



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



KAIQUE MICAEL MOREIRA DE OLIVEIRA

INTRODUÇÃO À TEORIA ERGÓDICA

SÃO CARLOS
2022

KAIQUE MICAEL MOREIRA DE OLIVEIRA

INTRODUÇÃO À TEORIA ERGÓDICA

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Carvalho dos Santos

SÃO CARLOS
2022



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
 Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
 Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 14/2023/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

KAIQUE MICAEL MOREIRA DE OLIVEIRA

INTRODUÇÃO À TEORIA ERGÓDICA

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 03 de abril de 2023

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Luís Antonio Carvalho dos Santos
Membro da Banca 1	Adilson Eduardo Presoto
Membro da Banca 2	Alexandre Paiva Barreto



Documento assinado eletronicamente por **Luis Antonio Carvalho dos Santos, Professor(a) do Ensino Superior**, em 13/06/2023, às 09:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Adilson Eduardo Presoto, Professor(a) do Ensino Superior**, em 16/06/2023, às 11:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Paiva Barreto, Professor(a) do Ensino Superior**, em 19/07/2023, às 15:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1024217** e o código CRC **8AFA1347**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº
23112.013500/2023-44

SEI nº 1024217

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

Moreira de Oliveira, Kaique Micael

Introdução à Teoria Ergódica / Kaique Micael Moreira de
Oliveira -- 2023.
58f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,
campus São Carlos, São Carlos
Orientador (a): Luís Antônio Carvalho dos Santos
Banca Examinadora: Adilson Eduardo Presoto, Alexandre
Paiva Barreto
Bibliografia

1. Medida de Lebesgue. 2. Medidas Invariantes. 3.
Teorema de Recorrência de Poincaré. I. Moreira de
Oliveira, Kaique Micael. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Ronildo Santos Prado - CRB/8 7325

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso apresenta uma introdução à Teoria Ergódica, com foco no importante Teorema de Recorrência de Poincaré. Aqui, é desenvolvida a teoria necessária para a demonstração deste teorema, desde uma introdução à Teoria da Medida. Algumas das aplicações da Teoria Ergódica também são apresentadas.

Palavras-chave: Medida de Lebesgue. Integral de Lebesgue. Princípio de Recorrência. Medidas Invariantes. Teorema de Recorrência de Poincaré.

ABSTRACT

This Final Course Paper presents an introduction to Ergodic Theory, focusing on the important Poincaré Recurrence Theorem. Here, the theory necessary for the demonstration of this theorem is developed, starting with an introduction to Measure Theory. Some of the applications of Ergodic Theory are also presented.

Keywords: Lebesgue Measure. Lebesgue Integral. Recurrence Principle. Invariant Measures. Poincaré Recurrence Theorem.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	PRÉ-REQUISITOS	7
2.1	TEORIA DOS CONJUNTOS	7
2.2	ESPAÇOS TOPOLÓGICOS	9
3	ESPAÇOS DE MEDIDA	11
3.1	ESPAÇOS MENSURÁVEIS	11
3.2	ESPAÇOS DE MEDIDA	16
3.3	MEDIDAS EXTERIORES	19
3.4	TEOREMA DE CARATHÉODORY	21
4	MEDIDA DE LEBESGUE	23
4.1	MEDIDA DE BOREL NA RETA	23
4.2	MEDIDA DE LEBESGUE-STIELTJES	26
5	INTEGRAL DE LEBESGUE	32
5.1	FUNÇÕES MENSURÁVEIS	32
5.2	FUNÇÕES SIMPLES	35
5.3	INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO NEGATIVAS	36
6	MEDIDAS INVARIANTES E RECORRÊNCIA	43
6.1	TRANSFORMAÇÕES QUE PRESERVAM MEDIDA	43
6.2	TEOREMA DE RECORRÊNCIA DE POINCARÉ	47
6.3	EXEMPLOS	49
6.3.1	Expansão decimal	49
6.3.2	Transformação de Gauss	52
6.3.3	Rotações no círculo	54
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho consiste em estudar alguns fundamentos introdutórios da Teoria Ergódica, com especial atenção voltada para o Teorema de Recorrência de Poincaré. Mais precisamente, o foco foi o estudo das propriedades das órbitas dos pontos $x \in X$ sob uma transformação $T : X \rightarrow X$, onde X é um espaço munido de uma medida finita μ e T é uma transformação mensurável que preserva a medida μ . É dito que uma transformação mensurável preserva uma medida μ se a medida de um conjunto mensurável $E \subset X$ é igual a medida de sua pré-imagem, ou seja, se $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$.

A órbita de um ponto $x \in X$ é definida como $\mathcal{O}[x] = \{T^n(x) : n \geq 0\}$, onde T^0 é a função identidade e $T^{n+1} = T \circ T^n$. A estrutura assumida de X e T nos fornece as condições necessárias para que as órbitas dos pontos de X possuam boas propriedades. Por exemplo, sob tais condições, o Teorema de Recorrência de Poincaré nos diz que, dado um subconjunto mensurável $E \subset X$ de medida não nula, a órbita de quase todo ponto $x \in E$ intersecta E infinitas vezes, ou seja, para quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos índices $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\} \subset \mathbb{N}$ tais que $T^{n_k}(x) \in E$.

O interesse no estudo das órbitas não é apenas estético. Na seção 6.3 do capítulo 6, dedicada inteiramente a exemplos, algumas aplicações interessantes da teoria são abordadas. Em uma delas, no exemplo 6.3.1, é visto que quase todo número real apresenta infinitos 7 em sua expansão decimal. De fato, é visto que esta propriedade não é particular do número 7, mas sim ocorre para qualquer bloco n natural. Este, entre outros exemplos, mostram a riqueza e flexibilidade da teoria em suas aplicações.

Os resultados da Teoria Ergódica estudados nesta monografia, são descritos no contexto da Teoria da Medida. Por este motivo, três capítulos são exclusivamente dedicados ao estudo da Teoria da Medida e Integração de Lebesgue, onde foram usadas as seguintes referências: (FOLLAND, 1999), (BASS, 2011) e (RUDIN, 1976). Nestes capítulos, espaços de medida e as ferramentas para construção de medidas são exploradas, a medida de Lebesgue é construída, assim como a integral de Lebesgue, que são usadas no último capítulo, onde de fato é encontrada a parte sobre Teoria Ergódica do trabalho.

O último capítulo foi feito com o uso das referências: (VIANA; OLIVEIRA, 2019) e (WALTERS, 1982), e conta com as definições e resultados sobre medidas invariantes e transformações que preservam medida. Também é neste capítulo que é apresentado e demonstrado o Teorema de recorrência de Poincaré. Um breve capítulo de pré-requisitos abordando a teoria dos conjuntos e espaços topológicos foi acrescentado à título de completude do trabalho.

2 PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo iremos introduzir algumas notações e conceitos básicos que serão utilizados ao longo da monografia. Os assuntos relacionados à Teoria dos Conjuntos, definição de espaços topológicos foram extraídos das referências (FOLLAND, 1999),

Além disso, para os demais conceitos, tais como, a definição de espaço métrico, o Teorema de Heine-Borel entre outros resultados de análise, recomenda-se a leitura dos Capítulos 2,3 e 4 do livro (RUDIN, 1976).

2.1 TEORIA DOS CONJUNTOS

Conjuntos são denotados por letras maiúsculas A, B, \dots , enquanto que seus elementos a, b, \dots , são denotados por letras minúsculas. Se a é um elemento de A então usamos a notação $a \in A$, caso o contrário, $a \notin A$. Se A é subconjunto de B denotamos $A \subset B$ ou $A \subseteq B$, caso o contrário, $A \not\subset B$ ou $A \not\subseteq B$. Subconjuntos próprios serão denotados por $A \subsetneq B$. Dois conjuntos A e B são ditos iguais se compartilham os mesmos elementos, ou seja, $A = B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Dois conjuntos A e B podem gerar um terceiro conjunto chamado de conjunto união de A com B , definido por $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Esses mesmos dois conjuntos podem dar origem a um conjunto formado pelos elementos comuns a ambos, definido por $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$. Se A e B não tem nenhum elemento em comum, diz-se que A e B são disjuntos e que a interseção de A com B é vazia, ou igual ao conjunto vazio, onde tal conjunto é denotado por \emptyset . O conjunto vazio \emptyset tem a propriedade de que $A \cup \emptyset = A$ e que $A \cap \emptyset = \emptyset$ independente do conjunto A . O conjunto da diferença de A com B é denotado como $A \setminus B$ e definido como o conjunto dos elementos de A que não são elementos de B , ou seja, $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Por fim, se $A \subseteq X$, o conjunto complementar de A em X é definido como o conjunto dos elementos de X que não são elementos de A e denotado por $A^c = X \setminus A$.

Uma *família* ou uma *coleção* de subconjuntos de X é um conjunto formado por subconjuntos de X . Famílias serão denotadas com a seguinte fonte $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$. A família de todos os subconjuntos de um conjunto X é chamada de conjunto das partes de X e denotada por 2^X . A união dos elementos de uma família \mathcal{A} é definida como $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ para algum } A \in \mathcal{A}\}$ enquanto a interseção dos elementos dessa família \mathcal{A} é definida como $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x : x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{A}\}$.

Dado dois conjuntos A e B , o *produto cartesiano* entre A e B é definido pelo conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, ou seja, $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Uma *relação* R é o subconjunto de $X \times Y$ formado pelos pares ordenados tais que $(x, y) \in R$, neste caso denotaremos por xRy . Uma *relação de equivalência* é uma relação R de X em X satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Para todo $x \in X$, xRx ,
- (ii) xRy se, e somente se, yRx ,
- (iii) Se xRy e yRz , então xRz .

Uma *ordem parcial* em um conjunto X é uma relação R de X em X satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Se xRy e yRz , então xRz ,
- (ii) Se xRy e yRx , então $x = y$,
- (iii) xRx para todo x .

Se R é uma ordem parcial que também satisfaz

- (iv) Se $x, y \in X$, então xRy ou yRx .

Então R é dita uma *ordem total*. O símbolo R da relação de ordem parcial será substituído pelo símbolo \leq , ou pelo símbolo $<$ se $x \leq y$ e $x \neq y$.

Se X é um conjunto parcialmente ordenado por \leq , um elemento m em X é dito *maximal* se o único elemento $x \in X$ que satisfaz $m \leq x$ é o próprio m . De forma análoga, um elemento m em X é dito *minimal* se o único elemento $x \in X$ que satisfaz $m \geq x$ é o próprio m . Se $E \subset X$, um elemento $m \in X$ é dito uma *cota superior* de E se $m \geq x$ para todo $x \in E$. Analogamente, um elemento $m \in X$ é dito uma *cota inferior* de E se $m \leq x$ para todo $x \in E$. Um conjunto X totalmente ordenado por \leq , onde todo subconjunto não vazio de X tem um único elemento minimal, é dito *bem ordenado* por \leq .

Uma *função* $f : X \rightarrow Y$, é uma relação R de X em Y onde para todo $x \in X$, existe um único $y \in Y$ tal que xRy , e denota-se $y = f(x)$. O conjunto X é chamado de *domínio* de f , enquanto o conjunto Y é chamado de *contra-domínio* de f , já a imagem de f é definida como o conjunto $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. f é dita *injetora* se $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$, e dita a *sobrejetora* se $f(X) = Y$, se f for injetora e sobrejetora, f é dita *bijetora*. Se $g : Y \rightarrow Z$ for uma função, define-se a *composta* de g com f , denotada por $g \circ f : X \rightarrow Z$, como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Se f for bijetiva, existe uma função $f^{-1} : Y \rightarrow X$ chamada de *inversa* de f tal que $(f^{-1} \circ f)(x) = x = (f \circ f^{-1})(f(x))$. Se $A \subset X$, a *restrição* de f em A , denotada por $f|_A : A \rightarrow Y$, é definida por $(f|_A)(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, nesse caso, f é chamada de *extensão* de $f|_A$ em X . Uma função f de \mathbb{N} em um conjunto X é dita uma *seqüência*. Se g é uma função de \mathbb{N} em \mathbb{N} onde $g(n) < g(m)$ se $n < m$, então $f \circ g$ é dita uma *subseqüência*.

Os seguintes conjuntos são importantes para o estudo das funções:

\mathbb{N} , o conjunto dos números naturais (sem o zero);

\mathbb{Z} , o conjunto dos números inteiros;

\mathbb{Q} , o conjunto dos números racionais;

\mathbb{R} , o conjunto dos números dos números reais;

\mathbb{C} , o conjunto dos números complexos.

Se $S \subset \mathbb{R}$, um elemento $s \in \mathbb{R}$ é dito supremo de S se ele é a menor cota superior de S , já um elemento de \mathbb{R} é dito ínfimo de S se ele é a maior cota inferior de S .

Teorema 2.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}$*

(i) *$s \in \mathbb{R}$ é supremo de S se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in S$ tal que $s - \epsilon < x$.*

(ii) *$s \in \mathbb{R}$ é ínfimo de S se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in S$ tal que $x < s + \epsilon$.*

A reta estendida é definida como $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ onde os símbolos $-\infty$ e ∞ representam números tais que $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma propriedade importante da reta estendida é de que todo subconjunto A de $\overline{\mathbb{R}}$ tem um ínfimo e um supremo. Definem-se limite superior e limite inferior de uma sequência $\{x_n\}_1^\infty$, respectivamente, como

$$\limsup x_n = \inf_{k \geq 1} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) \quad \liminf x_n = \sup_{k \geq 1} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right)$$

Uma sequência em \mathbb{R} é convergente se $\limsup x_n = \liminf x_n$.

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, as seguintes operações aritméticas em $\overline{\mathbb{R}}$ são convencionadas.

$$x \pm \infty = \pm\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty (x > 0), \quad x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty (x < 0), \quad 0 \cdot (\pm\infty) = 0$$

2.2 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Esta seção contém a definição de Espaço Topológico e exibe algumas de suas propriedades básicas que serão utilizadas adiante, para um aprofundamento do tema indicamos ao leitor a referência (MUNKRES, 2000).

Definição 2.1. Uma família de subconjuntos τ de X é uma *topologia* sobre X se ela goza das seguintes propriedades:

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) Se $A_\alpha \in \tau$, onde $\alpha \in \mathcal{I}$, então $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \in \tau$,

(iii) Se $A_j \in \tau$, onde $j \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \tau$.

Definição 2.2. Um *espaço topológico* é um par ordenado (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia sobre X . Em espaços topológicos, os elementos $A \in \tau$ são chamados de conjuntos abertos.

Definição 2.3. Sejam τ e τ' duas topologias sobre X , se $\tau \subset \tau'$, τ' é dita mais fina que τ ou, equivalentemente, que τ é mais grosso que τ' .

Definição 2.4. Seja X um conjunto, uma base para uma topologia em X é uma coleção B de subconjuntos de X tais que

(i) Para todo $x \in X$, existe $B \in B$ tal que $x \in B$,

(ii) Se $x \in B_1 \cap B_2$ onde $B_1, B_2 \in B$, então existe $B_3 \in B$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Lema 2.1. Se B satisfaz as condições (i) e (ii) então a família

$$\tau = \{A \subset X : \text{para todo } x \in A, \text{ existe } B \in B \text{ tal que } x \in B \subset A\}.$$

forma uma topologia gerada pela base B .

Lema 2.2. Seja X um conjunto e B uma base para uma topologia τ em X , então

$$\tau = \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha : B_\alpha \in B \right\}.$$

Lema 2.3. Sejam B e B' bases para as topologias τ e τ' , respectivamente, sobre X . São equivalentes:

(i) $\tau \subset \tau'$,

(ii) Para todo $x \in X$ e todo $B \in B$ tal que $x \in B$, existe $B' \in B'$ tal que $x \in B' \subset B$.

Definição 2.5. Seja B a família dos conjuntos abertos da reta, ou seja, $B = \{(a, b) \in \mathbb{R} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. A topologia τ gerada por B é chamada topologia padrão de \mathbb{R} .

Lema 2.4. Seja B' a família dos conjuntos semi abertos da reta, ou seja, $B' = \{[a, b) \in \mathbb{R} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. A topologia τ' gerada por B' contém a topologia τ padrão de \mathbb{R} , ou seja, $\tau \subset \tau'$. Mais ainda, τ' é a topologia mais fina que contém τ .

Proposição 2.1. Seja $B = \{(a, b) \in \mathbb{R} : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$, então B é uma base enumerável para a topologia padrão de \mathbb{R} .

Corolário 2.1. Seja τ a topologia padrão de \mathbb{R} , então dado qualquer $A \in \tau$ ocorre $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$, onde $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$.

3 ESPAÇOS DE MEDIDA

3.1 ESPAÇOS MENSURÁVEIS

O interesse humano pela medida é pelo ou menos tão antigo quanto os primeiros registros arqueológicos de contagem pré-histórica (afinal, o simples ato de contar uma quantidade discreta de objetos físicos é, em sí, uma medida, como veremos no exemplo da medida contagem 3.3 posteriormente). Antes mesmo do desenvolvimento escrito da linguagem, seres humanos já haviam desenvolvido o registro escrito da contagem, ou melhor, o registro carvado da contagem, já que a prática costumava ser feita carvando marcas de contagem em ossos e outros artefatos.

