



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



MATHEUS HENRIQUE FERREIRA DE MELO DOS SANTOS

GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES

SÃO CARLOS – SP
2024

MATHEUS HENRIQUE FERREIRA DE MELO DOS SANTOS

GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Wladimir Seixas

SÃO CARLOS – SP
2024

RESUMO

Esta monografia teve como objetivo principal estudar as geodésicas em superfícies de rotação. Foram definidos os conceitos de derivada covariante, transporte paralelo, curvas geodésicas, valor algébrico da derivada covariante e curvatura geodésica. Explicitamos o sistema de equações diferenciais que determinam uma geodésica em uma superfície e calculamos as geodésicas para superfícies de rotação geral, aplicando esses resultados ao exemplo específico do toro através da relação de Clairaut.

Palavras-chave: Geometria Diferencial. Geodésica. Superfícies de rotação. Parametrização de Clairaut. Relação de Clairaut.

ABSTRACT

The main objective of this monograph was to study geodesics on surfaces of revolution. We defined the concepts of covariant derivative, parallel transport, geodesic curves, the algebraic value of the covariant derivative, and geodesic curvature. We detailed the system of differential equations that determine a geodesic on a surface and calculated the geodesics for general surfaces of revolution, applying these results to the specific example of the torus through the Clairaut relation.

Keywords: Differential Geometry. Geodesics. Surfaces of revolution. Clairaut parametrization. Clairaut relation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Aplicação diferenciável.	8
Figura 2 – Plano tangente T_pS	8
Figura 3 – Plano tangente no ponto $p = (1, 2)$ do Exemplo 2.1.	10
Figura 4 – Exemplos de campos de vetores tangentes.	10
Figura 5 – Derivada covariante.	11
Figura 6 – Campo de vetores tangentes restrito à curva em uma superfície.	15
Figura 7 – Campo tangente ao longo de uma curva.	15
Figura 8 – Exemplo de uma derivada covariante.	16
Figura 9 – Campo paralelo sobre a esfera S^2	17
Figura 10 – Transporte paralelo na esfera.	18
Figura 11 – Curvaturas principais no parabolóide hiperbólico.	22
Figura 12 – Campo tangente paralelo no plano Π	23
Figura 13 – Geodésica no hiperboloide.	24
Figura 14 – Geodésicas e paralelos em S^2	25
Figura 15 – Geodésica no cilindro \mathcal{C}	28
Figura 16 – Duas geodésicas no cilindro \mathcal{C}	29
Figura 17 – Fita de Möbius.	30
Figura 18 – Valor algébrico da derivada covariante.	32
Figura 19 – Relação entre curvaturas.	34
Figura 20 – Curvatura geodésica de C na esfera S^2	35
Figura 21 – Exemplos de geodésicas no parabolóide.	46
Figura 22 – Geodésicas na superfície de revolução.	49
Figura 23 – Duas geodésicas com $c(\gamma)$ distintos.	56
Figura 24 – Interpretação física da relação de Clairaut.	57
Figura 25 – Relação de Clairaut no hiperboloide.	59
Figura 26 – Curvas de barreira.	61
Figura 27 – Curva γ passando por p_0	61
Figura 28 – Rotas das geodésicas no parabolóide.	64
Figura 29 – Geodésicas no Disco de Poincaré.	66
Figura 30 – Classificação de geodésicas no toro.	68

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
2	DERIVADA COVARIANTE E CAMPO PARALELO	7
2.1	SUPERFÍCIE REGULAR E PLANO TANGENTE	7
2.2	CAMPO DE VETORES E DERIVADA COVARIANTE	10
2.3	DERIVADA COVARIANTE RESTRITA À CURVA	14
2.4	CAMPO PARALELO	17
2.5	TRANSPORTE PARALELO	18
3	GEODÉSICAS	20
3.1	COMPRIMENTO DE ARCO E CURVATURA NORMAL	20
3.2	CURVAS GEODÉSICAS	22
3.3	ORIENTABILIDADE E CURVATURA GEODÉSICA	29
3.4	EXPRESSÃO DO VALOR ALGÉBRICO	35
3.5	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DAS GEODÉSICAS	40
4	APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	43
4.1	PARABOLOIDES PARAMETRIZADOS	43
4.2	SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO	47
5	RELAÇÃO E INTEGRAL DE CLAIRAUT	53
5.1	PARAMETRIZAÇÃO DE CLAIRAUT	53
5.2	APLICAÇÕES DA RELAÇÃO DE CLAIRAUT	58
5.3	PLANO HIPERBÓLICO E TORO	64
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
	REFERÊNCIAS	70
	APÊNDICE A CÓDIGO DO OCTAVE	71

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial é o estudo de objetos geométricos utilizando-se das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. Habitualmente, curvas e superfícies são objetos considerados intuitivamente compreensíveis. Assim, muitas das questões que podem ser levantadas sobre estes objetos são tidas como evidentes. Dessa forma, a Geometria Diferencial preocupa-se principalmente com a formulação matemática dessas questões e usando as técnicas do cálculo diferencial, procura solucioná-las.

Com isto em mente, para o plano euclidiano \mathbb{E}^2 , se desejamos ir de um ponto a outro a trajetória mais curta será um segmento de reta. Um segmento de reta pode ser caracterizado de duas maneiras diferentes no plano: é o caminho mais curto entre dois pontos; é a trajetória que possui curvatura nula à medida que viajamos ao longo dela.

Isto posto, transferindo as ideias do plano para uma superfície regular em \mathbb{E}^3 , as curvas geodésicas irão desempenhar o papel das linhas ou segmentos de retas. Ou seja, são trajetórias descritas na superfície que minimizam o comprimento de arco dentre todas as curvas que unem dois pontos na superfície.

Esta monografia tem como objetivo o estudo de geodésicas em superfícies de rotação e está dividida nos seguintes capítulos. No Capítulo 2, definiremos dois conceitos essenciais para o estudo das geodésicas: derivada covariante e transporte paralelo, necessários para o estudo do comportamento de curvas regulares em uma superfície.

No Capítulo 3, definiremos o conceito de uma curva geodésica, o valor algébrico da derivada covariante e a noção de curvatura geodésica. Ao final, explicitaremos a maneira usual para se calcular as geodésicas de uma superfície. Isso será dado por um sistema de equações diferenciais. No Capítulo 4, utilizaremos dos resultados enunciados nos capítulos anteriores para a resolução de exemplos. Em particular, calcularemos as geodésicas em superfícies de rotação.

Finalmente, no Capítulo 5, definiremos o conceito da parametrização de Clairaut e, a partir disto, demonstraremos a relação de Clairaut. Ao final, calcularemos as geodésicas na superfície de rotação toro utilizando dos resultados neste capítulo. É importante ressaltar que todas as figuras elaboradas pelo autor foram criadas utilizando os softwares de simulação GeoGebra e Octave. Mais detalhes sobre o código utilizado para o Octave está no Apêndice A.

Utilizamos como referências principais as obras *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* de Manfredo Perdigão do Carmo (2005), *Introdução à Geometria Diferencial* de Ketten Tenenblat (2008) e *Elementary Differential Geometry* de Barrett O'Neill (2006). As demais obras utilizadas são apresentadas no final da monografia.

2 DERIVADA COVARIANTE E CAMPO PARALELO

Neste capítulo, definiremos dois conceitos essenciais para o estudo das geodésicas: derivada covariante e transporte paralelo, necessários para o estudo do comportamento de curvas regulares em uma superfície. Em vista disto, o principal objetivo desta seção é servir como base contextual e conceitual para os resultados propostos em capítulos subsequentes.

2.1 SUPERFÍCIE REGULAR E PLANO TANGENTE

Consideraremos o espaço euclidiano \mathbb{R}^n com sua estrutura usual de espaço vetorial e topológica, permitindo-nos utilizar os métodos do Cálculo Diferencial e Integral.

Definição 2.1 (Superfície regular (Tenenblat, 2008, p. 109)). Uma *superfície parametrizada regular* é toda aplicação $X : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde A é um aberto de \mathbb{R}^2 tal que:

- a) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- b) Para todo $p = (u_0, v_0) \in A$, a diferencial de X em p , $dX_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

Denotamos por *superfície regular* S o subconjunto de \mathbb{R}^3 constituído pelos pontos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in A,$$

onde as variáveis u e v são denominadas os *parâmetros da superfície* e $x, y, z : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, são as *funções coordenadas*. Pela Definição 2.1, a aplicação X é dita *diferenciável* de classe C^∞ quando as funções x, y, z possuem derivadas parciais de todas as ordens contínuas.

Além disso, a condição **b)** da Definição 2.1 garante a existência do *plano tangente* em cada ponto da superfície. De fato, sejam $\{e_1, e_2\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ as bases canônicas de \mathbb{R}^2 com coordenadas (u, v) , e \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, z) , respectivamente. Então, para cada ponto $p = (u_0, v_0) \in A$ temos

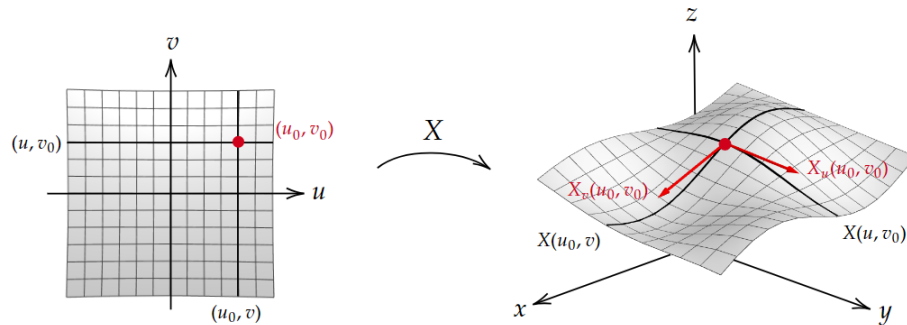
$$dX_p(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) = X_u(u_0, v_0),$$

$$dX_p(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = X_v(u_0, v_0).$$

Assim, os vetores $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$ são *linearmente independentes* uma vez que dX_p é injetora. Em outras palavras, obtemos $N(u_0, v_0) = X_u(u_0, v_0) \wedge X_v(u_0, v_0) \neq 0$.

Fixado um ponto $p = (u_0, v_0) \in A$, as curvas $u \mapsto X(u, v_0)$ e $v \mapsto X(u_0, v)$ são chamadas *curvas coordenadas* de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são *vetores tangentes* às *curvas coordenadas* em (u_0, v_0) (Veja Figura 1).

Figura 1 – Aplicação diferenciável.



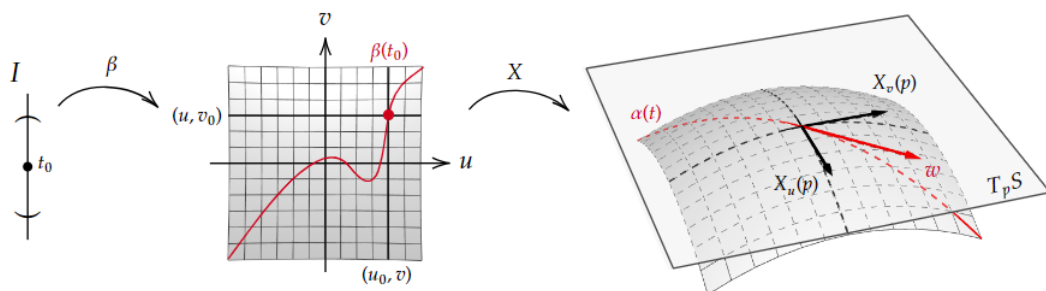
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.2 (Curva no plano). Uma *curva parametrizada diferenciável no plano* é uma aplicação $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $t \in \mathbb{R}$, com $u = u(t)$ e $v = v(t)$ funções diferenciáveis de classe C^∞ .

Definição 2.3 (Vetor tangente (Tenenblat, 2008, p. 131)). Seja S uma superfície regular. Dizemos que $w \in \mathbb{R}^3$ é um *vetor tangente* à superfície S em $p = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = (X \circ \beta)(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável cujo traço está contido em S para alguma curva $\beta = \beta(t)$ diferenciável no plano tal que $\beta(t_0) = (u_0, v_0)$.

Definição 2.4 (Plano tangente (Tenenblat, 2008, p. 132)). O *plano tangente* à S em (u_0, v_0) é o conjunto de todos os vetores tangentes à S em $p = (u_0, v_0)$, denotado por $T_p S$.

Podemos caracterizar o plano tangente $T_p S$ como o subespaço vetorial $dX_p(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$. Observamos que ambos os conceitos são definidos no ponto $p = (u_0, v_0) \in A$ e não no ponto $q = X(u_0, v_0) \in S$, pois a superfície parametrizada pode ter auto-interseção. Neste trabalho, superfícies regulares serão a base para nosso estudo, logo tal tecnicidade não será de grande importância. Isto posto, observamos que $T_p S$ é o plano de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $X_u(p)$ e $X_v(p)$ (Ver Figura 2).

