UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

MARCUS VINÍCIUS FONTES DE AQUINO ROSA

PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS NO CÁLCULO DE DISTÂNCIAS

Sorocaba - SP

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Pró-Reitoria de Extensão

Marcus Vinícius Fontes de Aquino Rosa

PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS NO CÁLCULO DE DISTÂNCIAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências Exatas.

Orientação: Prof. Dr. Sadao Massago

Sorocaba

2024

Aquino Rosa, Marcus Vinícius Fontes de

Planificação de superfícies poliédricas no cálculo de distâncias / Marcus Vinícius Fontes de Aquino Rosa -- 2024.
65f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba
Orientador (a): Sadao Massago
Banca Examinadora: Ana Cristina de Oliveira Mereu, Esdras Teixeira Costa
Bibliografia

1. Distâncias. 2. Geometria Plana. 3. Planificação. I. Aquino Rosa, Marcus Vinícius Fontes de. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcus Vinicius Fontes de Aquino Rosa, realizada em 11/03/2024.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Sadao Massago (UFSCar)

Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa (UFJ)

Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu (UFSCar)

gov.br Documento assinado digitalmente
SADAO MASSAGO
Data: 11/03/2024 09:52:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

gov.br Documento assinado digitalmente
ESDRAS TEIXEIRA COSTA
Data: 11/03/2024 10:09:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

gov.br Documento assinado digitalmente
ANA CRISTINA DE OLIVEIRA MEREU
Data: 11/03/2024 10:34:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

O Relatório de Defesa assinado pelos membros da Comissão Julgadora encontra-se arquivado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas.

DEDICATÓRIA

A Ester, minha esposa: amor, exemplo e inspiração.

A Miguel e Murilo, nossos meninos, a melhor torcida por mim.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Sadao Massago, por todo o ensino, orientação e paciência.

À UFSCar, pelo PPGECE como oportunidade de formação continuada.

EPÍGRAFE

"A vida é como andar de bicicleta. Para manter o equilíbrio, é preciso se manter em movimento" Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho propõe o cálculo do comprimento da menor trajetória possível ligando dois pontos da superfície de um paralelepípedo reto retângulo. Um dos pontos pertence a uma face e o outro pertence a uma outra face, adjacente à primeira. A etapa inicial da resolução é identificar a trajetória mínima, isto é, saber exatamente por onde ela passa, e a outra é propriamente obter a sua medida. Para a identificação da trajetória, procede-se a uma planificação, de modo que as duas faces adjacentes passem a estar contidas em um mesmo plano. Como recurso de cálculo do comprimento dessa trajetória, este trabalho sugere como ferramenta o Teorema de Pitágoras ou a Semelhança de Triângulos. Será proposta uma modelagem matemática deste problema por meio do cálculo do menor comprimento de um conduíte que vai de uma lâmpada na laje de um cômodo até o interruptor da lâmpada em uma das paredes do cômodo. São considerados e apresentados os conceitos das Geometrias Plana e Espacial acessados na consideração e resolução do problema, o qual serve de motivação para o ensino e aprendizagem de tais conceitos. Outras situações similares serão sugeridas, como por exemplo, a medida de uma trajetória mínima percorrida sobre a superfície lateral de um cilindro reto.

Palavras-chave: Planificação. Distância. Pitágoras. Semelhança.

ABSTRACT

This work proposes the calculation of the length of the shortest possible trajectory connecting two points on the surface of a straight rectangular parallelepiped. One of the points belongs to a face and the other belongs to another face, adjacent to the first. The initial step of the solution is to identify the minimum trajectory, that is, to know exactly where it passes, and the other is to obtain its measurement. To identify the trajectory, a plan is carried out, so that the two adjacent faces are contained in the same plane. As a resource for calculating the length of this trajectory, this work suggests the Pythagorean Theorem or the Similarity of Triangles as a tool. A mathematical modeling of this problem will be proposed by calculating the shortest length of a conduit running from a lamp on a room's ceiling to the lamp switch on one of the room's walls. The concepts of Plane and Spatial Geometries accessed in the consideration and resolution of the problem are considered and presented, which serves as motivation for teaching and learning such concepts. Other similar situations will be suggested, such as, for example, the measurement of a minimum trajectory traveled on the lateral surface of a straight cylinder.

Keywords: Planning. Distance. Pythagoras. Similarity.

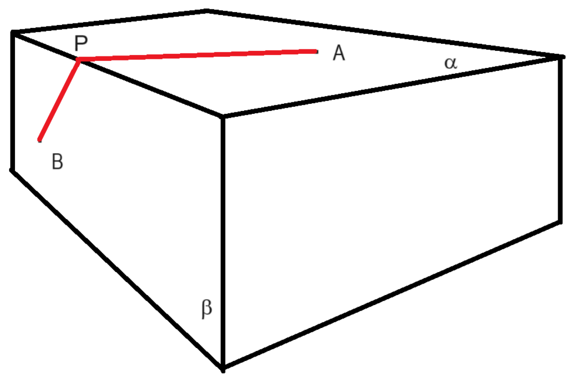
LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho é obter a medida do menor caminho percorrido sobre a superfície de um paralelepípedo reto retângulo. Esse caminho tem suas duas extremidades assim posicionadas: uma delas pertence a uma das faces desse paralelepípedo e a outra extremidade pertence a uma outra face, adjacente à primeira. Uma representação dessa situação é mostrada na figura a seguir:

Figura 1 - Representação do menor caminho de extremidades A e B, cujo comprimento deverá ser calculado.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

As extremidades dessa trajetória são os pontos A e B. O ponto A pertence à face do paralelepípedo que está contida no plano α, e a extreimdade B pertence à face do perelelepípedo que está contida no plano β .

Essa trajetória de menor comprimento possível tem uma de suas partes percorrida sobre a face que está contida no plano α e a outra parte é percorrida sobre a face que está contida no plano β . Na figura 1, observa-se a parte percorrida em α representada pelo segmento AP e a parte percorrida sobre o plano β é representada pelo segmento BP.

Essa proposta acessa diversos tópicos do conteúdo da Geometria da Matemática do Ensino Médio. Este conteúdo se divide em Geometria plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica, que podem ser aprendidos de um modo mais dinâmico. Dentre esses conceitos, aqueles que, no momento de aplicação dessa proposta, já tiverem sido aprendidos, podem ser revisados e exercitados. Esta ideia está em sintonia com a recontextualização da finalidade do ensino médio, de "consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos". (BRASIL, 2018)

É possível uma contextualização com uma situação real: a tarefa de se obter o comprimento do menor caminho ligando uma lâmpada situada na laje de um cômodo ao interruptor da lâmpada, situado em uma das paredes deste cômodo. Esse caminho é necessariamente percorrido parte sobre a laje e parte sobre a parede, ou seja, trata-se de uma trajetória "desenhada" sobre a laje e sobre a parede.

Essa possibilidade de aplicação do cálculo aqui analisado a uma situação prática, é uma forma de se exercer uma prática de Modelagem Matemática.

> A modelagem é o processo de criação de modelos onde estão definidas as estratégias de ação sobre a realidade carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador. (BERTONE, 2016, p. 9).

A modelagem matemática aparece como um recurso por meio do qual se pode transmitir ou aprender determinado conceito de um modo diferente daquele meramente expositivo, em que o professor é dono de um conhecimento cuja obtenção seria pouco acessível ao estudante por sua própria iniciativa.

Por meio da Modelagem, é possível se implementar uma situação em que o estudante se torna mais atuante em sua experiência de aprendizagem. As possibilidades proporcionadas por situações de Modelagem tiram do professor o papel de protagonista do processo de obtenção do conhecimento.

Ao entrar em um problema real tentando dar-lhe uma solução ou, pelo menos, tentando vislumbrar um caminho para possíveis resoluções, o estudante tem maior chance de se interessar pelo aprendizado dos conceitos matemáticos.

> A utilização da modelagem na educação matemática valoriza o “saber fazer” do aluno, desenvolvendo sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos nos diferentes contextos de aplicação, a partir da realidade de seu ambiente. (BERTONE, 2016, p. 9).

Por ser a parte da Matemática que estuda formas geométricas, isto é, figuras, que são objetos mais concretos para o estudante, a Geometria já se apresenta como uma disciplina que proporciona oportunidades para contextualizações com o cotidiano. O mundo que nos cerca está repleto de objetos que têm formas similares às das figuras que a Geometria estuda.

Sobre a Geometria, Abreu e outros afirmam que:

> O domínio desse conteúdo deve ser estimulado através de pesquisas de fatos históricos acerca da geometria e suas aplicações nas construções, na agricultura, na pecuária e na resolução de problemas, que envolvem cálculos e medidas. (ABREU et al, 2022, p.11)

Qualquer que seja a possibilidade de contextualização com uma situação real no ensino da matemática, a mesma deve ser aproveitada. E, se a Geometria tem a virtude de apresentar com fartura essas oportunidades, é preciso explorá-las ao máximo.

Quando conceitos matemáticos podem ser introduzidos a partir de um problema real, esse é um momento em que o aprendizado tem maior possibilidade de ter o aluno como protagonista do processo e não o professor, pois o contexto cotidiano surge como um motivador para a abordagem pretendida.

2- Conteúdos acessados

A proposta aqui apresentada proporciona a oportunidade de serem sedimentadas, estendidas e de se fazerem mais profundas as aprendizagens mais importantes, no âmbito da Geometria iniciadas no Ensino Fundamental. Esta possibilidade está de acordo com o que propõe a Base Nacional Comum Curricular Brasileira.

> A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL, 2018, p. 527)

No âmbito da Geometria Plana, os tópicos essenciais à abordagem do problema aqui proposto são: Relações Angulares do Triângulo, Desigualdade Triangular, Congruência de Triângulos, Semelhança de Triângulos, Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Teorema de Pitágoras.

A Base Nacional Comum Curricular diz ainda que os estudantes, a respeito de alguns dos conceitos mencionados acima,

> … desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2018, p. 527)

Alguns desses tópicos são importantes não exatamente para a resolução do problema, mas também para a verificação ou demonstração de outros tópicos a serem usados. Por exemplo, as Relações Métricas no Triângulo Retângulo serão importantes para a demonstração do Teorema de Pitágoras, importante para uma possível resolução do mesmo. A Desigualdade Triangular será importante na constatação de que um caminho escolhido sobre as duas faces adjacentes do paralelepípedo será menor que outro caminho diferente. A Congruência de Triângulos será acessada na resolução de um problema que tem alguma similaridade com o problema proposto neste trabalho. A Semelhança de Triângulos constitui uma ferramenta por meio da qual será possível resolver o problema, dependendo de quais sejam algumas das medidas de comprimento conhecidas na situação.

O conceito de Semelhança poderá ser aplicado de diversas formas, ainda dependentes de quais medidas de comprimento forem inicialmente conhecidas.

Vale notar que essa lista de conceitos citados como importantes à abordagem da situação aqui analisada, contém tópicos de suma importância dentro do conteúdo de Geometria. Trata-se de ferramentas importantes em muitas situações de cálculo de medidas de comprimento e comuns a uma grande variedade de problemas de Geometria.

