice.

Segue imediatamente da definição que  $G$ -árvores reduzidas são próprias. Veremos a seguir que toda  $G$ -árvore totalmente reduzida é reduzida e o contrário não é verdadeiro.

**Proposição 3.10.** *Uma  $G$ -árvore totalmente reduzida é reduzida.*

*Demonstração.* Seja  $e$  uma aresta de  $X$  tal que seu estabilizador é igual ao estabilizador de uma de suas extremidades. Ou seja,  $G_e = G_v$  onde  $v = i(e)$  ou  $v = t(e)$ . Se  $w$  é a outra extremidade de  $e$ , temos que  $G_v = G_e \subseteq G_w$ , uma vez que o estabilizador de uma aresta está sempre contido no estabilizador de seus vértices vizinhos. Logo, como  $X$  é totalmente reduzido, temos que  $v$  e  $w$  estão em uma mesma órbita. Portanto,  $X$  é reduzido, como queríamos.  $\square$

**Exemplo 3.11.** Considere  $(A, i)$  como sendo o grafo de grupos de Baumslag-Solitar Generalizado descrito abaixo.



Temos que ele é reduzido, pois a aresta que não é um loop não tem grupo isomorfo a um de seus vértices. Mas, veremos que ele não é totalmente reduzido. De fato, se considerarmos  $G_P = \langle a \rangle$ ,  $G_Q = \langle b \rangle$ ,  $G_w = \langle c \rangle$  e  $G_y = \langle d \rangle$ , temos que os mergulhos dos grupos de arestas nos grupos de vértices são dados por:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_y : G_y \hookrightarrow G_P & \alpha_{\bar{y}} : G_y \hookrightarrow G_P & \alpha_w : G_w \hookrightarrow G_Q & \alpha_{\bar{w}} : G_w \hookrightarrow G_P \\ d \mapsto a^6 & d \mapsto a & c \mapsto b^5 & c \mapsto a^3 \end{array}$$

Usando as relações do grupo fundamental associado a esse grafo de grupos, temos:

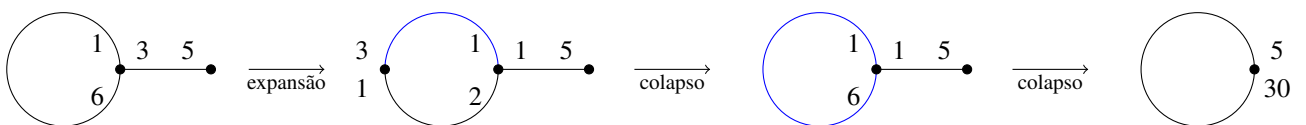
$$\begin{aligned} g_y \alpha_{\bar{y}}(d^n) g_y^{-1} &= \alpha_y(d^n), \text{ para todo } n \\ g_w \alpha_{\bar{w}}(c^n) g_w^{-1} &= \alpha_w(c^n), \text{ para todo } n \\ g_w &= 1 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} g_y a^n g_y^{-1} &= a^{6n}, \text{ para todo } n \\ b^{5n} &= a^{3n}, \text{ para todo } n \end{aligned}$$

Em particular,  $g_y a g_y^{-1} = a^6$  e  $b^{10} = a^6$ . Então, temos que  $g_y a g_y^{-1} = b^{10}$  e, portanto,  $g_y G_P g_y^{-1} \subseteq G_Q$ , provando que o grupos de vértices  $G_P$  pode ser conjugado no grupo de vértices  $G_Q$  e  $(A, i)_{\mathbb{Z}}$  não é totalmente reduzida.

Podemos realizar um movimento de indução (expansão mais colapso) seguido de um movimento de colapso e obtemos uma decomposição que seja totalmente reduzida, como abaixo:



Note que neste exemplo o grupo de Baumslag-Solitar Generalizado envolvido é o grupo  $BS(5, 30)$ , que não é claro olhando para a decomposição inicial  $(A, i)$ .