Figura 2 – Plano tangente $T_p S$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato, como $p = (u_0, v_0) = \beta(t_0)$, se $w \in T_p S$ então,

$$\begin{aligned} w = \alpha'(t_0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(t) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) \Big|_{t=t_0} \\ &= X_u(u(t_0), v(t_0)) u'(t_0) + X_v(u(t_0), v(t_0)) v'(t_0) \end{aligned}$$

ou

$$w = aX_u(p) + bX_v(p), \text{ com } a = u'(t_0), \text{ e } b = v'(t_0). \quad (2.1)$$

Ademais, seja $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização da superfície S . Fazendo a identificação do plano tangente $T_p S = dX_p(\mathbb{R}^2)$, temos que $\{X_u(p), X_v(p)\}$ é a base de $T_p S$ associada à X . Assim, para os vetores $w \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ e $v = \beta'(t_0) \in \mathbb{R}^2$, temos que $w = dX_p(v)$.

Definição 2.5 (Vetor normal à superfície (Tenenblat, 2008, p. 134)). Se S é uma superfície e $p = (u_0, v_0) \in A$, dizemos que um vetor $n \in \mathbb{R}^3$ é normal à S em p se é ortogonal à $T_p S$.

Exemplo 2.1. Seja S a superfície dada pela parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (u^2 + v^2, 2uv, u^3)$. Para determinar o domínio $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que S é regular, temos os vetores $X_u(u, v) = (2u, 2v, 3u^2)$ e $X_v(u, v) = (2v, 2u, 0)$ tangentes às curvas coordenadas. Assim, o vetor $N(u, v) = (-6u^3, 6u^2v, 4u^2 - 4v^2) \neq 0$ para os parâmetros $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Logo, S é regular no domínio $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Consideremos o ponto $q = (5, 4, 1) \in S$ e calculemos o plano tangente $T_p S$. Como $u^2 + v^2 = 5$, $2uv = 4$ e $u^3 = 1$, segue que $u = 1$ e $v = 2$.

Consideremos agora o ponto $p = (1, 2)$. Desta forma, $X_u(p) = (2, 4, 3)$ e $X_v(p) = (4, 2, 0)$. O vetor normal é dado por $N(p) = (-6, 12, -12)$. Ademais, como é necessário apenas a direção do vetor normal ao plano para determinar um plano, consideremos $n = (-1, 2, -2)$. Logo,

$$\langle (-1, 2, -2), (x, y, z) \rangle = d \implies -x + 2y - 2z = d, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (2.2)$$

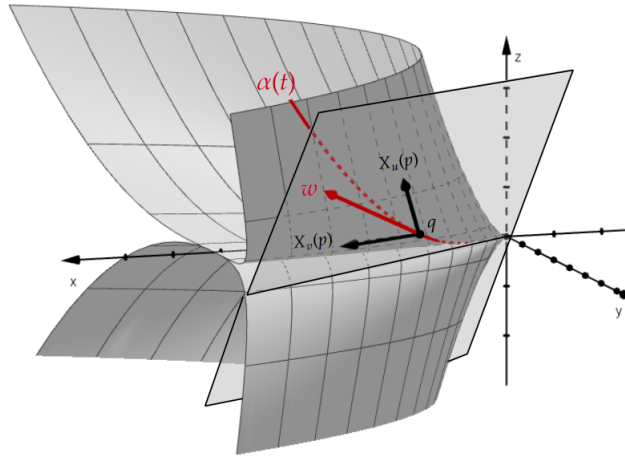
é a equação geral do plano. Aplicando o ponto q na Equação (2.2), segue que $d = 1$. Logo, o plano $T_p S$ é dado por $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Finalmente, consideremos a curva diferenciável:

$$\alpha(t) = X(t+1, t+2) = ((t+1)^2 + (t+2)^2, 2(t+1)(t+2), (t+1)^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\beta(t) = (t+1, t+2)$ é tal que $\beta(0) = p$ e $u'(0) = v'(0) = 1$. Assim, para um vetor $w \in T_p S$, $w = u'(0)X_u(p) + v'(0)X_v(p) = (2, 4, 3) + (4, 2, 0) = (6, 6, 3)$ (Veja a Figura 3).

Figura 3 – Plano tangente no ponto $p = (1, 2)$ do Exemplo 2.1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

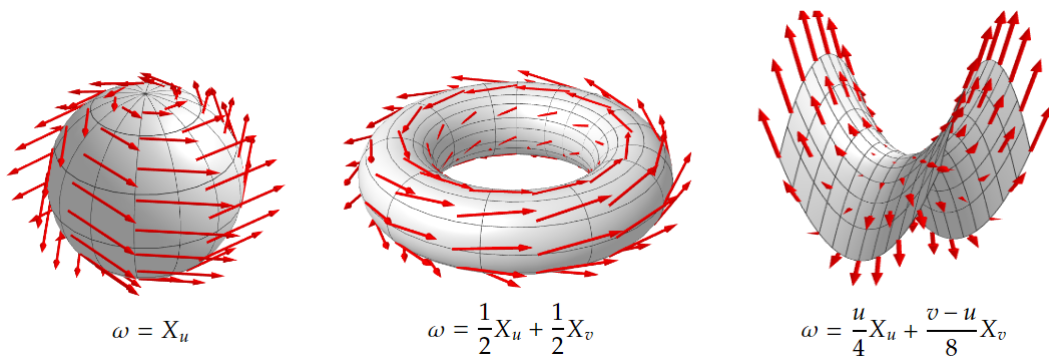
2.2 CAMPO DE VETORES E DERIVADA COVARIANTE

Definição 2.6 (Campo de vetores tangentes (do Carmo, 2005, p. 214)). Um *campo de vetores tangentes* ω em um aberto $U \subset S$ é uma correspondência que associa a cada $q = X(u_0, v_0) \in U$ um vetor $\omega(q) \in T_p S$. O campo ω é dito *diferenciável em q* se para alguma parametrização $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S em q , as funções $a, b : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$\omega(u, v) = (\omega \circ X)(u, v) = a(u, v) X_u(u, v) + b(u, v) X_v(u, v), \quad (u, v) \in A, \quad (2.3)$$

são funções diferenciáveis em q . Além disso, o campo de vetores $\omega(u, v)$ na Equação (2.3) é dito *diferenciável em U* se é diferenciável para todo ponto $X(p) = q \in U$, $p = (u_0, v_0) \in A$ (Ver Figura 4).

Figura 4 – Exemplos de campos de vetores tangentes.



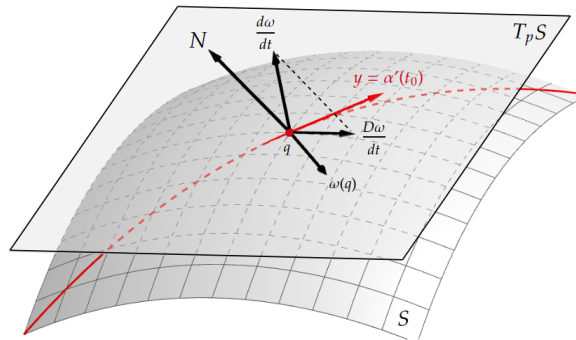
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.7 (Derivada covariante (do Carmo, 2005, p. 285)). Sejam $X : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma superfície regular S , $\omega(u, v)$ um campo diferenciável de vetores tangentes no conjunto aberto $U \subset S$ e um vetor $y \in T_p S$ com $X(p) = q$, $p = (u_0, v_0) \in A$. Consideremos a curva parametrizada $\alpha(t) = (X \circ \beta)(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\alpha(t_0) = (X \circ \beta)(t_0) = q, \quad \alpha'(t_0) = y,$$

e seja $\omega(t)$ a restrição de $\omega(u, v)$ à curva $\alpha(t)$. O vetor obtido pela projeção de $(d\omega/dt)(t_0)$ sobre o plano $T_p S$ é denominado *derivada covariante em p de $\omega(t)$ em relação à y* . Esta derivada covariante é denotada por $(D\omega/dt)(t_0)$ ou $(D_y\omega)(p)$ (Ver Figura 5).

Figura 5 – Derivada covariante.



Fonte: Elaborada pelo autor baseada em do Carmo (2005, p. 286).

Observamos que a Definição 2.7 faz o uso do vetor normal N à superfície S para o cálculo do vetor $(d\omega/dt)(t_0)$. No entanto, a derivada covariante $(D\omega/dt)(t_0)$ em si não depende de N e da curva $\alpha(t)$ escolhida, sendo um conceito da geometria intrínseca da superfície S , ou seja, depende apenas da *primeira forma fundamental*.

Definição 2.8 (Primeira forma fundamental (Tenenblat, 2008, p. 138)). Seja $X : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular S . Para todo $p = (u_0, v_0) \in A$, a aplicação:

$$I_p : T_p S \longrightarrow \mathbb{R} \\ w \longmapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2,$$

é denominada a *primeira forma fundamental* de X em p .

A primeira forma I_p permite calcularmos medidas sobre a superfície, como comprimento de curvas, ângulos de vetores e áreas de regiões, *intrinsecamente*, isto é, sem a necessidade de fazermos menção ao espaço \mathbb{R}^3 onde a superfície S está mergulhada. Isto posto, consideremos S dada por $X(u, v)$ e um ponto $p = (u_0, v_0) \in A$. Então, pela Equação (2.1), um vetor $w \in T_p S$ é da forma:

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0), \quad (u_0, v_0) \in A, \quad (2.4)$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Logo, considerando $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$, temos:

$$I_p(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0), \quad (2.5)$$

onde as funções $E, F, G : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis de classe C^∞ denominadas *coeficientes da primeira forma fundamental*. Dizemos que a parametrização $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície S é *ortogonal* se $F = 0$. Observamos ainda que:

$$|X_u \wedge X_v|^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = EG - F^2 > 0. \quad (2.6)$$

Mostremos que a derivada covariante da Definição 2.7 é um *conceito geométrico intrínseco*. Para isso, obteremos a expressão que determina $(D\omega/dt)(t)$ em termos da parametrização $X(u, v)$ em p . Consideremos a curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in \mathbb{R}$, contida em S . Seja:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= (\omega \circ \alpha)(t) \\ &= a(u(t), v(t)) X_u(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) X_v(u(t), v(t)) \\ &= a(t) X_u(t) + b(t) X_v(t), \end{aligned}$$

a expressão do campo diferenciável $\omega(t)$ na parametrização $X(u, v)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}(a(t) X_u(t) + b(t) X_v(t)) && \text{(definição do campo de vetores)} \\ &= \frac{d}{dt}(a(t) X_u(t)) + \frac{d}{dt}(b(t) X_v(t)). && \text{(derivada da soma)} \end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia obtemos a expressão:

$$\frac{d\omega}{dt}(t) = a' X_u + a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b' X_v + b(X_{vu}u' + X_{vv}v'), \quad (2.7)$$

onde $'$ denota a derivação em relação à variável $t \in \mathbb{R}$. Ademais, podemos expressar as derivadas parciais X_{uu} , X_{uv} , X_{vu} e X_{vv} em termos da base $\{X_u(u, v), X_v(u, v), N(u, v)\}$, sendo a aplicação $N : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o vetor unitário normal à superfície S dado por:

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(u, v), \quad \text{para todo } (u, v) \in A,$$

é denominada *aplicação normal de Gauss*. Assim,

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, & X_{uv}(u, v) &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\ X_{vu}(u, v) &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, & X_{vv}(u, v) &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\ N_u(u, v) &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, & N_v(u, v) &= a_{12} X_u + a_{22} X_v, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ são chamados *símbolos de Christoffel* de S na parametri-

zação $X : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Por outro lado, considerando a positividade da Equação (2.6) e o produto interno de cada uma das Equações (2.8) com os vetores $X_u(u, v)$ e $X_v(u, v)$, obtemos as seguintes relações entre os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental (Tenenblat, 2008, p. 199):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1(u, v) &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2(u, v) &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1(u, v) &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2(u, v) &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1(u, v) &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2(u, v) &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Uma vez que $X_{uv} = X_{vu}$, então $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. Assim, substituindo as relações obtidas nas Equações (2.8) e (2.9) na Equação (2.7) segue que:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt}(t) &= a'X_u + b'X_v + a(\Gamma_{11}^1X_uu' + \Gamma_{11}^2X_vu' + L_1Nu' + \Gamma_{12}^1X_uv' + \Gamma_{12}^2X_vv' + L_2Nv') \\ &\quad + b(\Gamma_{12}^1X_uu' + \Gamma_{12}^2X_vu' + L_2Nu' + \Gamma_{22}^1X_uv' + \Gamma_{22}^2X_vv' + L_3Nv') \\ &= X_u(a' + \Gamma_{11}^1au' + \Gamma_{12}^1av' + \Gamma_{12}^1bu' + \Gamma_{22}^1bv') \\ &\quad + X_v(b' + \Gamma_{11}^2au' + \Gamma_{12}^2av' + \Gamma_{12}^2bu' + \Gamma_{22}^2bv') + N(aL_1u' + aL_2v' + bL_2u' + bL_3v'). \end{aligned}$$

Uma vez que a derivada covariante $(D\omega/dt)(t)$ é a projeção do vetor $(d\omega/dt)(t)$ no plano tangente, utilizando as Equações (2.8) e desprezando a componente normal, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{dt}(t) &= X_u(t)(a'(t) + \Gamma_{11}^1a(t)u'(t) + \Gamma_{12}^1a(t)v'(t) + \Gamma_{12}^1b(t)u'(t) + \Gamma_{22}^1b(t)v'(t)) \\ &\quad + X_v(t)(b'(t) + \Gamma_{11}^2a(t)u'(t) + \Gamma_{12}^2a(t)v'(t) + \Gamma_{12}^2b(t)u'(t) + \Gamma_{22}^2b(t)v'(t)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

A Equação (2.10) mostra que $(D\omega/dt)(t_0)$ depende apenas do vetor $(u'(t_0), v'(t_0)) = y$ na base $\{X_u(u, v), X_v(u, v)\}$ e não da curva $\alpha(t)$. Além disso, a superfície S aparece na equação através dos símbolos de Christoffel, isto é, através da primeira forma fundamental. Logo, a derivada covariante é um conceito da geometria intrínseca que independe da escolha da curva.