O cálculo do comprimento de uma trajetória aqui proposto requer primeiramente uma visão tridimensional. Figuras tridimensionais são objetos de estudo da Geometria Espacial. Uma das extremidades da trajetória é um ponto em um plano e a outra extremidade é um outro ponto pertencente a um plano diferente do primeiro. Esses dois planos são secantes um em relação ao outro e a intersecção deles é uma reta. Esses planos secantes são aqueles que contêm cada uma das faces de um mesmo paralelepípedo reto retângulo. O paralelepípedo reto retângulo constitui um exemplo de Prisma, espécie de figura tridimensional estudada pela Geometria Espacial.

Para que o estudante consiga compreender efetivamente essas características da figura que representa a situação, mais especificamente a condição em que dois planos são ditos secantes, ele deve estar munido de pré-requisitos que são do escopo da parte da Geometria Espacial conhecida como Geometria Espacial de Posição, mais um conteúdo também acessado pelo problema.

Então, o problema aqui apresentado lança atenções tanto quanto sobre a Geometria Espacial Métrica, dado o conhecimento, eventualmente necessário, das características métricas dos prismas (comprimento de arestas e diagonais, e medida áreas e de volume, eventualmente necessários).

Esse conteúdo dentro da grade curricular nacional é trabalhado no terceiro ano do ensino médio. Previamente a ele, noções sobre as posições relativas entre duas retas, entre uma reta e um plano e entre dois planos. Este estudo de posições é tema da parte da geometria espacial conhecida como geometria espacial de posição.

Um outro conteúdo da geometria espacial, chamado de Geometria Espacial Métrica, é aquele que trata das figuras tridimensionais. São apresentadas formas de se calcular as medidas de segmentos importantes tais como arestas, alturas, diagonais e alturas de faces, por exemplo. Calculam- se também áreas de suas superfícies e o volume desses sólidos.

Uma abordagem da resolução do problema proposto é aquela que considera as coordenadas cartesianas dos pontos em um sistema de eixos ortogonais. Esse contexto é pertinente à Geometria Analítica, outro conteúdo importante dentro do contexto da geometria ensinado na matemática básica, mais especificamente no ensino médio .

Para além do escopo da geometria, outro conteúdo muito importante que os alunos devem ter para solucionar o problema apresentado neste trabalho é o conjunto de operações inseridas no âmbito da álgebra.

Ao manipular e aplicar conceitos como congruência, semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, bem como teorema de Pitágoras e ainda desigualdade triangular, o aluno precisa estar munido das habilidades para proceder aos cálculos necessários. Entre os cálculos que aparecem dentro desse contexto estão aqueles relacionados à aplicação das proporções e do cálculo de uma incógnita a partir de uma proporção, conhecido como regra de três. A abordagem do problema também requer conhecimentos de equações do primeiro e do segundo grau no contexto da obtenção de comprimentos incógnitas a partir da semelhança de triângulos e da aplicação do Teorema de Pitágoras.

A partir de uma proporção resultante da aplicação do conceito de semelhança entre dois triângulos podem surgir equações do primeiro grau ou do segundo grau. Por outro lado, como fruto da aplicação do teorema de Pitágoras na obtenção de um comprimento importante durante a resolução do problema é mais comum que se obtenham equações do segundo grau.

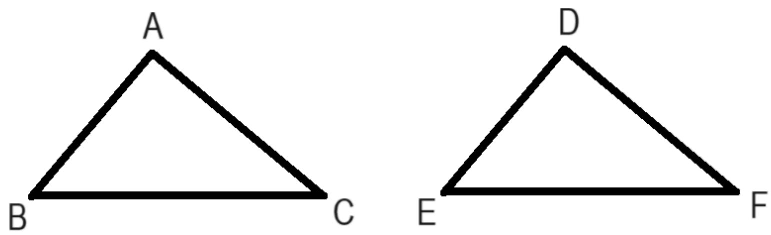
Os dois tipos de equação mencionados acima requerem conhecimento prévio para as suas resoluções. Esse conhecimento aborda as técnicas de resolução das equações do primeiro grau por meio de operações básicas inerentes à necessidade de se isolar incógnita em uma igualdade.

É imprescindível, ao se estudar a Geometria Espacial Métrica, das figuras comumente trabalhadas como por exemplo prismas, cones, esferas e cilindros, que se tenha uma noção prévia das posições relativas dos objetos geométricos.

2.1- Congruência de triângulos

Dois triângulos são congruentes quando apresentam os mesmos ângulos e os três lados de um deles têm a mesma medida dos três lados do outro. Essa afirmação é equivalente a se dizer, de modo mais informal, que dois triângulos são congruentes quando possuem a mesma forma e o mesmo tamanho. Por mesma forma, entenda-se que os três ângulos internos de um dos triângulos têm medidas iguais aos três ângulos internos do outro triângulo. Do mesmo tamanho, entenda-se que as medidas dos três lados de um dos triângulos são iguais às medidas dos três lados do outro triângulo. A figura seguinte apresenta dois triângulos que estabelecem, entre si, uma relação de congruência. Os triângulos ABC e DEF são tais que:

Figura 2 - Triângulos ABC e DEF congruentes.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Os triângulos ABC e DEF apresentam:

$$AB = DE$$
$$AC = DF$$
$$BC = EF$$

e, ainda,

$$\widehat{A} \simeq \widehat{D}$$
$$\widehat{B} \simeq \widehat{E}$$
$$\widehat{C} \simeq \widehat{F}$$

Para explicar o conceito de congruência, pode-se recorrer à idéia de fotocópia: ao se fazer, em papel de transparência, uma fotocópia de um triângulo, é possível, em seguida, fazer-se uma sobreposição exata da cópia ao triângulo original, de modo a se enxergar apenas um triângulo. Tal procedimento evidencia que as duas figuras têm ângulos internos e lados com medidas correspondentemente iguais. Dois triângulos nesta condição são ditos congruentes.

A explicação anterior é um modo bastante simples de transmitir aos alunos a ideia do que é a relação de congruência entre dois triângulos. A partir daí, pode-se ainda comentar que a ideia de congruência é válida para quaisquer duas figuras geométricas, não apenas para os triângulos.

Para sabermos se dois triângulos são congruentes, pode parecer necessário se conhecerem 12 medidas, sendo elas os três lados de um triângulo e os três lados do outro, os três os ângulos de um triângulo e os três ângulos do outro. Conhecendo essas medidas seria possível verificar todas as igualdades necessárias para se confirmar a congruência e assim dizer se os triângulos são congruentes ou não. No entanto, existem quatro situações em que, mesmo não conhecendo todas as medidas dos dois triângulos, é possível afirmar que eles são congruentes. Essas situações são conhecidas como casos especiais de congruência. Esses casos são simbolizados pelas siglas LLL, ALA, LAL e LAAo. Segue-se agora a apresentação e explicação dessas quatro situações.

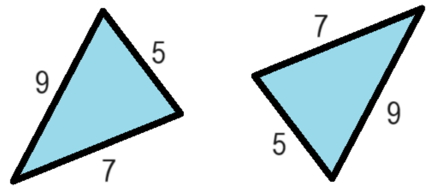
2.1.1- Caso LLL

Caso LLL: lado, lado, lado.

Dois triângulos são congruentes pelo caso LLL quando os três lados de um deles são iguais aos três lados do outro. Nesse caso, não é necessário que se conheça nenhum dos ângulos dos dois triângulos. Reforçando, o conhecimento das medidas dos lados é a única informação necessária para que se verifique se há ou não uma relação de congruência.

A figura seguinte mostra um exemplo dessa situação com medidas numéricas dos lados dos dois triângulos.

Figura 3 - Dois triângulos congruentes pelo caso LLL.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

2.1.2- Caso LAL

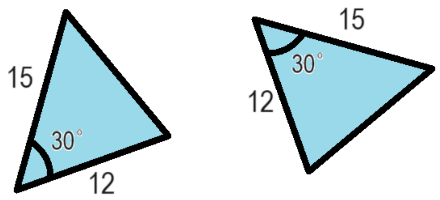
Caso LAL: lado, ângulo, lado.

Dois triângulos são congruentes pelo caso LAL, quando os dois lados de um dos triângulos são iguais aos dois lados do outro triângulo e o ângulo necessariamente formado por esses dois lados em ambos os triângulos têm a mesma medida em ambos os triângulos.

Para que este caso comprove a congruência é estritamente necessário que o ângulo considerado seja aquele formado pelos lados de medidas correspondentemente iguais em ambos os triângulos. Essa posição relativa dos elementos já vem sugerida na sigla, que apresenta a inicial de ângulo entre as iniciais da palavra lado. Portanto, a sigla não indica apenas quantos e quais elementos são importantes na detecção da congruência. Mais do que isso, fica estabelecida a exata e necessária posição relativa que esses elementos precisam ter.

A figura seguinte mostra um exemplo dessa situação com medidas numéricas dos lados e do ângulo nos dois triângulos.

Figura 4 - Triângulos congruentes pelo caso lado, ângulo, lado (LAL).



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

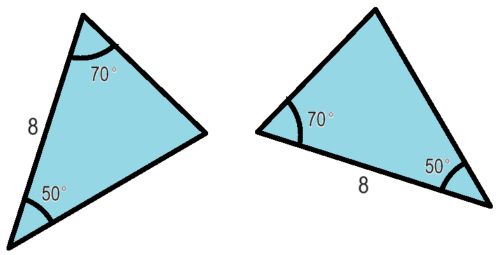
2.1.3- Caso ALA

Caso ALA: ângulo, lado, ângulo.

Dois triângulos são congruentes pelo caso ALA, se dois ângulos de um dos triângulos são iguais a dois ângulos do outro triângulo e os lados que ficam entre esses ângulos em ambos os triângulos têm comprimentos iguais.

Também nesse caso, a sigla indica mais do que quantos e quais elementos devem ser observados para se comprovar a congruência. A sigla indica também a posição relativa desses elementos. Dito de outro modo, a sigla ALA impõe que o lado considerado esteja necessariamente entre os ângulos também considerados nos dois triângulos.

Figura 5 - Triângulos congruentes pelo caso ALA: ângulo, lado, ângulo.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

2.1.4- Caso LAAo

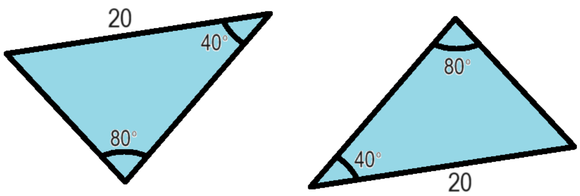
Caso LAAo: lado, ângulo, ângulo oposto.

Dois triângulos são congruentes pelo caso lado, ângulo, ângulo oposto, quando um lado e um ângulo em um dos triângulos têm mesmas medidas que um lado e um ângulo no outro triângulo. Além disso, o ângulo oposto ao lado anteriormente citado tem a mesma medida em ambos os triângulos.

Aqui também observa-se a imposição da posição relativa entre os elementos observados indicada pela sigla, isto é, tais elementos têm que estar posicionados necessariamente do modo como a sigla sugere .

A figura seguinte apresenta um exemplo em que dois triângulos são congruentes de acordo com o caso LAAo.

Figura 6 - Triângulos congruentes pelo caso LAAo: lado, ângulo, ângulo oposto .