Conforme o desenvolvimento da matemática, em especial, da geometria, o conceito de medida foi se sofisticando. Agora, faz sentido perguntar sobre o tamanho, área ou volume de um subconjuntos de \mathbb{R}^3 . A importância deste capítulo é definir quais desses subconjuntos poderão ser medidos, ou seja, determinar o domínio das medidas. À primeira vista, não é óbvio entender por que esse domínio não pode ser simplesmente o conjunto das partes. O problema é que, se fosse esse o caso, haveria uma incompatibilidade com outras propriedades desejáveis em tal medida, em especial, as seguintes.

- (i) Se A_1, A_2, \dots são subconjuntos mensuráveis de \mathbb{R}^n , disjuntos dois a dois, então
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j);$$
- (ii) Se A é congruente a B , ou seja, A pode ser transformado em B por translações, rotações e reflexões, então $\mu(A) = \mu(B)$;
- (iii) Se C é o cubo unitário em \mathbb{R}^n , então $\mu(C) = 1$.

Supondo que $n = 1$ e que a família dos conjuntos mensuráveis é o conjunto das partes, mostraremos que as três propriedades acima são incongruentes. Seja a relação de equivalência definida como $x \sim y$ se, e somente se, $x - y$ é racional. Seja $N = [0, 1) / \sim$, ou seja, $N = \{[x] : x \in [0, 1)\}$. Tome $R = \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ e defina, para cada $r \in R$, o seguinte conjunto

$$N_r = \{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r)\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1)\}.$$

Ou seja, N_r é obtido transladando N em r unidades para a direita e, depois disso, pegando a parte conjunto que ultrapassa o intervalo $[0, 1)$ e transladando-a em 1 unidade para a esquerda, o que implica que $N_r \subset [0, 1)$ para todo $r \in R$ e, portanto $\bigcup_{r \in R} N_r \subset [0, 1)$.

Mostraremos que cada elemento $x \in [0, 1)$ pertence a apenas um N_r . Seja $x \in [0, 1)$ arbitrário. $y \in [x]$. Caso $y \leq x$, então $x \in N_r$ onde $r = x - y$, já caso $y \geq x$, então $x \in N_r$ onde $r = x - y + 1$, ou seja, x pertence a pelo ou menos um N_r . Para mostrar que este N_r é único, suponha que $x \in N_r \cap N_s$, pois então $y = x - r$ (ou $y = x - r + 1$) e $z = x - s$ (ou $z = x - s + 1$) são dois elementos distintos de N que pertencem a mesma classe de equivalência

$[x]$, o que é uma contradição. Logo, $[0, 1) \subset \bigcup_{r \in \mathbb{R}} N_r$ e temos os dois lados da inclusão, ou seja, $[0, 1) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} N_r$.

Supondo que $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii). Então, pelas propriedades (i) e (ii), como N_r é obtido trasladando os seguintes conjuntos disjuntos $N \cap [0, 1 - r)$ e $N \cap [1 - r, 1)$, então

$$\mu(N) = \mu(N \cap [0, 1 - r)) + \mu(N \cap [1 - r, 1)) = \mu(N_r)$$

para cada $r \in \mathbb{R}$. Além disso, como \mathbb{R} é enumerável, pela igualdades que obtemos acima e pelas propriedade (i) e (iii), temos que

$$1 = \mu([0, 1)) = \sum_{r \in \mathbb{R}} \mu(N_r) = \sum_{r \in \mathbb{R}} \mu(N).$$

Como $\mu(N) \geq 0$, os únicos dois possíveis valores para a soma da igualdade da extrema direita são 0, se $\mu(N) = 0$ e $+\infty$ se $\mu(N) > 0$. Como ambos os casos são diferentes de 1, temos um absurdo. De fato, vemos que não podemos construir uma medida em \mathbb{R}^n cujo domínio seja o conjunto das partes e que satisfaça as propriedades (i), (ii) e (iii) simultaneamente. Com o desejo de manter tais 3 propriedades sob a classe mais geral possível de subconjunto de \mathbb{R}^n , foi-se criada a a medida de Lebesgue, cuja construção será tratada neste capítulo e no seguinte.

Definição 3.1. Uma *álgebra* de subconjuntos de X é uma família \mathcal{B} de subconjuntos de X que é fechada para as operações elementares de conjuntos, ou seja:

- (i) Se $A \in \mathcal{B}$, então $A^c \in \mathcal{B}$,
- (ii) Se $A, B \in \mathcal{B}$, então $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Note que como $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ e $A \setminus B = A \cap B^c$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{B}$, então tais operações de conjuntos também são fechadas em \mathcal{B} , além disso como $\emptyset = X \cap X^c$ e $X = A \cup A^c$, também tem-se que $\emptyset \in \mathcal{B}$ e $X \in \mathcal{B}$. Note também que, por associatividade, a união e intersecção de qualquer número finito de elementos de \mathcal{B} está em \mathcal{B} .

Definição 3.2. Uma σ -*álgebra* é uma álgebra de subconjuntos de X que também é fechada para a união enumerável de subconjutos de \mathcal{B} , ou seja:

- (iii) Se $\{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{B}$, então $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{B}$.

Note que como $\bigcap_{j=1}^\infty A_j = \left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j^c\right)^c$, também tem-se que as σ -álgebras são fechadas para as intersecções enumeráveis.

Abaixo seguem alguns exemplos de σ -álgebra.

Exemplo 3.1. Seja $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ é uma σ -álgebra, da mesma forma que $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, X\}$ e $\mathcal{B}_2 = 2^X$ também são σ -álgebras, ainda mais, \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são σ -álgebras para qualquer conjunto X , sendo $\{\emptyset, X\}$ a menor e 2^X a maior σ -álgebra de qualquer conjunto X .

Exemplo 3.2. Seja X um conjunto não enumerável, então o seguinte conjunto é uma σ -álgebra

$$\mathcal{B} = \{A \in X : A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}.$$

Demonstração. Tome $A \in \mathcal{B}$, então ou A é enumerável ou A^c é enumerável, se A for enumerável, então $(A^c)^c$ é enumerável e logo $(A^c) \in \mathcal{B}$, se A não for enumerável, então A^c é enumerável e logo A^c também é elemento de \mathcal{B} , e a primeira propriedade foi verificada.

Agora tome $\{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{B}$ tais que cada A_j é enumerável, então $\bigcup_{i=1}^\infty A_j$ é enumerável já que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Tome agora $\{A_j\}_1^\infty \in \mathcal{B}$ onde pelo ou menos um A_{j_0} é enumerável, segue que $(\bigcup_{i=1}^\infty A_j)^c = \bigcap_{i=1}^\infty A_j^c \subseteq A_{j_0}^c$ e logo $\bigcup_{i=1}^\infty A_j \in \mathcal{B}$. Por fim, \mathcal{B} é uma σ -álgebra. \square

Lema 3.1. A interseção de uma família de σ -álgebras é uma σ -álgebra.

Demonstração. Seja $\{\mathcal{B}_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família não vazia de σ -álgebras de um conjunto X e seja $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$. Tome $A \in \mathcal{B}$, então $A \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e $A^c \in \mathcal{B}_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$, portanto $A^c \in \mathcal{B}$. Agora, para todo $j \in \mathbb{N}$ tem-se que $A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$ e então $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_i$, concluindo a demonstração. \square

Definição 3.3. Um *espaço mensurável* é um par ordenado (X, \mathcal{B}) , onde X é um conjunto e \mathcal{B} uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Os elementos de \mathcal{B} são chamados conjuntos mensuráveis.

Definição 3.4. Uma σ -álgebra gerada por uma família \mathcal{E} de subconjuntos de X é a menor σ -álgebra de X que contém \mathcal{E} e será denotada por $\sigma(\mathcal{E})$. Por construção, pode-se definir tal σ -álgebra da seguinte forma

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \{\mathcal{B}_i : \mathcal{B}_i \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra e } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}_i\}.$$

Segue direto da definição que $\sigma(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(\mathcal{E})$.

Definição 3.5. Se X é um espaço topológico, a σ -álgebra gerada pela família de subconjuntos abertos de X é chamada de σ -álgebra de Borel. A σ -álgebra de Borel de um conjunto X será denotada por \mathcal{B}_X .

Lema 3.2. Se $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F})$ então $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F})$.

Demonstração. Como $\sigma(\mathcal{E})$ é a menor σ -álgebra que contém o conjunto \mathcal{E} e $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{F})$, σ -álgebra, temos que $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F})$. \square

Proposição 3.1. A σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} pode ser gerada com

- (i) Os intervalos abertos $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,
- (ii) Os intervalos fechados $\mathcal{E}_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
- (iii) Os intervalos semi-abertos $\mathcal{E}_3 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{E}_4 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,
- (iv) Os intervalos abertos ilimitados $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
- (v) Os intervalos fechados e ilimitados $\mathcal{E}_7 = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{E}_8 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração. Seja τ a família dos conjuntos abertos de \mathbb{R} , por definição $\sigma(\tau)$ é a σ -álgebra de Borel. Assim, para o item (i), como todos os elementos de \mathcal{E}_1 são abertos, então $\mathcal{E}_1 \subseteq \tau$, logo $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\tau)$. Para a inclusão inversa, basta lembrar que qualquer conjunto aberto de \mathbb{R} pode ser escrito como a união enumerável de intervalos abertos de \mathbb{R} , portanto todos os elementos de τ estão contidos em $\sigma(\mathcal{E}_1)$ e pelo Lema 3.2, tem-se que $\sigma(\tau) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$. Portanto, $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_1)$.

Para o item (ii), se $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + n^{-1}, b - n^{-1}] \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$, logo $\mathcal{E}_1 \in \sigma(\mathcal{E}_2)$ e portanto $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$. E para inclusão inversa, note que $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - n^{-1}, b + n^{-1})$ implica que $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$, e portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_2)$.

O item (iii) segue simplesmente tomando $(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - n^{-1})$, o que implica em $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$, já tomando $(a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b - n^{-1}]$, obtem-se que $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_3)$. Para item (iv) basta tomar $(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, a + n)$ e segue que $\sigma(\mathcal{E}_5) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$, enquanto tomando $(a, b) = (a, \infty) \setminus (b, \infty)$ diretamente implica que $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)$. E portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_5)$.

Para a demonstração do item (v) basta notar que, tomando $[a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, a + n]$, tem-se que $\sigma(\mathcal{E}_6) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ e, tomando $[a, b] = [a, \infty) \setminus (b, \infty)$, tem-se que $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_6)$. Portanto $\sigma(\tau) = \sigma(\mathcal{E}_6)$.

□

Definição 3.6. Uma *Classe monótona* de subconjuntos de X é uma família \mathcal{C} de subconjuntos de X que é fechada para as operações de união monótona e interseção monótona, ou seja,

- (i) (*União crescente*) Se $\{E_j\}_1^{\infty} \subset \mathcal{C}$ e $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{C}$.
- (ii) (*Interseção decrescente*) Se $\{E_j\}_1^{\infty} \subset \mathcal{C}$ e $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, então $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{C}$.

Note que a toda σ -álgebra é também uma classe monótona, pois σ -álgebras são fechadas sob as operações de união e interseção enumeráveis. Também, a interseção arbitrária de classes monótonas é uma classe monótona, como será visto no lema a seguir.

Lema 3.3. *A interseção de uma família de classes monótonas é uma classe monótona.*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{C}_i : i \in \mathcal{I}\}$ uma família de classes monótonas de um conjunto X e seja $\mathcal{C} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_i$.

Para mostrar que \mathcal{C} é fechado sob a união monótona, tome $\{E_j\}_1^\infty \in \mathcal{C}$ tal que $E_1 \subset E_2 \subset \dots$. Então para todo $i \in \mathcal{I}$ e para todo $k \in \mathbb{Z}_+^*$ nós temos que $E_k \in \mathcal{C}_i$, logo, para todo $i \in \mathcal{I}$, tem-se que $\bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{C}_i$, pois então $\bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{C}$.

A demonstração para a interseção monótona é análoga. \square

Definição 3.7. Seja X um conjunto qualquer e $\mathcal{E} \subset P(X)$. A classe monótona gerada por \mathcal{E} é a menor classe monótona que contém \mathcal{E} , ou seja, é a interseção entre todas as classes monótonas que contém \mathcal{E} .

Teorema 3.1 (Classes monótonas). *Seja X um conjunto qualquer e \mathcal{A} uma álgebra de subconjuntos de X . Então a classe monótona \mathcal{C} gerada por \mathcal{A} coincide com a σ -álgebra \mathcal{B} gerada por \mathcal{A} .*

Demonstração. Como \mathcal{B} é uma classe monótona, temos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ pois \mathcal{C} é a menor classe monótona que contém \mathcal{A} . Basta mostrarmos que \mathcal{C} é uma σ -álgebra e teremos a inclusão inversa $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, pois \mathcal{B} é a menor σ -álgebra que contém \mathcal{A} . Para tanto, defina, para cada $E \in \mathcal{C}$, o seguinte conjunto

$$\mathcal{C}(E) = \{F \in \mathcal{C} : E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{C}\}.$$

De imediato, tem-se que \emptyset e E pertencem a $\mathcal{C}(E)$. Além disso, note que

$$F \in \mathcal{C}(E) \iff E \in \mathcal{C}(F). \quad (3.1)$$

Devemos, agora, mostrar que, se $E \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$. Para tanto, primeiro devemos mostrar que $\mathcal{C}(E)$ é classe monótona. Quanto a união crescente, sejam $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{C}(E)$ tais que $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ e seja $F = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Pois então $E \setminus F_1 \supset E \setminus F_2 \supset \dots$ e $E \setminus F = \bigcap_{n=1}^\infty (E \setminus F_n) \in \mathcal{C}$, pois \mathcal{C} é fechado sob interseções decrescentes. De forma similar, $F_1 \setminus E \supset F_2 \setminus E \supset \dots$ logo $F \setminus E = \bigcap_{n=1}^\infty (F_n \setminus E) \in \mathcal{C}$. Por fim, tem-se $E \cap F_1 \subset E \cap F_2 \subset \dots$, logo $E \cap F = \bigcup_{n=1}^\infty (E \cap F_n) \in \mathcal{C}$ e temos que $F = \bigcup_{n=1}^\infty F_n \in \mathcal{C}(E)$.

Quanto a interseção decrescente, sejam $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{C}(E)$ tais que $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ e seja $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Pois então $E \setminus F_1 \subset E \setminus F_2 \subset \dots$, logo $E \setminus F = \bigcup_{n=1}^\infty (E \setminus F_n) \in \mathcal{C}$. De forma similar, $F_1 \setminus E \subset F_2 \setminus E \subset \dots$, logo $F \setminus E = \bigcup_{n=1}^\infty (F_n \setminus E) \in \mathcal{C}$. Por fim, $E \cap F_1 \supset E \cap F_2 \supset \dots$, daí $E \cap F = \bigcap_{n=1}^\infty (E \cap F_n) \in \mathcal{C}$.

Portanto $\mathcal{C}(E)$ é uma classe monótona. Mostraremos agora que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(E)$ para qualquer $E \in \mathcal{C}$. Para tanto, tome $E \in \mathcal{A}$ qualquer, como \mathcal{A} é uma álgebra e $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, então para qualquer $F \in \mathcal{A}$ temos que $F \in \mathcal{C}(E)$. Logo, neste caso $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E)$ e $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(E)$ pois \mathcal{C} é a menor classe monótona que contém \mathcal{A} . Ou seja, temos que para todo $F \in \mathcal{C}$, tem-se que $F \in \mathcal{C}(E)$ para qualquer $E \in \mathcal{A}$. Mas então temos que $E \in \mathcal{C}(F)$ para todo $E \in \mathcal{A}$ por (3.1). Ou seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(F)$, logo $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}(F)$.

O que acabamos de provar dado $E \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$. Logo \mathcal{C} é fechado sob as operações de subtração e interseção de conjuntos. E como $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, então \mathcal{C} é fechado sob a operação de complemento, pois para todo $F \in \mathcal{C}$, temos que $F^c = X \setminus F \in \mathcal{C}$, e por decorrência, temos que \mathcal{C} é

fechado sob a operação de união, já que dados $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$, temos que $F_1 \cup F_2 = (F_1^c \cap F_2^c)^c$. Logo \mathcal{C} é uma álgebra. Agora tome $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{C}$. Pois então a sequência $\{\bigcup_{k=1}^n F_k\}_{n=1}^{\infty}$ é crescente, e como \mathcal{C} é fechado sob uniões crescentes, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{C}$ e \mathcal{C} é fechado sob a união enumerável e, portanto, é σ -álgebra. □

3.2 ESPAÇOS DE MEDIDA

Tendo estabelecido os espaços mensuráveis, resta estabelecer o que é considerado uma medida neles. Nesta seção, exploraremos quais são as propriedades gerais das medidas.

