

Problema de Dois Corpos na Mecânica Celeste

Autor: *Lucas Vinicius Antunes*

Orientador: *Sávio Brochini Rodrigues*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Natalia Andrea Viana Bedoya
Luciene Nogueira Bertoncello
Wladimir Seixas

Problema de Dois Corpos na Mecânica Celeste

Autor: *Lucas Vinicius Antunes*

Orientador: *Sávio Brochini Rodrigues*

Disciplina: Trabalho de Conclusão do Curso A

Curso: Licenciatura em Matemática

Professores Responsáveis: Natalia Andrea Viana Bedoya
Luciene Nogueira Bertoncello
Wladimir Seixas

Instituição: Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

São Carlos, 19 de janeiro de 2021.

Lucas Vinicius Antunes

Sávio Brochini Rodrigues

Dedico esse trabalho à todas as pessoas que me apoiaram e motivaram em todo meu percurso na graduação.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao Professor Doutor Sávio Brochini Rodrigues, que como meu orientador me deu todo apoio necessário para a realização desse trabalho, trazendo críticas importantes, agradeço também pela paciência e disponibilidade.

Aos meus amigos e familiares também sou muito grato por todo apoio, incentivo e ajuda que recebi dentro do que estava ao alcance de cada um.

Agradeço também aos professores doutores Aldilson Eduardo Presoto e José Antônio Salvador que me apoiaram na participação da escola de verão em dinâmica orbital e planetologia no ano de 2017, cuja a qual foi fundamental para o desenvolvimento desse trabalho, assim como o descobrimento desse foco de estudos que me interessou muito.

Resumo

Nesta dissertação temos como objetivo estudar um pouco sobre a mecânica celeste, buscando compreender e construir as três leis de Kepler de forma matemática e utilizando a lei da gravitação Universal de Newton para enxergar as órbitas planetárias como cônicas, sendo elas a elipse, parábola ou hipérbole.

Após realizar essas construções, iremos abordar o problema de dois corpos no espaço o que consiste em estudar qual é a dinâmica do sistema de equações diferenciais que descreve o movimento. Para tanto, consideraremos um sistema de coordenadas em que um dos corpos está na origem.

Sumário

Prefácio	xiii
1 Histórico	1
2 Lei das Áreas	5
3 Equação Diferencial da Órbita	9
4 Cônicas	13
5 Lei da Gravitação de Newton	17
6 Integração da Lei da Gravidade	19
7 Problema de Dois Corpos	21
8 Conclusão	35

Lista de Figuras

2.1	Movimento de uma partícula sob ação de uma força central.	5
2.2	Área varrida pela partícula.	7
7.1	Posições das Massas m_1 e m_2	21
7.2	Plano de Movimento da Partícula no Espaço.	26
7.3	Projeções do vetor \mathbf{a}	27
7.4	Projeção do vetor \mathbf{a} no eixo z	28
7.5	Projeção do vetor \mathbf{a} no eixo x	28
7.6	Projeção do vetor \mathbf{a} no eixo y	29
7.7	Órbita no Espaço.	34

Prefácio

Quando falamos em mecânica celeste, muitos nomes de grandes pensadores estão envolvidos, em especial neste trabalho abordaremos um pouco sobre as contribuições do astrônomo e matemático Johannes Kepler, [2] e do Físico Isaac Newton, [3].

Este trabalho está dividido em sete capítulos, começando com uma abordagem histórica onde veremos um pouco sobre a trajetória de vida do astrônomo e matemático Johannes Kepler, passando por sua infância e estudos em busca de trazer ao leitor uma ideia das condições que o motivaram e deram sentido ao desenvolvimento de suas ideias. O capítulo se encerra com uma breve abordagem da história de Newton que foi crucial para o aprimoramento das ideias de Kepler ao desenvolver a Lei da Gravitação Universal.

Posteriormente daremos início ao estudo da Lei das Áreas descrita por Kepler, onde partindo de uma definição de partícula com uma aceleração \mathbf{f} , ocasionada por uma força central em um sistema cartesiano, chegaremos a um resultado que mostra a proporcionalidade entre o tempo e a área varrida pela partícula definida.

No terceiro capítulo realizaremos um estudo sobre a equação diferencial da órbita encontrada no capítulo anterior, onde temos como objetivo deixá-la em função do ângulo θ formado entre a partícula e o eixo x do sistema cartesiano.

Em seguida nos, capítulos quatro e cinco, realizaremos a construção da equação geral das cônicas em sua forma polar, partindo da equação cartesiana da elipse, que será muito utilizada a partir deste ponto e, em seguida, utilizaremos esse resultado combinado ao do capítulo três e deduziremos a Lei da Gravitação Universal de Newton.

Integrando a Lei da Gravitação Universal no capítulo seis, obteremos a equação geral das cônicas combinada com as constantes de integração encontradas nos capítulos anteriores e assim teremos a equação geral da órbita.

Por fim no capítulo sete, trabalharemos com o problema de dois corpos, que visa primeiramente estudar a dinâmica de dois corpos em movimento no espaço utilizando os resultados obtidos até então e, depois, estudaremos como encontrar o plano em que se encontra a órbita desses objetos e, por fim, calcularemos seu movimento.

Capítulo 1

Histórico

Nascido no ano de 1571 na cidade de Weil, Johannes Kepler teve origem em uma nobre família que entrara em decadência na geração de seu avô, Sebaldus. Rodeada de diversas tragédias, a vida de Kepler não foi nada fácil, teve que lidar com as consequências dos conflitos religiosos entre a igreja católica e o movimento protestante, enfermidades e falta de recursos.

No ano de 1578, Kepler deu início aos seus estudos na cidade de Lorenberg. Posteriormente aos 13 anos de idade, demonstrou interesse por estudos religiosos, ingressando assim em um seminário, onde se imergiu não apenas nos estudos religiosos, mas também em Geometria e Aritmética.

Posteriormente, já no ensino superior, Kepler se identificou com um professor de Matemática e Astronomia chamado Maestlin, o qual era um dos mais célebres astrônomos da época. Maestlin ensinava o sistema copernicano aos seus melhores alunos, desse modo, Kepler desenvolveu ideias a favor do heliocentrismo, pois existiam algumas vantagens matemáticas.

No ano de 1595, enquanto Kepler ministrava uma aula no seminário protestante de Graz, desenhou uma figura geométrica no quadro e em seguida teve a grande ideia de relacionar o sistema copernicano com a geometria euclidiana. Trabalhando com círculos inscritos e circunscritos à alguns polígonos regulares, buscava estudar as proporções entre o raio do círculo maior e o raio do círculo menor, relacionando-as com as proporções entre os raios das órbitas dos planetas. Posteriormente, ao notar que as tentativas anteriores não funcionaram, Kepler optou por trocar os polígonos por poliedros regulares, mais especificamente os poliedros Platônicos. Já no ano de 1596, Kepler publicou sua primeira obra, chamada *Mysterium Cosmographicum* (Mistério Cosmográfico), onde ele apresenta o desenvolvimento dessas e de outras ideias.

Após a repercussão de sua obra, Kepler teve contato com diversos pensadores da época, dentre eles Galileu Galilei (1546 - 1642) e Tycho Brahe (1546 - 1601). O contato com Galileu foi breve, trocaram algumas cartas e por mais que tivesse gostado do trabalho de

Kepler, Galileu não respondeu a seu convite para formarem uma espécie de associação, de modo que juntos defendessem as ideias de Copérnico (1473 - 1543). Por outro lado, Kepler teve retorno do astrônomo Tycho Brahe, que por sua vez criticou as especulações metafísicas presentes na obra, mas ainda assim o convidou para que se unissem em Praga, encontro que ocorreu em 4 de fevereiro de 1600. Era a combinação perfeita entre um observador excepcional, Tycho, e um grande matemático, Kepler.

O convívio entre os dois foi cercado por diversos conflitos, porém não foi algo que se estendeu por longos anos, uma vez que Tycho viria a falecer em Outubro de 1601. Levou certo tempo até que Kepler finalmente tivesse acesso a alguns dados observacionais de Tycho, sendo eles relacionados ao planeta Marte, estudo que Kepler prometera finalizar em oitenta dias e levou oito anos, porém esse foi o trabalho crucial para que desenvolvesse suas ideias que o levaram às 3 leis do movimento planetário.

Com o falecimento de Tycho Brahe, Kepler foi nomeado Matemático Imperial em Praga, e assim teve início o período mais produtivo de sua carreira. Em 1609 publicou sua obra chamada *Astronomia Nova seu physica Coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis* (Astronomia Nova, fundada sobre as causas, ou Física Celeste, exposta em comentários sobre os movimentos da estrela Marte), onde tomou como base três hipóteses revolucionárias: A força que rege o movimento dos planetas tem origem no Sol; as órbitas de todos os planetas estão aproximadamente em um mesmo plano que contém o Sol; os planetas não seguem um movimento uniforme. Dessa obra surgiram suas duas primeiras leis do movimento planetário.