O objetivo dessa seção é provar o Teorema 3.19, que diz que toda árvore de Baumslag-Solitar generalizada cocompacta está relacionada a uma árvore de Baumslag-Solitar generalizada totalmente reduzida, por meio de uma sequência finita de movimentos elementares. Para isso precisamos de alguns resultados preliminares.

Ao longo dessa seção denotaremos por  $X$  uma árvore de Baumslag-Solitar generalizada com grupo  $G$  e por  $(A, i)$  seu grafo de grupos quociente. Além disso, quando analisamos a ação de  $G$  em  $X$ ,  $G_u$  denotará o estabilizador de  $u$  (sendo  $u$  um vértice ou uma aresta de  $X$ ) e quando estudamos o grafo de grupos,  $G_u$  denotará o grupo de vértice (ou de aresta) associado ao vértice (ou aresta)  $u$ . Este abuso de notação é válido considerando o Teorema 2.23.

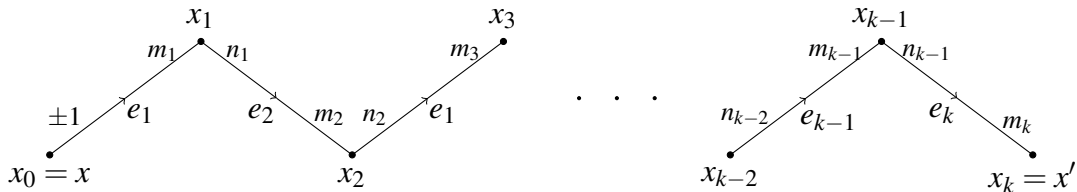
**Lema 3.12.** *Seja  $X$  uma árvore de Baumslag-Solitar generalizada com grupo  $G$ . Suponha que  $G_x \subseteq nG_{x'}$  para vértices  $x \neq x'$ . Seja  $(e_1, \dots, e_k)$  o caminho de  $x$  à  $x'$ , com vértices  $x_0 = x$ ,  $x_i = t(e_i)$  para  $1 \leq i \leq k$ . Defina  $m_i = i(\bar{e}_i)$ ,  $n_i = i(e_{i+1})$ , e  $n_k = n$ . Então  $i(e_1) = \pm 1$ ,*

$$G_x = \frac{\prod_{i=1}^k m_i}{\prod_{i=1}^{k-1} n_i} G_{x_k} \quad (3.1)$$

e

$$\prod_{i=1}^k n_i \text{ divide } \prod_{i=1}^k m_i \quad (3.2)$$

Antes da demonstração, segue um diagrama representando os índices do enunciado do lema:



*Demonstração.* A hipótese  $G_x \subseteq nG_{x'}$ , implica que  $G_x$  fixa  $x$  e  $x'$ . Como  $X$  é uma árvore, então temos que  $G_x$  fixa todo o caminho de  $x$  a  $x'$ , em particular, fixa a aresta  $e_1$ . Ou seja,  $G_x \subseteq G_{e_1}$ . Por outro lado,  $G_{e_1} \subseteq G_x$ , por definição de ação de um grupo em uma árvore. Logo,  $G_x = G_{e_1}$  e  $i(e_1) = \pm 1$ .

Agora, provaremos 3.1 e 3.2 por indução sobre  $k$ . Se  $k = 1$ , então temos que  $G_x = G_{e_1}$ , pelo item anterior, e  $G_{e_1} = m_1 G_{x'}$ , pois  $i(e_1) = m_1$ . Logo,  $G_x = m_1 G_{x'}$  e 3.1 é válido. Além disso, a hipótese  $G_x \subseteq nG_{x'}$  implica que  $m_1 G_{x'} \subseteq nG_{x'}$  e, portanto,  $m_1$  é um múltiplo de  $n = n_1$ , verificando 3.1.