Definição 3.8. Uma *medida* em um espaço mensurável (X, \mathcal{B}) é uma função $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) (σ -aditividade): $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois a dois.

Uma medida é *finitamente aditiva* se:

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.3. Como dito no início deste capítulo, uma forma primordial que os seres humanos vem usando de medida há milênios é a medida contagem. Aqui, definiremos-a com rigor. Seja X um conjunto qualquer e seja 2^X o seu conjunto das partes. A medida contagem $\mu : 2^X \rightarrow [0, +\infty]$ é definida como, para cada $A \in 2^X$,

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & = \text{se } A \text{ for finito,} \\ +\infty & = \text{se } A \text{ for infinito.} \end{cases}$$

Onde $|A|$ representa a cardinalidade do conjunto A . Como o conjunto \emptyset é finito, segue direto da definição que $\mu(\emptyset) = |\emptyset| = 0$. Quando a σ -aditividade, sejam $A_1, A_2, \dots \in 2^X$ disjuntos dois a dois. Temos alguns casos.

Suponhamos que pelo ou menos um A_k é infinito, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ é infinito e $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = +\infty$. Por outro lado, temos que $\mu(A_k) = +\infty$ e $\sum_{j \neq k}^{\infty} \mu(A_j) \geq 0$, logo $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = +\infty$ e a σ -aditividade val.

Supondo, agora, que todos os A_n são finitos, temos duas possibilidades. Na primeira, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ converge, neste caso, então para algum $N \in \mathbb{N}$, temos que $|A_n| = 0$ para todo $n \geq N$, ou seja, $A_n = \emptyset$ para todo $n \geq N$. Pois então

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^N A_k.$$

de onde segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| = \sum_{k=1}^N |A_k| = \mu \left(\bigcup_{k=1}^N A_k \right) = \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right),$$

mostrando que a σ -aditividade também vale neste caso. Quanto ao último caso, onde todos os A_n são finitos mas $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ diverge. Sabemos que, se $N \in \mathbb{N}$, então

$$\sum_{k=1}^N |A_k| = \left| \bigcup_{k=1}^N A_k \right|$$

Se $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ é finito, então sua cardinalidade é um número inteiro, digamos $r = \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right|$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \bigcup_{k=1}^{n_0} A_k \right| = \sum_{k=1}^{n_0} |A_k| > r.$$

Pois então $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| = r$ e $\left| \bigcup_{k=1}^{n_0} A_k \right| > r$ o que é uma contradição, logo $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ é infinito e $m \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = +\infty = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$.

Definição 3.9. Um *espaço de medida* é uma tripla (X, \mathcal{B}, μ) , onde μ é uma medida no espaço mensurável (X, \mathcal{B}) .

Teorema 3.2. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida.

- (i) (*Monotonicidade*) Se $A, B \in \mathcal{B}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$,
- (ii) (*Subaditividade*) Se $\{A_k\}_1^{\infty} \subset \mathcal{B}$, então $\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$,
- (iii) (*Continuidade por baixo*) Se $\{A_k\}_1^{\infty} \subset \mathcal{B}$ e $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, então $\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$,
- (iv) (*Continuidade por cima*) Se $\{A_k\}_1^{\infty} \subset \mathcal{B}$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ e $\mu(A_1) < \infty$, então $\mu \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$.

Demonstração. Para a demonstração item (i), note que se $A \subset B$, então $B = (B \setminus A) \cup A$ onde $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$, portanto $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$ pois $\mu(B \setminus A) \geq 0$. Para o item (ii), seja $B_1 = A_1$ e $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right)$ para $k > 1$. Então $B_m \cap B_n = \emptyset$ se $m \neq n$ e $\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j$ para todo n , ou seja, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, daí pelo fato de que $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right) \subset A_k$, e pela monotonicidade de μ , tem-se que $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$. Assim, com a σ -aditividade e monotonicidade de μ , conclui-se $\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Quanto ao item (iii), caso $\mu(A_n) = \infty$ para algum n , a igualdade é direta. Já, caso $\mu(A_n) < \infty$ para todo n , seja $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ se $j \geq 1$ e $A_0 \neq \emptyset$, tem-se que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e $B_m \cap B_n = \emptyset$ para todo $m \neq n$. Assim

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k (\mu(A_j) - \mu(A_{j-1})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Para a demonstração do item (iv), seja $B_j = A_1 \setminus A_j$, já que $B_j \cap A_j = \emptyset$, então $\mu(A_1) = \mu(B_j \cup A_j) = \mu(B_j) + \mu(A_j)$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = A_1 \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)$, ou seja $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)$, e como $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$, pelo item anterior tem-se que $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \mu(A_n)$. Portanto, como $\mu(A_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \quad \square$$

A hipótese de que $\mu(A_1) < \infty$ é importante pois pode ocorrer o caso onde $\mu(A_j) = \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$, mas $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) < \infty$. Por exemplo, no espaço mensurável $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$, a medida contagem é definida como $\mu(A) = \text{card}(A)$ se $\text{card}(A) \neq \text{card}(\mathbb{N})$ e $\mu(A) = \infty$ se $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{N})$. Quando tomados os conjuntos $A_j = \{n : n \geq j\}$, tem-se $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$, ou seja, $\mu(A_j) = \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$, mas $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 0$

Definição 3.10. Uma medida é completa se o seu domínio contém todos os subconjuntos do conjunto nulo, ou seja, (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida, μ é completa se, e somente se, $A \subset N \in \mathcal{B}$ e $\mu(N) = 0$, então $A \in \mathcal{B}$.

Teorema 3.3. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida, $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{B} : \mu(N) = 0\}$ e $\overline{\mathcal{B}} = \{A \cup B : A \in \mathcal{B} \text{ e } B \subset N, \text{ para algum } N \in \mathcal{N}\}$. Então $\overline{\mathcal{B}}$ é uma σ -álgebra e existe uma única extensão $\overline{\mu}$ de μ para uma medida completa em $\overline{\mathcal{B}}$.

Demonstração. Como \mathcal{B} é uma σ -álgebra, então $\emptyset \in \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$ e $X \in \mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}}$, logo $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{B}}$. Agora suponha que $E \in \overline{\mathcal{B}}$, então existe um $A \in \mathcal{B}$ tal que $E = A \cup B$, onde $B \subset N$ e $N \in \mathcal{N}$. Então

$$E^c = (A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A^c \cap (N^c \cup (N \setminus B)) = (A \cup N)^c \cup (A^c \cap (N \setminus B))$$

Como $(A \cup N)^c \in \mathcal{B}$ e $A^c \cap (N \setminus B) \subset N \in \mathcal{B}$ onde $\mu(N) = 0$, então $E^c \in \overline{\mathcal{B}}$.

Seja $\{E_j\}_1^{\infty} \in \overline{\mathcal{B}}$, existem A_j, B_j, N_j tais que $E_j = A_j \cup B_j$ onde $A_j \in \mathcal{B}$, $B_j \subset N_j$ e $N_j \in \mathcal{N}$.

Então

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cup B_j) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right).$$

Como $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ onde $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\right) = 0$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \overline{\mathcal{B}}$. Por fim conclui-se que $\overline{\mathcal{B}}$ é uma σ -álgebra.

Seja $A \cup B \in \overline{\mathcal{B}}$ onde $A \in \mathcal{B}$ e $B \subset N, N \in \mathcal{N}$, defina $\overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$. Para provar que $\overline{\mu}$ é bem definida, suponha que $A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2$, onde $B_j \subset N_j \in \mathcal{N}$, tem-se que $A_1 \subset A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2 \subset A_2 \cup N_2$, e pela monotonicidade de μ tem-se $\mu(A_1) \leq \mu(A_2) + \mu(N_2) = \mu(A_2)$. O mesmo para $E_2 \subset E_2 \cup B_2 = A_1 \cup B_1 = A_1 \cup N_1$, pela monotonicidade de μ , $\mu(A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(N_1) = \mu(A_1)$. Por fim, $\mu(A_1) = \mu(A_2)$, concluindo que $\overline{\mu}$ é bem definida.

O próximo passo é mostrar que $\overline{\mu}$ é uma medida completa. Primeiramente, dada a escolha de $A = \emptyset$ e $B = N = \emptyset$, tem-se que $\overline{\mu}(\emptyset) = \overline{\mu}(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Segundo, se $\{F_n\}_1^{\infty} \subset \overline{\mathcal{B}}$, sendo os F_n 's disjuntos dois a dois, então existe uma sequência $\{A_n\}_1^{\infty} \subset \mathcal{B}$ e uma sequência $\{B_n\}_1^{\infty} \subset N \in \mathcal{N}$ tal que $F_n = A_n \cup B_n$ para todo n . Além disso, note que a união dos B_n está contida em um conjunto de medida nula, e as igualdades abaixo seguem:

$$\begin{aligned} \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) &= \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)\right) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n \cup B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(F_n). \end{aligned}$$

Logo $\overline{\mu}$ é uma medida.

Para mostrar que $\overline{\mu}$ é uma medida completa, seja $E \subset F \in \overline{\mathcal{B}}$ onde $\overline{\mu}(F) = 0$. Então existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $F = A \cup B$ onde $B \subset N$ e $N \in \mathcal{N}$. Pois então, pela definição de $\overline{\mu}$, tem-se que $\mu(A) = \overline{\mu}(F) = 0$, o que implica que $A \cup N \in \mathcal{B}$ e por fim que $\mu(A \cup N) = 0$, ou seja, $(A \cup N) \in \mathcal{N}$. Agora basta notar que $\emptyset \cup E$ é tal que $\emptyset \in \mathcal{B}$ e $E \subset F = (A \cup B) \subset (A \cup N) \in \mathcal{N}$, ou seja, $E \in \overline{\mathcal{B}}$ e $\overline{\mu}$ é completa.

Assim, $\overline{\mu}|_{\mathcal{B}} = \mu$ pois dado $A \in \mathcal{B}$ qualquer, $A \cup \emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$ e $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$. E $\overline{\mu}$ é único pois, se ν for uma outra extensão de μ em $\overline{\mathcal{B}}$, dado $E \in \overline{\mathcal{B}}$, existem $A \in \mathcal{B}$ e $F \subset N \in \mathcal{B}$ onde $\mu(N) = 0$ tal que $E = A \cup B$ e então

$$\mu(A) = \nu(A) \leq \nu(E) = \nu(A \cup B) \leq \nu(A \cup N) = \mu(A \cup N) \leq \mu(A) + \mu(N) = \mu(A).$$

Pois então $\nu(E) = \mu(A) = \overline{\mu}(E)$ e $\nu = \overline{\mu}$, concluindo a demonstração. \square

3.3 MEDIDAS EXTERIORES

Até agora, tratamos do que são os espaços de medida, mas não fornecemos nenhuma forma para construí-los. O restante deste capítulo se trata justamente sobre as ferramentas que são geralmente usadas para a construção de medidas. Dentro deste contexto que introduzimos o conceito de medida exterior. Posteriormente veremos que, sob determinadas circunstâncias, um conjunto abstrato pode ser medido conforme aproximamos ele por uma cobertura de conjuntos

menos abstratos que sabemos medir. As medidas exteriores ajudam a determinar sob quais circunstâncias isso acontece.

Definição 3.11. Uma *medida exterior* em um conjunto não vazio X é uma função $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ tal que

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- (ii) (*Monotonicidade*) Se $A, B \in 2^X$ e $A \subset B$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,
- (iii) (*Subaditividade enumerável*) Se $\{A_j\}_1^\infty \subset 2^X$, então $\mu^*(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j)$.

Proposição 3.2. Seja $\mathcal{E} \subset 2^X$ uma família elementar e seja $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\emptyset \in \mathcal{E}$, $X \in \mathcal{E}$ e $\rho(\emptyset) = 0$. Para todo $A \in X$, seja

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \rho(E_j) : \{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j \right\}.$$

Então μ^* é uma medida exterior.

Demonstração. $\mu^*(\emptyset) = 0$ pois basta tomar $E_j = \emptyset$ para todo j . Agora se $A \subset B$, então

$$A' = \left\{ \sum_{j=1}^\infty \rho(E_j) : \{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{E} \text{ e } A \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j \right\} \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^\infty \rho(E_j) : \{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{E} \text{ e } A \subset B \subset \bigcup_{j=1}^\infty E_j \right\} = B'$$

Como $A' \supseteq B'$ então $\inf A' \leq \inf B'$, ou seja, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Agora suponha que $\{A_j\}_1^\infty \subset 2^X$ e fixe $\epsilon > 0$. Pela definição de μ^* , para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\{E_j^k\}_1^\infty \subset \mathcal{E}$ tal que $A_j \subset \bigcup_{k=1}^\infty E_j^k$ e que satisfaça $\sum_{k=1}^\infty \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \epsilon 2^{-j}$. Tomando $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ obtem-se $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty E_j^k$ e $\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j) + \sum_{j=1}^\infty \epsilon 2^{-j}$ mas então $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j) + \epsilon$. Como a escolha de ϵ foi arbitrária, conclui-se a demonstração. \square

Definição 3.12 (Critério de Carathéodory). Seja μ^* uma medida exterior de X , um conjunto $A \subset X$ é chamado de μ^* -mensurável se, para todo $E \subset X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Note que, como $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$, onde $(E \cap A) \cap (E \cap A^c) = \emptyset$, pela subaditividade de μ^* , sempre ocorre $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$. Portanto, para provar que um conjunto $A \subset X$ é μ^* -mensurável, basta mostrar que $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

Teorema 3.4. Se μ^* é uma medida exterior em X , a família \mathcal{B} de conjuntos μ^* -mensuráveis é uma σ -álgebra e a restrição de μ^* a \mathcal{B} é uma medida completa.

Este resultado é importante para a demonstração para a demonstração do Teorema 3.5, sua demonstração encontra-se no (FOLLAND, 1999), página 29, Teorema 1.1.

3.4 TEOREMA DE CARATHÉODORY

Vimos, na seção anterior, como as medidas exteriores fornecem uma maneira de achar medidas definidas em uma σ -álgebra a partir restrição de medidas exteriores definidas no conjunto das partes. De maneira semelhante, o Teorema de Carathéodory fornece uma maneira de achar medidas (novamente, definidas em uma σ -álgebra) a partir da extensão de pré-medidas definidas em álgebras. Ou seja, este resultado é importante não só porque ele abrange a classe de conjuntos mensuráveis, mas também fornece o método geral de como fazê-lo.

Definição 3.13. Uma *pré-medida* em uma álgebra $\mathcal{A} \subset 2^X$ é uma função $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que

- (i) $\mu_0(\emptyset) = 0$,
- (ii) (*σ -aditividade*) Seja $\{A_j\}_1^\infty$ uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de \mathcal{A} tais que $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}$, então $\mu_0(\bigcup_{j=1}^\infty A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j)$.

Seja μ_0 uma pré-medida sobre uma álgebra \mathcal{A} , será visto que μ_0 induz uma medida exterior em X dada pela seguinte expressão

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) : \{A_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A} \text{ e } E \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j \right\}. \quad (3.2)$$

Segue da Proposição 3.2 que, de fato, μ^* é de fato uma medida exterior.

Proposição 3.3. *Seja μ_0 uma pré-medida sobre uma álgebra \mathcal{A} e μ^* definida como em (3.2). Então*

- (i) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$,
- (ii) *Todo conjunto na álgebra \mathcal{A} é μ^* mensurável.*

Demonstração. Para a demonstração do item (i), seja $E \in \mathcal{A}$ qualquer e seja $\{A_j\}_1^\infty$ uma sequência tomada arbitrariamente de subconjuntos de \mathcal{A} tal que $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Seja $B_n = E \cap (A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j)$, tem-se que os B_n 's são elementos da álgebra \mathcal{A} , disjuntos dois a dois, tais que $E = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$. Segue-se que $\mu_0(E) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(B_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j)$ pois $B_j \subset A_j$ para todo j e pois pré-medidas são monótonas (a demonstração de tal fato é análoga a demonstração do item (i) do Teorema 3.2) e, portanto, $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$.