Exemplo 2.2 (Derivada covariante no plano). Seja Π um plano que passa pelo ponto $p \in \mathbb{R}^3$ e possui vetores $w_1 = (a_1, a_2, a_2)$ e $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ unitários e ortogonais. A parametrização de Π é dada por $X(u, v) = p + w_1u + w_2v$. Assim, $X_u(u, v) = w_1$ e $X_v(u, v) = w_2$. Portanto:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1. \end{aligned}$$

Segue que $\Gamma_{ij}^k = 0$, para todo $i, j, k = 1, 2$. Logo, substituindo os símbolos de Christoffel na

Equação (2.10) obtemos que a derivada covariante de Π é dada por:

$$\frac{D\omega}{dt}(t) = a'(t)X_u(t) + b'(t)X_v(t), \quad t \in I.$$

Observamos que a derivada covariante coincide com a derivada usual de vetores no plano (isto também pode ser visto geometricamente a partir da Definição 2.7). A derivada covariante é, portanto, uma *generalização da derivada usual de vetores no plano*.

2.3 DERIVADA COVARIANTE RESTRITA À CURVA

Definição 2.9 (Curva parametrizada (do Carmo, 2005, p. 287)). Uma *curva parametrizada* $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ é a restrição ao intervalo $[0, l]$ de uma aplicação diferenciável de $(0 - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, na superfície S . Se $\alpha(0) = p$ e $\alpha(l) = q$, dizemos que $\alpha(t)$ *liga* p a q . Ademais, $\alpha(t)$ é dita *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, l]$.

A menos dito o contrário, denotaremos o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ por $I = [0, l]$ sempre que a especificação do ponto final l for desnecessária.

Definição 2.10 (Campo de vetores à curva (do Carmo, 2005, p. 287)). Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S . Um *campo de vetores tangentes* ω ao longo de $\alpha(t)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \omega : I &\longrightarrow T_{\alpha(t)}S \\ t &\longmapsto \omega(t) \in T_pS, \end{aligned}$$

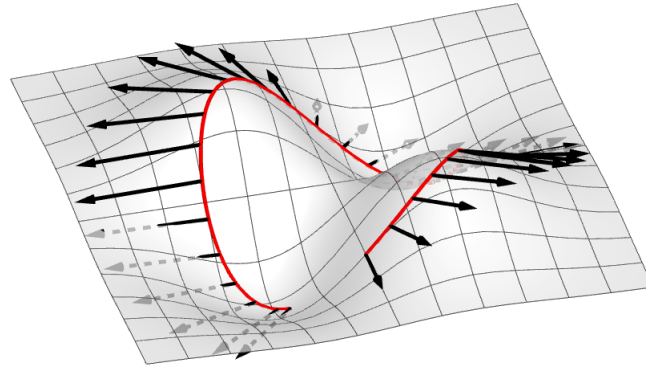
ou seja, é uma correspondência que associa a cada $t \in I$ um vetor $\omega(t) \in T_pS$. O campo de vetores $\omega(t)$ será dito *diferenciável em* $t_0 \in I$ se existir uma parametrização $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em $\alpha(t_0) \in S$ tal que as componentes $a(t)$ e $b(t)$ do campo:

$$\omega(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

são funções diferenciáveis de t em t_0 , onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. O campo de vetores $\omega(t)$ é *diferenciável em* I se for diferenciável para todo $t \in I$.

Exemplo 2.3. Na Figura 6, temos que a superfície S é dada por $X(u, v) = \left(u, v, \frac{3uv}{e^{u^2+v^2}}\right)$ onde o campo diferenciável de vetores $\omega(t) = \cos t X_u(t) + \sin t X_v(t)$ está restrito à curva parametrizada $\alpha(t) = X(\cos t, \sin t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{3}{e} \cos t \sin t\right)$.

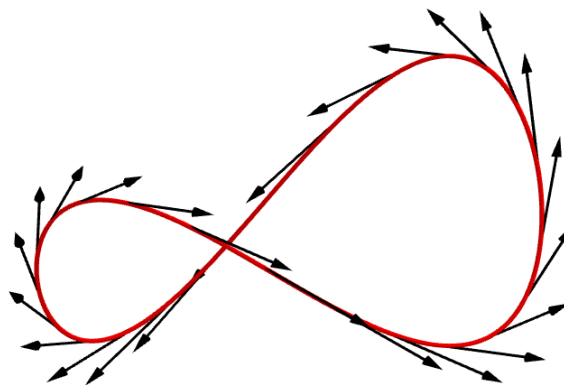
Figura 6 – Campo de vetores tangentes restrito à curva em uma superfície.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.4 (Campo tangente). Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada na superfície. O *campo tangente* dado por $\omega(t) = \alpha'(t)$ é diferenciável. De fato, pela Equação (2.1) do vetor tangente $w \in T_pS$, temos que $\omega(t) = u'(t)X_u(t) + v'(t)X_v(t)$ (Ver Figura 7).

Figura 7 – Campo tangente ao longo de uma curva.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.11 (Derivada covariante (do Carmo, 2005, p. 287)). Seja $\omega(t)$ um campo diferenciável de vetores ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$. A *derivada covariante* dada pela Equação (2.10) de $(D\omega/dt)(t)$, $t \in I$, está bem definida e é a projeção ortogonal do vetor $(d\omega/dt)(t)$ sobre o plano tangente $T_{\alpha(t)}S$.

Exemplo 2.5. Seja S a superfície regular dada por $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. Considere o campo diferenciável de vetores $\omega(t) = a(t)X_u(t) + b(t)X_v(t) = 2tX_u(t) + \frac{t}{3}X_v(t)$ restrito à curva parametrizada $\alpha(t) = X(t, t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ na superfície S . Calculemos a derivada covariante $(D\omega/dt)(t)$, $t \in I$. Primeiramente, temos os vetores tangentes às curvas coordenadas:

$$X_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 0) \quad \text{e} \quad X_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 1).$$

Isto posto, ao calcularmos os coeficientes da primeira forma fundamental da Equação (2.5), segue que $E = \langle X_u, X_u \rangle = 1$, $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle = u^2 + 1$. Desta forma, obtemos as derivadas parciais $E_u = E_v = F_u = F_v = G_v = 0$ e $G_u = 2u$. Portanto, utilizando as Equações (2.9) e o fato que $EG - F^2 = u^2 + 1$ para o cálculo dos símbolos de Christoffel de S na parametrização X , obtemos:

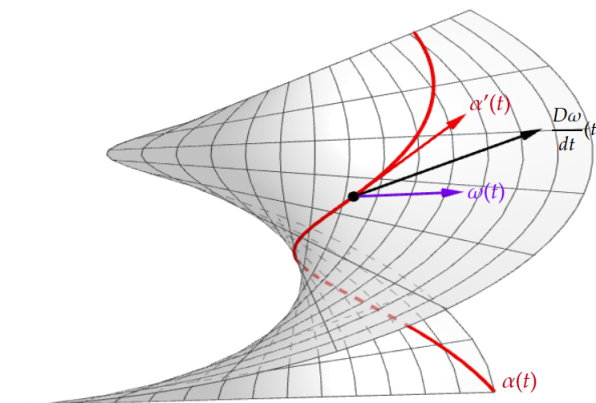
$$\Gamma_{11}^1(u, v) = \Gamma_{11}^2(u, v) = \Gamma_{12}^1(u, v) = \Gamma_{22}^2(u, v) = 0, \quad \Gamma_{12}^2(u, v) = \frac{u}{u^2 + 1}, \quad \Gamma_{11}^1(u, v) = -u.$$

Logo, ao substituírmos essas expressões na Equação (2.10), segue que

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{dt}(t) &= X_u(t) (a'(t) - u(t)b(t)v'(t)) + X_v(t) (b'(t) + \frac{u(t)}{u^2(t)+1} [a(t)v'(t) + b(t)u(t)]) \\ &= (\cos t, \sin t, 0) \left(2 - \frac{t^2}{3}\right) + (-t \sin t, t \cos t, 1) \left(\frac{1}{3} + \frac{7t^2}{3(t^2+1)}\right), \end{aligned}$$

será a expressão da derivada covariante do campo de vetores $\omega(t)$ ao longo de $\alpha(t)$ (Ver Figura 8).

Figura 8 – Exemplo de uma derivada covariante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos que, se duas superfícies S_1 e S_2 são tangentes ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S_1 \cap S_2$, isto é, $T_{\alpha(t)}S_1 = T_{\alpha(t)}S_2$ para todo $t \in I$, então a derivada covariante de um campo de vetores $\omega(t)$ ao longo de $\alpha(t)$ é a mesma para ambas as superfícies.

Além disso, se concebemos a curva $\alpha(t)$ em S como a trajetória de um ponto que se move na superfície, segue que $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$ serão a *velocidade* e a *aceleração* do ponto, respectivamente. Assim, a derivada covariante $(D\alpha'/dt)(t)$ do campo tangente $\omega(t) = \alpha'(t)$ é a *componente tangencial da aceleração* $\alpha''(t)$.

2.4 CAMPO PARALELO

Definição 2.12 (Campo paralelo (do Carmo, 2005, p. 288)). O campo de vetores $\omega(t)$ ao longo da curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é dito *campo paralelo* se $(D\omega/dt)(t) = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 2.1 (Relação entre campos paralelos (do Carmo, 2005, p. 288)). *Sejam $v(t)$ e $\omega(t)$ campos de vetores paralelos ao longo de $\alpha : I \rightarrow S$. Então, $\langle v(t), \omega(t) \rangle$ é constante. Em particular, $|\omega(t)|$ e $|v(t)|$ são constantes, e o ângulo entre $v(t)$ e $\omega(t)$ é constante.*

Demonstração. Primeiramente, pela Definição 2.12 dizer que o campo $\omega(t)$ é paralelo ao longo de $\alpha(t)$ significa que o vetor $(d\omega/dt)(t)$ é normal ao plano $T_{\alpha(t)}S$. Assim, $\langle v(t), \omega'(t) \rangle = 0$, para todo $t \in I$. Analogamente, segue que $\langle v'(t), \omega(t) \rangle = 0$, para todo $t \in I$. Portanto,

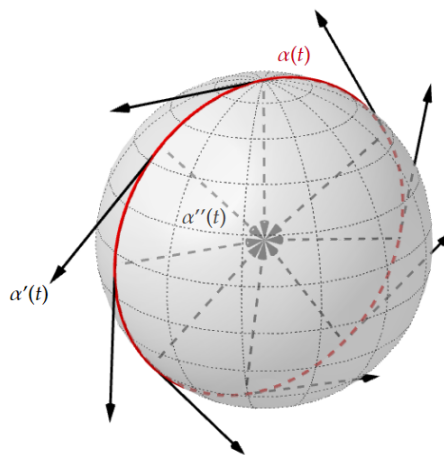
$$\langle v(t), \omega(t) \rangle' = \langle v'(t), \omega(t) \rangle + \langle v(t), \omega'(t) \rangle = 0, \quad t \in I,$$

segue que $\langle v(t), \omega(t) \rangle = c, c \in \mathbb{R}$. Logo, o produto interno entre $v(t)$ e $\omega(t)$ é constante. Para mostrar que $|\omega(t)|$ é constante, basta considerarmos $v(t) = \omega(t)$ e repetirmos o processo anterior. Analogamente para $|v(t)|$.

Finalmente, uma vez que o produto interno entre dois campos e a norma de cada um é constante, segue de imediato que o ângulo entre $v(t)$ e $\omega(t)$ também é constante. \square

Exemplo 2.6 (Campo paralelo em S^2). O campo tangente $\omega(t) = \alpha'(t)$ do meridiano $\alpha(t)$ parametrizado pelo comprimento de arco, isto é, $|\alpha'(t)| = 1$, é um campo paralelo em S^2 . De fato, como o meridiano $\alpha(t)$ de S^2 está parametrizado pelo comprimento de arco, então $|\alpha'(t)|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$. Portanto, derivando ambos os lados em relação à t , obtemos $2 \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$. Logo, $\alpha''(t)$ e $\alpha'(t)$ são perpendiculares para todo $t \in I$. Ademais, $(D\omega/dt)(t)$ é nula pois a aceleração $(d\alpha'/dt)(t)$ é normal ao plano $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$. Portanto, o campo tangente $\omega(t)$ de $\alpha(t)$ é um campo paralelo em S^2 (Ver Figura 9).

Figura 9 – Campo paralelo sobre a esfera S^2 .