Seja  $k > 1$  e suponhamos que 3.1 e 3.2 são válidas para  $1 \leq i < k$ . Como  $i(\bar{e}_k) = m_k$  e  $i(e_k) = n_{k-1}$ , temos  $n_{k-1} G_{x_{k-1}} = G_{e_k} = m_k G_{x_k}$ . Então, usando as hipóteses de indução para  $k - 1$ , temos:

$$G_x \stackrel{\text{HI em 3.1}}{=} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} m_i}{\prod_{i=1}^{k-2} n_i} G_{x_{k-1}} = \frac{\prod_{i=1}^{k-1} m_i}{\prod_{i=1}^{k-1} n_i} n_{k-1} G_{x_{k-1}} \stackrel{\text{HI em 3.2}}{=} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} m_i}{\prod_{i=1}^{k-1} n_i} m_k G_{x_k} = \frac{\prod_{i=1}^k m_i}{\prod_{i=1}^{k-1} n_i} G_{x_k}$$

provando 3.1 para  $k$ . Além disso, a hipótese  $G_x \subseteq n_k G_{x_k}$  implica que

$$\frac{\prod_{i=1}^k m_i}{\prod_{i=1}^{k-1} n_i} G_{x_k} \subseteq n_k G_{x_k}$$

Logo,  $\frac{\prod_{i=1}^k m_i}{\prod_{i=1}^{k-1} n_i}$  é um múltiplo de  $n_k$  e, portanto,

$$\prod_{i=1}^k n_i \text{ divide } \prod_{i=1}^k m_i$$

provando que [3.2](#) também é válido para  $k$ . □

**Corolário 3.13.** *Seja  $(e_1, \dots, e_k)$  um caminho em  $X$  e defina  $m_i, n_i$  como no lema anterior. Então  $G_{o(e_1)}$  fixa o caminho  $(e_1, \dots, e_k)$  se, e somente se,  $i(e_1) = \pm 1$  e, para cada  $l \leq (k-1)$ ,*

$$\prod_{i=1}^l n_i \text{ divide } \prod_{i=1}^l m_i \tag{3.3}$$

*Demonstração.* Segue imediatamente do lema anterior que  $G_{o(e_1)}$  fixa o caminho  $(e_1, \dots, e_k)$  implica que  $i(e_1) = \pm 1$  e, para cada  $l \leq (k-1)$ ,  $\prod_{i=1}^l n_i$  divide  $\prod_{i=1}^l m_i$ . A volta da implicação será provada por indução sobre  $k$ . Se  $k = 1$ , então como  $i(e_1) = \pm 1$ , temos que  $G_{o(e_1)} = G_{e_1}$  e  $G_{o(e_1)}$  fixa  $e_1$ . Agora, seja  $k > 1$ . Considere que  $i(e_1) = \pm 1$  e, para cada  $l \leq (k-1)$ ,  $\prod_{i=1}^l n_i$  divide  $\prod_{i=1}^l m_i$  e suponha que  $G_{o(e_1)}$  fixa o caminho  $(e_1, \dots, e_{k-1})$ . Precisamos provar que  $G_{o(e_1)}$  fixa  $e_k$ . Por hipótese temos que  $\prod_{i=1}^{k-1} n_i$  divide  $\prod_{i=1}^{k-1} m_i$  e, portanto,  $n_i$  divide  $\frac{\prod_{i=1}^{k-1} m_i}{\prod_{i=1}^{k-2} n_i}$ . Além disso,  $G_{e_k} = n_{k-1} G_{x_{k-1}}$ , pois  $n_{k-1} = i(e_k)$ , e, por [3.1](#) do lema anterior,

$$G_{o(e_1)} = \frac{\prod_{i=1}^{k-1} m_i}{\prod_{i=1}^{k-2} n_i} G_{x_{k-1}}$$

Logo,  $G_{o(e_1)} \subseteq n_{k-1} G_{x_{k-1}} = G_{e_k}$  e, assim,  $G_{o(e_1)}$  fixa  $e_k$  e todo o caminho  $(e_1, \dots, e_k)$ , como queríamos. □