Para a desigualdade contrária, note que $E \subset E \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$, assim, pela definição de μ^* , segue que $\mu^*(E) \leq \mu_0(E)$. Portanto $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

Quanto a demonstração do item (ii), se $A \in \mathcal{A}$ e $E \subset X$, dado um $\epsilon > 0$ existe uma sequência de conjuntos $\{A_j\}_1^\infty$ em \mathcal{A} tais que $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ e, pela definição de ínfimo,

$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \leq \mu^*(E) + \epsilon$. Como μ_0 é σ -aditiva em \mathcal{A} e como $(A_j \cap A) \cap (A_j \cap A^c) = \emptyset$ com $(A_j \cap A) \subset A$ e $(A_j \cap A^c) \subset A$, então

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \epsilon &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0((A_j \cap A) \cup (A_j \cap A^c)) \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j \cap A) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c). \end{aligned}$$

Já que a escolha de ϵ foi arbitrária, obtêm-se a desigualdade e, portanto, a igualdade. □

Definição 3.14. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida. μ é dita *finita* se $\mu(X) < \infty$. μ é dita *σ -finita* se existe uma sequência $\{A_n\}_1^{\infty} \subset \mathcal{B}$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, onde $\mu(A_j) < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$

Teorema 3.5 (Teorema de Extensão de Carathéodory). *Seja $\mathcal{A} \subset 2^X$ uma álgebra, μ_0 uma pré-medida em \mathcal{A} e \mathcal{B} a σ -álgebra gerada por \mathcal{A} . Então existe uma medida μ em \mathcal{B} cuja restrição em \mathcal{A} é igual a μ_0 (de fato, $\mu = \mu^*|_{\mathcal{B}}$ onde μ^* é dado por (3.2)). Além disso, qualquer outra medida ν em \mathcal{B} que estende μ_0 será tal que $\nu(E) \leq \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{B}$, sendo igual caso $\mu(E) < \infty$. Se μ_0 for σ -finita, então existe uma única extensão de μ_0 para uma medida de \mathcal{B} .*

No próximo capítulo, esse teorema será usado para a construção da medida de Lebesgue a partir de uma pré-medida definida pela álgebra gerada pelos conjuntos semi-abertos a esquerda da reta. Sua demonstração encontra-se na Página 31, Teorema 1.14, do livro (FOLLAND, 1999).

4 MEDIDA DE LEBESGUE

Nesse capítulo, serão utilizadas as ferramentas desenvolvidas anteriormente para a construção da medida de Lebesgue. Com as técnicas que desenvolveremos, será possível analisar a mensurabilidade de conjuntos como o conjunto dos números racionais e o conjunto de Cantor (ver exemplos 4.1 e 4.2), o que mostra a abrangência da medida de Lebesgue em sua capacidade de medir conjuntos abstratos.

4.1 MEDIDA DE BOREL NA RETA

Definição 4.1. Uma *medida de Borel* é uma medida cujo domínio é a σ -álgebra de Borel.

Definição 4.2. Seja μ uma medida de Borel em \mathbb{R} , a *função de distribuição de μ* é definida como

$$F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

$$x \mapsto \mu((-\infty, x]).$$

Proposição 4.1. *Seja F uma função de distribuição de μ , então F é crescente e contínua à direita.*

Demonstração. Seja $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$, assim $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$ e pelo item (i) Teorema 3.2, $\mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y])$. Portanto $F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)$ e F é crescente.

Seja $\{x_n\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ uma sequência convergente a x pela direita, ou seja, $x_{j+1} \leq x_j$ para todo j . Mas então $(-\infty, x_{j+1}] \subseteq (-\infty, x_j]$ para todo j e, pelo item (iv) do Teorema 3.2, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu((-\infty, x_n]) = \mu(\bigcap_{j=1}^\infty (-\infty, x_j]) = \mu((-\infty, x]) = F(x)$. Como a escolha de $\{x_n\}_1^\infty$ foi arbitrária, então $F(x)$ é contínua. \square

Proposição 4.2. *Seja $\mathcal{E} = \{(a, b], (a, \infty), \emptyset : -\infty \leq a < b < \infty ; a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$ o conjunto dos intervalos semi-abertos à esquerda de \mathbb{R} . Então o conjunto \mathcal{A} da união finita de elementos de \mathcal{E} , ou seja, $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}_i : \mathcal{E}_i \in \mathcal{E} \text{ onde } \mathcal{E}_k \cap \mathcal{E}_l = \emptyset, \forall k \neq l\}$ é uma álgebra e a σ -álgebra gerada por \mathcal{A} é a σ -álgebra de Borel.*

Demonstração. Já que $\mathbb{R} = (a, \infty)$ onde $a = -\infty$, então $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, o conjunto \emptyset está em \mathcal{A} pois $\emptyset \cup \emptyset \in \mathcal{A}$.

Agora tome $A = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{E}_i^0 \in \mathcal{A}$ e $B = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}_i^1 \in \mathcal{A}$ disjuntos, ou seja $\mathcal{E}_r \neq \mathcal{E}_s, \forall r \neq s$. Reindexe os elementos de A e de B da seguinte forma $\mathcal{E}_1^0 = \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m^0 = \mathcal{E}_m$ e $\mathcal{E}_1^1 = \mathcal{E}_{m+1}, \dots, \mathcal{E}_n^1 = \mathcal{E}_{m+n}$. Assim é claro que $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{m+n} \mathcal{E}_i$ e A é fechado pela união de elementos disjuntos.

Para provar que \mathcal{A} é fechado no complemento, note que

$$\begin{aligned} (a, b] \cap (c, d] &= \begin{cases} \emptyset, & \text{se } b < c, \\ (c, b], & \text{se } b > c. \end{cases} & , & (a, b] \cap (c, \infty) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } b < c, \\ (c, b], & \text{se } b > c. \end{cases} \\ (a, \infty) \cap (b, \infty) &= \begin{cases} (a, \infty), & \text{se } a > b, \\ (b, \infty), & \text{se } a < b. \end{cases} & , & \emptyset \cap \mathcal{E}_i = \emptyset. \end{aligned}$$

Ou seja, \mathcal{E} é fechado sob a intersecção finita. Portanto $A^c = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{E}_i^c \in \mathcal{E}$, o que implica em $A^c \cup \emptyset \in \mathcal{A}$, concluindo que \mathcal{A} é fechado sob o complementar. Pela Proposição 3.1, o conjunto $\mathcal{E}_1 = \{(a, b] : a < b; a, b \in \mathbb{R}\}$ é gera a σ -álgebra de Borel e $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$, logo $\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{E})$. Para a inclusão inversa, note que $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pois todo intervalo da reta pode ser escrito como a união enumerável de conjuntos abertos e segue que $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, concluindo a igualdade. \square

Proposição 4.3. *Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita, para todo $j = 1, \dots, n$ sejam $(a_j, b_j] \in \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois, e seja $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^n [F(b_i) - F(a_i)]$$

onde $\mu_0(\emptyset) = 0$. Então μ_0 é uma pré-medida na álgebra \mathcal{A} .

Demonstração. Primeiro, deve-se mostrar que μ_0 é bem definida. Como os elementos de \mathcal{A} podem ser representados em mais de uma maneira como a união disjunta de intervalos semiabertos, então eles serão divididos em casos.

A primeira análise será feita sobre os casos onde $\bigcup_{i=1}^n I_i = I = (a, b]$ ou $I = (a, \infty)$. Como \mathbb{R} é totalmente ordenado sob a operação \leq , e como os I_i 's são disjuntos, então a seguinte reindexação pode ser feita $a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots < b_n = b$, e segue que

$$\mu_0(I) = F(a) - F(b) = \sum_{j=1}^n [F(b_j) - F(a_j)] = \sum_{j=1}^n \mu_0((a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^n \mu_0(I_j).$$

Agora, no caso geral, onde $\bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{j=1}^m J_j$, tem-se que $I_i = \bigcup_{j=1}^m (I_i \cap J_j)$ para cada $i = 1, \dots, n$, como mostrado no caso anterior, segue que $\mu_0(I_i) = \sum_{j=1}^m \mu_0(I_i \cap J_j)$. Portanto

$$\sum_{i=1}^n \mu_0(I_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_{j=1}^m \mu_0(J_j)$$

e μ_0 é bem definida em \mathcal{A}

Para a σ -aditividade de μ_0 , seja $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \in \mathcal{A}$, onde os I_j 's são intervalos semiabertos à esquerda e disjuntos dois a dois. Então, pela definição de \mathcal{A} , existe $n \in \mathbb{N}$ e existem $J_1, \dots, J_n \in \mathcal{E}$

tais que $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \bigcup_{j=1}^n J_j$. Basta agora, então, mostrar que

$$\mu_0(J_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(J_j \cap I_i). \quad (4.1)$$

Pois se tal igualdade for verdadeira, tem-se que

$$\begin{aligned} \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) &= \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n J_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_0(J_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(J_j \cap I_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0\left(\bigcup_{j=1}^n J_j \cap I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i). \end{aligned}$$

E o resultado segue. Então, sem perda de generalidade, como J_j é um intervalo semiaberto à esquerda, basta mostrar a igualdade (4.1) para algum intervalo semiaberto à esquerda I . Para um lado da desigualdade, basta notar que

$$\mu_0(I) = \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) + \mu_0\left(I \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \geq \mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_0(I_i).$$

E conforme $n \rightarrow \infty$ tem-se que $\mu_0(I) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$.

Agora para o outro lado da desigualdade, casos devem ser divididos. Para o primeiro caso, assumamos que $I = (a, b]$, com a e b finitos e fixe $\epsilon > 0$. Como F é contínua à direita, então existe algum $\delta > 0$ tal que $F(a + \delta) - F(a) < \epsilon$, e para $I_i = (a_i, b_i]$ existe algum $\delta_i > 0$ tal que $F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \epsilon 2^{-i}$. Além disso, como $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] = (a, b]$ então existe algum $a_i = a$, ou existe alguma subsequência de a_i 's que convergem para a , o mesmo para os b_i 's com relação a b . Portanto, os intervalos abertos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[a + \delta, b]$ e, pelo Teorema de Heine-Borel (demonstração de tal teorema encontra-se no Teorema 2.41 do (RUDIN, 1976)), existe uma subcobertura finita. Seja $(a_1, b_1 + \delta_1), \dots, (a_N, b_N + \delta_N)$ tal subcobertura finita, onde foram descartados todos os intervalos que eram subconjunto próprio de outro intervalo e também os índices i 's foram devidamente reindexados. Então $b_i + \delta_i \in (a_{i+1}, b_{i+1} + \delta_{i+1})$ para todo $i = 1, \dots, N-1$ e as seguintes desigualdades seguem

$$\begin{aligned} \mu_0(I) &< F(b) - F(a + \delta) + \epsilon \leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon = F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} [F(a_{i+1}) - F(a_i)] + \epsilon \\ &\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} [F(b_i + \delta_i) - F(a_i)] + \epsilon < \sum_{i=1}^N [F(b_i) + \epsilon 2^{-i} - F(a_i)] + \epsilon \\ &< \sum_{i=1}^N [F(b_i) - F(a_i)] + 2\epsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Já que a escolha de ϵ foi arbitrária, obtêm-se a desigualdade reversa quando I é limitado.

Quanto ao caso onde $a = -\infty$, para qualquer $M < \infty$ os intervalos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[-M, b]$, e por um argumento análogo ao anterior, obtêm-se que $F(b) - F(-M) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon$. Assim, conforme $\epsilon \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$, tem-se $\mu((-\infty, b)) = F(b) - F(-\infty) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$. De forma similar, no caso onde $b = +\infty$, para qualquer $M < \infty$ os intervalos $(a_i, b_i + \delta_i)$ cobrem o compacto $[a, M]$ obtêm-se que $F(M) - F(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i) + 2\epsilon$. Assim, conforme $\epsilon \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$, com um argumento análogo ao primeiro e ao segundo caso obtêm-se que $\mu((a, \infty)) = F(+\infty) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(I_i)$. Portanto μ_0 é σ -aditiva e μ_0 é uma pré-medida. \square

Teorema 4.1. *Se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente e contínua à direita, então existe apenas uma μ_F medida de Borel em \mathbb{R} tal que $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a), \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Se $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é outra função crescente e contínua à direita, então $\mu_F = \mu_G$ se, e somente se, $F - G$ é constante. Por outro lado, se μ é uma medida de Borel na reta que é finita em todos os conjuntos de Borel limitados e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for definida como*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & , \text{ se } x > 0, \\ 0 & , \text{ se } x = 0, \\ -\mu((x, 0]) & , \text{ se } x < 0. \end{cases}$$

então F é crescente, contínua à direita e $\mu = \mu_F$.

Demonstração. Pela Proposição 4.3, a medida $\mu_F(a, b] = F(b) - F(a)$ é uma pré-medida na álgebra \mathcal{A} , e pela Proposição 4.2, a σ -álgebra gerada por \mathcal{A} é a σ -álgebra de Borel. Além disso μ_F é σ -finita pois $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (j, j+1]$ e, portanto, pelo Teorema 3.5, existe uma única extensão de μ_F para uma medida de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Se $\mu_G = \mu_F$, note que $\forall x \in \mathbb{R}, \mu_G((0, x]) = \mu_F((0, x])$, então $(F - G)(x) = (F - G)(0) = k \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se $F(x) = G(x) + k$, então $F(b) - F(a) = G(b) - G(a), \forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\mu_F = \mu_G$.

Para a volta, seja μ uma medida de Borel e F como definida no enunciado. Como μ é monótona então F é crescente em $[0, \infty)$ e também é crescente em $(-\infty, 0]$, e já que para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < 0 \leq y$ tem-se que $F(x) = -\mu((x, 0]) \leq \mu((0, y]) = F(y)$, então F é crescente em todo \mathbb{R} . Agora seja $a \in \mathbb{R}$, se $a \geq 0$ então para toda sequência de pontos $x_n \rightarrow a^+$ tem-se que $F(a) = \mu((0, a]) = \lim_{x_n \rightarrow a^+} \mu((0, x_n])$ pela continuidade de μ_0 por cima, e se $a < 0$ então $F(a) = -\mu((x, 0]) = \lim_{x_n \rightarrow a^+} -\mu((x_n, 0])$ pela continuidade por baixo de μ . Portanto F é contínua à direita. A igualdade $\mu = \mu_F$ é óbvia em \mathcal{A} , logo segue do Teorema de Extensão de Carathéodory (3.5) que existe uma única extensão de μ para $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, portanto $\mu = \mu_F$ em $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. \square

4.2 MEDIDA DE LEBESGUE-STIELTJES

Definição 4.3. *A medida de Lebesgue-Stieltjes associada a função F (F crescente e contínua à direita) é o complemento da medida μ_F . Para simplicidade, a medida de Lebesgue-Stieltjes será simplesmente denotada como μ . Note que pelo Teorema 3.4, a família dos conjuntos*

μ -mensuráveis formam uma σ -álgebra, defina como \mathcal{M}_μ tal conjunto. Para todo $E \in \mathcal{M}_\mu$, defina:

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [F(b_j) - F(a_j)] : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \right\} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \right\}.$$

Lema 4.1. Se $E \in \mathcal{M}_\mu$, então

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right\}.$$

Demonstração. Seja $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ e denote o lado direito da igualdade como $\nu(E)$. Então para cada $i \in \mathbb{N}$ tem-se que $(a_i, b_i) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^k$, onde $I_j^k = (c_j^k, c_j^{k+1}]$ são disjuntos dois a dois, e onde $\{c_j^k\}$ é uma sequência crescente tal que $c_j^1 = a_j$ e $c_j^k \rightarrow b_j$ conforme $k \rightarrow \infty$. Logo $E \subseteq \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_j^k$ e então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i)) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \geq \mu(E).$$

Portanto, $\mu(E) \leq \nu(E)$. Para a desigualdade reversa, fixe $\epsilon > 0$ qualquer. Então existe uma sequência $\{(a_i, b_i]\}_1^{\infty}$ onde $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i]) \leq \mu(E) + \epsilon$, e como F é contínua à direita, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $\delta_i > 0$ tal que $F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \epsilon 2^{-i}$. Mas então $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i + \delta_i)$ e segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i + \delta_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i]) + \epsilon \leq \mu(E) + \epsilon.$$

Como a escolha de ϵ foi arbitrária, obtêm-se $\nu(E) \leq \mu(E)$, concluindo a demonstração. \square

Teorema 4.2. Se $E \in \mathcal{M}_\mu$, então

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf \{ \mu(U) : U \supseteq E \text{ e } U \text{ é aberto} \} \\ &= \sup \{ \mu(K) : K \subseteq E \text{ e } K \text{ é compacto} \}. \end{aligned}$$

Demonstração. Para a primeira igualdade, seja U um aberto tal que $E \subseteq U$, como μ é monotona, então $\mu(E) \leq \mu(U)$, obtendo um lado da desigualdade. Para o outro lado, dado $\epsilon > 0$ qualquer, pelo Lema 4.1 existe uma cobertura $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ tal que $E \subseteq U$ e $\mu(U) \leq \mu(E) + \epsilon$. Como a escolha de $\epsilon > 0$ foi arbitrária, e como U é aberto já que a união enumerável de abertos é aberta, conclui-se ambos os lados da desigualdade e portanto a primeira igualdade vale.