A segunda Lei de Kepler enunciada como *A linha imaginária que liga o Sol aos planetas vai varrer áreas iguais em tempos iguais*, na verdade, foi a primeira a ser descoberta. Kepler usou de um artifício que visava transportar a posição do observador para o planeta Marte e assim calcular os movimentos da Terra a partir desse novo referencial. Desse modo, pôde notar que, assim como os demais planetas, a Terra não seguia um movimento uniforme, se deslocando ora mais rápida, ora mais devagar, dependendo de sua distância ao Sol e por fim concluiu que o tempo necessário para um planeta varrer uma área da órbita deveria ser proporcional à sua distância do Sol.

Após finalizar os cálculos sobre a segunda lei, Kepler volta a direcionar sua atenção ao estudo do formato das órbitas. Primeiramente deu início olhando para variações de órbitas circulares, sendo elas excêntricas, concêntricas e "achatadas", comparando suas margens de erro. Foi o modelo de órbitas "achatadas" que o levou a chegar às órbitas elípticas, ficando conhecido como sua primeira lei, chamada *Lei das Órbitas*, e enunciada da seguinte forma: *Os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos*.

As primeiras leis foram desenvolvidas entre os anos de 1602 e 1604. Alguns anos após publicar a obra que as continham, em busca de encontrar uma razão divina entre as órbitas dos planetas, Kepler chegou então à sua terceira lei, conhecida como *Lei Harmônica* ou *Lei do Movimento Planetário*, enunciada como: *O quadrado do período de rotação do planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse orbital*, que

fora publicada em sua obra *Harmonice Mundi* (Harmonia do Mundo) em 1619. No ano de 1630, ao realizar uma longa viagem a cavalo, chegou ao seu destino muito doente falecendo três dias depois.

Nascido no ano de 1643, Newton seria o grande nome que viria a dar ainda mais visibilidade aos trabalhos de Kepler e Galileu, tomando-os como inspiração e, de certo modo dando-os continuidade.

Desde sua infância, Newton sempre realizava diversos experimentos e com o passar dos anos se interessou muito nos estudos sobre a gravidade, que ao combinar com seu interesse nas descobertas de Kepler e tendo apoio de alguns pensadores de sua época, como Robert Hook (1635 - 1703) e Edmond Halley (1656 - 1742), obteve resultados importantíssimos para os estudos da Mecânica Celeste, sendo a gravitação universal um de seus principais resultados.

O estopim para o desenvolvimento da gravitação univesal se deu a partir de um questionamento de Halley a Newton, onde o indagou sobre qual curva seria descrita pelos planetas caso atuasse sobre eles uma força que variasse com o inverso do quadrado de sua distância ao Sol, Newton prontamente respondeu que seriam elipses e ficou responsável por realizar essa demonstração para Halley, que a recebeu alguns meses depois no formato de um tratado.

Esse tratado feito por Newton mostrava que os movimentos dos planetas seriam elipses para velocidades abaixo de um determinado limite, e continha também as demonstrações da segunda e da terceira lei de Kepler a partir de postulados gerais. Nesse tratado também fora postulado de forma genérica a existência de uma força atrativa no universo que varia com o inverso do quadrado da distância.

Newton pôde comprovar seus cálculos recorrendo a dados astronômicos do Astrônomo Real John Flamasteed, porém, para que pudesse avançar ainda mais em suas descobertas, era necessário definir o que era força e inércia, assim, então, deu-se início a descoberta de suas conhecidas três leis.

Capítulo 2

Lei das Áreas

Buscando compreender a Lei das Áreas, definiremos f como sendo a aceleração de uma partícula, ocasionada por uma força presente em um ponto específico, o qual usaremos como origem do nosso sistema de coordenadas. Chamaremos essa força de "força central".

Para desenvolver os cálculos de forma prática, serão utilizadas coordenadas polares, sendo assim, a variável r representará a distância da partícula até a origem do sistema, e θ será o ângulo formado entre \mathbf{r} e o eixo x , como podemos observar na figura 2.1, [4]. Dito isso, podemos decompor f em termos de x e y .

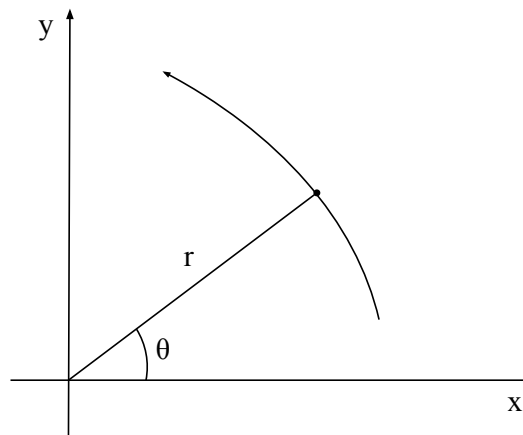


Figura 2.1: Movimento de uma partícula sob ação de uma força central.

Ao decompor f nos eixos x e y , obtemos as seguintes equações para descrever a aceleração do corpo ao longo dos eixos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f \cos \theta = -f \frac{x}{r} \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -f \sin \theta = -f \frac{y}{r}, \quad (2.2)$$

onde f é da forma $f = (-f \cos \theta, -f \sin \theta)$. É importante observar que o sinal negativo

nas equações implica que a aceleração tem sua orientação voltada para o centro, e que f é igual ao módulo de \mathbf{f} .

Para encontrarmos a Equação Diferencial Ordinária (EDO) que rege o movimento da partícula sob a ação da força de um corpo central, devemos multiplicar a equação (2.1) por $-y$ e a equação (2.2) por x , obtendo o seguinte:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0. \quad (2.3)$$

Teorema 2.1. *Dada a equação (2.3), podemos descrever a lei das áreas através da seguinte equação:*

$$A = \frac{ht}{2} + C,$$

onde C e h são constantes de integração.

Demonstração. Integrando por partes cada uma das derivadas de segunda ordem em (2.3), obtemos:

$$\int x \frac{d^2 y}{dt^2} dt = x \frac{dy}{dt} - \int \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} \quad (2.4)$$

$$\int y \frac{d^2 x}{dt^2} dt = y \frac{dx}{dt} - \int \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}. \quad (2.5)$$

Substituímos agora os resultados na equação (2.3) obtendo o seguinte:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h, \quad (2.6)$$

de modo que, para simplificar as constantes de integração, elas foram agrupadas na constante h .

Como:

$$x = r \cos \theta \quad (2.7)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (2.8)$$

onde r e θ estão em função do tempo, ao calcular suas derivadas obtemos o seguinte:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \quad (2.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta. \quad (2.10)$$

Notação: A fim de apresentar uma notação menos carregada, a partir de agora, ocasionalmente, as derivadas de primeira e segunda ordem com relação ao tempo serão representadas conforme os exemplos a seguir:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ao substituir na equação (2.6) as derivadas encontradas em (2.9) e (2.10) obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} x(\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) - y(\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) &= \\ r \cos \theta(\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) - r \sin \theta(\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) &= \\ r\dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta} \cos^2 \theta - r\dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta} \sin^2 \theta &= r^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

A partir desse resultado, podemos concluir que a equação (2.6) fica da seguinte forma:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h = r^2\dot{\theta}. \quad (2.11)$$

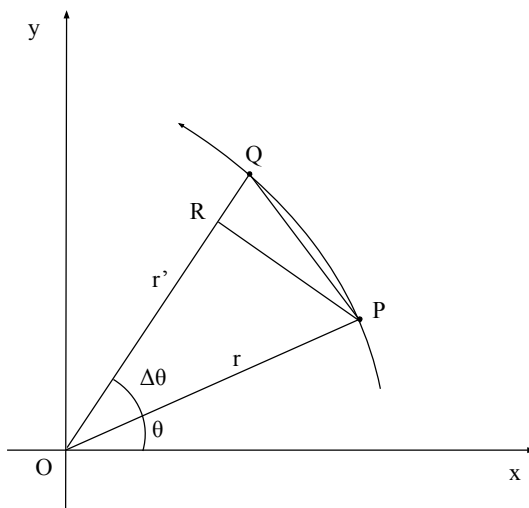


Figura 2.2: Área varrida pela partícula.

Para compreender o que representa $r^2\dot{\theta}$, observemos a figura 2.2, [4]. Nela encontraremos a representação da partícula em dois momentos distintos no tempo, nas posições r e r' , que por sua vez formam o triângulo OPQ , com uma área quase que equivalente a percorrida pela partícula. Sendo assim, temos:

$$\Delta A = \frac{RP \cdot r'}{2}.$$

Onde RP é a altura do triângulo.