**Definição 3.14.** *Seja  $f$  uma aresta de  $A$  com  $o(f) \neq t(f)$ . Seja  $\rho = (e_1, \dots, e_k, f)$  um caminho em  $A$  tal que  $e_i$  seja um loop em  $o(f)$  para cada  $1 \leq i \leq k$ . Dizemos que  $\rho$  é um caminho **admissível** para  $f$  se existe um levantamento  $\tilde{\rho} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k, \tilde{f})$  em  $X$  tal que*

$$G_{o(\tilde{e}_1)} \subseteq G_{\tilde{f}} \tag{3.4}$$

A condição [3.4](#) implica que  $G_{o(\tilde{e}_1)}$  fixa o caminho  $\tilde{\rho}$ . Então segue do Corolário [3.13](#) que um caminho ser admissível só depende dos índices ao longo do caminho  $\rho$  (que são os mesmos índices de seus levantamentos, a menos de sinal, por definição). Assim, se denotarmos por  $m_l = i(\bar{e}_l)$ ,  $n_l = i(e_{l-1})$  e  $n_k = i(f)$ , temos que  $\rho$  é admissível se, e somente se,  $i(e_1) = \pm 1$  e valer [3.3](#) para cada  $1 \leq l \leq k$ .

**Definição 3.15.** *Dizemos que uma aresta  $e$  de  $A$  é **essencial** se  $i(e) \neq \pm 1$ , e **não essencial** caso contrário. O **comprimento** de um caminho  $\rho$  é o número de arestas contidas nele, como visto anteriormente, e o **comprimento essencial** de  $\rho$  é o número de arestas essenciais ocorridas em  $\rho$ .*

**Lema 3.16.** *Se  $\rho = (e_1, \dots, e_k, f)$  é um caminho admissível, então existe uma permutação  $\sigma$  tal que o caminho  $\rho_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}, f)$  é admissível e todas as arestas essenciais de  $\rho_\sigma$  ocorrem após as arestas não essenciais.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que se  $e_j$  é não essencial para algum  $j > 1$ , então

$$\rho' = (e_1, \dots, e_{j-2}, e_j, e_{j-1}, \dots, e_k, f)$$

é um caminho admissível para  $f$ . Sejam  $m_i, n_i$  os índices ao longo do caminho  $\rho$  e  $m'_i, n'_i$  os índices ao longo do caminho  $\rho'$ . Temos

$$n'_{j-2} = n_{j-1}, m'_{j-1} = m_j, n'_{j-1} = n_{j-2} \text{ e } m'_j = m_{j-1}$$

Precisamos provar que  $i(e'_1) = \pm 1$  e vale [3.3](#) para cada  $l$ , onde  $1 \leq l \leq k$ . Se  $j = 2$ , então  $i(e'_1) = i(e_2) = \pm 1$ , pois  $e_2$  é uma aresta não essencial. Se  $j > 2$ , então  $i(e'_1) = i(e_1) = \pm 1$ , pois  $\rho$  é admissível. Também segue de  $\rho$  ser admissível que [3.3](#) vale para todo  $l < (j-2)$  e  $l > (j-1)$ . Vamos provar que é válido também para  $l = j-2$  e  $l = j-1$ . Para  $l = j-1$  temos

$$\prod_{i=1}^{j-1} n'_i = \left( \prod_{i=1}^{j-3} n'_i \right) n'_{j-2} n'_{j-1} = \left( \prod_{i=1}^{j-3} n_i \right) n_{j-1} n_{j-2} = \pm \left( \prod_{i=1}^{j-3} n_i \right) n_{j-2} = \pm \prod_{i=1}^{j-2} n_i$$

e

$$\prod_{i=1}^{j-1} m'_i = \left( \prod_{i=1}^{j-2} m'_i \right) m'_{j-1} = \left( \prod_{i=1}^{j-2} m_i \right) m_j$$

Como  $\rho$  é admissível, temos que  $\prod_{i=1}^{j-2} n_i$  divide  $\prod_{i=1}^{j-2} m_i$ . Portanto,  $\prod_{i=1}^{j-1} n'_i$  divide  $\prod_{i=1}^{j-1} m'_i$ , como queríamos. Agora, para  $l = j-2$ , temos

$$\prod_{i=1}^{j-2} n'_i = \left( \prod_{i=1}^{j-3} n'_i \right) n'_{j-2} = \left( \prod_{i=1}^{j-3} n_i \right) n_{j-1} = \pm \prod_{i=1}^{j-3} n_i$$

e

$$\prod_{i=1}^{j-2} m'_i = \left( \prod_{i=1}^{j-3} m'_i \right) m'_{j-2} = \left( \prod_{i=1}^{j-3} m_i \right) m_{j-2}$$

Por hipótese,  $\prod_{i=1}^{j-3} n_i$  divide  $\prod_{i=1}^{j-3} m_i$ , logo  $\prod_{i=1}^{j-2} n'_i$  divide  $\prod_{i=1}^{j-2} m'_i$  e vale [3.3](#) para todo  $l$ . Portanto,  $\rho'$  é admissível para  $f$ .