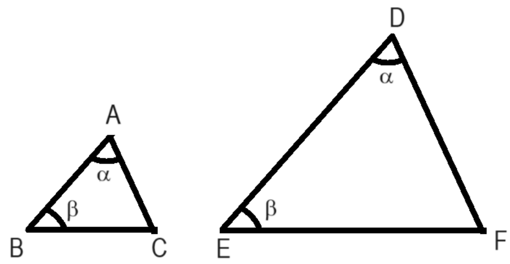
Fonte: Produzida pelo autor, 2024

2.2- Semelhança de triângulos

Dois triângulos são ditos semelhantes se, e somente se, possuem os mesmos ângulos e lados correspondentes proporcionais. Essa afirmação pode ser considerada bastante informal, frente ao rigor matemático típico da apresentação desse conceito na literatura matemática didática.

Sejam os triângulos ABC e DEF da figura apresentada a seguir.

Figura 7 - Triângulos ABC e DEF semelhantes



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

O triângulo ABC tem os ângulos α e β e o triângulo DEF também tem esses mesmos ângulos α e β. O terceiro ângulo, γ, em cada triângulo (nos vértices C e F) é o mesmo, uma vez que a soma dos três ângulos internos em qualquer triângulo vale 180^o.

Nessa situação, vale a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Assim (AB, AC, BC) é diretamente proporcional a (DE, DF, EF). Daí se conclui que a correspondência diz respeito às posições relativas dos lados e dos ângulos em cada triângulo. Os lados AB e DE são os opostos aos ângulos de medida γ, os lados AC e DF são os opostos aos ângulos de medida β e os lados BC e EF são os opostos aos ângulos de medida α, o que leva a se dizer que os dois lados em cada um dos pares mencionados são correspondentes.

A ideia de fotocópia mais uma vez pode ser usada como uma possibilidade de se explicar aos estudantes o conceito de semelhança, através de uma experiência cotidiana. Um triângulo original dará origem a uma fotocópia sua. Já se sabe que essas duas figuras, o triângulo original e sua cópia, são congruentes.

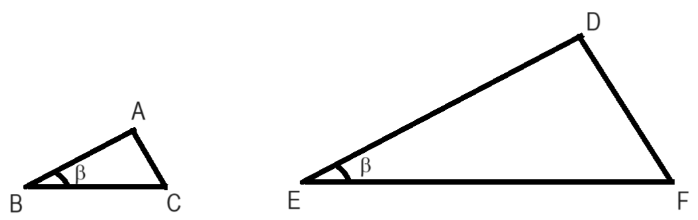
Diferentemente do que aconteceu no contexto da congruência, pode-se considerar que ao se fazer a fotocópia do triângulo original, pode-se optar por uma redução ou uma ampliação. Assim, o triângulo resultante como cópia poderá não ter o mesmo tamanho do triângulo original. Independentemente de se fazer na cópia, um triângulo maior ou menor que o original, o novo triângulo apresentará medidas dos lados necessariamente proporcionais às medidas dos lados do triângulo original.

Supostamente seria necessário conhecer doze medidas: seis ângulos (três em cada triângulo) e seis comprimentos (três medidas de lado em cada triângulo). Assim seria possível verificar se os ângulos apresentam as igualdades necessárias e se os lados verificam a devida relação de proporcionalidade para garantir a relação de semelhança. No entanto,existem três situações em que não precisamos ter todas essas medidas conhecidas para constatarmos que dois triângulos são semelhantes. Essas três situações são conhecidas como Casos Especiais de semelhança. São elas: LAL (lado, ângulo, lado), LLL (lado, lado, lado) e AA (ângulo, ângulo).

2.2.1- Caso LAL (lado, ângulo, lado)

Sejam os triângulos ABC e DEF abaixo.

Figura 8 - Dois triângulos semelhantes pelo caso LAL.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

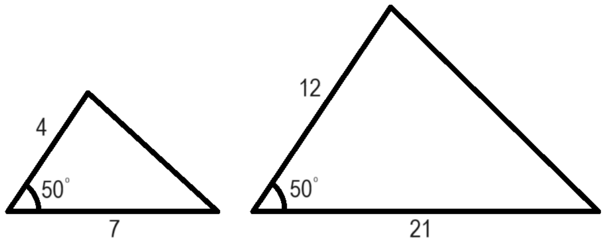
Os ângulos B e E têm medida igual a β e vale a relação de proporcionalidade

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Essa situação garante que esses dois triângulos são semelhantes. Nota-se que não foi necessário conhecer as medidas de todos os ângulos e lados presentes nesses dois triângulos. Está garantido que esses triângulos são semelhantes sem que se saibam as medidas AC e DF, nem as medidas dos ângulos internos dos vértices A, C, D e F.

Uma situação em que dois triângulos são semelhantes pelo caso LAL com as medidas dadas numericamente é apresentada na figura seguinte.

Figura 9 - Dois triângulos semelhantes pelo caso LAL, com medidas numéricas.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Na figura 9 observa-se que ambos os triângulos possuem uma medida de ângulo de 50^o graus e os lados que formam esses ângulos são proporcionais. Verifica-se a relação numérica:

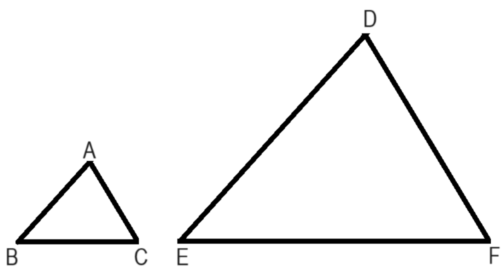
$$\frac{12}{4} = \frac{21}{7}$$

2.2.2- Caso LLL (lado, lado, lado)

Dois triângulos são semelhantes pelo caso LLL se os lados são proporcionais.
As medidas dos lados dos triângulos ABC e DEF abaixo satisfazem a relação

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

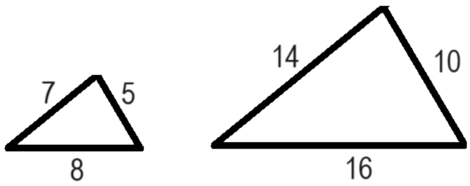
Figura 10 - Triângulos semelhantes ABC e DEF



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Uma situação em que dois triângulos são semelhantes pelo caso LLL com as medidas dadas numericamente é apresentada na figura seguinte.

Figura 11 - Dois triângulos semelhantes pelo caso LLL.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

A figura anterior exibe dois triângulos semelhantes pelo caso LLL nota-se a relação numérica

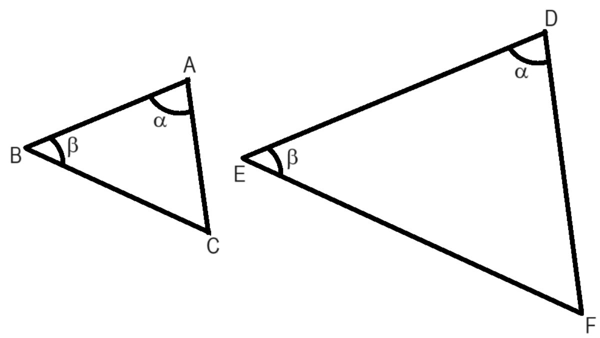
$$\frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{16}{8}.$$

2.2.3- Caso AA (ângulo, ângulo)

Note que, se dois triângulos possuem os ângulos α e β, então o terceiro ângulo em cada um deles terá a mesma medida, já que a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo vale 180^o.

Os triângulos ABC e DEF apresentados abaixo são semelhantes pelo caso AA.

Figura 12 - Dois triângulos semelhantes de acordo com o caso AA.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

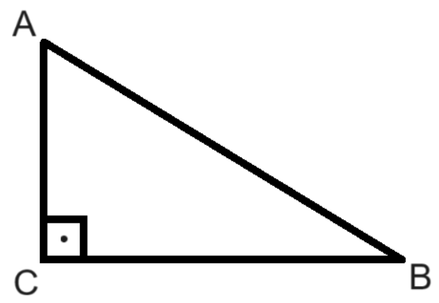
Este é o mais simples dentre todos os casos de semelhança e também o que se aplica na grande maioria dos exercícios e problemas propostos na matemática básica. Ele permite a conclusão da semelhança sem que se saiba a constante de proporcionalidade entre os lados.

2.3- Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é uma relação entre as medidas dos três lados de um triângulo retângulo. Tal teorema afirma que o quadrado da medida da hipotenusa, lado oposto ao ângulo reto, é a soma dos quadrados das medidas dos catetos. Seja ABC um triângulo retângulo em C. Então, de acordo com o teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

Figura 13 - Triângulo retângulo ABC.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

2.4- Demonstração do Teorema de Pitágoras

Uma atividade interessante no percurso dos conteúdos aqui acessados é a demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras.

> Atualmente existem mais 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, algumas feitas por personalidades como Bháskara e Leonardo da Vinci e até mesmo um presidente dos Estados Unidos (em 1871), James Abram Garfield (1831-1881). (MARTINS, 2023, p.26)

Ao final do Ensino Médio, o estudante tem nessa demonstração uma tarefa importante sob vários aspectos: verificar a validade do teorema; exercitar o conceito de semelhança; fazer uso da Semelhança através das Relações Métricas no Triângulo Retângulo; assimilar a lógica demonstrativa, pelos passos que são dados na demonstração.

Essa profusão de caminhos por meio dos quais o teorema pode ser demonstrado é marca de sua importância nas mais diversas áreas do conhecimento: engenharia física, astronomia, etc.

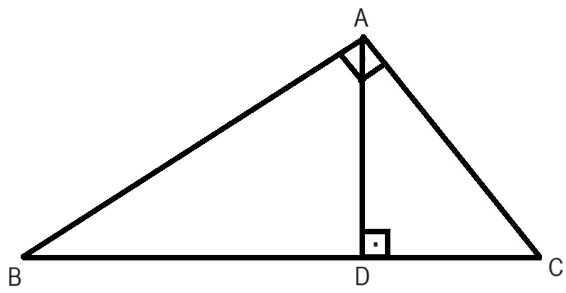
A demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras corresponde ao uso das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, resultantes da aplicação da Semelhança de Triângulos a um triângulo retângulo e sua altura relativa à hipotenusa.

2.4.1- Relações Métricas no Triângulo Retângulo

As Relações Métricas no Triângulo Retângulo resultam da aplicação do conceito de Semelhança aos três triângulos existentes numa figura que apresenta um triângulo retângulo e sua altura relativa à hipotenusa.

Na figura seguinte tem-se um triângulo retângulo e a altura relativa à hipotenusa. Todos os triângulos retângulos nessa figura são semelhantes, valendo portanto as relações de proporcionalidade entre lados apresentadas a seguir.

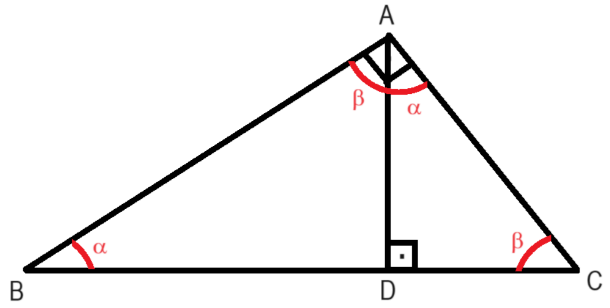
Figura 14 - Triângulo retângulo ABC apresentando a altura AD, relativa à hipotenusa.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Levando-se em conta que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo vale 180^o, ao completarem-se os ângulos agudos na figura, indicando-se por α e β suas medidas, a indicação de todos os ângulos fica, por exemplo, da seguinte maneira:

Figura 15 - Altura AD, relativa à hipotenusa decompondo ABC em triângulos semelhantes.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Observando-se as indicações de todos os ângulos na figura anterior, conclui-se que os três triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes entre si, dois a dois, pois cada um deles possui os ângulos internos α, β e 90^o.