Entretanto,

$$\text{sen } \Delta\theta = \frac{RP}{r} \Leftrightarrow RP = r \text{ sen } \Delta\theta,$$

logo,

$$\Delta A = \frac{r \cdot r'}{2} \text{ sen } \Delta\theta. \quad (2.12)$$

Onde A representa a área varrida pela partícula quando desloca de P a Q .

Para compreender como A varia no tempo, iremos calcular sua derivada tomando o

limite de ΔA quando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r \cdot r' \operatorname{sen} \Delta \theta}{2 \Delta t}. \quad (2.13)$$

Levando em consideração que para $\Delta t \rightarrow 0$, $r' \rightarrow r$, ficaremos com $\frac{r^2}{2}$.

Vejam agora o que acontece com o limite do restante:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta \theta)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\theta(t + \Delta t) - \theta(t))}{\Delta t},$$

aplicando L'Hospital obteremos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta(t + \Delta t) - \theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t + \Delta t)}{1} = \dot{\theta},$$

Sendo assim, podemos concluir que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}, \quad (2.14)$$

Comparando as equações (2.11) e (2.14) obtemos a seguinte relação:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{h}{2}. \quad (2.15)$$

Integrando a equação (2.15), obtemos o seguinte resultado:

$$A = \frac{ht}{2} + C \quad (2.16)$$

Que nos mostra que a área varrida pela partícula é diretamente proporcional ao tempo. De modo empírico, Kepler descreveu a “Lei das Áreas” (O planeta percorre áreas iguais em tempos iguais), e o resultado da equação (2.16) foi descrito por Newton e outros pensadores de sua época. \square

A equação (2.14) é conhecida como **Velocidade Areolar** (na forma diferencial), ela representa a velocidade com que a partícula irá varrer uma determinada área, podendo ser obtida ao variarmos a área A no tempo.

Importante observar que a Lei das Áreas requer apenas o fato da força estar direcionada ao centro. Nada sobre a intensidade ou dependência da força com r é necessário para a validade desta Lei.

Capítulo 3

Equação Diferencial da Órbita

A partir da equação diferencial que descreve o movimento de uma partícula, uma forma de encontrar a sua órbita se dá através da integração de suas equações diferenciais. No entanto não se trata de um processo simples de ser realizado e, além do mais, as equações encontradas estarão em função do tempo, o que não é o ideal, pois para conhecer a trajetória da partícula ele precisará ser eliminado. Vejamos como podemos realizar esse processo de obtenção da trajetória para o caso de uma força central atrativa, partindo das equações (2.1) e (2.2).

Teorema 3.1. *Supondo que a partícula se move no plano sob ação de uma força atrativa segundo as leis de Newton, e sua trajetória é descrita pelas seguintes equações:*

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -f \frac{x}{r}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -f \frac{y}{r},$$

então estas equações podem ser reescritas como um novo par de equações

$$f = h^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right)$$

e

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h,$$

onde $u = \frac{1}{r}$ e θ é o ângulo em coordenadas polares de modo que somente a última equação depende da variável t .

Demonstração. Olhando para as equações (2.1) e (2.2) em sua forma polar e levando em consideração que f não está em função do tempo, estas equações diferenciais serão autônomas. Vamos agora realizar uma redução de ordem antes de iniciarmos o processo para eliminação da variável t .

Veamos como ficam as derivadas de segunda ordem em sua forma polar, para tal, basta derivar as equações (2.9) e (2.10), ficando então com o seguinte:

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta = -f \cos \theta$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta = -f \sin \theta$$

A partir dessas equações, conseguimos construir duas relações. A primeira se dá ao multiplicar \ddot{x} e \ddot{y} por $\cos \theta$ e $\sin \theta$, respectivamente, depois somar as duas equações, obtendo:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -f. \quad (3.1)$$

A segunda relação é a forma polar da equação (2.3), onde multiplicamos \ddot{x} e \ddot{y} por $-\sin \theta$ e $\cos \theta$, respectivamente, depois somamos as duas equações

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \quad (3.2)$$

Na seção anterior, encontramos o seguinte resultado:

$$h = r^2\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{h}{r^2},$$

como f atende as hipóteses do resultado apresentado, podemos substituir $\dot{\theta}$ na equação (3.1), ficando então com:

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - f. \quad (3.3)$$

Em busca de simplificar as equações, vamos procurar uma solução de modo que r esteja em função de θ e θ esteja em função de t . Dito isso, faremos a seguinte mudança de variável:

$$r = \frac{1}{u}, \quad (3.4)$$

sendo assim, temos que:

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}(u^{-1}) = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta}.$$

Substituindo $\dot{\theta}$ por $\frac{h}{r^2}$ conforme a relação apresentada anteriormente, ficamos da seguinte forma:

$$\dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}. \quad (3.5)$$

A segunda derivada de r pode ser encontrada derivando \dot{r} :

$$\ddot{r} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -h \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \dot{\theta} \right) = -h \frac{h}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (3.6)$$

Para finalizar, vamos substituir a equação (3.6) na equação (3.3) e, então, obteremos

uma EDO em que θ pode ser visto como uma variável independente (Que será a EDO (3.8) apresentada abaixo.):

$$\begin{aligned} -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} &= \frac{h^2}{r^3} - f \Leftrightarrow \\ f &= \frac{h^2}{r^3} + h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \Leftrightarrow \\ f &= h^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aqui obtivemos uma EDO de segunda ordem, entretanto a equação (2.11), que foi utilizada para chegar na equação (3.7), é resultado de uma integral, sendo assim, a equação (3.7) terá três constantes livres. Para encontrar a relação entre as coordenadas e o tempo, será preciso resolver a seguinte EDO de primeira ordem:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h, \quad (3.8)$$

o que nos trará mais uma constante livre, deixando o problema completo com quatro constantes. \square

A equação (3.7) nos permite encontrar, a partir da aceleração, a curva que será gerada. Entretanto, é possível determinar a aceleração necessária para que a partícula percorra uma curva desejada, o que seria o processo contrário. Em geral, o segundo processo acaba por ser o mais simples.

Capítulo 4

Cônicas

Para que possamos dar continuidade aos nossos cálculos, será preciso utilizar um pouco do conhecimento de cônicas. Dito isso, neste capítulo desenvolveremos a equação polar que pode ser usada para descrever as 3 principais cônicas, elipse, parábola e hipérbole. Em especial nos capítulos posteriores, nosso foco estará voltado para a elipse, o que não significa que os movimentos orbitais se resumam a ela.

Partindo da equação cartesiana da elipse, buscaremos encontrar a equação geral das cônicas. Esse processo também, pode ser feito a partir das demais, porém para não nos estendermos muito, focaremos apenas nos cálculos partindo da elipse.

Teorema 4.1. *Dada a equação cartesiana da elipse,*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.1)$$

de modo que $a > b$.

Seja c a distância de um foco até a origem, de modo que,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (4.2)$$

e seja e a excentricidade, descrita como

$$e = \frac{c}{a}. \quad (4.3)$$

Se considerarmos a seguinte substituição de variáveis:

$$\begin{cases} x = -c + r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}, \quad (4.4)$$

onde r e ϕ representam coordenadas polares de tal modo que, o centro do sistema cartesiano, está em um dos focos da elipse, então, a equação (4.1) transforma-se na equação:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi},$$

no qual $p = a(1 - e^2)$.

Demonstração. Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{(-c + r \cos \phi)^2}{a^2} + \frac{(r \operatorname{sen} \phi)^2}{b^2} = 1 &\Leftrightarrow \frac{c^2 - 2cr \cos \phi + r^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \phi}{b^2} = 1 \\ \left(\frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{b^2} \right) r^2 - \left(\frac{2c \cos \phi}{a^2} \right) r + \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Perceba que a equação anterior se assemelha à uma equação quadrática. Chamaremos cada coeficiente de r por A , B e C respectivamente.