Usando transposições desse tipo, podemos mover todas as arestas não essenciais em  $\rho$  para frente do caminho, provando o lema.  $\square$

**Lema 3.17.** *Seja  $\rho = (e_1, \dots, e_k, f)$  um caminho admissível tal que  $e_1, \dots, e_j$  são não essenciais e  $e_{j+1}, \dots, e_k$  são essenciais. Então existe uma seqüência de movimentos deslizantes após os quais o caminho  $\rho' = (e_1, \dots, e_1, e_{j+1}, \dots, e_k, f)$  é admissível.*

*Demonstração.* Seja  $\rho = (e_1, \dots, e_k, f)$  um caminho admissível tal que  $e_1, \dots, e_j$  são não essenciais e  $e_{j+1}, \dots, e_k$  são essenciais, e sejam  $n_i = i(e_{i+1})$  e  $m_i = i(\bar{e}_i)$  os índices das arestas de  $\rho$ . Deslizamos  $\bar{e}_1$  sobre cada aresta  $e_i$ , com  $i \leq j$  (esses movimentos podem ser realizados pois cada  $e_i$  é não essencial). Se denotarmos por  $m'_i$  e  $n'_i$  os novos índices do caminho, temos que os únicos índices que se alteram são os iguais a  $i(\bar{e}_1)$ , que agora valerão  $\pm \prod_{i=1}^j m_i$ , pois cada vez que deslizamos  $\bar{e}_1$  sobre  $e_i$

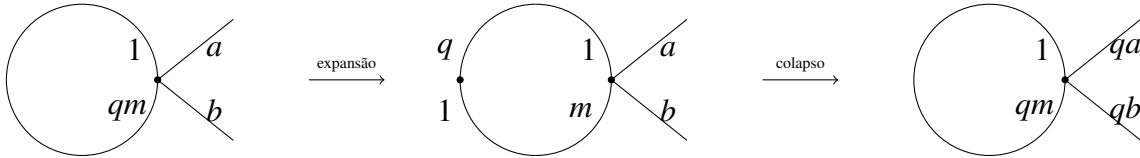
multiplicamos  $i(\bar{e}_1)$  por  $\pm i(\bar{e}_i)$ . Como  $i(e_1)$  continua tendo módulo 1, tal aresta continua sendo não essencial. Então, para que o novo caminho seja admissível, precisamos que continue valendo [3.3](#) para todo  $l \leq (k-1)$ . Para  $l \leq j$  a validade permanece, uma vez que o único índice que se alterou foi  $m'_1$ , ganhando novos fatores, o que não influencia na divisibilidade em [3.3](#). Porém, se para algum  $s > j$ , tivermos  $e_s = \bar{e}_1$ , então  $n'_{s-1} = i(e_s) = i(\bar{e}_1) = \pm \prod_{i=1}^j m_i$  e ganhamos novos fatores que podem influenciar na divisibilidade de  $\prod_{i=1}^s n'_i$  por  $\prod_{i=1}^s m'_i$ . Para contornarmos tal problema, vamos acrescentar várias cópias de  $e_1$  à frente desse caminho, uma para cada ocorrência de  $\bar{e}_1$  em  $(e_{j+1}, \dots, e_k)$ . Então toda vez que algum fator é acrescentado em  $\prod_{i=1}^l n'_i$ , o mesmo fator será acrescentado em  $\prod_{i=1}^l m'_i$ , garantindo que [3.3](#) seja válida para esse novo caminho  $(e_1, \dots, e_1, e_2, \dots, e_k, f)$ . Portanto tal caminho é admissível para  $f$ .