Proposição 2.2 (Existência e unicidade do campo paralelo (do Carmo, 2005, p. 290)). *Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S e seja $\omega_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo $\omega(t)$ ao longo de $\alpha(t)$, com $\omega(t_0) = \omega_0$.*

Demonstração. Será feita na página 39. □

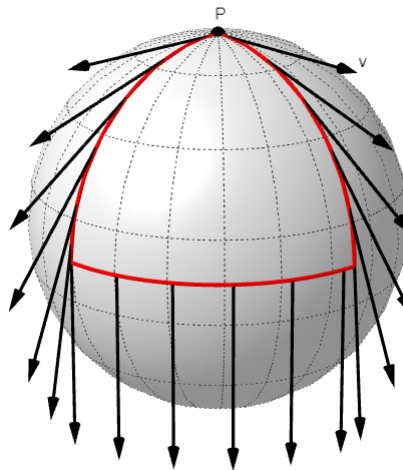
2.5 TRANSPORTE PARALELO

Consideremos uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ e um vetor tangente $\omega_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ com $t_0 \in I$. Definimos o campo de vetores $\omega(t)$ ao longo de $\alpha(t)$ tal que $\omega(t_0) = \omega_0$. O vetor $\omega(t_1) = \omega_1$, com $t_1 \in I$, é denominado *transporte paralelo* de ω_0 ao longo de $\alpha(t)$ no ponto t_1 .

Exemplo 2.7 (Transporte paralelo em superfícies curvas). Consideremos a esfera unitária S^2 dada por $X(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$, $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, \pi]$. Seja um caminho $\alpha(t)$ dado por (Ver Figura 10):

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, \sin t, \cos t), & t \in [0, \pi/2], \\ (\cos t, \sin t, 0), & t \in [\pi/2, \pi], \\ (\cos t, 0, -\sin t), & t \in [\pi, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Figura 10 – Transporte paralelo na esfera.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Verificamos que o vetor $v = X_v$ inicia em um ponto $p \in S$ e é *transportado paralelamente* ao longo da curva $\alpha(t)$ até retornar novamente ao ponto p . Ao final do percurso, a direção do vetor v se alterou devido à *curvatura* da esfera. Em geral, veremos que em uma superfície com curvatura o transporte paralelo irá depender da curva escolhida sobre a superfície.

Consideremos uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow S$, com $t \in I$. Então, o transporte paralelo *independe da parametrização* escolhida de $\alpha(I)$. De fato, se $\beta : J \rightarrow S$, com $\sigma \in J$, é

outra parametrização regular para $\alpha(I)$ e $t : J \rightarrow I$ é tal que $\frac{dt}{d\sigma} \neq 0$ para todo $t \in I$, então da Equação (2.10) temos:

$$\frac{D\omega}{d\sigma}(\sigma) = \frac{D\omega}{dt}(t) \frac{dt}{d\sigma}, \quad t \in I \text{ e } \sigma \in J.$$

Assim, o campo $\omega(t)$ será paralelo se, e somente se, o campo $\omega(\sigma)$ for paralelo. Ademais, a Proposição 2.1 apresenta outra propriedade do transporte paralelo. Consideremos dois pontos p e q na superfície S , juntamente com uma curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(l) = q$. Definimos a aplicação:

$$P_\alpha : T_p S \rightarrow T_q S,$$

que associa a cada vetor $w \in T_p S$ seu transporte paralelo ao longo de $\alpha(t)$ até q . Em vista disto, a Proposição 2.1 assegura que essa aplicação é uma *isometria linear*.

Por fim, consideremos duas superfícies S e S' tangentes ao longo de uma curva parametrizada regular $\alpha(t)$, e seja ω_0 o vetor de $T_{\alpha(t_0)} S = T_{\alpha(t_0)} S'$. Afirmamos que $\omega(t)$ é o transporte paralelo de ω_0 em relação à superfície S se, e somente se, $\omega(t)$ é o transporte paralelo de ω_0 em relação à S' . De fato, a derivada covariante $(D\omega/dt)(t)$ de $\omega(t)$ é a mesma para ambas as superfícies, devido à unicidade do transporte paralelo.

Definição 2.13 (Curva regular por partes (do Carmo, 2005, p. 291)). Uma aplicação definida por $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ é uma *curva parametrizada regular por partes* se $\alpha(t)$ é contínua e se existe uma partição:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l, \quad (2.11)$$

do intervalo $[0, l]$ tal que a restrição $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$, com $i = 0, \dots, k$, é uma curva parametrizada regular. Cada $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é chamada de *arco regular* de $\alpha(t)$.

Podemos estender o conceito de transporte paralelo para curvas parametrizadas regulares por partes. Isso é feito considerando o valor inicial ω_0 . Se ω_0 é tangente em $\alpha(t)$ para algum $t \in [t_i, t_{i+1}]$, efetuamos o transporte paralelo ao longo do arco regular $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$. Se $t_{i+1} \neq l$, então, consideramos $\omega(t_{i+1})$ como o valor inicial para o transporte paralelo para o próximo arco $\alpha|_{[t_{i+1}, t_{i+2}]}$ e assim por diante. Utilizamos tal processo no Exemplo 2.7.

3 GEODÉSICAS

Neste capítulo definiremos o conceito de uma curva geodésica, o valor algébrico da derivada covariante e a noção de curvatura geodésica. Em vista disto, é a seção principal desta monografia visto que todos os resultados em capítulos subsequentes se utilizarão de conceitos expostos nesta parte. Ao final, explicitaremos o sistema de equações diferenciais utilizado para o cálculo de geodésicas em uma superfície.

3.1 COMPRIMENTO DE ARCO E CURVATURA NORMAL

Seja $\alpha : I \rightarrow S$, $t \in I$, uma curva parametrizada na superfície S e $\alpha'(t)$ o vetor tangente à S em $p(t) = (u(t), v(t))$. O comprimento do arco da curva $\alpha(t)$ do ponto t_0 a t_1 é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{p(t)}(\alpha'(t))} dt.$$

A função comprimento de arco da curva $\alpha(t)$ a partir do ponto t_0 é dada por $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$.

Definição 3.1 (Comprimento de arco). Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$ se para cada $t_0, t_1 \in I$ com $t_0 \leq t_1$, temos:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Observamos que, pela Definição 3.1, se uma curva $\alpha(t)$ está parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$ então $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$. Em outras palavras, a velocidade na qual se percorre a curva é unitária. Ademais, obtemos que toda curva regular em \mathbb{R}^3 admite uma reparametrização pelo comprimento de arco $s(t)$ (do Carmo, 2005, p. 25). Isto posto, a curvatura de uma curva mede a variação direcional das retas tangentes ao longo de $\alpha(t)$, $t \in I$.

Definição 3.2 (Curvatura da curva (Tenenblat, 2008, p. 61)). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$. Assim, a curvatura de $\alpha(s)$ no ponto $s_0 \in I$ é dada por $k(s_0) = |\alpha''(s_0)|$.

Em vista da Definição 3.2, se $\alpha(s)$, $s \in I$, é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então $|\alpha'(s)| = 1$ e portanto $\alpha''(s)$ e $\alpha'(s)$ são perpendiculares. Ademais, observamos que $\alpha(I)$ é um segmento de reta se, e somente se, $k(s) = 0$ para todo $s \in I$. Logo, para todo $s \in I$ tal que $k(s) \neq 0$, podemos definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$.

Definição 3.3 (Vetor normal à curva (Tenenblat, 2008, p. 62)). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$ tal que $k(s_0) > 0$. O vetor dado por:

$$n(s_0) = \frac{\alpha''(s_0)}{k(s_0)}, \quad s_0 \in I, \quad (3.1)$$

é denominado *vetor normal à curva* $\alpha(s)$ em $s_0 \in I$.

Definição 3.4 (Segunda forma (Tenenblat, 2008, p. 152)). Seja $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular S . Para todo $p = (u_0, v_0) \in A$, a aplicação:

$$II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \mapsto II_p(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle,$$

é denominada a *segunda forma fundamental* de X em p , onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S tal que $(u(t_0), v(t_0)) = p$, $\alpha'(t_0) = w \in T_p S$ e N é o vetor normal à S .

Utilizando a Equação (2.4), verificamos que a função $II_p(w)$ não depende da curva $\alpha(t)$ escolhida. De fato, obtemos: $II_p(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0)$, onde $e = \langle X_{uu}, N \rangle$, $f = \langle X_{uv}, N \rangle$ e $g = \langle X_{vv}, N \rangle$ no ponto $p = (u_0, v_0)$.

Definição 3.5 (Curvatura normal (Tenenblat, 2008, p. 154)). Seja $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma superfície regular S e $p = (u_0, v_0) \in A$. A *função curvatura normal* em p é uma aplicação $k_n : T_p S - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_p S$ com $w \neq 0$, associa:

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

Seja $w \in T_p S$ tal que $|w| = 1$ e $\alpha(s)$ uma curva em S parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$. Se a curvatura de $\alpha(s_0)$, $s_0 \in I$, é tal que $k(s_0) \neq 0$, então:

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_p(w) = \langle \alpha''(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle \\ &= k(s_0) \langle n(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle \\ &= k(s_0) \cos \theta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $n(s_0)$ é o vetor normal à $\alpha(s)$ em $s_0 \in I$ dado pela Equação (3.1) e θ é o ângulo formado pelos vetores $n(s_0)$ e $N(u(s_0), v(s_0))$. Observamos que $k_n(w)$ é o comprimento da projeção do vetor $k(s_0)n(s_0)$ sobre o vetor $N(u(s_0), v(s_0))$. Intuitivamente, $k_n(w)$ mede o quanto a superfície S é curvada em uma direção w .

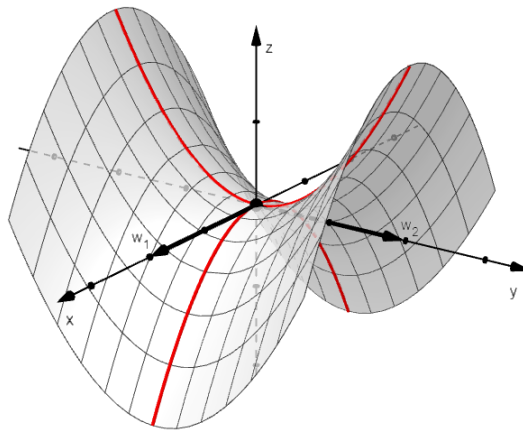
Proposição 3.1 (Curvaturas principais). Seja $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a parametrização de uma superfície regular S e $k_n(w)$ a função curvatura normal em $p = (u_0, v_0) \in A$. Então, existem vetores unitários e ortogonais $w_1, w_2 \in T_p S$ tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores de mínimo e máximo da função $k_n(w)$, respectivamente.

Demonstração. Ver Tenenblat (2008, p. 161). □

As curvaturas normais $k_1(w_1)$ e $k_2(w_2)$ são denominadas *curvaturas principais* de S em $p = (u_0, v_0)$, e os vetores w_1 e w_2 são denominados *vetores principais* de S em p .

Exemplo 3.1. Seja S o parabolóide hiperbólico dado pela parametrização $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$. Calculando as formas fundamentais $I_p(w)$ e $II_p(w)$ no ponto $p = (0, 0)$, obtemos $I_p(w) = a^2 + b^2$ e $II_p(w) = -2a^2 + 2b^2$. Consequentemente, para um vetor $w = aX_u(0, 0) + bX_v(0, 0) \in T_pS$ tal $w \neq 0$, temos $k_n(w) = \frac{-2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}$. Logo, os vetores $w_1 = (1, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0)$ são os vetores principais em $p = (0, 0)$, com curvaturas principais $k_1(w_1) = -2$ e $k_2(w_2) = 2$, respectivamente (Veja Figura 11).

Figura 11 – Curvaturas principais no parabolóide hiperbólico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

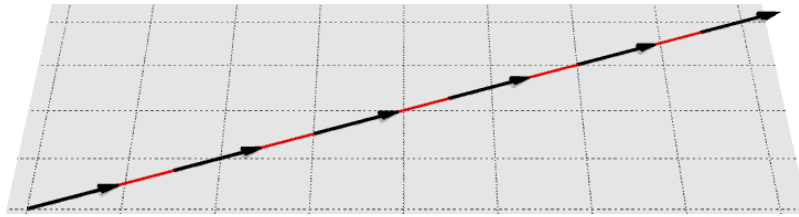
Por fim, o produto $K(p) = k_1 \cdot k_2$ é chamado de *curvatura Gaussiana* de S em p e a semi-soma $H(p) = (k_1 + k_2)/2$ é denominada *curvatura média* de S em p .

3.2 CURVAS GEODÉSICAS

Nessa seção vamos definir um dos conceitos mais importantes da Geometria Diferencial, *curvas geodésicas*. Inicialmente, pela Definição 2.12 as curvas parametrizadas regulares $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ do plano ao longo das quais seu campo tangente $\omega(t) = \gamma'(t)$ é paralelo são precisamente as *retas* r deste plano. De fato, em um plano Π o campo tangente $\omega(t) = \alpha'(t)$, $t \in I$, é paralelo ao longo da curva $\alpha(t)$ se, e somente se,

$$\frac{D\omega}{dt}(t) = \frac{d\alpha'}{dt}(t) = \alpha''(t) = 0, \quad t \in I, \quad (3.3)$$

portanto, $\alpha'(t) = v$ é a velocidade da reta $\alpha(t) = vt + c$ contida no plano Π para todo $t \in I$, $c \in \mathbb{R}$. Ver Figura 12.

Figura 12 – Campo tangente paralelo no plano Π .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, as curvas $\gamma(t)$ na superfície S que satisfazem a condição análoga de seu *campo tangente* $\omega(t) = \gamma'(t)$ ser paralelo para todo $t \in I$ são chamadas *geodésicas* em S . Mais precisamente, temos a seguinte definição de curva geodésica parametrizada.

Definição 3.6 (Curva geodésica (do Carmo, 2005, p. 293-294)). Uma curva parametrizada não-constante $\gamma: I \rightarrow S$ é chamada *geodésica em* $t_0 \in I$ se o seu campo tangente $\omega(t) = \gamma'(t)$ é paralelo em t_0 ao longo da curva $\gamma(t)$. Em outras palavras, temos a derivada covariante:

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t_0) = 0, \quad t_0 \in I.$$

Dizemos que $\gamma(t)$ é uma *curva geodésica parametrizada* se é geodésica para todo $t \in I$.

Intuitivamente, $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ é dita geodésica se sua *aceleração* $\gamma''(t)$ é normal à S em $(u(t), v(t))$ para todo $t \in I$, isto é, $\langle \gamma''(t), X_u(t) \rangle = \langle \gamma''(t), X_v(t) \rangle = 0$. Ademais, observamos que uma geodésica pode ter auto-intersecções, mas é sempre uma curva regular. Isto posto, como consequência da Proposição 2.1 temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2 (Velocidade constante). *Uma curva geodésica $\gamma(t)$ na superfície S possui velocidade $|\gamma'(t)|$ constante.*

Demonstração. De fato, como a aceleração $\gamma''(t)$ é normal à superfície S para todo $t \in I$, em particular $\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$. Logo,

$$\frac{d}{dt} |\gamma'(t)|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Assim, $|\gamma'(t)| = c \in \mathbb{R}_+^*$ como queríamos demonstrar. \square

Logo, pela Proposição 3.2, o parâmetro $t \in I$ de uma geodésica parametrizada $\gamma(t)$ é *proporcional ao comprimento de arco* $s(t)$ da curva. Assim, $\gamma(t)$ não necessariamente possui velocidade unitária. Em vista disto, temos o seguinte enunciado.

Proposição 3.3 (Reparametrização por $s(t)$). *A reparametrização de uma curva geodésica $\gamma(t)$ na superfície S pelo comprimento de arco $s(t)$ continua sendo uma curva geodésica.*

Demonstração. Seja $\gamma(t)$, $t \in I$, uma geodésica na superfície S . Consideremos a função comprimento de arco $s(t) = \int_0^t |\gamma'(t)| dt$. Dessa forma, como a velocidade $|\gamma'(t)|$ é constante positiva pela Proposição 3.2, então $s(t) = |\gamma'(t)|t$. Consideremos a reparametrização $\gamma(t) = \delta(s(t))$, então $\gamma'(t) = \delta'(s) \frac{ds}{dt}$. Portanto,

$$\gamma''(t) = \delta''(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \delta'(s) \frac{d^2s}{dt^2} = \delta''(s) |\gamma'(t)|^2,$$

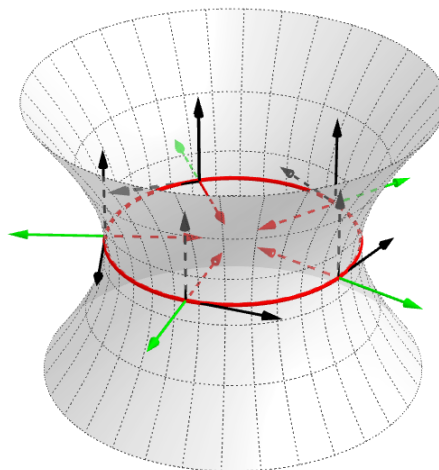
ou seja, $\delta''(s) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^2}$.

Diante disto, o vetor $\delta''(s)$ é paralelo à aceleração $\gamma''(t)$ e assim, paralelo ao vetor normal N da superfície S . Portanto, a curva $\delta(s)$ é uma geodésica parametrizada. \square

A Proposição 3.3 garante que podemos considerar geodésicas $\gamma(s)$ com velocidades unitárias $|\gamma'(s)| = 1$, caso necessário. Assim, uma curva parametrizada $\gamma: I \rightarrow S$ na superfície S é uma geodésica se para todo ponto $q(t_0) = X(u(t_0), v(t_0)) \in S$, uma parametrização pelo comprimento de arco $s(t)$ de $\gamma(t)$ em $q(s(t_0))$ é uma geodésica parametrizada. Ou seja, $\omega(t) = \gamma'(s)$ é um campo de vetores paralelo ao longo de $\gamma(s)$ para todo $s \in I$.

Exemplo 3.2 (Hiperboloide de uma folha). Seja S o hiperboloide de uma folha dado pela parametrização $X: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v)$, $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [-\pi, \pi]$. O equador $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ é uma curva geodésica em S (Ver Figura 13).

Figura 13 – Geodésica no hiperboloide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato, visualizando extrinsecamente à superfície S e utilizando da Proposição 3.2, obtemos que a Definição 3.6 equivale afirmar que o vetor aceleração $\gamma''(s) = k(s) n(s)$ é normal

ao plano $T_{\gamma(s)}S$. Em outras palavras, $\gamma''(s)$ é paralelo ao vetor normal $N(u(s), v(s))$ à superfície S em $(u(s), v(s))$, para todo $s \in I$.

Exemplo 3.3 (Geodésicas em S^2). Seja S^2 a esfera unitária dada pela parametrização regular $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$, com $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, \pi]$. Afirmamos que os círculos maximais são curvas geodésicas em S^2 . De fato, seja $p \in S^2$ e $w \in T_p S^2$ um vetor tal que $|w| = 1$. Então, considerando $p = \overrightarrow{Op}$:

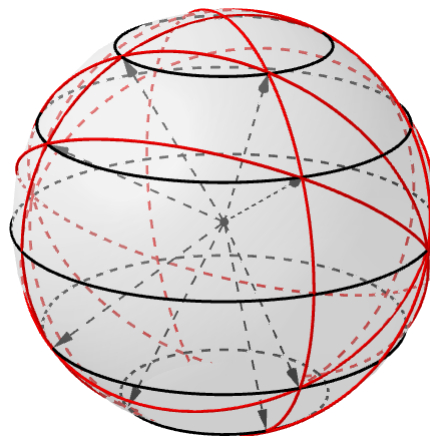
$$\Pi = \{q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q, w \wedge p \rangle = 0\},$$

é um plano que passa pela origem O de S^2 e é paralelo aos vetores p e w . Dessa forma, $\Pi \cap S^2$ é um círculo maximal de S^2 com parametrização $\gamma(s) = \cos(s)p + \sin(s)w$, $s \in [0, 2\pi]$. De fato, $\gamma(s) \in \Pi$ e $|\gamma(s)| = 1$ para todo $s \in [0, 2\pi]$ visto que $\langle w, p \rangle = 0$ e $|p| = |w| = 1$. Portanto,

$$\gamma''(s) = -\cos(s)p - \sin(s)w = -\gamma(s), \quad s \in [0, 2\pi],$$

assim a aceleração $\gamma''(s)$ não possui componente tangencial. Ou seja, a derivada covariante é dada por $(D\gamma'/ds)(s) = 0$ para todo $s \in [0, 2\pi]$, satisfazendo a Definição 3.6 de curva geodésica parametrizada (Veja Figura 14).

Figura 14 – Geodésicas e paralelos em S^2 .



As curvas em vermelho são geodésicas e as curvas em preto são os paralelos da esfera.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, todo meridiano $\alpha(t)$ do Exemplo 2.6 é uma curva geodésica. De fato, $\alpha(t)$ é um círculo maximal dado pela interseção de um plano $\tilde{\Pi}$ passando pela origem O de S^2 com os pontos de norte e sul da esfera. Além disso, exceto o equador, nenhum paralelo $\eta(t) = (\cos a \cos t, \cos a \sin t, \sin a)$, $a \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ e $t \in [0, 2\pi]$ é uma geodésica. De fato, $N(u, v) = (-\sin^2 v \cos u, -\sin^2 v \sin u, -\cos v \sin v)$ é o vetor normal à esfera unitária S^2 em $(u, v) \in A$ e $\eta''(t) = (-\cos a \cos t, -\cos a \sin t, 0)$ é a aceleração de $\eta(t)$. Calculando o

produto vetorial entre ambos obtemos:

$$\begin{aligned} N(t) \wedge \eta''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen}^2 a \cos t & -\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen} t & -\cos a \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a \cos t & -\operatorname{sen} a \operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-\operatorname{sen}^2 a \cos a \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 a \cos a \cos t, 0) \neq 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Logo, $\eta''(t)$ não é paralelo ao vetor $N(t)$ se $a \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$. Ademais, $N(t) \wedge \eta''(t)$ independe da parametrização pelo comprimento de arco $s(t)$. Concluimos assim, que uma curva $\alpha(s(t))$ não é obrigatoriamente uma geodésica.

Definição 3.7 (Superfícies isométricas (do Carmo, 2005, p. 261)). Dizemos que um dado difeomorfismo $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ entre duas superfícies regulares S_1 e S_2 é uma *isometria* se:

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)},$$

para todo ponto $p \in S_1$ e todos vetores tangentes $w_1, w_2 \in T_p S_1$. Em outras palavras, temos que a diferencial $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_p S_2$ é uma *aplicação linear que preserva produto interno* para todo $p \in S_1$. Neste caso, S_1 e S_2 são denominadas *superfícies isométricas*.

Proposição 3.4 (Isometria e primeira forma). *Um difeomorfismo $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria se, e somente se, as primeiras formas I_p de S_1 e de S_2 coincidem, isto é, $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$ para todo $p \in S_1$ e $w \in T_p S_1$.*

Demonstração. De fato, se φ é uma isometria, então:

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)).$$

Por outro lado, seja φ tal que preserva a primeira forma fundamental. Então:

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= \frac{1}{2}(I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)) \\ &= \frac{1}{2}(I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1) + d\varphi_p(w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2))) \\ &= \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Logo, S_1 é *localmente isométrica* a S_2 se para cada $p \in S_1$ existem um aberto $A_1 \subset S_1$, com $p \in A_1$, um aberto $A_2 \subset S_2$ e uma isometria $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$.

Proposição 3.5 (Isometria e geodésicas). *Se $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria e $\gamma : I \rightarrow S_1$ é uma geodésica de S_1 , então $\delta = \varphi \circ \gamma$ é uma geodésica de S_2 .*

Demonstração. De fato, como $\delta'(s) = d\phi_{\gamma(s)}(\gamma'(s))$, temos pela Definição 3.6:

$$\frac{D\delta'}{ds}(s) = d\phi_{\gamma(s)}\left(\frac{D\gamma'}{ds}(s)\right) = 0, \quad s \in I,$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 3.4 (Geodésicas no cilindro C). Inicialmente, todo meridiano $\alpha(t)$, $t \in I$, é uma geodésica no cilindro C pela Equação (3.3). De fato, toda reta r contida em uma superfície S é uma geodésica parametrizada. Por outro lado, todo paralelo $\eta(t)$, $t \in I$, de C é uma geodésica pois, todo paralelo $\eta(s) = (\cos s, \sin s, z_0)$ parametrizado pelo comprimento de arco $s(t)$ é um círculo maximal dado pela interseção:

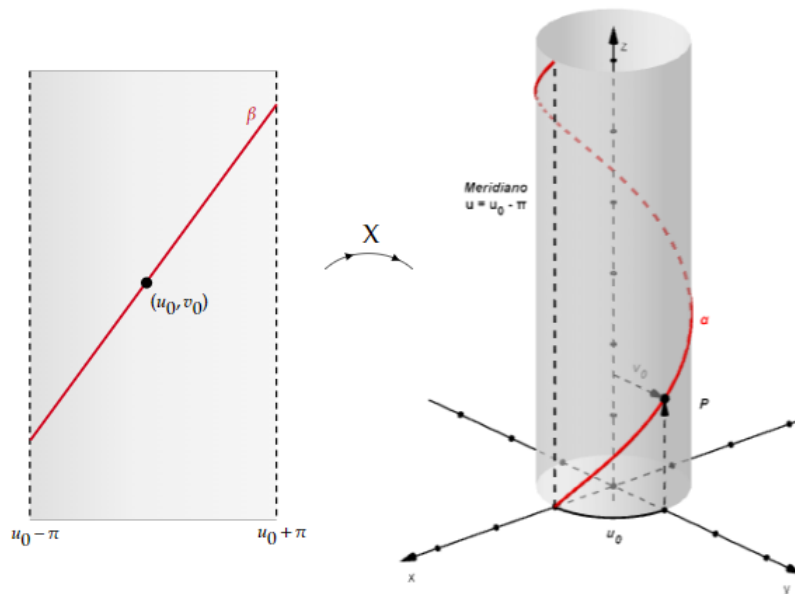
$$C \cap \Pi, \quad \Pi = \{z = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_0\}.$$

Assim, pelo Exemplo 3.3 obtemos que $\eta(s)$ é uma curva geodésica pois $\eta''(s)$ é paralelo ao vetor normal $N(s)$ para todo $s \in I$. Isto posto, para verificarmos a existência de outras geodésicas no cilindro C , devemos utilizar a Proposição 3.5. A princípio, consideremos a seguinte parametrização:

$$X : (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow C - \{\overline{\alpha(t)}\}, \quad X(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

onde $\overline{\alpha(t)} = (\cos(u_0 - \pi), \sin(u_0 - \pi), v)$ é o meridiano dado por $u = u_0 - \pi$. A partir disto, consideremos a curva $\alpha(s) = (X \circ \beta)(s) = X(u(s), v(s))$ passando por $p = (\cos u_0, \sin u_0, v_0)$, i.e., $\alpha(s_0) = X(u(s_0), v(s_0)) = X(u_0, v_0) = p$.

Assim, pela Proposição 3.4, a aplicação X do cilindro \mathcal{C} é isométrica ao plano $\tilde{\Pi} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $u_0 - \pi < u < u_0 + \pi$. Com efeito, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental obtemos $E = G = 1$ e $F = 0$ para ambas as superfícies. Portanto, pela Proposição 3.5, a curva $\alpha(s) \subset \mathcal{C}$ é uma geodésica parametrizada do cilindro se, e somente se, $\beta(s) = (u(s), v(s))$ é uma geodésica de $\tilde{\Pi}$ tal que $\beta(s_0) = (u_0, v_0)$ (Ver Figura 15).

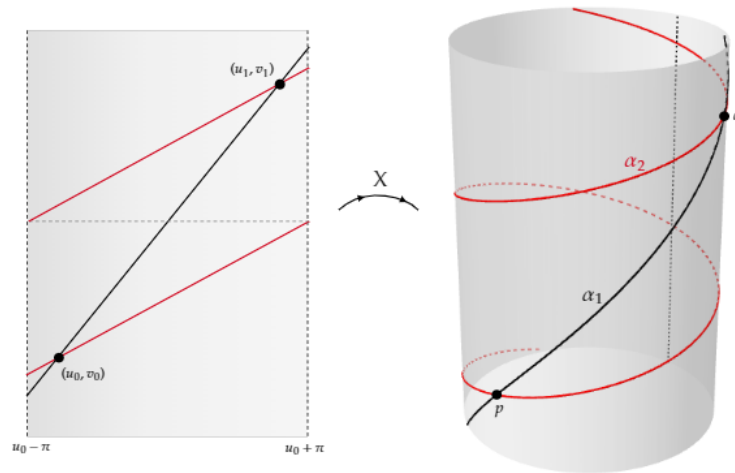
Figura 15 – Geodésica no cilindro \mathcal{C} .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em vista disto, sabemos pela Equação (3.3) que as únicas geodésicas parametrizadas do plano são as retas. Assim, devemos ter $\beta(s) = (as + u_0, bs + v_0)$ com $a^2 + b^2 = 1$. Em outras palavras, $\beta(I)$ é um segmento de reta que passa por (u_0, v_0) . Logo,

- Se $a = 0$, então $\beta(s) = (u_0, \pm s + v_0)$. Logo, $\alpha(s) = (\cos u_0, \sin u_0, \pm s + v_0)$ é um meridiano;
- Se $b = 0$, então $\beta(s) = (\pm s + u_0, v_0)$. Logo, $\alpha(s) = (\cos(\pm s + u_0), \sin(\pm s + u_0), v_0)$ é um paralelo;
- Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $\alpha(s) = (\cos(as + u_0), \sin(as + u_0), bs + v_0)$ é uma hélice de passo $2\pi b/a$.

Observamos que, se dois pontos $p, q \in \mathcal{C}$ pertencem a um mesmo paralelo $\eta(s)$ então os arcos deste paralelo são as únicas geodésicas parametrizadas conectando ambos os pontos. Por outro lado, se p e q não pertencem a um mesmo paralelo $\eta(s)$, então eles podem ser conectados por um número infinito de geodésicas. De fato, consideremos $p = X(u_0, v_0) = (\cos u_0, \sin u_0, v_0)$ e $q = X(u_1, v_1) = (\cos u_1, \sin u_1, v_1)$, onde $u_1 \in (u_0 - \pi, u_0 + \pi)$ e $v_0 \neq v_1$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$, e $s_1 \in (-\pi/a, \pi/a)$ um valor no intervalo de forma que $(as_1 + u_0, bs_1 + v_0) = (u_1, v_1)$. Em outras palavras, (a, b) é o vetor unitário paralelo à única reta no plano $\tilde{\Pi}$ conectando os pontos p e q . Em vista disto, se p e q não estão sobre um mesmo meridiano, então existe uma única hélice $\alpha(s)$ que conecta ambos os pontos antes de completar uma volta completa (Ver Figura 16).

Figura 16 – Duas geodésicas no cilindro \mathcal{C} .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em contrapartida, sejam:

$$A_n = \frac{2\pi n + s_1 a}{\sqrt{(2\pi n + s_1 a)^2 + b^2 s_1^2}} \quad \text{e} \quad B_n = \frac{b s_1}{\sqrt{(2\pi n + s_1 a)^2 + b^2 s_1^2}},$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$, e considere a hélice $a_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ dada por:

$$\alpha_n(s) = (\cos(A_n s + u_0), \sin(A_n s + u_0), B_n s + v_0).$$

Então $\alpha_n(0) = p$ e $\alpha_n(s_n) = q$, onde:

$$s_n = \frac{b s_1}{B_n} = \frac{2\pi n + a s_1}{A_n} \quad \text{e} \quad \frac{a s_1}{A_n} \in \left(-\frac{\pi}{A_n}, \frac{\pi}{A_n}\right).$$

Logo, a hélice $\alpha_n(s)$ só passa pelo ponto q após completar n voltas (Ver Figura 16). Por fim, como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário, então existe um número infinito de geodésicas parametrizadas conectando os pontos $p = X(u_0, v_0)$ e $q = X(u_1, v_1)$.

3.3 ORIENTABILIDADE E CURVATURA GEODÉSICA

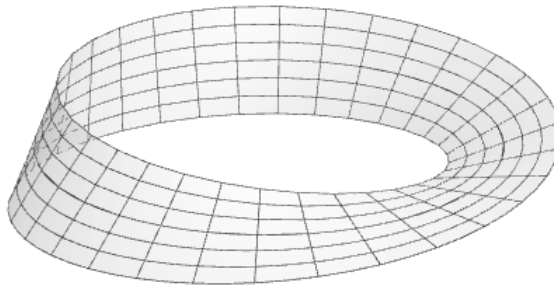
Analisando a Equação (3.3), verificamos que podemos caracterizar as geodésicas parametrizadas do plano Π , isto é, as retas $\alpha(t)$, como sendo *curvas regulares cuja curvatura é nula*. Analogamente, podemos caracterizar as curvas geodésicas em uma superfície regular S como sendo aquelas cuja *curvatura geodésica é nula* em todos os seus pontos. Para tal, definiremos o conceito de *orientabilidade* de uma superfície S .

Intuitivamente, como cada ponto $p \in S$ possui um plano tangente $T_p S$ pelo item b) da

Definição 2.1, a escolha de uma *orientação* de T_pS induz uma orientação em uma vizinhança U de p , ou seja, a noção de *movimento positivo* ao longo de curvas fechadas em U em torno de cada ponto $p \in U$. Assim, caso seja possível fazer essa escolha para cada $p \in S$ de forma que em quaisquer duas vizinhanças U, V de p , as orientações em $U \cap V$ coincidam, então S é *orientável*.

Exemplo 3.5 (Fita de Möbius). A fita de Möbius (Ver Figura 17) não é uma superfície orientável.

Figura 17 – Fita de Möbius.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com efeito, ao completarmos uma volta completa na superfície, uma curva fechada com movimento positivo em $U \subset S$ passará a ter movimento negativo, ou seja, sua orientação é alterada.

Consideremos S uma superfície regular e as parametrizações $X : A \rightarrow X(A)$ e $\bar{X} : \bar{A} \rightarrow \bar{X}(\bar{A})$ em $p \in S$. As bases $\{X_u(q), X_v(q)\}$ e $\{\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$, onde $X(q) = \bar{X}(\bar{q}) = p$, determinam orientações de T_pS pela Equação (2.1). Seja W uma vizinhança do ponto $p \in S$ tal que $W = X(A) \cap \bar{X}(\bar{A})$. Assim, consideremos a seguinte função:

$$h = X^{-1} \circ \bar{X} : \bar{X}^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto h(\bar{u}, \bar{v}) = (u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))'$$

onde $h(\bar{q}) = q$. Denominamos tal h como *aplicação mudança de coordenadas*. Então,

$$\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}) = X_u(q) \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) + X_v(q) \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}), \quad \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q}) = X_u(q) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) + X_v(q) \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}).$$

Logo, a matriz mudança de base é dada por:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}(\bar{q}) & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}(\bar{q}) \end{bmatrix},$$

sendo a *matriz jacobiana* de h em \bar{q} . Portanto, as bases $\{X_u(q), X_v(q)\}$ e $\{\bar{X}_{\bar{u}}(\bar{q}), \bar{X}_{\bar{v}}(\bar{q})\}$

possuem *mesma orientação no plano tangente* $T_p S$ se, e somente se,

$$\det(dh(\bar{q})) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}(\bar{q}) > 0.$$

Definição 3.8 (Superfície orientável (do Carmo, 2005, p. 122)). Uma superfície regular S é *orientável* se existir uma família de parametrizações, $\{X_\alpha : A_\alpha \rightarrow X_\alpha(A_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$, tal que:

a) $S = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha(A_\alpha)$, isto é, é um atlas;

b) Se $W_{\alpha\beta} = X_\alpha(A_\alpha) \cap X_\beta(A_\beta) \neq \emptyset$, a aplicação mudança de coordenadas:

$$h_{\alpha\beta} = X_\alpha^{-1} \circ X_\beta : X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow X_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta}),$$

possui jacobiano positivo em todo ponto $q \in X_\beta^{-1}(W_{\alpha\beta})$.

A escolha de tal família de parametrizações é chamada de *orientação de S* . Neste caso, dizemos que S é uma *superfície orientada* quando escolhemos uma das orientações como sendo positiva. Se não existir tal família, S é dita *superfície não-orientável*.

Exemplo 3.6. Uma superfície S que é o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável. De fato, toda superfície coberta por uma única vizinhança coordenada é orientável.

Definição 3.9 (Campo de vetores normais). Um *campo diferenciável de vetores normais* N em um aberto $U \subset S$ é uma aplicação diferenciável $N : U \subset S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada ponto $q = X(u_0, v_0) \in U$ um vetor $N(q) \in \mathbb{R}^3$, onde $|N(q)| = 1$ e $N(q)$ é perpendicular a $T_q S$.

Proposição 3.6 (Orientabilidade e campo (do Carmo, 2005, p. 124)). *Uma superfície regular S é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável de vetores normais $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

No plano $\Pi \subset \mathbb{R}^2$, dada uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$ parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$, associamos uma curvatura com sinal $k(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$, onde $n(s) = (-y'(s), x'(s), 0)$ é o vetor normal de α em $s \in I$ tal que $\{\alpha'(s), n(s), (0, 0, 1)\}$ é uma base positiva de \mathbb{R}^3 . Isto é, a matriz mudança de base para a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 tem determinante igual a 1.

Observamos que o sinal $k(s)$ da curvatura depende da orientação da curva $\alpha(s)$ e do vetor $N = (0, 0, 1)$. Analogamente, a curvatura geodésica de $\alpha(s)$ em uma superfície S irá depender da orientação da curva regular e da orientação da superfície. Em vista disto, para levar em consideração o sinal de $k(s)$ no plano Π , estabeleceremos a seguinte definição.

Definição 3.10 (Valor algébrico de $D\omega/dt$ (do Carmo, 2005, p. 297)). Seja $\omega(t)$ um campo diferenciável de vetores unitários ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ sobre uma superfície orientada S . Visto que $|\omega(t)| = 1$ para todo $t \in I$, então $\langle (d\omega/dt)(t), \omega(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$. Portanto, $(D\omega/dt)(t)$ é paralelo ao vetor $N(t) \wedge \omega(t)$, isto é, existe $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{D\omega}{dt}(t) = \lambda(t) (N(t) \wedge \omega(t)), \tag{3.4}$$

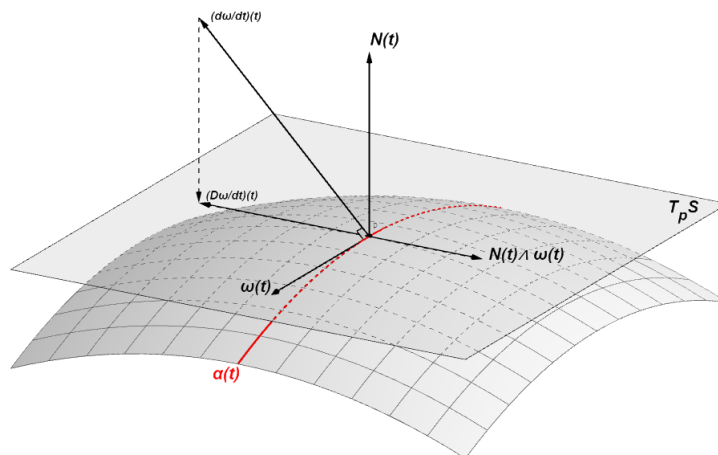
onde $N(t)$ é o campo diferenciável de vetores normais restrito à curva $\alpha(t)$. O valor:

$$\lambda(t) = \left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right],$$

é chamado *valor algébrico da derivada covariante* de ω em t .