Em A substituiremos $\operatorname{sen}^2 \phi$ por $1 - \cos^2 \phi$ e também utilizaremos o seguinte resultado extraído da equação (4.2):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad (4.6)$$

de modo que A ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A = \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{1 - \cos^2 \phi}{a^2 - c^2} &= \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{1}{a^2 - c^2} - \frac{\cos^2 \phi}{a^2 - c^2} \Leftrightarrow \\ A &= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 - c^2} \right) \cos^2 \phi + \frac{1}{a^2 - c^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Buscando calcular as raízes da equação $Ar^2 + Br + C = 0$ através da fórmula $B^2 - 4AC$, dividiremos os processos em etapas. Vamos primeiramente calcular o valor de $A \cdot C$:

$$\begin{aligned} A \cdot C &= \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 - c^2} \right) \cos^2 \phi + \frac{1}{a^2 - c^2} \right] \left[\frac{c^2}{a^2} - 1 \right] \Leftrightarrow \\ A \cdot C &= \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 - c^2} \right) \cos^2 \phi + \frac{1}{a^2 - c^2} \right] \left[\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right] \Leftrightarrow \\ A \cdot C &= \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right) \cos^2 \phi - \frac{1}{a^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Calcularemos agora o valor de B^2 :

$$B^2 = \left(-\frac{2c \cos \phi}{a^2} \right)^2 = \frac{4c^2 \cos^2 \phi}{a^4}. \quad (4.9)$$

Juntando os dois resultados obtidos temos:

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= \frac{4c^2 \cos^2 \phi}{a^4} - 4 \left[\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right) \cos^2 \phi - \frac{1}{a^2} \right] = \\ &= \frac{4c^2 \cos^2 \phi}{a^4} - \frac{4c^2 \cos^2 \phi}{a^4} + \frac{4 \cos^2 \phi}{a^2} - \frac{4 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$B^2 - 4AC = \frac{4}{a^2}. \quad (4.10)$$

Ao calcular a raiz obteremos:

$$\pm \sqrt{B^2 - 4AC} = \pm \frac{2}{a}, \quad (4.11)$$

portanto:

$$r = \frac{-B \pm \frac{2}{a}}{2A}, \quad (4.12)$$

que ao substituírmos A e B obteremos o seguinte:

$$r = \frac{2\left(\frac{c \cos \phi}{a^2} \pm \frac{1}{a^2}\right)}{2\left(\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 - c^2}\right) \cos \phi + \frac{1}{a^2 - c^2}\right)}. \quad (4.13)$$

A partir da equação (4.3), podemos extrair o seguinte resultado:

$$c = ea, \quad (4.14)$$

que ao ser substituído em (4.13) teremos:

$$r = \frac{\frac{ea \cos \phi \pm a}{a^2}}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2 - e^2 a^2}\right) \cos \phi + \frac{1}{a^2 - e^2 a^2}} = \frac{ea \cos \phi \pm a}{\left(1 - \frac{1}{1 - e^2}\right) \cos \phi + \frac{1}{1 - e^2}},$$

multiplicando por $(1 - e^2)$ ficamos com:

$$\frac{(1 - e^2)a(e \cos \phi \pm 1)}{e^2 \cos \phi + 1} = \frac{(1 - e^2)a(e \cos \phi \pm 1)}{(1 - e \cos \phi)(1 + e \cos \phi)} \Leftrightarrow$$

$$r_+ = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e \cos \phi)}, \quad (4.15)$$

$$r_- = \frac{-a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \phi)}. \quad (4.16)$$

Tomando agora o resultado da equação de r_- e multiplicando por -1 obteremos com a seguinte equação

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos \phi)}. \quad (4.17)$$

Caso partíssemos da equação de r_+ , substituiríamos ϕ por $\theta + \pi$, em busca de tornar a equação mais simples.

Em (4.17) substituiremos

$$p = a(1 - e^2) \quad (4.18)$$

obtendo:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad (4.19)$$

que é a equação polar das cônicas, onde $r = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $\phi = \arctan \frac{y}{x+c}$, e é a excentricidade e p será o parâmetro focal. \square

Quando $0 < e < 1$ a cônica será uma elipse, se $e = 1$ obteremos uma parábola e se $e > 1$ teremos uma hipérbole.

No início do Capítulo foi apresentada a equação cartesiana da elipse, a seguir podemos observar as equações cartesianas da parábola e da hipérbole respectivamente:

$$y^2 = 4px \quad (4.20)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.21)$$

Vejamos agora as relações entre a , b e p das equações (4.1), (4.20) e (4.21) com o e e o p da equação (4.17): Para a elipse temos:

$$p = a(1 - e^2), \quad (4.22)$$

para a hipérbole

$$p = a(e^2 - 1) \quad (4.23)$$

e por fim, para a parábola p pode assumir qualquer valor.

Capítulo 5

Lei da Gravitação de Newton

Tomando como referência grandes pensadores como Galileu Galilei, Tycho Brahe e Johannes Kepler, Newton pôde demonstrar que duas partículas quaisquer no universo se atraem gravitacionalmente por meio de uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros de massa.

Para continuarmos prosseguindo, neste capítulo iremos tomar como base a equação (3.7), descrita num capítulo anterior e as informações sobre cônicas, buscando encontrar uma expressão para a aceleração em termos das coordenadas. Pela Lei das Áreas, vimos que os planetas se movem devido a uma força central. A Primeira Lei de Kepler (Lei das Órbitas) nos diz que a curva descrita pelos planetas é uma elipse com o Sol em um dos focos. Sendo assim, usaremos a equação (4.19) com p da equação (4.22), que corresponde ao que descreve uma elipse.

Teorema 5.1. *Supondo que um corpo se move sob ação de uma força central segundo a equação*

$$f = h^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right),$$

e supondo que as órbitas seguem a primeira lei de Kepler, ou seja, que o corpo tem como origem da força um dos focos de uma elipse, que é descrita pela equação

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

Então a força f , será dada por:

$$f = \frac{h^2}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{r^2},$$

onde,

$$k^2 = \frac{h^2}{a(1 - e^2)}.$$

Demonstração. Utilizando a substituição feita na equação (3.4), lembrando que $r = 1/u$, e derivando com relação a θ , obteremos:

$$\frac{1}{u} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \Leftrightarrow u = \frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)}, \quad (5.1)$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-e \operatorname{sen} \theta (a(1 - e^2))}{(a(1 - e^2))^2} = \frac{-e \operatorname{sen} \theta}{a(1 - e^2)}, \quad (5.2)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{-e \cos \theta (a(1 - e^2))}{(a(1 - e^2))^2} = \frac{-e \cos \theta}{a(1 - e^2)}. \quad (5.3)$$

Sendo assim, podemos realizar a seguinte substituição na equação (3.7):

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{a(1 - e^2)} \quad (5.4)$$

ficando com:

$$f = h^2 u^2 \left(\frac{1}{a(1 - e^2)} \right). \quad (5.5)$$

Ao retornarmos para a variável r , a equação toma a forma

$$f = \frac{h^2}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{r^2}, \quad (5.6)$$

onde

$$k^2 = \frac{h^2}{a(1 - e^2)}. \quad (5.7)$$

Sendo assim, podemos concluir que a aceleração que os planetas sofrem devido ao Sol é inversamente proporcional ao quadrado da distância. \square

Capítulo 6

Integração da Lei da Gravidade

Agora que sabemos que a força segue a lei do inverso do quadrado da distância, podemos retornar a equação diferencial que rege o movimento do corpo para descobrir que existem outros tipos de trajetória além da trajetória elíptica.

A integração da lei de força acaba sendo bem mais complicada do que deduzi-la. Neste capítulo, buscaremos encontrar o movimento a partir da lei que o rege. Anteriormente, deduzimos a aceleração da gravidade (equação (5.6)):

$$f = \frac{k^2}{r^2} = k^2 u^2. \quad (6.1)$$

Ao substituirmos esse resultado na equação (3.7), obtemos a seguinte relação de igualdade

$$k^2 u^2 = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \Leftrightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k^2}{h^2}, \quad (6.2)$$

que é uma equação linear de segunda ordem, não homogênea. Para resolvê-la utilizaremos o método da variação dos parâmetros. Primeiro vamos considerar a seguinte solução para caso a equação fosse homogênea:

$$u = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta \quad (6.3)$$

sendo assim, somamos $\frac{k^2}{h^2}$ à solução geral, satisfazendo a equação (6.2). Portanto, a solução será:

$$u = \frac{k^2}{h^2} + C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta. \quad (6.4)$$

Neste momento estamos buscando a solução para r e não para u , logo a equação ficará da seguinte forma:

$$r = \frac{1}{\frac{k^2}{h^2} + C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta}. \quad (6.5)$$

Para chegarmos no resultado que buscamos, é preciso utilizar algumas substituições.

Utilizaremos então a seguinte relação:

$$A \cos(\theta - \theta_0) = A \cos \theta_0 \cos \theta + A \sin \theta_0 \sin \theta,$$

onde:

$$\begin{cases} A \cos \theta_0 = C_1 \\ A \sin \theta_0 = C_2 \end{cases}.$$

Sendo assim, temos:

$$r = \frac{1}{\frac{k^2}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{\frac{h^2}{k^2}}{1 + \frac{h^2}{k^2} A \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (6.6)$$

sendo A e θ_0 constantes.

Ao relacionarmos a equação (6.6) com a equação 4.19, vemos que ela é equivalente à equação geral das cônicas, descrita a partir de um dos focos, ou seja, não apenas a elipse é uma trajetória possível, mas a parábola e a hipérbole também.

A relação dos termos pode ser vista a seguir:

$$p = \frac{h^2}{k^2}, \quad (6.7)$$

$$e = \frac{h^2}{k^2} A, \quad (6.8)$$

$$\phi = \theta - \theta_0. \quad (6.9)$$

Podemos encontrar os valores de θ_0 e A a partir das seguintes relações:

$$\begin{cases} A \cos \theta_0 = C_1 \\ A \sin \theta_0 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A \sin \theta_0}{A \cos \theta_0} = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow \tan(\theta_0) = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow \theta_0 = \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$$

$$\begin{cases} A^2 \cos^2 \theta_0 = C_1^2 \\ A^2 \sin^2 \theta_0 = C_2^2 \end{cases} \Rightarrow A^2 = C_1^2 + C_2^2 \Leftrightarrow A = \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

Vale ressaltar que θ_0 representa o ângulo de rotação da cônica, com relação ao eixo polar.

Capítulo 7

Problema de Dois Corpos

Neste capítulo, vamos supor que dois corpos de massas m_1 e m_2 , se encontram no espaço tridimensional, e cada um tem uma velocidade inicial arbitrária. Supondo que, seus movimentos são regidos pela Lei da Gravitação Universal, e que estão em um sistema inercial, mostraremos que num sistema de coordenadas apropriado, a trajetória desses dois corpos, está confinada a um plano, e a curva descrita pela trajetória é uma cônica.

Para tanto, mostraremos primeiro que o centro de massa destes dois corpos se move a uma velocidade constante. Portanto, mudando a origem do referencial inercial para o centro de massa, mostraremos que, o movimento de um corpo em relação ao outro ficará confinado em um plano. Assim, deduziremos a posição espacial do plano da órbita destes dois corpos. Feito isto, será possível determinar todos os parâmetros da equação polar da cônica que descreve esta órbita.

Interessante notar que, uma vez que o referencial estiver ajustado ao plano da órbita, a forma mais apropriada para obter a equação polar das cônicas, é escolher o centro deste referencial sobre um dos corpos. Ou seja, o mais natural é colocar o referencial sobre uma massa, para observar a variação temporal da distância entre os dois corpos.

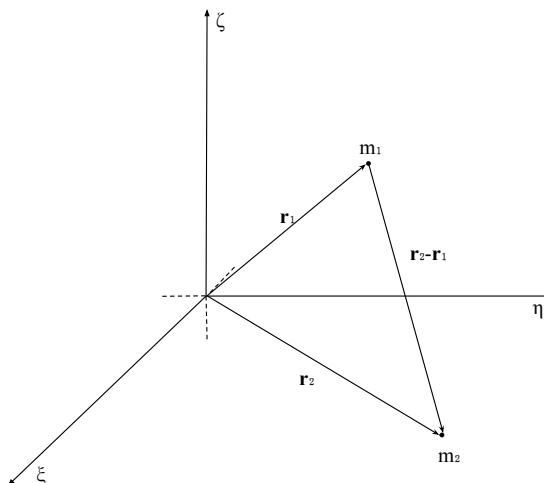


Figura 7.1: Posições das Massas m_1 e m_2 .

Portanto, para obter a solução do problema de dois corpos, necessitaremos de uma sequência de mudanças de coordenadas. Iniciaremos com um sistema inercial arbitrário no qual um vetor \mathbf{r} qualquer pode ser descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \xi \hat{\xi} + \eta \hat{\eta} + \zeta \hat{\zeta}, \quad (7.1)$$

onde $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\zeta}$ são os vetores unitários do sistema escolhido e ξ , η e ζ representam a posição de um objeto qualquer. Sendo assim, os vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 representarão a posição das massas m_1 e m_2 , respectivamente. Conforme a figura 7.1, [4].

Partindo agora da segunda Lei de Newton em sua forma vetorial:

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (7.2)$$

chamaremos de \mathbf{F}_{12} a força gravitacional exercida sob m_1 devido à m_2 e de \mathbf{F}_{21} a força gravitacional exercida sob m_2 devido à m_1 , onde

$$\mathbf{F}_{12} = k^2 m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (7.3)$$

$$\mathbf{F}_{21} = -k^2 m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (7.4)$$

Vale ressaltar que a diferença de sinais entre as forças \mathbf{F}_{12} e \mathbf{F}_{21} remetem às direções em que estão sendo exercidas.

Utilizando a Equação (7.2), podemos reescrever as equações (7.3) e (7.4) da seguinte forma:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = k^2 m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (7.5)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -k^2 m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (7.6)$$

Deste modo, teremos seis equações diferenciais de segunda ordem, que ao serem resolvidas, introduzirão 12 constantes. Essas 12 constantes são determinadas quando condições iniciais de posição e velocidade dos dois corpos são fornecidas. Como veremos, às vezes é mais conveniente expressar estas constantes em termos do centro de massa, bem como outros parâmetros fisicamente relevantes.

Para simplificar o problema, vamos estudar o movimento do centro de massa. Para isso, começaremos somando as equações (7.5) e (7.6), obtendo o seguinte:

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = 0, \quad (7.7)$$

integrando temos:

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \boldsymbol{\alpha}_1 \quad (7.8)$$

ao integrar mais uma vez chegaremos em:

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 t + \boldsymbol{\alpha}_2. \quad (7.9)$$

Onde $\boldsymbol{\alpha}_1$ e $\boldsymbol{\alpha}_2$ são as constantes de integração. Como cada vetor contém três componentes, encontramos então 6 constantes.

Seja \mathbf{R} o vetor posição do centro de massa, temos que:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M} \Leftrightarrow M\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2, \quad (7.10)$$

onde $M = m_1 + m_2$.

A partir da equação (7.9) podemos obter a seguinte relação

$$M\mathbf{R} = \boldsymbol{\alpha}_1 t + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad (7.11)$$

sendo assim, concluímos que o movimento do centro de massa é linear com relação ao tempo, de modo que, se α_1 for igual a 0, ele estará parado.

Derivando a equação (7.11) chegaremos em:

$$M \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \boldsymbol{\alpha}_1, \quad (7.12)$$

ou seja,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{M}. \quad (7.13)$$

Dessa forma, encontramos a velocidade do centro de massa. Como M e $\boldsymbol{\alpha}_1$ são constantes, então a velocidade do centro de massa também é.

Partindo dos resultados encontrados anteriormente, iremos agora mudar nosso centro de coordenadas para o centro de massa, sendo assim, a equação (7.10) ficará da seguinte forma

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0, \quad (7.14)$$

visto que agora $\mathbf{R} = 0$. A partir disso, quando temos a coordenada de um dos corpos com relação ao centro de massa dos dois, a coordenada do segundo corpo pode ser obtida da equação acima.

Buscando eliminar \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_1 das equações (7.5) e (7.6), iremos realizar a seguinte substituição obtida da equação (7.14):

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2\mathbf{r}_2}{m_1}$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1\mathbf{r}_1}{m_2}.$$

Substituindo os resultados nas equações (7.5) e (7.6) ficamos com:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= k^2 m_1 m_2 \frac{\left(-\frac{m_1 \mathbf{r}_1}{m_2} - \mathbf{r}_1\right)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = k^2 m_1 \frac{(-m_1 \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \\
 &k^2 m_1 \frac{(-m_1 - m_2) \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = k^2 m_1 M \frac{\mathbf{r}_1}{r^3} \Leftrightarrow \\
 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -k^2 M \frac{\mathbf{r}_1}{r^3}. \tag{7.15}
 \end{aligned}$$

De modo análogo encontramos também que

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -k^2 M \frac{\mathbf{r}_2}{r^3}, \tag{7.16}$$

onde $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, que representa a distância entre as massas m_1 e m_2 . Partindo dessa equação podemos encontrar a seguinte relação utilizando a equação (7.14):

$$\begin{aligned}
 r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \Leftrightarrow r &= \left| \frac{m_1 \mathbf{r}_1}{m_2} - \mathbf{r}_1 \right| = \\
 \left| \frac{-m_1 \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{r}_1}{m_2} \right| &= \frac{|(-m_1 - m_2) \mathbf{r}_1|}{m_2} = \frac{M |\mathbf{r}_1|}{m_2} \Rightarrow \\
 r &= \frac{M |\mathbf{r}_1|}{m_2}.
 \end{aligned}$$

De modo análogo encontramos que

$$r = \frac{M |\mathbf{r}_2|}{m_1}$$

sendo assim temos

$$r = \frac{M |\mathbf{r}_1|}{m_2} = \frac{M |\mathbf{r}_2|}{m_1}. \tag{7.17}$$

Relação de movimento entre as massas

Vamos agora estudar o movimento de uma massa com relação a outra, por exemplo, o movimento de m_2 com relação à m_1 . Para isso, primeiro vamos buscar por uma equação para r operando as equações (7.15) e (7.16) da seguinte forma:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -k^2 M \left(\frac{\mathbf{r}_2}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r^3} \right) \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -k^2 M \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r^3}.$$

Realizando as substituições $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ e $\mu = k^2 M$, temos que

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{7.18}$$

Lei das Áreas

Para dar sequência precisaremos retomar uma propriedade de derivação em produtos vetoriais.

Teorema 7.1. *Sejam \mathbf{F} e $\mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, deriváveis em A , então $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ também será derivável em A , de modo que:*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{G} + \frac{d\mathbf{G}}{dt} \times \mathbf{F}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(t+h) \times \mathbf{G}(t+h) - \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(t+h) \times \mathbf{G}(t+h) - \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t+h) + \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t+h) - \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(\mathbf{F}(t+h) - \mathbf{F}(t))}{h} \times \mathbf{G}(t+h) + \mathbf{F}(t) \times \frac{(\mathbf{G}(t+h) - \mathbf{G}(t))}{h} \right] &= \\ \frac{d\mathbf{F}}{dt}(t) \times \mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t) \times \frac{d\mathbf{G}}{dt}(t) & \\ \therefore \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{G} + \frac{d\mathbf{G}}{dt} \times \mathbf{F}. & \end{aligned}$$

□

A partir desse resultado podemos encontrar a lei das áreas partindo do produto vetorial de \mathbf{r} com a equação (7.18):

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r} \times \left(-k^2 M \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$$

como os vetores \mathbf{r} e $\left(\frac{-k^2 M}{r^3} \right) \mathbf{r}$ são colineares, temos que

$$\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0. \quad (7.19)$$

Utilizando o teorema 7.1 podemos escrever a equação (7.19) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \Leftrightarrow \\ \mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \end{aligned}$$

Pelo o resultado da equação (7.19), temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 0,$$

sendo assim, podemos concluir que existe um vetor constante \mathbf{a} , que não depende do tempo, que satisfaz a seguinte relação:

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}, \quad (7.20)$$

onde \mathbf{a} representa a velocidade areolar na forma vetorial, multiplicada por 2.

Equação do plano com origem no centro de massa

Vamos agora trabalhar com o sistema de coordenadas (x, y, z) de modo que sua origem se encontra no centro da massa de m_1 . Começaremos representando a equação (7.20) numa forma de 3 equações escalares:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = a_1; \quad y\dot{z} - z\dot{y} = a_2; \quad z\dot{x} - x\dot{z} = a_3, \quad (7.21)$$

de modo que a_1 , a_2 e a_3 representam as projeções de \mathbf{a} nos eixos ortogonais aos planos xy , yz e zx , respectivamente. Multiplicando as equações em (7.21) por x , y e z , respectivamente, e somando-as, obteremos o seguinte:

$$a_1z + a_2x + a_3y = 0. \quad (7.22)$$

A equação encontrada representa um plano que passa por m_1 . Sendo assim, pode-se afirmar que o movimento de um corpo com relação ao outro acontece em um mesmo plano o qual contém o centro de massa. Esse plano é determinado pelas constantes a_1 , a_2 e a_3 .

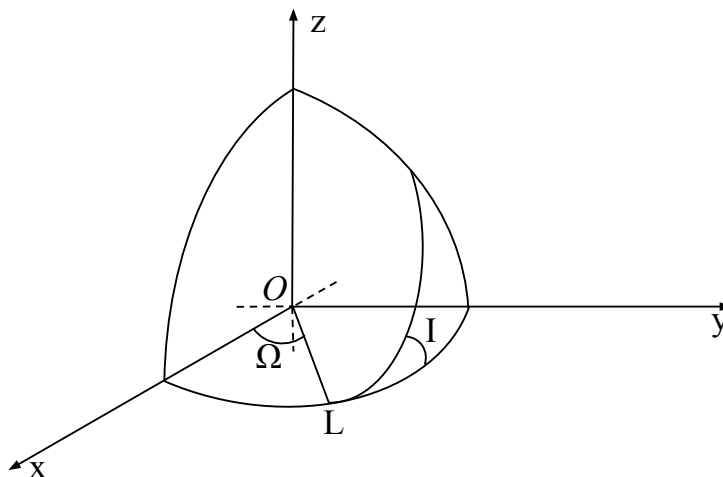


Figura 7.2: Plano de Movimento da Partícula no Espaço.

Vamos tomar como base a figura 7.2, [4] e representar esse plano com ângulos. Observando a figura, temos que Ω é o ângulo entre o eixo x positivo e o segmento OL , podendo variar de 0° à 360° , definindo o ponto onde a órbita da partícula se intersecta com o plano xy . O ângulo I representa a inclinação do plano da órbita com relação ao plano xy , podendo variar de 0° à 180° .

Definição 7.2. Chamaremos a norma do vetor \mathbf{a} de C_1 , ou seja:

$$a = C_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (7.23)$$

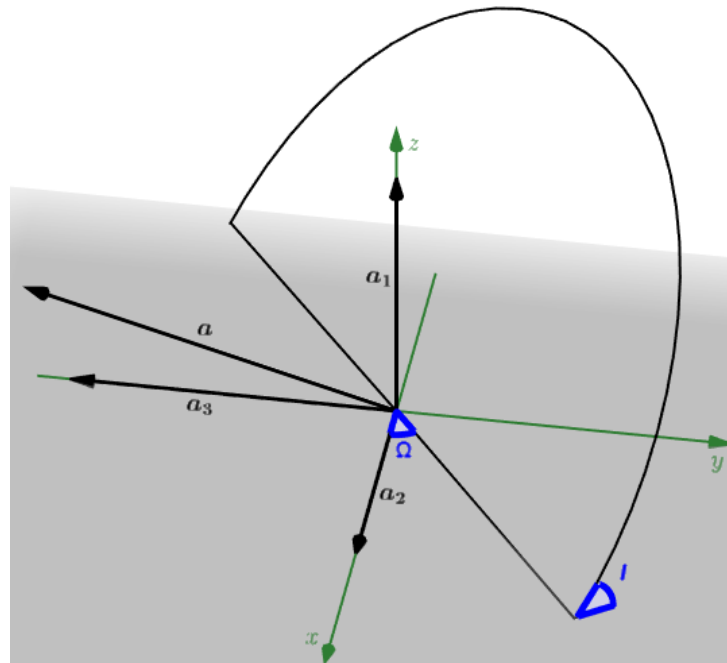


Figura 7.3: Projeções do vetor \mathbf{a} .

Como a_1 é a projeção de \mathbf{a} no eixo z e I representa o ângulo compreendido entre o plano da órbita e o plano xy , podemos observar a figura 7.3 segundo as projeções presentes na figura 7.4:

Sendo assim, a_1 pode ser descrito como:

$$a_1 = \pm C_1 \cos I. \quad (7.24)$$

Para encontrarmos a_2 , primeiro precisamos projetar o vetor \mathbf{a} no plano xy formando assim um triângulo retângulo no qual o ângulo superior interno é igual à I por ângulos alternos internos. Desse modo, podemos calcular a norma da projeção conforme a seguir:

$$a_{xy} = C_1 \sin I.$$

Agora basta projetar o vetor \mathbf{a}_{xy} no eixo x , obtendo a configuração da figura 7.5.

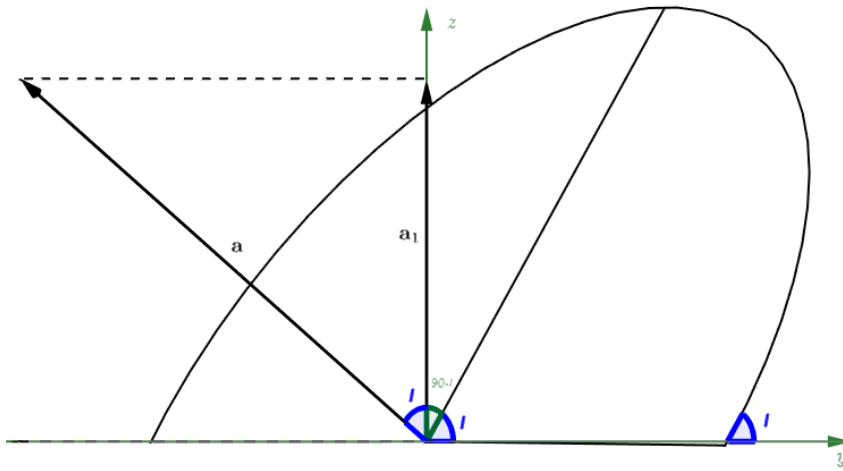


Figura 7.4: Projeção do vetor \mathbf{a} no eixo z .

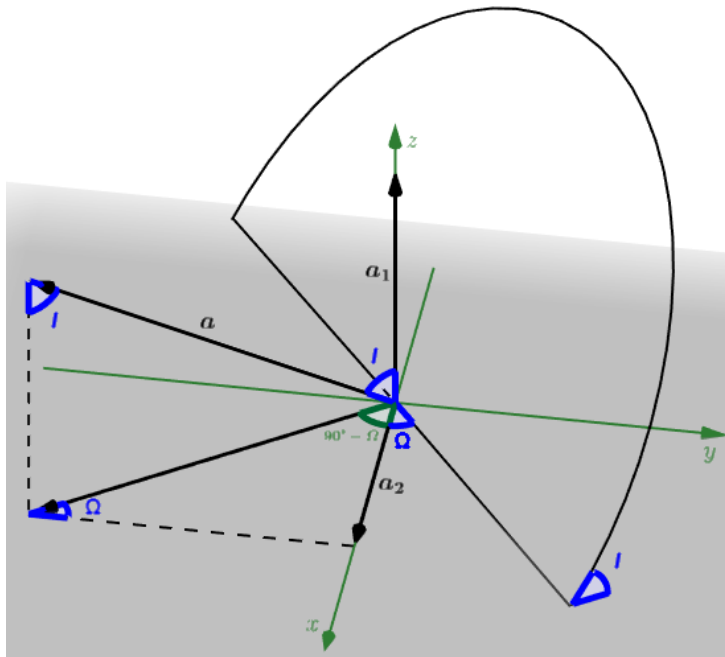


Figura 7.5: Projeção do vetor \mathbf{a} no eixo x .

Por fim, o valor de a_2 pode ser encontrado realizando a seguinte operação:

$$\sin \Omega = \frac{a_2}{C_1 \sin I} \Leftrightarrow a_2 = \pm C_1 \sin I \sin \Omega. \quad (7.25)$$

Buscando encontrar o valor de a_3 , projetaremos agora o vetor \mathbf{a}_{xy} no eixo y , conforme a figura 7.6 e realizaremos a seguinte operação:

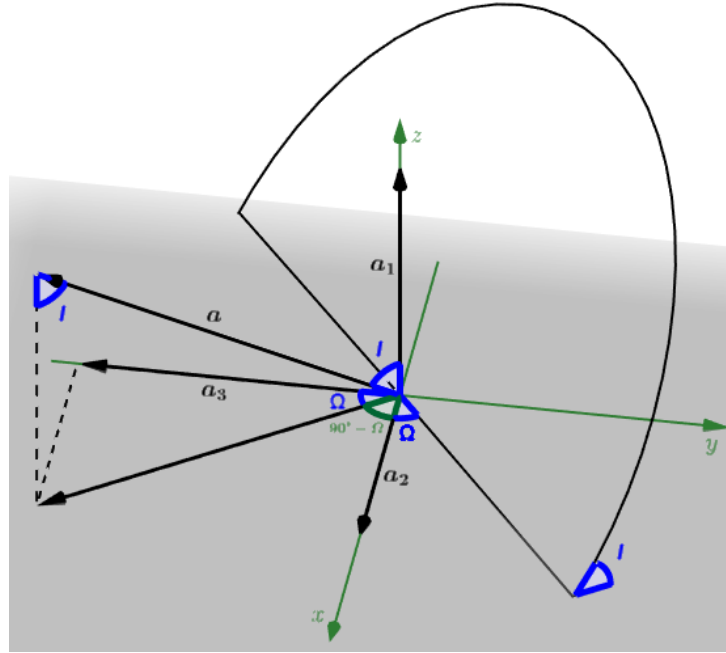


Figura 7.6: Projeção do vetor \mathbf{a} no eixo y .

$$\cos \Omega = \frac{a_3}{C_1 \sin I} \Leftrightarrow a_3 = \mp C_1 \sin I \cos \Omega. \quad (7.26)$$

Observando as equações encontradas, vemos que seus sinais superiores ou inferiores serão determinados de acordo com o valor de I , caso ele seja maior ou menor que 90° , respectivamente. Uma vez encontrados os ângulos I e Ω através das equações (7.24), (7.25) e (7.26) eles serão fixos, encontrando assim o plano da órbita.

Equação Vis Viva

Agora que já conhecemos a equação do plano da órbita, utilizaremos as coordenadas X e Y desse plano, de modo que a equação do movimento será dada por:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\mu \frac{X}{r^3} \quad (7.27)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -\mu \frac{Y}{r^3}. \quad (7.28)$$

Desta forma, reduziremos o número de EDOs de segunda ordem, visto que na equação (7.18) estávamos lidando com 3, devido ao fato de que \mathbf{r} é um vetor composto por 3 componentes. Vale ressaltar que, com esse processo, adicionamos mais duas constantes arbitrárias, que no caso serão I e Ω . Para seguir com o problema, vamos multiplicar a equação (7.27) por Y e a equação (7.28) por X e subtraí-las, ficando da seguinte forma:

$$X \frac{d^2 Y}{dt^2} - Y \frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad (7.29)$$

integrando temos:

$$X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} = C_1. \quad (7.30)$$

Obtendo assim a Velocidade Areolar, que escrita em coordenadas polares ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) - r \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) &= C_1 \Leftrightarrow \\ r^2 \dot{\theta} \cos^2 \theta + r \dot{r} \sin \theta \cos \theta - r \dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2 \dot{\theta} \sin^2 \theta &= C_1 \Leftrightarrow \\ r^2 \dot{\theta} &= C_1. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Vamos agora multiplicar a equação (7.27) por $2 \frac{dX}{dt}$ e a equação (7.28) por $2 \frac{dY}{dt}$. Somando-as ficaremos com:

$$2 \frac{d^2 X}{dt^2} \frac{dX}{dt} + 2 \frac{d^2 Y}{dt^2} \frac{dY}{dt} = -\frac{2\mu}{r^3} \left(X \frac{dX}{dt} + Y \frac{dY}{dt} \right)$$

Passando o lado direito para coordenadas polares temos:

$$-\frac{2\mu}{r^3} \left(X \frac{dX}{dt} + Y \frac{dY}{dt} \right) = -\frac{2\mu}{r^3} (r \cos \theta (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) + r \sin \theta (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta))$$

e após simplificação a equação fica

$$2 \frac{d^2 X}{dt^2} \frac{dX}{dt} + 2 \frac{d^2 Y}{dt^2} \frac{dY}{dt} = -\frac{2\mu}{r^2} \frac{dr}{dt}. \quad (7.32)$$

Para integrar a equação (7.32), integraremos cada parcela por partes, conforme as operações a seguir:

$$\int \frac{d^2 X}{dt^2} \frac{dX}{dt} = \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 - \int \frac{dX}{dt} \frac{d^2 X}{dt^2} \Leftrightarrow \int \frac{d^2 X}{dt^2} \frac{dX}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + C$$

$$\int \frac{d^2 Y}{dt^2} \frac{dY}{dt} = \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 - \int \frac{dY}{dt} \frac{d^2 Y}{dt^2} \Leftrightarrow \int \frac{d^2 Y}{dt^2} \frac{dY}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 + C$$

e temos também a integral

$$\int \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} dt = -\frac{1}{r} + C.$$

Reunindo os resultados temos

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = 2\frac{\mu}{r} + C_3. \quad (7.33)$$

Onde C_3 é a constante de integração, sendo assim, podemos simplificar o resultado da seguinte forma:

$$V^2 = 2\frac{\mu}{r} + C_3, \quad (7.34)$$

de modo que V é a velocidade da partícula no plano XY . Essa nova equação é chamada de **Vis Viva**.

Equação da Órbita no Espaço

Escrevendo a equação (7.33) na forma polar temos:

$$\begin{aligned} 2\frac{\mu}{r} + C_3 &= (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)^2 = \\ &= (\dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2\dot{r}r\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + (\dot{r}^2 \sin^2 \theta + 2\dot{r}r\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) = \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\ \therefore 2\frac{\mu}{r} + C_3 &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Como visto anteriormente, o raio r é uma função do ângulo $\theta(t)$, assim:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (7.36)$$

Reescrevemos a equação (7.35) da seguinte forma

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \right] = 2\frac{\mu}{r} + C_3 \quad (7.37)$$

e utilizando o resultado da equação (7.31)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C_1}{r^2}, \quad (7.38)$$

obteremos o seguinte:

$$\left(\frac{C_1}{r^2}\right)^2 \left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \right] = 2\frac{\mu}{r} + C_3 \quad (7.39)$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \frac{2\mu r^3}{C_1^2} + \frac{C_3 r^4}{C_1^2} \quad (7.40)$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu r^3}{C_1^2} + \frac{C_3 r^4}{C_1^2} - r^2 \quad (7.41)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{2\mu r^3}{C_1^2} + \frac{C_3 r^4}{C_1^2} - r^2}. \quad (7.42)$$

Prosseguiremos o desenvolvimento das contas considerando apenas a raiz positiva. Se considerarmos a raiz negativa, isto modificará somente a definição da constante C_4 definida mais adiante.

Agora vamos manipular o resultado encontrado

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \sqrt{\frac{2\mu r^3}{C_1^2} + \frac{C_3 r^4}{C_1^2} - \frac{C_1^2 r^2}{C_1^2}} = \sqrt{\frac{2\mu r^3 + C_3 r^4 - C_1^2 r^2}{C_1^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\left(\frac{2\mu}{r} + C_3 - \frac{C_1^2}{r^2}\right)r^4}}{C_1^2} = \frac{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + C_3 - \frac{C_1^2}{r^2}}}{C_1}. \end{aligned}$$

Como posteriormente iremos integrar a equação a cima, realizaremos as seguintes operações:

$$d\theta = \frac{C_1 dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{r} + C_3 - \frac{C_1^2}{r^2}}}. \quad (7.43)$$

Substituindo

$$q = \frac{1}{r}, \quad dq = -\frac{1}{r^2} dr \quad (7.44)$$

temos

$$d\theta = \frac{-C_1 dq}{\sqrt{2\mu q + C_3 - C_1^2 q^2}}, \quad (7.45)$$

por fim, realizaremos o completamento de quadrados dentro da raiz presente no denominador,

$$d\theta = \frac{-C_1 dq}{\sqrt{\frac{\mu^2}{C_1^2} + C_3 - \left(\frac{\mu}{C_1} - C_1 q\right)^2}}. \quad (7.46)$$

Em busca de simplificar a equação anterior, definiremos o seguinte:

$$B^2 = C_3 + \frac{\mu^2}{C_1^2} \quad (7.47)$$

$$-u = \frac{\mu}{C_1} - C_1 q \quad (7.48)$$

logo,

$$d\theta = \frac{-du}{\sqrt{B^2 - u^2}}. \quad (7.49)$$

Integrando a equação 7.49 temos:

$$\theta = \int \frac{-du}{\sqrt{B^2 - u^2}} = \int \frac{-du}{B\sqrt{1 - \frac{u^2}{B^2}}} = \arccos \frac{u}{B} + C_4,$$

ou seja,

$$\theta = \arccos \frac{u}{B} + C_4. \quad (7.50)$$

Feito isso, agora voltaremos para a variável r . Supondo $0 \leq \frac{u}{B} < \pi$, realizaremos as seguintes operações:

$$\begin{aligned} u = B \cos(\theta - C_4) &\Leftrightarrow -\frac{\mu}{C_1} + C_1 q = B \cos(\theta - C_4) \Leftrightarrow \\ C_1 \frac{1}{r} = B \cos(\theta - C_4) + \frac{\mu}{C_1} &\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{B}{C_1} \cos(\theta - C_4) + \frac{\mu}{C_1^2} \Leftrightarrow \\ r = \frac{1}{\frac{\mu}{C_1^2} + \frac{B}{C_1} \cos(\theta - C_4)} &\Leftrightarrow r = \frac{C_1}{\frac{\mu}{C_1} + \sqrt{C_3 + \frac{\mu^2}{C_1^2}} \cos(\theta - C_4)}. \end{aligned}$$

Rearranjando a equação anterior encontraremos o seguinte,

$$r = \frac{\frac{C_1^2}{\mu}}{1 + \frac{C_1}{\mu} \sqrt{C_3 + \frac{\mu^2}{C_1^2}} \cos(\theta - C_4)}, \quad (7.51)$$

que pode ser visto como a equação polar das cônicas,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \omega)}, \quad (7.52)$$

onde:

$$p = \frac{C_1^2}{\mu}, \quad (7.53)$$

$$C_1 = \sqrt{\mu p}, \quad (7.54)$$

$$e = \frac{C_1}{\mu} \sqrt{C_3 + \frac{\mu^2}{C_1^2}} \Leftrightarrow e^2 = 1 + \frac{C_1^2 C_3}{\mu^2}, \quad (7.55)$$

$$C_3 = \frac{-\mu(1 + e^2)}{p}, \quad (7.56)$$

$$\omega = C_4 - \pi. \quad (7.57)$$

A imagem 7.7 é uma representação de tudo o que construímos, onde:

Ω : longitude do nó ascendente;

I : inclinação do plano da órbita;

ω : longitude do pericentro, medido a partir do nó e define a orientação da órbita.

Sendo que o nó ascendente é o ponto onde a órbita da partícula intersecciona o

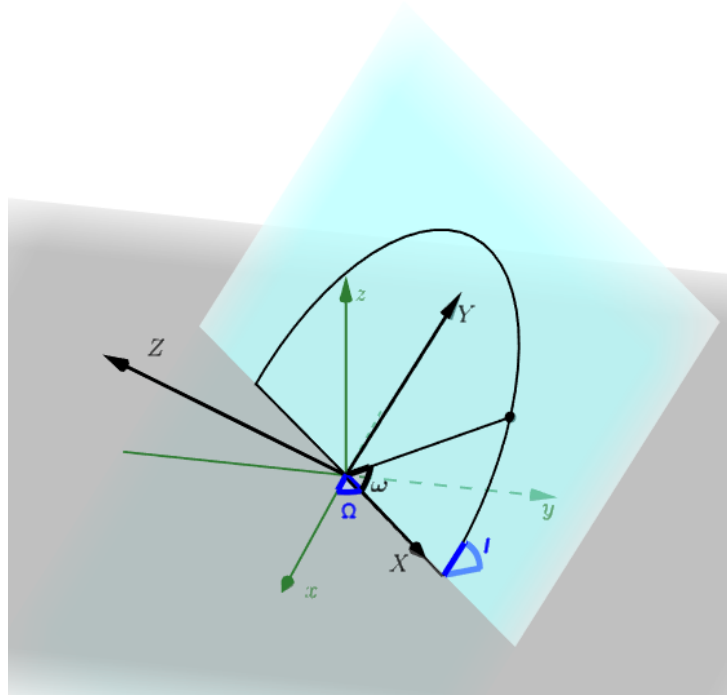


Figura 7.7: Órbita no Espaço.

plano base, a longitude do nó ascendente representa a rotação do plano da órbita com relação ao eixo z e por fim a longitude do pericentro, representa o ângulo de rotação da partícula com relação ao nó ascendente.

Concluimos então, observando que o problema mais geral da dinâmica de dois corpos pode ser resumido a uma cônica, como Newton havia proposto e como Kepler havia observado empiricamente como órbitas elípticas.

Capítulo 8

Conclusão

Este trabalho foi dedicado a solução do problema de dois corpos, onde demos início estudando a Lei das Áreas desenvolvida por Kepler, e que posteriormente a relacionamos com o desenvolvimento da equação diferencial da órbita, encontrando então uma relação, onde dada uma curva, podemos encontrar a força associada a ela em função do tempo e, dada a força, podemos encontrar a curva gerada por ela.

Para prosseguir foi desenvolvida a partir da equação cartesiana da elipse, a equação polar das cônicas, cuja a qual, é a chave para o desenvolvimento do problema de dois corpos. É interessante observar como tudo se desenvolveu num contexto histórico, Kepler observou empiricamente, que as órbitas dos planetas, teriam formas elípticas com o Sol em um dos focos, e quando Newton realizou a demonstração pedida por Halley, mostrou que as órbitas na verdade poderiam para além da elipse, serem hipérbolas ou parábolas, e mais do que isso, acabou desenvolvendo a Lei da Gravitação Universal, que fora demonstrada neste presente trabalho logo após o estudo das cônicas, combinando a equação diferencial da órbita com a equação polar da elipse.

O trabalho começa a tomar forma, a partir da integração da Lei da Gravitação, que já nos mostra uma equação polar das cônicas, combinada com a força encontrada por Newton, que varia com o inverso do quadrado da distância.

Por fim, chegamos ao problema central deste trabalho, que mescla os resultados obtidos anteriormente partindo da segunda Lei de Newton e substituindo a força da Lei da Gravitação. Isso nos trouxe uma relação para o movimento do centro de massa com relação ao tempo, e ao realizar mudanças de referencial até chegarmos a um em que uma das massas é o centro do sistema, estudamos o movimento de uma massa com relação a outra e encontramos a equação do nosso plano orbital, nos levando então a reta final do problema, onde chegamos a equação polar da órbita no espaço, contendo todas as constantes que são necessárias para determinar a trajetória da partícula, dentro das condições colocadas. E assim finalizamos nosso problema proposto nesse trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo Volume 2*, Editora LTC, 5ª Edição, 2001.
- [2] Mourão, R. R. F. *Kepler: A Descoberta das Leis do Movimento Planetário*, Coleção Imortais da Ciência, Editora Odysseus, 1ª Edição, 2003.
- [3] Valadares, E. C. *Newton: A Órbita da Terra em um Copo D'Água*, Coleção Imortais da Ciência, Editora Odysseus, 1ª Edição, 2003.
- [4] Vieira Neto, E. *Introdução à Mecânica Celeste*, XXIV Escola de Verão em Dinâmica Orbital e Planetologia.