Agora, vamos substituir  $e_i$  por  $e_1$ , para cada  $i \leq j$ , obtendo o caminho  $\rho' = (e_1, \dots, e_1, e_{j+1}, \dots, e_k, f)$ . As quantidades  $\prod_{i=1}^l m_i$  aumentam e cada  $\prod_{i=1}^l n_i$  permanece inalterado (a menos de sinal), então a propriedade [3.3](#) ainda vale para todo  $l$ . Portanto,  $\rho'$  é admissível, como queríamos.

Note que a parte não essencial  $(e_1, \dots, e_1)$  de  $\rho'$  pode ter comprimento maior que  $j$ , embora  $\rho$  e  $\rho'$  tenham o mesmo comprimento essencial  $(k-j)$ .  $\square$

**Lema 3.18.** *Seja  $(e_1, \dots, e_1, e_{j+1}, \dots, e_k, f)$  um caminho admissível tal que  $e_1$  é não essencial e  $e_{j+1}, \dots, e_k$  são essenciais. Então existe uma sequência de movimentos de indução depois do qual este caminho continua admissível e satisfaz  $i(e_{j+1}) = \pm i(\bar{e}_1)^r$ , para algum inteiro  $r$ .*

*Demonstração.* Seja  $\rho = (e_1, \dots, e_1, e_{j+1}, \dots, e_k, f)$  um caminho admissível tal que  $e_1$  é não essencial e  $e_{j+1}, \dots, e_k$  são essenciais. Se  $e_{j+1} = \bar{e}_1$ , então já temos que  $\rho$  satisfaz  $i(e_{j+1}) = i(\bar{e}_1)$  ( $r = 1$ ). Agora, suponha que  $e_{j+1} \neq \bar{e}_1$ . Temos que a admissibilidade de  $\rho$  implica que  $i(e_{j+1}) = n_j$  divide  $i(\bar{e}_1)^j = m_1^j = \prod_{i=1}^j m_i$ . Seja  $r$  o menor inteiro tal que  $i(e_{j+1})$  divide  $i(\bar{e}_1)^r$ . Então temos que ou  $i(e_{j+1}) = \pm i(\bar{e}_1)^r$ , ou existe um inteiro  $z$  de módulo maior que 1 tal que  $i(\bar{e}_1)^r = z \cdot i(e_{j+1})$ . Seja  $q$  um fator de  $z$  que divide  $i(\bar{e}_1)$ . Então  $i(\bar{e}_1) = q \cdot m$  para algum  $m$  e podemos realizar um movimento de indução na aresta  $\bar{e}_1$  da seguinte forma:



Então o índice de cada aresta incidente a  $o(e_1)$  é multiplicado por  $q$ , exceto os índices de  $e_1$  e  $\bar{e}_1$ , que não se alteram. Assim, como tanto os  $n_i$ 's quanto os  $m_i$ 's ficarão multiplicados por  $q$ , esse movimento não afetará a admissibilidade do caminho, pois [3.3](#) continuará valendo. Além disso,  $i(e_{j+1})$  se torna  $q \cdot i(e_{j+1})$ . Repetindo esse processo com cada fator de  $z$  que divide  $\bar{e}_1$ , obtemos que o novo índice de  $e_{j+1}$  é igual a  $z \cdot i(e_{j+1})$  e, portanto,