Quanto a segunda igualdade, como $K \subseteq E$ e como $K \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, então pela monotonicidade de μ , $\mu(K) \leq \mu(E)$. Para a desigualdade reversa, divide-se em casos. Para o caso onde E for fechado e limitado, E é compacto e portanto a igualdade é válida. Para o caso onde for aberto e limitado, então E^c é fechado e \bar{E} é compacto, logo $\bar{E} \cap E^c$ é compacto. Pela primeira igualdade

tem-se que, para todo $\epsilon > 0$, existe um aberto $U \supset \bar{E} \setminus E$ tal que

$$\mu(U) \leq \mu(\bar{E} \setminus E) + \epsilon. \quad (4.2)$$

Tomando $K = \bar{E} \setminus U$, segue

$$K = \bar{E} \setminus U = \bar{E} \cap U^c \subseteq \bar{E} \cap (\bar{E} \cup E) = \emptyset \cup (\bar{E} \cap E) = \emptyset \cup E = E.$$

Então $K \subseteq E$. Além disso, como $E = K \cup (E \setminus K)$, onde $K \cap (E \setminus K) = \emptyset$ então

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \setminus K). \quad (4.3)$$

Agora note que

$$E \setminus K = E \setminus (\bar{E} \setminus U) = E \cap (\bar{E} \setminus U)^c = E \cap (\bar{E} \cap U^c)^c = E \cap (\bar{E}^c \cup U) = (E \cap \bar{E}^c) \cup (E \cap U) = E \cup U. \quad (4.4)$$

E substituindo (4.4) em (4.3), obtêm-se

$$\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U). \quad (4.5)$$

Mas como $U = (E \cap U) \cup (U \cap E^c)$, então $\mu(E \cap U) = \mu(U) - \mu(U \setminus E)$. Substituindo isso em (4.5), segue

$$\mu(K) = \mu(E) - (\mu(U) - \mu(U \setminus E)). \quad (4.6)$$

Como a escolha de U foi tal que $U \supset \bar{E} \setminus E$, então $U \setminus E \supset (\bar{E} \setminus E)$ e, pela monotonicidade de μ , juntamente com a igualdade (4.6), obtêm-se

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(E) - \mu(U) + \mu(U \setminus E) \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\bar{E} \setminus E). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Agora, pela desigualdade (4.2) tem-se $\mu(\bar{E} \setminus E) - \mu(U) \geq -\epsilon$, e pela desigualdade (4.7), ocorre

$$\begin{aligned} \mu(K) &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\bar{E} \setminus E) \\ &\geq \mu(E) - \epsilon \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como a escolha de $\epsilon > 0$ foi arbitrária, finalmente obtêm-se a igualdade no caso onde E é aberto e limitado.

Resta o caso onde E não é limitado. Para tanto, seja $E_j = E \cap (j, j + 1]$, como visto acima, sabe-se que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um compacto $K_j \subset E_j$ tal que $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \epsilon 2^{-j}$. Seja $H_n = \bigcup_{j=-n}^n K_j$, então H_n é compacto e $H_n \subset E$, pois então $\mu(H_n) \geq \mu(\bigcup_{j=-n}^n E_j) - \epsilon$ e conforme $n \rightarrow \infty$, segue a última igualdade, concluindo a demonstração. \square

Definição 4.4. A medida de Lebesgue é a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a função $F(x) = x$. A partir deste momento, será referida como medida a medida de Lebesgue, adotando a notação m para tal.

Exemplo 4.1. A medida dos números racionais e dos irracionais entre 0 e 1.

Demonstração. Sabemos que $[0, 1] = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup ([0, 1] \setminus \mathbb{Q})$, ou seja, o intervalo $[0, 1]$ é constituído pelo conjunto dos racionais e dos irracionais entre 0 e 1, e tais dois conjuntos são disjuntos.

Mostraremos, primeiramente, que a medida dos racionais é igual a zero e, consequentemente, a medida de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ também será igual a zero. Como o conjunto dos racionais é enumerável, então para cada racional r_j , dado um $\epsilon > 0$ qualquer, tem-se que $r_j \in (r_j, r_j + \epsilon 2^{-j})$, de onde segue

$$\mathbb{Q} \subset \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} (r_j, r_j + \frac{\epsilon}{2^j}) : \forall r_j \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Pois então, para cada $r_j \in \mathbb{Q}$ nós temos

$$0 \leq m(\mathbb{Q}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(r_j, r_j + \frac{\epsilon}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} (r_j + \frac{\epsilon}{2^j} - r_j) = \epsilon.$$

O que implica que $m(\mathbb{Q}) = 0$ como a escolha de $\epsilon > 0$ foi arbitrária. Em particular, como $[0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$, então pela monotonicidade das medidas, temos que

$$0 \leq m([0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}) \leq m(\mathbb{Q}) = 0.$$

Ou seja, $m([0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}) = 0$.

Pela σ -aditividade das medidas, temos que

$$m([0, 1]) = m([0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}) + m([0, 1] \setminus \mathbb{Q}).$$

Como $m([0, 1]) = 1$ e $m([0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}) = 0$, então $m([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$, ou seja, a medida dos irracionais em $[0, 1]$ tem medida 1

□

Exemplo 4.2. O conjunto de Cantor é não enumerável e tem medida nula.

Demonstração. O conjunto de Cantor C no intervalo $[0, 1]$ é construído removendo o segundo terço aberto do intervalo, e fazendo o mesmo para cada um dos intervalos restantes subsequentes. Como visto no desenho abaixo.

5 INTEGRAL DE LEBESGUE

5.1 FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Visamos estabelecer

Assim como nem todo conjunto precisam ter um comportamento "adequado" para serem mensuráveis, o mesmo se aplica às funções. A seguir, será definido o quão "adequada" deve ser a função para ser considerada mensurável.

Definição 5.1. Seja (X, \mathcal{B}) um espaço mensurável. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *mensurável* ou \mathcal{B} *mensurável* se $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{B}$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Uma função complexa é mensurável se ambas as suas partes real e complexa forem mensuráveis.

Proposição 5.1. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:

- (i) $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{B}$ para todo $a \in \mathbb{R}$,
- (ii) $\{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{B}$ para todo $a \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\{x : f(x) < a\} \in \mathcal{B}$ para todo $a \in \mathbb{R}$,
- (iv) $\{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{B}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se (i) vale, então para todo $a \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{B}$, pois \mathcal{B} é fechado sob a intersecções enumeráveis, ou seja, (i) \implies (ii). Supondo (ii), então para todo $a \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) < a\} = \{x : f(x) \geq a\}^c \in \mathcal{B}$, pois \mathcal{B} é fechado sob o complementar, ou seja, (ii) \implies (iii). Se (iii) for verdadeiro, então para todo $a \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) < a + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{B}$, ou seja (iii) \implies (iv). E se (iv) for válido, então para todo $a \in \mathbb{R}$ $\{x : f(x) > a\} = \{x : f(x) \leq a\}^c \in \mathcal{B}$, ou seja, (iv) \implies (i) e concluímos a demonstração. \square

Proposição 5.2. Se f é mensurável, então $|f|$ é mensurável.

Demonstração. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $\{x : |f(x)| < a\} = \{x : f(x) < a\} \cap \{x : f(x) > -a\} \in \mathcal{B}$, logo $|f|$ é mensurável. \square

Proposição 5.3. Seja X um espaço métrico e \mathcal{B}_X a sua σ -álgebra de Borel e seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, então f é mensurável.

Demonstração. f é contínua se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberto em X para todo aberto U em \mathbb{R} . Logo para todo $a \in \mathbb{R}$, (a, ∞) é aberto em \mathbb{R} e $\{x : f(x) > a\} = f^{-1}(a, \infty)$ é aberto em X , e portanto $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{B}_X$. \square

Proposição 5.4. Seja $c \in \mathbb{R}$ e sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, então $f + g$, $-f$, cf , fg , $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ são mensuráveis.

Demonstração. fixe $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Para a função $(f + g)$, se $f(x) + g(x) \geq a$ para todo $x \in X$, então $\{x : f(x) + g(x) < a\} = \emptyset \in \mathcal{B}$ e $f + g$ é mensurável, caso contrário, para todo $x \in X$ tal que $f(x) + g(x) < a$ tem-se que $f(x) < a - g(x)$ e que, pela densidade dos racionais nos reais, existe um racional r tal que $f(x) < r < a - g(x)$. Seja Q o conjunto de tais racionais que satisfazem essa condição, como existem infinitos racionais entre dois números reais e como $\text{card}(\mathbb{Q}) = \text{card}(\mathbb{N})$, então $\text{card}(Q) = \text{card}(\mathbb{N})$ e Q é enumerável. Portanto

$$\{x : f(x) + g(x) < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < a - r\}) \in \mathcal{B}$$

Como a escolha de a foi arbitrária, então $(f + g)$ é mensurável.

Para o caso da função $(-f)$, pelo item (iii) da Proposição 5.1, $\{x : -f(x) > a\} = \{x : f(x) < -a\} \in \mathcal{B}$, logo $(-f)$ é mensurável.

Para a função (cf) , se $c > 0$, então $\{x : cf(x) > a\} = \{x : f(x) < a/b\} \in \mathcal{B}$, já se $c = 0$, então ou $a > 0$ e $\{x : 0 < a\} \in \mathcal{B}$ ou $a \leq 0$ e $\{x : 0 < a\} = \emptyset \in \mathcal{B}$, agora se $c < 0$ então $cf = |c|(-f)$, onde $-f$ é mensurável e $|c| > 0$, o que são casos demonstrados acima. Portanto (cf) é mensurável para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

No caso onde a função é (f^2) , se $a < 0$, como para todo $x \in X, f(x)^2 \geq 0$, então $\{x : f(x)^2 > a\} = X \in \mathcal{B}$. Agora se $a \geq 0$, então

$$\{x : f(x)^2 > a\} = \{x : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{B}$$

Logo f^2 é mensurável.

Para a função (fg) , note que, como $f(x)g(x) = \frac{1}{2}[(f(x) + g(x))^2 - f(x)^2 - g(x)^2]$, então fg é mensurável pelos argumentos acima.

Para o caso da função $\max(f, g)$, como $\{x : \max(f(x), g(x)) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cup \{x : g(x) > a\} \in \mathcal{B}$, então $\max(f, g)$ é mensurável.

E por final, para o caso da função $\min(f, g)$, $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$ implica que $\min(f, g)$ é mensurável. \square

Corolário 5.1. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e f^\pm as partes positivas e negativas de f definidas como $f^+ = \max(f(x), 0)$ e $f^- = \max(-f(x), 0)$. Então $f = f^+ - f^-$ e f^\pm são mensuráveis.*

Demonstração. Pela Proposição 5.4, segue direto que f^\pm são mensuráveis. Já $f = f^+ - f^-$ segue imediatamente das igualdades abaixo

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases},$$

$$f^-(x) = \max(-f(x), 0) = -\min(f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}.$$

□

Proposição 5.5. Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Para cada $x \in X$, defina

$$g_1(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad g_2(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad g_3(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad g_4(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Então g_1, g_2, g_3, g_4 são mensuráveis.

Demonstração. A seguinte igualdade implica a mensurabilidade de g_1 .

$$\{x : g_1(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\} \in \mathcal{B}.$$

Já quanto a igualdade. Dado $a \in \mathbb{R}$, $g_1(x) > a$ se, e somente se, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $f_l(x) > a$, pois então, se $x_0 \in \{x : g_1(x) > a\}$, tem-se $x_0 \in \{x : f_l(x) > a\}$, e portanto $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\}$. Agora, se $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\}$, então $x_0 \in \{x : f_k(x) > a\}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e segue que $x_0 \in \{x : g_1(x) > a\}$ já que $g_1 \geq f_k(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto a igualdade vale e g_1 é mensurável.

De forma similar, a igualdade abaixo junto ao item (iii) da Proposição 5.1 implicam a mensurabilidade de g_2 .

$$\{x : g_2(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) < a\} \in \mathcal{B}.$$

E a igualdade segue com uma demonstração exatamente análoga a demonstração da igualdade de g_1 .

Já g_3 é mensurável pois

$$g_3(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} f_m(x),$$

que são os casos cobertos por g_1 e g_2 . O mesmo para g_4 , já que

$$g_4(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{m \geq n} f_m(x).$$

□

Proposição 5.6. Sejam (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida completo e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se $f = g$ μ -q.t.p. e f é mensurável, então g também é mensurável.

Demonstração. Suponha que $f = g$ em $X \setminus A$ com $A \subset X$ de medida nula. Fixe $a > 0$ qualquer, então

$$\{x : g(x) > a\} = (\{x : g(x) > a\} \cap A^c) \cup (\{x : g(x) > a\} \cap A)$$

Note que

$$\{x : g(x) > a\} \cap A^c = \{x : f(x) > a\} \cap (X \setminus A).$$

Cujo lado direito da igualdade é a interseção de dois conjuntos mensuráveis e, portanto, mensurável. Já $(\{x : g(x) > a\} \cap A)$ é mensurável pois é subconjunto do conjunto de medida nula A , e como (X, \mathcal{B}, μ) é completo, então todo subconjunto de um conjunto de medida nula é mensurável. Logo $\{x : g(x) > a\}$ é mensurável e, como a escolha de $a > 0$ foi arbitrária, então g é mensurável. □

5.2 FUNÇÕES SIMPLES

As funções simples serão usadas para a aproximação de funções mensuráveis. Como a área sob uma função simples na reta é simplesmente a soma da área de retângulos, será possível definir a integral de Lebesgue de uma função mensurável em termos da sua aproximação por funções simples.

Definição 5.2. Seja (X, \mathcal{B}) um espaço mensurável. Para cada $E \in \mathcal{B}$, a *função característica de E* é dada como

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E, \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Lema 5.1. $\mathcal{X}_E(x)$ é mensurável se $E \in \mathcal{B}$.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{B}$. Se $a > 1$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) < a\} = X \in \mathcal{B}$. Se $a = 1$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) < a\} = E^c \in \mathcal{B}$. Se $1 > a > 0$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) > a\} = E \in \mathcal{B}$. Se $a = 0$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) > a\} = E \in \mathcal{B}$. E por fim, se $a < 0$, então $\{x : \mathcal{X}_E(x) > a\} = X \in \mathcal{B}$. Portanto, $\mathcal{X}_E(x)$ é mensurável. □

Definição 5.3. Seja $\{E_j\}_1^n$ uma sequência de subconjuntos disjuntos dois a dois de \mathcal{B} . Uma *função simples* $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_{E_j}(x)$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$, $E_j \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{X}_{E_j}(x)$ é a função característica de E_j . Ou seja, $s(x)$ pode ser escrita como a combinação linear finita de funções características. Note que, pelo Lema 5.1 e pela Proposição 5.4, s é mensurável,

Teorema 5.1. *Seja (X, \mathcal{B}) um espaço mensurável.*

- (i) *Seja $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mensurável, então existe uma sequência $\{s_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$ onde $s_n \rightarrow f$ pontualmente e se $f(U)$ for limitada para algum $U \subset X$ então $s_n \rightarrow f$ uniformemente em U .*

(ii) Seja $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, então existe uma sequência $\{s_n\}$ de funções simples tal que $0 \leq |s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |f|$ onde $s_n \rightarrow f$ pontualmente e se $f(U)$ for limitada para algum $U \subset X$ então $s_n \rightarrow f$ uniformemente em U .

Demonstração. Para a demonstração do item (i), se $f \geq 0$, então para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, n2^n\}$, defina $E_n^k = \left\{x : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}$ e $F_n = \{x : f(x) \geq n\}$. Neste caso, note que $\mathbb{R}_+ = \left(\bigcup_{k=1}^{n2^n} E_n^k\right) \cup F_n$. A seguir, para todo $x \in X$ defina a função simples

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_n^k}(x) + n \chi_{F_n}(x). \quad (5.1)$$

Fixe $x \in X$ qualquer.

Se $f(x) = \infty$, então $s_n(x) = n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$.

Se $f(x) < \infty$, então podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que para todo $n \geq N$ temos que $\frac{k_0-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k_0}{2^n}$, para algum $k_0 \in \{1, 2, \dots, N2^N\}$. Logo, $x \in E_n^{k_0}$ e para todo $n \geq N$

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}. \quad (5.2)$$

Ou seja, $s_n(x) \rightarrow f(x)$. Mais ainda, se existe $U \in X$ tal que $f(x) < \infty$ para todo $x \in U$, então $0 \leq \sup_{x \in U} |s_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$ e então a convergência é uniforme em U .

Para a demonstração do item (ii), sejam f^+ e f^- as partes positiva e negativa da função f , pela Proposição 5.4, tem-se estas funções são positivas e mensuráveis. Logo, aplicando o item (i) existem as sequências s_n e t_n de funções simples tais que $s_n \rightarrow f^+$ e $t_n \rightarrow f^-$ monotonicamente. Portanto, tomando $r_n = s_n - t_n$, segue que r_n é simples e que $r_n \rightarrow f(x)$ pontualmente em X e uniformemente em cada subconjunto $U \subset X$ tal que $f(U)$ é representa um conjunto limitado em \mathbb{R} . \square

5.3 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO NEGATIVAS

Com a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, agora é possível trabalhar a teoria da integral de Lebesgue. A integral de Lebesgue é uma generalização da integral de Riemann, diferentemente da última, ela particiona a imagem da função, toma a imagem inversa da partição, e gera uma aproximação da área sob a função com tipo de funções simples que serão vistos a seguir. A vantagem de particionar a imagem ao invés do domínio é a liberdade ganha, tanto nas funções que serão integráveis, quanto nos domínios que serão integráveis. Abaixo segue, de forma mais rigorosa, o que foi escrito nesta breve introdução. Será primeiro trabalhado o caso das funções mensuráveis positivas e, construtivamente, trabalhado o caso geral.