Da semelhança dos triângulos ABD e CBA, tem-se:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC.BD$$

Da semelhança dos triângulos ACD e BCA, tem-se:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC.CD$$

Portanto:

$$AB^2 + AC^2 = BC.BD + BC.CD$$

$$AB^2 + AC^2 = BC.(BD + CD)$$

De acordo com a figura,

$$BD + CD = BC$$

E finalmente:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

2.5- Desigualdade Triangular

Dado um triângulo de lados de comprimento a, b e c, valem as relações

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

Essas três relações são conhecidas como Desigualdade Triangular. São relações que garantem a existência de um triângulo. Pode-se concluir que, dados três números positivos, os mesmos são lados de um mesmo triângulo se, e somente se, satisfazem as três relações anteriores.

Por meio da Desigualdade Triangular, será verificado que uma certa trajetória entre os pontos A e B é menor que outra trajetória entre esses mesmos dois pontos.

A Desigualdade Triangular tem a possibilidade de ser experimentada por meio de atividades práticas em sala de aula.

2.6 - Porcentagem

O conceito de porcentagem é importante como ferramenta para que o estudante possa comparar numericamente os comprimentos de duas trajetórias ligando os pontos A e B aqui propostos. Desse modo, os estudantes poderão perceber a importância da trajetória mínima que liga as duas extremidades. Com isso será possível mensurar o quão mais curta e, portanto, mais barata essa trajetória será, levando-se em conta a situação da construção civil: a trajetória mínima para se posicionar um conduíte partindo de uma lâmpada na laje de um cômodo até o interruptor da lâmpada na parede. A comparação percentual entre a trajetória mínima e uma outra trajetória que não seja a mínima tornará patente a utilidade e a importância desse processo de minimização de custos.

Dados valores x e y, com x > y > 0, pode-se medir p, o quão percentualmente o número x é maior que o número y, de acordo com a seguinte equação:

$$\frac{x-y}{y} = \frac{p}{100}.$$

Tem-se assim

$$x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)y.$$

Relacionando esse conceito com o problema da trajetória ligando A e B, pode-se pensar em x como medida de uma trajetória que não seja a mínima entre essas duas extremidades e y pode ser considerado como comprimento da trajetória mínima. O número p da expressão anterior é aquele que exprime quanto x é percentualmente maior que y.

De forma recíproca, uma relação percentual que informa o quanto y é percentualmente menor que x pode ser obtida a partir do seguinte raciocínio:

$$\frac{x-y}{x} = \frac{p}{100}.$$

Conclui-se, a partir da igualdade anterior:

$$y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x.$$

Essas considerações ilustram a possibilidade de se trabalhar também o conceito de porcentagem nesse contexto de modelagem matemática.

A linguagem percentual é um conceito muito importante de ser aprendido pelos estudantes em seus anos de formação na matemática básica. Trata-se de uma linguagem universal por meio da qual são estabelecidas relações entre duas grandezas, nos mais variados contextos da realidade.

2.7- Posições relativas de dois planos

De acordo com a Geometria Espacial de Posição, existem três possíveis posições relativas de dois planos: paralelos coincidentes (iguais), paralelos distintos, ou secantes.
Dois planos são paralelos coincidentes, se, e somente se, a intercessão entre eles é igual a cada um deles.

A figura seguinte representa dois planos α e β paralelos coincidentes.

Figura 16 - Planos α e β paralelos coincidentes.

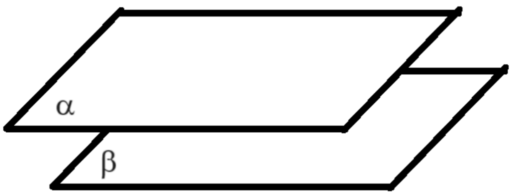
Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Os planos α e β apresentados na situação acima caracterizam-se pela relação:

$$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta.$$

A figura seguinte representa dois planos α e β Paralelos Distintos.

Figura 17 - Planos α e β paralelos distintos.



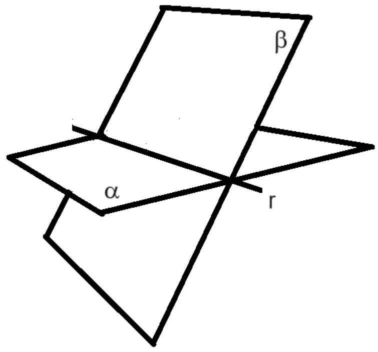
Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Os planos α e β apresentados na situação acima caracterizam -se pela relação:

$$\alpha \cap \beta = \phi.$$

A figura seguinte representa dois planos α e β secantes.

Figura 18 - Planos α e β secantes.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Os planos α e β apresentados na situação acima caracterizam-se pela relação:

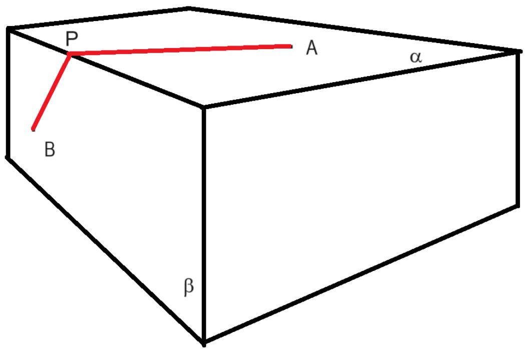
$$\alpha \cap \beta = r,$$

em que r está contida em α e em β.

3- O PROBLEMA

Calcular o comprimento da menor trajetória possível cujas extremidades são dois pontos da superfície de um paralelepípedo reto retângulo. Um dos pontos pertence a uma face do paralelepípedo e o outro pertence a uma outra face, adjacente à primeira. Aqui se considera que trajetória é um caminho percorrido necessariamente sobre essas duas faces.

Figura 19 - Representação do menor caminho de extremidades A e B, cujo comprimento deverá ser calculado.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

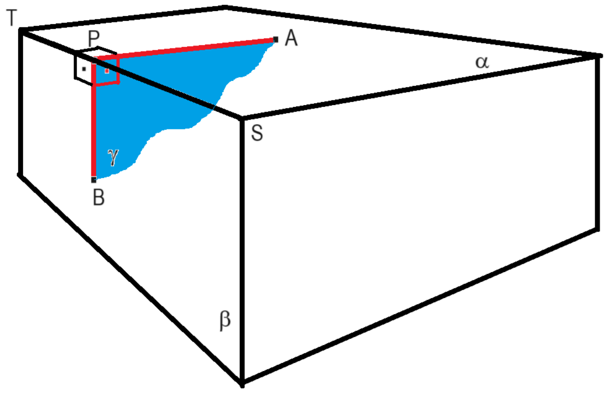
O ponto P é a intersecção da trajetória com uma aresta do paralelepípedo.

Para se obter a menor trajetória entre A e B, percorrida sobre a superfície do paralelepípedo, e seu comprimento, é necessário se considerarem duas possibilidades de posicionamento de A e B. Há duas possibilidades bem distintas para a localização desses pontos, as quais proporcionam duas diferentes resoluções do cálculo da medida dessa trajetória.

3.1- Os pontos A e B estão no mesmo plano perpendicular à aresta do paralelepípedo

A figura abaixo mostra a configuração em que os pontos A, P e B pertencem a um plano perpendicular à aresta TS do paralelepípedo.

Figura 20 - Os pontos A e B estão no mesmo plano perpendicular à aresta do paralelepípedo.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

A distância do ponto A até a aresta TS tem por comprimento a medida AP do segmento AP, perpendicular a TS. De igual maneira, a distância do ponto B até a aresta TS tem por comprimento a medida BP do segmento BP, perpendicular a TS.

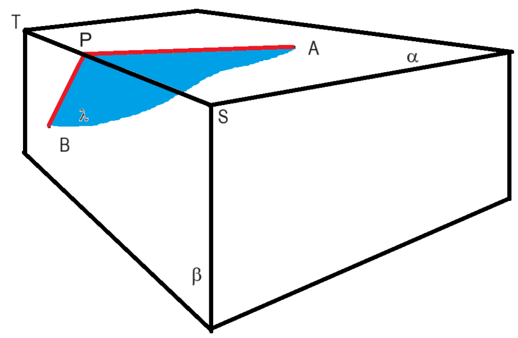
O menor caminho com extremidades A e B, percorrido sobre a superfície do prisma, tem comprimento AP + BP, sendo o comprimento de AP a distância de A à aresta TS e BP, a distância de B à aresta TS.

De fato, qualquer que seja Q, com Q ∈ TS e Q≠P, ficam estabelecidos os triângulos APQ e BPQ, ambos retângulos em P. No triângulo APQ, AQ é medida de hipotenusa e AP é medida de cateto, o que garante AQ > AP. No triângulo BPQ, BQ é medida de hipotenusa e BP é medida de cateto, o que garante BQ > BP. Portanto, AQ + BQ > AP + BP.

3.2- Os pontos A e B estão no mesmo plano não perpendicular à aresta TS do paralelepípedo

Caso A e B pertençam a um plano determinado por A, B e P, não perpendicular à aresta TS, o menor caminho tem ainda comprimento AP + BP, porém, AP e BP não são as respectivas distâncias de A e B à aresta TS, uma vez que AP e BP não são perpendiculares a TS.

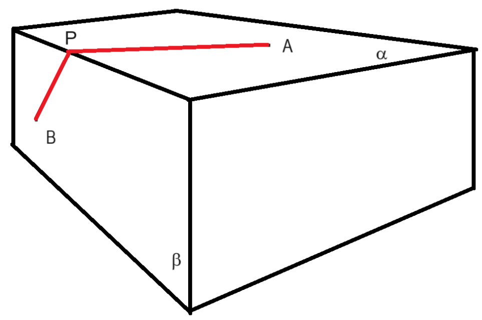
Figura 21 - Os pontos A, B e P determinam plano λ, não perpendicular à aresta TS.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Como parte inicial da resolução do problema dentro dessa configuração, a primeira pergunta que deve ser respondida diz respeito à exata localização do ponto P sobre a aresta da paralelepípedo.

Figura 22 - O ponto P pertencente à aresta TS do paralelepípedo.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

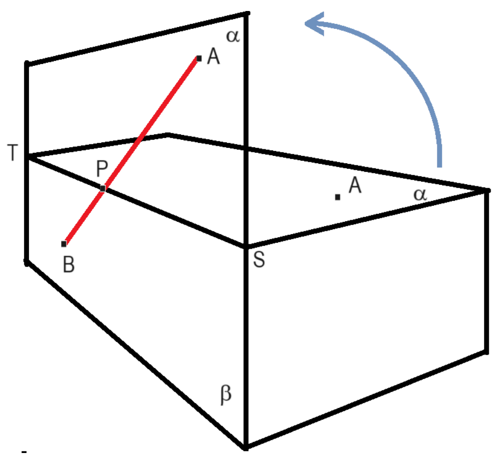
No paralelepípedo reto retângulo apresentado acima, A pertence à face α e B pertence à face β. Qual seria a exata localização do ponto P, de modo que a trajetória APB fosse a menor possível? Essa é uma maneira de propor a primeira parte da resolução do problema.