$$i(e_{j+1}) = \pm i(\bar{e}_1)^r$$

como queríamos.  $\square$

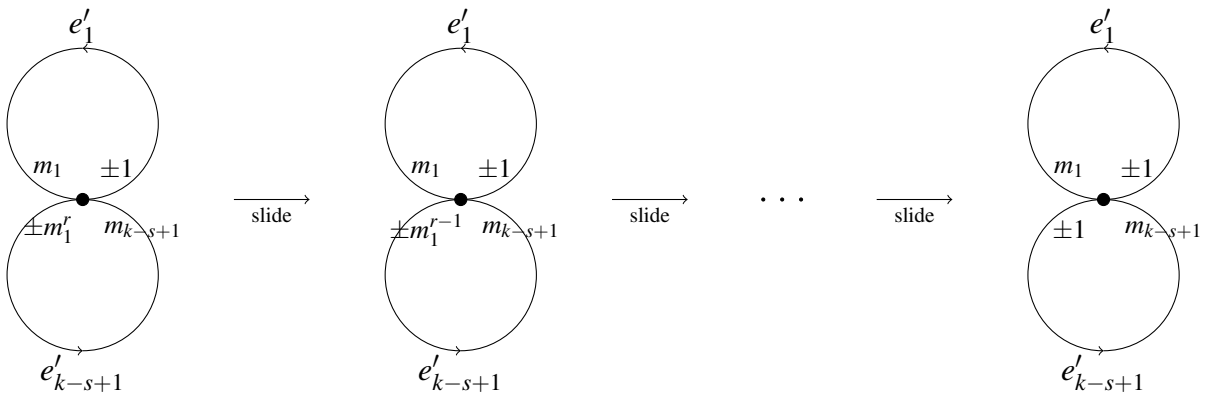
**Teorema 3.19.** *Toda árvore de Baumslag-Solitar generalizada cocompacta está relacionada a uma árvore de Baumslag-Solitar generalizada totalmente reduzida por meio de uma deformação.*

*Demonstração.* Seja  $X$  uma árvore de Baumslag-Solitar generalizada cocompacta e  $(A, i)$  seu grafo de grupos quociente. Se  $X$  não é totalmente reduzido, então existem vértices  $v$  e  $w$  de  $X$  tal que  $G_v \subseteq G_w$  (ou seja, o estabilizador de  $v$  está contido no estabilizador de  $w$ ) e  $v$  não pertence a órbita de  $w$ .

Como  $v$  e  $w$  não estão numa mesma órbita, eles não se projetam em um mesmo vértice em  $A$  e, então, o caminho  $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r)$  de  $v$  para  $w$  em  $X$  contém pelo menos uma aresta que não será projetada em um loop no grafo quociente. Seja  $\tilde{f} = \tilde{e}_{k+1}$  a primeira aresta em que isso ocorre e considere o caminho  $\tilde{\rho} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k, \tilde{f})$  em  $X$  e sua projeção  $\rho = (e_1, \dots, e_k, f)$  em  $A$ . Como  $G_v \subseteq G_w$ , temos que  $G_v$  estabiliza o caminho de  $v$  a  $w$  e então, em particular,  $G_{o(\tilde{e}_1)} = G_v \subseteq G_{\tilde{f}}$ . Logo  $\rho$  é um caminho admissível para  $f$ , por definição. Vamos provar que existe uma deformação na qual  $f$  é colapsada. Seja  $s$  o comprimento essencial de  $\rho$  e suponha que  $s \geq 1$ , a priori. Então, pelo Lema 3.16 existe um caminho admissível  $\rho_\sigma = (e'_1, \dots, e'_k, f)$  com  $e'_1, \dots, e'_{k-s}$  arestas não essenciais e  $e'_{k-s+1}, \dots, e'_k$  essenciais. Agora, aplicando o Lema 3.17 a  $\rho_\sigma$ , obtemos que, após uma sequência de movimentos deslizantes, o caminho  $\rho' = (e'_1, \dots, e'_1, e'_{k-s+1}, \dots, e'_k, f)$  é admissível. Por fim, aplicando o Lema 3.18, temos que, após uma sequência de movimentos de indução, vale  $i(e'_{k-s+1}) = \pm i(\overline{e'_1})^r$  para algum  $r$ .

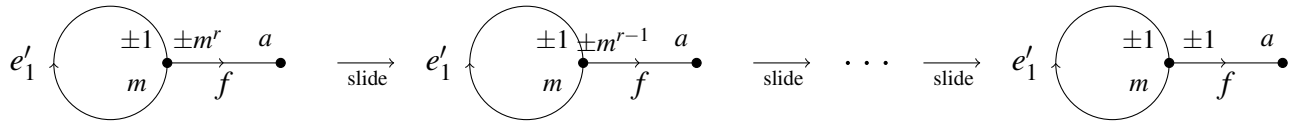
Aplicando esses lemas, a decomposição  $(A, i)$  se transforma, por meio de uma deformação, em uma decomposição  $(A', i')$ , com o mesmo número de arestas, uma vez que essa deformação é composta apenas de movimentos deslizantes e de indução.