Definição 5.4. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida. O conjunto L^+ será definido como o conjunto

de todas as funções mensuráveis de X em $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Definição 5.5. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e seja $s \in L^+$ uma função simples representada como $s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x)$. Define-se a *Integral de Lebesgue* em X como

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

Por convenção, se acima ocorrer o caso onde $a_j = 0$ e $\mu(E_j) = \infty$, define-se $a_j \mu(E_j) = 0$.

A partir desse momento, será referido como integral à integral de Lebesgue. Se $A \in \mathcal{B}$, então $\sum_{j=1}^n a_j \chi_{A \cap E_j}(x)$ é uma função simples, e a integral de Lebesgue em A é definida como

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A \cap E_j).$$

Proposição 5.7. Sejam $s, t : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ simples e $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

(i) $\int_X \alpha s \, d\mu = \alpha \int_X s \, d\mu,$

(ii) $\int_X (s + t) \, d\mu = \int_X s + \int_X t \, d\mu,$

(iii) Se $s \leq t$, então $\int_X s \, d\mu \leq \int_X t \, d\mu,$

(iv) Para todo $A \in \mathcal{B}$, a função $\nu(A) = \int_A s \, d\mu$ é uma medida em \mathcal{B} .

Demonstração. Para a demonstração do item (i), segue da definição que

$$\int \alpha s \, d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha a_j \mu(E_j) = \alpha \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = \alpha \int s \, d\mu.$$

Já para a demonstração do item (ii), seja $s = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ e $t = \sum_{k=1}^m b_k \chi_{F_k}$. Sem perda de generalidade, assumamos que E_1, \dots, E_n sejam disjuntos e F_1, \dots, F_m também. Como $\bigcup_{j=1}^n E_j = X = \bigcup_{k=1}^m F_k$ então tem-se que $E_j = \bigcup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)$ e $F_k = \bigcup_{j=1}^n (E_j \cap F_k)$, portanto

$$s + t = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}.$$

Então segue

$$\begin{aligned}
 \int_X (s + t) d\mu &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) \\
 &= \int_X s d\mu + \int_X t d\mu.
 \end{aligned}$$

Para o item (iii), Se $s \leq t$, então

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \chi_{E_j \cap F_k} \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \chi_{E_j \cap F_k}.$$

E então $a_j \leq b_k$ quando $E_j \cap F_k \neq \emptyset$. O que implica que

$$\int_X s d\mu \leq \int_X t d\mu.$$

Por final, para o item (iv), tem-se que

$$\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} s d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(\emptyset \cap E_j) = \sum_{j=1}^n a_j \mu(\emptyset) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot 0 = 0.$$

Ou seja, $\nu(\emptyset) = 0$. Para mostrar a σ -aditividade de ν , seja $\{A_k\}_1^\infty$ uma seqüência de subconjuntos disjuntos dois a dois de \mathcal{B} qualquer. Se $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, segue

$$\begin{aligned}
 \nu(A) &= \int_A s d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \cap E_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty (A_k \cap E_j)\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k \cap E_j) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_k \cap E_j) = \sum_{k=1}^\infty \int_{A_k} s d\mu = \sum_{k=1}^\infty \nu(A_k).
 \end{aligned}$$

Portanto ν é uma medida. □

Definição 5.6. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e seja $f \in L^+$. A *Integral de Lebesgue* de f é definida como

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ simples} \right\}$$

Note que se f for simples, pelo item (iii) da Proposição 5.7, o supremo do conjunto da integral das funções simples entre 0 e f será a própria integral de f , e portanto a integral a integral é bem definida.

Proposição 5.8. *Sejam $f, g \in L^+$*

$$(i) \text{ Se } f \leq g, \text{ então } \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

$$(ii) \text{ Se } \alpha \in \mathbb{R}_+, \text{ então } \alpha \int_X f d\mu = \int_X \alpha f d\mu.$$

Demonstração. A demonstração do item (i) segue direto da definição de integral, pois como $f \leq g$, então

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ simples} \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq g, s \text{ simples} \right\} \\ &= \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

Já para a demonstração do item (ii), dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, pela definição de integral tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha \int_X f d\mu &= \alpha \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ simples} \right\} = \sup \left\{ \alpha \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ simples} \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_X s d\mu : 0 \leq s \leq \alpha f, s \text{ simples} \right\} = \int_X \alpha f d\mu. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.2 (Teorema da convergência monótona). *Seja $\{f_n\}_1^\infty$ uma seqüência em L^+ tal que $f_j \leq f_{j+1}$ para todo j e tal que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = (\sup_n f_n)$, então $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.*

Demonstração. Primeiramente, note que $\{\int_X f_n\}$ é uma seqüência crescente de números reais, ou seja, seu limite existe, podendo ser finito ou infinito. Como $\int_X f d\mu \geq \int_X f_n d\mu$ para todo n então $\int_X f d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ e o primeiro lado da desigualdade é obtido. Para a desigualdade reversa, fixe $\alpha \in (0, 1)$ e seja s simples tal que $0 \leq s \leq f$, seja também $E_n = \{x : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$. Por consequência da monotonicidade da seqüência $\{f_n\}_1^\infty$, a seqüência $\{E_n\}_1^\infty$ também é monótona. Além disso, para cada $x \in X$, como $f = \sup_n f_n$ e $\alpha s < f$, então existe $n \geq 1$ tal que $f_n(x) > \alpha s$, ou seja, $x \in E_n$. Como a escolha de $x \in X$ foi arbitrária, temos que $X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Então segue

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} \alpha s d\mu = \alpha \int_{E_n} s d\mu.$$

E aplicando o limite, obtem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \int_{E_n} s d\mu = \alpha \int_X s d\mu.$$

Assim, tomando o supremo dos s tal que $0 \leq s \leq f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \alpha \int_X f d\mu.$$

E como a escolha de $\alpha \in (0, 1)$ foi arbitrária, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu.$$

Obtendo o outro lado da igualdade e concluindo a demonstração. \square

Teorema 5.3. *Seja $\{f_n\}_1^\infty$ uma seqüência finita ou infinita em L^+ e seja $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$, então $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu$.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in L^+$. Pelo Teorema 5.1, existem seqüências de funções simples $\{s_n\}_1^\infty$ e $\{t_n\}_1^\infty$ crescentes e positivas tais que $s_n \rightarrow f_1$ e $t_n \rightarrow f_2$. Então $\{s_n + t_n\}$ é monotonicamente crescente e $(s_n + t_n) \rightarrow (f_1 + f_2)$. Logo, pelo Teorema 5.2 e pelo item (ii) Proposição 5.7, tem-se que

$$\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X t_n d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.$$

Portanto, o resultado vale para $n = 2$. Agora suponha que o resultado vale para N . Então

$$\int_X \sum_{j=1}^{N+1} f_j d\mu = \int_X \left(\sum_{j=1}^N f_j + f_{N+1} \right) d\mu = \sum_{j=1}^N \int_X f_j d\mu + \int_X f_{N+1} d\mu = \sum_{j=1}^{N+1} \int_X f_j d\mu.$$

E o resultado vale para $N + 1$, então, por indução finita o resultado vale para N . Defina $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$, então $\{g_k\}_1^\infty$ é monotonicamente crescente e $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = f = \sum_{n=1}^\infty f_n$. Pelo Teorema 5.2 e pelo resultado que acabamos de obter, as seguintes igualdades seguem, concluindo o a demonstração.

$$\int_X f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \sum_{n=1}^k f_n d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int_X f_n d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu$$

\square

Lema 5.2 (Lema de Fatou). *Seja $\{f_n\}_1^\infty$ uma seqüência em L^+ , então*

$$\int_X (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração. Para cada $k \geq 1$, tem-se que $\inf_{n \geq k} f_n \leq f_j$ para todo $j \geq k$, então $\int_X \inf_{n \geq k} f_n \leq \int_X f_j$ para todo $j \geq k$, logo $\int_X \inf_{n \geq k} f_n \leq \inf_{j \geq k} \int_X f_j$. Pelo outro lado, conforme $k \rightarrow \infty$, pelo

Teorema 5.2 segue

$$\int_X (\liminf f_n) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \left(\inf_{n \geq k} f_n \right) d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu.$$

□

Definição 5.7. Seja (X, \mathcal{B}, μ) um espaço de medida e seja f uma função mensurável. Sejam $\int_X f^+ d\mu$ e $\int_X f^- d\mu$ as integrais das partes positivas e negativas de f , respectivamente. Se pelo ou menos uma destas duas integrais for finita, definimos a integral de f como sendo.

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

A partir de agora estaremos interessados nos casos onde ambas as integrais da parte positivas e negativas de f são finitas, ou seja, quando $\int_X |f| d\mu < \infty$. Sob tal condição, chamamos f de integrável e denotamos por $L^1(X, \mu)$, ou simplesmente L^1 , o conjunto das funções integráveis em (X, \mathcal{B}, μ) .

Teorema 5.4 (Teorema da convergência dominada). *Seja $f \in L^1$ e $\{f_n\}_1^\infty$ uma sequência de funções em L^1 tais que*

(i) $f_n \rightarrow f$ q.t.p

(ii) Existe $g \in L^1$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p para todo $n \in \mathbb{N}$

Então $f \in L^1$ e $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o caso onde μ é completa. Primeiramente, devemos mostrar que $f \in L^1$. Para tanto, afirmamos que f é mensurável. De fato, se f_n é mensurável, então $h = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ é mensurável pela Proposição 5.5. Mas como $f = h$ em μ -quase todo ponto, então pela Proposição 5.6 temos que f é mensurável. Resta notar que, como $|f_n| \leq g$ q.t.p., então $|f| \leq g$ q.t.p. e $\int_X |f| d\mu \leq \int_X g d\mu \leq \infty$, implicando que $f \in L^1$ o que conclui a primeira parte do teorema.

Para a segunda parte do teorema, note que, pela desigualdade triangular e pela hipótese (ii) as seguintes desigualdes são verdadeiras:

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$

Seja $h_n := 2g - |f_n - f|$, então $h_n \geq 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo Lema de Fatou nós temos

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu.$$

Logo

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu.$$

Então

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leq 0.$$

E obtemos que o limite superior é igual ao limite inferior de $|f_n - f|$, ou seja, o limite existe e as seguintes desigualdades seguem:

$$0 \leq \left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu.$$

onde $\int_X |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$. Pelo teorema do confronto, concluímos $f \in L^1$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

□

6 MEDIDAS INVARIANTES E RECORRÊNCIA

Neste capítulo, vamos estudar alguns dos conceitos da Teoria Ergódica, dos quais faremos uso, na Seção 6.3, para a construção de alguns exemplos interessantes. Um destes exemplos é o de que quase todo número real apresenta infinitos 7 em sua representação decimal. De fato, veremos que não há nada de especial com o número 7, o mesmo pode ser dito sobre qualquer outro número natural n . A nossa abordagem para obtenção de tal resultado faz o uso de transformações que preservam medida e do Teorema de Recorrência de Poincaré, que são vistos em detalhes nas seções 6.1 e 6.2, respectivamente.

6.1 TRANSFORMAÇÕES QUE PRESERVAM MEDIDA

Definição 6.1. Sejam $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ espaços de medida.

- (i) Uma **transformação mensurável** é uma transformação $T : X_1 \rightarrow X_2$ tal que, para cada $B_2 \in \mathcal{M}_2$, temos que $T^{-1}(B_2) \in \mathcal{M}_1$.
- (ii) Uma **transformação que preserva medida** é uma transformação $T : X_1 \rightarrow X_2$ onde T é mensurável e $\mu_1(T^{-1}(A_2)) = \mu_2(A_2)$, para cada $A_2 \in \mathcal{M}_2$.
- (iii) Uma transformação que preserva medida é invertível se $T : X_1 \rightarrow X_2$ preserva medida, é bijetora e T^{-1} também preserva medida.

Observação: 6.1. se $(X_k, \mathcal{M}_k, \mu_k)$, $k = 1, 2, 3$ forem espaços de medida e $T : X_1 \rightarrow X_2$ e $S : X_2 \rightarrow X_3$ forem transformações que preservam medida, então $S \circ T$ também preserva medida, pois $\mu_1((S \circ T)^{-1}(A_3)) = \mu_1(T^{-1}(S^{-1}(A_3))) = \mu_2(S^{-1}(A_3)) = \mu_3(A_3)$.

Proposição 6.1. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, X' um conjunto não vazio qualquer e $T : X \rightarrow X'$ uma aplicação qualquer. Defina \mathcal{M}' como

$$\mathcal{M}' = \{A' \subset X' : T^{-1}(A') \in \mathcal{M}\},$$

então \mathcal{M}' é uma σ -álgebra.

Demonstração. Sabemos, pela Teoria Elementar dos Conjuntos, que $\emptyset, X' \in \mathcal{M}'$ já que $T^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{M}$ e $T^{-1}(X') = X \in \mathcal{M}$. Ademais, se $\{A'_k\}_1^\infty \subset \mathcal{M}'$, então $T^{-1}(A'_k) \in \mathcal{M}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de onde segue

$$T^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-1}(A'_k) \in \mathcal{M}.$$

Logo $\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k \in \mathcal{M}'$.

Agora seja $A' \in \mathcal{M}'$, então $T^{-1}(A') \in \mathcal{M}$ e $[T^{-1}(A')]^c \in \mathcal{M}$, de onde segue

$$\begin{aligned}
T^{-1}(A^c) &= \{x \in X : T(x) \in A^c\} = \{x \in X : T(x) \in X' \setminus A'\} = \{x \in X : T(x) \in X' \wedge T(x) \notin A'\} \\
&= \{x \in X : T(x) \in X'\} \setminus \{x \in X : T(x) \in A'\} = T^{-1}(X') \setminus T^{-1}(A') = X \setminus T^{-1}(A') \\
&= [T^{-1}(A')]^c \in \mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Logo $A^c \in \mathcal{M}'$, concluindo que \mathcal{M}' é σ -álgebra. \square

Definição 6.2. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida, (X', \mathcal{M}') um espaço mensurável e $T : X \rightarrow X'$ uma transformação mensurável, definimos a medida transportada de μ por T como a função $\mu' : \mathcal{M}' \rightarrow [0, +\infty]$ definida como

$$\mu'(A') = \mu(T^{-1}(A')), \quad \forall A' \in \mathcal{M}'$$

Proposição 6.2. A função μ' é uma medida.

Demonstração. Como $T^{-1}(\emptyset) = \{x \in X : T(x) \in \emptyset\} = \emptyset$, então, $\mu'(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Quanto a σ -aditividade, seja $\{A'_k\}_1^\infty$ uma sequência de elementos disjuntos dois a dois em \mathcal{M}' , então

$$\mu' \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k \right) = \mu \left(T^{-1} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k \right) \right) = \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-1}(A'_k) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A'_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu'(A'_k).$$

Logo vale a σ -aditividade. \square

A partir daqui, denotaremos μ' por $T^*\mu$.

Proposição 6.3. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) espaço de medida, (X', \mathcal{M}') espaço mensurável e $T : X \rightarrow X'$ uma transformação mensurável. Para $\mu' = T^*\mu$ vale

a) Se $\phi : X' \rightarrow [0, +\infty]$ é \mathcal{M}' -mensurável, então $\phi \circ T$ é \mathcal{M} -mensurável e

$$\int_{X'} \phi \, d\mu' = \int_X \phi \circ T \, d\mu.$$

b) Se $\phi : X' \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ é μ' -integrável, então $\phi \circ T$ é μ -integrável e, nesse caso,

$$\int_{X'} \phi \, d\mu' = \int_X \phi \circ T \, d\mu.$$

Demonstração. Quanto ao item (a), supomos que $\phi = \chi_{E'}$ onde $E' \in \mathcal{M}'$. Neste caso, teremos

$$\int_{X'} \phi \, d\mu' = \int_{X'} \chi_{E'} \, d\mu' = \mu'(E') = \mu(T^{-1}(E')) = \int_X \chi_{T^{-1}(E')} \, d\mu = \int_X \chi_{E'} \circ T \, d\mu = \int_X \phi \circ T \, d\mu$$

A quinta igualdade acima ocorre pois

$$\mathcal{X}_{T^{-1}(E')} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in T^{-1}(E'), \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } T(x) \in E', \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \mathcal{X}_{E'} \circ T.$$

Logo o resultado vale para qualquer função característica e, pela linearidade da integral, vale para toda função simples $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathcal{X}_{E'_k}$ onde $a_k \in \mathbb{R}$ e $E'_k \in \mathcal{M}'$ para cada $k = 1, 2, \dots$. Para o caso geral, seja $\phi : X' \rightarrow [0, +\infty]$ uma função positiva e \mathcal{M}' -mensurável qualquer. Pelo Teorema 5.1 existe uma sequência $\{s_n\}_1^{\infty}$ de funções simples que converge monotonicamente para ϕ , o que implica também que $s_n \circ T \nearrow \phi \circ T$ e, pelo Teorema da Convergência monótona (5.2), segue o item a)

$$\int_{X'} \phi \, d\mu' = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X'} s_n \, d\mu' = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n \circ T \, d\mu = \int_X \phi \circ T \, d\mu.$$

Quanto ao item b), seja $\phi : X' \rightarrow \mathbb{R}$ uma função \mathcal{M}' -mensurável qualquer, neste caso, temos que $\phi = \phi^+ - \phi^-$ onde $\phi^{\pm} \geq 0$ e \mathcal{M}' -mensuráveis pelo Corolário 5.1. Assim, pela integrabilidade de ϕ e pelo item anterior nós temos

$$\int_{X'} \phi \, d\mu' = \int_{X'} \phi^+ \, d\mu' - \int_{X'} \phi^- \, d\mu' = \int_X \phi^+ \circ T \, d\mu - \int_X \phi^- \circ T \, d\mu = \int_X \phi \circ T \, d\mu.$$

Provando o caso onde ϕ é real. Já o caso complexo com $\phi : X' \rightarrow \mathbb{C}$, então $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, onde $\phi_1, \phi_2 : X' \rightarrow \mathbb{R}$ são \mathcal{M}' -mensuráveis. Pelo caso anterior e a linearidade da integral, o item b) segue pelas igualdades abaixo

$$\int_{X'} \phi \, d\mu' = \int_{X'} \phi_1 \, d\mu' + i \int_{X'} \phi_2 \, d\mu' = \int_X \phi_1 \circ T \, d\mu + i \int_X \phi_2 \circ T \, d\mu = \int_X \phi \circ T \, d\mu.$$

□

Definição 6.3. Seja (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável, uma medida μ é dita T -invariante se $T^* \mu = \mu$, ou seja, $\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)$, para todo $E \in \mathcal{M}$.

Corolário 6.1. Sejam (X, \mathcal{M}, μ) um espaço de medida. Suponha que μ é T -invariante com relação a transformação mensurável $T : X \rightarrow X$. Então $T^* \mu = \mu$ se, e somente se,

$$\int_X \phi \, d\mu = \int_X \phi \circ T \, d\mu,$$

para cada $\phi \in L^1(\mu)$.

Demonstração. Suponha que μ é T -invariante, então $T^* \mu = \mu$ e, pelo item b) da Proposição 6.2, temos que $\int_X \phi \, d\mu = \int_X \phi \circ T \, d\mu$ para toda $\phi \in L^1(\mu)$.

Reciprocamente, suponha que $\int_X \phi \, d\mu = \int_X \phi \circ T \, d\mu$ para toda $\phi \in L^1(\mu)$. Seja $aE \in \mathcal{M}$ e considere $\phi = \mathcal{X}_E$, então

$$\mu(T^{-1}(E)) = \int_{T^{-1}(E)} d\mu = \int_X \chi_{T^{-1}(E)} d\mu = \int_X \chi_E \circ T d\mu = \int_X \chi_E d\mu = \mu(E).$$

Mostrando que μ é T-invariante.

□

Teorema 6.1. *Sejam $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ espaços de probabilidade e $T : X_1 \rightarrow X_2$ uma transformação mensurável qualquer. Seja \mathcal{A}_2 álgebra que gera a σ -álgebra \mathcal{M}_2 . Se para cada $A_2 \in \mathcal{A}_2$ tivermos $T^{-1}(A_2) \in \mathcal{M}_1$ e $\mu_1(T^{-1}(A_2)) = \mu_2(A_2)$ então T preserva medida.*

Demonstração. Seja

$$\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{M} : \mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)\}$$

Queremos mostrar que $\mathcal{C} = \mathcal{M}$.

A inclusão $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ segue direto da definição. Quanto a inclusão contrária $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$, basta mostrar que \mathcal{C} é classe monótona. De fato, se \mathcal{C} for uma classe monótona, pelo Teorema das Classes Monótonas, \mathcal{M} é a menor classe monótona que contém \mathcal{A} , mas como \mathcal{C} é classe monótona, então $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$.

Para mostrar que \mathcal{C} é classe monótona, devemos checar se as propriedades de união monótonas e interseção monótonas são verdadeiras.

Quanto a propriedade de união monótona, considere $E_{j_1}^\infty \subset \mathcal{C}$ tal que $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ e seja $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$. Pela continuidade por baixo das medidas, temos que:

$$\mu(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(T^{-1}(E_j)) = \mu(T^{-1}(E))$$

uma vez que $T^{-1}(E_1) \subset T^{-1}(E_2) \subset \dots$ pois, se $x \in T^{-1}(E_1)$, então $T(x) \in E_1 \subset E_2$ e, se $x \in T^{-1}(E_2)$, então $T(x) \in E_2 \subset E_3$ e assim por diante. Logo, $E \in \mathcal{C}$.

Quanto a propriedade de interseção monótona, considere $F_{j_1}^\infty \subset \mathcal{C}$ tal que $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ e seja $F = \bigcap_{j=1}^\infty F_j$. Pela continuidade por baixo das medidas, temos que:

$$\mu(F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(T^{-1}(F_j)) = \mu(T^{-1}(F))$$

uma vez que $T^{-1}(F_1) \supset T^{-1}(F_2) \supset \dots$ pois, se $x \in T^{-1}(F_1)$, então $T(x) \in F_1 \supset F_2$ e, se $x \in T^{-1}(F_2)$, então $T(x) \in F_2 \supset F_3$ e assim por diante. Logo, $F \in \mathcal{C}$.

Portanto, \mathcal{C} é classe monótona, concluindo a demonstração.

□

6.2 TEOREMA DE RECORRÊNCIA DE POINCARÉ

Nesta seção, abordaremos o Teorema de Recorrência de Poincaré. Este Teorema é importante pois ele fornece um resultado interessante sobre certos pontos de um espaço de medida finita (M, \mathcal{M}, μ) sob uma transformação mensurável $T : M \rightarrow M$ que preserva a medida μ . O resultado diz respeito a órbita dos pontos $x \in E$, onde E tem medida positiva. Definimos a órbita de um ponto $x \in X$ como $\mathcal{O}[x] = \{T^n(x) : n \geq 0\}$, ou seja, o iterado das compostas de x com a transformação T . A conclusão do teorema é que a órbita de quase todo $x \in E$ intersecta E infinitas vezes, ou equivalentemente, podemos dizer que quase todo $x \in E$ retorna infinitas vezes a E .

Teorema 6.2 (Teorema de Recorrência de Poincaré). *Sejam $f : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável e μ uma medida invariante finita. Seja $E \subset M$ um conjunto mensurável qualquer com $\mu(E) > 0$. Então, μ -quase todo ponto $x \in E$ tem algum iterado $f^n(x)$, $n \geq 1$, tal que $f^n(x) \in E$.*

Demonstração. Seja E^0 o conjunto dos pontos que nunca regressam à E , ou seja,

$$E^0 = \{x \in E : f^n(x) \notin E \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Note que E^0 é mensurável, pois

$$E^0 = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-j}(E)$$

Devemos provar que E^0 tem medida nula. Para tanto, devemos mostrar que as pré-imagens $f^{-n}(E^0)$ são disjuntas duas a duas. Suponha, por absurdo, que existam $m > n \geq 1$ tais que $f^{-m}(E^0) \cap f^{-n}(E^0) \neq \emptyset$. Tome x em tal interseção e denote $y = f^n(x)$. Já que $f^m(x) \in E^0$ e $y = f^n(x) \in E^0$, então

$$f^{m-n}(y) = f^{m-n}(f^n(x)) = f^m(x) \in E^0,$$

ou seja, y tem um iterado $f^{m-n}(y)$ em $E^0 \subset E$, o que é uma contradição. Logo, as pré-imagens $f^{-n}(E^0)$ são disjuntas dois a dois. Então

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0).$$

Como a medida μ é finita, o lado esquerdo da igualdade é finito. Mas como o lado direito da igualdade é a soma de infinitos termos iguais, então $\mu(E^0) = 0$, pois caso contrário tal soma seria infinita.

□

Corolário 6.2. *Sob as condições do Teorema 6.2, μ -q.t.p. $x \in E$ retorna infinitas vezes à E , ou seja, existem infinitos valores de $n \geq 1$ tais que $f^n(x) \in E$.*

Demonstração. Para cada $k \geq 1$ fixo, considere E_k como o conjunto dos pontos $x \in E$ que regressam à E exatamente k vezes.

Provaremos que $\mu(E_k) = 0$ para todo $k \geq 1$. Suponha, por absurdo, que $\mu(E_k) > 0$. Pelo teorema anterior, μ -quase todo ponto $x \in E_k$ possui um iterado $f^n(x) \in E_k$. Fixe tal $x \in E_k$ e denote $y = f^n(x) \in E_k$. Como $y \in E_k$, então y possui exatamente k -iterados em E , digamos $\{f^{n_1}(y), \dots, f^{n_k}(y)\} \subset E$. Mas então

$$\{f^{n_1+n}(x), \dots, f^{n_k+n}(x), f^n(x)\} \subset E$$

ou seja, x tem $n + 1$ -iterados em E , o que é uma contradição. Logo $\mu(E_k) = 0$ para todo $k \geq 1$.

Seja F o conjunto dos pontos de E que retornam exatamente uma quantidade finita de vezes à E , ou seja,

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Pela σ -aditividade das medidas

$$\mu(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = 0,$$

ou seja, μ -quase todo ponto de $x \in E$ retorna infinitas vezes à E . □

Proposição 6.4. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função tal que existem intervalos abertos I_1, I_2, \dots disjuntos dois à dois tais que*

(i) $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ tem medida completa em $[0, 1]$,

(ii) Para cada k , a restrição $f_k = f|_{I_k}$ é um difeomorfismo sobre $(0, 1)$.

Seja $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ uma função integrável, com relação a medida de Lebesgue, onde μ -q.t.p $y \in [0, 1]$ tem-se

$$\rho(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|f'(x)|}.$$

Então a medida $\mu = \rho dx$ é invariante por f

Demonstração. Tome $E \subset [0, 1]$ mensurável qualquer. Então

$$\int_{I_k} \chi_E(f(x)) \rho(x) dx = \int_0^1 \chi_E(y) \rho(f_k^{-1}(y)) |(f_k^{-1})'(y)| dy = \int_0^1 \frac{\chi_E(y) \rho(f_k^{-1}(y))}{|f'(f_k^{-1}(y))|} dy \quad (6.1)$$

Onde a primeira igualdade é dada pela formula da mudança de variáveis, enquanto a segunda

igualdade é dada pelo teorema da função inversa, pois $(f_k^{-1})'(y) = \frac{1}{f'((f_k^{-1})(y))}$. De onde segue

$$\int_0^1 \chi_E(f(x))\rho(x) dx = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k} \chi_E(f(x))\rho(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} \chi_E(f(x))\rho(x) dx \quad (6.2)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \chi_E(y) \frac{\rho(f_k^{-1}(y))}{|f'(f_k^{-1}(y))|} dy = \int_0^1 \chi_E(y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho(f_k^{-1}(y))}{|f'(f_k^{-1}(y))|} dy. \quad (6.3)$$

Note que $f^{-1}(y) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}(y)$, o que implica em

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho(f_k^{-1}(y))}{|f'(f_k^{-1}(y))|} = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|f'(x)|}.$$

Substituindo isto no último termo da igualdade (6.3), obtemos

$$\int_0^1 \chi_E(y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho(f_k^{-1}(y))}{|f'(f_k^{-1}(y))|} dy = \int_0^1 \chi_E(x) \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|f'(x)|} dx = \int_0^1 \chi_E(y)\rho(y) dy. \quad (6.4)$$

Portanto,

$$\int_0^1 \chi_E(f(x))\rho(x) dx = \int_0^1 \chi_E(x)\rho(x) dx.$$

O que é exatamente o que buscávamos, pois $\chi_E(f(x)) = \chi_{f^{-1}(E)}(x)$ e $\mu = \rho dx$, ou seja, $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ e μ é invariante por f . \square

6.3 EXEMPLOS

Nesta seção, mostraremos alguns exemplos de transformações que preservam medida e da aplicação do Teorema de Recorrência de Poincaré 6.2.

6.3.1 Expansão decimal

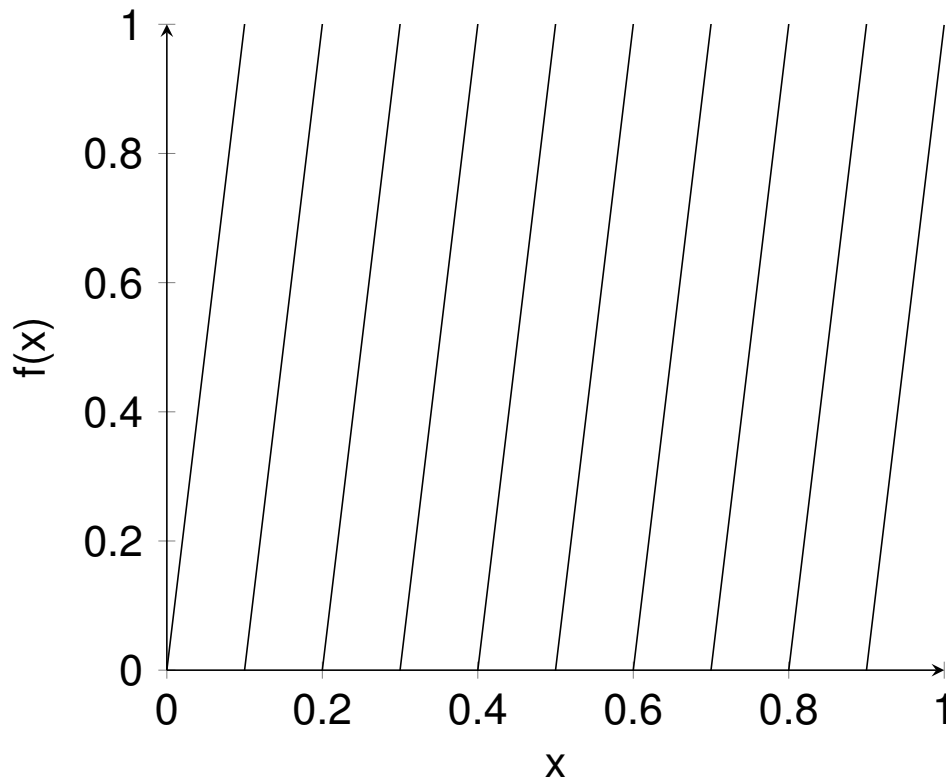
Exemplo 6.1. Considere a função

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto 10x - [10x].$$

Onde $[10x]$ representa a parte inteira da função $10x$.

Note que se $x \in I_k = \left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right)$ onde $k = 0, \dots, 9$, então $[10x] = k$ e $f(x) = 10x - k$, de onde segue o seguinte gráfico.



Primeiramente, iremos provar que f é invariante pela medida de Lebesgue μ . Para tanto, temos duas ferramentas ao nosso dispor, o Teorema 6.1 e a Proposição 6.4. Faremos o uso comparativo de ambos para tal prova. Começando pelo primeiro, tome $(a, b) \subset [0, 1]$ mensurável qualquer, temos que

$$f^{-1}((a, b)) = \bigcup_{k=0}^9 \left(\frac{a+k}{10}, \frac{b+k}{10} \right).$$

Logo

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}((a, b))) &= \mu \left(\bigcup_{k=0}^9 \left(\frac{a+k}{10}, \frac{b+k}{10} \right) \right) = \sum_{k=0}^9 \mu \left(\frac{a+k}{10}, \frac{b+k}{10} \right) \\ &= \sum_{k=0}^9 \frac{b-a}{10} = b-a = \mu((a, b)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 6.1, temos que f é invariante pela medida de Lebesgue. Quanto a Proposição 6.4, note que, tomando $\rho(x) = 1$ temos que $\mu = \rho dx$ e

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|f'(x)|} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{10} = 1 = \rho(y).$$

Logo, f é invariante por $\mu = \rho dx$.

Uma vez que checada a invariância de f pela medida de Lebesgue, podemos partir para as aplicações do Teorema de Recorrência de Poincaré (6.2) sob tal transformação. Tome

$E = [0.7, 0.8)$, ou seja, E é conjunto dos números cuja expansão decimal começa com o dígito 7. De acordo com o Teorema, quase todo número de E retorna infinitas vezes à E . Isso não parece particularmente interessante até explorarmos o que exatamente cada iterado da função expansão decimal faz com os pontos $x \in [0, 1]$.

Dado $x \in [0, 1]$, temos que x apresenta alguma expansão decimal $x = 0, a_0 a_1 \dots$ onde $a_i \neq 9$ para infinitos valores de i . Ao aplicarmos f em x , ocorre que

$$f(x) = 10x - [10x] = a_0, a_1 a_2 \dots - a_0 = 0, a_1 a_2 \dots$$

de onde segue que, aplicados n iterados de f , temos que

$$f^n(x) = 0, a_n a_{n+1} \dots$$

Portanto, ao dizermos que quase todo ponto x de $E = [0.7, 0.8)$, quando aplicada a transformação f , retorna infinitas vezes à E , essencialmente estamos dizendo que quase todo ponto que começa por 7 tem infinitos 7 em sua expansão decimal.

E quanto aos pontos que não começam por 7? A generalização para toda a reta vem do fato de que podemos construir a totalidade de \mathbb{R} com a simples união das translações do intervalo $[0.7, 0.8)$. Mais precisamente, sejam $E_k = E + k10^{-1}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ tais conjuntos transladados. Note que cada translação altera, no máximo, um único décimo de cada elemento de E , ou seja, quase todo ponto de cada um dos E_k 's também tem infinitos 7 em sua expansão decimal. Como $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k$, então quase todo ponto de \mathbb{R} tem infinitos 7 em sua expansão decimal.

Claro que o resultado não é exclusivo para o algoritmo 7, analogamente, podemos mostrar o mesmo para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$. Quanto a outros blocos de números naturais, uma construção semelhante pode ser feita. Por exemplo, para o bloco 27, seguindo os passos da demonstração anterior, mostra-se que $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como $f(x) = 100x - [100x]$ preserva, que isto implica em quase todo ponto de $E = [0.27, 0.28)$ ter infinitos 27 em sua expansão decimal, e que pode-se generalizar a mesma coisa para toda a reta por translações. O que nos trás a ideia da seguinte generalização.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam $E_1 = [0, 10)$, $E_2 = [10, 10^2)$, ..., $E_k = [10^{k-1}, 10^k)$, ... para todo $k = 1, 2, \dots$. Como os E_k 's são disjuntos dois a dois e $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, então existe um único k natural tal que $n \in E_k$. Neste caso, para tal k , defina

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto x \cdot 10^k - [x \cdot 10^k]$$

O comportamento g é similar ao comportamento da função f . Se $x = 0, a_0 a_1 \dots a_{10^k} a_{10^k+1} \dots$, então a imagem de x é dada por

$$g(x) = 0, a_{(10^k)} a_{(10^{k+1})} \dots$$

De onde obtemos a seguinte expressão para os m -iterados de x

$$g^m(x) = 0, a_{(m \cdot 10^k)} a_{(m \cdot 10^{k+1})} \dots$$

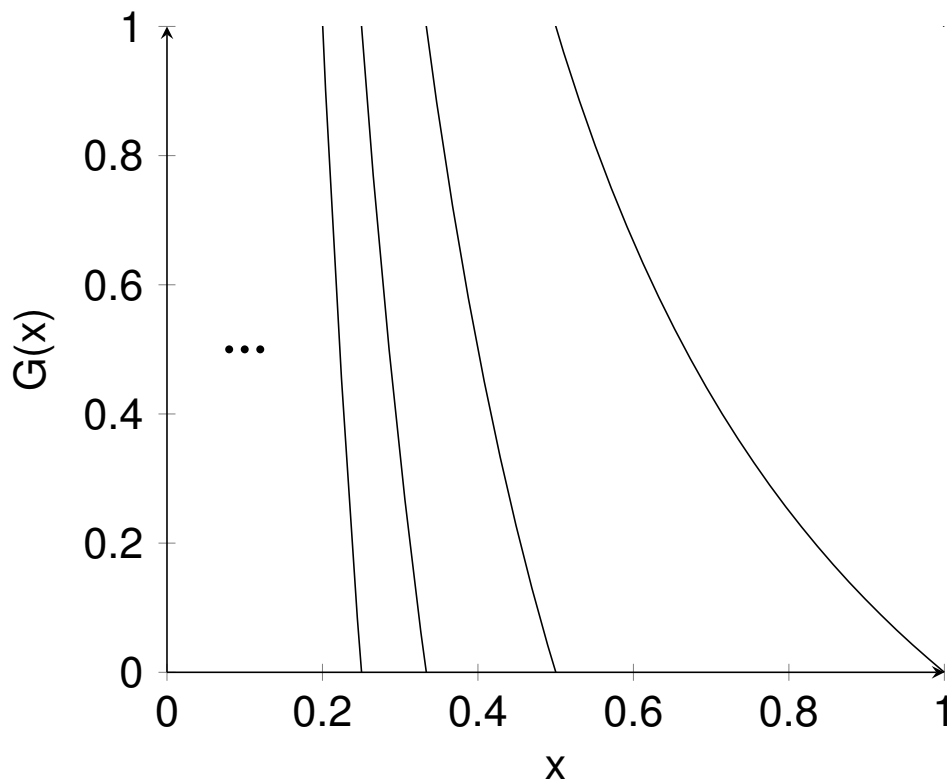
Seguindo o mesmo roteiro que anteriormente, basta mostra que g preserva a medida de Lebesgue. Pois se tal ocorre, então quase todo ponto em $E = [n \cdot 10^{-k}, (n+1) \cdot 10^{-k})$ retorna infinitas vezes a E . O que é equivalente a dizer que o bloco n aparece infinitas vezes em quase todo ponto do conjunto E , o que pode ser generalizado para a reta toda ao cobrir \mathbb{R} com as translações de E . Mas a demonstração de que g é praticamente análoga a demonstração de que f é invariante, então de fato temos que desejávamos. Qualquer bloco $n \in \mathbb{N}$ aparece infinitas vezes em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

6.3.2 Transformação de Gauss

Exemplo 6.2. A transformação de Gauss é dada pela seguinte função $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$G(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ se } x \in (0, 1], \quad G(x) = 0 \text{ se } x = 0.$$

Note que se $x \in I_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, então $G(x) = \frac{1}{x} - k$. De onde segue o seguinte gráfico.



Defina a seguinte medida

$$\mu(E) = \int_E \frac{c}{1+x} dx.$$

Queremos mostrar que $G(x)$ é invariante por μ . Utilizaremos ambos a Proposição 6.4 e o Teorema 6.2 para tanto. Começando pelo Teorema 6.1, basta mostrar que o intervalo arbitrário $(a, b) \subset [0, 1]$ é invariante por G . Primeiro note que

$$G^{-1}(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b+k}, \frac{1}{a+k} \right) \quad \text{e} \quad \mu((a, b)) = \int_a^b \frac{c}{1+x} dx = c \ln \left(\frac{1+b}{1+a} \right)$$

De onde segue

$$\begin{aligned} \mu(G^{-1}(a, b)) &= \mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b+k}, \frac{1}{a+k} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left(\frac{1}{b+k}, \frac{1}{a+k} \right) = c \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{(a+k+1)(b+k)}{(a+k)(b+k+1)} \right) \\ &= c \ln \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(a+k+1)(b+k)}{(a+k)(b+k+1)} \right) = c \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right) = \mu((a, b)). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 6.1, G é μ -invariante. Agora, quanto a invariância pela proposição 6.4, comecemos por notar que $\rho(x) = \frac{c}{1+x}$, logo, definindo $G_k = G|_{I_k}$ nós temos que

$$\rho(G_k^{-1}(y)) = c \frac{y+k}{y+k+1} \quad \text{e} \quad |G'(G_k^{-1}(y))| = (y+k)^2.$$

De onde segue

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|G'(x)|} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho(G_k^{-1}(y))}{|G'(G_k^{-1}(y))|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{(y+k+1)(y+k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{y+k} - \frac{c}{y+k+1} \right) = \frac{c}{y+1} = \rho(y). \end{aligned}$$

Mostrando que μ é invariante por G pela Proposição 6.4. Em particular, quando $c = \frac{1}{\ln(2)}$ temos que μ é uma probabilidade, ou seja, a medida do espaço todo é igual a 1, como segue

$$\mu([0, 1]) = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1.$$

Uma das aplicações da transformação de Gauss é na construção da representação de um número real em uma fração contínua, o que é útil para a aproximação de números irracionais por números racionais. A maneira que o algoritmo funciona é a seguinte: seja $x_0 \in (0, 1)$, então $G(x_0) = \frac{1}{x_0} - \left[\frac{1}{x_0} \right]$, então

$$x_0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{x_0} \right] + G(x_0)}.$$

Note que $G(x_0) \in [0, 1)$. Se $G(x_0) = 0$, obtemos a fração parcial que desejávamos. Caso contrário, temos que $G^2(x_0) = \frac{1}{G(x_0)} - \left[\frac{1}{G(x_0)} \right]$, de onde obtemos

$$G(x_0) = \frac{1}{\left[\frac{1}{G(x_0)} \right] + G^2(x_0)} \quad \text{e} \quad x_0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{x_0} \right] + \frac{1}{\left[\frac{1}{G(x_0)} \right] + G^2(x_0)}}.$$

Novamente, temos que $G^2(x_0) \in [0, 1)$ e que, se $G^2(x_0) = 0$, o algoritmo para pois obtemos o que procurávamos. Caso contrário, o processo continua sendo realizado de tal forma que, quando na n -ésima iteração (considerando que cada $G^k(x_0) \neq 0$ para cada $k = 1, \dots, n$) nós temos

$$G^n(x_0) = \frac{1}{\left[\frac{1}{G^n(x_0)} \right] + G^{n+1}(x_0)} \quad \text{e} \quad x_0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{x_0} \right] + \frac{1}{\left[\frac{1}{G(x_0)} \right] + \frac{1}{\dots + \left[\frac{1}{G^n(x_0)} \right] + \frac{1}{G^{n+1}(x_0)}}}}.$$

Usualmente, denotasse $a_0 = \left[\frac{1}{x_0} \right], \dots, a_n = \left[\frac{1}{G^n(x_0)} \right], \dots$ por simplicidade. Quando $x_n \neq 0$ para todo n a expansão em frações contínuas de x_0 é, então, dada por

$$x_0 = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + a_n + \frac{1}{\dots}}}}.$$

Como a medida finita μ é invariante pela transformação G , podemos utilizar o Teorema de Recorrência de Poincaré 6.2 para mostrar uma propriedade interessante sobre a expansão em frações contínuas. Se, por exemplo, $E = (1/8, 1/7)$, então $\mu(E) = \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{1.7}{1.8}\right) > 0$ e, pelo teorema, x retorna infinitas vezes a E . Mas cada um destes retornos tem a consequência de que, se $G^n(x) \in E = (1/8, 1/7)$, então $a_n = \left[1/G^n(x) \right] = 7$. Ou seja, quase todo ponto de $(1/8, 1/7)$ tem infinitos 7 em sua expansão em frações contínuas.

6.3.3 Rotações no círculo

Mostraremos neste exemplo que, escolhido um ângulo θ , toda vizinhança de qualquer ponto do círculo é recorrente sob a transformação de rotação pelo ângulo θ , ou seja, se $R_\theta : S^1 \rightarrow S^1$ é a transformação de rotação por um ângulo θ (logo definiremos a seguinte) e se $x_0 \in S^1$ é um ponto fixo qualquer, dada uma vizinhança arbitrária V de x_0 , temos que existem infinitos iterador $R_\theta^n(V)$ tais que $R_\theta^n(V) \subset V$. Contruiremos abaixo os argumentos para demonstração do exemplo.

Seja \sim a seguinte relação binária sobre a reta:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z},$$

ou seja, relaciona quaisquer dois números reais tais que a diferença é um número inteiro. Segue direto da definição que \sim é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, \sim define uma relação

de equivalência. Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $[x]$ o conjunto dos pontos da reta que se relacionam com $[x]$, ou seja

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} : y \sim x\}.$$

Pela definição da equivalência \sim , é fácil notar que $[x] = x + \mathbb{Z} = \{x + k : k \in \mathbb{Z}\}$. O conjunto de todas as classes de equivalência será denotado como \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Lembrando que $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, definiremos a seguinte função

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow S^1 \\ [x] &\mapsto e^{2\pi xi} \end{aligned}$$

Mostraremos, agora, que ϕ é um homeomorfismo entre \mathbb{R}/\mathbb{Z} e S^1 , ou seja, ϕ é contínua, inversível e sua inversa é contínua. A função ϕ é injetora já que

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi(y) & \\ \implies e^{2\pi xi} = e^{2\pi yi} & \\ \implies x = y + k, \quad k \in \mathbb{Z} & \\ \implies x - y = k, \quad k \in \mathbb{Z} & \\ \implies [x] = [y] & \end{aligned}$$

Já a sobrejetividade de ϕ é diretamente decorrente da fórmula de Euler, já que $e^{2\pi xi} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ para todo $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ define o círculo unitário complexo. Logo a função ϕ é invertível. Quanto a continuidade de ϕ , como os abertos básicos da topologia induzida de S^1 são arcos abertos, então para algum intervalo (a, b) eles são da forma $e^{2\pi(a,b)i}$, cuja pré imagem $[(a, b)]$ é aberta na topologia quociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Mostrar a continuidade de ϕ^{-1} é o equivalente a mostrar que ϕ é aberta, o que é verdade já que dado um elemento $[(c, d)] \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ da base da topologia quociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} , temos que $e^{2\pi(c,d)i}$ é aberto em S^1 .

Dado $\theta \in \mathbb{R}$, defina a transformação rotação pelo ângulo θ como

$$\begin{aligned} R_\theta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ [x] &\mapsto [x + \theta] = [x] + [\theta]. \end{aligned}$$

Como \mathbb{R}/\mathbb{Z} e S^1 são homeomorfos, a correspondência da transformação R_θ em S^1 faz com que, para cada $z \in S^1$, $z \mapsto e^{2\pi\theta i}z$, ou seja, R_θ realiza uma rotação no ponto $z \in S^1$ equivalente ao ângulo $2\pi\theta$. Direto da definição, segue que R_0 é a identidade, que $R_\theta \circ R_\gamma = R_{\theta+\gamma}$ e que $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$ e, por fim, podemos analisar o comportamento das rotações de ângulos.

Caso θ for racional, então $\theta = p/q$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Pois então, para qualquer $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tem-se que

$$R_{\theta}^q([x]) = R_{q\theta}([x]) = [x + q\theta] = [x]$$

Ou seja, $[x]$ é periódico com período q . Já caso θ for irracional, mostraremos que $\mathcal{O}([x]) = \{R_{\theta}^n([x]) : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto denso de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Para tanto, primeiro devemos mostrar que $\mathcal{D} = \{m + n\theta : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ é denso em \mathbb{R} . Seja $r \in \mathbb{R}$ um real qualquer. Pelo teorema de aproximação de Dirichlet, existem $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ tais que $|q\theta - p| < \epsilon$. Como θ é irracional, então $q\theta - p \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $q\theta - p > 0$ e divida a reta em intervalos de comprimento $c = q\theta - p$. Pois então existe um inteiro s tal que $0 \leq r - sc < c$ logo $|r - sc| < c < \epsilon$. Como $m = sq$ e $n = -sq$ são inteiros, então r é ponto limite de \mathcal{D} , logo \mathcal{D} é denso em \mathbb{R} .

Como \mathcal{D} é denso em \mathbb{R} , então $[\mathcal{D}]$ é denso em \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Agora basta notar que $[\mathcal{D}] = \{n\theta : n \in \mathbb{N}\} = R_{\theta}^{\mathbb{N}}([x])$ e obtemos o que desejávamos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De forma sintética, esta monografia tratou de dois importantes tópicos da Matemática, à saber, a Teoria da Medida de Lebesgue e o Teorema de Recorrência de Poincaré, sendo que este último se conecta com o primeiro através do estudo das medidas invariantes. Embora não tenhamos estudado o teorema de existência de medidas invariantes, percebemos a importância da existência de tais medidas no estudo da dinâmica das órbitas obtidas a partir de uma transformação mensurável.

Como aplicação dos resultados estudados, realizamos pequenas incursões na Teoria dos Números, através do estudo de alguns exemplos obtidos a partir de transformações que preservam a medida. Esta monografia constitui-se apenas de um estudo introdutório, com foco em alguns resultados preliminares dos Sistemas Dinâmicos Discretos, com o objetivo de motivar o leitor a seguir aprofundando no assunto. Esperamos ter apresentado um pouco da beleza do tema e incentivar futuros leitores a ingressarem no estudo da Teoria Ergódica.

REFERÊNCIAS

- BASS, R. F. **Real Analysis for Graduate Students**. [S.l.]: Notas do autor, 2011. Citado na página 6.
- FOLLAND, G. B. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 20 e 22.
- MUNKRES, J. **Topology**. 2. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2000. Citado na página 9.
- RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1976. Citado 3 vezes nas páginas 6, 7 e 25.
- VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. 2. ed. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2019. Citado na página 6.
- WALTERS, P. **An Introduction to Ergodic Theory**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 1982. Citado na página 6.