3.2.1 - A Planificação

Para se determinar a localização adequada do ponto P, recorre-se à planificação das duas faces. A planificação é rotacionar a face contida em α de modo a que ela passe a estar contida no plano β. Com isto, os pontos A e B se tornam pertencentes a um mesmo plano e a menor trajetória que os liga é obtida com a construção do segmento de extremidades A e B. Ao ser construído, esse segmento AB intercepta a aresta TS do paralelepípedio no ponto P procurado. O ponto P assim obtido é aquele que minimiza a trajetória de A até B.

Como forma de ilustrar o procedimento descrito anteriormente, considere-se que a face em que está o ponto A faz uma rotação de 90^o no sentido anti-horário em torno da aresta TS. Pode-se perceber que o plano β é o plano em que as duas faces passam a estar contidas. A partir daí, tem-se um problema de se obter a distância dois pontos distintos de um mesmo plano.

Figura 23 - Face contida em α fazendo uma rotação de 90^o no sentido anti-horário para estar contida no plano β.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

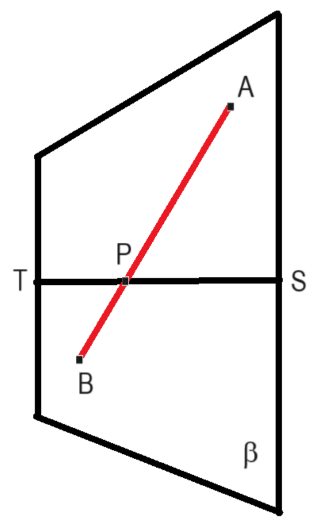
A figura anterior exibe ainda a determinação do ponto P sobre a aresta TS do paralelepóipedo. O ponto P é o único elemento da interseção dos segmentos AB e TS.

3.2.2 - Cálculo de AB por Pitágoras

Feita a planificação, o comprimento da trajetória mínima de A até B, que é a distância entre estes pontos, pode ser obtido por aplicação do teorema de Pitágoras. Pode-se perceber que o plano β é o plano em que as duas faces passam a estar contidas.

A figura seguinte é uma visualização do plano β já contendo os pontos A e B, bem como o menor caminho entre eles, isto é, o menor caminho que os tem por extremidades. A menor distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta que tem nesses pontos suas extremidades.

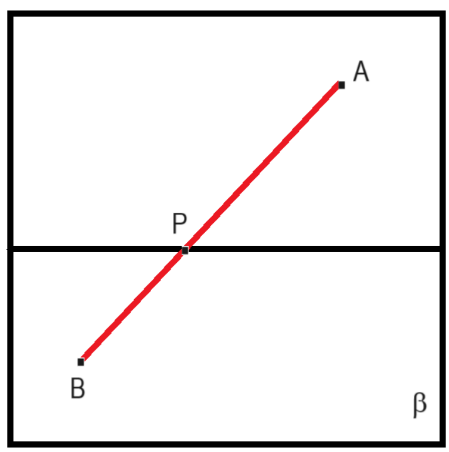
Figura 24 - Faces planificadas e o caminho APB mínimo.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Partiu-se de uma situação em três dimensões e chegou-se a uma em duas dimensões, uma vez que de os planos secantes α e β deram lugar exclusivamente ao plano β, em nossa estratégia de resolução do problema. Uma visualização frontal da figura segue abaixo.

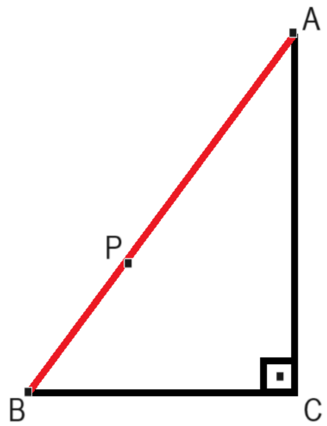
Figura 25 - Uma visualização frontal do caminho mínimo APB.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

A partir do que se pode observar na figura anterior, é possível se construir um triângulo retângulo ABC, cuja hipotenusa seja o lado AB. Com a medidas dos catetos deste triângulo , determinamos o comprimento da hipotenusa do mesmo, medida do segmento AB, que é a resposta ao problema proposto.

Figura 26 - Triângulo retângulo ABC, cuja hipotenusa AB corresponde ao caminho mínimo de A a B.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Conhecendo as medidas AC e BC dos catetos do triângulo ABC, temos que

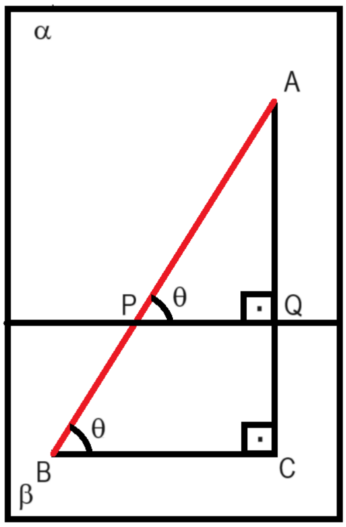
$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

3.2.3 - Cálculo de AB por Semelhança

O cálculo do comprimento da menor trajetória de A a B pode ser obtido mediante a Semelhança de Triângulos. Além disso, o uso da semelhança pode ser feito de diversas formas.

É possível considerar a figura 4, levando-se em conta a estrutura retangular da face que, ainda antes de considerarmos as duas faces no mesmo plano β, estava contida neste mesmo plano β. A visualização mostrada na figura 27 traz dois triângulos retângulos semelhantes, construídos de modo que BC//PQ ; A, Q e C colineares; AC⊥BC e Q=AC∩PQ.

Figura 27 - Os triângulos semelhantes APQ e ABC.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

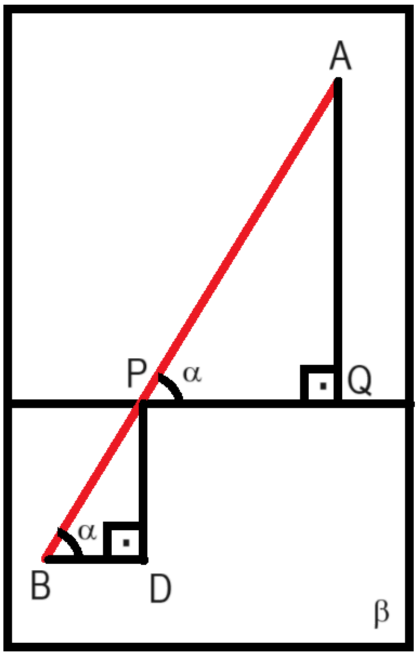
Os triângulos APQ e ABC são semelhantes pelo caso AA (ângulo,ângulo): os ângulos internos dos vértices P e B são congruentes por serem correspondentes no paralelismo existente entre BC e PQ, e os ângulos internos dos vértices Q e C são retos.
Graças a essa relação de semelhança, tem-se

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}.$$

Lembrando que a medida procurada nesse problema é o comprimento do lado AB, que dependerá de conhecermos as medidas dos demais comprimentos de lados desses dois triângulos.

Outra relação possível entre dois triângulos semelhantes associada à situação é a que segue, apresentada na figura abaixo.

Figura 28 - Os triângulos semelhantes APQ e PBD.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

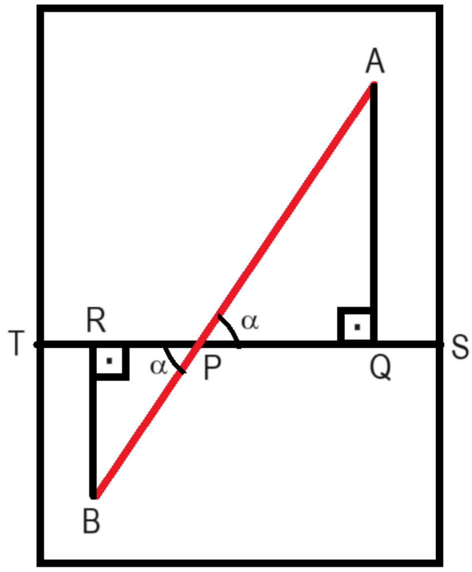
Os triângulos APQ e PBD são semelhantes pelo caso AA (ângulo,ângulo): os ângulos internos dos vértices P e B são congruentes por serem correspondentes no paralelismo existente entre BD e PQ, e os ângulos internos dos vértices Q e D são retos. Portanto:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{PD} = \frac{PQ}{BD}.$$

Novamente, para obter o comprimento do segmento AB, a relação acima se mostra uma ferramenta adequada a esse cálculo, bastando para isso que tenhamos outras medidas de segmentos desses dois triângulos.

Outra situação em que se utiliza a semelhança de triângulos para se obter a medida do trajeto APB sobre o paralelepípedo é apresentada na figura seguinte.

Figura 29 - Os triângulos semelhantes APQ e BPR.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Esta figura mostra mais uma possível aplicação da semelhança de triângulos para se obter o comprimento da trajetória correspondente ao segmento AB.

Os triângulos BRP e AQP são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Essa semelhança se verifica pelas seguintes constatações:

- Os ângulos BRP e AQP são retos, visto que temos dois triângulos retângulos em R e Q
- Os ângulos BPR e ATP são opostos pelo vértice, o que garante a congruência, isto é, a igualdade de suas medidas,representadas por α.

Assim, considerando os segmentos correspondentes entre os dois triângulos, vale a seguinte proporção entre as medidas dos lados

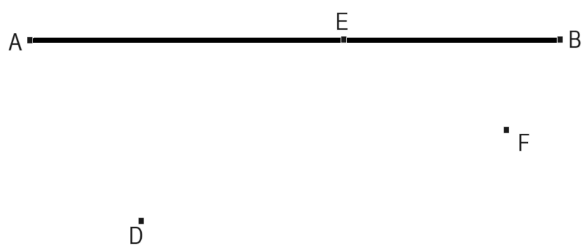
$$\frac{BP}{AP} = \frac{BR}{AQ} = \frac{PR}{PQ}.$$

4 - UM PROBLEMA RELACIONADO

Há um problema que tem relação íntima com o problema que é tratado aqui. Sejam A, B e F pontos e α o plano determinado por eles. O segmento AB divide α em dois semiplanos, um contendo F e o outro não contendo F. Seja D um ponto pertencente ao semiplano que contém F. Calcular a medida da menor trajetória de D até F passando por um ponto do segmento AB.

Se dermos o nome E ao ponto pertencente a AB de maneira que a trajetória DEF seja a menor possível, a situação pode ser representada pela figura seguinte.

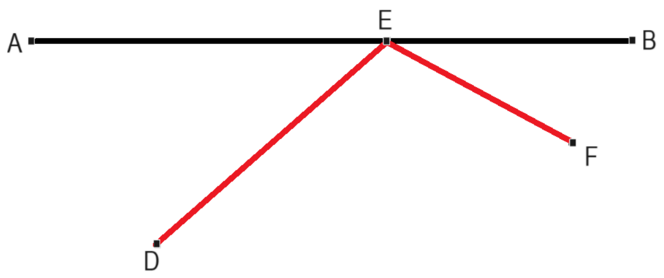
Figura 30 - Esquema com o segmento AB e os pontos D, E e F.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Os segmentos DE e EF esboçados na visualização seguinte, compõem o menor caminho possível entre os pontos D e F, passando por AB. O ponto E, em AB , possui uma posição específica e única para que a trajetória CEF seja a mais curta possível.

Figura 31 - Trajetória de D até F passando pelo ponto E em AB.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

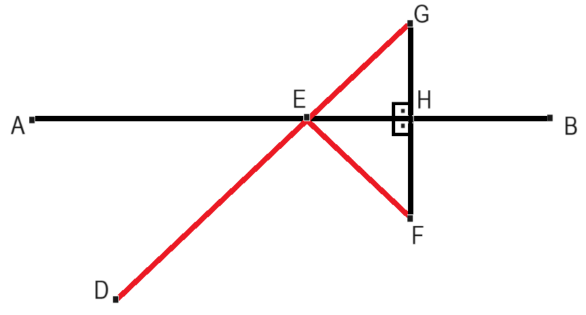
Na determinação dessa trajetória, um importante questionamento que se coloca é: como se pode determinar a exata localização de E para que DEF seja o menor caminho?

A resposta a essa pergunta é parte imprescindível à resolução do problema. Não é qualquer localização de E entre A e B que cumpre a prerrogativa de que o caminho AEF seja o mínimo.

Para se obter E em AB minimizando DEF, tomamos G, simétrico de F em relação a AB.

O ponto H é a intersecção de FG e AB. Nessa relação de simetria, têm-se FG perpendicular a AB e FH=GH.

Figura 32 - Representação do ponto G, simétrico a F em relação a AB.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

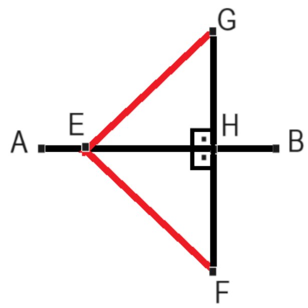
O próximo passo é construir o segmento DG, que intercepta AB no ponto E. A partir daí, pode-se considerar que DEG é o menor caminho entre os pontos D e G da figura. De fato, Pode-se considerar ainda que calcular DE+EG produz o mesmo resultado que calcular DE+EF, pois GE e RF são hipotenusas de dois triângulos retângulos congruentes

Se E já está na posição que minimiza DEF, pode-se intuir que DE+EF= DE+GE. Os segmentos GE e EF têm comprimentos iguais devido à congruência dos triângulos EHF e EHG.

Verificação da congruência:

De acordo com a construção:

Figura 33 - Os triângulos EHF e EHG, congruentes pelo caso LAL.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

HE é lado comum

$GH \equiv FH$ (de acordo com a relação de simetria entre os pontos F e G)

$m(GHE) = m(FHE)$

Portanto, nota-se o caso LAL de congruência entre os triângulos retângulos EHF e EHG.

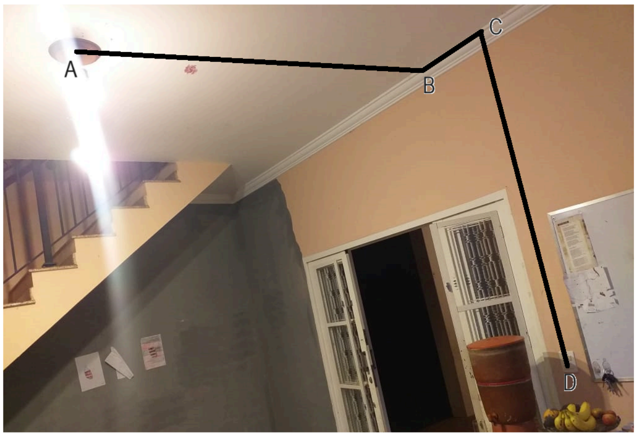
5 - APLICAÇÃO

A proposta de problema aqui feita enseja aplicações. Uma aplicação possível é aquela em que desejamos obter o menor caminho entre o bocal de uma lâmpada na laje de um cômodo e o interruptor na parede desse cômodo, considerando que esse caminho seja percorrido sobre a laje e a parede. Fazendo um paralelo com o problema teórico proposto, a lâmpada e o interruptor são os pontos, cada um em uma das faces adjacentes do poliedro; o cômodo é o poliedro e a parede e a laje são as faces adjacentes desse poliedro.

Uma motivação para essa modelagem está em colocar a matemática, mais especificamente a geometria, a serviço de minimizar custos na construção civil. Nas instalações elétricas das edificações são usados os conduítes, canos flexíveis que ficam no interior das lajes e paredes, que ligam os interruptores aos bocais das lâmpadas. Por dentro deles passam os fios transmissores de eletricidade. O gasto com esses materiais é diretamente proporcional ao comprimento da trajetória que eles descrevem no interior das lajes e das paredes. Portanto, quanto menor for essa trajetória, menos gasto haverá nas instalações elétricas.

Em geral, os percursos feitos por esses conduítes não são os mínimos possíveis. Nas construções, as trajetórias desses canos não seguem necessariamente critérios que minimizem seus comprimentos. A figura abaixo mostra um exemplo de trajetória não mínima percorrida por esses canos flexíveis.

Figura 34 - Indicação de uma trajetória ligando um bocal de lâmpada e um interruptor em um cômodo.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

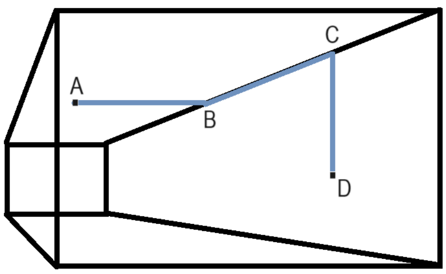
A figura indica que do bocal (ponto A) até a parede (ponto B) percorre-se uma trajetória perpendicular à parede. Uma trajetória retilínea (segmento BC) é percorrida em seguida sobre a parede, na sua intercessão com a laje. Finalmente, o terceiro trecho (segmento CD) dessa trajetória total é um segmento de reta que sai da laje, no encontro desta com a parede, e vai diretamente até o interruptor da lâmpada (ponto D). O comprimento da trajetória total é a soma das medidas desses três segmentos.

Representando por x a medida desse comprimento total, tem-se

$$x = AB + BC + CD.$$

Uma outra representação da situação anterior é oferecida na figura seguinte. O cômodo é representado por um paralelepípedo reto retângulo e os pontos A, B, C e D aparecem nessa figura.

Figura 35 - Panorama geométrico de uma trajetória ligando um bocal de lâmpada e um interruptor em um cômodo



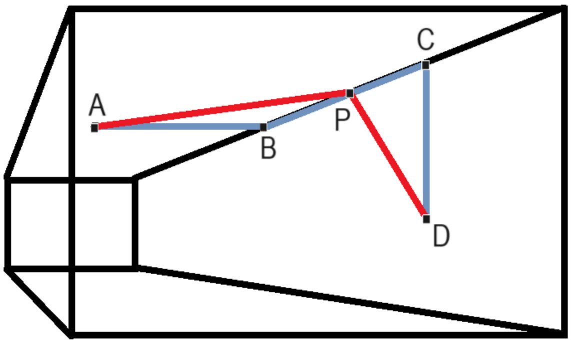
Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Seja a trajetória menor possível entre o bocal da lâmpada e o interruptor aquela indicada em vermelho na figura 36.

Figura 36 - Trajetória mínima e trajetória que não é a mínima, entre bocal de lâmpada e interruptor.

Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Figura 37 - Representação geométrica da trajetória mínima (vermelha) e de uma trajetória que não é a mínima (preta), entre um bocal de lâmpada e um interruptor em um cômodo.



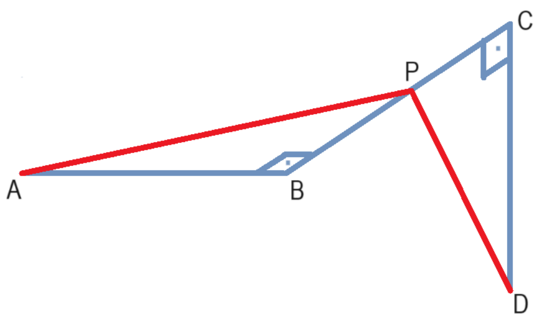
Fonte: Produzida pelo autor, 2024

A figura anterior mostra o caminho menor possível representado pela linha vermelha em associação com o caminho representado pela trajetória azul. O caminho azul é um exemplo de caminho não mínimo ligando o ponto A ao ponto D. Podemos, a partir dessa figura, fazer uma relação entre os comprimentos da trajetória mais curta possível e a trajetória representada pela linha azul.

A geometria envolvida na situação é bastante simples e poderá proporcionar essa análise por meio de cálculos elementares, como por exemplo, a aplicação do teorema de Pitágoras e a desigualdade triangular.

Visualmente, é perceptível que o caminho vermelho é mais curto que o caminho azul. No entanto, é possível formalmente verificar e justificar essa relação entre comprimentos. Considerem-se os triângulos ABP e CDP. Esses triângulos são retângulos respectivamente nos vértices B e C.

Figura 38 - Uma visão geométrica mais simples dos triângulos ABP e CDP.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

De acordo com a desigualdade triangular, no triângulo ABP vale a relação:

$$AP < AB + BP.$$

Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo PCD tem-se

$$DP < CD + CP.$$

Dadas as duas desigualdades acima, tem-se:

$$AP + DP < AB + BP + CP + CD.$$

De acordo com a figura

$$BP + PC = BC.$$

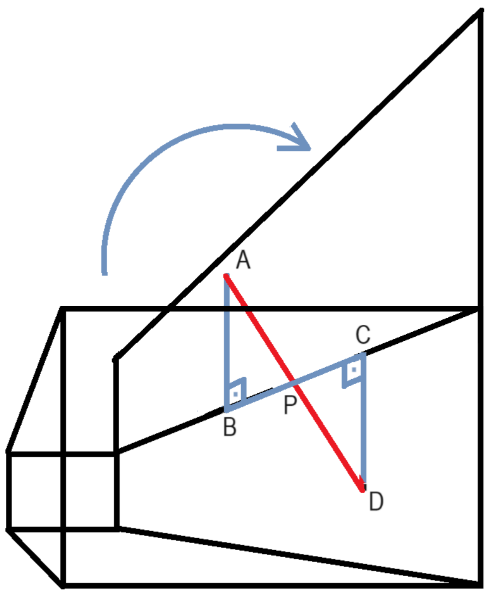
Portanto

$$AP + DP < AB + BC + CD.$$

A desigualdade anteriormente obtida é válida para qualquer localização do ponto P entre B e C. Nesse momento, a posição do ponto P do segmento BC é a que torna a trajetória vermelha mínima.

Com as faces que contêm os triângulos ABP e DCP no mesmo plano, tem-se a visualização da figura 39.