Agora, vamos deslizar  $e'_{k-s+1}$  sobre  $\overline{e'_1}$   $r$  vezes:

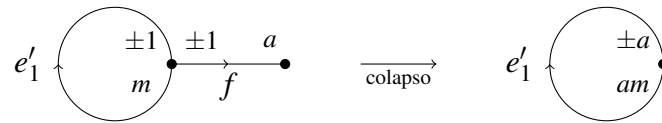


Obtemos que o novo índice  $n_{k-s} = i(e'_{k-s+1})$  é igual a  $\pm 1$ . Essa mudança pode alterar a admissibilidade de  $\rho'$ . Se  $e'_i = e'_{k-s+1}$ , então esses movimentos só diminuiram os fatores do produto  $\prod_{i=1}^l n_i$  em 3.3, o que não muda a admissibilidade de  $\rho'$ . Mas, se  $e'_i = \overline{e'_{k-s+1}}$  para algum  $i$ , então estamos tirando fatores do produto  $\prod_{i=1}^l m_i$ , o que poderia fazer com que 3.3 não seja mais válido para  $\rho'$ . Para contornar esse problema, adicionamos  $r$  cópias de  $e'_1$  à frente de  $\rho'$  para cada vez que algum  $e'_i = \overline{e'_{k-s+1}}$ . Então esse novo caminho é admissível para  $f$  e tem comprimento essencial  $k - s - 1$ . Repetindo esse argumento, obtemos uma nova decomposição  $(A', i')$  relacionada a  $(A, i)$  por uma deformação, ainda

com o mesmo número de arestas e um caminho admissível para  $f$  de comprimento essencial zero. Aplicando novamente os Lemas 3.17 e 3.18, obtemos um caminho  $(e'_1, e'_1, \dots, f)$  com  $i(f) = \pm i(\overline{e'_1})^r$  para algum  $r$ . Finalmente, deslizamos  $f$  sobre  $\overline{e'_1}$   $r$  vezes:



e obtemos que  $i(f) = \pm 1$ . Agora colapsamos  $f$ :



Essa decomposição tem uma aresta  $a$  menos e, repetindo esse processo em cada aresta de  $\tilde{\rho}$  que não se projeta em um loop, obtemos uma nova decomposição onde  $v$  e  $w$  estão em uma mesma órbita.

Repetindo esse argumento quantas vezes for necessário (finitas vezes, pois  $X$  é cocompacta) obtemos uma árvore totalmente reduzida, que se relaciona com  $X$  através de uma deformação, como queríamos.

□

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] Serre, J-P. Trees. Springer-Verlag. Berlin, 1980.
- [2] Bowditch, B. A course on geometric group theory. University of Southampton, 2005.
- [3] Forester, M. Slittings of generalized Baumslag-Solitar groups. *Geometriae Dedicata*. 121, 43-59, 2006.
- [4] Forester, M. Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees. *Geometry & Topology*. 6, 219-267, 2002.
- [5] Clay, M. and Margalit, D. *Office Hours with a Geometric Group Theorist*. Princeton University Press, 2017.
- [6] Baumslag, G. *Topics in Combinatorial Group Theory*. Birkhauser, 1993.
- [7] Lyndon, R. and Schupp, P. *Combinatorial Group Theory*. Springer, 1977.
- [8] Jacobson, N. *Basic Algebra II*. W. H. Freeman and Company, 1980.



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

---

## Folha de Aprovação

---

Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Fernanda Ferrucci Tegen, realizada em 23/04/2024.

### Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Daniel Ventrúscolo (UFSCar)

Prof. Dr. Ederson Ricardo Fruhling Dutra (UFAM)

Profa. Dra. Natália Andrea Viana Bedoya (UFSCar)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática.