

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Análise de confiabilidade de sistemas reparáveis:
abordagens para dados de tempo de falha, degradação e
degradação acelerada**

Adriane Caroline Teixeira Portela

Tese de Doutorado do Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em
Estatística (PIPGEs)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Adriane Caroline Teixeira Portela

**Análise de confiabilidade de sistemas reparáveis:
abordagens para dados de tempo de falha, degradação e
degradação acelerada**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP e ao Departamento de Estatística – DEs-UFSCar, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.
VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Estatística

Orientadora: Profa. Dra. Vera Lucia Damasceno Tomazella

**USP – São Carlos
Julho de 2025**

Adriane Caroline Teixeira Portela

Reliability analysis of repairable systems: approaches for failure time, degradation, and accelerated degradation data

Thesis submitted to the Institute of Mathematics and Computer Science – ICMC-USP and to the Department of Statistics – DEs-UFSCar – in accordance with the requirements of the Statistics Interagency Graduate Program, for the degree of Doctor in Statistics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Statistics

Advisor: Profa. Dra. Vera Lucia Damasceno Tomazella

USP – São Carlos
July 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística

Folha de Aprovação

Defesa de Tese de Doutorado da candidata Adriane Caroline Teixeira Portela, realizada em 14/08/2025.

Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Vera Lucia Damasceno Tomazella (UFSCar)

Prof. Dr. Francisco Louzada Neto (USP)

Prof. Dr. Paulo Henrique Ferreira da Silva (UFBA)

Profa. Dra. Lia Hanna Martins Morita (UFMT)

Profa. Dra. Maria Luiza Guerra de Toledo (ENCE)

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística.

AGRADECIMENTOS

Hoje tenho a oportunidade de viver algo que, um dia, foi uma oração.

Quando penso nos agradecimentos desta tese, um filme vem à minha mente. Hoje atravesso uma linha de chegada, mas certamente não estou sozinha: represento tantos outros que não tiveram a mesma oportunidade, mas que sonharam e que também são donos desta vitória.

Não se chega a lugares sozinho. Sou grata a todos que fizeram parte deste trajeto, cujas contribuições, diretas ou indiretas, foram singulares. A Adriane de hoje se sente extremamente orgulhosa e grata.

Obrigada a Deus, aos orientadores, familiares, amigos, ao meu noivo e a todos que tiveram participações especiais. Minha eterna gratidão.

Além disso, devo mencionar que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (Univesp) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

RESUMO

PORTELA, A. C. T. **Análise de confiabilidade de sistemas reparáveis: abordagens para dados de tempo de falha, degradação e degradação acelerada.** 2025. 143 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

A análise de confiabilidade busca compreender e prever o comportamento de sistemas ao longo do tempo, utilizando tanto dados de falha quanto dados de degradação. Em sistemas reparáveis, esses dois tipos de informação são particularmente relevantes, pois permitem caracterizar a evolução do risco de falha e o impacto das ações de manutenção ao longo do ciclo de vida. Portanto, é possível desenvolver modelos mais realistas para apoiar decisões de manutenção e otimizar custos operacionais, refletindo as condições reais às quais os sistemas estão sujeitos. Nesta tese, apresentamos três modelos estatísticos voltados à análise de sistemas reparáveis sob diferentes perspectivas. Inicialmente, propomos um modelo de fragilidade para tempos de falha em sistemas sujeitos a reparo mínimo, considerando heterogeneidade não observada entre unidades. A função de intensidade de falha adota um Processo de Lei de Potência, enquanto o termo de fragilidade segue uma distribuição Gama não-central. Por meio de estudos de simulação e aplicações a dados reais, demonstramos que essa abordagem permite estimativas mais precisas e funções de confiabilidade ajustadas à variabilidade entre sistemas. Em seguida, avançamos para modelos baseados em trajetórias de degradação, investigando processos em que a condição do sistema se deteriora ao longo do tempo e pode ser parcialmente restaurada por manutenções imperfeitas. Utilizamos o processo Gaussiano inverso associado ao mecanismo de Redução Aritmética da Degradação de ordem um (ARD_1), captando os efeitos variáveis das ações de manutenção e fornecendo representações mais fiéis. Estudos de simulação e aplicações confirmam a eficiência do modelo. Por fim, propomos o modelo de degradação acelerada, que combina o processo Gaussiano inverso com um fator de aceleração exponencial e o mecanismo de manutenção imperfeita. Essa formulação permite avaliar, simultaneamente, o efeito de variáveis externas de estresse e das ações de manutenção, fornecendo estimativas de tempo médio até a falha e funções de confiabilidade mais alinhadas às condições dinâmicas de operação. Em todos os modelos, adotamos uma abordagem clássica para construir funções de verossimilhança, estimar parâmetros por máxima verossimilhança e investigar propriedades assintóticas por meio de estudos de simulação. Aplicações demonstram o potencial das metodologias propostas para apoiar políticas de manutenção mais eficazes e fornecer subsídios técnicos para a gestão de sistemas reparáveis sob condições operacionais variáveis e heterogêneas.

Palavras-chave: Sistemas reparáveis, Modelos de tempo de falha, Modelos de degradação, Heterogeneidade não observada, Fatores de aceleração.

ABSTRACT

PORTELA, A. C. T. **Reliability analysis of repairable systems: approaches for failure time, degradation, and accelerated degradation data.** 2025. 143 p. Tese (Doutorado em Estatística – Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2025.

Reliability analysis aims to understand and predict the behavior of systems over time, using both failure data and degradation data. In repairable systems, these two types of information are particularly relevant, as they allow one to characterize the evolution of failure risk and the impact of maintenance actions throughout the life cycle. Therefore, it is possible to develop more realistic models to support maintenance decisions and optimize operational costs, reflecting the actual conditions to which the systems are subjected. In this thesis, we present three statistical models focused on the analysis of repairable systems from different perspectives. Initially, we propose a frailty model for failure times in systems operating under minimal repair, accounting for unobserved heterogeneity among units. The failure intensity function follows a Power Law Process, while the frailty term is assumed to follow a non-central Gamma distribution. Through simulation studies and applications to real datasets, we demonstrate that this approach yields more accurate estimates and reliability functions that are better adjusted to the variability among systems. Subsequently, we advance to models based on degradation trajectories, investigating processes in which the system condition deteriorates over time and can be partially restored by imperfect maintenance actions. We adopt the inverse Gaussian process associated with the order-one Arithmetic Reduction of Degradation (ARD_1) mechanism, which captures the variable effects of maintenance actions and provides more faithful representations of system behavior. Simulation studies and applications confirm the model's effectiveness. Finally, we propose an accelerated degradation model that combines the inverse Gaussian process with an exponential acceleration factor and the imperfect maintenance mechanism. This formulation allows for the simultaneous assessment of the effects of external stress variables and maintenance actions, providing estimates of the mean time to failure and reliability functions that are more consistent with dynamic operating conditions. Across all models, we adopt a classical approach to construct likelihood functions, estimate parameters via maximum likelihood, and investigate asymptotic properties through simulation studies. Applications demonstrate the potential of the proposed methodologies to support more effective maintenance policies and provide technical insights for managing of repairable systems operating under variable and heterogeneous conditions.

Keywords: Repairable systems, Failure time models, Degradation models, Unobserved heterogeneity, Acceleration factors.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estrutura geral relacionando os modelos propostos e os capítulos da tese.	28
Figura 2 – (a) FDP GNC para $b = 3$ fixo e valores φ variáveis, e (b) FDP GNC para $\varphi = 50$ fixo e valores b variáveis. Ambos os casos com $a = 0$ fixo.	47
Figura 3 – Resultados de simulação para o modelo de fragilidade GNC com $v = 0,8$ fixo.	53
Figura 4 – Resultados de simulação para o modelo de fragilidade GNC com $v = 1,2$ fixo.	53
Figura 5 – Funções de confiabilidade estimadas nos últimos tempos de falha t_n , para cada colheitadeira no conjunto de dados, sob o modelo de fragilidade GNC ajustado.	56
Figura 6 – Funções de confiabilidade estimadas nos últimos tempos de falha t_n para cada sistema do conjunto de dados, sob o modelo de fragilidade GNC ajustado.	58
Figura 7 – Ilustração dos caminhos de degradação com e sem os efeitos das ações de manutenção.	63
Figura 8 – Ilustração dos caminhos de degradação com e sem os efeitos das ações de manutenção para múltiplos sistemas.	64
Figura 9 – FDP e FDA para o incremento (Y) em diferentes cenários: a) e b) para λ fixo ($\lambda = 2$); c) e d) para μ fixo ($\mu = 5$).	65
Figura 10 – Resultados da simulação — MRE.	72
Figura 11 – Resultados da simulação — RMSE.	73
Figura 12 – Resultados da simulação — CP.	74
Figura 13 – Ilustração das trajetórias de degradação geradas no estudo de simulação.	75
Figura 14 – Trajetórias de degradação dos dados LASER ao longo do tempo (em 1.000 horas).	76
Figura 15 – Trajetórias de degradação para os três primeiros sistemas – Cenário 1.	78
Figura 16 – Trajetória de degradação com efeito de manutenção para o sistema 1 – Cenário 1.	79
Figura 17 – Trajetórias de degradação para os três primeiros sistemas – Cenário 2.	79
Figura 18 – Trajetória de degradação com efeito de manutenção para o sistema 1 – Cenário 2.	80
Figura 19 – Trajetórias de degradação para os três primeiros sistemas – Cenário 3.	81
Figura 20 – Trajetória de degradação com efeito de manutenção para o sistema 1 – Cenário 3.	81
Figura 21 – Teste de adequação baseado nos dados LASER: à esquerda, o gráfico P–P dos incrementos de degradação e o teste AD; à direita, o gráfico Q–Q dos incrementos de degradação.	84

Figura 22 – Ilustração dos caminhos de degradação com e sem os efeitos das ações de manutenção para múltiplos sistemas submetidos a diferentes níveis de aceleração.	89
Figura 23 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = 1$).	98
Figura 24 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = 1$).	99
Figura 25 – Resultados da simulação — CP ($\beta = 1$).	100
Figura 26 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = -1$).	101
Figura 27 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = -1$).	102
Figura 28 – Resultados da simulação — CP ($\beta = -1$).	103
Figura 29 – Ilustração da unidade de medição — pá da turbina eólica.	104
Figura 30 – Trajetórias de degradação simuladas para as pás sob diferentes condições de estresse.	107
Figura 31 – Teste de adequação baseado nos dados de turbinas eólicas: à esquerda, o gráfico P–P dos incrementos de degradação; à direita, o gráfico Q–Q dos incrementos de degradação, ambos por cada nível de aceleração.	109
Figura 32 – Fator de aceleração estimado em função do nível de estresse.	109
Figura 33 – Trajetórias de degradação ao longo do tempo e as extensões simuladas sob parâmetros estimados.	111
Figura 34 – Funções de densidade (a), distribuição acumulada (b) e confiabilidade (c) para os tempos de falha em diferentes níveis de estresse.	112
Figura 35 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = 2$).	132
Figura 36 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = 2$).	133
Figura 37 – Resultados da simulação — CP ($\beta = 2$).	134
Figura 38 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = -2$).	135
Figura 39 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = -2$).	136
Figura 40 – Resultados da simulação — CP ($\beta = -2$).	137
Figura 41 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = 4$).	138
Figura 42 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = 4$).	139
Figura 43 – Resultados da simulação — CP ($\beta = 4$).	140
Figura 44 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = -4$).	141
Figura 45 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = -4$).	142
Figura 46 – Resultados da simulação — CP ($\beta = -4$).	143

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Representação geral dos dados de degradação	38
Tabela 2 – Tempos de falha dos sistemas de lâmina de corte da colhedora.	55
Tabela 3 – Resultados da estimação dos modelos de fragilidade GNC e Gama aplicados aos dados de colhedoras de cana-de-açúcar.	55
Tabela 4 – Tempos de falha dos sistemas (em dias).	57
Tabela 5 – Resultados de estimação para os modelos de fragilidade GNC e Gama aplicados a dados de sistemas da literatura.	57
Tabela 6 – Registros de degradação para os três primeiros sistemas no conjunto de dados LASER.	76
Tabela 7 – AIC e BIC para os dados LASER assumindo o modelo ARD_1	83
Tabela 8 – Resultados da estimação do modelo de degradação proposto aplicado aos dados LASER.	83
Tabela 9 – Principais notações do modelo de degradação proposto.	90
Tabela 10 – Cenários simulados e variações dos parâmetros considerados na geração das trajetórias.	97
Tabela 11 – Dados simulados para a primeira unidade nos diferentes níveis de estresse.	106
Tabela 12 – Efeitos das ações de manutenção sobre a degradação acumulada.	108
Tabela 13 – Comparação dos valores de MTTF obtidos para diferentes níveis de estresse, considerando as trajetórias sem efeitos de reparo (X) e com efeitos de reparo (Z).	111
Tabela 14 – Principais notações utilizadas nas subseções 5.2.1 e 5.2.2.	128

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABAO	<i>As Bad As Old</i>
ADT	<i>Accelerated Degradation Testing</i>
AGAN	<i>As Good As New</i>
AIC	<i>Akaike Information Criterion</i>
ALT	<i>Accelerated Life Testing</i>
ARA	<i>Arithmetic Reduction of Age</i>
ARD	<i>Arithmetic Reduction of Degradation</i>
ARD _{1PGI}	Redução Aritmética da Degradação de ordem 1 com processo Gaussiano inverso
ARI	<i>Arithmetic Reduction of Intensity</i>
CP	<i>coverage probability</i>
CQ	características de qualidade
CSADT	<i>constant-stress accelerated degradation test</i>
EMV	estimadores de máxima verossimilhança
FDA	função de distribuição acumulada
FDP	função densidade de probabilidade
GI	distribuição Gaussiana inversa
GNC	Gama não-central
LASER	<i>Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation</i>
MDA_ARD _{1PGI}	Modelo de Degradação Acelerada com Redução Aritmética da Degradação de ordem 1 com processo Gaussiano inverso
MP	manutenção preventiva
MRE	<i>mean relative error</i>
MTTF	<i>Mean Time To Failure</i>
PG	processo Gama

PGI	processo Gaussiano inverso
PLP	Processo de Lei de Potência
PPH	Processo de Poisson Homogêneo
PPNH	Processo de Poisson Não Homogêneo
PSADT	<i>progressive-stress accelerated degradation test</i>
PW	processo de Wiener
RI	Reparo Imperfeito
RM	Reparo Mínimo
RMSE	<i>root mean square error</i>
RP	Reparo Perfeito
SSADT	<i>step-stress accelerated degradation test</i>
TDA	Testes de Degradação Acelerada

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Objetivos	26
1.2	Visão geral dos capítulos	26
1.3	Produção	27
2	BACKGROUND	29
2.1	Modelos para Processos de Contagem	29
2.1.1	<i>Processo de Contagem</i>	29
2.1.2	<i>Processo de Poisson</i>	31
2.1.3	<i>Processo de Poisson Não Homogêneo</i>	31
2.2	Sistemas reparáveis	32
2.2.1	<i>Reparo mínimo</i>	33
2.2.2	<i>Reparo Perfeito</i>	34
2.2.3	<i>Reparo Imperfeito</i>	34
2.2.3.1	<i>Modelos ARA</i>	35
2.2.3.2	<i>Modelos ARI</i>	35
2.3	Modelos de Fragilidade	36
2.4	Modelos para dados de degradação	37
2.4.1	<i>Dados de degradação</i>	38
2.4.2	<i>Processo de Wiener</i>	39
2.4.3	<i>Processo Gaussiano Inverso</i>	40
2.5	Redução Aritmética da Degradação	40
2.6	Modelos de Testes de Degradação Acelerada	42
2.7	Considerações finais	43
3	CONFIABILIDADE DE SISTEMAS REPARÁVEIS COM FRAGILIDADE GAMA NÃO-CENTRAL	45
3.1	Fundamentação Teórica Específica	46
3.1.1	<i>Distribuição Gama não-central</i>	46
3.1.2	<i>Modelos de reparo mínimo para sistemas reparáveis</i>	47
3.2	Formulação do Modelo	49
3.3	Estudo de simulação	51
3.4	Aplicação em dados reais	54

3.4.1	<i>Dados da colheitadeira de cana-de-açúcar</i>	54
3.4.2	<i>Dados de sistemas da literatura</i>	56
3.5	Considerações finais	57
4	MODELOS DE DEGRADAÇÃO PARA SISTEMAS REPARÁVEIS SOB A SUPOSIÇÃO DE REPARO IMPERFEITOS	61
4.1	Contextualização	62
4.1.1	<i>Dados de Degradação</i>	62
4.1.2	<i>O Processo de Degradação Subjacente</i>	64
4.1.3	<i>Modelo de Degradação ARD_1</i>	65
4.2	Formulação do Modelo	67
4.2.1	<i>Modelo da Trajetória de Degradação ARD_{1PGI}</i>	67
4.2.2	<i>Inferência Estatística</i>	68
4.3	Estudo de Simulação	70
4.4	Aplicação a Dados Reais	75
4.5	Considerações Finais	84
5	MODELOS DE DEGRADAÇÃO ACELERADA PARA SISTEMAS REPARÁVEIS SOB A SUPOSIÇÃO DE REPARO IMPERFEITOS	87
5.1	Contextualização	88
5.1.1	<i>Dados de Degradação Acelerada</i>	88
5.1.2	<i>Modelo de Degradação Acelerada</i>	89
5.2	Formulação do Modelo	90
5.2.1	<i>Modelo de Caminho de Degradação MDA_ARD_{1PGI}</i>	91
5.2.2	<i>Inferência Estatística</i>	92
5.3	Estudo de Simulação	94
5.4	Aplicação	104
5.4.1	<i>Sistema de Turbinas Eólicas – Modelagem da Degradação Acelerada</i>	104
5.5	Considerações Finais	112
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS	115
6.1	Considerações Finais Gerais	115
6.2	Pesquisas futuras	116
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICE A MATERIAIS COMPLEMENTARES	127
A.1	Construção algébrica do modelo do Capítulo 4	127
A.2	Notações do Capítulo 5	128
A.3	Algoritmos para geração dos dados simulados	129

A.3.1	<i>Capítulo 3</i>	129
A.3.2	<i>Capítulo 4</i>	129
A.3.3	<i>Capítulo 5</i>	130
A.4	Figuras das simulações do Capítulo 5	131

INTRODUÇÃO

As abordagens e metodologias voltadas para a detecção de falhas e a análise de seus impactos desempenham um papel de extrema relevância e possuem ampla aplicabilidade na indústria. Em setores caracterizados por equipamentos complexos, uma única falha pode resultar na paralisação de toda a linha de produção, ocasionando transtornos e perdas financeiras. Tais métodos oferecem benefícios como o aprimoramento do desempenho dos sistemas, a maximização da eficiência dos recursos empregados e a redução dos custos associados a paralisações inesperadas, entre outras vantagens.

Muitos sistemas ou componentes passam por um processo de degradação física antes de falharem, sendo frequentemente considerados inadequados para a continuidade da operação ao atingirem um estágio crítico, ou seja, ao ultrapassarem um limiar predefinido. Esse processo de degradação é complexo, pois está sujeito a uma variedade de influências, incluindo características do material, níveis de tensão aplicados, variações de temperatura e outros fatores relevantes.

Alguns mecanismos de falha podem estar associados a processos de degradação subjacentes e a covariáveis que oscilam ao longo do tempo. Notavelmente, algumas dessas variáveis de interesse frequentemente não são mensuráveis ou não são observáveis. Nesse contexto, os registros da degradação e das covariáveis têm o potencial de contribuir com informações suplementares ao conjunto de dados convencionais relacionados ao tempo de falha.

Nesse sentido, há um considerável interesse na investigação de diversas metodologias destinadas à degradação, pois, em sistemas caracterizados por níveis elevados de confiabilidade, as ocorrências de falhas são raras ou mesmo inexistentes, o que aumenta a relevância das informações fornecidas por características de qualidade (CQ) desses sistemas. Tais informações assumem um valor particularmente significativo quando os modelos tradicionais de análise de confiabilidade apresentam limitações ou se revelam inadequados para aplicação nessas circunstâncias específicas.

Para contextualizar adequadamente a questão em análise, é essencial abordar de forma

concisa o âmbito dos sistemas reparáveis, bem como as metodologias centrais para a análise dos dados relativos aos tempos de falha. Posteriormente, será pertinente discorrer sobre os dados de degradação, que mantêm uma conexão intrínseca com os tempos de falha, mas demandam, por sua vez, abordagens metodológicas distintas.

O principal desafio ao modelar dados de sistemas reparáveis é contabilizar o efeito de uma ação de reparo realizada imediatamente após uma falha ou uma manutenção preventiva. Considera-se um sistema reparável quando, após uma ação de reparo, ele pode retornar à operação. Em geral, assume-se que as ações de reparo são instantâneas e que o tempo de reparo é desprezível, como apontado por [Lindqvist \(2006\)](#). Esse tipo de processo é completamente caracterizado pela função de intensidade de falha do sistema e, a partir dela, é possível obter as ferramentas necessárias para realizar a inferência dos parâmetros do modelo.

As ações de reparo podem assumir diferentes naturezas, classificadas como mínimas, perfeitas ou imperfeitas. Os pressupostos mais explorados são o Reparo Mínimo (RM), que retorna o sistema à mesma condição em que estava logo antes da falha, e o Reparo Perfeito (RP), que deixa o sistema como se fosse novo. Esses pressupostos foram discutidos em trabalhos como [Barlow e Proschan \(1996\)](#), [Zhao e Xie \(1996\)](#), [Kim T.; Park \(2008\)](#) e [Wang \(2002\)](#), [Junior \(2021\)](#), [D'Andrea et al. \(2021\)](#), [Brito, Tomazella e Ferreira \(2022\)](#), [Pereira et al. \(2024\)](#) e [Portela et al. \(2024\)](#).

Entretanto, na prática, as atividades de reparo nem sempre ocorrem em situações extremas, mas sim de maneira intermediária. Ou seja, após a ação de reparo, o sistema estará em uma condição melhor que a anterior à ação de reparo, mas não pode ser considerado como novo; portanto, trata-se de um Reparo Imperfeito (RI), conforme descrito por [Kijima, Morimura e Suzuki \(1988\)](#) e posteriormente generalizado em diversas direções por [Lindqvist \(2006\)](#). O RI permite que o sistema rejuvenesça, reduzindo a degradação acumulada desde a última ação de manutenção.

No contexto de confiabilidade, os dados de falha constituem a base tradicional para a modelagem e a inferência de parâmetros de sistemas reparáveis. Métodos clássicos, como os processos de Poisson homogêneo e não homogêneo e modelos paramétricos para o tempo entre falhas (por exemplo, Weibull ou Exponencial), permitem estimar taxas de falha e prever o desempenho (ver, por exemplo, os estudos de [Junior \(2021\)](#) e [Brito, Tomazella e Ferreira \(2022\)](#)). No entanto, tendo em vista que os dados relacionados ao tempo de falha podem ser escassos em muitos casos, uma alternativa viável é aferir parâmetros que descrevem a degradação ao longo do tempo de um componente ou de todo o sistema. Sob essa abordagem, uma falha é registrada em uma unidade quando a degradação atinge um nível crítico (limiar) ou quando ocorre um evento traumático. É importante observar que a incidência de falhas traumáticas está diretamente relacionada ao nível de degradação, sendo que a intensidade dessas falhas aumenta conforme a degradação se intensifica.

A utilização de dados de degradação para avaliar a confiabilidade e a segurança tornou-

se uma abordagem de grande relevância, especialmente no contexto de sistemas complexos. Quando a mensuração da degradação é viável, esses dados frequentemente oferecem uma fonte de informação mais rica do que os dados tradicionais de tempo até a falha, particularmente para avaliar e aprimorar a confiabilidade de um produto. A literatura científica apresenta uma variedade de estudos dedicados à modelagem da degradação e à avaliação da confiabilidade com base em dados dessa natureza, como ilustram [Singpurwalla e Wilson \(1998\)](#), [Ma \(2007\)](#), [Noortwijk e Kallen \(2008\)](#), [Meeker e Escobar \(2014\)](#), [Morita \(2017\)](#), [Duan e Wang \(2018\)](#), [Wang et al. \(2021a\)](#), [Wang et al. \(2021b\)](#), [Fang, Pan e Wang \(2022\)](#), [Leroy et al. \(2023\)](#), [Leroy et al. \(2024\)](#) e [Portela et al. \(2025\)](#).

Muitas investigações relativas à degradação incorporam a quantificação da degradação física em relação ao tempo. Essas análises frequentemente distinguem-se em duas categorias principais, que se diferenciam pela maneira como descrevem o fenômeno de falha: modelos de limiar e modelos de choque. Neste estudo, seguiremos a primeira categoria, caracterizada pela presença de um componente que manifesta uma perda de desempenho quando o nível de degradação ultrapassa pela primeira vez um limiar predeterminado. Esse fenômeno é comumente referido como “falha leve” e geralmente resulta no desligamento da unidade ([LEHMANN, 2010](#)). Dentro da classe dos modelos de limiar, incluem-se os modelos baseados em processos estocásticos.

Os modelos de processos estocásticos representam a degradação ao longo do tempo como um processo aleatório. [Gorjian et al. \(2010\)](#) realizaram uma análise crítica das vantagens e limitações inerentes aos modelos de degradação. Na literatura dedicada a esses modelos, [Eghbali e Elsayed \(2001\)](#) definiram a taxa de degradação como uma função do risco de degradação, expressa em termos do tempo e da medida de degradação. Por sua vez, [Zuo, Jiang e Yam \(1999\)](#) introduziram abordagens para a modelagem da confiabilidade baseadas em modelos de processo aleatório e modelo de caminho geral.

Os modelos de degradação fundamentados em processos estocásticos são notadamente intuitivos, uma vez que a degradação se caracteriza como um processo contínuo de desgaste ao longo do tempo. Sob a premissa de uma acumulação aditiva da degradação, modelos clássicos englobam processos Gaussianos inversos, processos Gama, processos de Wiener, entre outros.

Muitos estudos na literatura científica empregam abordagens que pressupõem que os caminhos de degradação sigam o processo de Wiener. Por exemplo, [Wang \(2010\)](#) propôs um modelo que utiliza um processo de Wiener com efeitos aleatórios para analisar dados de degradação, enquanto [Doksum \(1991\)](#) utilizou um processo de Wiener incorporando fatores de aceleração. Além disso, na pesquisa acadêmica, é comum encontrar estudos que fazem uso de processos de Wiener multivariados ([WHITMORE; CROWDER; LAWLESS, 1998](#); [XU et al., 2018](#); [DONG; CUI; SI, 2020](#); [LEROY et al., 2024](#)). A maioria dessas pesquisas concentra-se na investigação de processos de degradação bivariados. Como exemplo, [Hong, Ye e Ling \(2018\)](#) construíram um modelo de processo de degradação a partir de dois processos de Wiener

univariados que compartilham um ruído comum.

A ideia de construir modelos de processos de degradação multivariados é destacada por Wang *et al.* (2021a), que considera diversas CQ em um mesmo sistema. Nesse contexto, a degradação do sistema pode ser capturada de maneira mais abrangente, levando em consideração características como desgaste, rachaduras e vibração. Esse trabalho oferece duas estruturas integradas de modelagem de processos de degradação multivariados, contemplando efeitos de manutenção imperfeita e covariáveis que variam com o tempo, tendo como base o processo de Wiener multivariado. Já Leroy *et al.* (2023) dedicam-se especificamente à parte inferencial, investigando diferentes cenários de estimação de acordo com o conjunto de observações disponíveis.

Entretanto, uma particularidade intrínseca ao processo de Wiener é que o caminho de degradação não é necessariamente monótono, característica que, em muitas aplicações, pode não ter grande relevância. Por isso, torna-se necessário explorar outras abordagens que incorporem a monotonicidade, como os processos Gama e Gaussiano inverso.

O processo Gama é amplamente discutido na literatura acadêmica. Por exemplo, Park e Padgett (2005) apresentam novos modelos de degradação que incorporam variáveis aceleradoras em processos estocásticos. Noortwijk (2009) verificaram que o modelo de processo Gama oferece vantagens em relação aos modelos de variáveis aleatórias, uma vez que incorpora a estrutura temporal inerente aos dados de degradação. Por outro lado, Wang (2008) concentrou-se na proposição e investigação de um método de estimação baseado em pseudoverossimilhança semiparamétrica para modelar dados de degradação, utilizando o processo Gama associado a um modelo de efeitos aleatórios. Para estudos mais recentes que empregam o processo Gama, veja, por exemplo, Jiang, Wang e Wu (2019), Wang *et al.* (2021b) e Song (2024).

Uma abordagem alternativa que enfatiza a modelagem da degradação com trajetórias monótonas é o processo Gaussiano inverso. A literatura acadêmica apresenta estudos relevantes nesse contexto. Por exemplo, Morita (2017) propôs diversas metodologias para análise de dados de degradação com base na distribuição Gaussiana inversa, incluindo o modelo de taxa de deterioração Gaussiano inverso e a investigação de suas propriedades assintóticas. Ye e Chen (2014) exploraram o processo Gaussiano inverso como um limite de um processo de Poisson composto. Em uma abordagem bayesiana para caracterizar o crescimento de defeitos de corrosão em dutos de energia, Qin, Zhang e Zhou (2013) introduziram um modelo baseado em processo Gaussiano inverso. Além disso, Wang e Xu (2010) propuseram um processo Gaussiano inverso com a inclusão de efeitos aleatórios e covariáveis em sua estrutura de modelagem.

Estudos mais recentes ampliam o uso do processo Gaussiano inverso para contextos de testes acelerados. Por exemplo, Ma *et al.* (2021) desenvolveram um plano ótimo de teste híbrido que combina dados de *Accelerated Life Testing* (ALT) e *Accelerated Degradation Testing* (ADT). O modelo utiliza o processo Gaussiano inverso para representar simultaneamente a degradação e o tempo de vida, maximizando a precisão na estimação de quantis sob condições normais

de uso. Por outro lado, [Duan e Wang \(2018\)](#) propuseram um modelo bivariado de degradação acelerada sob estresse constante, também baseado no processo Gaussiano inverso, considerando duas características de qualidade correlacionadas por meio de uma cópula de Frank e realizando inferência bayesiana via MCMC. Por fim, [Fan, Dong e Peng \(2023\)](#) apresentaram uma análise completa de degradação sob uma perspectiva bayesiana, empregando processos Gaussianos inversos e incorporando informações *a priori* para melhorar a inferência de tempos de falha, destacando a aplicabilidade do método mesmo em tamanhos amostrais reduzidos.

A degradação do desempenho de um sistema resulta de uma complexa interação entre fatores internos e externos. Os fatores internos englobam a deterioração progressiva dos componentes do sistema, enquanto os fatores externos estão associados a variáveis ambientais e de operação. Para alcançar uma estimativa de confiabilidade mais precisa, é essencial considerar a diversidade intrínseca dos sistemas.

Nesse contexto, a introdução do termo de fragilidade nos modelos visa incorporar efeitos aleatórios que contemplem a heterogeneidade não observada, a dependência entre observações de um mesmo sistema e a influência de fatores não identificados ou não mensuráveis, tanto no contexto de dados de falha quanto de dados de degradação. Conforme delineado em [Morita \(2017\)](#), um modelo de processo Gaussiano inverso com fragilidade emerge como uma abordagem relevante, reconhecendo que a fragilidade constitui uma ferramenta eficaz para explorar a influência de covariáveis não observadas.

O termo de fragilidade é independente do tempo, podendo manifestar-se de diferentes maneiras em relação à intensidade do processo de degradação. É comum observar que a fragilidade pode ser incorporada aos modelos de forma aditiva ou multiplicativa, dependendo do contexto e das características do sistema analisado. Vale ressaltar que os modelos que incorporam a fragilidade são extremamente valiosos na modelagem de dados envolvendo tempos de falha e degradação, independentemente de serem sistemas em série ou em paralelo ([OAKES, 1989](#)).

Dentro do contexto da análise de degradação, destacam-se estudos nos quais o termo de fragilidade foi incorporado. [Lin, Pulido e Asplund \(2014\)](#) descreveram um modelo de Tempo de Falha Acelerado com fragilidade para analisar a degradação das rodas de locomotivas, empregando a fragilidade Gama como componente essencial. No mesmo contexto, [Morita et al. \(2021\)](#) apresentaram um modelo baseado no processo Gaussiano inverso com inclusão da fragilidade Gama e Gaussiana inversa. O estudo realizou uma análise comparativa, por meio de simulações, entre o modelo Gaussiano inverso tradicional e o modelo com fragilidade, e concluiu que a inclusão da fragilidade impacta significativamente as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança, demonstrando a importância de considerar esse elemento nos modelos de degradação.

A obtenção de estimativas precisas para os parâmetros do processo de degradação e para os efeitos das ações de manutenção é fundamental, uma vez que tais estimativas desempenham papel importante na definição e otimização das estratégias de manutenção. Com parâmetros bem

ajustados, torna-se possível antecipar o comportamento futuro do sistema, permitindo adaptar a frequência das intervenções e planejar de forma mais eficiente inspeções e revisões gerais. Este estudo tem como objetivo central avançar na pesquisa sobre a confiabilidade de sistemas reparáveis — considerando tanto dados de falha quanto de degradação —, com ênfase especial na modelagem de processos de degradação em sistemas reparáveis sujeitos a reparos imperfeitos.

1.1 Objetivos

O objetivo deste estudo é investigar e propor metodologias para a modelagem de dados de falha e/ou dados de degradação em sistemas reparáveis. De forma mais detalhada, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Incorporar o termo de fragilidade na modelagem de dados de falha em sistemas reparáveis, de modo a contemplar a heterogeneidade não observada.
- Investigar a modelagem de dados de degradação em sistemas reparáveis, considerando diferentes processos de degradação.
- Propor modelos de degradação para sistemas reparáveis, considerando diferentes políticas de manutenção preventiva.
- Desenvolver modelos de degradação acelerada para sistemas reparáveis submetidos a ações de manutenção imperfeitas.

1.2 Visão geral dos capítulos

A tese está estruturada em cinco capítulos, além da introdução e das referências bibliográficas.

- No Capítulo 2, realizamos uma revisão abrangente das principais metodologias adotadas, revisitando conceitos e definições essenciais para a compreensão dos capítulos seguintes.
- O Capítulo 3 se dedica à investigação do termo de fragilidade no contexto de dados de tempo de falha. Propomos um modelo para sistemas reparáveis sob reparo mínimo, com fragilidade gama não central, visando compreender como esse termo é incorporado na modelagem e qual seu impacto nas principais funções de interesse.
- No Capítulo 4, apresentamos a metodologia para a modelagem de dados de degradação com ações de manutenção imperfeitas. Em seguida, propomos um modelo de caminho de degradação baseado em um processo Gaussiano inverso, derivamos suas funções e conduzimos estudos de simulação e aplicação.

- No Capítulo 5, avançamos na metodologia do capítulo anterior, incorporando testes de degradação acelerada. Investigamos suas propriedades assintóticas e discutimos sua aplicabilidade.
- O Capítulo 6 apresenta um resumo conciso dos principais resultados obtidos nesta tese. Além disso, são oferecidas sugestões para pesquisas futuras, visando ampliar a modelagem proposta para cenários mais complexos.

A Figura 1 apresenta um panorama geral da tese, incluindo a metodologia adotada, os modelos propostos, os aspectos considerados e as principais contribuições e propostas desenvolvidas em cada capítulo.

1.3 Produção

Os resultados desta tese estão organizados em três artigos científicos. O primeiro artigo foi publicado na revista *Brazilian Journal of Biometrics*. O segundo artigo foi publicado na revista *Reliability Engineering & System Safety*. O terceiro artigo encontra-se atualmente em processo de revisão pelos autores.

A seguir, apresenta-se a lista dos artigos elaborados, os quais estão diretamente relacionados aos capítulos subsequentes.

Portela, A. C. T., de Brito, É. S., Tomazella, V. L. D., Diniz, C. A. R., & Ferreira, P. H. **Reliability of repairable systems with Non-Central Gamma frailty**. (Este artigo, referente ao Capítulo 3, foi publicado no *Brazilian Journal of Biometrics*, 2024, e recebeu menção honrosa – “*The 2024 Best Paper Awarded – Honorable Mention*”).

Portela, A. C. T., Morita, L. H., Tomazella, V., Toledo, M. L., Ferreira, P. H., & Louzada, F. **Non-constant imperfect maintenance effects in Inverse Gaussian degradation models for multiple repairable systems**. (Esse artigo, referente ao Capítulo 4, foi publicado em *Reliability Engineering & System Safety*, 2025).

Portela, A. C. T., Morita, L. H., Tomazella, V., Gonzatto, O. & Louzada, F. **Effects of imperfect maintenance on accelerated degradation models for multiple repairable systems** (Esse artigo, referente ao Capítulo 5, está passando por revisão interna pelos autores).

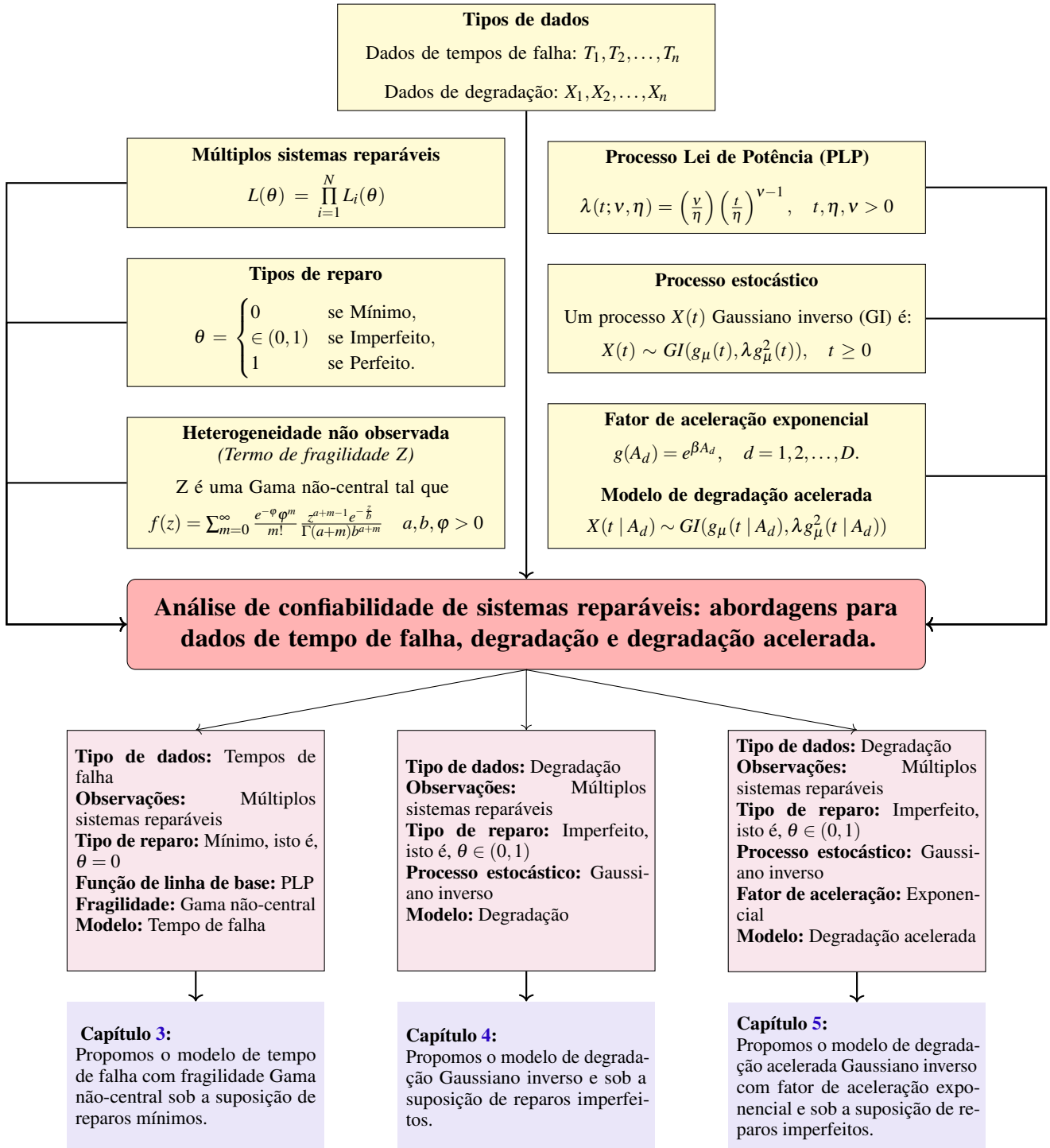


Figura 1 – Estrutura geral relacionando os modelos propostos e os capítulos da tese.

BACKGROUND

Neste capítulo, apresentamos conceitos introdutórios e de revisão considerados fundamentais no campo da confiabilidade de sistemas reparáveis, com o objetivo de oferecer a base necessária para os estudos desenvolvidos ao longo desta tese. Inicialmente, discutimos os modelos para processos de contagem, seguidos pelos conceitos de sistemas reparáveis e pelos diferentes tipos de reparo que serão considerados nas abordagens adotadas. Em seguida, abordamos os modelos de fragilidade. Por fim, direcionamos a atenção para os dados de degradação, aprofundando a compreensão sobre a estrutura desses dados, os processos estocásticos de linha de base, o modelo de redução aritmética, e finalizamos com os modelos de degradação acelerada.

2.1 Modelos para Processos de Contagem

A modelagem estatística usualmente empregada para sistemas reparáveis faz uso de processos de contagem, os quais constituem processos estocásticos destinados a registrar o número de ocorrências de um evento de interesse ao longo do tempo — neste caso, o número de falhas. A seguir, detalhamos as principais definições.

2.1.1 *Processo de Contagem*

Seja T uma variável aleatória que representa o tempo de falha em um determinado sistema reparável, considerando que o experimento tem início em $t_0 = 0$. Os eventos ocorrem aleatoriamente ao longo do tempo e T_i registra o instante da i -ésima falha. Assim, no intervalo $[0, t]$, o número total de falhas observadas é representado por $N(t)$, sendo este um processo de contagem (BASU; RIGDON, 2000). Podemos definir essa sequência de variáveis aleatórias indexadas no tempo como um processo estocástico; para mais detalhes, consultar Ross (1996).

Definição 1. (Processo de contagem) Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ é uma variável aleatória que denota o número de ocorrências do evento de interesse no intervalo de tempo $[0, t]$

e deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $N(t) \geq 0$ e $N(0) = 0$;
2. $N(t)$ assume valores inteiros;
3. a função $t \mapsto N(t)$ é contínua à direita;
4. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [N(t + \Delta t) - N(t)] = 0$.

Além disso, observa-se que, para quaisquer $s, t > 0$, temos $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$. Assim, $N(s, t] = N(t) - N(s)$ representa o número de eventos que ocorreram no intervalo $(s, t]$. Dessa forma, podemos analisar os eventos do processo de contagem tanto por meio de $\{N(t)\}$ quanto via $\{T_{N(t)}\}_{t \geq 0}$ ou ainda por $\{H_i\}$, onde $H_i = T_i - T_{i-1}$, para $i = 1, 2, \dots, N(t)$.

O processo de contagem permite compreender a frequência com que os eventos se manifestam. Para representar e quantificar essa característica, utiliza-se a função de intensidade do processo de contagem, expressa por

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1 \mid \mathcal{F}_t^-]}{\Delta t},$$

em que o histórico de todos os eventos ocorridos antes do instante t é representado por \mathcal{F}_t^- . Assim, a função média acumulada, ou seja, o número esperado de ocorrências no intervalo $(0, t]$, é dada por

$$\Lambda(t) = E[N(t)] = \int_0^t \lambda(u) du.$$

Para uma análise mais completa do comportamento desses processos, destacam-se duas propriedades fundamentais: incrementos estacionários e incrementos independentes. No que se refere aos incrementos estacionários, um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ apresenta essa propriedade quando, para quaisquer tempos t e s , com $0 \leq s < t$, e para qualquer constante $h > 0$, as diferenças $N(t) - N(s)$ e $N(t+h) - N(s+h)$ possuem a mesma distribuição. Em outras palavras, a distribuição do número de ocorrências em um intervalo específico depende apenas da duração desse intervalo e não de sua posição no tempo.

Quanto aos incrementos independentes, um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ apresenta essa propriedade quando, para qualquer sequência de tempos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l$, com $l = 2, 3, \dots$, as variáveis aleatórias $N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_l) - N(t_{l-1})$ são independentes. Isso significa que um grande número de eventos ocorridos em um intervalo de tempo específico não influencia o comportamento das falhas futuras. Essa é uma propriedade característica do Processo de Poisson, como será definido a seguir.

2.1.2 Processo de Poisson

O Processo de Poisson é um caso particular do processo de contagem, utilizado na modelagem do número de eventos ao longo do tempo, no qual os incrementos são independentes.

Definição 2. (Processo de Poisson) Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com intensidade $\lambda(t) > 0$ se satisfizer as seguintes propriedades:

1. $N(0) = 0$;
2. $N(t)$ possui incrementos independentes;
3. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t + \Delta t) - N(t) = 1]}{\Delta t} = \lambda(t)$;
4. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2]}{\Delta t} = 0$.

Portanto, pela quarta propriedade acima, elimina-se a possibilidade de falhas simultâneas. Uma implicação direta dessa condição é que o número de eventos em qualquer intervalo $(0, t]$ segue uma distribuição de Poisson com média $\Lambda(t)$, ou seja:

$$P[N(t) = n] = \frac{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}}{n!},$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$; para mais detalhes, consultar [Basu e Rigdon \(2000\)](#).

Conforme a definição da função de intensidade $\lambda(t)$, o processo de Poisson pode ser classificado de duas maneiras. A primeira é o Processo de Poisson Homogêneo (PPH), quando a intensidade $\lambda(t)$ é constante, isto é, $\lambda(t) = \lambda, t \geq 0$. Conforme [Ascher e Feingold \(1984\)](#), o PPH deve ser aplicado com cautela, pois a suposição de intensidade constante não é adequada para modelar sistemas que estejam melhorando ou se deteriorando. A segunda é o Processo de Poisson Não Homogêneo (PPNH), quando a intensidade $\lambda(t)$ não é constante, o qual definiremos a seguir.

2.1.3 Processo de Poisson Não Homogêneo

A relevância do PPNH se manifesta por não exigir a condição de incrementos estacionários. Além disso, a propriedade de incrementos independentes do Processo de Poisson implica que a taxa $\lambda(t)$ não é influenciada pelo histórico do processo até o instante t , conforme a definição a seguir:

Definição 3. (Processo de Poisson Não Homogêneo) Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ é um PPNH com função de intensidade $\lambda(t), t \geq 0$, se satisfizer as seguintes propriedades:

1. $N(0) = 0$;

2. o processo possui incrementos independentes;
3. $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$;
4. $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$.

A função $o(h)$ representa um termo infinitesimal associado à distribuição de pontos em pequenos intervalos de tempo, de modo que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Um caso paramétrico particular do PPNH, amplamente utilizado em sistemas reparáveis, é o Processo de Lei de Potência (PLP), adotado no Capítulo 3. No entanto, outros modelos paramétricos, como o linear e o não linear, bem como modelos não paramétricos, também poderiam ser considerados.

2.2 Sistemas reparáveis

O avanço contínuo da tecnologia e a crescente complexidade dos sistemas têm despertado considerável interesse no estudo de sua confiabilidade, especialmente no caso daqueles que são passíveis de reparo.

Um sistema pode ser conceituado como um conjunto de elementos (subsistemas e/ou componentes) organizados de forma integrada para executar uma atividade específica de interesse. Esses sistemas podem ser classificados como reparáveis ou não reparáveis. Assim, a escolha da metodologia estatística utilizada na análise de dados provenientes de um sistema deve considerar cuidadosamente as características particulares desse sistema, sendo determinada em consonância com a natureza do problema em investigação (JUNIOR, 2021).

Ao se analisar um sistema — como uma máquina, um dispositivo eletrônico ou um software — o conceito de reparabilidade refere-se à capacidade desse sistema de ser restaurado de forma eficaz após uma falha, por meio de procedimentos de reparo, sem a necessidade de substituição completa, conforme definido por Ascher e Feingold (1984). Em contrapartida, um sistema é considerado não reparável quando, após uma única falha, ele é descartado. Assim, em um contexto de falha, sistemas reparáveis podem ser restabelecidos ao pleno funcionamento mediante ações de reparo, assumindo-se que tais ações são instantâneas e que o tempo de reparo é desprezível (TOLEDO *et al.*, 2015).

É importante ressaltar que a abordagem metodológica de modelagem estatística adotada em cada um desses cenários é distinta (BASU; RIGDON, 2000). Isso se deve ao fato de que, nos sistemas reparáveis, a análise está intrinsecamente associada a eventos recorrentes, pois se admite a ocorrência de múltiplas falhas em um mesmo sistema ao longo do tempo, além de se considerar o efeito dos reparos realizados após cada falha.

Ao tratar de sistemas reparáveis e não reparáveis, é essencial reconhecer a importância dos conceitos de censura e truncamento, que devem ser claramente diferenciados, embora

compartilhem certas características. Em sistemas não reparáveis, a censura está relacionada à obtenção de informações parciais sobre a variável resposta. Já nos sistemas reparáveis, aplica-se o conceito de truncamento, que pode ocorrer de duas formas: truncamento por tempo, quando a coleta de dados é encerrada em um instante temporal previamente definido; e truncamento por falha, quando a coleta é finalizada assim que um número preestabelecido de falhas ocorre.

O âmbito de pesquisa desta tese está diretamente associado aos sistemas reparáveis, pois, após cada falha, o sistema é restabelecido por meio de uma intervenção de reparo. Além disso, no contexto de degradação, também é possível considerar reparos a cada ação de manutenção preventiva. O impacto dessas ações de reparo no desempenho de um sistema reparável constitui um elemento marcante em diversos modelos, já que esses reparos podem gerar efeitos distintos sobre a confiabilidade do sistema.

Cada ação de reparo traz consigo características próprias, ligadas ao comportamento do tipo de falha observada. Por exemplo, se a intervenção devolve o sistema exatamente ao estado em que se encontrava antes da falha, dizemos que se trata de um Reparo Mínimo (RM), ou *As Bad As Old* (ABAO), que significa, de forma simples, “tão ruim quanto velho”. Por outro lado, se o reparo restaura o sistema a um estado equivalente a novo, os intervalos entre falhas passam a ser independentes e identicamente distribuídos. Esse tipo de intervenção corresponde ao Reparo Perfeito (RP), ou *As Good As New* (AGAN), que significa “tão bom quanto novo”. Já os modelos de RI descrevem situações em que a intervenção deixa o sistema em um estado intermediário entre ABAO e AGAN, o que, em muitos contextos, reflete melhor a realidade.

A seguir, serão apresentadas as funções de intensidade associadas a cada tipo de reparo. Ao longo dos capítulos, sempre que necessário, detalharemos o tipo de reparo adotado em cada abordagem.

2.2.1 Reparo mínimo

O RM é um dos tipos de reparos amplamente estudados na literatura. Essa abordagem é comumente empregada para analisar o comportamento das falhas em sistemas nos quais o reparo visa, prioritariamente, restaurar o componente causador da falha, devido à necessidade imediata de retomar a operação do sistema (KIJIMA, 1989).

Este reparo se destaca por sua estreita relação com a metodologia estatística baseada no PPNH, em que a probabilidade de ocorrência de falha em intervalos de tempo curtos não é influenciada pelo histórico de falhas, mas sim pela falha mais recente (RAUSAND; HOYLAND, 2003). Nesse contexto, a função de intensidade depende apenas do tempo, o que significa que a intensidade condicional do processo de falha imediatamente após uma falha é a mesma daquela antes da falha. Consequentemente, o sistema se comporta como se nenhuma falha tivesse ocorrido.

Portanto, o modelo de RM caracteriza-se como um processo no qual a função de intensi-

dade corresponde exatamente à intensidade do PPNH, sendo expressa da seguinte forma:

$$\lambda_{RM}(t) = \lambda(t),$$

em que $\lambda(t)$ é a função de intensidade do PPNH.

2.2.2 *Reparo Perfeito*

No contexto de um RP, é comum a substituição de um componente essencial ao funcionamento de um sistema. Como resultado, o sistema é restaurado a um estado considerado equivalente ao de um sistema novo; ou seja, o reparo devolve ao sistema condições superiores às existentes antes da falha. Este conceito é frequentemente denominado na literatura como *AGAN*, indicando que, após um RP, o sistema é tão eficiente quanto um sistema recém-fabricado (KIJIMA, 1989).

Nesse cenário, o processo de falha é modelado como um processo de renovação, uma vez que a probabilidade de falha é reiniciada a cada ocorrência de reparo. A caracterização do processo de renovação pode ser feita por meio da análise das distribuições conjuntas do processo de contagem $N(t)$. Uma abordagem simplificada consiste em analisar os intervalos entre os tempos de falha, considerados como variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.).

Dessa forma, podemos definir a função de intensidade de falha do modelo de RP como:

$$\lambda_{RP}(t) = \lambda(t - T_{N(t)}),$$

em que $\lambda(\cdot)$ representa a função de intensidade inicial, $N(t)$ denota o número de falhas ocorridas até o instante t , $T_{N(t)}$ representa o tempo decorrido até a ocorrência da $N(t)$ -ésima falha e, portanto, $t - T_{N(t)}$ corresponde ao tempo transcorrido desde a última falha antes de t .

2.2.3 *Reparo Imperfeito*

Os modelos de RI ocupam uma posição intermediária entre os RM e RP. Uma característica marcante desses modelos é a introdução do conceito de idade virtual, que é uma função positiva usada para representar tanto a idade real do sistema quanto seu histórico de falhas (KIJIMA, 1989). Nesse contexto, a idade virtual é denotada por $V_t = V(t; N(t); T_1, \dots, T_{N(t)})$. Os modelos de idade virtual introduzem um parâmetro, aqui designado como θ , com $0 \leq \theta \leq 1$, que quantifica o grau de eficiência do reparo.

Esses modelos podem ser classificados em duas categorias: *Arithmetic Reduction of Age* (ARA) – Redução Aritmética de Idade e *Arithmetic Reduction of Intensity* (ARI) – Redução Aritmética de Intensidade, conforme proposto por Doyen e Gaudoin (2004). Ambas as categorias são caracterizadas pela noção de memória, representada aqui por m , que corresponde ao número máximo de falhas anteriores consideradas no cálculo da função de intensidade.

A memória m indica que cada ação de reparo reduz o desgaste do sistema ocorrido após as últimas m falhas. Por exemplo, se $m = 1$, cada reparo reduz o desgaste ocorrido após a última falha. Assim, a função de intensidade do sistema é recalculada após cada falha, levando em conta os m eventos de falhas mais recentes.

2.2.3.1 Modelos ARA

A classe de modelos *ARA* considera o impacto do reparo por meio de uma redução na idade virtual do sistema. Em outras palavras, o reparo busca restaurar o sistema de forma que sua intensidade no tempo t seja igual à intensidade inicial no tempo V_t , onde $V_t < t$.

Denotando por $\lambda(t)$ a função de intensidade inicial, a função de intensidade de falha do modelo *ARA* com memória m , sob o efeito do parâmetro de reparo θ , é definida como $\lambda_{ARA_m}(t) = \lambda(V_t)$. Essa função depende da idade virtual e representa a intensidade de falha do sistema no contexto do modelo *ARA*. Assim, a função de intensidade de falha é expressa por:

$$\lambda_{ARA_m}(t) = \lambda \left(t - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, N(t)-1)} \theta^p T_{N(t)-p} \right).$$

Atribuindo memória $m = 1$ e $m = \infty$, obtêm-se as duas classes extremas dos modelos *ARA*, denominadas, respectivamente, ARA_1 e ARA_∞ . Além disso, vale ressaltar que os modelos *RP* e *RM* são casos particulares dos modelos *ARA* para $\theta = 0$ e $\theta = 1$, respectivamente.

2.2.3.2 Modelos ARI

Nos modelos *ARI*, considera-se que o efeito do reparo é uma redução na intensidade de falha. É importante destacar que, a seguir, focamos exclusivamente na redução aritmética de intensidade, embora outras abordagens possam ser adotadas.

A essência dessa modelagem está na ideia de que cada ação de reparo diminui a intensidade de falha de uma quantidade determinada, que depende do histórico de falhas do processo. Além disso, após a ocorrência de uma falha, a taxa de desgaste retorna ao nível anterior, o que implica que, entre duas falhas, a intensidade de falha permanece paralela à intensidade inicial.

Considerando uma memória m , assim como definida anteriormente no modelo *ARA*, o modelo ARI_m pressupõe que o reparo reduz o aumento na intensidade de falha desde as últimas m falhas. Dessa forma, a função de intensidade de falha para um modelo da classe ARI_m pode ser definida como:

$$\lambda_{ARI_m}(t) = \lambda(t) - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, N(t)-1)} \theta^p \lambda(T_{N(t)-p}),$$

em que $\lambda(t)$ é a função de intensidade inicial do processo.

2.3 Modelos de Fragilidade

A inclusão do conceito de fragilidade no modelo tem como finalidade incorporar efeitos aleatórios que representem a influência de variáveis não observáveis ou não mensuráveis, tanto em cenários com dados de falhas quanto em cenários com dados de degradação. Dessa forma, o modelo permite avaliar o impacto de covariáveis que, por algum motivo, não foram observadas durante a condução do experimento.

As primeiras investigações sobre a presença de heterogeneidade não observada foram conduzidas por [Vaupel, Manton e Stallard \(1979\)](#) e [Hougaard \(1984\)](#), nos quais foi introduzida uma componente estocástica, também conhecida como fragilidade, em um modelo de sobrevivência de referência. Desde então, diversos estudos vêm sendo desenvolvidos sobre modelos de fragilidade ver [Morita \(2017\)](#), [Junior \(2021\)](#), [Soares *et al.* \(2022\)](#), [Brito, Tomazella e Ferreira \(2022\)](#), [Pereira *et al.* \(2024\)](#), [Brito *et al.* \(2024\)](#) e [Portela *et al.* \(2024\)](#).

A ideia central consiste em considerar que diferentes sistemas apresentam diferentes níveis de fragilidade e, conseqüentemente, os mais frágeis tendem a falhar mais cedo do que os menos frágeis. Importa salientar que, embora o comportamento observado da função de intensidade na amostra descreva uma tendência global ao longo do tempo, as intensidades individuais podem refletir padrões distintos. Por exemplo, no início do estudo pode ocorrer uma elevada taxa de falhas devido à presença de unidades mais frágeis, levando a uma diminuição subsequente da função de intensidade. No entanto, as intensidades correspondentes aos indivíduos que permanecem sob observação podem indicar um comportamento crescente ([WIENKE, 2010](#)).

Assim, o conceito de um modelo de fragilidade pode ser entendido como uma extensão do modelo de Cox ([COX, 1972](#)), incorporando um termo de fragilidade para quantificar a heterogeneidade não observada entre indivíduos de uma mesma população ou agrupados em um mesmo *cluster*. Esse termo pode ser incluído de diferentes maneiras, sendo as formas mais usuais a aditiva e a multiplicativa. Neste estudo, adotou-se a estrutura multiplicativa, na qual a intensidade é composta por dois elementos essenciais: uma função de intensidade de linha de base, que pode ser paramétrica ou não paramétrica, e um termo de fragilidade, que incorpora o componente aleatório.

A fragilidade, por sua vez, é uma realização positiva de uma variável aleatória latente, denotada por Z . Na literatura, é comumente modelada como uma variável contínua, positiva e independente do tempo, cuja distribuição de probabilidade capture adequadamente o caráter estocástico do efeito aleatório. Entre as distribuições candidatas mais exploradas destacam-se a Gama, a Gaussiana inversa, a Weibull e a Log-normal, em razão de suas propriedades matemáticas convenientes. No Capítulo 3 investigaremos a distribuição Gama não-central. Além disso, modelos de fragilidade podem apresentar problemas de identificabilidade. Entre as condições são necessárias para evitá-los; destaca-se é que a esperança matemática de Z seja igual a 1, o que garante a identificação única do efeito aleatório associado à fragilidade ([ELBERS; RIDDER,](#)

1982).

A presença do termo de fragilidade pode resultar em um aumento da intensidade quando $z > 1$, em uma redução quando $z < 1$ ou, ainda, em uma intensidade inalterada quando $z = 1$, conforme discutido em [Wienke \(2010\)](#).

Considerando o modelo de fragilidade multiplicativo, tem-se que a função de intensidade de falha é dada por:

$$\lambda(t|z) = z\lambda_0(t), \quad t > 0,$$

em que z é a variável de fragilidade, com distribuição conhecida, e $\lambda_0(t)$ é a função de intensidade de linha de base. O modelo usual é recuperado ao se considerar $z = 1$. Para mais detalhes sobre a escolha da distribuição para Z , consultar [Duchateau e Janssen \(2008\)](#).

A função de confiabilidade incondicional é obtida a partir da função de confiabilidade condicional $R(t|z)$, integrando-se a fragilidade. Assim,

$$R(t) = E[R(t|z)] = \int_0^{\infty} e^{-z\Lambda_0(t)} f(z) dz = \mathcal{L}(\Lambda_0(t)).$$

Observe que $R(t)$ pode ser obtida por meio da transformada de Laplace. Dada uma função $g(x)$, a transformada de Laplace $\mathcal{L}(\cdot)$ no ponto p é expressa por:

$$\mathcal{L}(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} g(x) dx.$$

Logo, fazendo $g(x) = f(z)$ e $p = \Lambda_0(t)$, verifica-se que ambas as funções possuem a mesma estrutura. Em outras palavras, a função de confiabilidade $R(t)$ corresponde à transformada de Laplace no ponto $\Lambda_0(t)$. Por esse motivo, distribuições para Z cuja transformada de Laplace seja de fácil manipulação são preferíveis.

As derivadas da transformada de Laplace podem ser utilizadas para obter resultados gerais sobre a distribuição de confiabilidade incondicional, bastando recorrer às relações já conhecidas entre as funções na análise de confiabilidade. Sempre que necessário, nos próximos capítulos detalharemos esses cálculos.

Vale ressaltar que tais modelos podem ser aplicados tanto em um contexto univariado quanto multivariado, sendo que a interpretação da fragilidade difere entre esses cenários: no primeiro caso, ela representa uma medida de heterogeneidade entre os indivíduos; no segundo, assume também um papel de medida de associação, conforme abordado por [Wienke \(2010\)](#).

2.4 Modelos para dados de degradação

Em sistemas de alta confiabilidade, a ocorrência de falhas é praticamente inexistente; portanto, as observações relacionadas à diminuição do desempenho, isto é, as medições da degradação, contêm informações úteis sobre o sistema e fornecem dados relevantes para a análise de sua confiabilidade nesses cenários.

A degradação corresponde a uma queda nos níveis de desempenho, confiabilidade e longevidade dos sistemas. A magnitude dessa deterioração em um sistema é representada por meio de um processo de degradação, que pode ser adequadamente descrito com a aplicação de um modelo estocástico. Entre esses modelos, o processo de Wiener (PW) é amplamente utilizado na área. Entretanto, em algumas situações com trajetórias monótonas, o PW não descreve de forma satisfatória a degradação; nesses casos, o processo Gaussiano inverso (PGI) torna-se uma alternativa. A seguir, detalhamos as principais definições nesse contexto.

2.4.1 Dados de degradação

Os dados de degradação consistem em informações que refletem o estado debilitado de um sistema, abrangendo aspectos como deterioração, desgaste ou perda de qualidade. Esses dados desempenham um papel fundamental no monitoramento da degradação do sistema ao longo do tempo e fornecem informações úteis para a identificação das causas subjacentes à degradação.

Considere n unidades experimentais observadas durante um período fixo de tempo, com tempos de inspeção $0 = t_{i,0} < t_{i,1} < t_{i,2} < \dots < t_{i,n_i}$. Para cada unidade i , têm-se as medidas de degradação observadas nos tempos de inspeção, isto é, o caminho de degradação $\mathbf{X}_i \equiv [X_i(t_{i,1}), X_i(t_{i,2}), \dots, X_i(t_{i,n_i})]$, conforme na Tabela 1. Vale ressaltar que, em geral, os tempos de inspeção são equidistantes.

Tabela 1 – Representação geral dos dados de degradação

Unidade	Tempos de inspeção	Caminho de degradação
1	$0 = t_{1,0}, t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,n_1}$	$\mathbf{X}_1 \equiv [X_1(t_{1,1}), X_1(t_{1,2}), \dots, X_1(t_{1,n_1})]$
2	$0 = t_{2,0}, t_{2,1}, t_{2,2}, \dots, t_{2,n_2}$	$\mathbf{X}_2 \equiv [X_2(t_{2,1}), X_2(t_{2,2}), \dots, X_2(t_{2,n_2})]$
...
n	$0 = t_{n,0}, t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,n_n}$	$\mathbf{X}_n \equiv [X_n(t_{n,1}), X_n(t_{n,2}), \dots, X_n(t_{n,n_n})]$

O caminho de degradação de uma característica de qualidade (CQ) específica é um processo estocástico de tempo contínuo, representado por $\{X(t), t \geq 0\}$. Em geral, a degradação tende a aumentar ao longo do tempo, o que permite definir o tempo de vida útil do sistema, denotado por T (ETMINAN *et al.*, 2022).

Definição 4. (Tempo de primeira passagem) O tempo de vida útil T é estabelecido como o primeiro momento em que o processo $X(t)$ ultrapassa um limite fixo L . O seu comportamento está sujeito às seguintes premissas:

1. O sistema começa a operar no instante $t_0 = 0$.
2. Após o início, o processo de degradação aumenta estocasticamente com o tempo.

3. Uma falha do sistema ocorre quando o nível de degradação excede o limite L .
4. T_L é o instante da falha do sistema, isto é, $T_L = \inf\{t \geq 0 \mid X(t) \geq L\}$.
5. O sistema é passível de reparo, e o tempo de reparo é considerado insignificante.
6. Um reparo imperfeito reduz o nível de degradação para $0 \leq r < L$.

A equação definida no item 4 é conhecida como o tempo de primeira passagem, desempenhando papel crucial na estimativa da vida útil remanescente e na definição de estratégias ótimas de manutenção, pois, através dela, conseguimos derivar a distribuição do tempo de falha. (NOORTWIJK, 2009).

As incertezas aleatórias de um processo de degradação podem ser caracterizadas por diferentes tipos de modelos probabilísticos. No contexto dos processos estocásticos, destacam-se os processos que serão detalhados a seguir.

2.4.2 Processo de Wiener

O processo de Wiener (PW), também conhecido como Movimento Browniano, representa um processo de Markov de tempo contínuo em que os estados evoluem ao longo de um intervalo contínuo de tempo. É um dos processos estocásticos mais utilizados na literatura e foi introduzido por Brown (1828).

Considere um sistema cujo caminho de degradação é descrito por $X(t)$. O PW com *drift* (desvio) é um processo estocástico contínuo $\{X(t), t > 0\}$ dado por

$$X(t) = \sigma g(t) + \xi B(g(t)),$$

em que σ é o parâmetro de *drift*, indicando a taxa média de degradação; ξ é o parâmetro de difusão; $g(t)$ é uma função crescente e monótona; e $B(\cdot)$ é o movimento browniano padrão, ou seja, $B(g(t)) \sim N(0, g(t))$.

Podemos ter interesse em Y , definido como o incremento no intervalo de tempo $\Delta t > 0$. Assim, $Y = \Delta X(t)$ é normalmente distribuído, com $E[Y] = \sigma \Delta g(t)$ e $\text{Var}[Y] = \xi^2 \Delta g(t)$, sendo que os incrementos são independentes e estacionários.

Com relação ao tempo de primeira passagem (Definição 4), um resultado apresentado por Chhikara (1988) estabelece que, para um PW com *drift* positivo, o tempo T_L segue uma distribuição Gaussiana inversa (GI), isto é,

$$T_L \sim GI\left(\frac{L}{\sigma}, \frac{L^2}{\xi^2}\right).$$

Além disso, o caminho médio do processo de degradação pode assumir diferentes formas. Quando $g(t) = t$, $X(t)$ apresenta um caminho médio linear σt ; caso contrário, seu caminho médio é não linear.

2.4.3 Processo Gaussiano Inverso

Um processo Gaussiano inverso (PGI) é um processo estocástico que segue a distribuição GI, também conhecida como distribuição de Wald. A distribuição GI é uma distribuição de probabilidade contínua, frequentemente utilizada para modelar o tempo até que um evento ocorra, sendo, portanto, adequada para a modelagem de variáveis contínuas não negativas (FOLKS; CHHIKARA, 1978).

Um PGI $\{X(t), t \geq 0\}$, com função média $g_\mu(t)$ e parâmetro de forma λ , é um processo estocástico de tempo contínuo dado por:

$$X(t) \sim GI(g_\mu(t), \lambda g_\mu^2(t)),$$

em que $g_\mu(t)$ é uma função crescente e monótona e $\lambda > 0$. Considerando $g_\mu(0) = 0$ e $X(0) = 0$, tem-se que $X(t)$ segue uma distribuição GI com média $g_\mu(t)$ e variância $\frac{g_\mu(t)}{\lambda}$.

Seja Y definido como o incremento no intervalo de tempo $\Delta t > 0$, isto é, $Y = \Delta X(t)$. Então, $Y \sim GI(\Delta g_\mu(t), \lambda [\Delta g_\mu(t)]^2)$, com incrementos independentes, sendo que $E[Y] = \Delta g_\mu(t)$ e $\text{Var}[Y] = \frac{\Delta g_\mu(t)}{\lambda}$.

Em relação ao tempo de primeira passagem (Definição 4), um resultado relevante é apresentado em Morita (2017) e Ye e Chen (2014). Nesse contexto, o tempo T_L é determinado considerando que a degradação acumulada $X(t)$ é equiparada à degradação incremental no intervalo $[0, t]$, enquanto $g_\mu(t)$ representa o incremento na função média do PGI nesse mesmo intervalo. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} F_{T_L}(t) &= 1 - F_{GI}(y = L \mid g_\mu(t), \lambda) \\ &= \Phi \left[-\sqrt{\frac{\lambda}{L}}(L - g_\mu(t)) \right] - e^{2\lambda g_\mu(t)} \Phi \left[-\sqrt{\frac{\lambda}{L}}(L + g_\mu(t)) \right], \end{aligned}$$

em que $F_{GI}(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da GI e $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

Portanto, para obter a função densidade de T_L , basta derivar a distribuição acumulada $F_{T_L}(t)$, ou seja, $f_{T_L}(t) = \frac{\partial F_{T_L}(t)}{\partial t}$. Vale ressaltar que, para valores grandes de $\lambda g_\mu(t)$ — especialmente em situações com valores elevados de t — a variável $X(t)$ pode ser aproximada por uma distribuição Normal, cuja média é $g_\mu(t)$ e a variância é $\frac{g_\mu(t)}{\lambda}$, conforme discutido por Chhikara (1988).

2.5 Redução Aritmética da Degradação

O modelo denominado *Arithmetic Reduction of Degradation* (ARD) – Redução Aritmética da Degradação, com memória um (ARD₁), é um caso particular do modelo ARD definido por Mercier e Castro (2019). Nesse contexto, assumir a eficiência da manutenção significa considerar

que uma ação de manutenção imperfeita remove apenas uma parte da degradação acumulada desde a última manutenção.

Considere que um sistema é observado de $t_0 = 0$ até um tempo específico $\tau_{k+1} = \tau$, e que as ações de manutenção (ou reparos) são realizadas nos tempos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$. Neste estudo, adotamos a suposição de considerar apenas os efeitos das ações de manutenção. Como consequência, a degradação potencial que ocorre durante as ações de reparo não é contabilizada, uma vez que o tempo de reparo é considerado insignificante e não impacta o processo geral de degradação.

Definimos $Z(t)$ como o nível de degradação no tempo t do sistema exposto a ações de manutenção, sendo $\{Z(t), t \geq 0\}$ o processo de degradação do sistema. Note que, neste cenário, temos dois processos de degradação: um que expressa o processo base, ou seja, o processo subjacente $\{X(t), t \geq 0\}$ sem ações de manutenção, e outro que incorpora os efeitos dessas ações (WANG *et al.*, 2021a; LEROY *et al.*, 2023; PORTELA *et al.*, 2025). Portanto, é necessário expressar $Z(t)$ em termos do processo de degradação subjacente $X(t)$, pois, por definição, o efeito da manutenção precisa ser incorporado ao processo base.

Antes da primeira manutenção, é intuitivo considerar que os processos $X(t)$ e $Z(t)$ são idênticos, já que o sistema ainda não foi submetido a nenhuma ação de manutenção. Assim, temos que, $\forall t \in [0, \tau_1[$, vale $Z(t) = X(t)$.

O efeito da primeira manutenção em τ_1 consiste em reduzir o nível de degradação $Z(\tau_1^-)$ por uma quantidade $\theta [Z(\tau_1^-) - Z(0)] = \theta Z(\tau_1^-)$. Considere ainda que $\theta \in [0, 1]$, que nesta expressão pode ser interpretado como um coeficiente de proporcionalidade, sendo também o parâmetro de efeito de manutenção. Como $Z(\tau_1^-)$ representa o nível de degradação imediatamente antes da primeira ação de manutenção, temos que $Z(\tau_1^-) = X(\tau_1)$. Assim, o nível de degradação logo após τ_1 é dado por $Z(\tau_1^+) = Z(\tau_1^-) - \theta Z(\tau_1^-) = (1 - \theta)X(\tau_1)$.

Após a primeira ação de manutenção, temos que, $\forall t \in [\tau_1, \tau_2[$, $Z(t) = Z(\tau_1^+) + X(t) - X(\tau_1) = X(t) - \theta X(\tau_1)$. Portanto, o nível de degradação imediatamente após a segunda ação de manutenção é expresso como $Z(\tau_2^+) = Z(\tau_2^-) - \theta [Z(\tau_2^-) - Z(\tau_1^+)] = (1 - \theta)X(\tau_2)$.

Em resumo, por recorrência, temos que, $\forall t \in [\tau_j, \tau_{j+1}[$,

$$Z(t) = Z(\tau_j^+) + X(t) - X(\tau_j) = X(t) - \theta X(\tau_j).$$

Vale mencionar que a expressão acima se reduz a apenas dois termos, uma vez que estamos considerando um θ fixo; portanto, o efeito da manutenção é assumido como o mesmo em todas as ações de manutenção.

Em relação ao efeito da manutenção no tempo τ_j , podemos expressá-lo pelo salto de degradação S_j , que corresponde à diferença entre o nível de degradação após e antes da manutenção, definido por:

$$S_j = Z(\tau_j^+) - Z(\tau_j^-) = (1 - \theta)X(\tau_j) - [X(\tau_j) - \theta X(\tau_{j-1})] = -\theta [X(\tau_j) - X(\tau_{j-1})].$$

Cada ação de manutenção pode expor o sistema a diferentes efeitos de manutenção, resultando em um parâmetro θ que varia ao longo do tempo. Portanto, os modelos que veremos nos Capítulos 4 e 5 levam essa possibilidade em consideração em suas formulações.

2.6 Modelos de Testes de Degradação Acelerada

Os testes de degradação acelerada são ferramentas fundamentais para a avaliação da confiabilidade de componentes e sistemas que apresentam degradação gradual ao longo do tempo. Diferentemente dos testes de vida acelerada, que se concentram na observação direta de falhas e na aceleração de sua ocorrência, os testes de degradação acelerada monitoram a evolução de uma medida de desempenho sob condições de estresse controladas, permitindo inferir a vida útil do componente em condições normais de operação. Essa abordagem é particularmente útil em situações nas quais a falha direta é um evento raro (DUAN; WANG, 2018).

No contexto dos Testes de Degradação Acelerada (TDA), diferentes perfis de estresse podem ser aplicados para modelar a degradação dos componentes:

- *constant-stress accelerated degradation test* (CSADT) – Estresse Constante: o componente é submetido a um nível fixo de estresse durante todo o teste.
- *step-stress accelerated degradation test* (SSADT) – Estresse em Etapas: o estresse é aumentado em intervalos predefinidos.
- *progressive-stress accelerated degradation test* (PSADT) – Estresse Progressivo: o estresse cresce continuamente ao longo do tempo.

Entre esses métodos, o CSADT é amplamente adotado devido à sua simplicidade e robustez, tornando-se uma escolha preferida na avaliação da confiabilidade de dispositivos eletrônicos, mecânicos e estruturais. A modelagem estocástica da degradação, utilizando distribuições como a GI, fornece uma abordagem flexível para a inferência de vida útil e para a otimização de políticas de manutenção (DUAN; WANG, 2018). A seguir, apresenta-se a formulação do CSADT com base em um PGI.

A degradação de um componente pode ser modelada como um processo estocástico $X(t)$, conforme descrito na Subseção 2.4.3. Ao incorporar no processo o fator de aceleração constante, temos que $X(t | A_d)$ caracteriza a medida de degradação de interesse, deteriorando-se ao longo do tempo dado o nível de estresse A_d . Neste contexto, assumimos que $X(t | A_d)$ segue uma distribuição GI, definida por:

$$X(t | A_d) \sim GI(g_\mu(t | A_d), \lambda g_\mu^2(t | A_d)),$$

em que $g_\mu(t | A_d)$ representa a função de degradação média e λ é um parâmetro de forma associado à variabilidade do processo.

Para incorporar a influência de D níveis de estresse no processo de degradação, utilizamos uma função de aceleração $H(A_d)$, que ajusta a dinâmica da degradação em função da severidade do estresse aplicado. Uma das funções de aceleração comumente adotadas na literatura é a exponencial:

$$H(A_d) = \exp(\beta A_d),$$

em que β é um coeficiente que quantifica o impacto do estresse na taxa de degradação.

2.7 Considerações finais

Neste capítulo, apresentamos uma revisão bibliográfica essencial para o desenvolvimento subsequente da tese, englobando as definições fundamentais e as principais referências que serão empregadas. Ressaltamos que explicações mais detalhadas, bem como descrições aprofundadas de características específicas de funções de distribuição e de outros modelos adotados de forma particular, serão devidamente apresentadas nos capítulos em que forem aplicados.

A seguir, no Capítulo 3, apresentamos um estudo destinado a investigar e a familiarizarmos com a inclusão do termo de fragilidade na análise de confiabilidade de sistemas reparáveis em um contexto de dados de falha, considerando o modelo de RM e assumindo a distribuição Gama não-central para a fragilidade.

CONFIABILIDADE DE SISTEMAS REPARÁVEIS COM FRAGILIDADE GAMA NÃO-CENTRAL

Neste capítulo, é proposto um novo modelo de fragilidade para analisar os tempos de falha de sistemas reparáveis sujeitos a ações de reparo mínimo (RM). Os estudos aqui desenvolvidos têm potencial de aplicação em diversas áreas, particularmente em indústrias que lidam com sistemas desse tipo, nos quais fatores não quantificáveis podem impactar os tempos de falha dos equipamentos.

A distribuição Gama não-central (GNC) é assumida para representar o efeito da variável aleatória de fragilidade (ver 3.1.1). A classe de modelos RM para sistemas reparáveis é explorada assumindo, como função de intensidade de linha de base, o Processo de Lei de Potência (PLP) (ver 3.1.2).

Em seguida, a mesma classe de modelos RM para sistemas reparáveis é analisada considerando uma abordagem que inclui o termo de fragilidade para estimar a heterogeneidade não observada. Para isso, foram utilizados métodos inferenciais clássicos para estimar os parâmetros e definir as funções de previsão da confiabilidade (ver 3.2).

Foi conduzido um estudo de simulação para confirmar as propriedades esperadas dos estimadores (ver 3.3). Além disso, dois conjuntos de dados reais, conhecidos na literatura, foram utilizados para ilustrar os procedimentos de estimação e validar o modelo proposto como uma alternativa viável aos já estabelecidos (ver 3.4). Por fim, são apresentadas as considerações gerais (ver 3.5).

3.1 Fundamentação Teórica Específica

Nesta seção, apresentamos a base teórica utilizada no modelo de fragilidade GNC proposto para sistemas reparáveis. Inicialmente, definimos a distribuição GNC e descrevemos algumas de suas principais características. Em seguida, abordamos as principais ideias de modelagem de tempos de falha para sistemas sujeitos a RM, assumindo como função de intensidade de linha de base o PLP.

3.1.1 Distribuição Gama não-central

De acordo com [Knüsel e Bablok \(1996\)](#) e [Oliveira e Ferreira \(2013\)](#), a distribuição GNC pode ser definida como uma mistura de uma distribuição discreta e uma distribuição contínua, sendo a primeira uma distribuição de Poisson e a segunda uma Gama central. Por outro lado, [Onchere et al. \(2021\)](#) define, a GNC como uma convolução obtida pela soma de distribuições Gama com pesos de Poisson.

Resumindo as ideias e definições apresentadas por esses autores, a distribuição GNC pode ser caracterizada, de forma geral, como uma mistura de uma distribuição Gama $(a + m, b)$ com pesos Poisson (φ) . Assim, seja Z uma variável aleatória com distribuição GNC; a função densidade de probabilidade (FDP) de Z é definida por:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\varphi} \varphi^m}{m!} \frac{z^{a+m-1} e^{-\frac{z}{b}}}{\Gamma(a+m) b^{a+m}}, \quad (3.1)$$

em que $\varphi > 0$ é denominado parâmetro de não centralidade e $a \geq 0$ e $b > 0$ são os parâmetros da distribuição Gama.

A distribuição GNC é geralmente assimétrica, e a sua assimetria é controlada pelo parâmetro de não centralidade. A Figura 2 apresenta diferentes comportamentos da FDP da distribuição GNC para distintos valores dos parâmetros. Observa-se que o parâmetro a assume valor fixo igual a zero, uma vez que esse será um pressuposto adotado posteriormente neste estudo.

Uma característica relevante da distribuição GNC é o fato de possuir uma forma fechada para a Transformada de Laplace, dada por:

$$\mathcal{L}(s) = (1 + bs)^{-a} \exp\left(-\frac{b\varphi s}{1 + bs}\right). \quad (3.2)$$

Como consequência direta, a esperança e a variância da distribuição GNC podem ser obtidas de maneira simples por meio das derivadas da Transformada de Laplace (ver, por exemplo, [Wienke \(2010\)](#)), conforme segue:

$$E[Z] = -\mathcal{L}'(0) = b(a + \varphi),$$

$$Var[Z] = \mathcal{L}''(0) - (\mathcal{L}'(0))^2 = b^2(a + 2\varphi).$$

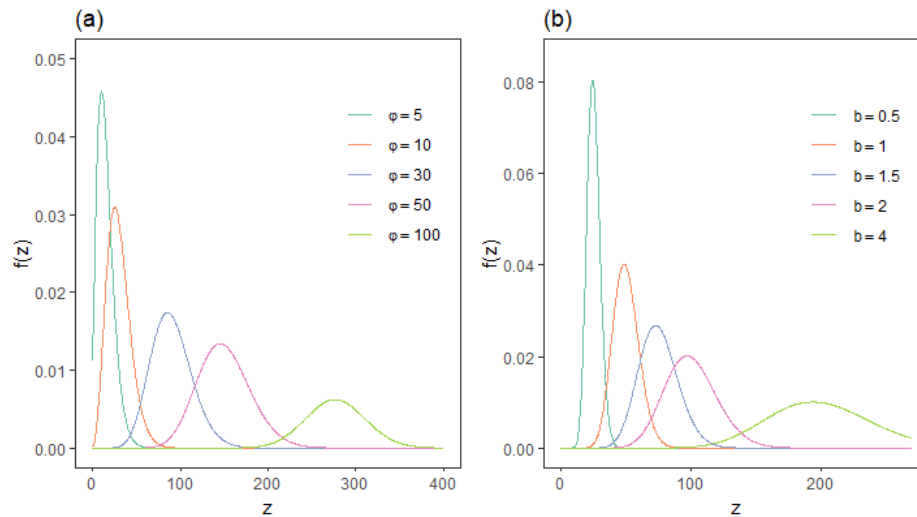


Figura 2 – (a) FDP GNC para $b = 3$ fixo e valores ϕ variáveis, e (b) FDP GNC para $\phi = 50$ fixo e valores b variáveis. Ambos os casos com $a = 0$ fixo.

3.1.2 Modelos de reparo mínimo para sistemas reparáveis

Modelos RM são amplamente conhecidos e discutidos na literatura de confiabilidade. A ferramenta central desses estudos é o tempo decorrido até a ocorrência de uma falha, que pode ser representado por uma variável aleatória T . No contexto de sistemas reparáveis, os eventos de falha são recorrentes, levando à obtenção de uma sequência não decrescente de variáveis aleatórias positivas $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots$ que representam os tempos de falha.

Seja $N(t)$ o número de falhas observadas no intervalo $[0, t]$. Sob a suposição de RM, o processo $\{N(t), t \geq 0\}$ é considerado um Processo de Poisson Não Homogêneo (PPNH), isto é, um processo de contagem com incrementos independentes, $N(0) = 0$, e completamente caracterizado por uma função de intensidade não constante $\lambda(t)$ (GILARDONI; COLOSIMO, 2007). Além disso, para qualquer t , $N(t)$ segue uma distribuição de Poisson com média $\Lambda(t)$, onde $\Lambda(t) = E[N(t)] = \int_0^t \lambda(u) du$ é a função de intensidade acumulada, conforme descrito detalhadamente em Seção 2.1.

Assumindo que a função de intensidade $\lambda(t)$ pode ser descrita por um modelo paramétrico com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\gamma}$, o histórico de tempos de falha de um ou vários sistemas idênticos em modelos RM pode ser utilizado para estimar esse vetor de parâmetros.

Numa abordagem de inferência clássica, o método de verossimilhança pode ser empregado para obter os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) (TOMAZELLA, 2003). Suponha que k sistemas reparáveis idênticos estejam sob observação e que $0 < t_{i,1} < t_{i,2} < \dots < t_{i,n_i}$ sejam seus tempos de falha, onde $t_{i,j}$ é o j -ésimo tempo de falha do sistema i , com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n_i$. Note que n_i é o número total de falhas observadas do sistema i e considere ainda que, para cada sistema i , exista um tempo de truncamento de observação t_i^* com $t_{i,n_i} \leq t_i^*$.

Assim, a função de verossimilhança geral para o modelo RM, considerando os k sistemas

idênticos, é dada por:

$$L_{\text{RM}}(\boldsymbol{\gamma} | t_{i,j}) = \prod_{i=1}^k \left\{ \left(\prod_{j=1}^{n_i} \lambda(t_{i,j}) \right) e^{-\Lambda(t_i^*)} \right\}. \quad (3.3)$$

Além disso, a função de intensidade pode ser usada para calcular preditores da função de confiabilidade. Seja $T_{i,n} = t_{i,n}$ o último tempo de falha observado do sistema i e $t = T_{i,n+1} - t_{i,n}$ o tempo até a próxima falha. Considerando o modelo paramétrico RM com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\gamma}$, a confiabilidade geral no tempo t para o sistema i é dada por:

$$\begin{aligned} R(t_{i,n+1} | t_{i,n}) &= P[T_{i,n+1} - t_{i,n} > t | t_{i,n}] = P[N(t_{i,n+1}) - N(t_{i,n}) = 0] \\ &= \exp\left(-\int_{t_{i,n}}^{t_{i,n+1}} \lambda(u) du\right) = \exp(-\Lambda(t_{i,n+1}) + \Lambda(t_{i,n})). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observe que a equação (3.4) expressa a probabilidade de o sistema funcionar sem falhas por um período de tempo maior que t após o último tempo de falha $t_{i,n}$, dado o histórico de falhas do sistema.

Todas as informações sobre modelos RM apresentadas aqui são bem conhecidas na literatura de confiabilidade. Em particular, a estimativa e a previsão de confiabilidade são gerais, independentemente da forma paramétrica de $\lambda(t)$. Dentre as formas possíveis, apresentamos e utilizamos neste estudo PLP. Introduzido por Crow (1975), o PLP é um modelo paramétrico amplamente utilizado na literatura para PPNH, no qual as funções de intensidade e intensidade acumulada são dadas, respectivamente, por:

$$\lambda(t | \nu, \eta) = \frac{\nu}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\nu-1} \quad \text{e} \quad \Lambda(t | \nu, \eta) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\nu}, \quad (3.5)$$

em que $\eta > 0$ é o parâmetro de escala e $\nu > 0$ é o parâmetro de forma. O PLP é comumente assumido para modelos RM, pois seus parâmetros possuem interpretação física: o parâmetro η indica o tempo durante o qual se espera que ocorra exatamente uma falha, ou seja, $E[N(\eta)] = 1$, enquanto o parâmetro ν indica se o sistema está deteriorando ($\nu > 1$) ou melhorando ($\nu < 1$) (OLIVEIRA; COLOSIMO; GILARDONI, 2013).

Para obter as funções de predição de verossimilhança e confiabilidade considerando o modelo paramétrico PLP, basta substituir $\lambda(t)$ e $\Lambda(t)$ nas equações (3.3) e (3.4) pelas funções de intensidade e intensidade acumulada dadas em (3.5). Nesse caso, o vetor de parâmetros do modelo será $\boldsymbol{\gamma} = (\nu, \eta)$. Este procedimento e as respectivas observações podem ser encontrados em Almeida *et al.* (2020) e Junior (2016).

Como referido anteriormente e já discutido na Seção 2.3, os modelos de fragilidade incorporam na função intensidade uma variável aleatória latente Z que capta efeitos aleatórios. Nesta abordagem, a variável Z , retirada de uma distribuição $f(z; \kappa)$, é incluída de forma multiplicativa na função de intensidade. Desconsiderando covariáveis, tem-se $\lambda(t | z) = z\lambda_0(t)$, onde $\lambda_0(t)$ é a função de intensidade de linha de base e z o termo de fragilidade. A distribuição $f(z)$ deve

ter suporte positivo, média finita e variância finita, com as condições $E[Z] = 1$ e $Var(Z) = \kappa$, permitindo interpretar $z > 1$ como intensidade crescente, $z < 1$ como intensidade decrescente, e $z = 0$ como redução ao modelo de linha de base.

3.2 Formulação do Modelo

Nesta seção, apresentamos o modelo de fragilidade GNC proposto para múltiplos sistemas reparáveis sob RM. Além disso, descrevemos a função de verossimilhança utilizada para estimar os parâmetros do modelo, bem como a função de predição de confiabilidade.

Conforme mencionado anteriormente, para evitar problemas de identificabilidade no modelo com fragilidade seguindo uma distribuição Z , é necessário que sua esperança seja igual a 1 e sua variância seja constante. Para garantir essa condição ao definir que a fragilidade Z tem distribuição GNC, e seguindo a ideia apresentada em [Onchere et al. \(2021\)](#), assume-se que o parâmetro a na equação (3.1) seja igual a zero. Além disso, considerando $Var[Z] = \kappa$, os parâmetros b e φ da equação (3.1) são reparametrizados como $b = \kappa/2$ e $\varphi = 2/\kappa$, de modo que a esperança seja $E[Z] = 1$. Nesse caso, a FDP da fragilidade Z na equação (3.1) pode ser reescrita como

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2}{\kappa}} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^m}{m!} \frac{z^{m-1} e^{-\frac{2z}{\kappa}}}{\Gamma(m) \left(\frac{\kappa}{2}\right)^m}. \quad (3.6)$$

Consequentemente, a Transformada de Laplace dada na equação (3.2) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}(s) = \exp\left(-\frac{s}{1 + \frac{\kappa}{2}s}\right).$$

A obtenção de uma forma fechada para a Transformada de Laplace é um resultado particularmente interessante para a proposta de fragilidade com distribuição GNC, sobretudo para o cálculo da função de verossimilhança. Isso ocorre porque a função de verossimilhança deve ser obtida de forma não condicional para a fragilidade Z , e as integrais utilizadas nesses cálculos não são triviais. Entretanto, se Z tiver uma distribuição cuja Transformada de Laplace tenha forma fechada, esse problema é facilmente resolvido.

De acordo com [Wienke \(2010\)](#), a função de confiabilidade incondicional é dada por $R(t) = \mathcal{L}(\Lambda_0(t))$ e a função de intensidade incondicional do termo de fragilidade é dada por $\lambda(t) = -\lambda_0(t) \frac{\mathcal{L}'(\Lambda_0(t))}{\mathcal{L}(\Lambda_0(t))}$.

Portanto, a função de confiabilidade incondicional para o modelo de fragilidade GNC é

$$R(t) = \exp\left(-\frac{\Lambda_0(t)}{1 + \frac{\kappa\Lambda_0(t)}{2}}\right).$$

As funções de intensidade e intensidade acumulada incondicionais para o modelo de fragilidade GNC são, respectivamente,

$$\lambda(t) = \frac{\lambda_0(t)}{\left(1 + \frac{\kappa\Lambda_0(t)}{2}\right)^2} \quad \text{e} \quad \Lambda(t) = \frac{\Lambda_0(t)}{1 + \frac{\kappa\Lambda_0(t)}{2}}, \quad (3.7)$$

onde $\lambda_0(t)$ e $\Lambda_0(t)$ são as funções de intensidade e intensidade acumulada da linha de base, respectivamente.

As funções em (3.7) podem ser interpretadas como funções de intensidade populacional e intensidade populacional acumulada, dependendo diretamente das funções de linha de base e da variância da fragilidade do GNC. A função de intensidade de falha em (3.7) pode assumir formas unimodais, não apenas crescentes ou decrescentes (como a função intensidade PLP sem fragilidade, por exemplo), o que é especialmente útil para modelar situações em que as falhas podem se concentrar em determinado período e ocorrer com menor frequência em outros.

Tendo definidas as funções do modelo de fragilidade, queremos agora utilizar os dados observados para estimar os parâmetros do modelo. Considere k sistemas reparáveis sob observação por um período t_i^* , $i = 1, \dots, k$, de modo que $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,n_i}$ sejam os tempos de falha do i -ésimo sistema e t_i^* o tempo de truncamento da observação desse sistema. Suponha-se que esses sistemas sofram reparos mínimos após cada falha; na abordagem clássica, os parâmetros populacionais podem ser estimados pelo método de máxima verossimilhança.

Supondo que cada processo de falha siga um PLP cujas funções de intensidade de falha e intensidade acumulada são dadas por (3.5) e que exista heterogeneidade não observada entre os tempos de falha, modelada pela distribuição GNC dada em (3.6), o vetor de parâmetros a ser estimado no modelo é $\boldsymbol{\gamma} = (\nu, \eta, \kappa)$, em que ν e η são os parâmetros do modelo PLP e κ é a variância da fragilidade do GNC. Nesse caso, a função de verossimilhança em (3.3) pode ser reescrita como

$$L_{\text{RM}}(\nu, \eta, \kappa | t_{i,j}) = \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{j=1}^{n_i} \left[\frac{\nu}{\eta} \left(\frac{t_{i,j}}{\eta} \right)^{\nu-1} \left[1 + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{t_{i,j}}{\eta} \right)^\nu \right]^{-2} \right] \exp \left(- \frac{t_{i,j}^\nu}{\eta^\nu + \frac{\kappa}{2} t_{i,j}^{\nu}} \right) \right\}, \quad (3.8)$$

e, conseqüentemente, a função log-verossimilhança é

$$\begin{aligned} l_{\text{RM}}(\nu, \eta, \kappa | t_{i,j}) = & N [\log(\nu) - \nu \log(\eta)] + (\nu - 1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log(t_{i,j}) \\ & - 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \log \left(1 + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{t_{i,j}}{\eta} \right)^\nu \right) + \sum_{i=1}^k \frac{t_{i,j}^{\nu}}{\eta^\nu + \frac{\kappa}{2} t_{i,j}^{\nu}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $N = \sum_{i=1}^k n_i$ é o número total de falhas observadas em todos os sistemas.

Dada a complexidade da expressão (3.9) e de suas derivadas parciais, não é possível obter analiticamente os EMV. Portanto, métodos numéricos devem ser utilizados para contornar esse problema e assim obter as estimativas. Os intervalos de confiança dos parâmetros estimados podem ser construídos a partir da teoria assintótica, com base nas propriedades dos EMV e da distribuição Normal.

Finalmente, com base na função preditora de confiabilidade para o modelo clássico de RM apresentada em (3.4), podemos definir a função preditora de confiabilidade para a proposta de fragilidade GNC. Dadas as estimativas de máxima verossimilhança ($\hat{\nu}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\kappa}$) dos parâmetros do modelo de fragilidade GNC e sendo $t = T_{i,n+1} - t_{i,n}$ o tempo entre o último tempo de falha observado $t_{i,n}$ e o próximo tempo de falha $T_{i,n+1}$, a função de confiabilidade é dada por

$$R(t_{i,n+1} | t_{i,n}) = \exp(-\Lambda(t_{i,n+1}) + \Lambda(t_{i,n})), \quad (3.10)$$

em que a função de intensidade acumulada $\Lambda(t)$ é a função de intensidade acumulada do modelo de fragilidade GNC dada em (3.7).

3.3 Estudo de simulação

Nesta seção conduzimos um estudo de simulação para avaliar o desempenho, em termos de eficiência e consistência, do EMV obtido pela maximização da função log-verossimilhança do modelo apresentado em (3.8). O objetivo principal é verificar se as propriedades assintóticas dos EMV são observadas em amostras simuladas de tempos de falha com efeitos de fragilidade induzidos pela distribuição GNC.

Para avaliar a consistência e eficiência do EMV do modelo de fragilidade GNC com intensidade de base PLP, foram utilizadas três métricas, com base em estudos semelhantes na literatura de confiabilidade: a *mean relative error* (MRE) – erro relativo médio, a *root mean square error* (RMSE) – raiz quadrada do erro padrão médio e a *coverage probability* (CP) – probabilidade de cobertura. Essas métricas são definidas, respectivamente, por

$$\text{MRE}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m}{\gamma}, \quad \text{RMSE}(\hat{\gamma}) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\gamma}_m - \gamma)^2}, \quad \text{CP}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{I}[\gamma_m \in (a_m, b_m)],$$

em que:

- M é o número de amostras simuladas;
- $\gamma \in \boldsymbol{\gamma} = (\nu, \eta, \kappa)$ é o parâmetro de interesse, e $\hat{\gamma}_m$ é sua estimativa na m -ésima amostra;
- $a_m = \hat{\gamma}_m - 1,96 \times \text{EP}(\hat{\gamma}_m)$ é o limite inferior do intervalo de confiança (IC) de 95% da m -ésima estimativa;
- $b_m = \hat{\gamma}_m + 1,96 \times \text{EP}(\hat{\gamma}_m)$ é o limite superior do IC de 95% da m -ésima estimativa;
- \mathbb{I} é a função indicadora e $\text{EP}(\hat{\gamma}_m)$ é o erro padrão do m -ésimo estimador.

Com essa abordagem, espera-se que, à medida que o tamanho amostral dos tempos de falha observados aumente, o MRE se aproxime assintoticamente de 1, o RMSE se aproxime de 0 e o CP atinja uma cobertura próxima ao valor nominal de 95%. O aumento da amostra ocorre

pelo aumento do número de sistemas observados. Nesse caso, o número de falhas por sistema é aleatório, mas, quanto mais sistemas observados, maior tende a ser o número total de tempos de falha registrados.

Para gerar os tempos de falha de cada sistema, utilizamos a função de intensidade acumulada incondicional do modelo de fragilidade GNC definida em (3.7). Mais especificamente, sejam t_j e t_{j+1} dois tempos de falha consecutivos, com $t_{j+1} = t_j + x$. Conforme descrito em Brito, Tomazella e Ferreira (2022), a função de distribuição acumulada $F(x)$ do tempo decorrido X entre duas falhas consecutivas é

$$F(x) = 1 - P[N(t_j + x) - N(t_j) = 0].$$

Sob a suposição de RM, o processo de contagem $N(t)$ é um PPNH e, conforme discutido na Subseção 3.1.2, a função de distribuição acumulada pode ser reescrita como

$$F(x) = 1 - e^{-[\Lambda(t_j+x) - \Lambda(t_j)]},$$

em que $\Lambda(t)$ é a função de intensidade acumulada do modelo de fragilidade GNC, dada em (3.7). Assim, para gerar o tempo entre duas falhas consecutivas, basta resolver a equação $F(x) = u$, em que u é uma observação de uma distribuição Uniforme $(0, 1)$. Esse procedimento é repetido até que o número desejado de falhas seja atingido ou até alcançar o tempo de truncamento predefinido. Para k sistemas distintos, todo o procedimento é repetido independentemente k vezes.

O algoritmo considerado para a geração dos tempos de falha dos k sistemas, cada um com tempo de truncamento t^* , é detalhado passo a passo no Apêndice A.3.1.

Foram considerados diferentes cenários de combinação dos parâmetros do modelo e diferentes tamanhos de amostra baseados no número de sistemas. Devido à característica unimodal da função de intensidade de falha do modelo de fragilidade GNC, para cada cenário de parâmetro o tempo de truncamento foi definido como o tempo t^* tal que $\lambda(t^*) < 0,001$, uma vez que o modelo perde influência na geração de tempos de falha quando a intensidade se aproxima de zero. Foram definidos dois valores fixos para o parâmetro $\nu = (0,8; 1,2)$, contemplando os casos em que a função de intensidade da linha de base do PLP é decrescente ou crescente. Para cada ν , foram definidos três valores para o parâmetro $\kappa = (0,05; 0,1; 0,2)$, representando diferentes níveis de variabilidade na fragilidade GNC. Para cada combinação de ν e κ , um valor de η foi definido para completar o cenário. Apresentamos aqui os resultados de seis cenários que representam as principais variações do modelo.

Para cada cenário, foram geradas 1.000 amostras conforme o algoritmo descrito (ver Apêndice A.3.1). Para cada amostra, obtiveram-se as estimativas $\hat{\nu}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\kappa}$ de ν , η e κ , respectivamente. A partir dessas estimativas, foram calculadas as métricas MRE, RMSE e CP, e os resultados são apresentados nas Figura 3 e Figura 4. Observe que, nas figuras que resumem as métricas avaliadas no estudo de simulação, o eixo y apresenta escalas diferentes, devido às distintas magnitudes observadas nos diversos cenários investigados.

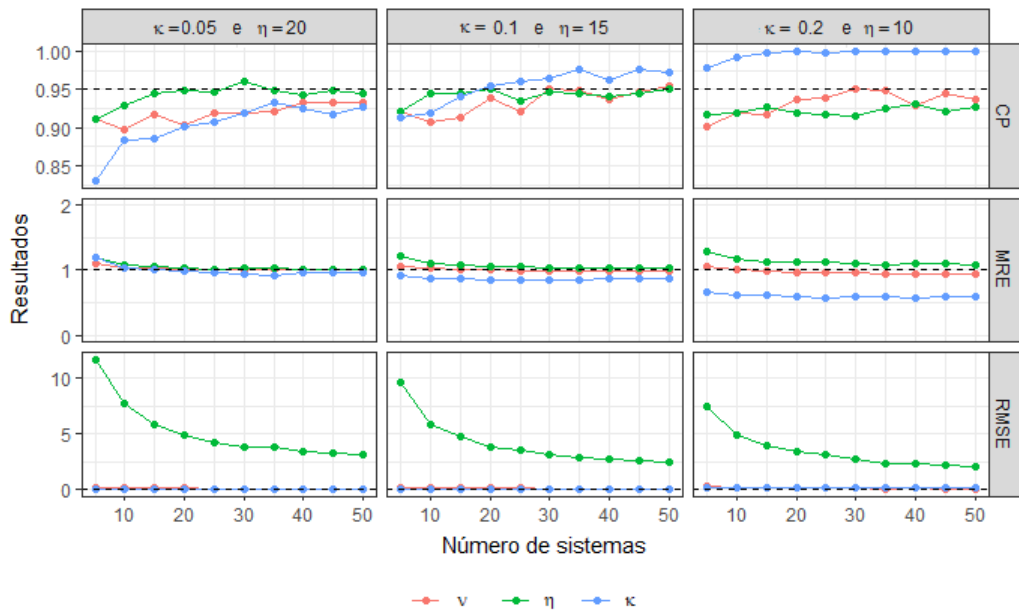


Figura 3 – Resultados de simulação para o modelo de fragilidade GNC com $v = 0,8$ fixo.

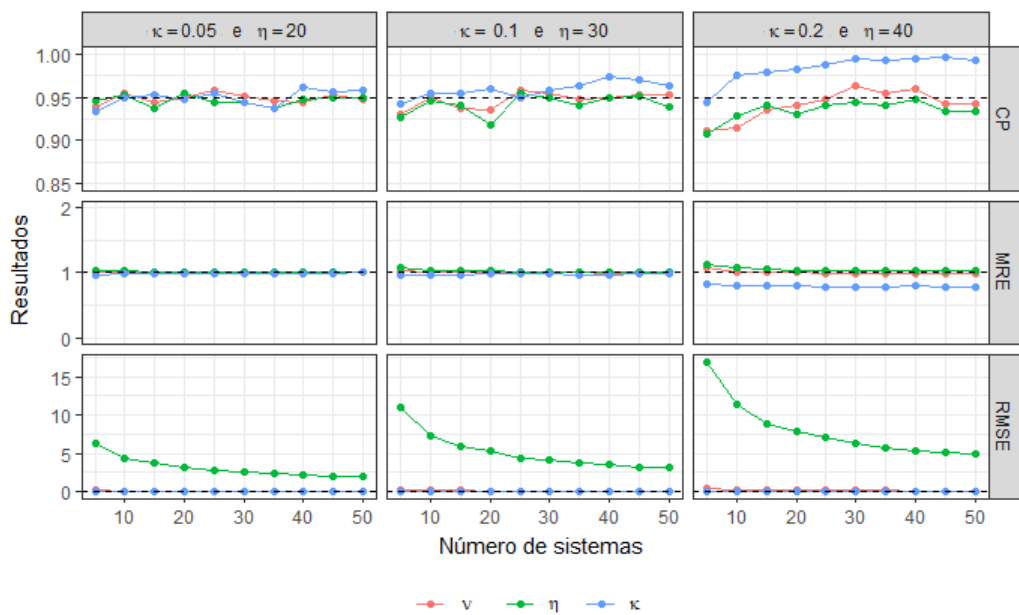


Figura 4 – Resultados de simulação para o modelo de fragilidade GNC com $v = 1,2$ fixo.

A partir das Figura 3 e 4, observa-se que, de forma geral, os comportamentos esperados das três métricas são verificados em todos os cenários. Nota-se que o aumento do tamanho amostral resulta em valores de CP cada vez mais próximos de 95% e valores de RMSE cada vez mais próximos de zero para todos os parâmetros.

É natural que, especificamente para o parâmetro η , o RMSE convirja mais lentamente para zero, dada a magnitude dos valores nominais desse parâmetro; entretanto, pelos gráficos de MRE, verifica-se a esperada convergência desse parâmetro ao valor nominal. Em cenários

com maior variância de fragilidade ($\kappa = 0,2$), nota-se que o parâmetro κ tende a ser ligeiramente subestimado, porém, as estimativas intervalares abrangem os valores nominais, conforme observado pela alta cobertura percentual nos gráficos de CP.

Concluimos, portanto, que os estimadores do modelo proposto apresentam bom desempenho, sobretudo para amostras de maior tamanho.

3.4 Aplicação em dados reais

Nesta seção, apresentamos duas aplicações, revisitando dois conjuntos de dados conhecidos na literatura de confiabilidade. A ideia é verificar se, nesses dados, é possível identificar a presença de heterogeneidade não observada nos tempos de falha dos sistemas e avaliar se o modelo de fragilidade do GNC proposto é adequado para tais dados.

Em ambos os exemplos, os parâmetros foram obtidos utilizando o método de máxima verossimilhança por meio das funções de verossimilhança e log-verossimilhança definidas em (3.8) e (3.9), respectivamente. Os intervalos de confiança foram obtidos utilizando a teoria assintótica da distribuição Normal, conforme mencionado na Seção 3.2. Além disso, utilizamos também o conhecido modelo de fragilidade Gama para comparar os ajustes obtidos com o modelo proposto. Em ambos os conjuntos de dados, empregamos o *Akaike Information Criterion* (AIC) e o *Bayesian Information Criterion* (BIC) como critérios de seleção entre os dois modelos (para mais detalhes sobre estes critérios, veja, por exemplo, [Burnham e Anderson \(2004\)](#)).

3.4.1 Dados da colheitadeira de cana-de-açúcar

A primeira aplicação trata de um conjunto de tempos de falha de nove colhedoras de cana-de-açúcar brasileiras. Este conjunto de dados foi originalmente apresentado por [Versani \(2018\)](#) e um subconjunto dessas colheitadeiras foi utilizado na análise de fragilidade sob a suposição de RM apresentada em [D'Andrea et al. \(2021\)](#). Especificamente, são observados os tempos de falha do sistema de lâminas de corte dessas colhedoras no período de alta colheita de cana-de-açúcar, entre os anos de 2014 e 2015, por um período de 200 dias (ver Tabela 2). Observe que o tempo de truncamento das observações para todos os sistemas é igual a 200 dias.

A Tabela 2 mostra os tempos de falha observados de cada unidade.

Substituindo os tempos de falha $t_{i,j}$ observados na Tabela 2 na função de verossimilhança mostrada em (3.8), métodos numéricos e computacionais podem ser usados para maximizar esta função e obter os EMV desejados. Este procedimento de maximização foi realizado utilizando o software R, especificamente a função *optim* ([R Core Team, 2021](#)). Apesar da complexidade algébrica da função de verossimilhança impossibilitar a obtenção analítica do EMV, isso não representa um grande problema do ponto de vista computacional; portanto, essas estimativas foram obtidas sem dificuldades.

Tabela 2 – Tempos de falha doS sistemaS de lâmina de corte da colhedora.

Sistema 1	10 194	42 200*	51	68	85	110	120	146	157	167
Sistema 2	23 136	24 138	39 165	41 166	72 200*	83	95	100	116	125
Sistema 3	4 157	14 171	30 173	48 175	72 200*	90	103	117	125	136
Sistema 4	13 131	32 153	44 157	66 163	74 185	93 200*	99	107	121	129
Sistema 5	9 97	13 106	14 116	22 117	24 132	40 143	49 148	52 171	61 196	79 200*
Sistema 6	8 124	9 154	25 158	31 178	40 200*	62	73	88	107	118
Sistema 7	2 190	8 200*	33	44	72	89	129	143	164	189
Sistema 8	1 129	29 153	31 182	38 200*	60	82	83	101	102	128
Sistema 9	35 123	42 151	59 158	70 166	87 181	91 182	92 200*	116	117	118

Conforme afirmado anteriormente, também utilizamos o modelo de fragilidade Gama para sistemas reparáveis sob RM, de forma a estimar seus parâmetros e comparar com os resultados obtidos pelo nosso modelo de fragilidade GNC (D'ANDREA *et al.*, 2017). Os resultados das estimativas dos parâmetros para ambos os modelos são mostrados na Tabela 3. Além disso, essa tabela apresenta os valores máximos da função log-verossimilhança de cada modelo, bem como os critérios de informação AIC e BIC.

Tabela 3 – Resultados da estimação dos modelos de fragilidade GNC e Gama aplicados aos dados de colhedoras de cana-de-açúcar.

Modelo	$\hat{\nu}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\kappa}$	\hat{l}	AIC	BIC
Gama	1,107	14,262	0,0378	-463,263	932,527	941,265
GNC	1,115	14,444	0,0349	-463,220	932,439	941,177

É possível perceber a semelhança entre as estimativas de $\hat{\nu}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\kappa}$ para ambos os modelos. Em termos de comparação, os valores de AIC e BIC indicam que o modelo de fragilidade do GNC é ligeiramente superior ao modelo Gama para este conjunto de dados sob RM, pois apresentou valores inferiores. Embora a diferença nos critérios de informação entre os dois modelos seja pequena, este resultado mostra que o modelo proposto para a fragilidade GNC é uma boa alternativa ao modelo Gama.

Além das estimativas pontuais apresentadas na Tabela 3, as estimativas intervalares para os parâmetros do modelo de fragilidade do GNC também foram obtidas por meio de ICs assintóticos. Os ICs de 95% para os EMV $\hat{\nu}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\kappa}$ são, respectivamente, $IC_{\hat{\nu}} = (0, 81; 1, 53)$, $IC_{\hat{\eta}} = (8, 83; 23, 64)$ e $IC_{\hat{\kappa}} = (0, 006; 0, 207)$.

A estimativa pontual do parâmetro ν indica que os sistemas estão se deteriorando ao longo do tempo, uma vez que $\hat{\nu} > 1$. Entretanto, essa interpretação pode não ser totalmente garantida, já que o limite inferior do IC é menor que 1. Em relação à fragilidade, apesar de pequeno, obteve-se um valor maior que zero para a variância da variável fragilidade ($\hat{\kappa} > 0$), indicando a existência de heterogeneidade não observada entre os sistemas e seus tempos de falha. Nesse sentido, esse resultado está em consonância com os demais resultados obtidos para esse conjunto de dados na literatura, apontando a presença de efeitos não observados no tempo de falha das colhedoras, uma vez que foi captada a influência da fragilidade.

Por fim, utilizamos a equação (3.10) para estimar a função de predição de confiabilidade no último momento de falha observado para cada colheitadeira. A Figura 5 mostra a função de predição de confiabilidade para o modelo de fragilidade GNC ajustado a cada colheitadeira deste estudo. É possível perceber que todas as colheitadeiras apresentam confiabilidade praticamente nula após 50 dias da última falha, dado o histórico de cada processo de falha. Além disso, nota-se que o tempo médio esperado para a próxima falha (isto é, o tempo tal que a confiabilidade esperada seja 0,5) está próximo do valor estimado de $\hat{\eta} = 14,4$ para todas as colheitadeiras.

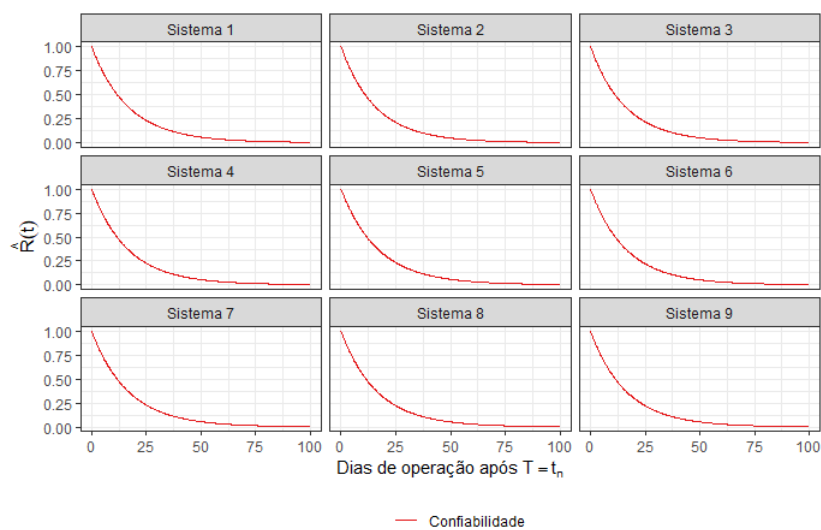


Figura 5 – Funções de confiabilidade estimadas nos últimos tempos de falha t_n , para cada colheitadeira no conjunto de dados, sob o modelo de fragilidade GNC ajustado.

3.4.2 Dados de sistemas da literatura

A segunda aplicação utiliza os tempos de falha do conjunto de sistemas reparáveis apresentados em [Mettas e Zhao \(2005\)](#). No estudo original, são apresentados tempos de falha de seis sistemas, cada um com diferentes tempos de truncamento de observação. Entretanto, para nossa aplicação, utilizamos os tempos de falha de apenas três desses sistemas, uma vez que os demais apresentam um número muito reduzido de falhas observadas (uma ou duas falhas).

A Tabela 4 mostra os tempos de falha observados em cada um dos sistemas. Os tempos marcados com “*” correspondem aos tempos de truncamento das observações de cada sistema.

Tabela 4 – Tempos de falha dos sistemas (em dias).

Sistema 1	2227,08	2733,23	3524,21	5568,63	5886,17
	5946,30	6018,22	7202,72	8760*	
Sistema 2	772,95	1034,46	3011,11	3121,46	3624,16
	3758,30	5000*			
Sistema 3	900,99	1289,95	2689,88	3928,82	4328,32
	4704,24	5052,59	5473,17	6200*	

Os mesmos procedimentos do exemplo anterior foram aplicados aqui. A Tabela 5 apresenta o EMV obtido para os modelos de fragilidade Gama e GNC, assim como as respectivas estimativas de máxima log-verossimilhança e os valores de AIC e BIC. Novamente, observa-se que as estimativas pontuais são bastante próximas para os dois modelos. Além disso, os critérios de seleção AIC e BIC indicam uma ligeira superioridade do modelo de fragilidade GNC em relação ao modelo Gama.

Tabela 5 – Resultados de estimação para os modelos de fragilidade GNC e Gama aplicados a dados de sistemas da literatura.

Modelo	$\hat{\nu}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\kappa}$	\hat{l}	AIC	BIC
Gama	1,883	1518,044	0,187	-170,477	346,953	350,610
GNC	1,878	1583,923	0,131	-170,348	346,696	350,353

Os ICs de 95% para o EMV $\hat{\nu}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\kappa}$ do modelo de fragilidade GNC são, respectivamente, $IC_{\hat{\nu}} = (1,04; 3,38)$, $IC_{\hat{\eta}} = (907,92; 2763,25)$ e $IC_{\hat{\kappa}} = (0,04; 0,41)$; neste caso, as conclusões sobre as estimativas são mais claras. Primeiro, em relação ao parâmetro ν , tanto as estimativas pontuais quanto as intervalares são maiores que 1, indicando que os sistemas se deterioram ao longo do tempo. Além disso, as estimativas pontuais e intervalares do parâmetro κ são maiores que zero, evidenciando novamente a presença de heterogeneidade não observada entre os sistemas e seus tempos de falha.

Mais uma vez, utilizamos a equação (3.10) para estimar a função de predição de confiabilidade no último tempo de falha observado de cada sistema. Os resultados das funções de confiabilidade estimadas para o modelo de fragilidade GNC são mostrados na Figura 6. A probabilidade de confiabilidade após 2.000 dias da última falha é muito próxima de zero para todos os sistemas, considerando o histórico de falhas observado. Como, neste caso, a estimativa $\hat{\kappa}$ não se aproximou de zero, a interpretação do parâmetro $\hat{\eta}$ não pode ser feita da mesma forma que no exemplo anterior, pois a alta variância da variável de fragilidade afeta a interpretação deste parâmetro no PLP, conforme discutido anteriormente.

3.5 Considerações finais

Neste capítulo, o foco principal foi incorporar o termo de fragilidade em um modelo para sistemas reparáveis sujeitos a heterogeneidade não observada, sob a hipótese de RM. Para

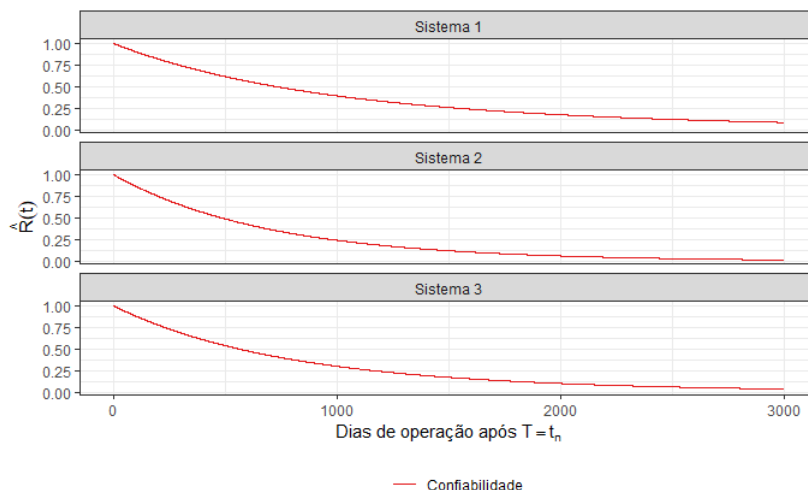


Figura 6 – Funções de confiabilidade estimadas nos últimos tempos de falha t_n para cada sistema do conjunto de dados, sob o modelo de fragilidade GNC ajustado.

o modelo estudado, foram derivadas funções de verossimilhança e funções de predição de confiabilidade. Os tempos foram modelados pelo processo PLP, enquanto a distribuição GNC foi considerada como distribuição para o termo de fragilidade.

Foi realizado um estudo de simulação considerando diferentes cenários, com o objetivo de verificar a qualidade dos estimadores obtidos e seu comportamento. Verificou-se que os resultados obtidos estão alinhados com as expectativas, uma vez que as estimativas geradas ficaram próximas dos valores reais dos parâmetros definidos no estudo, apresentando valores adequados para as métricas analisadas (MRE, RMSE e CP).

Duas aplicações foram feitas a dados reais. Verificou-se que o modelo proposto apresenta melhor desempenho segundo os critérios de avaliação considerados, ainda que os resultados estejam próximos aos do modelo alternativo que assume a distribuição Gama para o termo de fragilidade. Além disso, as estimativas dos parâmetros estão em consonância com os resultados encontrados na literatura para os mesmos conjuntos de dados. Em cada aplicação foi possível prever a confiabilidade de cada sistema com base no histórico de seus processos de falha e nas estimativas obtidas para os parâmetros do modelo. Esses resultados mostram que a abordagem proposta nesta tese é eficaz e pode ser aplicada em diferentes contextos industriais.

A aplicação em dados reais evidenciou que a abordagem proposta é capaz de fornecer informações úteis para a tomada de decisão em sistemas complexos, incluindo a previsão do tempo até a primeira falha. Em resumo, os resultados da simulação e das aplicações a dados reais corroboram a afirmação de que a abordagem proposta constitui uma ferramenta valiosa para a análise de confiabilidade em sistemas reparáveis com fragilidade GNC.

Até o momento, a utilização dessa fragilidade em sistemas reparáveis não havia sido explorada na literatura. Os resultados obtidos a partir das discussões teóricas, das aplicações e do estudo de simulação demonstram que o modelo proposto é relevante e representa uma alternativa

de modelagem capaz de identificar claramente a existência de fatores não observáveis, como a heterogeneidade ao longo dos tempos de falha dos sistemas. Vale lembrar que tais fatores interferem diretamente na função de intensidade de falhas dos sistemas, a qual está intimamente ligada à vida útil dos mesmos.

Por fim, este estudo apresenta uma proposta alternativa no uso de distribuições não-centrais, destacando a importância de se dispor de mais uma opção de distribuição de fragilidade entre os modelos já existentes na literatura. Os estudos aqui desenvolvidos não são exaustivos e reforçam a importância de se investigar outras abordagens, como diferentes métodos de estimação dos parâmetros de interesse.

MODELOS DE DEGRADAÇÃO PARA SISTEMAS REPARÁVEIS SOB A SUPOSIÇÃO DE REPARO IMPERFEITOS

Neste capítulo, investigamos modelos de degradação para sistemas reparáveis cuja degradação evolui ao longo do tempo e pode ser parcialmente reduzida por ações de manutenção. Estudos existentes frequentemente assumem efeitos de manutenção constantes, o que limita sua aplicabilidade a cenários em que a eficiência das ações de manutenção varia devido a condições operacionais, restrições de recursos ou envelhecimento do sistema. Uma situação adicional a ser destacada é que, ao se assumir que as ações de manutenção são idênticas ao longo do tempo, informações importantes são perdidas, restringindo a análise a cenários específicos. É natural esperar que cada ação de manutenção tenha um impacto distinto na degradação acumulada. Em alguns casos, a manutenção pode reduzir totalmente o nível de degradação desde a última ação; em outros, o efeito é mínimo ou ainda intermediário, porém não constante.

Este estudo visa avançar a compreensão da modelagem de degradação para sistemas reparáveis pelo processo Gaussiano inverso (PGI) (ver 4.1.2) e incorporar os efeitos não constantes da manutenção imperfeita ao longo do tempo. Especificamente, adota-se o modelo de Redução Aritmética da Degradação de ordem 1 (ARD_1), no qual as ações de manutenção reduzem proporcionalmente o nível de degradação acumulada (ver 4.1.3). Assumimos que os efeitos de manutenção variam com cada ação, refletindo a variabilidade do mundo real. Além disso, um esquema de observação completo é empregado na formulação do modelo, em que os níveis de degradação são registrados tanto entre quanto imediatamente antes e após as ações de manutenção, permitindo derivar as funções de interesse para a inferência estatística clássica (ver 4.2).

Um estudo de simulação extensivo foi conduzido para avaliar o desempenho do modelo proposto sob diferentes cenários de degradação, garantindo uma validação consistente da

abordagem (ver 4.3). Além disso, o modelo proposto foi aplicado a dados reais de degradação, supondo ações de manutenção, demonstrando sua relevância prática e seu comportamento frente a diferentes efeitos de manutenção (ver 4.4). Por fim, são apresentadas as considerações gerais do capítulo como um todo (ver 4.5).

4.1 Contextualização

4.1.1 Dados de Degradação

Considere n unidades experimentais analisadas durante um intervalo de tempo fixo $[0, \tau]$, e sejam os tempos de inspeção $0 = t_{i,0} < t_{i,1} < t_{i,2} < \dots < t_{i,n_i} = \tau$. Para cada unidade i , têm-se as medidas de degradação observadas nos tempos de inspeção; ou seja, obtemos o caminho de degradação $\mathbf{X}_i \equiv [X_i(t_{i,1}), X_i(t_{i,2}), \dots, X_i(t_{i,n_i})]$, conforme mostrado na Tabela 1. Note que $X_i(t_{i,0}) = X_i(0) = 0$ para todas as unidades experimentais. Vale mencionar que os tempos de inspeção geralmente apresentam intervalos equidistantes entre si e são distintos dos tempos de manutenção $\tau_j, \forall j = 0, 1, 2, \dots, k$, que representam os instantes em que o sistema foi submetido a uma ação de manutenção, com $\tau_0 = 0$ e $\tau_{k+1} = \tau$ sendo os pontos extremos da trajetória observada pelas unidades experimentais. Portanto, não há manutenção nesses extremos, pois correspondem aos tempos inicial e final do estudo. Assim, temos um total de k ações de manutenção. Além disso, seja $m_{i,j}$ o número de observações entre as ações de manutenção, ou seja, o número de medições dentro do intervalo $]\tau_j, \tau_{j+1}[$; portanto, $M_i = \sum_{j=0}^k m_{i,j} + 2k + 2$ é o número total de observações para a unidade i no intervalo $[0, \tau]$.

Neste capítulo, os tempos de manutenção correspondem aos tempos de reparo. Consideramos o contexto de dados de observações completas, ou seja, a situação ideal na qual todas as medidas de degradação foram registradas tanto nos períodos de manutenção (antes e depois) quanto entre eles; para mais detalhes, consulte [Leroy et al. \(2023\)](#).

Para compreender detalhadamente como são as trajetórias e cada um dos elementos que as compõem, a Figura 7 mostra um exemplo da trajetória do processo de degradação para o esquema de observação completo, considerando um único sistema reparável. Nesse exemplo, as ações de manutenção são realizadas periodicamente a cada cinco unidades de tempo. Cada ponto no gráfico representa um nível de degradação observado. A trajetória em cinza corresponde ao caminho de degradação sem ações de manutenção, enquanto a trajetória em roxo considera os efeitos das ações de manutenção nos tempos $\tau_1 = 5$, $\tau_2 = 10$ e $\tau_3 = 15$.

Note que, durante os tempos de manutenção, temos duas observações associadas ao mesmo instante na trajetória com ações de manutenção, razão pela qual, no cálculo de M_i , adicionamos $2k$, e não apenas k . Além disso, observe que na Figura 7 as medidas previamente apresentadas são: $\tau_0 = 0$ (tempo inicial do estudo), $\tau_4 = \tau = 20$ (tempo final do estudo), $k = 3$ (número de manutenções) e $m_{i,0} = m_{i,1} = m_{i,2} = m_{i,3} = 4$ (número de medições entre as ações

de manutenção). Por fim, temos $M_i = 16 + (2 \times 3) + 2 = 24$; para a unidade experimental i , isso resulta em 24 medições de degradação no intervalo de estudo $[0, 20]$.

Pode-se perceber que a diferença entre os pontos pretos p_2 e p_1 no tempo de manutenção é chamada de salto. Nesse cenário de medição completa, os saltos são observados (esse conceito será revisitado na formulação do modelo (4.2)), o que facilita a medição dos efeitos da manutenção (LEROY *et al.*, 2023). Esses saltos representam a quantidade pela qual a degradação acumulada é reduzida a cada ação de manutenção, resultando em uma translação vertical da trajetória de degradação, preservando suas características gerais.

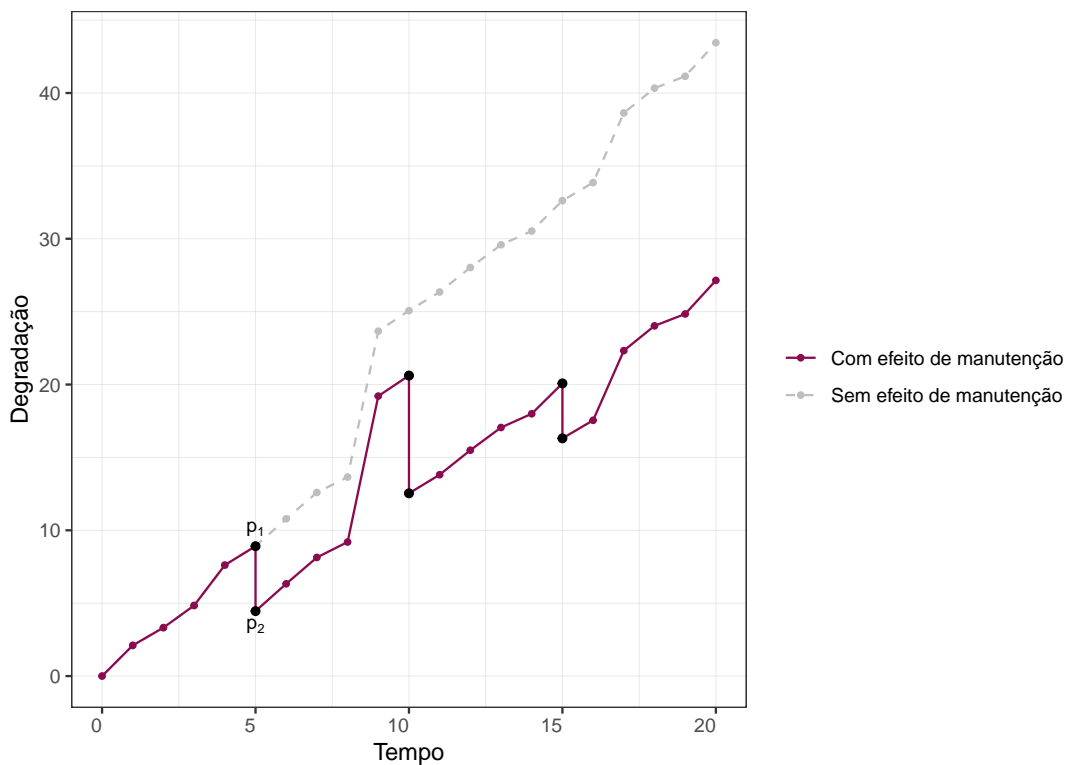


Figura 7 – Ilustração dos caminhos de degradação com e sem os efeitos das ações de manutenção.

A Figura 8 ilustra os caminhos de degradação de múltiplos sistemas reparáveis — mais especificamente, nove sistemas distintos. A construção e a lógica do processo de degradação ao longo do tempo seguem o mesmo princípio apresentado anteriormente na Figura 7, que descreve um único sistema. Nessa nova figura, observamos que duas ações de manutenção foram realizadas nos tempos $\tau_1 = 1,33$ e $\tau_2 = 2,66$, dentro do intervalo de estudo de 0 a 4 unidades de tempo. Além disso, os efeitos dessas manutenções foram imperfeitos, com valores iguais a $\theta_1 = 0,4$ e $\theta_2 = 0,9$, indicando a eficiência do reparo: quanto maior o valor, melhor o impacto na redução da degradação acumulada em cada manutenção.

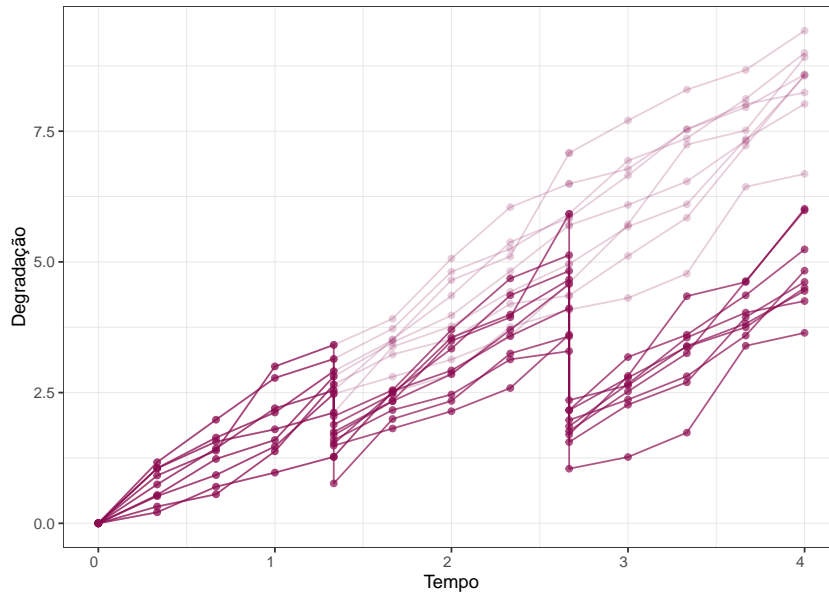


Figura 8 – Ilustração dos caminhos de degradação com e sem os efeitos das ações de manutenção para múltiplos sistemas.

4.1.2 O Processo de Degradação Subjacente

Seja $X(t)$ o nível de degradação no tempo t de um sistema sem ações de manutenção; pode-se definir $\{X(t), t \geq 0\}$ como o processo de degradação subjacente que descreve o caminho de degradação ou, simplesmente, o processo de linha de base, conforme definido anteriormente (ver 2.4.3).

Um processo Gaussiano inverso (PGI) $\{X(t), t \geq 0\}$, com função média $g_\mu(t)$ e parâmetro de forma λ , é um processo estocástico em tempo contínuo dado por:

$$X(t) \sim \text{GI}(g_\mu(t), \lambda [g_\mu(t)]^2), \quad (4.1)$$

onde $g_\mu(t)$ é uma função monotonicamente crescente e $\lambda > 0$. Portanto, definindo $g_\mu(0) = 0$ e $X(0) = 0$, resulta que $X(t)$ segue uma distribuição GI (Gaussiana inversa) com média $g_\mu(t)$ e variância $\frac{g_\mu(t)}{\lambda}$ (FOLKS; CHHIKARA, 1978; YE; CHEN, 2014; MORITA, 2017; FANG; PAN; WANG, 2022). É importante notar que a escolha da função $g_\mu(t)$ deve ser interpretável de acordo com o processo de degradação subjacente. Neste estudo, utilizamos a forma mais simples: uma função linear $g_\mu(t) = \mu t$, com um único parâmetro. No entanto, ao considerar formas alternativas para $g_\mu(t)$, é fundamental investigar se todos os parâmetros são identificáveis.

Seja Y definido como o incremento no intervalo de tempo $\Delta t > 0$, ou seja, $Y = \Delta X(t)$. Assim, $Y \sim \text{GI}(\Delta g_\mu(t), \lambda [\Delta g_\mu(t)]^2)$ e as variáveis são independentes, com $\mathbb{E}[Y] = \Delta g_\mu(t)$ e $\text{Var}[Y] = \frac{\Delta g_\mu(t)}{\lambda}$ (FOLKS; CHHIKARA, 1978). Portanto, sua função densidade de probabilidade

(FDP) e função de distribuição acumulada (FDA) são definidas, respectivamente, por

$$f_Y(y|\Delta g_\mu(t), \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}} \Delta g_\mu(t) e^{-\frac{\lambda (y - \Delta g_\mu(t))^2}{2y}},$$

e

$$F_Y(y|\Delta g_\mu(t), \lambda) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{y}} [y - \Delta g_\mu(t)]\right) + e^{2\lambda \Delta g_\mu(t)} \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{y}} [y + \Delta g_\mu(t)]\right),$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a FDA da distribuição Normal padrão.

A Figura 9 exibe as curvas de FDP e FDA para o incremento (Y) em diferentes cenários. Além disso, o caminho médio do processo pode assumir diferentes formas: quando $g_\mu(t) = \mu t$, $X(t)$ tem um caminho médio linear; caso contrário, seu caminho médio não é linear. Primeiro, consideramos $\lambda = 2$ fixo e variamos μ ; em seguida, consideramos $\mu = 5$ fixo e variamos λ . Em todos os cenários, consideramos $\Delta g_\mu(t) = \mu \Delta t$ e $\Delta t = 1,5$.

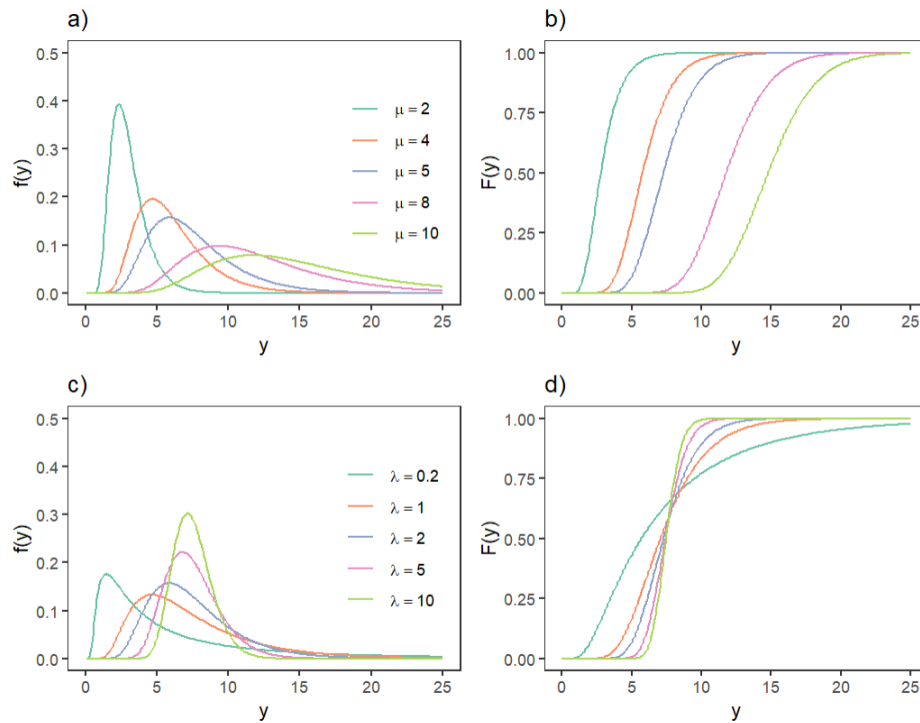


Figura 9 – FDP e FDA para o incremento (Y) em diferentes cenários: a) e b) para λ fixo ($\lambda = 2$); c) e d) para μ fixo ($\mu = 5$).

4.1.3 Modelo de Degradação ARD_1

Adota-se o modelo de Redução Aritmética da Degradação de memória um (ARD_1), no qual cada manutenção imperfeita reduz proporcionalmente a degradação acumulada desde a última intervenção. O processo observado $Z(t)$ é obtido do processo base $X(t)$ aplicando um parâmetro de efeito $\theta \in [0, 1]$, de modo que, para $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}[$,

$$Z(t) = Z(\tau_j^+) + X(t) - X(\tau_j) = X(t) - \theta X(\tau_j),$$

produzindo saltos na trajetória após cada reparo. Para mais detalhes, ver a Seção 2.5.

Durante a evolução do processo, ocorrem saltos (S_j) associados às ações de manutenção. Esses saltos refletem a mudança instantânea no nível de degradação antes e depois de cada intervenção. Observe na Figura 7 que p_1 e p_2 são $Z(\tau_1^-)$ e $Z(\tau_1^+)$, respectivamente, representando o estado do processo imediatamente antes e imediatamente após o primeiro reparo.

A seguir, na formulação do modelo proposto (ver 4.2), cada ação de manutenção expõe o sistema a diferentes efeitos, resultando em um parâmetro θ que varia ao longo do tempo. Portanto, o modelo leva esse aspecto em consideração em sua formulação. Por exemplo, considere o desgaste progressivo de rolamentos em turbinas eólicas, em que a vibração (medida em micrômetros por segundo) é um indicador crítico de degradação. Ao longo do tempo, a amplitude das vibrações cresce de forma monótona devido a mecanismos como corrosão ou folgas mecânicas nos rolamentos. Intervenções de manutenção — como limpeza, lubrificação ou substituição — introduzem reduções (saltos) na degradação sem alterar a tendência monótona subjacente. Modelar essa trajetória entre reparos, incorporando os efeitos das ações de manutenção (θ_j), é essencial para otimizar políticas de manutenção e garantir a confiabilidade do sistema.

Esse cenário representa um problema típico abordado pelo modelo proposto neste trabalho: trajetórias de degradação monótonas são interrompidas por ações de reparo. Essas intervenções podem variar desde um reparo mínimo - RM (limpeza do rolamento, $\theta_j = 0$) até reparos perfeitos - RP (substituição completa do componente, $\theta_j = 1$) ou reparos imperfeitos - RI (lubrificação e ajustes no componente, $0 < \theta_j < 1$). Assim, é fundamental incorporar ao modelo os efeitos distintos associados a cada tipo de intervenção. Especificamente, é necessário considerar: (i) a singularidade de cada reparo, que depende de fatores internos (a condição atual do componente) e externos (condições de operação e qualidade da manutenção); e (ii) os efeitos que variam ao longo do tempo — uma vez que o impacto de um reparo depende do momento em que é realizado, e diferentes turbinas submetidas à mesma intervenção no instante j podem experimentar efeitos semelhantes.

Assumir efeitos idênticos ($\theta_j = \theta_0, \forall j$) para reparos realizados em momentos distintos constitui uma simplificação irrealista, comprometendo a eficácia do modelo. Isso ocorre porque o impacto da j -ésima ação de manutenção não é necessariamente constante — ele pode ser maior ou menor do que o observado em intervenções anteriores (θ_{j-1}) ou posteriores (θ_{j+1}). Portanto, não se impõem restrições sobre como os efeitos da manutenção variam ao longo do tempo; eles podem aumentar, diminuir ou até mesmo se repetir em diferentes eventos de manutenção (para mais detalhes, ver Apêndice A.1).

Além disso, considerar efeitos de manutenção que variam no tempo, em vez de assumir um impacto constante, possibilita uma representação mais fiel do comportamento do sistema sob manutenção. Em sistemas como os rolamentos de turbinas eólicas, nos quais pequenas reduções nos níveis de vibração podem se reverter em vários meses adicionais de operação, capturar com precisão esse efeito é determinante para prever de forma confiável o momento

ótimo das próximas intervenções. Modelos clássicos muitas vezes não captam essa dinâmica porque assumem: (i) um efeito constante dos reparos; e (ii) trajetórias de degradação invariantes às intervenções. Essas suposições são inconsistentes com o comportamento de sistemas reais, nos quais cada ação de manutenção afeta não apenas o nível instantâneo de degradação, mas também funções derivadas de interesse, com base na condição atual do sistema. Portanto, neste estudo, assumimos que o impacto da manutenção varia a cada ação, diferenciando-o de outros trabalhos recentes na literatura que assumem efeitos de manutenção constantes (SALLES, 2020; IRANMANESH; CHAHKANDI, 2022; LEROY *et al.*, 2023; LEROY *et al.*, 2024).

4.2 Formulação do Modelo

Esta seção apresenta o modelo de trajetória de degradação que incorpora os efeitos das ações de manutenção sobre a degradação do sistema, utilizando o modelo ARD_1 e o PGI, no contexto de múltiplos sistemas. Em outras palavras, propomos o modelo de Redução Aritmética da Degradação de ordem 1 com processo Gaussiano inverso (ARD_{1PGI}).

4.2.1 Modelo da Trajetória de Degradação ARD_{1PGI}

No modelo de ajuste da trajetória de degradação, a influência das ações de manutenção preventiva (MP) é representada pela quantidade de redução da degradação antes e após cada reparo (MERCIER; CASTRO, 2019; WANG *et al.*, 2021a; LEROY *et al.*, 2023).

Suponha que, para os n sistemas analisados, as ações de manutenção ocorreram nos tempos de inspeção $\tau_j, \forall j = 1, 2, \dots, k$, com $\tau_0 = 0$ e $\tau_{k+1} = \tau$, ou seja, nos instantes em que o sistema foi submetido a um reparo.

Além disso, considere que a degradação foi registrada para o sistema i em cada intervalo $[\tau_j, \tau_{j+1}], \forall j \in \{0, \dots, k\}$, nos tempos de inspeção

$$\tau_j = t_{i,j,0} < t_{i,j,1} < t_{i,j,2} < \dots < t_{i,j,m_{i,j}} < t_{i,j,m_{i,j}+1} = \tau_{j+1},$$

onde temos um total de $m_{i,j} + 2$ observações, sendo $m_{i,j}$ o número de medições entre as ações de manutenção no intervalo $]\tau_j, \tau_{j+1}[$. Considerando que os incrementos são independentes no PGI, as quantidades de interesse são os incrementos de degradação observados. Assim, as observações são os níveis de degradação $Z(t_{i,j,p})$ nos tempos $t_{i,j,p}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{0, \dots, k\}$, e $p \in \{0, \dots, m_{i,j} + 1\}$. Os intervalos de tempo entre observações são

$$\Delta t_{i,j,p} = t_{i,j,p} - t_{i,j,p-1}, \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}, \forall p \in \{1, \dots, m_{i,j} + 1\},$$

e os incrementos de degradação são

$$\Delta Z(t_{i,j,p}) = Z(t_{i,j,p}) - Z(t_{i,j,p-1}), \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}, \forall p \in \{1, \dots, m_{i,j} + 1\}.$$

Seja $Z_i(\tau_j^-) = Z(t_{i,j-1,m_{i,j-1}+1})$, representando a degradação intrínseca do sistema i no instante de tempo τ_j imediatamente antes da manutenção, e seja $Z_i(\tau_j^+) = Z(t_{i,j,0})$, representando o nível de degradação imediatamente após a manutenção. Esses níveis são definidos como:

$$\begin{aligned} Z_i(\tau_j^-) &= X_i(\tau_j) - \sum_{l=1}^{j-1} \theta_l [X_i(\tau_l) - X_i(\tau_{l-1})], \\ Z_i(\tau_j^+) &= X_i(\tau_j) - \sum_{l=1}^j \theta_l [X_i(\tau_l) - X_i(\tau_{l-1})]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Seja \tilde{Z}_i a trajetória de degradação do sistema i em $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}[$. O $\text{ARD}_{1\text{PGI}}$ é tal que

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_i(t) &= Z_i(\tau_j^+) + [X_i(t) - X_i(\tau_j)] \\ &= X_i(t) - \sum_{l=1}^j \theta_l [X_i(\tau_l) - X_i(\tau_{l-1})], \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde θ_j é o fator de redução de degradação da j -ésima ação de MP; além disso, $\theta_j \in [0, 1]$ e, quanto maior seu valor, maior a eficiência da manutenção, ou seja:

$$\theta_j = \begin{cases} 0 & \text{se RM,} \\ \in (0, 1) & \text{se RI,} \\ 1 & \text{se RP.} \end{cases}$$

Finalmente, $X_i(t)$ é o processo de degradação do i -ésimo sistema e pode ser definido como em (4.1). Note que a passagem da primeira para a segunda linha em (4.3) ocorre porque podemos reescrever $Z_i(\tau_j^+)$ conforme definido em (4.2), que representa o nível de degradação logo após a j -ésima ação de MP e é formulado como $Z_i(\tau_j^+) = Z_i(\tau_{j-1}^+) + [X_i(\tau_j) - X_i(\tau_{j-1})] (1 - \theta_j)$.

4.2.2 Inferência Estatística

Para a estimação, utilizamos o método de máxima verossimilhança com base nas observações do processo de degradação em $[0, \tau]$. Note que dois tipos de observações contribuem para a verossimilhança: (i) os incrementos de degradação e (ii) os saltos observados em torno dos tempos de manutenção. Definimos o conjunto $\mathcal{O}_{\tau_j}^{(i)}$, formado pelas observações imediatamente antes de τ_j , ou seja, pelos incrementos e saltos observados antes da j -ésima manutenção para o i -ésimo sistema:

$$\mathcal{O}_{\tau_j}^{(i)} = \{\Delta z_{i,0,1}, \dots, \Delta z_{i,0,m_{i,0}+1}, S_1^{(i)}, \Delta z_{i,1,1}, \dots, \Delta z_{i,j-2,m_{i,j-2}+1}, S_{j-1}^{(i)}, \Delta z_{i,j-1,1}, \dots, \Delta z_{i,j-1,m_{i,j-1}+1}\}.$$

A verossimilhança $\mathcal{L}(\mu, \lambda, \theta)$ tem duas partes. A parte relacionada aos incrementos de degradação consiste no produto das densidades desses incrementos, devido à independência dos incrementos do PGI. A parte relacionada aos saltos de degradação é mais complexa e depende

do esquema de observação adotado, como enfatizado em [Leroy et al. \(2023\)](#). Uma expressão geral para a verossimilhança é:

$$\mathcal{L}(\mu, \lambda, \theta) = \left[\prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^k \prod_{p=1}^{m_{i,j}+1} f_{\Delta Z_{i,j,p}}(\Delta z_{i,j,p}) \right] \left[\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k f_{S_j^{(i)} | \mathcal{O}_j^{(i)}}(s_j^{(i)}) \right], \quad (4.4)$$

onde $\mathcal{O}_j^{(i)}$ é o conjunto de observações imediatamente antes de τ_j , composto pelos incrementos e saltos antes da j -ésima manutenção para o i -ésimo sistema. Como $X_i(t)$ segue um PGI e $Y_{i,j,p} = \Delta Z_{i,j,p}$, temos $Y_{i,j,p} \sim \text{GI}(\Delta g_\mu(t_{i,j,p}), \lambda [\Delta g_\mu(t_{i,j,p})]^2)$, como definido na Seção 4.1.2.

Em alguns contextos, pode ser desafiador determinar a distribuição condicional dos saltos observados, dados os históricos. No entanto, no nosso caso de observações completas, os níveis de degradação foram medidos imediatamente antes e após cada ação de manutenção. Consequentemente, os saltos são diretamente observados, o que simplifica a verossimilhança, reduzindo-a apenas ao termo correspondente aos incrementos. Como $S_j^{(i)}$ é completamente conhecido, temos:

$$f_{S_j^{(i)} | \mathcal{O}_j^{(i)}}(s_j^{(i)}) = \mathbb{1}_{s_j^{(i)} = -\theta_j \sum_{p=1}^{m_{i,j-1}+1} \Delta z_{i,j-1,p}},$$

que segue uma distribuição de Dirac ([LEROY et al., 2023](#)).

Portanto, seguindo a definição apresentada na Seção 2.5 e assumindo (4.2), temos que, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$S_j^{(i)} = Z_i(\tau_j^+) - Z_i(\tau_j^-) = -\theta_j [X_i(\tau_j) - X_i(\tau_{j-1})] = -\theta_j \sum_{p=1}^{m_{i,j-1}+1} \Delta Z_{i,j-1,p}. \quad (4.5)$$

Assim, a função de verossimilhança é dada por:

$$\mathcal{L}(\mu, \lambda) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^k \prod_{p=1}^{m_{i,j}+1} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y_{i,j,p}^3}} \Delta g_\mu(t_{i,j,p}) e^{-\frac{\lambda (y_{i,j,p} - \Delta g_\mu(t_{i,j,p}))^2}{2y_{i,j,p}}}, \quad (4.6)$$

onde $\Delta g_\mu(t_{i,j,p}) = g_\mu(t_{i,j,p}) - g_\mu(t_{i,j,p-1})$ é o aumento observado na função média durante o intervalo de tempo $\Delta t_{i,j,p} = t_{i,j,p} - t_{i,j,p-1}$.

Note que em (4.6) podem-se estimar os parâmetros μ e λ , já que os θ_j podem ser obtidos analiticamente. Pela expressão (4.5), para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ temos:

$$\theta_j = \frac{-s_j^{(i)}}{\sum_{p=1}^{m_{i,j-1}+1} \Delta z_{i,j-1,p}}. \quad (4.7)$$

Nesta expressão, evidencia-se a propriedade do modelo ARD_1 : o efeito da manutenção atua reduzindo a degradação acumulada desde a última ação de manutenção.

Como o logaritmo é uma função contínua e estritamente crescente no domínio da verossimilhança, os valores que maximizam a verossimilhança também maximizam seu logaritmo. Além disso, maximizar o logaritmo geralmente envolve uma álgebra mais simples. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \log(\mathcal{L}) &= \log \left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^k \prod_{p=1}^{m_{i,j}+1} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y_{i,j,p}^3}} \Delta g_{\mu}(t_{i,j,p}) \exp \left\{ -\frac{\lambda (y_{i,j,p} - \Delta g_{\mu}(t_{i,j,p}))^2}{2y_{i,j,p}} \right\} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{i,j}+1} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{\lambda}{2\pi y_{i,j,p}^3} \right) + \log (\Delta g_{\mu}(t_{i,j,p})) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda}{2y_{i,j,p}} \left(y_{i,j,p}^2 - 2y_{i,j,p} \Delta g_{\mu}(t_{i,j,p}) + [\Delta g_{\mu}(t_{i,j,p})]^2 \right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{i,j}+1} \left[\frac{1}{2} \log(\lambda) - \frac{1}{2} \log(2\pi y_{i,j,p}^3) + \log(\Delta g_{\mu}(t_{i,j,p})) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\lambda y_{i,j,p}}{2} + \lambda \Delta g_{\mu}(t_{i,j,p}) - \frac{\lambda}{2} \frac{[\Delta g_{\mu}(t_{i,j,p})]^2}{y_{i,j,p}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{i,j}+1} \log(\lambda) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{i,j}+1} \log(2\pi y_{i,j,p}^3) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{i,j}+1} \log(\Delta g_{\mu}(t_{i,j,p})) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{i,j}+1} y_{i,j,p} \\
 &\quad + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{i,j}+1} \Delta g_{\mu}(t_{i,j,p}) - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{i,j}+1} \frac{[\Delta g_{\mu}(t_{i,j,p})]^2}{y_{i,j,p}}. \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

Considerando a complexidade da expressão (4.8), podemos utilizar métodos numéricos para obter as estimativas. Os intervalos de confiança dos parâmetros do modelo podem ser construídos a partir da teoria assintótica, com base nas propriedades dos estimadores de máxima verossimilhança (EMV) e da distribuição Normal.

4.3 Estudo de Simulação

Nesta seção, apresentamos um estudo de simulação projetado para avaliar a eficiência e a consistência dos EMV, derivados pela maximização da função de log-verossimilhança apresentada na equação (4.8). O objetivo é demonstrar que as propriedades assintóticas dos EMV propostos são atendidas em amostras extraídas de populações com características variadas, explorando diferentes cenários. Examinamos três métricas comumente utilizadas em estudos semelhantes: Erro Relativo Médio (MRE), Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE) e Probabilidade de Cobertura (CP). Elas são definidas, respectivamente, por

$$\text{MRE}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m}{\gamma}, \quad \text{RMSE}(\hat{\gamma}) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\gamma}_m - \gamma)^2} \quad e$$

$$\text{CP}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{I}[\gamma \in (a_m, b_m)],$$

em que:

- M é o número de amostras geradas;
- $\gamma \in \boldsymbol{\gamma} = (\mu, \lambda)$ é o parâmetro de interesse, e $\hat{\gamma}_m$ é sua estimativa na m -ésima amostra;
- $EP(\hat{\gamma}_m)$ é o erro padrão de $\hat{\gamma}_m$;
- $a_m = \hat{\gamma}_m - 1,96 \times EP(\hat{\gamma}_m)$ e $b_m = \hat{\gamma}_m + 1,96 \times EP(\hat{\gamma}_m)$ são, respectivamente, os limites inferior e superior do IC de 95% para γ estimado na m -ésima amostra;
- $\mathbb{I}[\cdot]$ é a função indicadora.

À medida que o tamanho da amostra aumenta, espera-se que o MRE se aproxime de 1, o RMSE diminua em direção a 0 e o CP convirja para o nível nominal de 0,95 (95%).

Para gerar as trajetórias de degradação de cada sistema, empregamos um procedimento em duas etapas. A primeira etapa envolve a geração da trajetória de degradação subjacente $X(t)$. Isso é feito obtendo observações de uma distribuição GI com os parâmetros de interesse (MORITA, 2017). Esses valores são, então, acumulados ao longo do tempo, resultando em uma trajetória acumulada. Na segunda etapa, construímos o processo de degradação $Z(t)$, que é uma função de $X(t)$ e depende dos efeitos de manutenção θ_j , para $j = 1, \dots, k$. Expressões detalhadas são fornecidas no Apêndice A.3.2.

No contexto de processos de degradação, o parâmetro μ (deriva) caracteriza a tendência na evolução do processo. Esse parâmetro influencia a trajetória média do processo de degradação, determinando sua taxa e direção ao longo do tempo. Especificamente, uma deriva positiva indica uma tendência crescente no processo de degradação ao longo do tempo, refletida como uma inclinação positiva na trajetória.

Por outro lado, o parâmetro λ está inversamente relacionado à variabilidade do processo de degradação, refletindo a extensão das flutuações em torno da trajetória média. Um valor maior de λ corresponde a menos variabilidade nos dados, resultando em uma trajetória de degradação mais suave e previsível, com flutuações reduzidas ao longo do tempo. Em contraste, valores menores de λ estão associados a processos de degradação mais imprevisíveis, caracterizados por flutuações pronunciadas.

O tamanho final da amostra foi determinado aumentando o número de sistemas (n) e o número de medições observadas entre as ações de MP ($m_{i,j}$), que, neste estudo, são assumidas como fixas entre diferentes sistemas e entre os tempos de manutenção (τ_j). Foram explorados vários valores de m e diferentes números de ações de manutenção (k).

O estudo de simulação considerou cenários com diferentes tamanhos de amostra com base no número de sistemas $n = \{10, 30, 50, 100, 200\}$, no número de ações de manutenção $k = \{2, 3, 4\}$ e no número de medições observadas entre as ações de manutenção $m = \{0, 3, 5\}$.

É importante notar que o tamanho final da amostra para a trajetória de degradação base de cada observação i é dado por $M_i = N + 2k + 2$, onde $N = m \times (k + 1)$. Assim, quando $m = 0$, as trajetórias incluem medições apenas nos tempos de MP e, com valores menores de m e k , menos medições estão disponíveis para cada sistema.

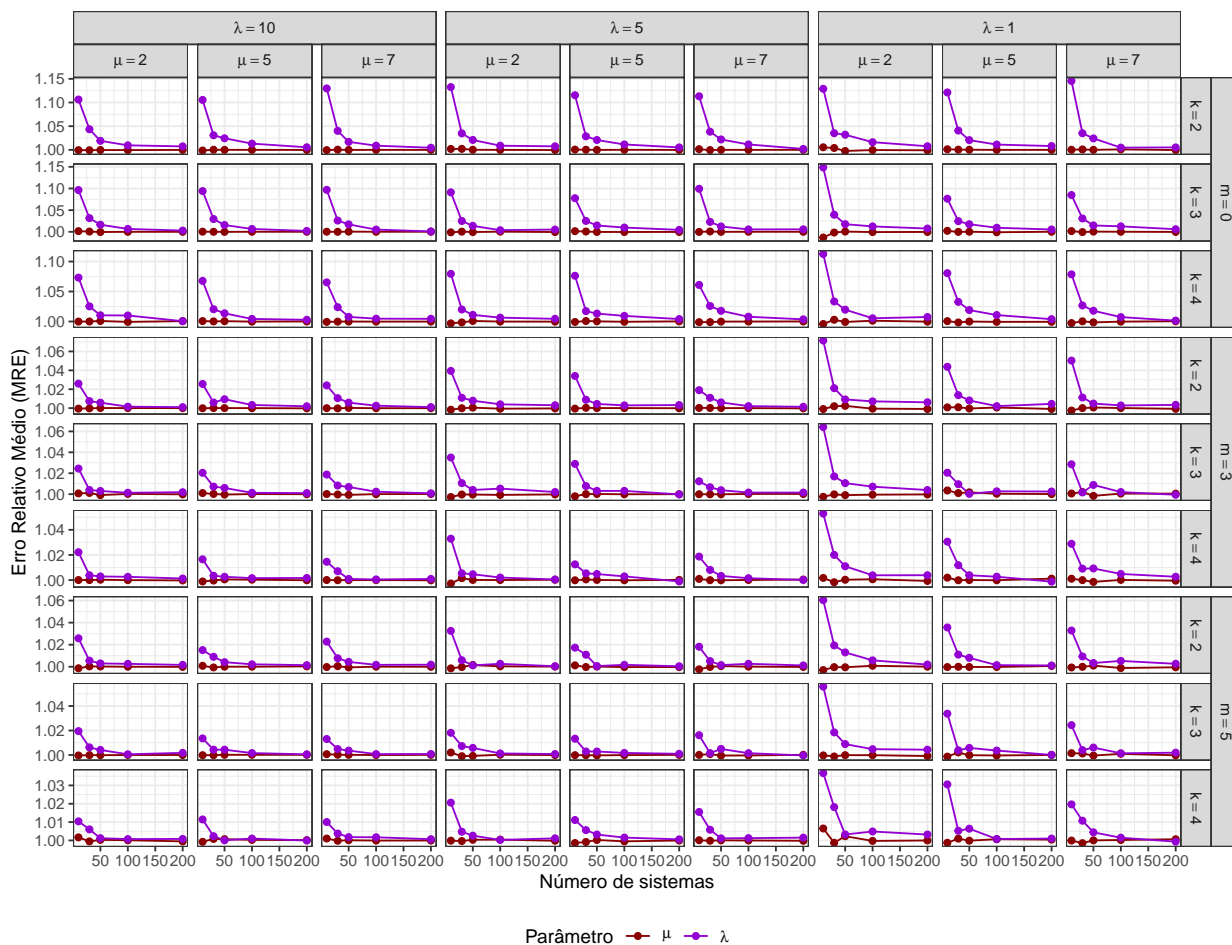


Figura 10 – Resultados da simulação — MRE.

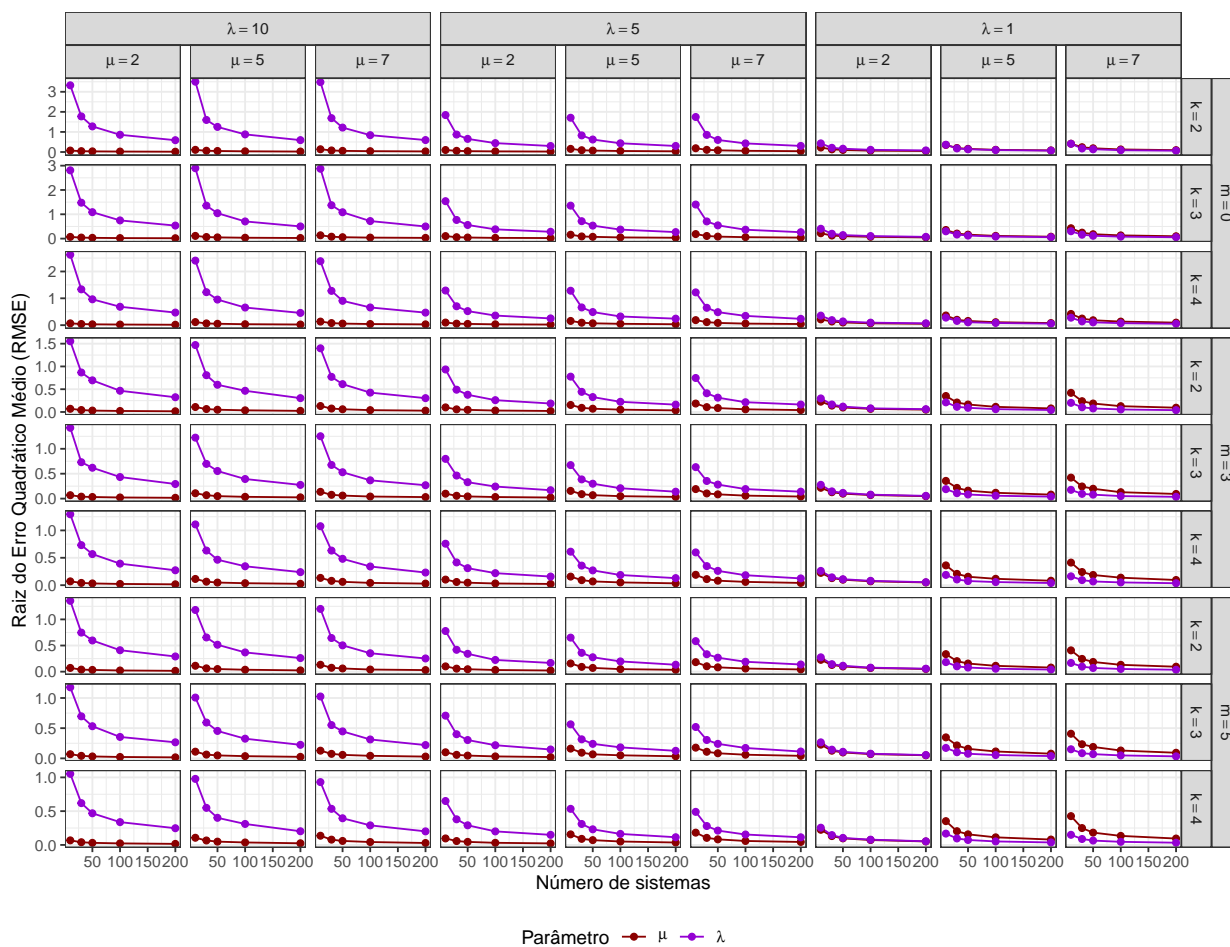


Figura 11 – Resultados da simulação — RMSE.

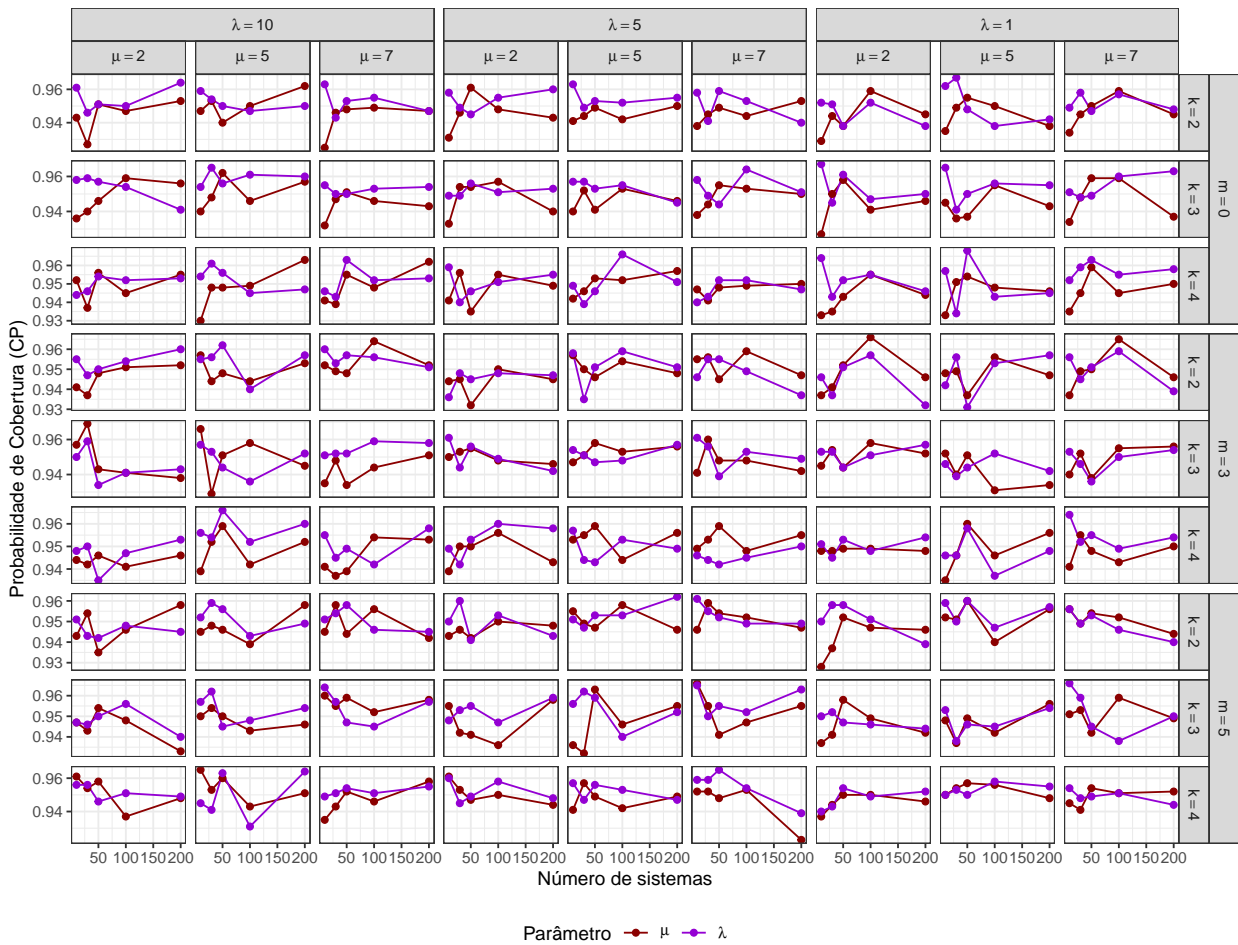


Figura 12 – Resultados da simulação — CP.

Para as trajetórias de degradação investigadas, assumimos três valores para o parâmetro μ (2, 5 e 7), representando inclinações distintas, e três valores para λ (1, 5 e 10), indicando diferentes níveis de variabilidade. Além disso, assumimos $g_\mu(t) = \mu t$ e exploramos diferentes valores de θ , com o tamanho do vetor θ dependendo do tamanho de k , ou seja, $\theta = \{(0, 3; 0, 5), (0, 3; 0, 5; 0, 7), (0, 3; 0, 5; 0, 7; 0, 9)\}$. No entanto, não foram observadas diferenças significativas nos resultados. Essa abordagem não interferiu nas estimativas de μ e λ , pois θ é calculado analiticamente, o que significa que a verossimilhança depende apenas dos incrementos de degradação, conforme discutido na Seção 4.2.2.

Uma representação visual das trajetórias de degradação geradas no estudo de simulação é fornecida na Figura 13. Por exemplo, ao assumir $n = 2$, $m = 3$, $k = 4$, $\mu = 2$ e $\lambda = 5$, e efeitos de manutenção $\theta = (0, 3; 0, 5; 0, 7; 0, 9)$, pode-se observar nesta figura que as trajetórias suaves correspondem às trajetórias de degradação sem ações de manutenção (ou seja, os processos subjacentes $X(t)$ considerados como base), enquanto as outras trajetórias representam sistemas sujeitos a ações de manutenção nos tempos $\tau = (4, 8, 12, 16)$, representando os processos de degradação $Z(t)$.

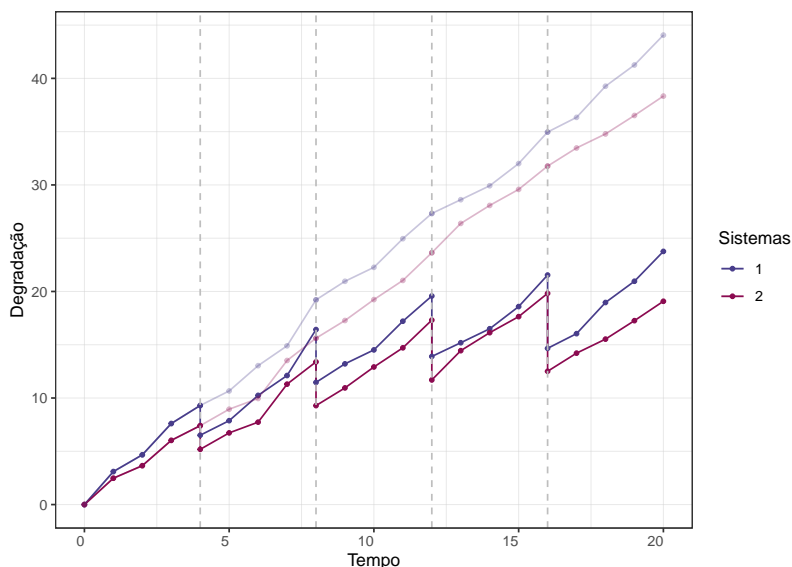


Figura 13 – Ilustração das trajetórias de degradação geradas no estudo de simulação.

Para cada cenário, foram geradas 1.000 amostras e, para cada amostra, as estimativas $\hat{\mu}$ e $\hat{\lambda}$ foram obtidas para os parâmetros μ e λ , respectivamente. As métricas MRE, RMSE e CP foram então calculadas. Os resultados, apresentados nas Figura 10, Figura 11 e Figura 12, indicam que o comportamento esperado das três métricas é consistentemente observado em todos os cenários. Observe que, nas figuras que resumem as métricas avaliadas no estudo de simulação, o eixo y apresenta escalas diferentes, devido às distintas magnitudes observadas nos diversos cenários.

Notavelmente, o aumento do tamanho da amostra (ou seja, o aumento do número de sistemas observados) e valores mais altos de m e k resultam em um CP mais próximo do valor nominal (95%) e um RMSE mais próximo de 0 para todas as combinações de parâmetros. Além disso, o MRE converge para o valor nominal (1) à medida que o tamanho da amostra aumenta (Figura 10).

Em geral, o estudo de simulação demonstra que os estimadores do modelo proposto apresentam bom desempenho, com melhorias à medida que o tamanho da amostra aumenta, um comportamento consistente com as propriedades assintóticas dos EMV. Neste estudo, optamos pelo intervalo de confiança (IC) baseado na aproximação assintótica dos EMV, pois é computacionalmente menos custoso. Além disso, nossos experimentos de simulação não indicaram problemas de precisão com essa abordagem. No entanto, sempre que possível, recomendamos o uso do IC exato.

4.4 Aplicação a Dados Reais

Os dados analisados referem-se a 15 unidades de um dispositivo *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* (LASER), originalmente investigados no estudo de [Meeker](#)

e Escobar (1998). As observações foram registradas ao longo de um período de 4.000 horas de operação, com medições realizadas em intervalos de tempo equidistantes (ver Figura 14). A Tabela 6 fornece uma subamostra desses dados de degradação para os três primeiros sistemas.

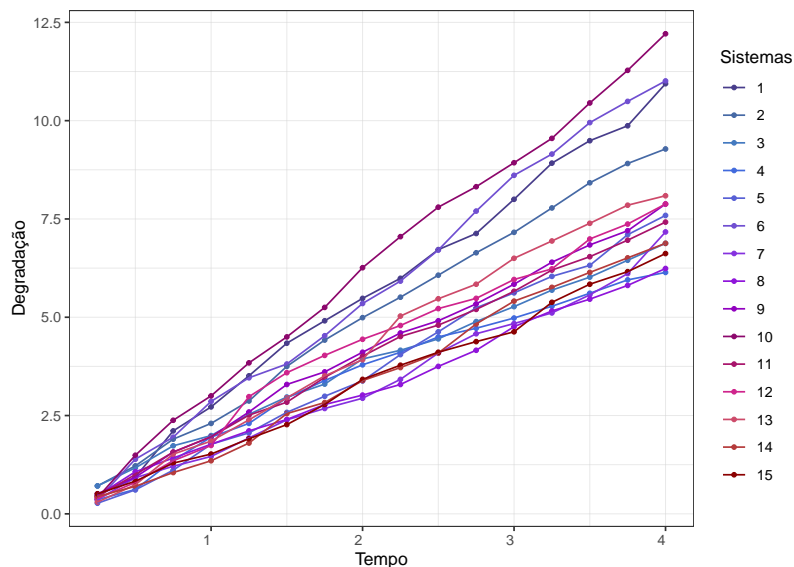


Figura 14 – Trajetórias de degradação dos dados LASER ao longo do tempo (em 1.000 horas).

Tabela 6 – Registros de degradação para os três primeiros sistemas no conjunto de dados LASER.

Sistema 1	0	0,47	0,93	2,11	2,72	3,51	4,34	4,91	5,48	5,99
	6,72	7,13	8	8,92	9,49	9,87	10,94			
Sistema 2	0	0,71	1,22	1,90	2,30	2,87	3,75	4,42	4,99	5,51
	6,07	6,64	7,16	7,78	8,42	8,91	9,28			
Sistema 3	0	0,71	1,17	1,73	1,99	2,53	2,97	3,30	3,94	4,16
	4,45	4,89	5,27	5,69	6,02	6,45	6,88			

Dispositivos como um LASER degradam-se ao longo do tempo, levando a uma diminuição na intensidade da luz emitida. Essa luminosidade pode ser mantida em um nível relativamente constante aumentando a corrente de operação. Para cada unidade LASER, a medida de degradação foi definida como o aumento percentual da corrente ao longo do tempo em relação à corrente nominal. Quando essa corrente atinge um valor suficientemente alto, a unidade é considerada falha. Um critério de falha foi estabelecido para cada unidade, onde a falha é definida quando a medida de degradação atinge um limite L . No estudo de Meeker e Escobar (1998), L foi definido como 10%, o que significa que um aumento de 10% na corrente indica falha. A Figura 14 ilustra as trajetórias de degradação. As trajetórias amostrais dos dados LASER apresentam comportamento monotônico crescente. Assim, o PGI é frequentemente adotado quando a monotonicidade é necessária (MORITA, 2017).

No estudo de Peng (2015), diferentes processos estocásticos foram considerados para modelar esses dados, incluindo os processos de Wiener, Gama e GI, demonstrando que modelos

monotônicos fornecem um ajuste melhor em comparação com modelos não monotônicos. Entre esses modelos, o PGI foi selecionado como a alternativa mais adequada com base no *Critério de Informação de Akaike (AIC)* (AKAIKE, 1977). Seguindo esse estudo, esse processo foi adotado em pesquisas subsequentes, por exemplo, no estudo de Morita *et al.* (2021), o PGI foi utilizado com diferentes componentes de fragilidade para descrever a degradação do LASER, reforçando ainda mais sua aplicabilidade na modelagem desse fenômeno.

Utilizamos as trajetórias de degradação observadas como processos base $X(t)$ e assumimos que efeitos de manutenção ocorreram, construindo assim os processos de degradação $Z(t)$. Essa abordagem nos permite aplicar a estrutura de modelagem sob diferentes suposições em relação aos efeitos da MP. É essencial enfatizar que as trajetórias de degradação observadas correspondem a dados reais, que não incluem inerentemente ações de manutenção. A introdução de efeitos de manutenção é puramente ilustrativa e visa explorar diferentes cenários, demonstrando como a estrutura de modelagem se comporta sob várias suposições de MP. Essa abordagem nos permite avaliar o impacto potencial de estratégias de manutenção sem modificar o padrão intrínseco de degradação dos dados reais.

Para ilustrar os diferentes efeitos de manutenção considerando a expressão em (4.7), podemos ter três cenários de manutenção que contribuem para uma compreensão aprofundada de como diferentes abordagens impactam o processo de degradação do sistema. No Cenário 1, assume-se que todas as ações de manutenção são igualmente imperfeitas, uma suposição comumente adotada em estudos recentes da literatura. Por exemplo, podemos imaginar que os dispositivos LASER são constantemente submetidos às mesmas condições de MP, refletindo uma constância nos efeitos de manutenção. No entanto, tal suposição pode precisar ser revisada, considerando fatores externos que afetam a qualidade da manutenção, como variações nas condições operacionais ou na execução técnica.

Os Cenários 2 e 3 focam em uma proposta de modelagem que suporta variações nos efeitos das ações de manutenção, mesmo sob um protocolo preventivo padronizado. Reconhecemos que fatores como a condição do equipamento, condições climáticas e a forma como cada operador conduz a manutenção influenciam diretamente os resultados, resultando em impactos diferentes na confiabilidade do sistema. Além disso, esses cenários ilustram trajetórias particulares ao considerar efeitos extremos de manutenção: mínimo (o sistema permanece tão degradado quanto antes da manutenção) e perfeito (o sistema é restaurado à condição de novo desde a última ação de manutenção). No Cenário 2, os efeitos de manutenção melhoram progressivamente, com a última ação sendo perfeita. Assim, o gerenciamento acumulado é reduzido ao estado inicial deixado pela intervenção anterior, facilitando uma restauração completa. Por outro lado, no Cenário 3, a última ação de manutenção é mínima, resultando em uma trajetória de manipulação que permanece inalterada.

Para adaptar a aplicação ao contexto de modelagem apresentado neste estudo, assumimos que cada dispositivo LASER foi submetido a MP nos tempos $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$ e $\tau_3 = 3$. Para

explorar e analisar diferentes contextos, consideramos vários cenários:

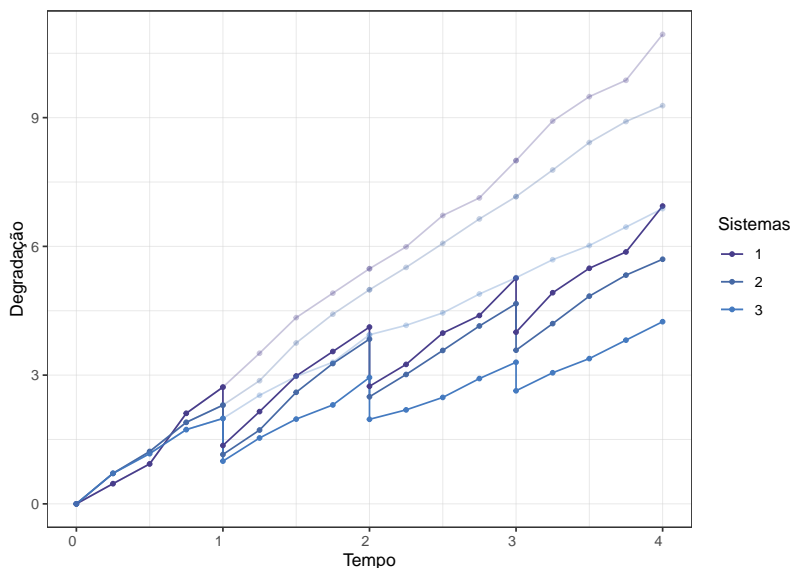


Figura 15 – Trajetórias de degradação para os três primeiros sistemas – Cenário 1.

• Cenário 1: Efeitos de manutenção constantes ao longo do tempo

Neste cenário, assumimos que os sistemas experimentaram reparos imperfeitos idênticos durante as ações de manutenção, com $\theta_j = 0,5, \forall j = 1, 2, 3$. Para facilitar a ilustração gráfica, apresentamos as trajetórias de degradação para os sistemas indicados na Tabela 6.

Para calcular θ_j , focaremos no primeiro sistema, mas o mesmo procedimento pode ser aplicado a outros sistemas no conjunto de dados. Dado que θ é derivado analiticamente usando a expressão em (4.7), determinaremos os valores assumidos para cada cenário. Na Figura 15, as trajetórias de degradação mais suaves representam os dados reais dos três primeiros sistemas, enquanto as trajetórias mais acentuadas correspondem às trajetórias sob a suposição de manutenção imperfeita com $\theta = 0,5$.

Especificamente, para o primeiro sistema, nos tempos de manutenção, a degradação acumulada foi reduzida de 2,72 para 1,36, de 4,12 para 2,74 e de 5,26 para 4,00, conforme mostrado na Figura 16. Essas reduções nos níveis de degradação aparecem como saltos na trajetória de degradação e são identificadas em um cenário totalmente observado.

Considerando a expressão em (4.7) e os dados do sistema 1 na Tabela 6, calculamos

$$\theta_j = \frac{-s_j^{(1)}}{\sum_{p=1}^{m_{1,j-1}+1} \Delta z_{1,j-1,p}}, \text{ para } j = 1, 2, 3. \text{ Como } \forall m_{i,j} = 3, \text{ temos:}$$

- $\theta_1 = \frac{-(1,36-2,72)}{(0,47+0,46+1,18+0,61)} = \frac{1,36}{2,72} = 0,5;$
- $\theta_2 = \frac{-(2,74-4,12)}{(0,79+0,83+0,57+0,57)} = \frac{1,38}{2,76} = 0,5;$
- $\theta_3 = \frac{-(2,74-4,12)}{(0,51+0,73+0,41+0,87)} = \frac{1,26}{2,52} = 0,5.$

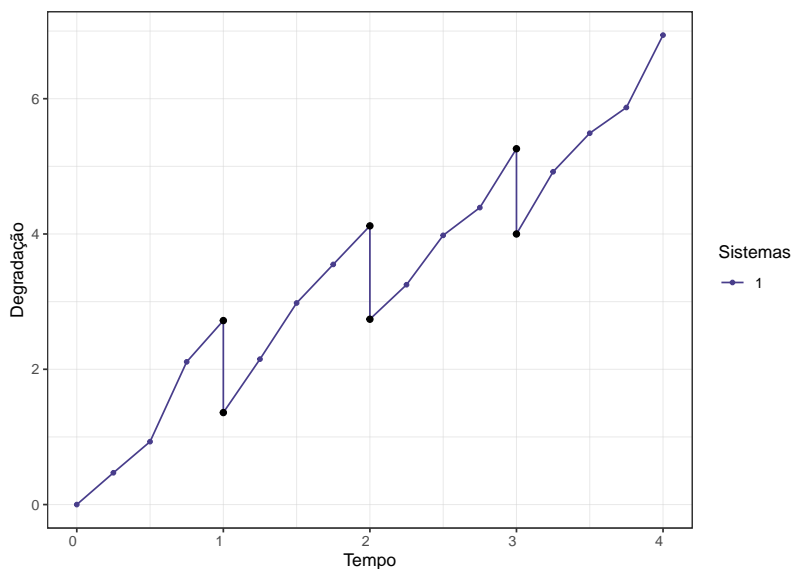


Figura 16 – Trajetória de degradação com efeito de manutenção para o sistema 1 – Cenário 1.

É evidente, a partir da expressão acima, que o mecanismo para medir os efeitos da manutenção depende não apenas da redução do nível de degradação, mas também da degradação acumulada desde o último reparo, uma característica inerente ao modelo ARD_1 .

- **Cenário 2: Efeitos de manutenção que melhoram ao longo do tempo**

Neste cenário, assumimos que os sistemas passam por reparos que melhoram progressivamente ao longo do tempo, com o último reparo sendo perfeito, ou seja, $\theta_1 = 0,3$, $\theta_2 = 0,7$ e $\theta_3 = 1$. Como no Cenário 1, voltaremos às trajetórias de degradação dos sistemas indicados na Tabela 6. Para calcular θ_j , focaremos novamente no primeiro sistema.

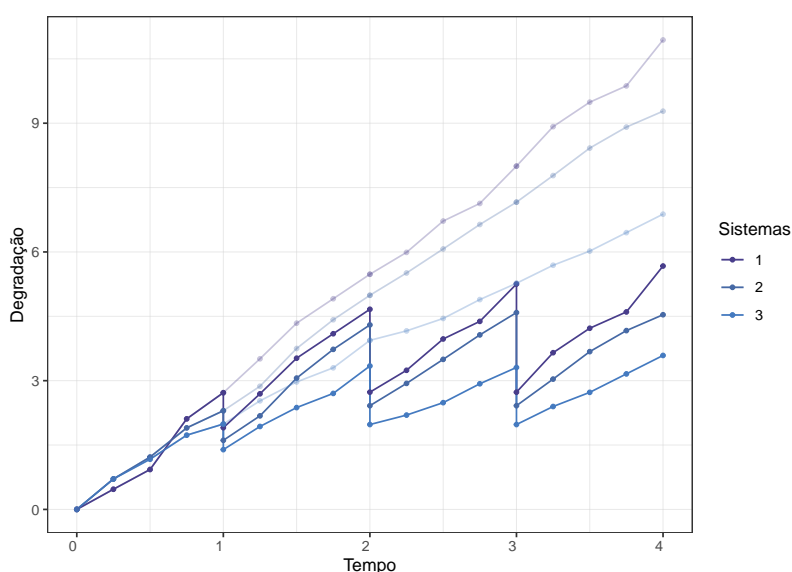


Figura 17 – Trajetórias de degradação para os três primeiros sistemas – Cenário 2.

Na Figura 18, podemos ver mais claramente os efeitos do reparo perfeito. Prosseguimos então para calcular os efeitos de manutenção, como no Cenário 1. Durante a manutenção, a degradação acumulada foi reduzida de 2,720 para 1,904, de 4,664 para 2,732 e de 5,252 para 2,732, conforme indicado na Figura 18.

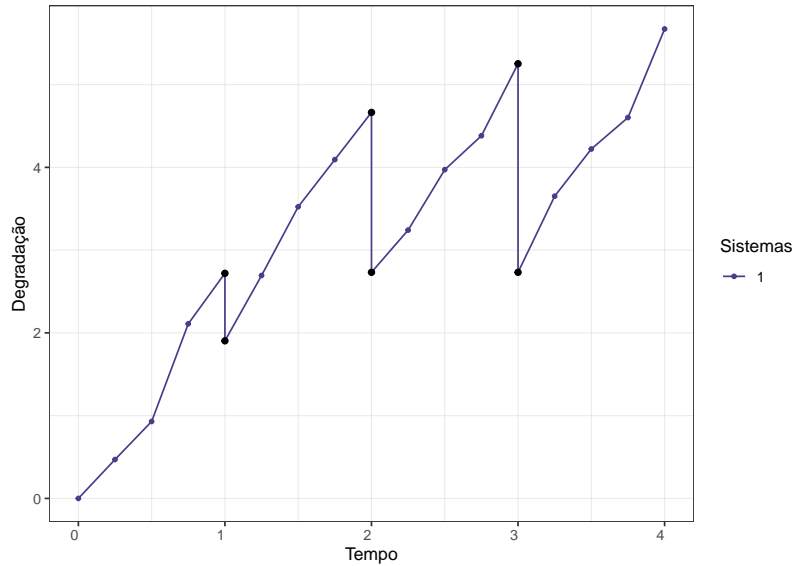


Figura 18 – Trajetória de degradação com efeito de manutenção para o sistema 1 – Cenário 2.

Usando a expressão em (4.7) e os dados do sistema 1 na Tabela 6, calculamos $\theta_j = \frac{-s_j^{(1)}}{\sum_{p=1}^{m_{1,j-1}+1} \Delta z_{1,j-1,p}}$, para $j = 1, 2, 3$, dentro do contexto assumido no Cenário 2. É importante notar que $\forall m_{i,j} = 3$:

$$\begin{aligned} \bullet \theta_1 &= \frac{-(1,904-2,720)}{(0,47+0,46+1,18+0,61)} = \frac{0,816}{2,72} = 0,3; \\ \bullet \theta_2 &= \frac{-(2,732-4,664)}{(0,79+0,83+0,57+0,57)} = \frac{1,932}{2,76} = 0,7; \\ \bullet \theta_3 &= \frac{-(2,732-5,252)}{(0,51+0,73+0,41+0,87)} = \frac{2,520}{2,52} = 1. \end{aligned}$$

O denominador permanece constante, pois as características do processo de degradação, na ausência de efeitos de manutenção, são preservadas. A trajetória entre as ações de manutenção é simplesmente “deslocada” verticalmente de acordo com os efeitos de manutenção em cada momento de intervenção. No Cenário 3, exploramos um cenário contrastante.

- **Cenário 3: Efeitos de manutenção que se deterioram ao longo do tempo**

Finalmente, neste cenário, consideramos efeitos de manutenção que se deterioram ao longo do tempo, para explorar perspectivas alternativas. Mantemos os mesmos pontos de análise dos cenários anteriores: examinando as trajetórias de degradação dos três primeiros sistemas, analisando o sistema 1 de acordo com os valores de θ_j e calculando os valores dos efeitos de manutenção.

Assumimos que os sistemas passaram por reparos que pioraram progressivamente ao longo do tempo, com o último reparo sendo mínimo, ou seja, $\theta_1 = 0,7$, $\theta_2 = 0,3$ e $\theta_3 = 0$, conforme indicado na Figura 19.

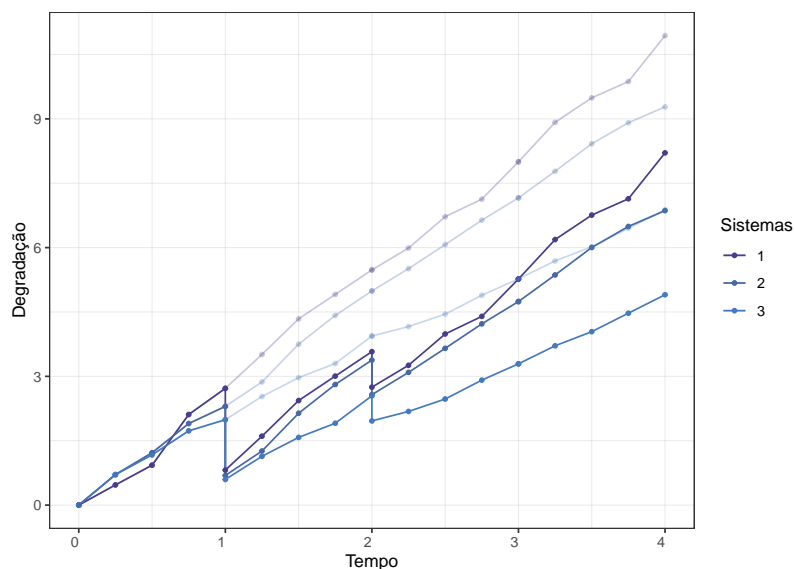


Figura 19 – Trajetórias de degradação para os três primeiros sistemas – Cenário 3.

Notavelmente, no tempo de manutenção $\tau_3 = 3$, a trajetória segue o caminho de degradação sem nenhum salto. Isso se deve à suposição de reparo mínimo, onde o efeito da manutenção foi insignificante, resultando em nenhuma redução no nível de degradação. Portanto, durante os tempos de manutenção, a degradação acumulada foi reduzida de 2,720 para 0,816, de 3,576 para 2,748 e permaneceu constante em 5,268 durante a última manutenção, conforme indicado na Figura 20.

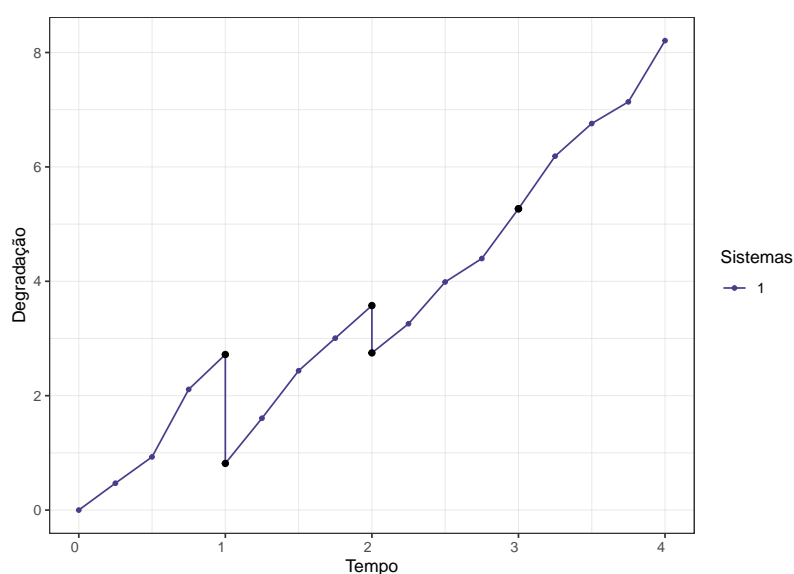


Figura 20 – Trajetória de degradação com efeito de manutenção para o sistema 1 – Cenário 3.

No contexto assumido no Cenário 3, observamos o seguinte:

- $\theta_1 = \frac{-(0,816-2,720)}{(0,47+0,46+1,18+0,61)} = \frac{1,904}{2,72} = 0,7;$
- $\theta_2 = \frac{-(2,748-3,576)}{(0,79+0,83+0,57+0,57)} = \frac{0,828}{2,76} = 0,3;$
- $\theta_3 = \frac{-(5,268-5,268)}{(0,51+0,73+0,41+0,87)} = \frac{0}{2,52} = 0.$

Vale notar que, se reparos mínimos tivessem sido aplicados em todas as ações de manutenção, os processos de degradação teriam seguido exatamente as trajetórias de degradação base.

Os resultados discutidos mostram que a eficiência das ações de manutenção é fundamental para a confiabilidade do sistema. Esses achados sugerem que a implementação de sistemas de monitoramento contínuo, combinada com a adaptação das estratégias de manutenção com base nas condições reais do equipamento, pode melhorar significativamente a confiabilidade e estender a vida útil dos sistemas analisados.

Também é importante enfatizar que os cenários ilustrados consideraram diferentes padrões de ações de reparo, sem impor quaisquer restrições quanto à magnitude ou direção de seus efeitos. Essa flexibilidade na modelagem possibilita representar uma ampla gama de comportamentos e resultados realistas de manutenção, reconhecendo que, sob diferentes condições, padrões alternativos de reparo podem ser igualmente plausíveis.

Para avaliar o desempenho do modelo proposto, baseado em um PGI com RI ($ARD_{1_{PGI}}$), realizamos uma comparação com dois modelos comumente utilizados para dados de degradação: um modelo monótono baseado no processo Gama (PG) e um modelo não monótono baseado no processo de Wiener (PW). Todos os modelos foram ajustados segundo o modelo ARD_1 , e seus desempenhos foram avaliados por meio do AIC e do *Critério de Informação Bayesiano (BIC)* (SCHWARZ, 1978), conforme apresentado na Tabela 7.

Os resultados indicam que o modelo GI apresenta o melhor ajuste aos dados, evidenciado pelos menores valores de AIC e BIC. Esses resultados demonstram sua superioridade na captura das dinâmicas de degradação sob manutenção imperfeita para o conjunto de dados LASER. A superioridade do modelo GI em relação ao PW já era esperada, uma vez que o PW é não monótono, enquanto os dados observados apresentam uma tendência de degradação monótona.

Por outro lado, a comparação com o modelo Gama é mais sutil: ambos os modelos são monótonos e exibem variância crescente ao longo do tempo. Entretanto, enquanto o PG assume que a variância aumenta proporcionalmente ao tempo, o PGI permite um crescimento mais acentuado e flexível da variabilidade, fornecendo um ajuste melhor ao padrão observado de dispersão crescente.

Esse comportamento está alinhado com as trajetórias de degradação observadas nos dados LASER, que mostram baixa variabilidade nas etapas iniciais e um aumento progressivo na dispersão entre as unidades ao longo do tempo (ver Figura 14). Essas características são típicas

de sistemas físicos que apresentam degradação acelerada e incerteza crescente — fenômenos capturados de forma mais eficaz pelo PGI.

Tabela 7 – AIC e BIC para os dados LASER assumindo o modelo ARD_1 .

Modelo	AIC	BIC
Processo GI	-146,06	-144,64
Processo Gama	-135,22	-133,80
Processo Wiener	-87,14	-85,72

Finalmente, seguimos com as análises para o modelo especificado em (4.3), representando o modelo de trajetória de degradação sob manutenção imperfeita com um PGI (ARD_{1PGI}), para estimar os parâmetros μ e λ . Esses parâmetros estão associados à tendência sistemática do processo ao longo do tempo, bem como à variabilidade da degradação e à amplitude das flutuações em torno da trajetória média do processo.

Para obter os intervalos de confiança dos parâmetros, utilizamos a abordagem de estimação por máxima verossimilhança implementada em R. Especificamente, empregamos a função *optim* com o algoritmo de memória limitada Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno com restrições de caixa (L-BFGS-B) (BYRD *et al.*, 1995), devido à sua eficiência computacional e capacidade de lidar com restrições. A incerteza dos estimadores foi quantificada usando a matriz de variância-covariância, calculada invertendo a matriz Hessiana da função de log-verossimilhança. Essa abordagem se baseia na distribuição assintótica dos estimadores, garantindo inferência estatística rigorosa e confiável. A Tabela 8 apresenta os EMV e seus erros padrão seguindo o procedimento descrito.

Tabela 8 – Resultados da estimação do modelo de degradação proposto aplicado aos dados LASER.

Modelo	$\hat{\mu}$	$\hat{\lambda}$	EP($\hat{\mu}$)	EP($\hat{\lambda}$)
ARD_{1PGI}	2,03	13,13	0,05	1,36

Além das estimativas pontuais apresentadas na Tabela 8, também obtivemos estimativas intervalares para os parâmetros do modelo usando ICs assintóticos. Os ICs de 95% estimados para μ e λ são, respectivamente, $IC_{\mu} = (1,93; 2,12)$ e $IC_{\lambda} = (10,46; 15,79)$.

Vale mencionar que os parâmetros associados ao processo de degradação foram estimados com base na decomposição da função de verossimilhança (4.4). Essa estrutura permite que os parâmetros do processo de degradação e os efeitos de reparo sejam estimados de forma independente. No cenário de dados completos, em que todos os tempos, incrementos e saltos de degradação são observados, os efeitos de manutenção podem ser estimados analiticamente, simplificando o procedimento inferencial.

As estimativas obtidas para os parâmetros do processo de linha de base foram consistentes com os valores relatados em estudos anteriores sobre o conjunto de dados LASER, reforçando a validade da abordagem proposta (MORITA, 2017; PENG, 2015). É importante enfatizar que

a incorporação dos efeitos de manutenção não altera o mecanismo de degradação subjacente, uma vez que a tendência média e a variabilidade do processo permanecem inalteradas. Assim, a introdução desses efeitos serve apenas como uma ferramenta adicional para demonstrar a aplicabilidade da metodologia em contextos realistas, sem comprometer a natureza estatística dos dados originais.

A Figura 21 apresenta o teste de adequação de Anderson–Darling (AD) (ANDERSON; DARLING, 1954), juntamente com os gráficos de probabilidade–probabilidade (P–P) e quantil–quantil (Q–Q) para os incrementos de degradação observados. Os resultados sugerem que os modelos baseados em PGI são apropriados para esses dados, pois o valor-p do teste AD é alto (0,9137) e os pontos do gráfico estão próximos da linha diagonal.

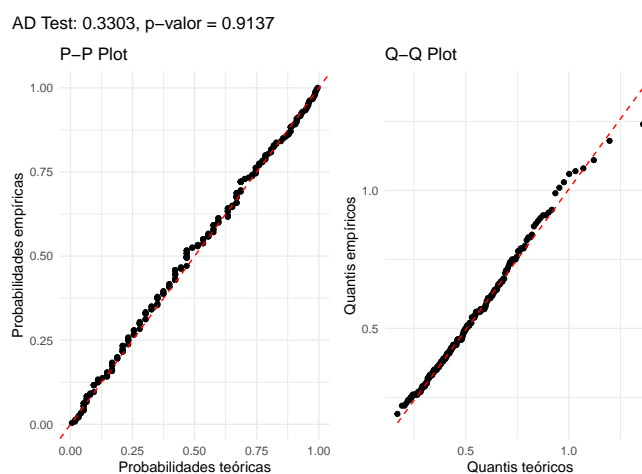


Figura 21 – Teste de adequação baseado nos dados LASER: à esquerda, o gráfico P–P dos incrementos de degradação e o teste AD; à direita, o gráfico Q–Q dos incrementos de degradação.

4.5 Considerações Finais

Neste capítulo, desenvolvemos um modelo para múltiplos processos de degradação utilizando o PGI, incorporando os efeitos de manutenção imperfeita ao longo do tempo em sistemas reparáveis. O foco principal foi a inferência estatística e a análise das propriedades assintóticas dos EMV, avaliadas por meio de diferentes cenários em um amplo estudo de simulação. A metodologia proposta permite uma análise mais realista do comportamento de sistemas sujeitos a manutenções que não os restauram completamente ao estado original, com efeitos variáveis ao longo do tempo, refletindo melhor as condições observadas na prática.

Os resultados da simulação demonstraram que o modelo proposto é eficaz para captar a dinâmica dos processos de degradação. Observou-se que as propriedades assintóticas foram atendidas em todos os cenários considerados, com melhores resultados à medida que o número de sistemas aumentou, o que está de acordo com as expectativas. Além disso, as métricas de desempenho apresentaram a convergência esperada, validando a precisão do modelo nas condições simuladas.

A aplicação prática deste modelo proporcionou maior clareza sobre os conceitos explorados e sua relevância para dados do mundo real. A capacidade de incorporar os efeitos da manutenção imperfeita é particularmente significativa, pois, na prática, os reparos frequentemente não restauram os sistemas a uma condição “como nova”, nem os mantêm tão degradados quanto antes.

Apesar dos avanços, o modelo apresenta algumas limitações que devem ser ressaltadas. Neste capítulo, consideramos um cenário de dados completos, viável em muitos sistemas complexos que utilizam dispositivos de monitoramento contínuo para rastrear a degradação. No entanto, há situações em que as observações do nível de degradação não estão disponíveis imediatamente antes e após as ações de manutenção. Embora relevantes, esses cenários estão fora do escopo deste estudo e exigem investigação futura. Além disso, assumimos a distribuição GI como base do modelo, mas reconhecemos que essa abordagem pode não capturar todas as nuances dos processos de degradação em contextos específicos. Esses achados destacam a necessidade de explorar outras modelagens de degradação e derivar expressões inferenciais correspondentes, especialmente em cenários em que as características do sistema ou dos processos envolvidos diferem significativamente das suposições adotadas.

Para pesquisas futuras, sugerimos explorar outros tipos de distribuições para modelar processos de degradação e incorporar variáveis que possam influenciar o desempenho do sistema, como fatores de aceleração. Além disso, a validação do modelo com dados empíricos é essencial para confirmar sua aplicabilidade e robustez. A investigação de métodos de otimização para manutenção baseada em condição também representa uma direção promissora para aumentar a eficiência e reduzir custos operacionais.

Em conclusão, este estudo contribui para a literatura sobre manutenção e confiabilidade de sistemas ao oferecer uma ferramenta robusta para modelar processos de degradação com efeitos de manutenção imperfeita variáveis ao longo do tempo, abrindo caminho para avanços futuros neste campo.

MODELOS DE DEGRADAÇÃO ACELERADA PARA SISTEMAS REPARÁVEIS SOB A SUPOSIÇÃO DE REPARO IMPERFEITOS

Neste capítulo, apresentamos um modelo de degradação acelerada que consiste na extensão do modelo proposto no capítulo anterior. O modelo incorpora testes acelerados, que, em linhas gerais, são projetados para simular condições extremas de operação, aplicando níveis elevados de estresse (por exemplo, temperatura, tensão, umidade ou pressão) aos componentes. O objetivo dos testes acelerados em dados de degradação é antecipar o processo de degradação e induzir falhas em um período de tempo mais curto do que ocorreria em condições normais de uso. Isso permite que engenheiros e pesquisadores coletem dados sobre a vida útil e a confiabilidade do sistema de forma mais rápida e eficiente.

Este estudo visa avançar a compreensão da modelagem de dados de degradação acelerada (ver 5.1.1), cujas características específicas devem ser levadas em consideração. Especificamente, o modelo de degradação assume que as atividades de manutenção influenciam a degradação do sistema, utilizando o modelo de Redução Aritmética da Degradação com memória um e processo Gaussiano inverso (ARD_{1PGI}), associado a um fator de aceleração exponencial (ver 5.1.2). Assim, temos um modelo de degradação acelerada e, com isso, propomos o Modelo de Degradação Acelerada com Redução Aritmética da Degradação de ordem 1 com processo Gaussiano inverso (MDA_ARD_{1PGI}).

Formulamos o modelo em um contexto de múltiplos sistemas. Neste capítulo, continuamos a assumir que os efeitos de manutenção variam a cada ação e que um esquema de observação completo é empregado, permitindo derivar as funções de interesse para a inferência estatística clássica (ver 5.2). Posteriormente, realizamos um estudo de simulação extenso para avaliar as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança (EMV) por meio de três métricas de interesse, com o intuito de validar a abordagem proposta (ver 5.3).

Em seguida, realizamos uma aplicação numérica com dados simulados, apresentando um *toy example* em um contexto industrial de turbinas eólicas, o que permitiu investigar as métricas de confiabilidade em um cenário que incorpora ações de manutenção, em comparação com aqueles que ignoram os efeitos dos reparos na degradação acumulada (ver 5.4). Por fim, apresentamos as considerações gerais deste capítulo (ver 5.5).

5.1 Contextualização

5.1.1 Dados de Degradação Acelerada

Retomando a estrutura descrita anteriormente, considera-se que cada unidade experimental é monitorada ao longo de um intervalo fixo de tempo $[0, \tau]$, com medições de degradação registradas em tempos de inspeção predefinidos. Os caminhos de degradação observados para cada unidade seguem a mesma lógica apresentada na Tabela 1.

Neste contexto, avançamos a análise ao considerar que as unidades estão organizadas em grupos submetidos a diferentes níveis de estresse ou condições operacionais, que atuam como fatores de aceleração do processo de degradação. Assim, os sistemas pertencentes a um mesmo grupo compartilham um mesmo nível de aceleração, o que impacta diretamente a velocidade com que a degradação se acumula ao longo do tempo. Essa estrutura em grupos possibilita modelar e comparar a evolução da degradação sob diferentes condições ambientais ou operacionais.

A Figura 22 representa uma extensão das figuras do capítulo anterior (Figura 7 e Figura 8), ao considerar múltiplos sistemas reparáveis submetidos a diferentes níveis de aceleração. Nesse cenário, temos três grupos de sistemas, cada um composto por três unidades, totalizando nove trajetórias. O grupo representado pela cor roxa corresponde ao nível de aceleração normal, semelhante ao apresentado nas figuras anteriores. Já os grupos azul e amarelo foram submetidos a condições aceleradas, com fatores de aceleração iguais a 0,5 e 0,75, respectivamente.

Visualmente, é possível perceber a separação clara entre os três grupos, com trajetórias de degradação distintas ao longo do tempo. Observa-se que os sistemas sob aceleração normal (grupo roxo) apresentam níveis de degradação menores em comparação com os demais. Por outro lado, os grupos submetidos a condições adversas ou estresse demonstram trajetórias mais acentuadas, refletindo uma degradação mais rápida ao longo do tempo. Esse comportamento é consistente com o efeito esperado de processos de degradação acelerada, nos quais fatores externos, como temperatura, vibração ou carga, intensificam o desgaste dos sistemas.

Essa ilustração reforça como o nível de aceleração afeta diretamente a dinâmica do processo de degradação, sendo um aspecto fundamental a ser incorporado aos modelos probabilísticos para análise e previsão de falhas em sistemas reparáveis. Isso nos motiva a investigar e propor o modelo neste capítulo. Além disso, observe que, na formulação do modelo a seguir, teremos consequentemente um índice a mais a ser incorporado, equivalente aos diferentes níveis

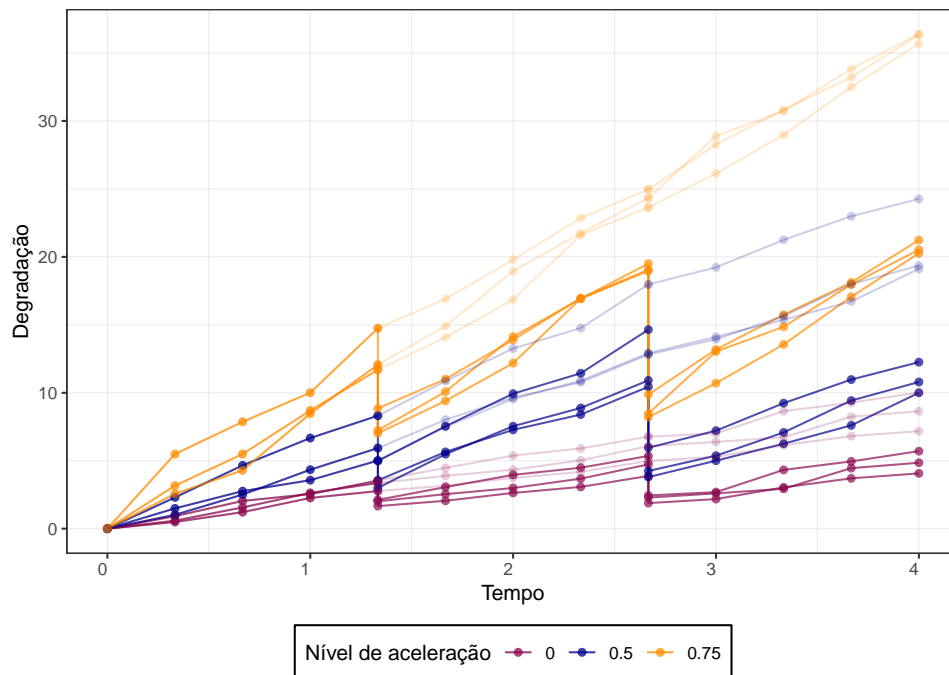


Figura 22 – Ilustração dos caminhos de degradação com e sem os efeitos das ações de manutenção para múltiplos sistemas submetidos a diferentes níveis de aceleração.

de degradação. Portanto, em relação ao modelo proposto no capítulo anterior (expressão 4.6), temos a inclusão do índice d .

5.1.2 Modelo de Degradação Acelerada

Conforme discutido anteriormente na Subseção 2.6, a degradação é modelada por um processo estocástico $X(t | A_d)$, que sob estresse constante A_d segue

$$X(t | A_d) \sim GI(g_\mu(t | A_d), \lambda g_\mu^2(t | A_d)),$$

onde $g_\mu(t | A_d)$ representa a degradação média e λ controla a variabilidade. A influência do estresse é descrita por:

$$H(A_d) = \exp(\beta A_d),$$

em que β quantifica o impacto do estresse na taxa de degradação.

Assumindo um caminho de degradação linear e um fator de aceleração exponencial, a função de degradação média ajustada é dada por:

$$g_\mu(t | A_d) = \mu t \exp(\beta A_d),$$

onde μ é o parâmetro de degradação médio sob condições normais de operação.

A partir dessa formulação, e seguindo a base teórica apresentada no capítulo anterior, incorporamos a aceleração ao modelo ARD_1 , considerando um Processo Gaussiano inverso (PGI) como linha de base (ver 4.1.2 e 4.1.3). Essa abordagem permite modelar a confiabilidade do

componente ao longo do tempo e realizar inferências sobre sua vida útil em diferentes condições de operação. Com isso, torna-se possível extrapolar os resultados obtidos em testes acelerados para condições normais, favorecendo uma melhor gestão da manutenção preventiva (MP) e uma previsão mais precisa de falhas. Na sequência, detalhamos a formulação completa do modelo e o processo de inferência estatística adotado.

5.2 Formulação do Modelo

Nesta seção, apresentamos a junção de duas abordagens da literatura. Primeiro, retomamos o modelo de ajuste da trajetória de degradação, no qual a influência das ações de manutenção é capturada pela quantidade de redução da degradação antes e após cada reparo (MERCIER; CASTRO, 2019; WANG *et al.*, 2021a; LEROY *et al.*, 2023). Em seguida, consideramos os modelos de degradação acelerada, formulados para capturar o impacto de fatores que aceleram as trajetórias de degradação, levando em conta a influência de variáveis externas, como temperatura, umidade e carga, na evolução do desgaste do sistema (DUAN; WANG, 2018; JIANG *et al.*, 2022). Portanto, a junção desses modelos permite quantificar os efeitos dos reparos imperfeitos e compreender como diferentes condições operacionais intensificam a degradação ao longo do tempo.

Para facilitar a leitura das expressões apresentadas nesta subseção, a Tabela 9 resume as principais notações e um exemplo. Para mais detalhes da lista completa ver o Apêndice A.2.

Tabela 9 – Principais notações do modelo de degradação proposto.

Notação	Descrição	Exemplo/Contexto
D	Número de níveis de estresse	3 níveis: A_1 (baixo), A_2 (médio), A_3 (alto)
τ_j	Tempo da j -ésima ação de manutenção	$\tau_1 = 4$ meses, $\tau_2 = 8$ meses
θ_j	Efeito da ação de reparo na j -ésima manutenção	$\theta_1 = 0,3$ (30% de eficiência)
$t_{d,i,j,p}$	Tempo da p -ésima inspeção no intervalo $[\tau_j, \tau_{j+1}]$	$t_{1,2,4,3}$: 3ª medição do sistema 2 em A_1 após a 4ª manutenção
$m_{d,i,j}$	Número de observações no intervalo (τ_j, τ_{j+1})	$m_{1,2,0} = 5$ (5 medições no 1º intervalo)
$X_{d,i}(t A_d)$	Processo de degradação intrínseco (sem manutenção)	Degradação sem intervenções
$Z_{d,i}(t A_d)$	Processo de degradação modelado (com manutenção)	Degradação com intervenções
$Z_{d,i}(\tau_j^- A_d)$	Degradação antes da manutenção em τ_j	Nível de degradação pré-reparo
$Z_{d,i}(\tau_j^+ A_d)$	Degradação após a manutenção em τ_j	Nível de degradação pós-reparo
$\Delta t_{d,i,j,p}$	Intervalo entre observações: $t_{d,i,j,p} - t_{d,i,j,p-1}$	$\Delta t_{1,2,0,3} = 1$ mês
$\Delta Z(t_{d,i,j,p})$	Incremento de degradação: $Z(t_{d,i,j,p}) - Z(t_{d,i,j,p-1})$	$\Delta Z = 0,5$ mm

5.2.1 Modelo de Caminho de Degradação MDA_ARD_{1PGI}

Suponha que, para os n sistemas analisados em D níveis de estresse $\{A_1, A_2, \dots, A_D\}$, as ações de manutenção foram realizadas nos tempos de inspeção $\tau_j, \forall j = 1, 2, \dots, k$, com $\tau_0 = 0$ e $\tau_{k+1} = \tau$, ou seja, os instantes em que o sistema foi submetido a um reparo.

Além disso, considere que a degradação para o sistema i do nível de estresse A_d foi medida em $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $\forall j \in \{0, \dots, k\}$, nos tempos de inspeção $\tau_j = t_{d,i,j,0} < t_{d,i,j,1} < t_{d,i,j,2} < \dots < t_{d,i,j,m_{d,i,j}} < t_{d,i,j,m_{d,i,j}+1} = \tau_{j+1}$, onde temos um total de $m_{d,i,j} + 2$ observações, sendo $m_{d,i,j}$ o número de observações entre as ações de manutenção em $]\tau_j, \tau_{j+1}[$. Considerando que os incrementos são independentes no processo GI, as quantidades de interesse são os incrementos de degradação observados. Então, consideramos que as observações são os níveis de degradação $Z(t_{d,i,j,p})$ nos tempos $t_{d,i,j,p}$, $\forall d \in \{1, \dots, D\}$, $\forall i \in \{1, \dots, n_d\}$, $\forall j \in \{0, \dots, k\}$, $\forall p \in \{0, \dots, m_{d,i,j} + 1\}$. Os intervalos de tempo entre as observações são denotados como $\Delta t_{d,i,j,p} = t_{d,i,j,p} - t_{d,i,j,p-1}$ e os incrementos de degradação $\Delta Z(t_{d,i,j,p}) = Z(t_{d,i,j,p}) - Z(t_{d,i,j,p-1})$, $\forall j \in \{0, \dots, k\}$, $\forall p \in \{1, \dots, m_{d,i,j} + 1\}$.

Seja $Z_{d,i}(\tau_j^- | A_d) = Z(t_{d,i,j-1,m_{d,i,j-1}+1})$ representando a degradação intrínseca do sistema i , no nível de estresse A_d e no instante de tempo τ_j imediatamente antes da ação de manutenção e, similarmente, $Z_{d,i}(\tau_j^+ | A_d) = Z(t_{d,i,j,0})$ denotando o nível de degradação imediatamente após. Esses níveis são definidos como segue:

$$\begin{aligned} Z_{d,i}(\tau_j^- | A_d) &= X_{d,i}(\tau_j | A_d) - \sum_{l=1}^{j-1} \theta_l [X_{d,i}(\tau_l | A_d) - X_{d,i}(\tau_{l-1} | A_d)] \quad e \\ Z_{d,i}(\tau_j^+ | A_d) &= X_{d,i}(\tau_j | A_d) - \sum_{l=1}^j \theta_l [X_{d,i}(\tau_l | A_d) - X_{d,i}(\tau_{l-1} | A_d)]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Seja $\tilde{Z}_{d,i}$ a trajetória de degradação do sistema i no nível de estresse A_d em $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}[$, o MDA_ARD_{1IGP} é tal que

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{d,i}(t | A_d) &= Z_{d,i}(\tau_j^+ | A_d) + [X_{d,i}(t | A_d) - X_{d,i}(\tau_j | A_d)] \\ &= X_{d,i}(t | A_d) - \sum_{l=1}^j \theta_l [X_{d,i}(\tau_l | A_d) - X_{d,i}(\tau_{l-1} | A_d)], \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde θ_j é o fator de redução de degradação da j -ésima ação de manutenção; além disso, $\theta_j \in [0, 1]$ e quanto maior seu valor, maior a eficiência da manutenção, ou seja,

$$\theta_j = \begin{cases} 0 & \text{se reparo mínimo (RM),} \\ \in (0, 1) & \text{se reparo imperfeito (RI),} \\ 1 & \text{se reparo perfeito (RP).} \end{cases}$$

Finalmente, $X_{d,i}(t | A_d)$ é o processo de degradação do i -ésimo sistema do d -ésimo nível de estresse e pode ser definido similarmente como em (4.1). Note que a passagem da primeira

para a segunda linha em (5.2) ocorre porque podemos reescrever $Z_{d,i}(\tau_j^+ | A_d)$ como definido em (5.1), que representa o nível de degradação logo após a j -ésima ação de manutenção e é formulado como $Z_{d,i}(\tau_j^+ | A_d) = Z_{d,i}(\tau_{j-1}^+ | A_d) + [X_{d,i}(\tau_j | A_d) - X_{d,i}(\tau_{j-1} | A_d)] (1 - \theta_j)$.

5.2.2 Inferência Estatística

Para a estimação, utilizamos o método de máxima verossimilhança com base nas observações do processo de degradação em $[0, \tau]$. Note que dois tipos de observações contribuem para a verossimilhança: a primeira decorre dos incrementos de degradação, e a segunda refere-se aos saltos observados em torno dos tempos de manutenção. Com isso, definimos o conjunto $\mathcal{O}_{\tau_j}^{(d,i)}$, formado pelas observações imediatamente antes de τ_j , ou seja, pelos incrementos e saltos observados antes da j -ésima manutenção para o i -ésimo sistema do d -ésimo nível de estresse: $\mathcal{O}_{\tau_j}^{(d,i)} = \{\Delta z_{d,i,0,1}, \dots, \Delta z_{d,i,0,m_{d,i,0}+1}, S_1^{(d,i)}, \Delta z_{d,i,1,1}, \dots, \Delta z_{d,i,j-2,m_{d,i,j-2}+1}, S_{j-1}^{(d,i)}, \Delta z_{d,i,j-1,1}, \dots, \Delta z_{d,i,j-1,m_{d,i,j-1}+1}\}$.

Portanto, a verossimilhança $\mathcal{L}(\mu, \lambda, \beta, \theta)$ tem duas partes. A parte relacionada aos incrementos de degradação consiste no produto das densidades desses incrementos, devido à independência dos incrementos do processo GI. A parte relacionada aos saltos de degradação é mais complexa e deve ser analisada de acordo com o esquema de observação adotado, conforme enfatizado em Leroy *et al.* (2023). Uma expressão geral da verossimilhança é:

$$\mathcal{L}(\mu, \lambda, \beta, \theta) = \left[\prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{n_d} \prod_{j=0}^k \prod_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} f_{\Delta z_{d,i,j,p}}(\Delta z_{d,i,j,p}) \right] \left[\prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{n_d} \prod_{j=1}^k f_{S_j^{(d,i)} | \mathcal{O}_j^{(d,i)}}(S_j^{(d,i)}) \right],$$

onde $\mathcal{O}_j^{(d,i)}$ é o conjunto de observações imediatamente antes de τ_j , composto pelos incrementos e saltos observados antes da j -ésima manutenção para o i -ésimo sistema no d -ésimo nível de estresse. Devido ao fato de que $X_{d,i}(t)$ é um PGI e considerando $Y_{d,i,j,p} = \Delta z_{d,i,j,p}$, temos que $Y_{d,i,j,p} \sim \text{GI}(\Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p} | A_d), \lambda [\Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p} | A_d)]^2)$.

Em alguns contextos, pode ser desafiador determinar a distribuição condicional dos saltos de degradação observados, considerando os dados históricos. No entanto, no nosso caso de observações completas, os níveis de degradação foram medidos imediatamente antes e após cada ação de manutenção. Consequentemente, os saltos são observados, o que simplifica a função de verossimilhança, reduzindo-a apenas ao termo correspondente aos incrementos. Como $S_j^{(d,i)}$ é completamente conhecido, $f_{S_j^{(d,i)} | \mathcal{O}_j^{(d,i)}}(S_j^{(d,i)}) = \mathbb{1}_{S_j^{(d,i)} = -\theta_j \sum_{p=1}^{m_{d,i,j-1}+1} \Delta z_{d,i,j-1,p}}$ segue uma distribuição de Dirac (LEROY *et al.*, 2023).

Portanto, seguindo a mesma definição vista na Seção 2.5 e assumindo (5.1), temos que $\forall j \in \{1, \dots, k\}$,

$$S_j^{(d,i)} = Z_{d,i}(\tau_j^+ | A_d) - Z_{d,i}(\tau_j^- | A_d) = -\theta_j [X_{d,i}(\tau_j | A_d) - X_{d,i}(\tau_{j-1} | A_d)] = -\theta_j \sum_{p=1}^{m_{d,i,j-1}+1} \Delta z_{d,i,j-1,p} \quad (5.3)$$

Assim, a função de verossimilhança é dada por:

$$\mathcal{L}(\mu, \lambda, \beta) = \prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{n_d} \prod_{j=0}^k \prod_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y_{d,i,j,p}^3}} \Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d) e^{-\frac{\lambda [y_{d,i,j,p} - \Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d)]^2}{2y_{d,i,j,p}}}, \quad (5.4)$$

onde $\Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d) = g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d) - g_{\mu}(t_{d,i,j,p-1}|A_d)$ é o aumento observado na função média durante o intervalo de tempo $\Delta t_{d,i,j,p} = t_{d,i,j,p} - t_{d,i,j,p-1}$.

Note que, em (5.4), estimam-se os parâmetros μ , λ e β , já que os θ_j são encontrados analiticamente. Assim, pela expressão (5.3), temos $\forall j \in \{1, \dots, k\}$,

$$\theta_j = \frac{-s_j^{(d,i)}}{\sum_{p=1}^{m_{d,i,j-1}+1} \Delta z_{d,i,j-1,p}}. \quad (5.5)$$

Nesta expressão, a propriedade do modelo ARD_1 é evidente: o efeito da manutenção atua para reduzir a degradação acumulada desde a última ação de manutenção.

Como o logaritmo é uma função contínua estritamente crescente no domínio da verossimilhança, os valores que maximizam a verossimilhança também maximizam seu logaritmo. Além disso, maximizar o logaritmo geralmente envolve uma álgebra mais simples. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \log(\mathcal{L}) &= \log \left(\prod_{d=1}^D \prod_{i=1}^{n_d} \prod_{j=0}^k \prod_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y_{d,i,j,p}^3}} \Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d) e^{-\frac{\lambda [y_{d,i,j,p} - \Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d)]^2}{2y_{d,i,j,p}}} \right) \\ &= \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{\lambda}{2\pi y_{d,i,j,p}^3} \right) + \log(\Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{2y_{d,i,j,p}} \left(y_{d,i,j,p}^2 - 2y_{d,i,j,p} \Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d) + [\Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d)]^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} \log(\lambda) - \frac{1}{2} \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} \log(2\pi y_{d,i,j,p}^3) \\ &\quad + \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} \log(\Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d)) - \frac{\lambda}{2} \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} y_{d,i,j,p} \\ &\quad + \lambda \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} \Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d) - \frac{\lambda}{2} \sum_{d=1}^D \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{j=0}^k \sum_{p=1}^{m_{d,i,j}+1} \frac{[\Delta g_{\mu}(t_{d,i,j,p}|A_d)]^2}{y_{d,i,j,p}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Considerando a complexidade da expressão (5.6) e de suas derivadas parciais, podem ser utilizados métodos numéricos para obter as estimativas. Os intervalos de confiança dos parâmetros do modelo podem ser construídos a partir da teoria assintótica, com base nas propriedades dos EMV e na distribuição Normal.

Interpretação do Parâmetro β

O parâmetro β , em conjunto com o valor de A_d , influencia diretamente os caminhos de degradação, determinando a velocidade com que o processo se desenvolve ao longo do tempo. Vale lembrar que A_d representa uma condição ambiental ou experimental que afeta a taxa de degradação (por exemplo, temperatura, umidade ou estresse mecânico). De modo geral, quanto maior for A_d , maior será a aceleração ou a desaceleração do processo.

O parâmetro β atua como coeficiente de aceleração, definindo em que intensidade a degradação se intensifica:

- Se $\beta > 0$, a degradação se acelera exponencialmente à medida que A_d cresce.
- Se $\beta = 0$, não há efeito de aceleração, e todos os trajetos de degradação evoluem no mesmo ritmo.
- Se $\beta < 0$, ocorre uma desaceleração: a degradação diminui conforme A_d aumenta, comportamento menos frequente em processos de degradação.

A aceleração é expressa por $\exp(\beta A_d)$, indicando que variações, mesmo pequenas, em β têm impacto multiplicativo relevante, podendo acelerar ou desacelerar de maneira acentuada o processo de degradação.

5.3 Estudo de Simulação

Esta seção descreve um estudo de simulação concebido para examinar o desempenho dos EMV obtidos a partir da maximização da log-verossimilhança definida na equação (5.6). O propósito central é verificar, por meio de dados simulados em diferentes configurações, se as propriedades assintóticas desses estimadores permanecem válidas em cenários variados.

Para avaliar o comportamento dos estimadores, consideramos três medidas usuais em experimentos de simulação: Erro Relativo Médio (MRE), Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE) e a Probabilidade de Cobertura (CP). As expressões matemáticas dessas métricas são dadas, respectivamente, por:

$$\text{MRE}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\hat{\gamma}_m}{\gamma}, \quad \text{RMSE}(\hat{\gamma}) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\gamma}_m - \gamma)^2},$$

$$\text{CP}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{I}[\gamma \in (a_m, b_m)].$$

Enquanto que os termos utilizados nessas definições são descritos a seguir:

- M corresponde ao número de amostras geradas no estudo de simulação;

- $\gamma \in \boldsymbol{\gamma} = (\mu, \lambda, \beta)$ denota cada parâmetro de interesse, enquanto $\hat{\gamma}_m$ é o valor estimado na m -ésima réplica;
- $EP(\hat{\gamma}_m)$ é o erro-padrão associado a $\hat{\gamma}_m$;
- os limites inferior e superior do intervalo de confiança de 95% para o parâmetro na m -ésima amostra são dados, respectivamente, por

$$a_m = \hat{\gamma}_m - 1,96 \times EP(\hat{\gamma}_m), \quad b_m = \hat{\gamma}_m + 1,96 \times EP(\hat{\gamma}_m);$$

- $\mathbb{I}[\cdot]$ representa a função indicadora.

De acordo com as propriedades teóricas esperadas para os EMV, ao se aumentar o tamanho da amostra utilizada na simulação, deve-se observar: valores de MRE aproximando-se de 1, valores de RMSE em direção a 0, e valores de CP tendendo para o nível nominal de cobertura, ou seja, aproximadamente 0,95 (95%).

Para a geração das trajetórias de degradação de cada sistema, foi utilizado um procedimento em duas etapas. Inicialmente, simula-se a trajetória subjacente $X(t)$ a partir de observações de uma distribuição Gaussiana inversa (GI) com os parâmetros de interesse (MORITA, 2017). Esses valores são acumulados ao longo do tempo, produzindo a trajetória de base. Em seguida, constrói-se o processo de degradação observado $Z(t)$, que incorpora os efeitos de manutenção θ_j , para $j = 1, \dots, k$. Expressões detalhadas encontram-se no Apêndice A.3.3 .

Dentre os parâmetros do processo, a interpretação segue:

- O parâmetro μ controla a tendência média do processo de degradação ao longo do tempo, determinando a inclinação esperada da trajetória. Uma $\mu > 0$ indica uma degradação crescente;
- O parâmetro λ está inversamente relacionado à variabilidade, regulando a dispersão em torno da média: valores maiores de λ geram trajetórias mais suaves e previsíveis, enquanto valores menores implicam maior flutuação.

Nesta etapa do estudo, diferentemente do capítulo anterior, introduzimos também o parâmetro de aceleração β , de modo a incorporar explicitamente o efeito de níveis de estresse s na dinâmica da degradação. Foram considerados valores de $\beta = \{1, 2, 4\}$ para situações de aceleração e os mesmos valores negativos de β para simular cenários de desaceleração.

O tamanho final das amostras foi obtido variando:

- o número de sistemas $n_d = \{50, 100, 200\}$,
- o número de ações de manutenção $k = \{2, 3, 4\}$,
- e o número de medições entre as manutenções $m = \{0, 3, 5\}$.

Essas medições são assumidas fixas entre sistemas e entre os tempos de manutenção τ_j . Para cada unidade i , o tamanho da amostra é dado por $M_i = N + 2k + 2$, sendo $N = m \times (k + 1)$. Assim, quando $m = 0$, as trajetórias registram apenas os instantes de MP, enquanto valores menores de m e k resultam em menos medições disponíveis.

Os valores adotados para os parâmetros principais foram: $\mu = \{2, 5, 7\}$ (diferentes inclinações) e $\lambda = \{1, 5, 10\}$ (níveis de variabilidade distintos). Considerou-se ainda diferentes conjuntos de efeitos de manutenção, $\theta = \{(0, 3; 0, 7), (0, 3; 0, 5; 0, 7), (0, 3; 0, 5; 0, 7; 0, 9)\}$. A escolha de θ não afetou as estimativas de μ e λ , uma vez que os efeitos de manutenção são tratados de forma analítica, mantendo a verossimilhança dependente apenas dos incrementos de degradação, conforme discutido na Subseção 5.2.2.

Além disso, neste estudo o fator de aceleração foi considerado de forma exponencial. Assim, ao assumir um caminho de degradação linear ($g_\mu = \mu t$), temos que a função de degradação média ajustada é dada por $g_\mu(t | A_d) = \mu t \exp(\beta A_d)$, onde μ é o parâmetro de degradação médio sob condições normais de operação e A_d representa o nível de aceleração adotado, enquanto β quantifica o efeito desse nível sobre a taxa de degradação.

Por fim, a Figura 22 ajuda a ilustrar exemplos visuais similares das trajetórias simuladas. Para exemplo, ao considerar $n_d = 3$, $m = 3$, $k = 2$, $\mu = 2$, $\lambda = 5$, $\beta = 2$ e efeitos de manutenção $\theta = (0, 4; 0, 9)$, nota-se que as curvas mais suaves correspondem ao processo subjacente $X(t)$ (sem manutenção), enquanto as demais trajetórias incorporam as ações de manutenção nos tempos 1,33 e 2,66, caracterizando o processo de degradação $Z(t)$. Além disso, temos $d = 3$, isto é, 3 níveis de estresse, sendo $A_1 = 0$, $A_2 = 0,5$ e $A_3 = 0,75$.

A seguir, a Tabela 10 apresenta de forma resumida os diferentes cenários adotados na simulação das trajetórias de degradação. São mostradas as variações consideradas para cada parâmetro do modelo, abrangendo desde características estruturais do experimento (como número de sistemas, medições e ações de manutenção) até parâmetros do processo estocástico (inclinação média, variabilidade, efeitos de manutenção e fator de aceleração).

Tabela 10 – Cenários simulados e variações dos parâmetros considerados na geração das trajetórias.

Parâmetro	Valores considerados
Número de sistemas por nível de estresse (n_d)	{50, 100, 200}
Número de ações de manutenção (k)	{2, 3, 4}
Número de medições entre manutenções (m)	{0, 3, 5}
Inclinação média do processo (μ)	{2, 5, 7}
Parâmetro de variabilidade (λ)	{1, 5, 10}
Fatores de manutenção (θ)	{(0, 3; 0, 7), (0, 3; 0, 5; 0, 7), (0, 3; 0, 5; 0, 7; 0, 9)}
Parâmetro de aceleração (β)	{1, 2, 4} e {-1, -2, -4}
Níveis de estresse (A_d)	$A_1 = 0, A_2 = 0, 5, A_3 = 0, 75$

Para cada cenário considerado, foram geradas 1.000 amostras. Em cada uma delas, obtiveram-se as estimativas $\hat{\mu}$, $\hat{\lambda}$ e $\hat{\beta}$ correspondentes aos parâmetros μ , λ e β , respectivamente. A partir dessas estimativas, calcularam-se as métricas MRE, RMSE e CP.

Um recorte dos resultados está apresentado nas Figura 23, Figura 24 e Figura 25, para os cenários com fatores de aceleração (valores positivos de β), e nas Figura 26, Figura 27 e Figura 28, para os cenários com fatores de desaceleração (valores negativos de β), todos considerando $\beta = \pm 1$. Resultados adicionais, correspondentes a outros valores de β (ou seja, $\beta = \pm 2$ e $\beta = \pm 4$), encontram-se no Apêndice A.4, nas figuras Figura 35, Figura 36 e Figura 37; Figura 38, Figura 39 e Figura 40; Figura 41, Figura 42 e Figura 43; e Figura 44, Figura 45 e Figura 46, respectivamente. Observe que, nas figuras que resumem as métricas avaliadas no estudo de simulação, o eixo y apresenta escalas diferentes, devido às distintas magnitudes observadas nos diversos cenários.

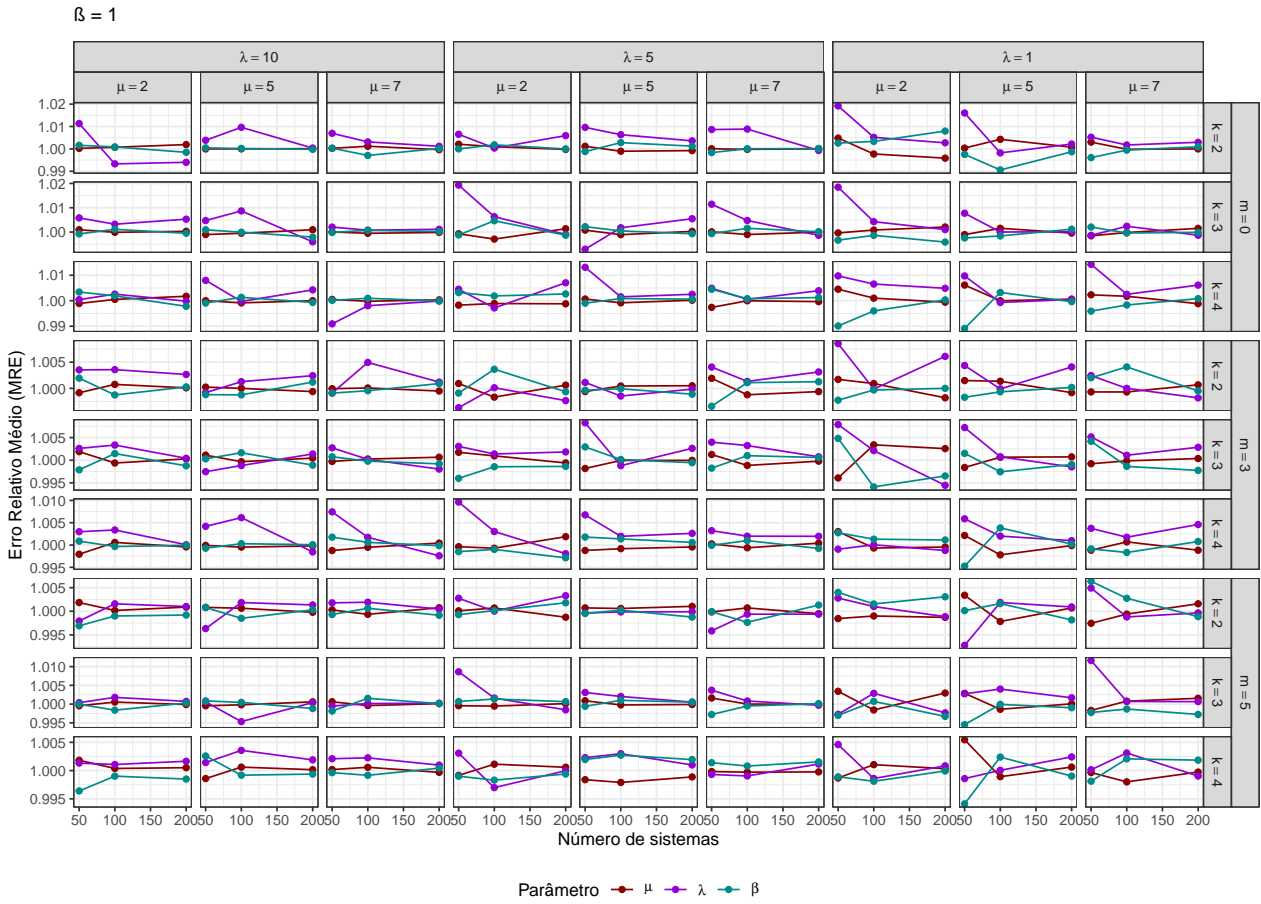


Figura 23 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = 1$).

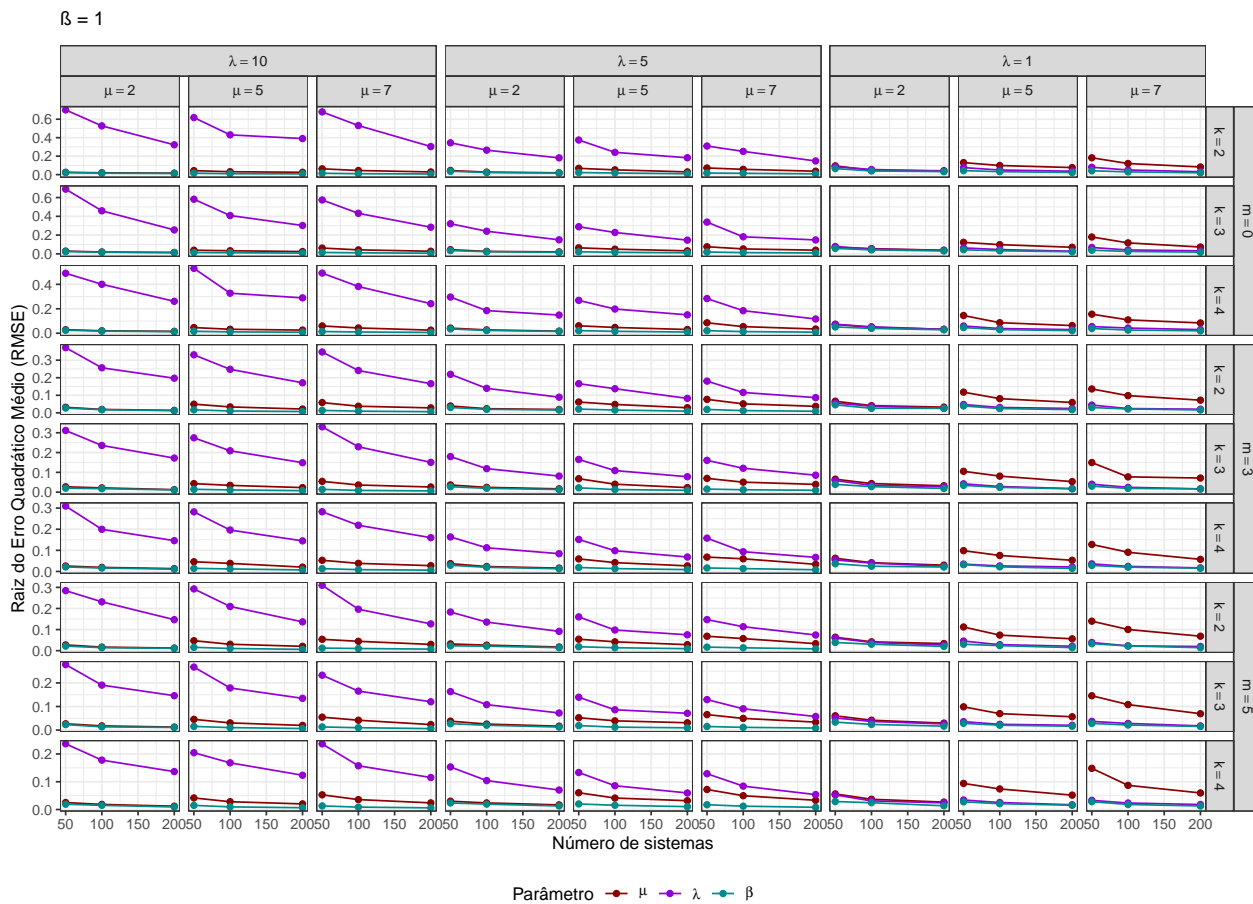


Figura 24 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = 1$).

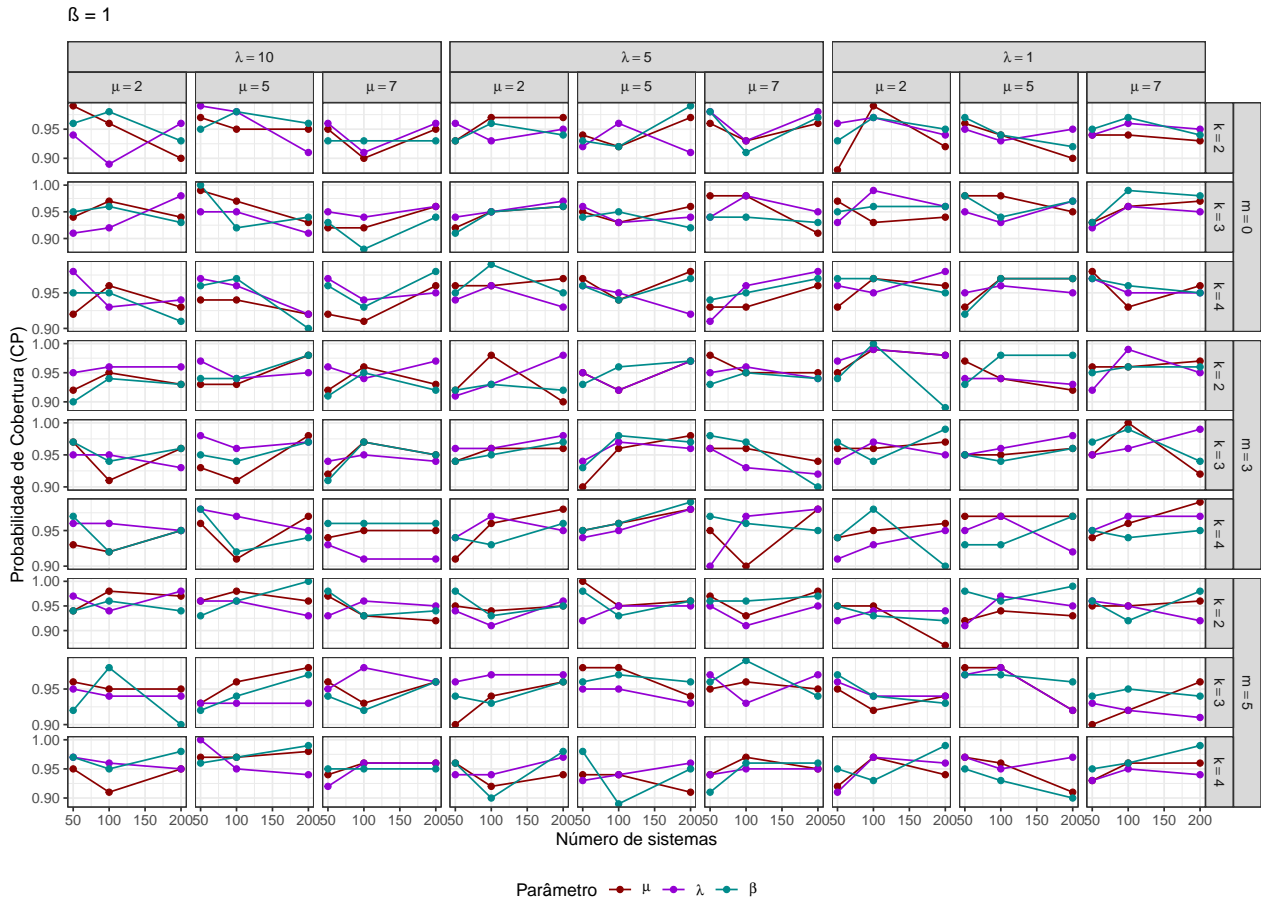


Figura 25 – Resultados da simulação — CP ($\beta = 1$).

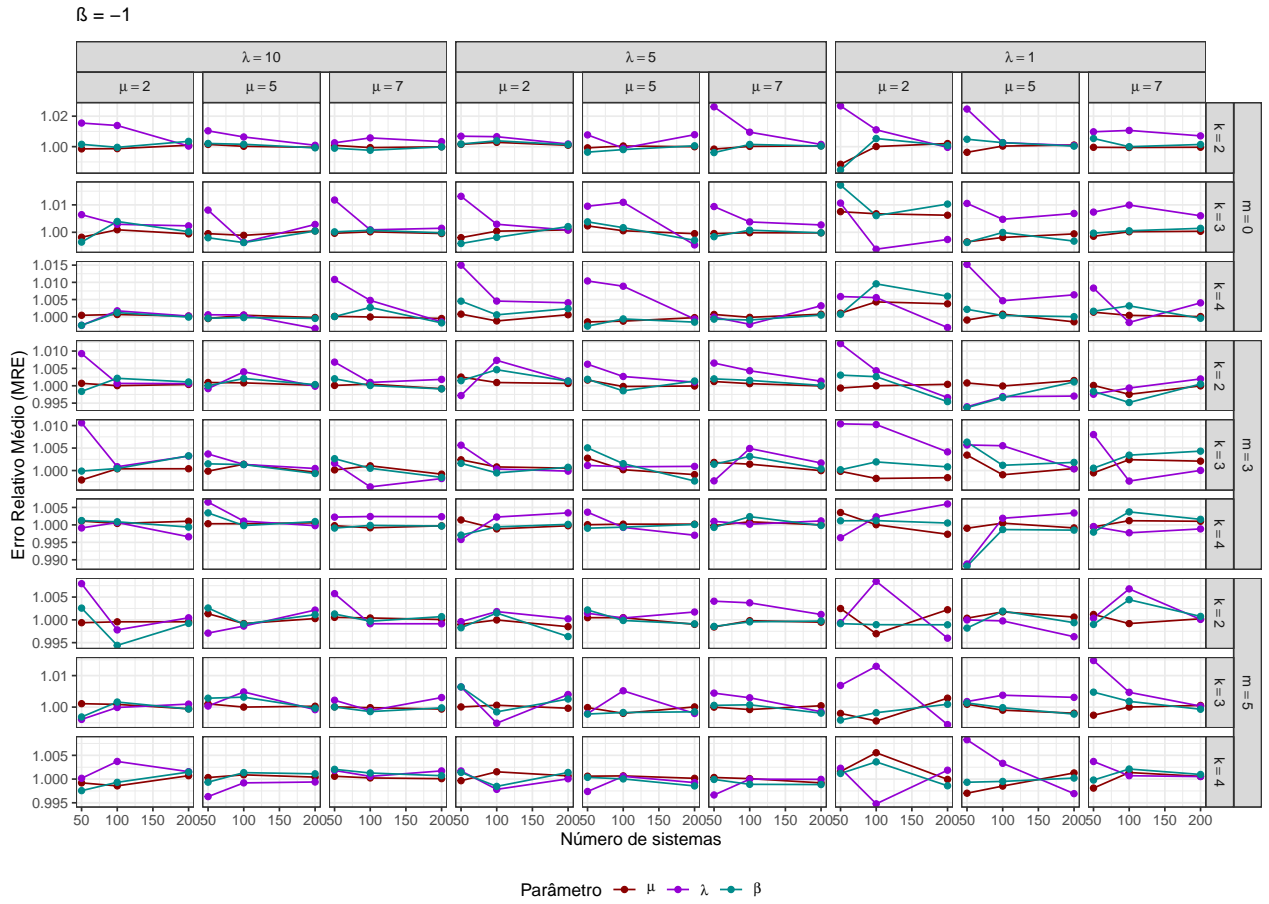


Figura 26 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = -1$).

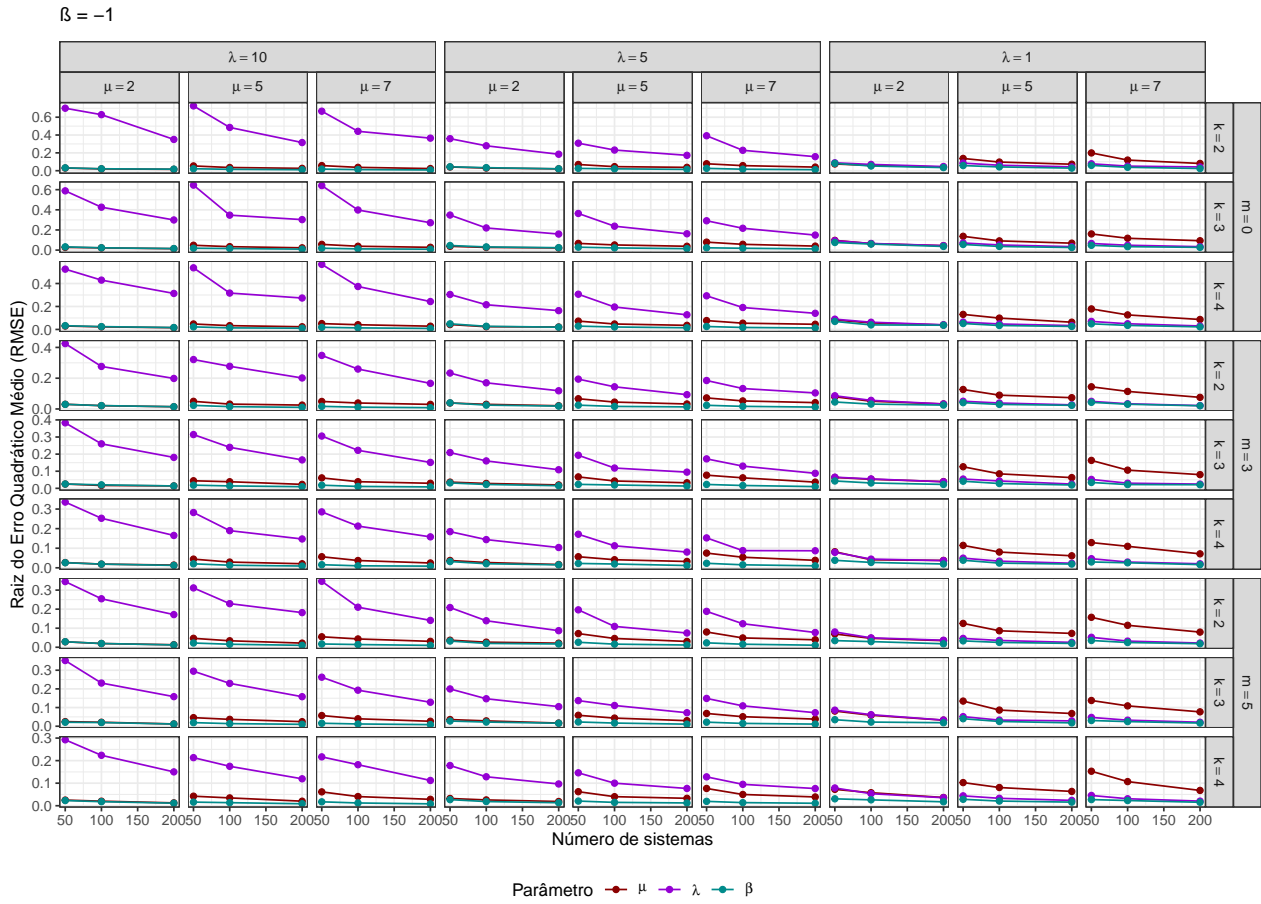


Figura 27 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = -1$).

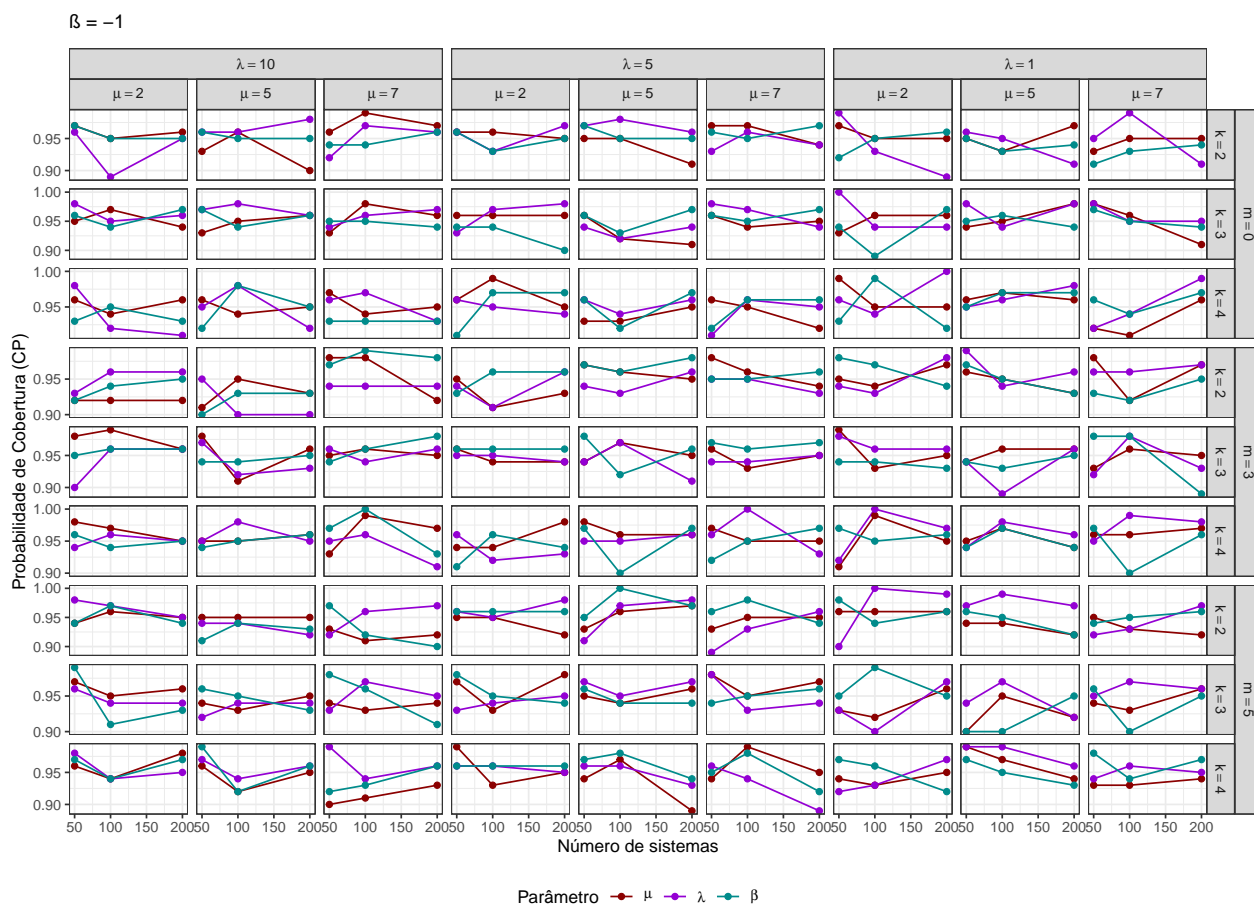


Figura 28 – Resultados da simulação — CP ($\beta = -1$).

De modo geral, as três métricas apresentaram o comportamento esperado ao longo de todos os cenários analisados. Destaca-se que o aumento do tamanho da amostra, isto é, um maior número de sistemas avaliados bem como valores mais elevados de m e k , conduzem a um CP mais próximo do nível nominal de 95% e a um RMSE cada vez mais reduzido, aproximando-se de zero para todas as combinações de parâmetros. De maneira semelhante, o MRE tende ao valor nominal (1) à medida que o tamanho da amostra cresce. Algumas poucas exceções a esse padrão foram registradas, mas permanecem compatíveis com as flutuações naturais esperadas em estudos de simulação.

Em síntese, os resultados obtidos indicam que os estimadores do modelo proposto apresentam bom desempenho, com melhoria progressiva à medida que o tamanho amostral aumenta, comportamento coerente com as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança. Optou-se pelo uso de intervalos de confiança obtidos a partir da aproximação assintótica dos EMV, por demandarem menor esforço computacional. Os resultados numéricos obtidos não apontaram dificuldades ou perda de precisão ao adotar essa abordagem.

5.4 Aplicação

Nesta seção apresenta-se a aplicação da metodologia proposta por meio de um estudo baseado em dados simulados, inspirado em um artigo recente da literatura (ver [Su e Kam \(2020\)](#)). O objetivo é oferecer uma perspectiva prática e demonstrar como o método pode ser utilizado em um cenário próximo ao real.

5.4.1 Sistema de Turbinas Eólicas – Modelagem da Degradação Acelerada

Na avaliação da confiabilidade de pás de turbinas eólicas, as condições ambientais e operacionais exercem grande influência sobre a degradação do material. Embora cada turbina possua três pás, neste estudo considera-se apenas uma pá por turbina como unidade de análise. Assim, para cada condição de estresse monitora-se sempre a mesma pá de um único sistema, garantindo consistência na avaliação da evolução da degradação ao longo do tempo. A Figura 29 ilustra a unidade de medição adotada.



Figura 29 – Ilustração da unidade de medição — pá da turbina eólica.

Inspirados em estudos sobre a degradação de materiais avançados aplicados a essas pás (materiais leves e resistentes, como fibras de vidro e resinas), como o de [Su e Kam \(2020\)](#), propõe-se um cenário experimental controlado no qual as pás são submetidas a diferentes níveis de temperatura e carga aerodinâmica.

Foram simulados três grupos de turbinas, cada um com cinco unidades (totalizando quinze pás), submetidos às seguintes condições:

- **Grupo Normal** ($A_1 = 0$): temperatura ambiente típica de operação (25°C) e carga aerodinâmica nominal de projeto ($1,00\text{ kN/m}^2$), representando operação em condições normais,

com velocidades médias de vento entre 8 e 12 m/s, típicas de parques eólicos convencionais;

- **Grupo Moderado** ($A_2 = 0, 15$): temperatura 15% maior (28, 8°C) e carga aerodinâmica aumentada em 15% (1, 15 kN/m²), representando operação em regiões costeiras com ventos mais intensos, variando entre 12 e 18 m/s e esforços estruturais mais elevados;
- **Grupo Extremo** ($A_3 = 0, 30$): temperatura 30% maior (32, 5°C) e carga aerodinâmica 30% maior (1, 30 kN/m²), representando operação em condições severas, como áreas sujeitas a tempestades de areia, com velocidades de vento acima de 18 m/s e eventos climáticos extremos, que impõem cargas e esforços significativamente maiores às pás,

Os níveis de estresse (A_d , com $d = 1, 2, 3$) foram incorporados ao modelo por meio do fator de aceleração exponencial $H(A_d) = \exp(\beta A_d)$, de modo que a taxa de degradação aumenta com o nível de estresse.

Para cada nível de estresse, cinco pás idênticas foram monitoradas ao longo de 20 meses de operação simulada. Nesse período, realizaram-se MP nos meses 4, 8, 12 e 16. Após cada intervenção, as pás retornaram ao teste, registrando-se valores imediatamente antes e depois de cada manutenção. O critério de falha foi definido como o instante em que a degradação acumulada ultrapassa 125 unidades de 10 micrômetros (μm), equivalente ao limite estrutural de segurança da pá.

Durante o experimento, registraram-se:

- tempos de inspeção (t);
- valores acumulados de degradação considerando reparos (Z);
- valores acumulados de degradação sem considerar reparos (X);
- níveis de estresse aplicados (A_d), com $d = 1, 2, 3$.

A medida de degradação corresponde à remoção progressiva da camada protetora aplicada na borda de ataque da pá, expressa em unidades de 10 μm . Por exemplo, um valor de 40 no gráfico equivale a 400 μm (0,4 mm) removidos, enquanto um valor de 125 corresponde a 1.250 μm (1,25 mm). Essa remoção expõe o material estrutural, tornando-o mais suscetível a erosão, impacto de partículas e condições severas, reduzindo a vida útil e a eficiência aerodinâmica da pá.

Três tipos de reparo são considerados: (i) reparos mínimos, que apenas retardam a degradação com medidas provisórias, como a aplicação rápida de um selante ou fita protetora sobre a área danificada; (ii) reparos imperfeitos, que restauram parcialmente a proteção, mas não a condição original, como o uso de uma resina alternativa que devolve parte da proteção,

mas não a condição de fábrica; (iii) reparos perfeitos, que reconstróem integralmente a camada, restabelecendo as características originais.

Para a compreensão dos dados finais considerados, apresentam-se na Tabela 11 os registros obtidos para a primeira unidade em cada nível de estresse. Os tempos destacados em negrito indicam medições realizadas imediatamente antes e após as ações de reparo. Observe que, para a variável X , os valores se repetem nesses instantes, uma vez que não há efeitos de reparos no cenário sem manutenção.

Tabela 11 – Dados simulados para a primeira unidade nos diferentes níveis de estresse.

Nível Normal ($A_1 = 0$)				Nível Moderado ($A_2 = 0, 15$)				Nível Extremo ($A_3 = 0, 3$)			
t	Z	X	A_1	t	Z	X	A_2	t	Z	X	A_3
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,15	0,00	0,00	0,00	0,30
1,33	2,38	2,38	0,00	1,33	7,27	7,27	0,15	1,33	8,08	8,08	0,30
2,67	9,32	9,32	0,00	2,67	12,04	12,04	0,15	2,67	14,67	14,67	0,30
4,00	14,92	14,92	0,00	4,00	17,81	17,81	0,15	4,00	21,26	21,26	0,30
4,00	1,49	14,92	0,00	4,00	1,78	17,81	0,15	4,00	2,13	21,26	0,30
5,33	7,02	20,45	0,00	5,33	5,86	21,88	0,15	5,33	6,85	25,99	0,30
6,67	9,02	22,45	0,00	6,67	10,64	26,67	0,15	6,67	16,64	35,77	0,30
8,00	13,43	26,86	0,00	8,00	16,90	32,92	0,15	8,00	23,68	42,82	0,30
8,00	8,65	26,86	0,00	8,00	10,85	32,92	0,15	8,00	15,06	42,82	0,30
9,33	13,12	31,33	0,00	9,33	16,18	38,25	0,15	9,33	23,19	50,94	0,30
10,67	18,12	36,32	0,00	10,67	23,18	45,25	0,15	10,67	29,33	57,09	0,30
12,00	21,97	40,17	0,00	12,00	26,73	48,81	0,15	12,00	34,08	61,84	0,30
12,00	13,98	40,17	0,00	12,00	17,20	48,81	0,15	12,00	22,67	61,84	0,30
13,33	17,42	43,61	0,00	13,33	21,99	53,59	0,15	13,33	28,78	67,94	0,30
14,67	22,68	48,87	0,00	14,67	26,39	58,00	0,15	14,67	39,02	78,19	0,30
16,00	25,22	51,42	0,00	16,00	35,61	67,21	0,15	16,00	47,12	86,29	0,30
16,00	15,10	51,42	0,00	16,00	19,04	67,21	0,15	16,00	25,11	86,29	0,30
17,33	20,37	56,68	0,00	17,33	25,05	73,22	0,15	17,33	30,23	91,41	0,30
18,67	24,35	60,66	0,00	18,67	28,99	77,17	0,15	18,67	36,36	97,54	0,30
20,00	28,57	64,88	0,00	20,00	36,20	84,36	0,15	20,00	45,62	106,79	0,30

A Figura 30 apresenta as quinze trajetórias de degradação simuladas para as pás de turbinas eólicas sob diferentes condições de estresse. No primeiro gráfico, observam-se conjuntamente as trajetórias acumuladas de degradação sem reparo (X) e com efeito dos reparos (Z), evidenciando a dinâmica completa ao longo do tempo. O segundo gráfico mostra apenas as trajetórias X , servindo de referência para o processo de degradação sem manutenções. O terceiro gráfico destaca as trajetórias Z , que consideram os efeitos das MP realizadas ao longo do período experimental, mostrando o impacto das intervenções na redução da degradação acumulada. Observe que, neste último gráfico, os valores de degradação (eixo y) são menores, pois as ações de manutenção reduzem a degradação acumulada desde a última manutenção.

O processo de degradação foi modelado como um PGI com aceleração exponencial. Para a estimação dos parâmetros, utilizou-se a função de log-verossimilhança apresentada na

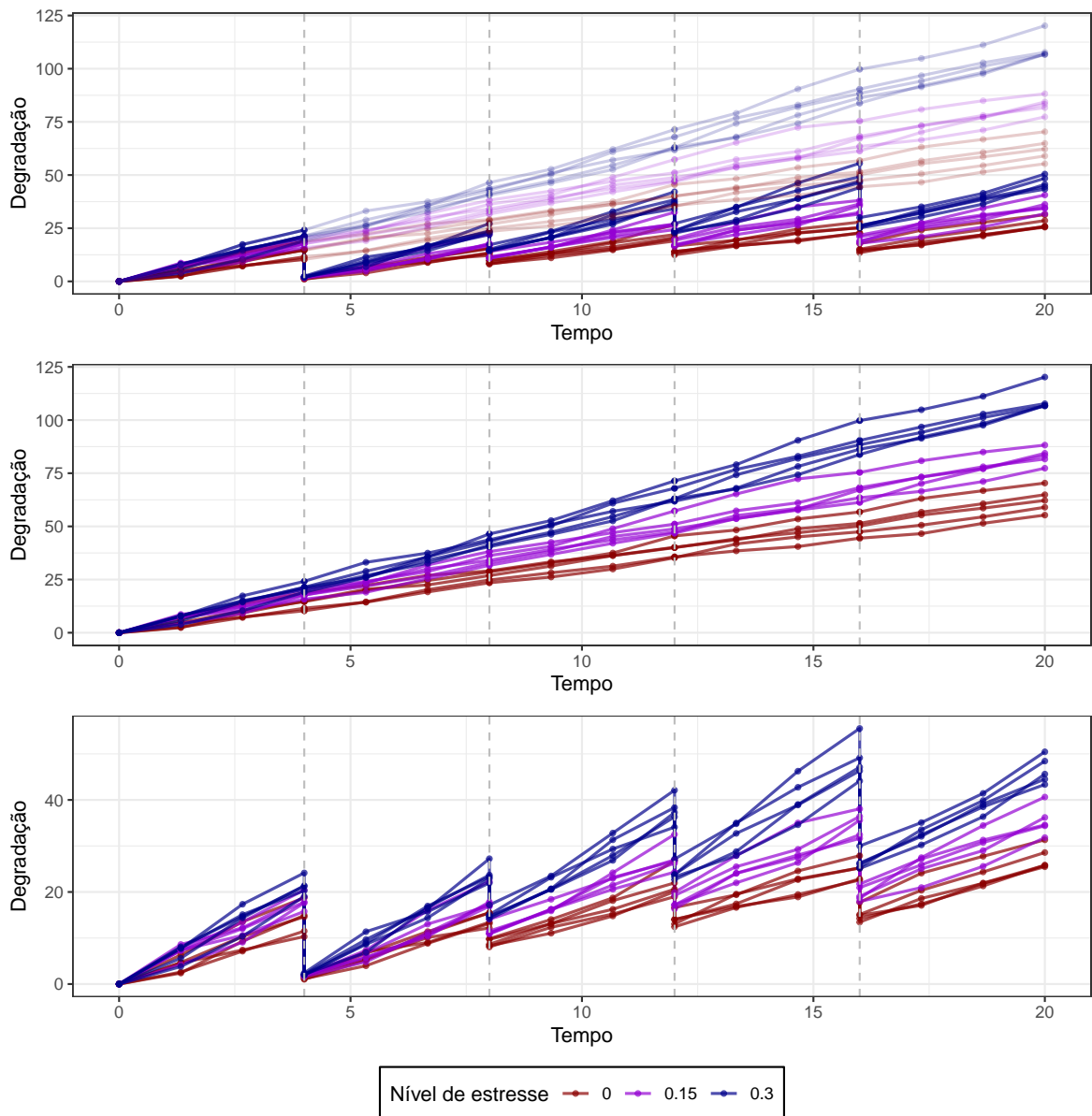


Figura 30 – Trajetórias de degradação simuladas para as pás sob diferentes condições de estresse.

equação (5.6), ajustando o modelo tanto para o cenário com reparos quanto para o cenário sem reparos. Os parâmetros foram estimados a partir dos incrementos das trajetórias, de modo que saltos decorrentes de manutenções não influenciam a média e a variabilidade. Assim, os valores estimados de μ , λ e β são os mesmos nos dois cenários. Os efeitos individuais das manutenções foram obtidos de forma analítica a partir dos saltos observados, conforme a equação (5.5).

A função média de degradação para o nível de estresse A_d é dada por

$$g_{\mu}(t | A_d) = \mu t e^{\beta A_d},$$

com os seguintes parâmetros estimados e respectivos intervalos de confiança de 95%:

- $\hat{\mu} = 3,124$ com $IC_{\mu} = (2,929; 3,320)$, representando a taxa média de degradação sob

condições normais ($A_1 = 0$);

- $\hat{\lambda} = 2,230$ com $IC_{\lambda} = (1,785; 2,675)$, parâmetro associado à variabilidade do processo;
- $\hat{\beta} = 1,875$ com $IC_{\beta} = (1,591; 2,160)$, coeficiente de aceleração que quantifica o efeito do aumento simultâneo de temperatura e carga aerodinâmica.

Esses valores foram obtidos maximizando-se a log-verossimilhança. Os efeitos estimados das intervenções de manutenção, obtidos a partir dos saltos de degradação observados, são apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 – Efeitos das ações de manutenção sobre a degradação acumulada.

Tempo de Manutenção (mês)	Efeito estimado
4	0,90
8	0,40
12	0,60
16	0,90

Com os parâmetros ajustados, as trajetórias simuladas reproduzem o comportamento de degradação acumulada $Z(t)$ ao longo do tempo para cada grupo de estresse. Para o grupo controle ($A_1 = 0$), a taxa de degradação média segue o valor base $\hat{\mu}$. Para os grupos com aceleração, aplica-se:

$$\text{Taxa efetiva} = 3,124 \times e^{1,875A_d}.$$

Assim:

- **Grupo Moderado** ($A_2 = 0,15$): taxa cerca de $e^{1,875 \times 0,15} \approx 1,32$ vezes maior que no grupo controle;
- **Grupo Extremo** ($A_3 = 0,30$): taxa cerca de $e^{1,875 \times 0,30} \approx 1,75$ vezes maior em relação ao grupo controle,

A Figura 31 apresenta os gráficos de probabilidade–probabilidade (P–P) e quantil–quantil (Q–Q) para os incrementos de degradação observados de acordo com os níveis de aceleração. Os resultados sugerem que os modelos baseados em PGI são apropriados para esses dados, pois os pontos do gráfico seguem de perto a linha diagonal. Além disso, fizemos o teste de adequação de Anderson–Darling (AD) (ANDERSON; DARLING, 1954), os valores-p dos testes AD são maiores que 0,05 para todos os níveis (0,8510; 0,3851 e 0,9261, respectivamente), isto é, indicando boa aderência ao modelo em todos os níveis.

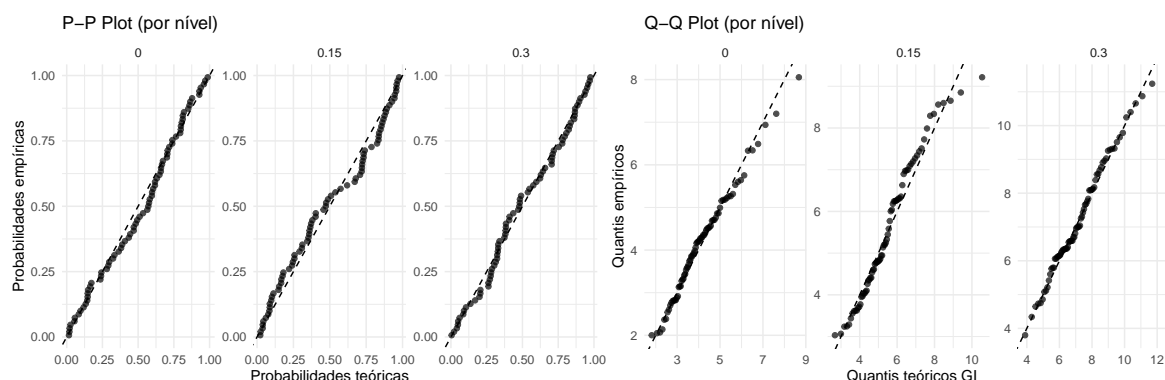


Figura 31 – Teste de adequação baseado nos dados de turbinas eólicas: à esquerda, o gráfico P–P dos incrementos de degradação; à direita, o gráfico Q–Q dos incrementos de degradação, ambos por cada nível de aceleração.

A Figura 32 apresenta o fator de aceleração estimado, expresso por $e^{\hat{\beta}A_d}$, em função do nível de estresse operacional. Nota-se que, à medida que o estresse aumenta, esse fator cresce exponencialmente, evidenciando que condições mais severas intensificam o processo de degradação e exigem maior atenção no planejamento de MP.

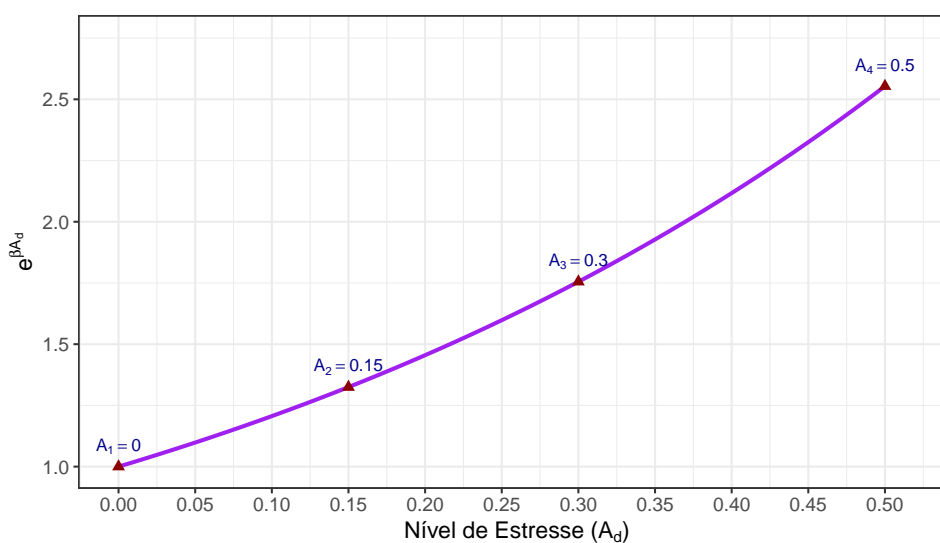


Figura 32 – Fator de aceleração estimado em função do nível de estresse.

Além da análise das trajetórias, deseja-se investigar de forma mais detalhada como o fato de desconsiderar os efeitos das ações de manutenção afeta as trajetórias, os níveis de degradação acumulada e, conseqüentemente, as estimativas de confiabilidade dos sistemas e dos tempos médios até a falha (*Mean Time To Failure (MTTF)*). Essa avaliação é fundamental, pois a escolha de considerar ou não os efeitos dos reparos na modelagem pode levar a estimativas enviesadas, impactando diretamente o planejamento de manutenção e a previsão de custos ao longo do ciclo de vida das pás.

A análise comparativa permite quantificar o quanto a não consideração dos reparos (cenário baseado apenas nas trajetórias X) pode subestimar a vida útil, levando a decisões incorretas e, potencialmente, a gastos desnecessários com substituições ou manutenções prematuras. Por outro lado, ao incorporar os efeitos das ações de manutenção (cenário baseado nas trajetórias Z), obtêm-se estimativas mais realistas da degradação residual e da confiabilidade condicionada ao estado observado no último instante de inspeção, permitindo otimizar o planejamento de manutenções e reduzir custos operacionais.

No presente estudo, as funções de interesse do tempo de vida útil (densidade, distribuição acumulada e confiabilidade) e o MTTF em cada nível de estresse foram estimadas a partir das trajetórias estendidas. Essas trajetórias foram simuladas a partir do estado de degradação já observado no último instante de medição, utilizando os parâmetros ajustados do modelo de degradação.

Esse procedimento é essencial porque considera o nível real de degradação acumulada, incluindo os efeitos das ações de manutenção realizadas ao longo do tempo. Caso o cálculo fosse feito diretamente a partir do modelo teórico, sem considerar o histórico observado, ou seja, assumindo que a degradação se inicia do zero e sem MP, os valores obtidos seriam irrealistas, pois desconsiderariam as reduções parciais de degradação provocadas pelos reparos e a condição atual do componente. Assim, a abordagem adotada fornece estimativas de tempo médio até a falha mais coerentes com o comportamento real do sistema e com as condições operacionais monitoradas.

Na Figura 33 apresentamos a ilustração de uma das 1.500 extensões de trajetórias simuladas. Até o tempo 20 são exibidos os dados observados e utilizados no estudo; a partir desse ponto, as trajetórias foram estendidas com base no modelo assumido e nas estimativas dos parâmetros obtidas na etapa de ajuste. Esse procedimento de extensão, realizado condicionando-se ao histórico observado, caracteriza-se como uma simulação de Monte Carlo condicional (RUBINSTEIN; KROESE, 2016). Cada trajetória foi estendida até o tempo de primeira passagem, conforme visto na Definição 4, ou seja, o instante em que a trajetória ultrapassa o limiar pela primeira vez. Os tempos de falha obtidos foram então registrados e utilizados para o cálculo das funções empíricas de interesse e para a estimativa do MTTF condicional. Do ponto de vista técnico, o objetivo é simular a variável aleatória T_L , representando o tempo até a falha, condicionada ao valor atual da degradação, isto é, $Z(t_0) = z_0$, que em nosso caso $t_0 = 20$ e $Z_{0,i} = z_{0,i}$ com $i = 1, 2, \dots, 15$, pois cada sistema tem um nível de degradação acumulado distinto; para mais detalhes ver Kahle (2019).

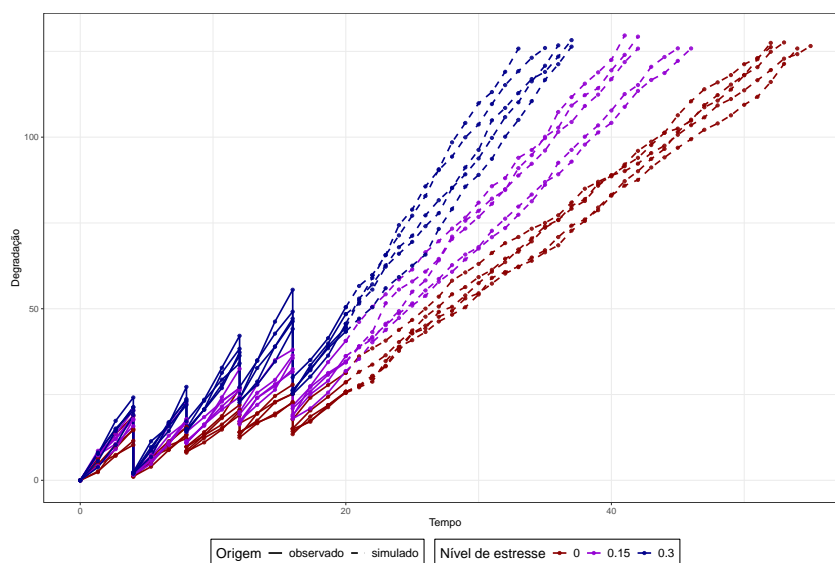


Figura 33 – Trajetórias de degradação ao longo do tempo e as extensões simuladas sob parâmetros estimados.

A seguir, são apresentados os valores estimados de MTTF para ambos os cenários – considerando e não considerando os efeitos de reparo.

Tabela 13 – Comparação dos valores de MTTF obtidos para diferentes níveis de estresse, considerando as trajetórias sem efeitos de reparo (X) e com efeitos de reparo (Z).

Nível de Estresse	A_d	MTTF com reparo (Z)	MTTF sem reparo (X)
Normal	0,00	51,75	40,14
Moderado	0,15	42,17	30,27
Extremo	0,30	34,89	22,83

Os resultados da Tabela 13 mostram que considerar os efeitos das ações de manutenção nas trajetórias de degradação impacta diretamente os valores de MTTF. Ao incorporar os reparos (coluna Z), observa-se um aumento do MTTF em comparação ao cenário que os desconsidera (coluna X). Para o nível de estresse normal ($A_1 = 0$), o MTTF com reparo é de aproximadamente 51,75 meses, enquanto, sem reparo, a estimativa cai para cerca de 40,14 meses. No nível moderado ($A_2 = 0,15$), o MTTF diminui de 42,17 meses (com reparo) para 30,27 meses (sem reparo). Já no nível extremo ($A_3 = 0,3$), a redução é de 34,89 meses para apenas 22,83 meses.

Esses resultados evidenciam que, ao desconsiderar os reparos, as trajetórias indicam uma degradação mais acelerada e tempos médios até a falha menores. Já o cenário com reparos reflete de forma mais realista a operação do sistema, em que as manutenções retardam o avanço da degradação e ampliam a vida útil. Tais diferenças influenciam diretamente o planejamento de manutenção e os custos operacionais, pois estimativas baseadas em trajetórias sem reparo podem levar a decisões conservadoras e à substituição prematura de componentes ainda funcionais.

Na Figura 34 são apresentadas as funções estimadas para os tempos até a falha. Observa-se que a confiabilidade dos sistemas diminui à medida que aumenta o nível de estresse; ou seja,

quanto maior o estresse, menor a confiabilidade ao longo do tempo. A função de distribuição acumulada mostra o comportamento inverso, como esperado. Já as funções densidade apresentam maior concentração de valores em torno dos MTTF estimados, conforme indicado na Tabela 13.

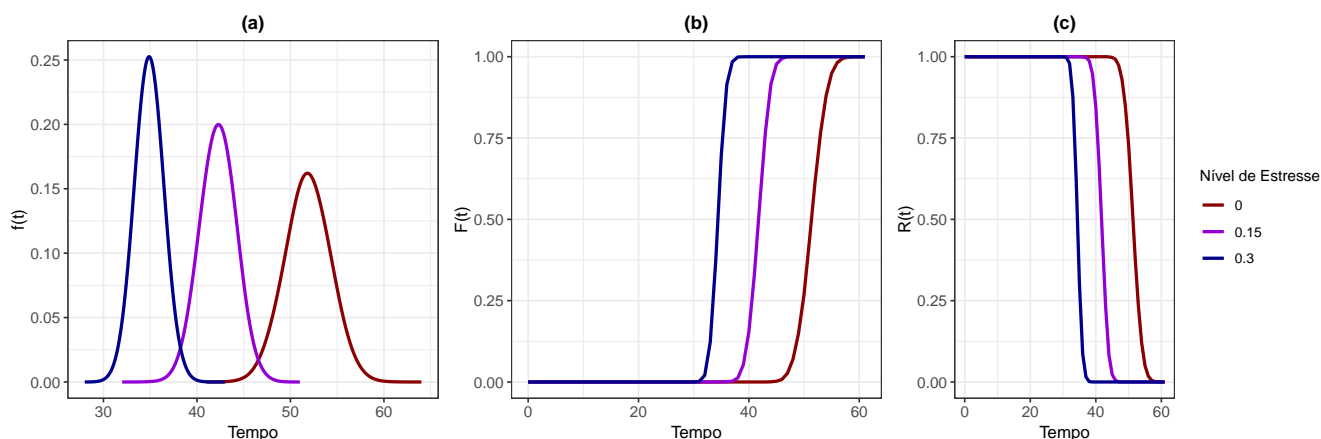


Figura 34 – Funções de densidade (a), distribuição acumulada (b) e confiabilidade (c) para os tempos de falha em diferentes níveis de estresse.

O estudo demonstra que a incorporação de um fator de aceleração exponencial permite representar de forma realista a degradação de componentes sob diferentes condições ambientais, capturando o efeito combinado de temperatura e carga. Os resultados mostram que, ao considerar apenas trajetórias a partir do estado inicial (cenário sem reparo), obtêm-se tempos até a falha que não refletem adequadamente a condição atual dos sistemas, levando a estimativas de MTTF menos realistas. Por outro lado, ao incluir as ações de manutenção (cenário com reparo), as trajetórias estendidas reproduzem com maior fidelidade a dinâmica do processo, resultando em tempos de falha e métricas de confiabilidade mais consistentes com a realidade operacional.

Dessa forma, o modelo proposto demonstra potencial para apoiar políticas de manutenção mais eficientes, ressaltando a importância de considerar informações históricas e efeitos de reparos ao projetar estratégias de gestão da vida útil de equipamentos. Estudos futuros com dados reais poderão refinar os parâmetros e ampliar a aplicabilidade do método em diferentes contextos industriais.

5.5 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentada uma abordagem para modelar processos de degradação acelerada em sistemas reparáveis, integrando fatores de estresse operacional e efeitos de MP. O modelo proposto, MDA_ARD_{IPGI} , combina um processo de degradação acelerada Gaussiano inverso, baseado em fator de aceleração exponencial, com o mecanismo de RI do tipo ARD_1 , permitindo avaliar, de forma conjunta, o impacto de variáveis externas sobre a degradação e o efeito das manutenções ao longo do tempo.

A estimação dos parâmetros do processo estocástico e do fator de aceleração foi realizada por máxima verossimilhança, resultando em estimativas consistentes e com propriedades assintóticas confirmadas por estudos de simulação abrangentes, enquanto os efeitos dos reparos foram obtidos de forma analítica. Os resultados mostraram que o modelo é eficaz para capturar a dinâmica de degradação sob condições variáveis.

A aplicação prática ao caso das turbinas eólicas reforçou a relevância do método, evidenciando que a consideração do histórico de degradação e das manutenções executadas leva a estimativas de MTTF e funções de confiabilidade mais condizentes com a operação real. Em contrapartida, desconsiderar as intervenções pode levar a valores subestimados e, conseqüentemente, a estratégias de manutenção pouco eficientes.

Embora os resultados tenham se mostrado interessantes, o estudo partiu de um cenário de dados completos e adotou a distribuição GI como base do processo, o que não esgota as possibilidades de aplicação. Explorar outras distribuições, diferentes estruturas de manutenção e fatores adicionais de aceleração constitui um caminho interessante para pesquisas futuras, assim como a validação com conjuntos de dados reais em contextos industriais variados.

De modo geral, o MDA_ARD_{IPGI} oferece uma ferramenta sólida para análises de confiabilidade em sistemas reparáveis submetidos a condições dinâmicas, contribuindo para o desenvolvimento de políticas de manutenção mais eficazes e abrindo novas perspectivas para estudos e aplicações práticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PESQUISAS FUTURAS

6.1 Considerações Finais Gerais

Nesta tese, foram desenvolvidos e avaliados modelos estatísticos voltados à análise de confiabilidade de sistemas reparáveis, considerando diferentes tipos de dados: tempos de falha e degradação ao longo do tempo. Partimos inicialmente de um modelo de tempos de falhas com reparos mínimos e incorporando um termo de fragilidade, avançou-se para a modelagem de processos de degradação com efeitos de manutenção imperfeita e, por fim, para um modelo de degradação acelerada que integra fatores de estresse operacional.

No Capítulo 3, introduziu-se um modelo de fragilidade baseado na distribuição Gama não-central para capturar heterogeneidades não observadas entre sistemas reparáveis sob a hipótese de reparo mínimo. Foram derivadas funções de verossimilhança e métricas de predição de confiabilidade, avaliadas por estudos de simulação e aplicações a dois conjuntos de dados reais, demonstrando que a incorporação da fragilidade melhora a identificação de fatores não observáveis que afetam diretamente a intensidade de falha.

O Capítulo 4 estendeu a análise para sistemas cuja degradação evolui ao longo do tempo e pode ser parcialmente reduzida por ações de manutenção. Utilizando um processo Gaussiano inverso como linha de base de um modelo ARD_1 , o modelo proposto permitiu lidar com efeitos de manutenções imperfeitas variáveis, aproximando a modelagem das condições encontradas na prática. Estudos de simulação mostraram a robustez do método e aplicações demonstraram sua utilidade para prever trajetórias mais realistas de degradação.

No Capítulo 5, avançou-se para um cenário de degradação acelerada, propondo o modelo MDA_ARD_{1PGI} , que combina o processo Gaussiano inverso com um fator de aceleração exponencial e reparos imperfeitos. Esse modelo foi validado por simulação e aplicado a um exemplo

industrial, mostrando que a consideração do histórico de manutenção e das condições de estresse resulta em estimativas de confiabilidade e MTTF mais condizentes com a realidade operacional, ao contrário de abordagens que desconsideram as intervenções.

De modo integrado, os resultados obtidos ao longo da tese demonstram que os modelos desenvolvidos são eficazes para capturar a complexidade de sistemas reparáveis, oferecendo alternativas mais flexíveis e realistas às formulações tradicionais. As aplicações práticas reforçaram a importância de se considerar o termo de fragilidade, efeitos de manutenção e condições aceleradas ao projetar políticas de manutenção.

Embora as contribuições apresentem avanços significativos, algumas limitações e possibilidades de extensão permanecem (ver detalhes a seguir na Subseção 6.2). Destaca-se a necessidade de explorar outras distribuições de fragilidade e degradação, bem como métodos de estimação alternativos e dados com observações faltantes. Além disso, a aplicação a novos contextos industriais poderá ampliar a aplicabilidade e a robustez das metodologias aqui propostas.

Em síntese, esta tese oferece um conjunto coerente de modelos e resultados que contribuem para a literatura de confiabilidade e manutenção de sistemas reparáveis, abrindo perspectivas para novas investigações e para o aprimoramento de estratégias de gestão da vida útil de equipamentos.

6.2 Pesquisas futuras

Ao longo do desenvolvimento desta tese, surgiram diversas questões de interesse que podem ser extensões ou desdobramentos dos estudos aqui apresentados, bem como novas abordagens a serem investigadas. A seguir, destacam-se algumas dessas possibilidades:

- Investigar outras distribuições de fragilidade, considerando abordagens univariadas e compartilhadas, levando em conta que cada sistema apresenta eventos recorrentes de falha e os distintos tipos de reparo.
- Explorar a inferência dos modelos de degradação propostos, assumindo diferentes processos de degradação como modelos de linha de base, tais como o processo de Wiener e o processo Gama.
- Desenvolver teoricamente modelos de trajetória de degradação em uma abordagem multivariada, ou seja, considerando dois ou mais processos de degradação atuando sobre um mesmo sistema.
- Investigar a inclusão do termo de fragilidade em modelos de degradação com estrutura ARD_1 , sob diferentes tipos de reparo.

-
- Estudar os modelos de degradação desenvolvidos nesta tese em contextos de dados incompletos, isto é, em situações em que não se dispõe de medições de degradação em instantes anteriores e/ou posteriores às ações de manutenção.
 - Analisar os modelos de degradação (ARD_m) assumindo diferentes tipos de memória m , ou seja, situações em que as ações de manutenção reduzem a degradação acumulada não apenas desde a última manutenção, mas também considerando efeitos mais amplos ao longo do tempo ($m > 1$).
 - Investigar os modelos de degradação desenvolvidos nesta tese para diferentes testes de degradação acelerada, isto é, em situações que o estresse não é constante ao longo do tempo, como por exemplo estresse em etapas (SSADT) e estresse progressivo (PSADT).

REFERÊNCIAS

AKAIKE, H. On entropy maximization principle, applications of statistics. In: **Proceedings of the Symposium held at Wright State University, PR Krishnaiah, Ed., North-Holland Publishing Company**. [S.l.: s.n.], 1977. p. 27–41. Citado na página 77.

ALMEIDA, M. P.; PAIXÃO, R. S.; RAMOS, P. L.; TOMAZELLA, V.; LOUZADA, F.; EHLERS, R. S. Bayesian non-parametric frailty model for dependent competing risks in a repairable systems framework. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 204, p. 107145, 2020. Citado na página 48.

ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A. A test of goodness of fit. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 49, n. 268, p. 765–769, 1954. Citado nas páginas 84 e 108.

ASCHER, H.; FEINGOLD, H. **Repairable systems reliability: Modeling, inference, misconceptions and their causes**. [S.l.]: Marcel Decker, New York, 1984. Citado nas páginas 31 e 32.

BARLOW, R. E.; PROSCHAN, F. **Mathematical theory of reliability**. [S.l.]: SIAM, 1996. Citado na página 22.

BASU, A. P.; RIGDON, S. E. **Statistical methods for the reliability of repairable systems**. [S.l.]: John Wiley, New York, 2000. v. 4. Citado nas páginas 29, 31 e 32.

BRITO, É. S.; TOMAZELLA, V. L.; FERREIRA, P. H. Statistical modeling and reliability analysis of multiple repairable systems with dependent failure times under perfect repair. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 222, p. 108375, 2022. Citado nas páginas 22, 36 e 52.

BRITO, É. S.; TOMAZELLA, V. L.; FERREIRA, P. H.; NETO, F. L.; JUNIOR, O. A. G. Reliability analysis of multiple repairable systems under imperfect repair and unobserved heterogeneity. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 40, n. 7, p. 3888–3912, 2024. Citado na página 36.

BROWN, R. Xxvii. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. **The philosophical magazine**, Taylor & Francis, v. 4, n. 21, p. 161–173, 1828. Citado na página 39.

BURNHAM, K. P.; ANDERSON, D. R. Multimodel inference: understanding aic and bic in model selection. **Sociological methods & research**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 33, n. 2, p. 261–304, 2004. Citado na página 54.

BYRD, R. H.; LU, P.; NOCEDAL, J.; ZHU, C. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 16, n. 5, p. 1190–1208, 1995. Citado na página 83.

- CHHIKARA, R. **The inverse Gaussian distribution: theory, methodology, and applications**. [S.l.]: CRC Press, 1988. v. 95. Citado nas páginas 39 e 40.
- COX, D. R. Regression models and life-tables. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, Wiley Online Library, v. 34, n. 2, p. 187–202, 1972. Citado na página 36.
- CROW, L. H. **Reliability analysis for complex, repairable systems**. [S.l.], 1975. Citado na página 48.
- DOKSUM, K. Degradation rate models for failure time and survival data. **CWI Quarterly**, Stichting Mathematisch Centrum, v. 4, n. 3, p. 195–204, 1991. Citado na página 23.
- DONG, Q.; CUI, L.; SI, S. Reliability and availability analysis of stochastic degradation systems based on bivariate wiener processes. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 79, p. 414–433, 2020. Citado na página 23.
- DOYEN, L.; GAUDOIN, O. Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 84, n. 1, p. 45–56, 2004. Citado na página 34.
- DUAN, F.; WANG, G. Bivariate constant-stress accelerated degradation model and inference based on the inverse gaussian process. **Journal of Shanghai Jiaotong University (Science)**, Springer, v. 23, n. 6, p. 784–790, 2018. Citado nas páginas 23, 25, 42 e 90.
- DUCHATEAU, L.; JANSSEN, P. **The frailty model**. [S.l.]: Springer, 2008. Citado na página 37.
- D’ANDREA, A.; FEITOSA, C. C.; TOMAZELLA, V.; VIEIRA, A. M. C. Frailty modeling for repairable systems with minimum repair: An application to dump truck data of a brazilian mining company. **J Math Stat Sci**, v. 6, p. 179–198, 2017. Citado na página 55.
- D’ANDREA, A. M.; TOMAZELLA, V. L.; ALJOHANI, H. M.; RAMOS, P. L.; ALMEIDA, M. P.; LOUZADA, F.; VERSSANI, B. A.; GAZON, A. B.; AFIFY, A. Z. Objective bayesian analysis for multiple repairable systems. **Plos one**, Public Library of Science San Francisco, CA USA, v. 16, n. 11, p. e0258581, 2021. Citado nas páginas 22 e 54.
- EGHBALI, G.; ELSAYED, E. **Reliability Estimate using degradation data in Advances in Systems Science: Measurement, Circuits and Control Mastorakis, NE. and Pecorelli-Peres, LA Editors) Electrical and Computer Engineering Series**. [S.l.]: WSES press, 2001. Citado na página 23.
- ELBERS, C.; RIDDER, G. True and spurious duration dependence: The identifiability of the proportional hazard model. **The Review of Economic Studies**, Wiley-Blackwell, v. 49, n. 3, p. 403–409, 1982. Citado na página 37.
- ETMINAN, J.; KAMRANFAR, H.; CHAHKANDI, M.; FOULADIRAD, M. Analysis of time-to-failure data for a repairable system subject to degradation. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 408, p. 114098, 2022. Citado na página 38.
- FAN, T.-H.; DONG, Y.-S.; PENG, C.-Y. A complete bayesian degradation analysis based on inverse gaussian processes. **IEEE Transactions on Reliability**, IEEE, v. 73, n. 1, p. 536–548, 2023. Citado na página 25.

- FANG, G.; PAN, R.; WANG, Y. Inverse gaussian processes with correlated random effects for multivariate degradation modeling. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 300, n. 3, p. 1177–1193, 2022. Citado nas páginas 23 e 64.
- FOLKS, J. L.; CHHIKARA, R. S. The inverse gaussian distribution and its statistical application—a review. **Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology**, Oxford University Press, v. 40, n. 3, p. 263–275, 1978. Citado nas páginas 40 e 64.
- GILARDONI, G. L.; COLOSIMO, E. A. Optimal maintenance time for repairable systems. **Journal of quality Technology**, Taylor & Francis, v. 39, n. 1, p. 48–53, 2007. Citado na página 47.
- GORJIAN, N.; MA, L.; MITTINTY, M.; YARLAGADDA, P.; SUN, Y. A review on degradation models in reliability analysis. In: SPRINGER. **Engineering Asset Lifecycle Management: Proceedings of the 4th World Congress on Engineering Asset Management (WCEAM 2009), 28-30 September 2009**. [S.l.], 2010. p. 369–384. Citado na página 23.
- HONG, L.; YE, Z.-S.; LING, R. Environmental risk assessment of emerging contaminants using degradation data. **Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics**, Springer, v. 23, p. 390–409, 2018. Citado na página 23.
- HOUGAARD, P. Life table methods for heterogeneous populations: distributions describing the heterogeneity. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 71, n. 1, p. 75–83, 1984. Citado na página 36.
- IRANMANESH, F.; CHAHKANDI, M. On the moment estimation of an inverse gaussian deteriorating system subject to an imperfect maintenance. In: **Proceedings of the Conference on Statistical Methods**. [S.l.: s.n.], 2022. p. 88. Presented at Conference, May 2022. Citado na página 67.
- JIANG, P.; WANG, B.; WANG, X.; ZHOU, Z. Inverse gaussian process based reliability analysis for constant-stress accelerated degradation data. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 105, p. 137–148, 2022. Citado na página 90.
- JIANG, P. H.; WANG, B. X.; WU, F. T. Inference for constant-stress accelerated degradation test based on gamma process. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 67, p. 123–134, 2019. Citado na página 24.
- JUNIOR, M. A. C. **Modelo de confiabilidade para sistemas reparáveis considerando diferentes condições de manutenção preventiva imperfeita**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016. Citado na página 48.
- JUNIOR, O. A. G. Frailty model for multiple repairable systems hierarchically represented in serial/parallel structures under assumption of aram imperfect repairs. Universidade Federal de São Carlos, 2021. Citado nas páginas 22, 32 e 36.
- KAHLE, W. Imperfect repair in degradation processes: A kijima-type approach. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, Wiley Online Library, v. 35, n. 2, p. 211–220, 2019. Citado na página 110.
- KIJIMA, M. Some results for repairable systems with general repair. **Journal of Applied probability**, Cambridge University Press, v. 26, n. 1, p. 89–102, 1989. Citado nas páginas 33 e 34.

- KIJIMA, M.; MORIMURA, H.; SUZUKI, Y. Periodical replacement problem without assuming minimal repair. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 37, n. 2, p. 194–203, 1988. Citado na página 22.
- KIM T.; PARK, C. A. S. Determining the optimal maintenance action for a deteriorating repairable system. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 23, n. 1, p. 95–101, 2008. Citado na página 22.
- KNÜSEL, L.; BABLOK, B. Computation of the noncentral gamma distribution. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 17, n. 5, p. 1224–1231, 1996. Citado na página 46.
- LEHMANN, A. Failure time models based on degradation processes. **Advances in Degradation Modeling: Applications to Reliability, Survival Analysis, and Finance**, Springer, p. 209–233, 2010. Citado na página 23.
- LEROY, M.; BÉRENGUER, C.; DOYEN, L.; GAUDOIN, O. Statistical inference for a wiener-based degradation model with imperfect maintenance actions under different observation schemes. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, Wiley Online Library, v. 39, n. 3, p. 352–371, 2023. Citado nas páginas 23, 24, 41, 62, 63, 67, 69, 90 e 92.
- _____. Modelling and inference for a degradation process with partial maintenance effects. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, 2024. Citado nas páginas 23 e 67.
- LIN, J.; PULIDO, J.; ASPLUND, M. Analysis for locomotive wheels' degradation. In: IEEE. **2014 Reliability and Maintainability Symposium**. [S.l.], 2014. p. 1–7. Citado na página 25.
- LINDQVIST, B. H. On the statistical modeling and analysis of repairable systems. **Statistical science, JSTOR**, p. 532–551, 2006. Citado na página 22.
- MA, L. Condition monitoring in engineering asset management. In: JSME. **Proceedings of APVC2007 12th Asia Pacific Vibration Conference**. [S.l.], 2007. p. 1–16. Citado na página 23.
- MA, Z.; LIAO, H.; JI, H.; WANG, S.; YIN, F.; NIE, S. Optimal design of hybrid accelerated test based on the inverse gaussian process model. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 210, p. 107509, 2021. Citado na página 24.
- MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A. **Statistical methods for reliability data**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998. Citado na página 76.
- _____. **Statistical methods for reliability data**. [S.l.]: John Wiley Sons, 2014. Citado na página 23.
- MERCIER, S.; CASTRO, I. T. Stochastic comparisons of imperfect maintenance models for a gamma deteriorating system. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 273, n. 1, p. 237–248, 2019. Citado nas páginas 40, 67 e 90.
- METTAS, A.; ZHAO, W. Modeling and analysis of repairable systems with general repair. In: IEEE. **Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2005. Proceedings**. [S.l.], 2005. p. 176–182. Citado na página 56.

MORITA, L. H.; TOMAZELLA, V. L.; BALAKRISHNAN, N.; RAMOS, P. L.; FERREIRA, P. H.; LOUZADA, F. Inverse gaussian process model with frailty term in reliability analysis. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 37, n. 2, p. 763–784, 2021. Citado nas páginas 25 e 77.

MORITA, L. H. M. Degradation modeling for reliability analysis with time-dependent structure based on the inverse gaussian distribution. Universidade Federal de São Carlos, 2017. Citado nas páginas 23, 24, 25, 36, 40, 64, 71, 76, 83 e 95.

NOORTWIJK, J.; KALLEN, M. Stochastic deterioration. **Wiley Online Library**, 2008. Citado na página 23.

NOORTWIJK, J. M. van. A survey of the application of gamma processes in maintenance. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 94, n. 1, p. 2–21, 2009. Citado nas páginas 24 e 39.

OAKES, D. Bivariate survival models induced by frailties. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 84, n. 406, p. 487–493, 1989. Citado na página 25.

OLIVEIRA, I. R. C. de; FERREIRA, D. F. Computing the noncentral gamma distribution, its inverse and the noncentrality parameter. **Computational Statistics**, Springer, v. 28, p. 1663–1680, 2013. Citado na página 46.

OLIVEIRA, M. D. D.; COLOSIMO, E. A.; GILARDONI, G. L. Power law selection model for repairable systems. **Communications in Statistics-Theory and Methods**, Taylor & Francis, v. 42, n. 4, p. 570–578, 2013. Citado na página 48.

ONCHERE, W.; WEKE, P.; JAM, O.; CAROLYNE, O. Non-central gamma frailty with application to life term assurance data. **Advances and Applications in Statistics**, v. 67, n. 2, p. 237–253, 2021. Citado nas páginas 46 e 49.

PARK, C.; PADGETT, W. Accelerated degradation models for failure based on geometric brownian motion and gamma processes. **Lifetime Data Analysis**, Springer, v. 11, p. 511–527, 2005. Citado na página 24.

PENG, C.-Y. Inverse gaussian processes with random effects and explanatory variables for degradation data. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 57, n. 1, p. 100–111, 2015. Citado nas páginas 76 e 83.

PEREIRA, E. Q.; JUNIOR, O. A. G.; TOMAZELLA, V. L. D.; MORITA, L. H. M.; MOTA, A. L.; NETO, F. L. Accelerated failure time frailty model for modeling multiple systems subject to minimal repair. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, Wiley Online Library, 2024. Citado nas páginas 22 e 36.

PORTELA, A. C. T.; BRITO, É. S. de; TOMAZELLA, V. L. D.; DINIZ, C. A. R.; FERREIRA, P. H. Reliability of repairable systems with non-central gamma frailty. **Brazilian Journal of Biometrics**, v. 42, n. 2, p. 182–201, 2024. Citado nas páginas 22 e 36.

PORTELA, A. C. T.; MORITA, L. H.; TOMAZELLA, V.; TOLEDO, M. L.; FERREIRA, P. H.; LOUZADA, F. Non-constant imperfect maintenance effects in inverse gaussian degradation models for multiple repairable systems. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, p. 111349, 2025. Citado nas páginas 23 e 41.

- QIN, H.; ZHANG, S.; ZHOU, W. Inverse gaussian process-based corrosion growth modeling and its application in the reliability analysis for energy pipelines. **Frontiers of Structural and Civil Engineering**, Springer, v. 7, p. 276–287, 2013. Citado na página 24.
- R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2021. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. Citado na página 54.
- RAUSAND, M.; HOYLAND, A. **System reliability theory: models, statistical methods, and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2003. v. 396. Citado na página 33.
- ROSS, S. M. **Stochastic processes**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1996. Citado na página 29.
- RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. **Simulation and the Monte Carlo method**. 3. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2016. Citado na página 110.
- SALLES, G. **On the modelling and statistical analysis of a gamma deteriorating system with imperfect maintenance**. Tese (Doutorado) — Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2020. Citado na página 67.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **The annals of statistics**, JSTOR, p. 461–464, 1978. Citado na página 82.
- SINGPURWALLA, N. D.; WILSON, S. P. Failure models indexed by two scales. **Advances in applied probability**, Cambridge University Press, v. 30, n. 4, p. 1058–1072, 1998. Citado na página 23.
- SOARES, K.; TOMAZELLA, V.; JÚNIOR, S. *et al.* Longevity evaluation of cattle curraleiro pé-duro breed using the inverse gaussian frailty model. **Biom Biostat Int J**, v. 11, n. 3, p. 111–117, 2022. Citado na página 36.
- SONG, K. A new multivariate gamma process model for degradation analysis. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 40, n. 8, p. 4498–4512, 2024. Citado na página 24.
- SU, H.; KAM, T. Reliability analysis of composite wind turbine blades considering material degradation of blades. **Composite Structures**, Elsevier, v. 234, p. 111663, 2020. Citado na página 104.
- TOLEDO, M. L. G. de; FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A.; GILARDONI, G. L. Ara and ari imperfect repair models: Estimation, goodness-of-fit and reliability prediction. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 140, p. 107–115, 2015. Citado na página 32.
- TOMAZELLA, V. L. D. **Modelagem de dados de eventos recorrentes via processo de Poisson com termo de fragilidade**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2003. Citado na página 47.
- VAUPEL, J. W.; MANTON, K. G.; STALLARD, E. The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality. **Demography**, Springer, v. 16, n. 3, p. 439–454, 1979. Citado na página 36.
- VERSSANI, B. A. W. **Modelo de regressão para sistemas reparáveis: um estudo da confiabilidade de colhedoras de cana-de-açúcar**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2018. Citado na página 54.

- WANG, H. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. **European journal of operational research**, v. 139, n. 3, p. 469–489, 2002. Citado na página 22.
- WANG, X. A pseudo-likelihood estimation method for nonhomogeneous gamma process model with random effects. **Statistica Sinica**, JSTOR, p. 1153–1163, 2008. Citado na página 24.
- _____. Wiener processes with random effects for degradation data. **Journal of Multivariate Analysis**, Elsevier, v. 101, n. 2, p. 340–351, 2010. Citado na página 23.
- WANG, X.; GAUDOIN, O.; DOYEN, L.; BÉRENGUER, C.; XIE, M. Modeling multivariate degradation processes with time-variant covariates and imperfect maintenance effects. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, Wiley Online Library, v. 37, n. 3, p. 592–611, 2021. Citado nas páginas 23, 24, 41, 67 e 90.
- WANG, X.; WANG, B. X.; HONG, Y.; JIANG, P. H. Degradation data analysis based on gamma process with random effects. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 292, n. 3, p. 1200–1208, 2021. Citado nas páginas 23 e 24.
- WANG, X.; XU, D. An inverse gaussian process model for degradation data. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 52, n. 2, p. 188–197, 2010. Citado na página 24.
- WHITMORE, G.; CROWDER, M.; LAWLESS, J. Failure inference from a marker process based on a bivariate wiener model. **Lifetime data analysis**, Springer, v. 4, p. 229–251, 1998. Citado na página 23.
- WIENKE, A. **Frailty models in survival analysis**. [S.l.]: CRC press, 2010. Citado nas páginas 36, 37, 46 e 49.
- XU, A.; SHEN, L.; WANG, B.; TANG, Y. On modeling bivariate wiener degradation process. **IEEE Transactions on Reliability**, IEEE, v. 67, n. 3, p. 897–906, 2018. Citado na página 23.
- YE, Z.-S.; CHEN, N. The inverse gaussian process as a degradation model. **Technometrics**, Taylor & Francis, v. 56, n. 3, p. 302–311, 2014. Citado nas páginas 24, 40 e 64.
- ZHAO, M.; XIE, M. On maximum likelihood estimation for a general non-homogeneous poisson process. **Scandinavian Journal of Statistics**, v. 23, p. 597–607, 1996. Citado na página 22.
- ZUO, M. J.; JIANG, R.; YAM, R. C. Approaches for reliability modeling of continuous-state devices. **IEEE transactions on reliability**, IEEE, v. 48, n. 1, p. 9–18, 1999. Citado na página 23.

MATERIAIS COMPLEMENTARES

A.1 Construção algébrica do modelo do Capítulo 4

O modelo definido na equação (4.3) é construído a partir dos seguintes passos:

- $\forall t \in [\tau_0, \tau_1[$:
 - $Z(t) = X(t)$;
 - $Z(\tau_1^-) = X(\tau_1)$, que é a última medição antes da ação de manutenção;
 - $Z(\tau_1^+) = Z(\tau_1^-) - \theta_1 Z(\tau_1^-)$, como $Z(\tau_1^-) = X(\tau_1)$, temos $Z(\tau_1^+) = (1 - \theta_1)X(\tau_1)$.
- $\forall t \in [\tau_1, \tau_2[$:
 - $Z(t) = Z(\tau_1^+) + [X(t) - X(\tau_1)]$, substituindo $Z(\tau_1^+)$ como definido anteriormente, temos $Z(t) = X(t) - \theta_1 X(\tau_1)$;
 - $Z(\tau_2^-) = X(\tau_2) - \theta_1 X(\tau_1)$;
 - $Z(\tau_2^+) = Z(\tau_2^-) - \theta_2 [Z(\tau_2^-) - Z(\tau_1^+)]$, substituindo as expressões definidas anteriormente, podemos reescrever em termos do processo $X(t)$, assim $Z(\tau_2^+) = X(\tau_2) - \theta_2 [X(\tau_2) - X(\tau_1)] - \theta_1 X(\tau_1)$.
- $\forall t \in [\tau_2, \tau_3[$:
 - $Z(t) = Z(\tau_2^+) + [X(t) - X(\tau_2)]$, substituindo $Z(\tau_2^+)$ como definido anteriormente, temos $Z(t) = X(t) - \theta_2 [X(\tau_2) - X(\tau_1)] - \theta_1 X(\tau_1)$;
 - $Z(\tau_3^-) = X(\tau_3) - \theta_2 [X(\tau_2) - X(\tau_1)] - \theta_1 X(\tau_1)$;
 - $Z(\tau_3^+) = Z(\tau_3^-) - \theta_3 [Z(\tau_3^-) - Z(\tau_2^+)]$, substituindo as expressões definidas anteriormente, podemos reescrever em termos do processo $X(t)$, assim $Z(\tau_3^+) = X(\tau_3) - \theta_3 [X(\tau_3) - X(\tau_2)] - \theta_2 [X(\tau_2) - X(\tau_1)] - \theta_1 X(\tau_1)$.

Note que, ao substituir nas expressões, vários termos se cancelam, deixando a expressão dependendo apenas do processo base e de forma acumulativa. Assim, por recorrência:

- $\forall t \in [\tau_j, \tau_{j+1}[$:
 - $Z(t) = Z(\tau_j^+) + [X(t) - X(\tau_j)]$,
 $Z(t) = X(t) - \sum_{l=1}^j \theta_l [X(\tau_l) - X(\tau_{l-1})]$, que é a equação (4.3);
 - $Z(\tau_j^-) = X(\tau_j) - \theta_{j-1} [X(\tau_{j-1}) - X(\tau_{j-2})] - \theta_{j-2} [X(\tau_{j-2}) - X(\tau_{j-3})] - \dots - \theta_1 X(\tau_1)$,
 $Z(\tau_j^-) = X(\tau_j) - \sum_{l=1}^{j-1} \theta_l [X(\tau_l) - X(\tau_{l-1})]$, que é a primeira equação em (4.2);
 - $Z(\tau_j^+) = Z(\tau_j^-) - \theta_j [X(\tau_j) - X(\tau_{j-1})] = X(\tau_j) - \sum_{l=1}^{j-1} \theta_l [X(\tau_l) - X(\tau_{l-1})] - \theta_j [X(\tau_j) - X(\tau_{j-1})]$,
 $Z(\tau_j^+) = X(\tau_j) - \sum_{l=1}^j \theta_l [X(\tau_l) - X(\tau_{l-1})]$, que é a segunda equação em (4.2).

A.2 Notações do Capítulo 5

Para facilitar a leitura das expressões apresentadas nesta subseção, a Tabela 14 resume as principais notações e seus significados.

Tabela 14 – Principais notações utilizadas nas subseções 5.2.1 e 5.2.2.

Notação	Descrição
D	Número de níveis de estresse considerados
A_d	Valor do fator de aceleração do d -ésimo nível de estresse
n_d	Número de sistemas observados no nível de estresse A_d
i	Índice do sistema dentro do nível de estresse ($i = 1, \dots, n_d$)
j	Índice do intervalo entre manutenções ($j = 0, \dots, k$)
k	Número total de ações de manutenção observadas
τ_j	Tempo da j -ésima ação de manutenção
$t_{d,i,j,p}$	Tempo da p -ésima inspeção no intervalo $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ para o sistema (d, i)
$m_{d,i,j}$	Número de observações no intervalo (τ_j, τ_{j+1}) para o sistema (d, i)
$\Delta t_{d,i,j,p}$	Intervalo entre observações: $t_{d,i,j,p} - t_{d,i,j,p-1}$
$Z(t_{d,i,j,p})$	Nível de degradação observado no tempo $t_{d,i,j,p}$
$\Delta Z_{d,i,j,p}$	Incremento de degradação $Z(t_{d,i,j,p}) - Z(t_{d,i,j,p-1})$
$Y_{d,i,j,p}$	Valor observado associado ao incremento $\Delta Z_{d,i,j,p}$
$X_{d,i}(t A_d)$	Processo de degradação intrínseco sob o nível A_d
$Z_{d,i}(\tau_j^- A_d)$	Nível de degradação imediatamente antes da manutenção em τ_j
$Z_{d,i}(\tau_j^+ A_d)$	Nível de degradação imediatamente após a manutenção em τ_j
$\tilde{Z}_{d,i}(t A_d)$	Trajetória de degradação ajustada com reparos condicionada ao nível de estresse A_d
$S_j^{(d,i)}$	Salto de degradação na j -ésima manutenção do sistema (d, i)
$\mathcal{O}_{\tau_j^-}^{(d,i)}$	Conjunto de observações até antes de τ_j (incrementos e saltos)
θ_j	Efeito da ação de reparo na j -ésima manutenção
μ, λ, β	Parâmetros do modelo de degradação (média, forma e aceleração)
$g_\mu(t A_d)$	Função média do processo de degradação sob nível A_d
$\Delta g_\mu(t_{d,i,j,p} A_d)$	Variância da função média no intervalo p
$\mathcal{L}(\mu, \lambda, \beta, \theta)$	Função de verossimilhança baseada nos dados observados

A.3 Algoritmos para geração dos dados simulados

A.3.1 Capítulo 3

O algoritmo a seguir descreve o processo de geração dos tempos de falha para k sistemas, considerando um tempo de truncamento t^* para cada sistema:

1. Defina valores de parâmetros para ν , η e κ .
2. Defina i como o índice do sistema ($i \in \{1, \dots, k\}$).
3. Defina um tempo de truncamento t_i^* .
4. Defina $t_{i,0} = 0$ e $j = 1$.
5. Extraia $u_{i,j}$ de uma distribuição Uniforme(0, 1).

6. Resolva a equação

$$1 - e^{-[\Lambda(t_{i,j-1}+x) - \Lambda(t_{i,j-1})]} = u_{i,j},$$

em que $\Lambda(\cdot)$ é dada em (3.7).

7. Defina $t_{i,j} = t_{i,j-1} + x$.
8. Se $t_{i,j} > t_i^*$, pare a simulação e descarte $t_{i,j}$; caso contrário, defina $j = j + 1$ e repita as etapas 5 a 7.

A.3.2 Capítulo 4

Conforme mencionado anteriormente, para gerar as trajetórias de degradação de cada sistema, empregamos um procedimento em duas etapas.

A primeira etapa corresponde à geração da trajetória de degradação subjacente $X(t)$ (similar às trajetórias descritas na Tabela 1), conforme os passos a seguir:

1. Fixar valores para n , $g_\mu(\cdot)$ e λ ;
2. Para cada unidade i , ($1 \leq i \leq n$):
 - a) Definir $t_{i,0} = 0$ e fixar valores para n_i e $t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}$;
 - b) Para cada índice l , ($1 \leq l \leq n_i$):
 - i. Calcular $\Delta t_{i,l} = t_{i,l} - t_{i,l-1}$ e $\Delta g_\mu(t_{i,l}) = g_\mu(t_{i,l}) - g_\mu(t_{i,l-1})$;
 - ii. Gerar um número aleatório $u_{i,l}$ de $U(0, 1)$;
 - iii. Resolver a equação não linear para $y_{i,l}$:

$$F_{PGI}(y_{i,l} | \Delta g_\mu(t_{i,l}), \lambda) = u_{i,l};$$

c) Calcular os valores de degradação acumulada:

$$d_{i,1} = y_{i,1}, \quad d_{i,2} = y_{i,1} + y_{i,2}, \dots, \quad d_{i,n_i} = y_{i,1} + \dots + y_{i,n_i}.$$

Na segunda etapa, construímos o processo de degradação $Z(t)$, que é uma função de $X(t)$ e depende dos efeitos de manutenção θ_j , para $j = 1, \dots, k$. Expressões detalhadas dessa construção são fornecidas no Apêndice A.1. De forma resumida, seguimos os passos:

1. Fixar valores para os parâmetros dos efeitos de reparo θ_j , com $j = 1, \dots, k$.
2. Para cada unidade i , ($1 \leq i \leq n$):
 - a) Assuma que $X(t)$ já foi gerado para uma sequência de tempos conforme descrito na primeira etapa.
 - b) Considere os tempos de manutenção $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$.
 - c) Construa uma sequência de tempos para calcular $Z(t)$ combinando os tempos de $X(t)$ e os tempos de manutenção τ_j .
 - d) Para todo t no primeiro intervalo $(0, \tau_1]$, defina:

$$Z(t) = X(t).$$

- e) Para cada índice j , com $j = 1, \dots, k$:
 - i. Calcular a degradação acumulada considerando os efeitos de reparo até a j -ésima manutenção:

$$T_j = \sum_{p=1}^j \theta_p [X(\tau_p) - X(\tau_{p-1})].$$

- ii. Para todos os tempos t no intervalo $[\tau_j, \tau_{j+1}[$, ajustar conforme (4.3):

$$Z(t) = X(t) - T_j.$$

- f) Retornar $Z(t)$ para toda a sequência dos tempos de inspeção.

A.3.3 Capítulo 5

Conforme definido anteriormente, a geração do processo de linha de base $X(t)$ segue o mesmo procedimento descrito no Apêndice A.3.2. Em essência, a primeira etapa permanece inalterada; entretanto, neste capítulo incorporamos o fator de aceleração diretamente na função $g_\mu(\cdot)$, de modo que esta passa a ser expressa por $g_\mu(t | A_d)$, dependendo do fator de aceleração assumido e, conseqüentemente, dos parâmetros adicionais.

No nosso estudo temos:

$$g_\mu(t | A_d) = \mu t \exp(\beta A_d),$$

sendo β o parâmetro associado ao fator de aceleração.

Assim, os passos para a primeira etapa são:

1. Fixar valores para n , β , $g_\mu(\cdot)$ e λ ;
2. Para cada unidade i , ($1 \leq i \leq n$):
 - a) Seguir os mesmos passos descritos no Apêndice A.3.2 para gerar $X(t)$, agora utilizando $g_\mu(t | A_d)$.

Na segunda etapa, ocorre apenas uma adaptação: o número total de sistemas considerados n está agora distribuído em D subgrupos, de acordo com o nível de estresse A_d , com $d = 1, \dots, D$. A construção do processo de degradação $Z(t)$, detalhada no Capítulo A.3.2, é aplicada separadamente para cada subgrupo, levando em conta o respectivo nível de estresse. Ou seja, repetem-se os mesmos passos para gerar $Z(t)$ descritos anteriormente, mas condicionados a cada A_d , refletindo a heterogeneidade introduzida pelos diferentes fatores de aceleração.

Os passos para a segunda etapa são:

1. Fixar valores para os parâmetros dos efeitos de reparo θ_j , com $j = 1, \dots, k$;
2. Para cada nível de estresse A_d , com $d = 1, \dots, D$:
 - a) Para cada unidade i , ($1 \leq i \leq n_d$):
 - i. Seguir os mesmos passos descritos no Apêndice A.3.2 para construir $Z(t)$, utilizando os tempos de manutenção e aplicando os efeitos de reparo θ_j .

Observação: Caso $X(t)$ já tenha sido gerado considerando todos os D níveis de estresse, a construção de $Z(t)$ na segunda etapa será naturalmente realizada para todos esses níveis, tornando redundante a separação explícita por subgrupos.

A.4 Figuras das simulações do Capítulo 5

A seguir, as demais simulações para os cenários com $\beta = (2, -2, 4, -4)$.

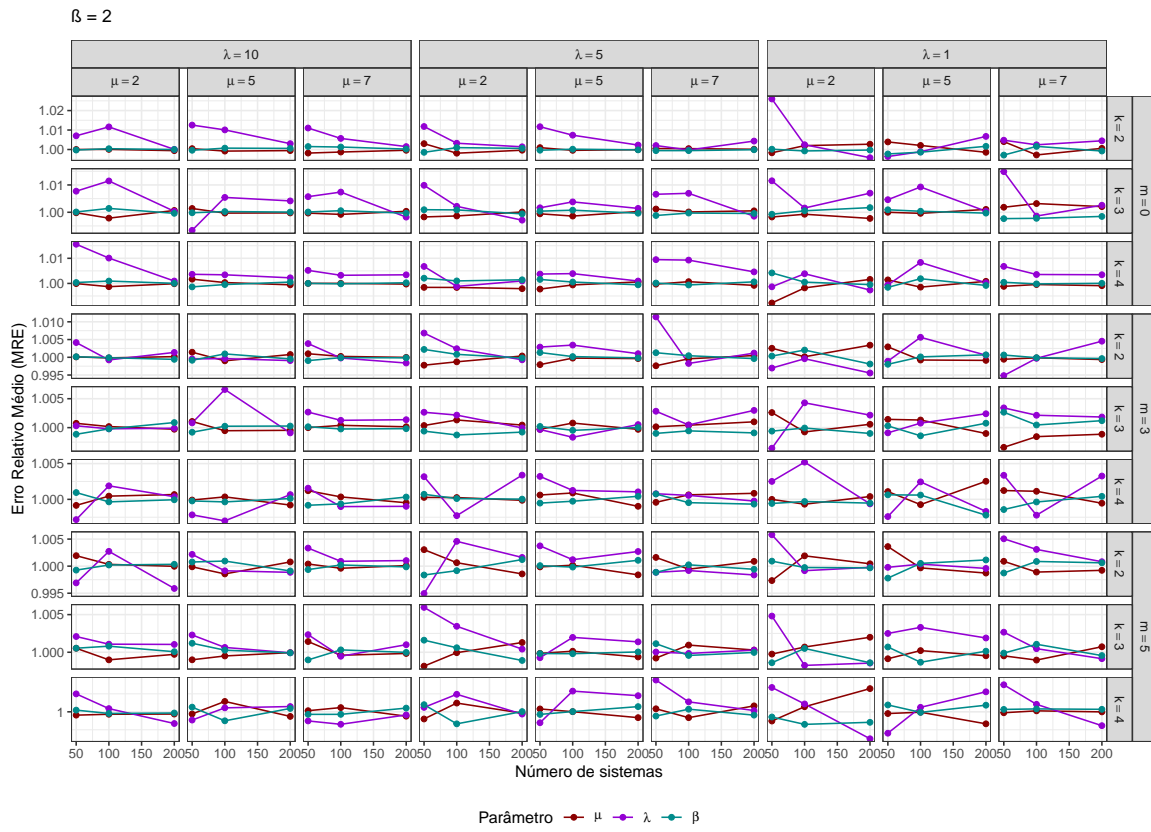


Figura 35 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = 2$).

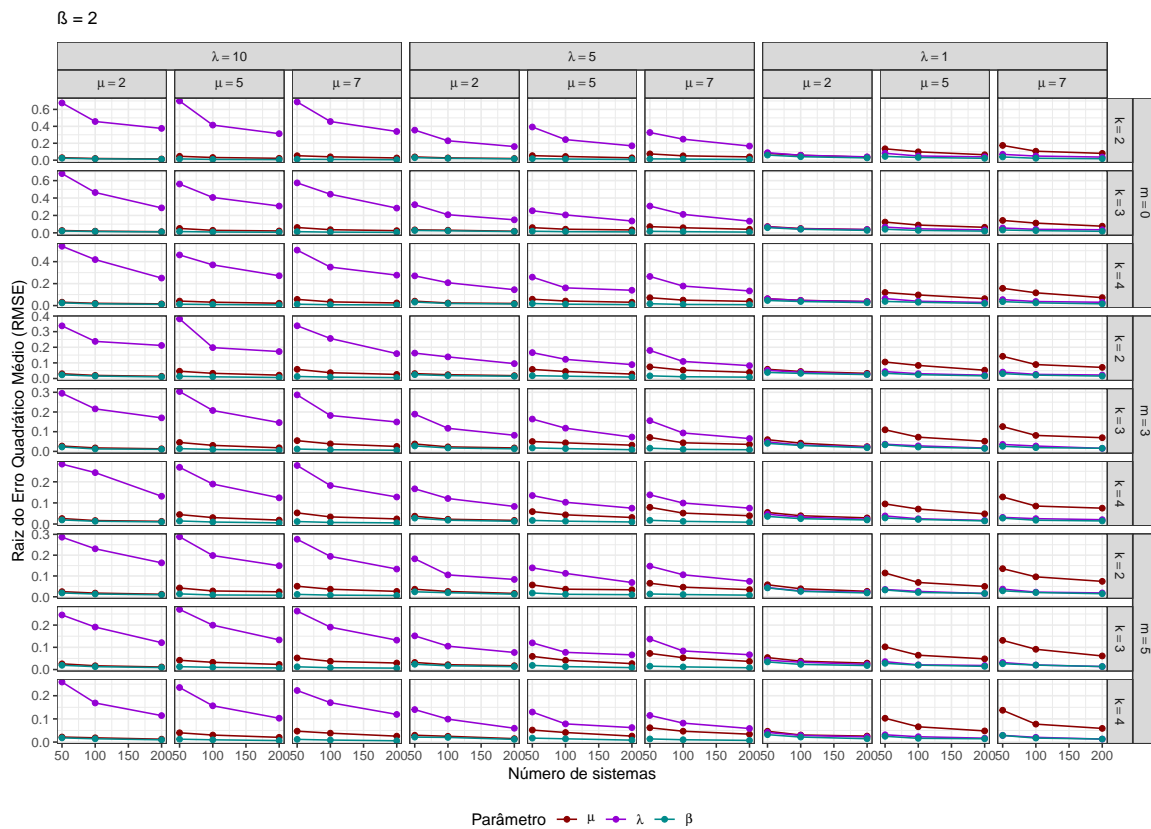


Figura 36 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = 2$).

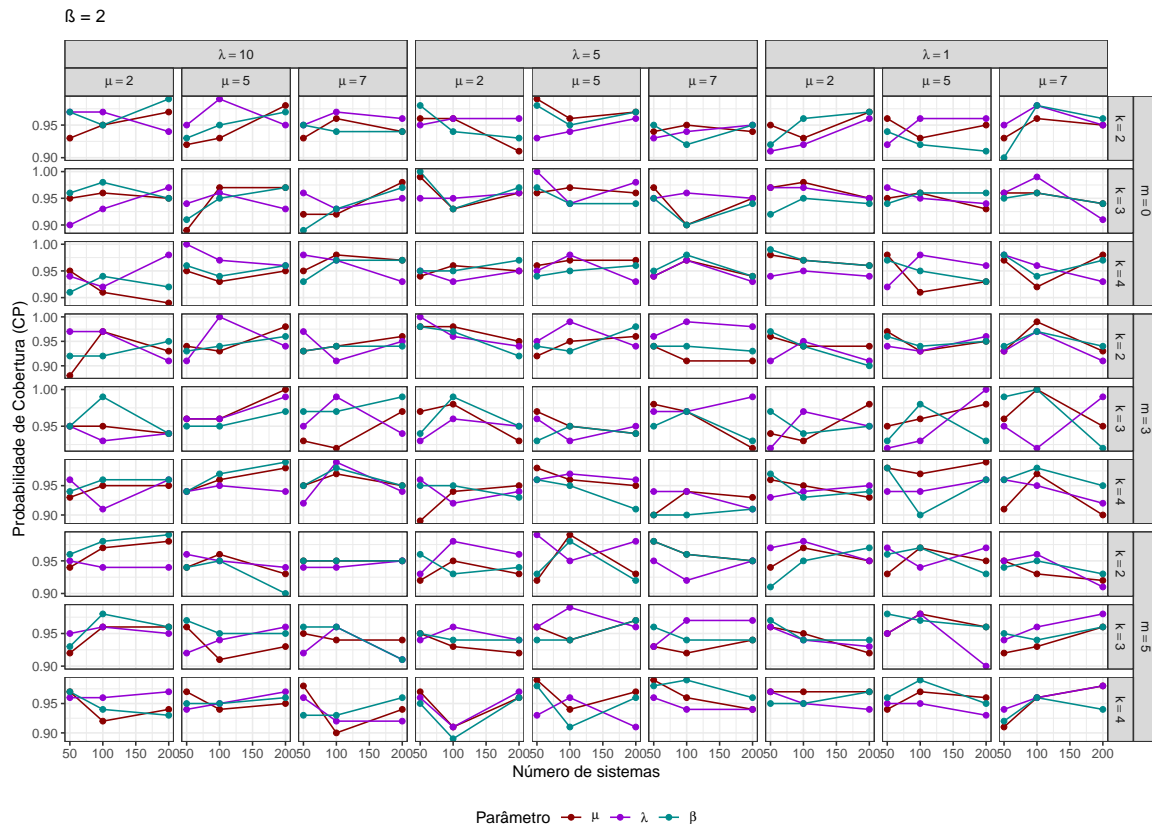


Figura 37 – Resultados da simulação — CP ($\beta = 2$).

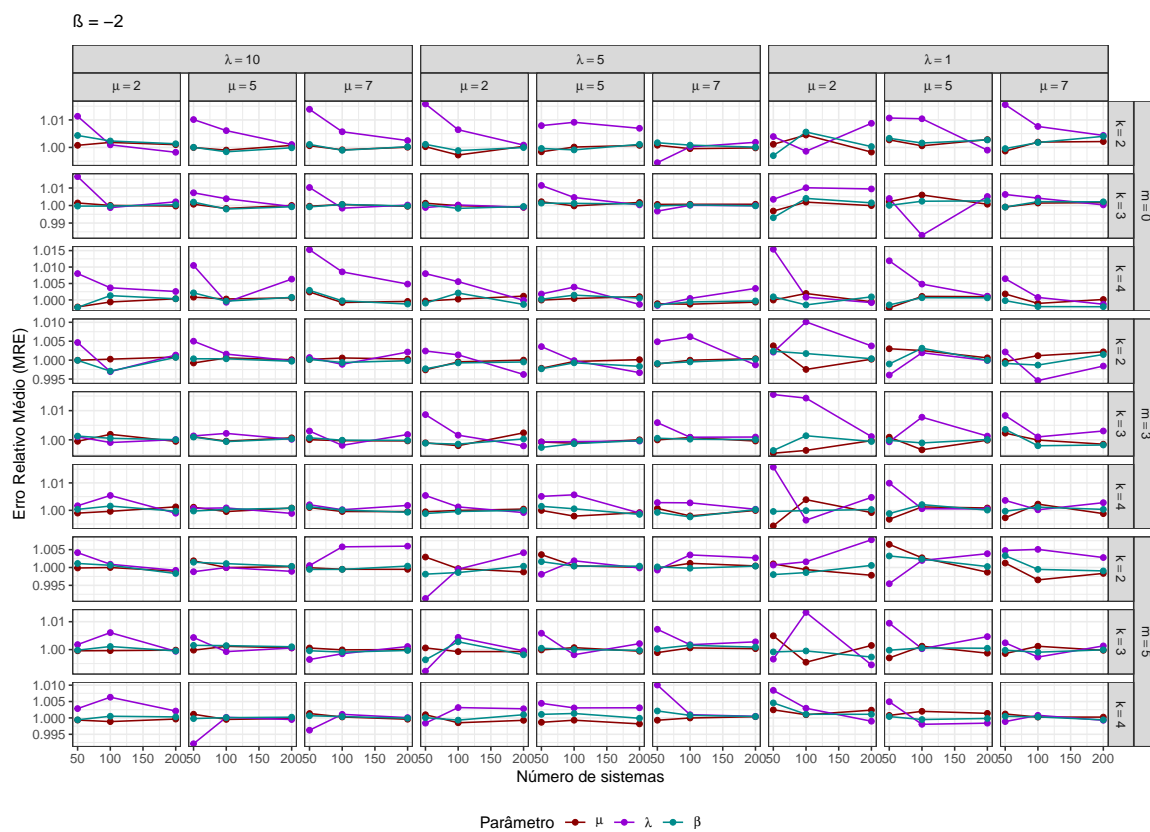


Figura 38 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = -2$).

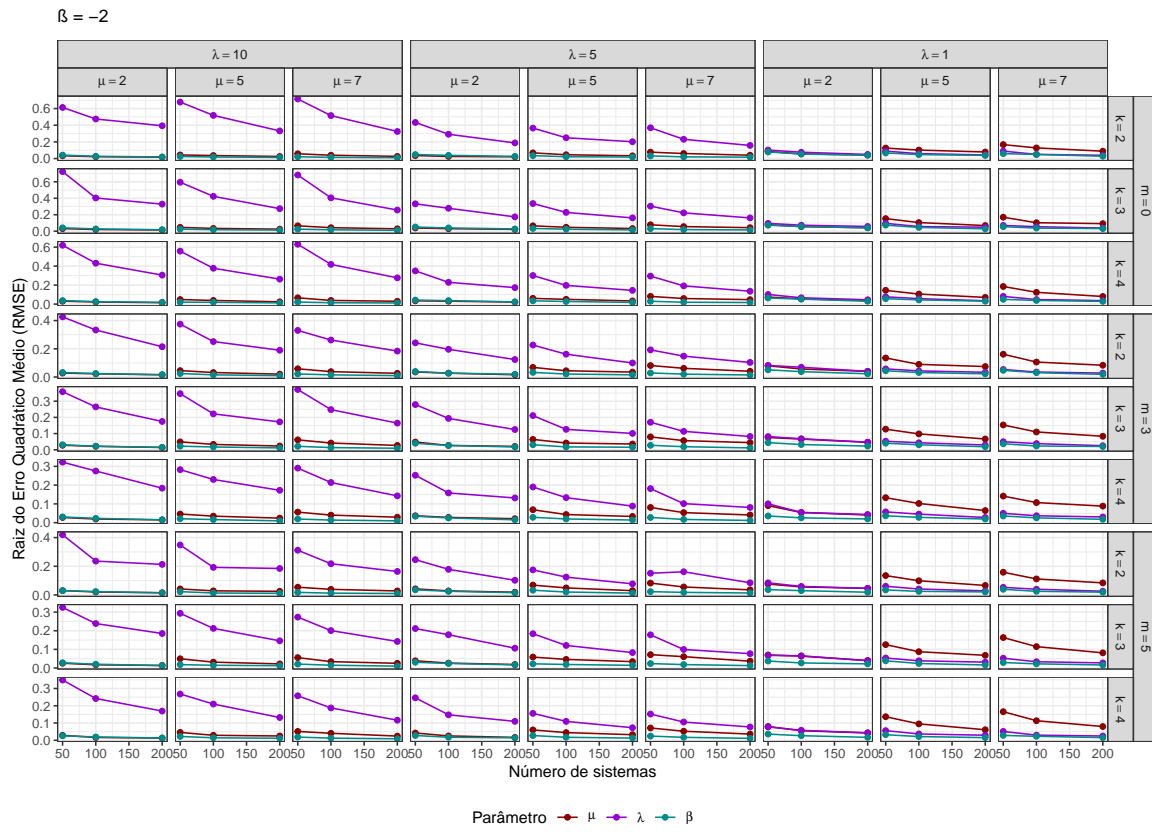


Figura 39 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = -2$).

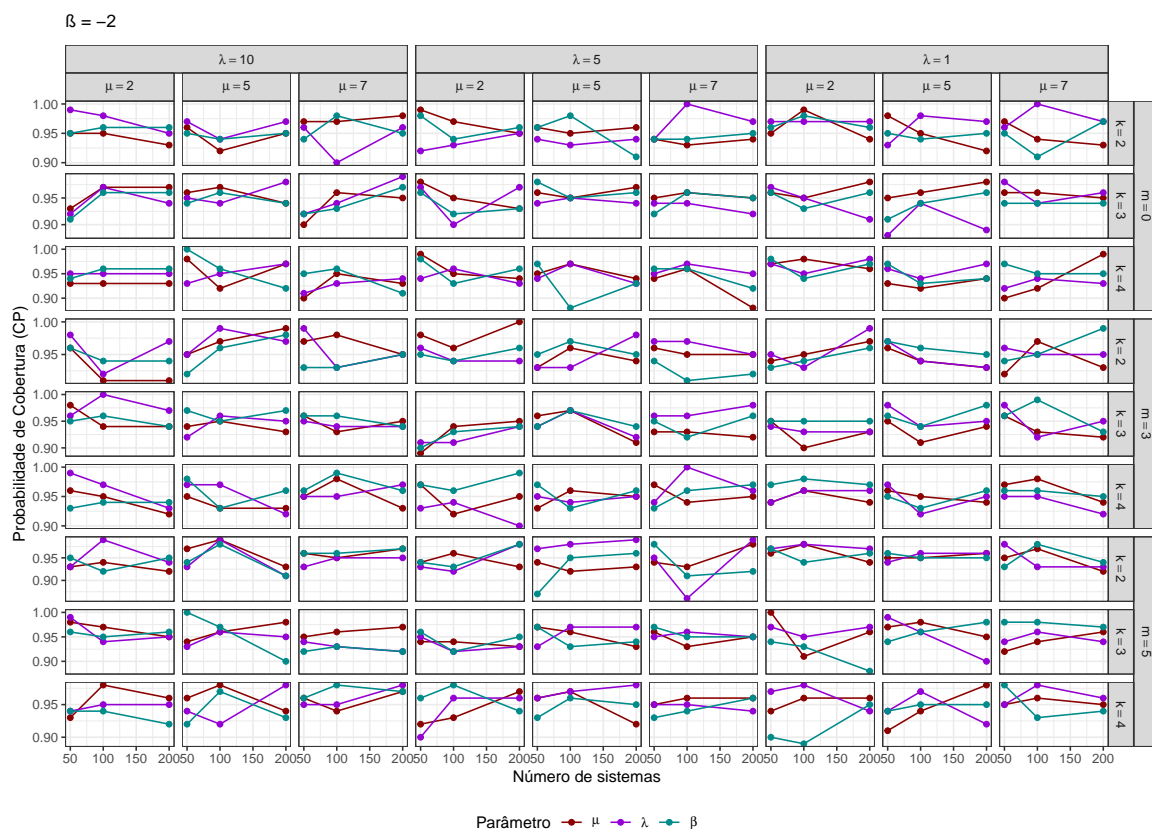


Figura 40 – Resultados da simulação — CP ($\beta = -2$).

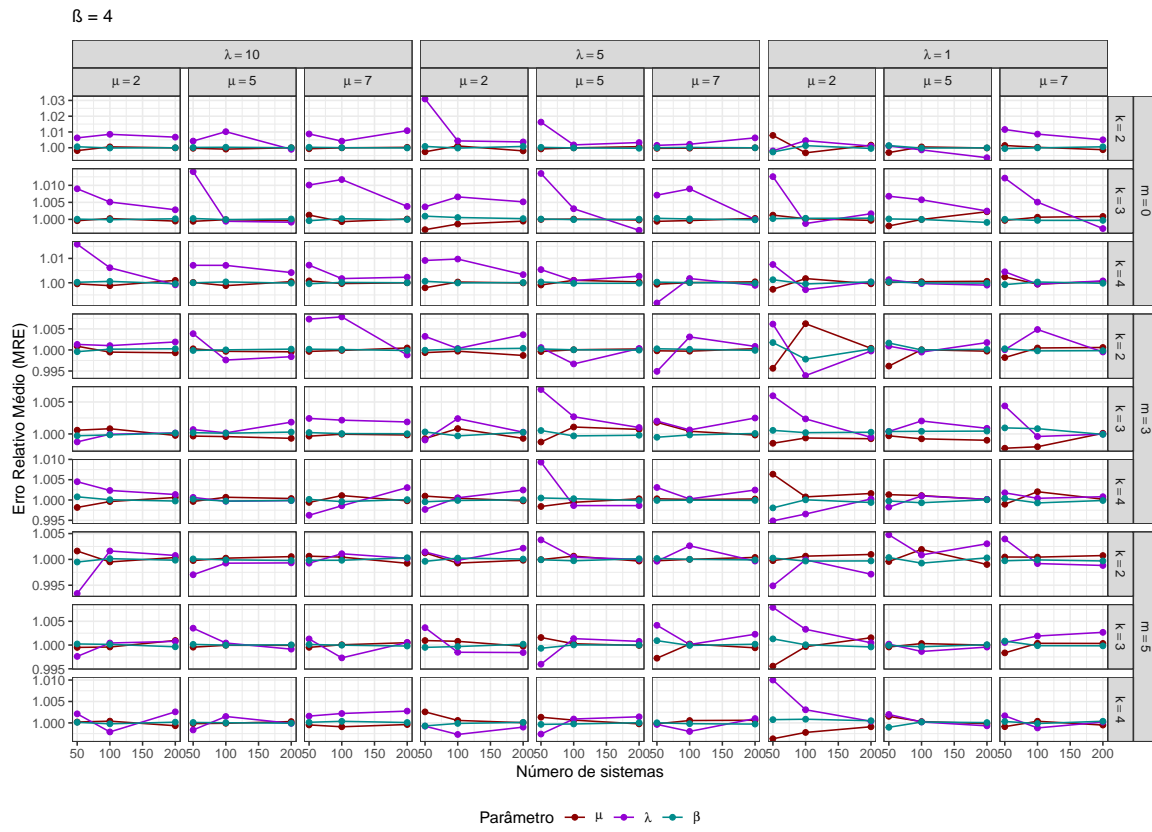


Figura 41 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = 4$).

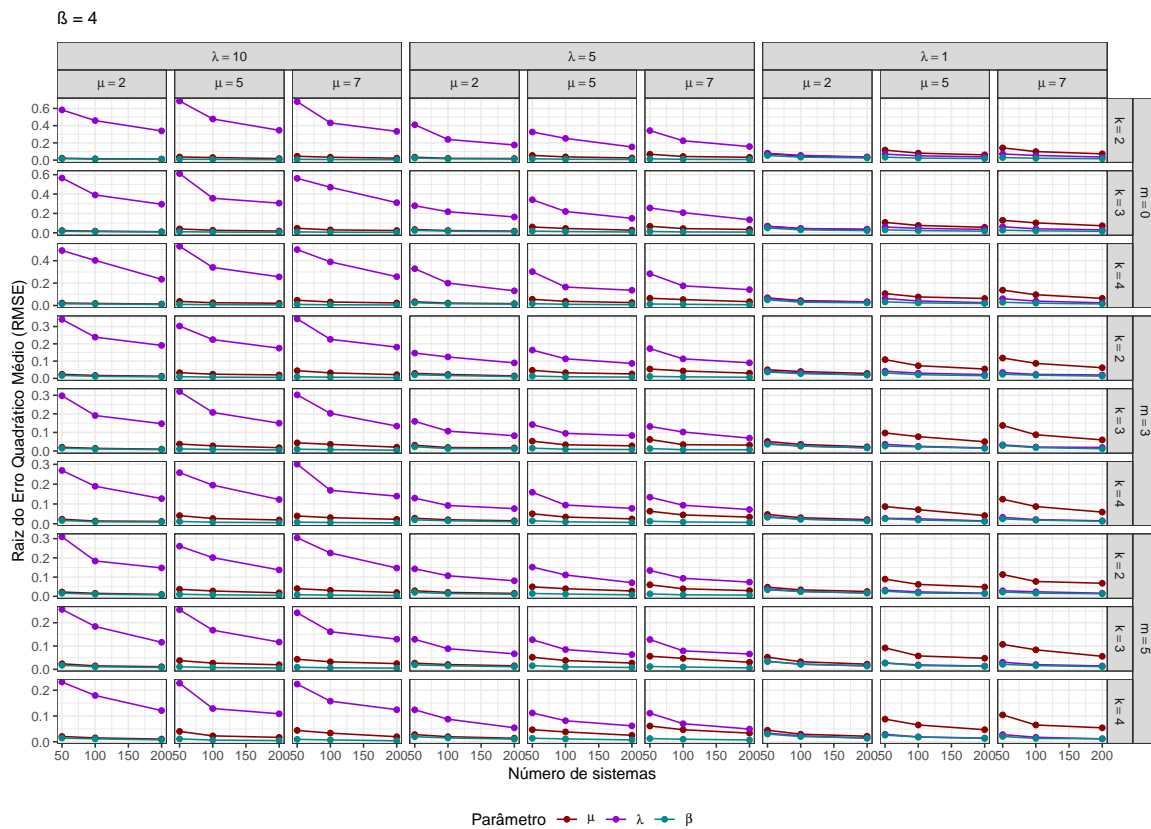


Figura 42 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = 4$).

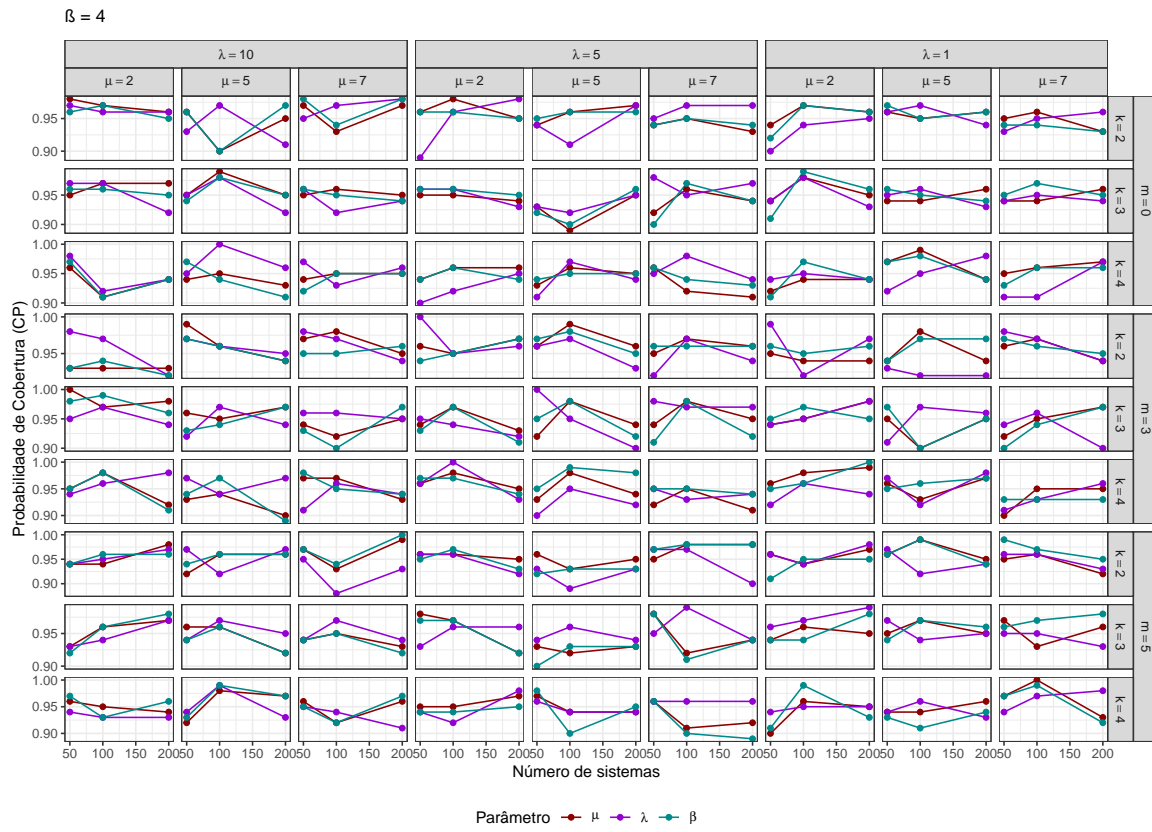


Figura 43 – Resultados da simulação — CP ($\beta = 4$).

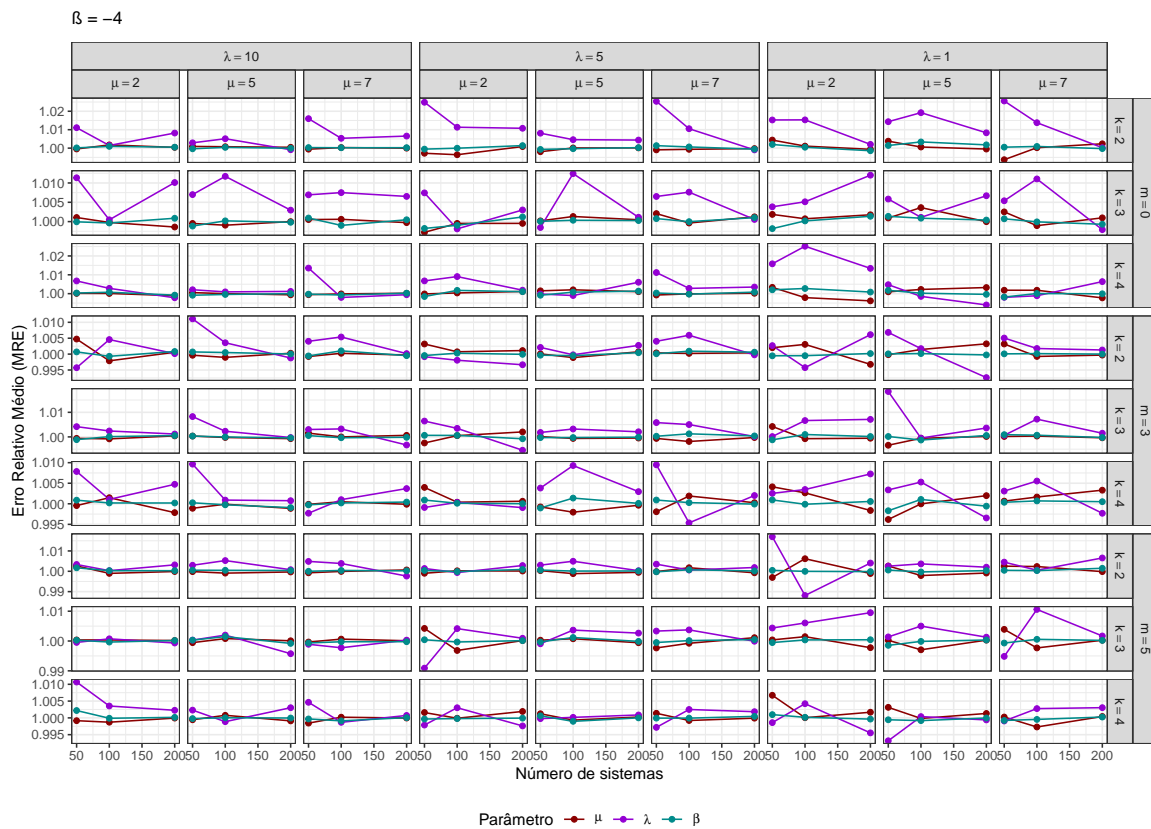


Figura 44 – Resultados da simulação — MRE ($\beta = -4$).

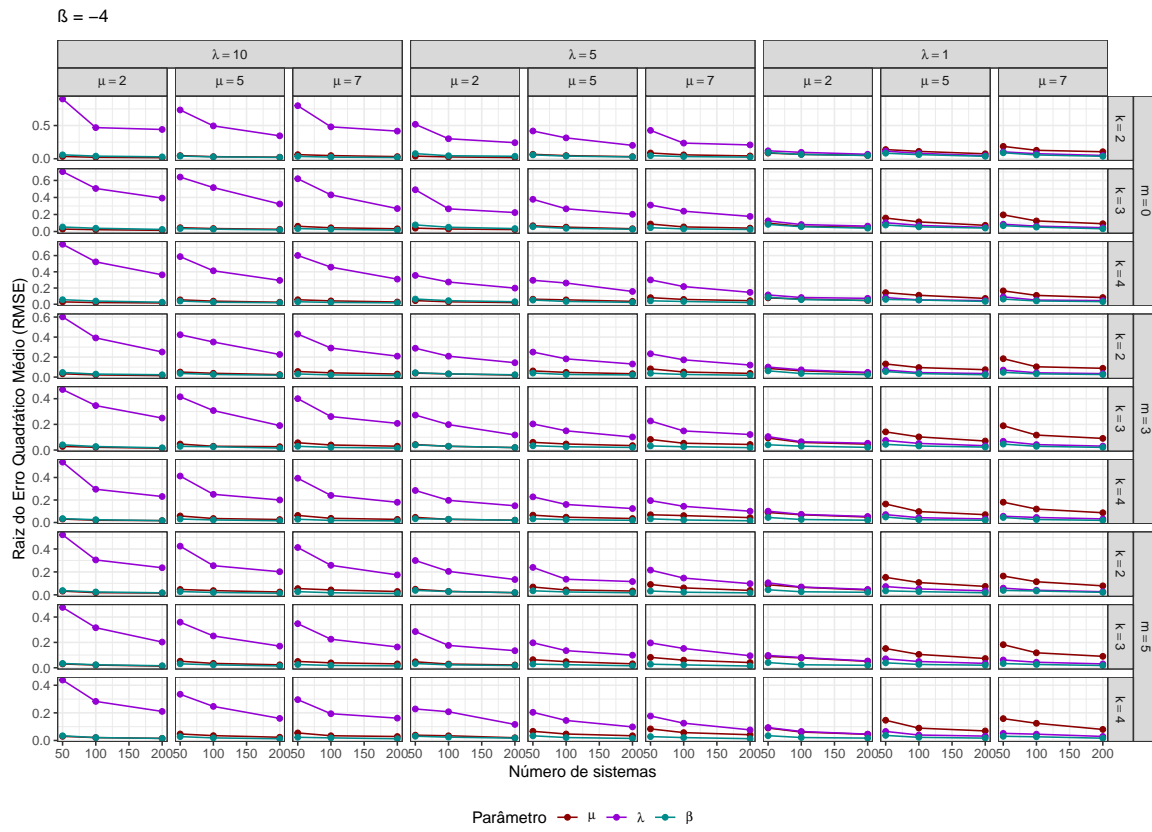


Figura 45 – Resultados da simulação — RMSE ($\beta = -4$).

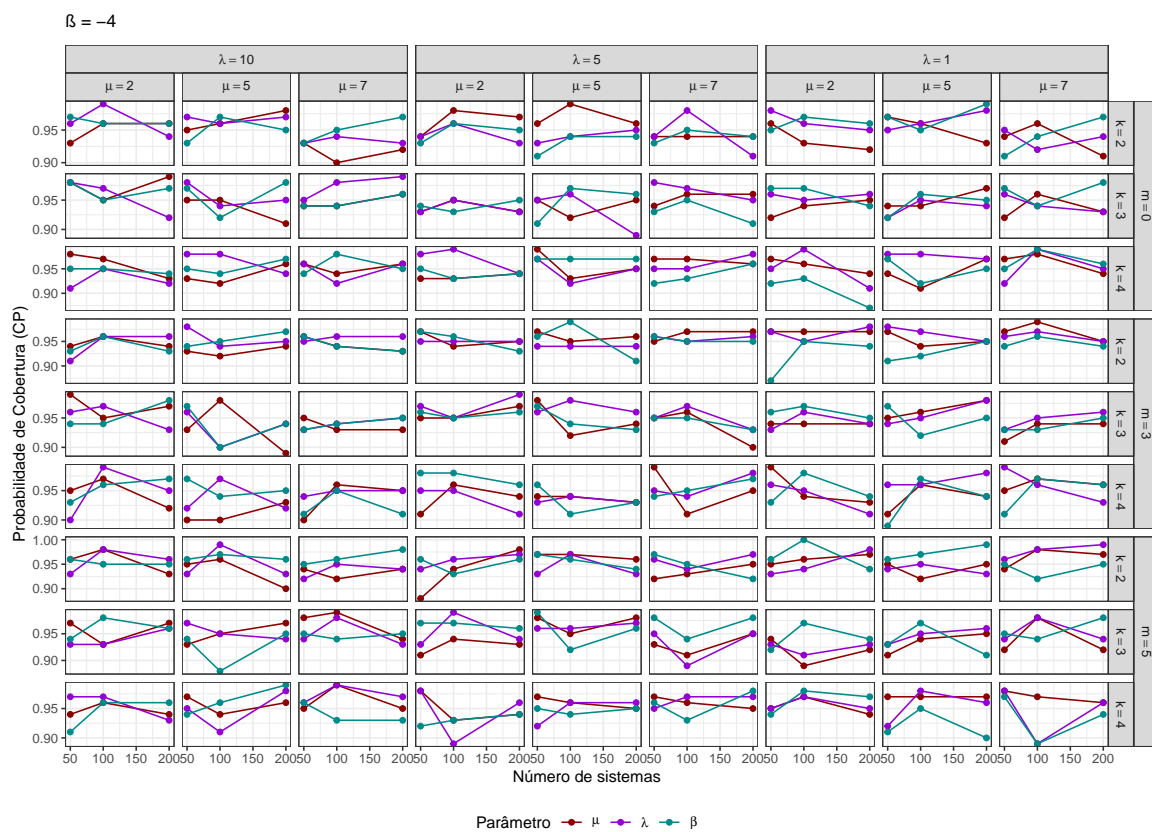


Figura 46 – Resultados da simulação — CP ($\beta = -4$).