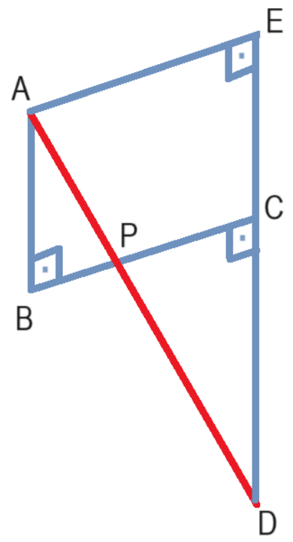
Figura 39 - Triângulos ABP e DCP no mesmo plano



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

A partir disto, pode-se considerar a seguinte situação geométrica:

Figura 40 - Triângulos AED, retângulo em E, obtido com a planificação.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

De acordo com a figura anterior, vale a relação:

$$AD^2 = AE^2 + (EC + CD)^2.$$

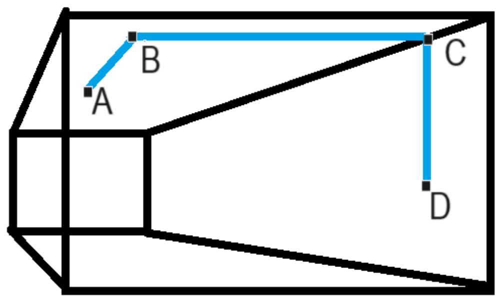
Que equivale a

$$AD^2 = BC^2 + (AB + CD)^2.$$

O exemplo aqui apresentado, baseado nas figuras, mostra a trajetória mínima comparada a uma trajetória que podemos considerar com ângulos retos. Essa trajetória em que os pontos apresentam ângulos retos não é a única possível ligando o bocal da laje ao interruptor na parede. Pode-se considerar outra trajetória retangular que não tem o menor comprimento possível e que não coincide com a trajetória retangular mostrada nas figuras anteriores.

A figura 41 mostra outra possibilidade de caminho com vértices apresentando ângulos retos diferente daquele exibido nas figuras anteriores.

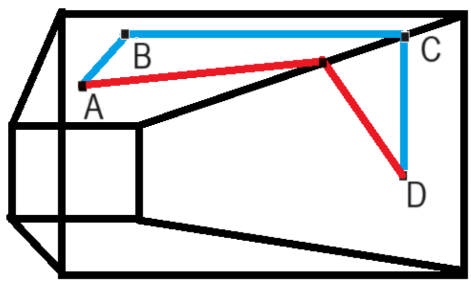
Figura 41 - Outro caminho em que B e C são vértices de ângulos retos



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Outro caminho em que os vértices B e C apresentam ângulos retos é mostrado na figura anterior. Essa trajetória é diferente daquela exemplificada nas figuras anteriores e é também uma trajetória cujo comprimento não é o menor possível entre os pontos A e B, percorrida sobre duas faces adjacentes do paralelepípedo.

Figura 42 - Trajetória mínima (vermelha) junto a uma trajetória retangular de comprimento não mínimo (azul).



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

6 - RAZÃO PERCENTUAL ENTRE AS TRAJETÓRIAS

Uma proposta interessante é a de se trabalhar o conteúdo de porcentagem para se estabelecer o quão vantajosa a trajetória mínima entre os dois pontos é, em relação às trajetórias de vértices com ângulos retos aqui exemplificadas. A ideia é que, conhecidas as duas trajetórias, usarem-se seus comprimentos numa razão que informe o quanto a trajetória mais curta representa em relação a trajetória que não seja a mínima, por exemplo.

Esse fator percentual poderá repercutir sobre valores de custos em situações em que essas trajetórias sejam, por exemplo, caminhos de conduítes em edificações na construção civil. A relação entre o custo do material usado e o comprimento da extensão correspondente a uma trajetória é uma relação entre grandezas diretamente proporcionais. Por isto, saber numericamente o quão vantajosa a trajetória mínima é em relação a uma trajetória que não seja menor possível corresponde a saber quanto mais barato é o custo de material com o caminho mínimo em relação aos demais.

Diante da trajetória ligando A e B, pode-se pensar em x como medida de uma trajetória que não seja a mínima entre essas duas extremidades e y pode ser considerado o comprimento da trajetória mínima.

Se o número p exprime o quanto x é percentualmente maior que y, vale a relação

$$\frac{x-y}{y} = \frac{p}{100}.$$

Tem-se assim

$$x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)y.$$

De forma recíproca, uma relação percentual que informa o quanto y é percentualmente menor que x pode ser obtida a partir do seguinte raciocínio:

$$\frac{x-y}{x} = \frac{p}{100}$$

Conclui-se, a partir da igualdade anterior:

$$y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$$

Essas considerações ilustram a possibilidade de se trabalhar também o conceito de porcentagem nesse contexto de modelagem matemática

A linguagem percentual é um conceito muito importante de ser aprendido pelos estudantes em seus anos de formação na matemática básica. Trata-se de uma linguagem universal por meio da qual são estabelecidas relações entre duas grandezas, nos mais variados contextos da realidade.

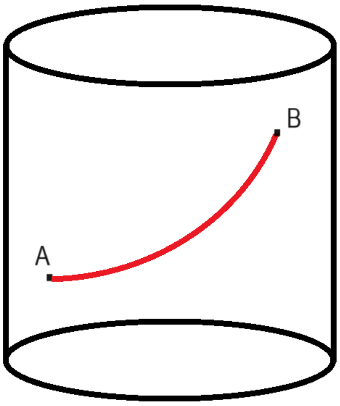
7. PLANIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES NÃO POLIÉDRICAS

Outras situações de cálculo de medida de trajetória mínima contida em superfície tridimensional, com a ajuda da planificação, pode não estar relacionado com superfícies poliédricas. A ideia pode ser estendida a superfícies curvas, por exemplo esféricas cilíndricas, cônicas, etc.

Como por exemplo, podemos considerar uma trajetória mínima entre dois pontos distintos de uma superfície lateral cilíndrica. Dois pontos distintos A e B, pertencentes à superfície lateral de um cilindro reto, são as extremidades de uma trajetória. Obter a menor medida que essa trajetória pode ter.

O problema pode ser enunciado ainda de outra forma: obter a medida do menor caminho ligando dois pontos distintos A e B de uma superfície lateral cilíndrica, percorrido sobre a superfície lateral do cilindro. A figura abaixo apresenta uma visualização dessa situação.

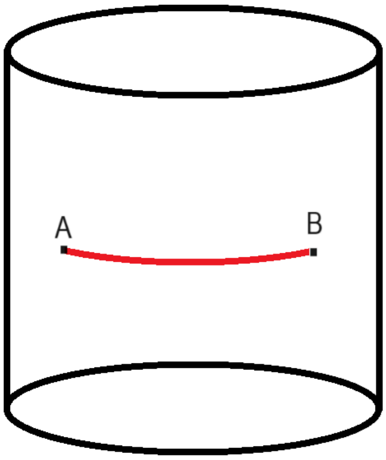
Figura 44 - Representação do caminho mínimo de extremidades A e B, pertencentes à superfície lateral do cilindro, percorrido sobre esta superfície.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

O problema pode ser dividido em três casos. No primeiro deles, vamos considerar os pontos A e B à mesma altura em relação à base do cilindro.

Figura 45 - Caminho mínimo de extremidades A e B, ambas à mesma altura em relação à base do cilindro.



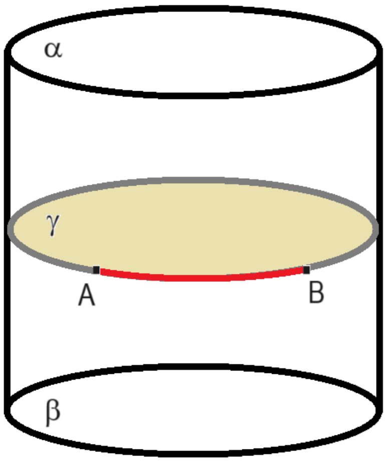
Fonte: Produzida pelo autor, 2024.

Uma forma de calcularmos essa distância é através do conceito de arco de circunferência, cujo cálculo da medida se utiliza em grandezas diretamente proporcionais.

Considerando que A e B pertencem a um plano paralelo aos planos das bases do cilindro, o caminho de A até B está contido na interseção desse plano com a superfície lateral do cilindro. Essa intercessão é uma circunferência cujo raio é o mesmo das bases do cilindro.

A figura 46 permite uma visualização desta interseção.

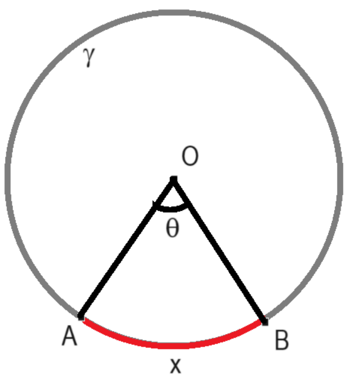
Figura 46 - Planos paralelos α , β e γ, e o menor caminho de A até B contido na intersecção de γ com a superfície lateral do cilindro



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Vista de cima, esta situação corresponde ao cálculo da medida x de um arco de circunferência cujas extremidades são os pontos A e B.

Figura 47 - Plano Gama visto de cima, e a medida x da trajetória mínima de A até B.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Sendo R a medida do raio da circunferência da figura 47, calcula-se o comprimento x através da relação abaixo,

$$\frac{x}{2\pi R} = \frac{\theta}{360^o}$$

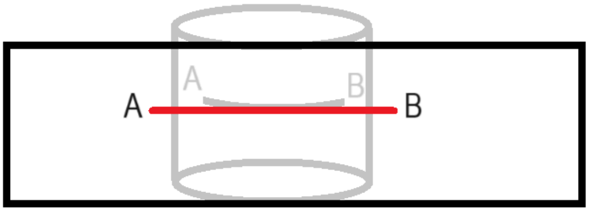
ou ainda

$$\frac{x}{2\pi R} = \frac{\theta}{2\pi},$$

para o caso em que as medidas angulares estiverem na unidade radiano.

Ainda dentro desse contexto, a medida x da menor trajetória entre A e B pode ser obtida recorrendo à planificação da superfície lateral do cilindro. Feita essa planificação, o arco de circunferência passa a ser um segmento de reta de extremidades A e B, o que torna bem simples e direto, o cálculo de seu comprimento.

Figura 48 - Superfície lateral planificada e o segmento AB

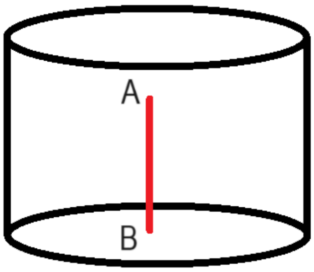


Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Superfície lateral do cilindro planificada mostrando que o arco AB se converte no segmento de reta AB. Nesse caso A e B se encontram à mesma altura em relação à base inferior do cilindro, o que faz com que o segmento AB seja paralelo aos lados maiores do retângulo correspondente à superfície lateral do cilindro planificada na figura.

No segundo caso, vamos considerar os pontos A e B pertencentes a uma mesma reta contida na superfície do cilindro e perpendicular às bases do mesmo. Nesta situação o cálculo da menor trajetória ligando os pontos A e B é a medida do segmento AB.

Figura 49 - Trajetória AB, perpendicular às bases do cilindro

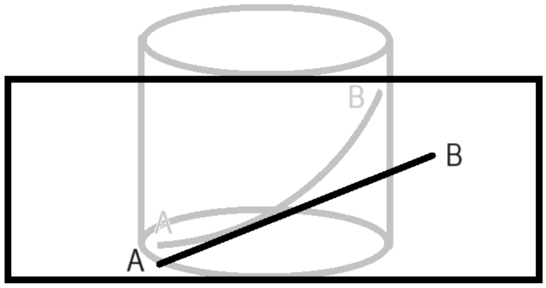


Fonte: Produzida pelo autor, 2024

A terceira e última situação, mais interessante do que as duas primeiras, é aquela em que os pontos A e B não pertencem nem ao mesmo plano paralelo às bases, nem à mesma reta perpendicular às bases. Essa situação é a mais complexa das três pois, para resolvê-la, a planificação da superfície lateral do cilindro será necessária. Essa necessidade advém da dificuldade de se identificar o tipo de curva correspondente à trajetória mínima entre A e B no espaço tridimensional. Inicialmente não se pode saber de imediato se essa trajetória é uma curva parabólica, elíptica ou de outra natureza.

A planificação se mostra um recurso simplificador da resolução, já que com ela dispensa-se a necessidade de se identificar o tipo de curva existente sobre a superfície tridimensional do cilindro. Ao planificarmos a superfície lateral do cilindro, o que era uma curva no espaço tridimensional ligando os pontos A e B se torna um segmento de reta de extremidades A e B. Dessa vez, dado o posicionamento desses dois pontos, esse segmento será oblíquo em relação às retas paralelas que delimitam a parte superior e inferior do retângulo correspondente à planificação da superfície lateral do cilindro.

Figura 50 - Superfície lateral de um cilindro reto planificada.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Nesta planificação, o segmento AB é o resultado da planificação consequente do que antes era a curva AB sobre a superfície lateral do cilindro. Devido às posições de A e B o segmento resultante é oblíquo a dois dos lados do retângulo resultante da planificação da superfície lateral.

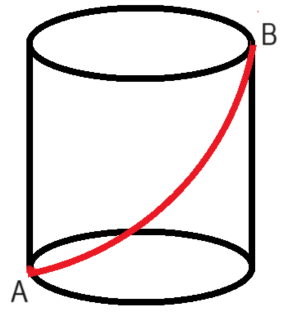
A figura 50 mostra a planificação da superfície lateral de um cilindro reto. A trajetória mais curta ligando os pontos A e B, contida na sobre a superfície lateral do cilindro, era originalmente uma curva no espaço. Com a planificação, essa trajetória passa a ser o segmento de reta de extremidades A e B.

Para o cálculo do comprimento desse segmento adota-se como procedimento o conceito adequado da Geometria Plana, como por exemplo, o teorema de Pitágoras, conforme as informações preliminares fornecidas.

Um caso particular que exemplifica esse terceiro caso, é o que se propõe a seguir.

Calcular o comprimento da menor trajetória que liga os pontos A e B pertencentes à superfície de um cilindro reto, posicionados como indicado na figura 51. Essa trajetória está contida na superfície do cilindro, isto é, corresponde a um caminho a ser percorrido sobre a superfície lateral do cilindro.

Figura 51 - Menor trajetória ligando os pontos A e B sobre a superfície lateral de um cilindro reto.

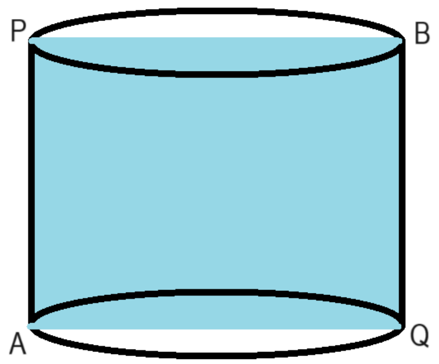


Fonte: Produzida pelo autor, 2024

No caso que está sendo proposto, deve-se considerar que A e B pertencem ao plano que contém a secção meridiana do cilindro. Esse plano contém dois diâmetros paralelos, um em cada uma das bases do cilindro. Outro modo de caracterizar o posicionamento desses dois pontos sobre a superfície do cilindro é afirmar que eles são dois vértices diagonalmente opostos do retângulo correspondente à seção meridiana do cilindro.

A figura 52 mostra o quadrilátero APBQ correspondente à seção meridiana do cilindro reto. Os segmentos PB e AQ são diâmetros das bases e lados opostos do retângulo correspondente à secção meridiana.

Figura 52 - Quadrilátero APBQ correspondente à secção meridiana do cilindro reto.

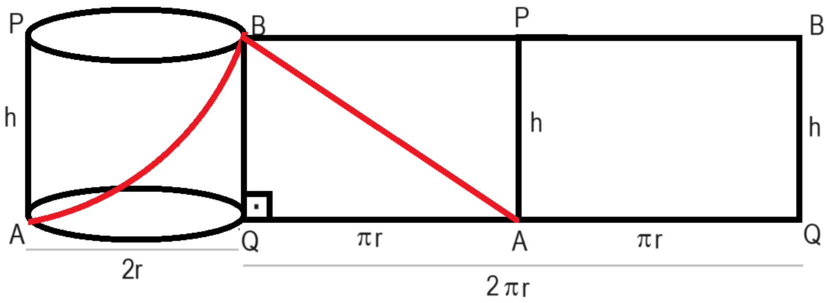


Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Os segmentos PB e AQ, lados opostos desse retângulo, são diâmetros das bases do cilindro.

Para se obter o comprimento da trajetória de A até B percorrida sobre a superfície lateral do cilindro, será necessário planificar esta superfície. Com essa planificação, o caminho de extremidades A e B, que era uma curva no espaço tridimensional, corresponderá ao segmento de reta AB. A figura seguinte mostra a situação depois de feita a planificação mencionada.

Figura 53 - Segmento AB após a planificação da superfície lateral do cilindro.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Nesta situação, AB é a hipotenusa do triângulo ABQ, retângulo em Q.

A medida do segmento AB será calculada em função da medida r do raio da base do cilindro e da altura h do cilindro. Com a planificação, h e πr são os catetos do triângulo retângulo ABQ, que tem AB por hipotenusa.

De acordo com o teorema de Pitágoras tem-se:

$$AB^2 = (\pi r)^2 + h^2$$

Portanto:

$$AB = \sqrt{\pi^2 r^2 + h^2}$$

Será necessário uma planificação da superfície originalmente curva da lateral do cilindro. Esse trabalho trata desse tipo de procedimento. Planificar superfícies e objetos tridimensionais com a finalidade de calcular distâncias ou ainda medidas de trajetórias mínimas ligando dois pontos distintos sobre tais superfícies.

Observe-se que existe uma dificuldade inerente ao terceiro caso quando se pensa na trajetória sobre a superfície cilíndrica que não é simples. Uma suspeita bastante pertinente é a de que essa trajetória seja um pedaço de um contorno elíptico, já que poderíamos pensar que,para obtê-la, devemos considerar um plano seccionando o cilindro passando por A e B e oblíquo aos planos das bases desse cilindro.

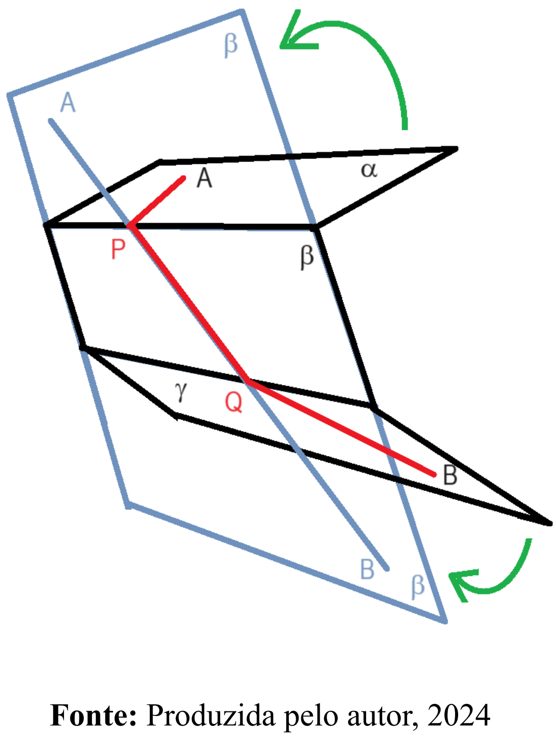
7. DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

A seção 6 ilustrou uma planificação de superfície não poliédrica, o que dá margem a se pensar em outras variedades de aplicações em superfícies redondas. Para além das superfícies não poliédricas, variações mais complexas de possíveis planificações poliédricas podem ser exploradas.

O cálculo da trajetória mínima proposta neste trabalho pode ser estendido a situações em que estão envolvidas mais do que duas faces da superfície do poliedro. Esta ideia é um convite a que se considerem situações mais gerais de obtenção da medida desse tipo de caminho mínimo.

Por exemplo, se os pontos A e B estiverem em faces separadas por uma terceira face de uma superfície poliédrica, a planificação se mostra um recurso adequado para o cálculo do menor caminho entre eles. A figura 43 ilustra esta situação de três faces de uma mesma superfície poliédrica.

Figura 43 - Três faces de um poliedro, contidas nos planos α, β e γ, envolvidas no cálculo da medida da menor trajetória de A a B.



Fonte: Produzida pelo autor, 2024

Esse trabalho portanto possibilitou que diversos conteúdos na matemática básica fossem acessados para obtenção do cálculo de uma trajetória mínima entre: de uma superfície Originalmente tridimensional

Além disso, ficam aqui sugeridas outras situações em que a planificação se mostra um recurso importante de obtenção de medida de caminhos mínimos entre dois pontos.

REFERÊNCIAS

ABREU, E. E. de .; RIBEIRO, L. B. A. .; PINHEIRO, V. G. .; ONOFRE, E. G.; ALEXANDRINO, V. da C. . **A geometria espacial no ENEM:** uma proposta de estudo através da teoria da aprendizagem significativa. Research, Society and Development, *[S. l.]*, v. 11, n. 10, p. e94111032109, 2022. DOI: 10.33448/rsd-v11i10.32109. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/32109. Acesso em: 25 fev. 2024.

ALMEIDA, Paulo Loreço Cruz de. **Contribuições do desenho geométrico na aprendizagem de geometria plana no ensino médio:** uma proposta utilizando o geogebra como ferramenta pedagógica. 2023. Dissertação (Mestrado em matemática em rede nacional) Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2018.

BERTONE, Ana Maria Amarillo Bassanezi, Rodney Carlos Jafelice, Rosana Sueli da Motta **Modelagem Matemática.** Uberlândia, MG : UFU, 2014.

DOLCE,Osvaldo;POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**, v.10, Geometria espacial. São Paulo:Editora Atual, 7. ed, 2013.

DOLCE,Osvaldo;POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**, v.9, Geometria plana. São Paulo: Editora Atual, 9. ed, 2013.

IEZZI,G.,Dolce,O., & DEGENSZAJN,D.(2010). **Matemática elementar: geometria espacial.** Atual Editora.

KALEFF, Ana M. M. R. e outros, **Educação matemática:** diferentes olhares e prática, Appris editora, 2020.

MAIA, Marília e outros. **O ensino de matemática na educação contemporânea:** o dever entre a teoria e a praxis, Quipá editora, 2021.

MARTINS, Marlos Luis Rocha. **Generalização do teorema de Pitágoras por triedro tri-retangular.** 2023. Dissertação (Mestrado em matemática em rede nacional) Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2023.

OTAVIANO, Alessandra B. N. e outros. **Estímulo à criatividade por professores de Matemática e motivação do aluno**, Scielo, 2012.