Observamos que os conceitos de derivada covariante (Definição 2.7), transporte paralelo (Seção 2.5) e de curva geodésica (Definição 3.6) não dependem da orientação da superfície S , ao contrário do valor algébrico $[(D\omega/dt)(t)]$ (Ver Figura 18). Além disso, a existência do campo normal $N(t)$ é garantida pela Proposição 3.6.

Figura 18 – Valor algébrico da derivada covariante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos calcular o valor algébrico utilizando seguinte a projeção:

$$\lambda(t) = \left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] = \left\langle \frac{d\omega}{dt}(t), N(t) \wedge \omega(t) \right\rangle, \quad (3.5)$$

pois $(d\omega/dt)(t)$ é perpendicular a $\omega(t)$, $N(t) \wedge \omega(t)$ é perpendicular a $\omega(t)$ e a derivada covariante $(D\omega/dt)(t)$ é a componente tangencial do vetor $(d\omega/dt)(t)$. Além disso, $\{\omega(t), N(t) \wedge \omega(t), N(t)\}$ é uma base positiva de \mathbb{R}^3 , uma vez que sua matriz possui determinante igual a 1 para todo $t \in I$.

Definição 3.11 (Curvatura geodésica (do Carmo, 2005, p. 297)). Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S . Seja $\gamma(s)$ uma parametrização de C em uma vizinhança de $p \in S$ pelo comprimento de arco $s(t)$ positivamente orientada. O valor algébrico:

$$\left[\frac{D\gamma'}{ds}(s) \right] = k_g(s), \quad (3.6)$$

da derivada covariante de $\gamma'(s)$ é chamado *curvatura geodésica* de C em p .

Analogamente às retas de um plano Π , as geodésicas C em uma superfície regular S podem ser caracterizadas como curvas regulares parametrizadas pelo comprimento de arco $s(t)$ cuja *curvatura geodésica é nula em todos os seus pontos*.

Proposição 3.7 (Caracterização da geodésica). *Uma curva $\gamma(s)$ em uma superfície S é uma geodésica parametrizada se, e somente se, $k_g(s) = 0$ para todo $s \in I$.*

Demonstração. Consideremos uma curva regular C contida em uma superfície orientada S . Seja $\gamma(s)$ uma parametrização de C em uma vizinhança de $p \in S$ pelo comprimento de arco $s(t)$ positivamente orientada. Suponhamos que $\gamma(s)$ é uma curva geodésica parametrizada em S . Se a aceleração $\gamma''(s)$ for nula o resultado segue, pois pela Equação (3.5) $k_g(s) = \langle \gamma''(s), N(s) \wedge \gamma'(s) \rangle$. Caso contrário, por definição temos que o vetor $\gamma''(s)$ é paralelo ao vetor normal $N(s)$ e, portanto, perpendicular ao vetor $N(s) \wedge \gamma'(s)$. Logo, $k_g(s) = 0$ para todo $s \in I$.

Por outro lado, suponhamos $k_g(s) = 0$ para todo $s \in I$. Assim, pela Equação (3.5) temos $\gamma''(s) \perp (N(s) \wedge \gamma'(s))$ se $\gamma'(s) \neq 0$. Ademais, como C está parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$, então $|\gamma'(s)|^2 = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$ e, conseqüentemente, $\gamma''(s) \perp \gamma'(s)$. Logo, $\gamma''(s)$ é paralelo ao vetor $\gamma'(s) \wedge (N(s) \wedge \gamma'(s))$, i.e. paralelo à $N(s)$. \square

No caso onde reparametrizamos a curva pelo comprimento de arco $s(t)$, denotaremos a curva $\alpha(t)$ tal que $k_g(t) = 0$, $t \in I$, por *pré-geodésica*. Observamos que, pelas Equações (3.4) e (3.6), a curvatura geodésica $k_g(s)$ de C muda de sinal se mudarmos a orientação da curva C ou da superfície S . Além disso, pela Equação (3.2) a curvatura normal de C é dada por $k_n(s) = \langle \gamma''(s), N(s) \rangle$. Assim,

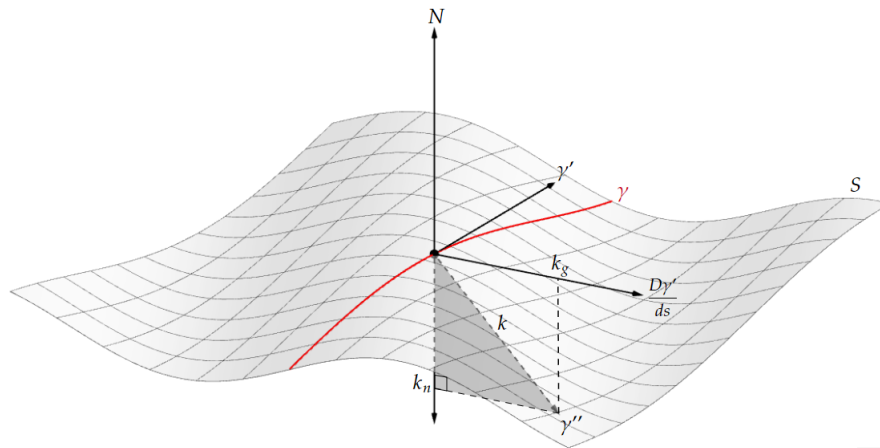
$$\gamma''(s) = k_g(s) (N(s) \wedge \gamma'(s)) + k_n(s) N(s),$$

onde $k_g(s), k_n(s) \in \mathbb{R}$. Logo, obtemos a seguinte relação entre as curvaturas:

$$k(s)^2 = |\gamma''(s)|^2 = k_g(s)^2 + k_n(s)^2. \quad (3.7)$$

De fato, visualizando extrinsecamente à superfície S , o valor absoluto da curvatura geodésica $k_g(s)$ da curva C no ponto $\gamma(s)$ é o valor absoluto da componente tangencial do vetor aceleração $\gamma''(s) = k(s) n(s)$. Equivalentemente, o valor absoluto da curvatura normal $k_n(s)$ da curva C no ponto $\gamma(s)$ é o valor absoluto da componente normal de $\gamma''(s) = k(s) n(s)$, onde $k(s)$ é a curvatura de C em p e $n(s)$ o vetor normal à curva C em p (Ver Figura 19).

Figura 19 – Relação entre curvaturas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.7 (Curvatura geodésica em S^2). Consideremos a esfera unitária S^2 centrada na origem dada por $X(u, v) = (\text{sen } v \cos u, \text{sen } v \text{sen } u, \cos v)$, $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, \pi]$. Seja C o paralelo de colatitude φ , onde $0 < \varphi < \pi$. Em vista disto, $\alpha(s) = (\text{sen } \varphi \cos s, \text{sen } \varphi \text{sen } s, \cos \varphi)$ é uma parametrização de C pelo comprimento de arco $s(t)$ com:

$$\alpha'(s) = (-\text{sen } \varphi \text{sen } s, \text{sen } \varphi \cos s, 0),$$

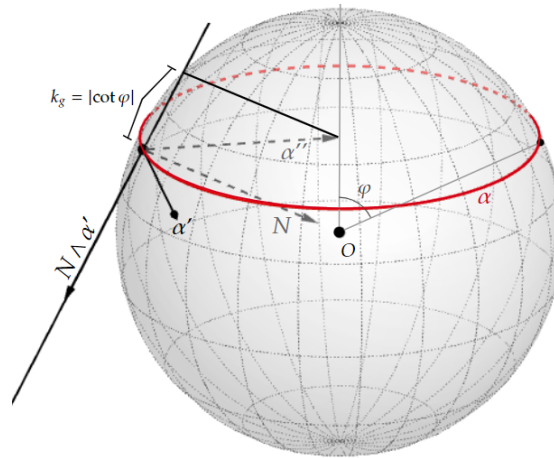
e

$$\alpha''(s) = (-\text{sen } \varphi \cos s, -\text{sen } \varphi \text{sen } s, 0).$$

Assim, a curvatura de C é dada por $k(s) = |\alpha''(s)| = \frac{1}{\text{sen } \varphi}$, onde $|\text{sen } \varphi| = 1$, e a curvatura normal é dada por $|k_n(s)| = 1$ pois temos as curvaturas principais $k_1 = k_2 = 1$ para o campo $N(p) = -p$ em S^2 . Isto posto, utilizando da Equação (3.7) obtemos:

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \varphi} = 1 + k_g(s)^2 \implies k_g(s)^2 = -1 + \frac{1}{\text{sen}^2 \varphi} = \frac{1 - \text{sen}^2 \varphi}{\text{sen}^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{\text{sen}^2 \varphi} = \cot^2 \varphi.$$

Portanto, paralelos em S^2 possuem curvaturas geodésicas constantes $k_g(s) = |\cot \varphi|$. Logo, o paralelo C é uma geodésica ($k_g(s) = 0$) se, e somente se, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, i.e., apenas o equador (Veja Figura 20).

Figura 20 – Curvatura geodésica de C na esfera S^2 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos que o resultado condiz com os cálculos feitos no Exemplo 3.3.

Outra consequência da Equação (3.7) é tal que, quando duas superfícies S_1 e S_2 são tangentes ao longo de uma curva regular C , o valor absoluto da curvatura geodésica $k_g(s)$ é o mesmo relativo a qualquer uma das duas superfícies.

3.4 EXPRESSÃO DO VALOR ALGÉBRICO

Nesta seção, iremos obter uma expressão para o valor algébrico $[(D\omega/dt)(t)]$ da derivada covariante. Para tal, precisamos de alguns conceitos preliminares. Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e $\nu(t)$, $\omega(t)$ dois campos diferenciáveis de vetores unitários ao longo de $\alpha(t)$, isto é, $|\nu(t)| = |\omega(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

Seja $\bar{\nu}(t) = N(t) \wedge \nu(t)$. Então $\{\nu(t), \bar{\nu}(t)\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$. Assim, o campo $\omega(t)$ pode ser expresso pela combinação linear:

$$\omega(t) = a(t) \nu(t) + b(t) \bar{\nu}(t), \quad (3.8)$$

onde $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis com $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$. Então, fixada uma determinação φ_0 do ângulo de $\nu(t_0)$ à $\omega(t_0)$, podemos escrever, $a(t_0) = \cos \varphi_0$ e $b(t_0) = \sin \varphi_0$. Assim, existe uma *única* função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\varphi(t_0) = \varphi_0$ e $a(t) = \cos \varphi(t)$, $b(t) = \sin \varphi(t)$ para todo $t \in I$.

Lema 3.1 (Determinação angular (do Carmo, 2005, p. 299)). *Sejam $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis com $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$ e φ_0 tal que $a(t_0) = \cos \varphi_0$ e $b(t_0) = \sin \varphi_0$. Então a função*

diferenciável:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (a(t) b'(t) - b(t) a'(t)) dt,$$

é tal que $\cos \varphi(t) = a(t)$, $\sin \varphi(t) = b(t)$ para todo $t \in I$ e $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

Demonstração. É suficiente mostrar que a função:

$$(a(t) - \cos \varphi(t))^2 + (b(t) - \sin \varphi(t))^2 = 2 - 2(a(t) \cos \varphi(t) + b(t) \sin \varphi(t)),$$

é identicamente nula (isto é, $a(t) = \cos \varphi(t)$ e $b(t) = \sin \varphi(t)$). Assim,

$$A(t) = a(t) \cos \varphi(t) + b(t) \sin \varphi(t) = 1. \quad (3.9)$$

Por hipótese, $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$. Então, $a(t) a'(t) = -b(t) b'(t)$. Portanto, ao derivarmos a função $\varphi(t)$ em relação à variável t segue:

$$\varphi'(t) = a(t) b'(t) - b(t) a'(t).$$

Multiplicando por $b(t)$ ambos os membros segue,

$$b(t) \varphi'(t) = a(t) b'(t) b(t) - b^2(t) a'(t) = -a^2(t) a'(t) - b^2(t) a'(t) = -(a^2 + b^2) a'(t).$$

Analogamente, multiplicando $\varphi'(t)$ por $a(t)$ obtemos:

$$a(t) \varphi'(t) = (a^2 + b^2) b'(t).$$

Derivando a Equação (3.9), utilizando a regra da cadeia e do produto, obtemos:

$$\begin{aligned} A'(t) &= a'(t) \cos \varphi(t) - a(t) \sin \varphi(t) \varphi'(t) + b'(t) \sin \varphi(t) + b(t) \cos \varphi(t) \varphi'(t) \\ &= -b'(t) \sin \varphi(t) (a^2 + b^2) - a'(t) \cos \varphi(t) (a^2 + b^2) \\ &\quad + a'(t) \cos \varphi(t) + b'(t) \sin \varphi(t) \\ &= -b'(t) \sin \varphi(t) - a'(t) \cos \varphi(t) + a'(t) \cos \varphi(t) + b'(t) \sin \varphi(t) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $A(t)$ é uma função constante e como por hipótese $a(t_0) = \cos \varphi_0$ e $b(t_0) = \sin \varphi_0$, então $A(t_0) = \cos \varphi_0 \cos \varphi(t_0) + \sin \varphi_0 \sin \varphi(t_0)$. Finalmente, concluímos que $A(t) = 1$ se $\varphi(t_0) = \varphi_0$ e assim $\cos \varphi(t) = a(t)$, $\sin \varphi(t) = b(t)$ para todo $t \in I$. \square

A partir disto, podemos relacionar a derivada covariante de dois campos diferenciáveis de vetores unitários ao longo de uma curva com a variação do ângulo formado por eles.

Lema 3.2 (Variação angular entre campos (do Carmo, 2005, p. 300)). *Sejam $v(t)$ e $\omega(t)$ dois campos diferenciáveis de vetores ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow S$, com $|v(t)| = |\omega(t)| = 1$*

para todo $t \in I$. Então,

$$\left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] - \left[\frac{Dv}{dt}(t) \right] = \frac{d\varphi}{dt}(t),$$

onde $\varphi(t)$ é uma determinação diferenciável do ângulo de $v(t)$ à $\omega(t)$, como dado no Lema 3.1.

Demonstração. Sejam $\bar{v}(t) = N(t) \wedge v(t)$, $\bar{\omega}(t) = N(t) \wedge \omega(t)$ e $\varphi(t)$ uma determinação diferenciável do ângulo de $v(t)$ à $\omega(t)$ como dado no Lema 3.1, isto é,

$$\omega(t) = \cos \varphi(t) v(t) + \text{sen } \varphi(t) \bar{v}(t),$$

pela Equação (3.8). Portanto, temos que:

$$\omega'(t) = -\text{sen } \varphi(t) \varphi'(t) v(t) + \cos \varphi(t) v'(t) + \cos \varphi(t) \varphi'(t) \bar{v}(t) + \text{sen } \varphi(t) \bar{v}'(t),$$

e,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(t) &= N(t) \wedge \omega(t) = \cos \varphi(t) (N(t) \wedge v(t)) + \text{sen } \varphi(t) (N(t) \wedge \bar{v}(t)) \\ &= \cos \varphi(t) \bar{v}(t) - \text{sen } \varphi(t) v(t). \end{aligned}$$

Em vista disto, como $[(D\omega/dt)(t)] = \langle \omega'(t), \bar{\omega}(t) \rangle$, então:

$$\begin{aligned} \left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] &= \langle -\text{sen } \varphi(t) \varphi'(t) v(t) + \cos \varphi(t) v'(t) \\ &\quad + \cos \varphi(t) \varphi'(t) \bar{v}(t) + \text{sen } \varphi(t) \bar{v}'(t), \cos \varphi(t) \bar{v}(t) - \text{sen } \varphi(t) v(t) \rangle \\ &= -\text{sen } \varphi(t) \cos \varphi(t) \varphi'(t) \langle v(t), \bar{v}(t) \rangle + \cos^2 \varphi(t) \langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle \\ &\quad + \cos^2 \varphi(t) \varphi'(t) \langle \bar{v}(t), \bar{v}(t) \rangle + \text{sen } \varphi(t) \cos \varphi(t) \langle \bar{v}'(t), \bar{v}(t) \rangle \\ &\quad + \text{sen}^2 \varphi(t) \varphi'(t) \langle v(t), v(t) \rangle - \text{sen } \varphi(t) \cos \varphi(t) \langle v'(t), v(t) \rangle \\ &\quad - \text{sen } \varphi(t) \cos \varphi(t) \varphi'(t) \langle \bar{v}(t), v(t) \rangle - \text{sen } \varphi^2(t) \langle \bar{v}'(t), v(t) \rangle \\ &= \cos^2 \varphi(t) \langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle + \varphi'(t) (\text{sen}^2 \varphi(t) + \cos^2 \varphi(t)) \\ &\quad - \text{sen}^2 \varphi(t) \langle \bar{v}'(t), v(t) \rangle \\ &= \varphi'(t) + \langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle \\ &= \frac{d\varphi}{dt}(t) + \left[\frac{Dv}{dt}(t) \right], \end{aligned}$$

pois, como $\langle v(t), v(t) \rangle = \langle \bar{v}(t), \bar{v}(t) \rangle = 1$ e $\langle v(t), \bar{v}(t) \rangle = 0$, para todo $t \in I$, segue que $\langle v(t), v'(t) \rangle = \langle \bar{v}(t), \bar{v}'(t) \rangle = 0$ e $\langle v'(t), \bar{v}(t) \rangle = -\langle \bar{v}'(t), v(t) \rangle$. Logo,

$$\left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] - \left[\frac{Dv}{dt}(t) \right] = \frac{d\varphi}{dt}(t).$$

□

Como consequência do Lema 3.2 segue que se C é uma curva orientada regular em uma superfície S , $\alpha : I \rightarrow C$ uma parametrização pelo comprimento de arco $s(t)$ em uma vizinhança de $p \in S$ positivamente orientada e $v(s)$ um campo paralelo unitário ao longo de $\alpha(s)$, então para o campo tangente $\omega(s) = \alpha'(s)$:

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'}{ds}(s) \right] = \frac{d\varphi}{ds}(s).$$

Ou seja, podemos caracterizar a curvatura geodésica $k_g(s)$ como a *taxa de variação do ângulo que a tangente à curva faz com uma direção paralela ao longo da curva*. No caso do plano Π temos que $\alpha'(s) = \cos \varphi(s) (1, 0, 0) + \sin \varphi(s) (0, 1, 0)$, isto é, a direção paralela é fixa dada por $(1, 0, 0)$ e a curvatura geodésica $k_g(s)$ reduz-se à curvatura $k(s)$ usual.

Proposição 3.8 (Expressão do valor algébrico (do Carmo, 2005, p. 301)). *Seja S uma superfície orientada e $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(A) \subset S$ uma parametrização ortogonal compatível com a orientação de S . Seja $\omega(t)$ um campo diferenciável de vetores unitários ao longo da curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Então:*

$$\left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}(t),$$

onde $\varphi(t)$ é a determinação do ângulo de X_u à $\omega(t)$ na orientação de S dada.

Demonstração. Inicialmente, observamos que:

$$\left\{ \frac{X_u}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}}, N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}} \right\},$$

é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 . Em vista disto, sejam:

$$e_1(t) = \frac{X_u(u(t), v(t))}{\sqrt{E(u(t), v(t))}}, \quad e_2(t) = N(t) \wedge e_1(t) = \frac{X_v(u(t), v(t))}{\sqrt{G(u(t), v(t))}},$$

os vetores tangentes unitários às curvas coordenadas. Assim, considerando o campo $\omega(t)$ como $\omega(t) = \cos \varphi(t) e_1(t) + \sin \varphi(t) e_2(t)$ temos pelo Lema 3.2,

$$\left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] - \left[\frac{De_1}{dt}(t) \right] = \frac{d\varphi}{dt}(t) \implies \left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] = \left[\frac{De_1}{dt}(t) \right] + \frac{d\varphi}{dt}(t).$$

Portanto, pela Equação (3.5) temos que:

$$\begin{aligned} \left[\frac{De_1}{dt}(t) \right] &= \left\langle \frac{de_1}{dt}(t), N(t) \wedge e_1(t) \right\rangle = \left\langle (e_1)_u \frac{du}{dt} + (e_1)_v \frac{dv}{dt}, e_2(t) \right\rangle \\ &= \langle (e_1)_u, e_2(t) \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2(t) \rangle \frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

Ademais, X_u e X_v são ortogonais, isto é, $\langle X_u, X_v \rangle = 0$. Então, $\langle X_{uu}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{vu} \rangle$, e assim,

$$E_v = 2 \langle X_{uv}, X_u \rangle \implies \langle X_{uu}, X_v \rangle = -\frac{E_v}{2}, \quad G_u = 2 \langle X_{vu}, X_v \rangle \implies \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{G_u}{2}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle (e_1)_u, e_2(t) \rangle &= \left\langle \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \left\langle \frac{(X_u)_u \sqrt{E} - (\sqrt{E})_u X_u}{(\sqrt{E})^2}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{X_{uu}}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle - \left\langle \frac{X_u E_u}{2\sqrt{E}^3}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle X_{uu}, X_v \rangle = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \langle (e_1)_v, e_2(t) \rangle &= \left\langle \left(\frac{X_u}{\sqrt{E}} \right)_v, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \left\langle \frac{(X_u)_v \sqrt{E} - (\sqrt{E})_v X_u}{(\sqrt{E})^2}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{X_{uv}}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle - \left\langle \frac{X_u E_v}{2\sqrt{E}^3}, \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[\frac{D\omega}{dt}(t) \right] = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{dt} + \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}(t).$$

□

Como aplicação da Proposição 3.8, provaremos a existência e a unicidade do campo paralelo (Proposição 2.2) visto na Seção 2.4.

Demonstração. (Proposição 2.2) Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada tal que $\alpha(t) \in X(A)$ para todo $t \in I$ onde $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(A) \subset S$ é uma parametrização ortogonal de S . Em vista disto, temos $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ e, pela Equação (3.8),

$$\omega(t) = \cos \varphi(t) \frac{X_u}{\sqrt{E}}(u(t), v(t)) + \sin \varphi(t) \frac{X_v}{\sqrt{G}}(u(t), v(t)),$$

onde φ_0 é a determinação do ângulo de $(X_u/\sqrt{E})(t_0)$ à ω_0 na orientação de S dada. Portanto, como $\omega(t)$ é um campo paralelo, então pela Proposição 3.8 obtemos:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} = B(t).$$

Logo,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t B(t) dt,$$

demonstrando a existência e unicidade do campo $\omega(t)$ pelo Lema 3.1.

Caso $\alpha(I)$ não esteja contido em uma única vizinhança coordenada de S , utilizamos a compacidade do intervalo I para dividi-lo em um número finito de subintervalos, como na Expressão (2.11), de forma que cada arco regular $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k$, esteja contido em uma vizinhança coordenada. Por fim, utilizando a existência e unicidade obtida na primeira parte, provamos a existência e unicidade do campo $\omega(t)$ ao longo da curva $\alpha(t)$. \square

3.5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DAS GEODÉSICAS

Uma outra aplicação da Proposição 3.8 é a expressão para a curvatura geodésica $k_g(s)$ conhecida como *fórmula de Liouville*.

Proposição 3.9 (Fórmula de Liouville (do Carmo, 2005, p. 303)). *Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S . Consideremos $\alpha(s)$ uma parametrização de C em uma vizinhança de $p \in S$ pelo comprimento de arco $s(t)$ positivamente orientada. Suponhamos que $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(A) \subset S$ é uma parametrização ortogonal de S em p compatível com a orientação da superfície e $\varphi(s)$ é a determinação do ângulo de X_u à $\alpha'(s)$. Então:*

$$k_g(s) = (k_g)_1 \cos \varphi(s) + (k_g)_2 \sin \varphi(s) + \frac{d\varphi}{ds}(s),$$

onde $(k_g)_1$ e $(k_g)_2$ são as curvaturas geodésicas das curvas coordenadas $v = \text{constante}$ e $u = \text{constante}$, respectivamente.

Demonstração. Consideremos o campo $\omega(s) = \alpha'(s) = \cos \varphi(s) \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \sin \varphi(s) \frac{X_v}{\sqrt{G}}$. Dessa forma, pela Equação (3.6) e Proposição 3.8, obtemos:

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi}{ds}(s), \quad (3.10)$$

Isto posto, como $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ e assim,

$$\alpha'(s) = u'(s) X_u(u(s), v(s)) + v'(s) X_v(u(s), v(s)).$$

Então, ao longo da curva coordenada $v = \text{constante}$ e $u = u(s)$ temos $\frac{dv}{ds} = 0$ e $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}$. Portanto, analogamente para a curva coordenada $v = v(s)$ e $u = \text{constante}$, temos pela Equação (3.10):

$$(k_g)_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \quad (k_g)_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}}.$$

Por conseguinte, ao introduzirmos as relações obtidas anteriormente na Equação (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} k_g(s) &= \frac{G_u}{2\sqrt{G}\sqrt{E}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{G}\sqrt{E}} \frac{du}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}(s) \\ &= (k_g)_1 \sqrt{E} \frac{du}{ds} + (k_g)_2 \sqrt{G} \frac{dv}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}(s). \end{aligned}$$

Finalmente, como:

$$\sqrt{E} \frac{du}{ds} = \left\langle \alpha'(s), \frac{X_u}{\sqrt{E}} \right\rangle = \cos \varphi(s), \quad \sqrt{G} \frac{dv}{ds} = \left\langle \alpha'(s), \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \sin \varphi(s),$$

segue,

$$k_g(s) = (k_g)_1 \cos \varphi(s) + (k_g)_2 \sin \varphi(s) + \frac{d\varphi}{ds}(s).$$

□

Determinaremos agora as equações de uma curva geodésica parametrizada em uma vizinhança coordenada de uma superfície orientada S . Para tal, seja $\gamma: I \rightarrow S$ uma curva parametrizada em S e $X: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(A) \subset S$ uma parametrização de S em uma vizinhança V do ponto $\gamma(t_0)$, onde $t_0 \in I$.

Sejam $J \subset I$ um intervalo aberto contendo t_0 tal que $\gamma(J) \subset V$, e $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in J$, a expressão de $\gamma: J \rightarrow S$ na parametrização X . A partir disto, como o campo tangente $\omega(t) = \gamma'(t)$, $t \in J$, é dado por:

$$\omega(t) = u'(t)X_u(t) + v'(t)X_v(t),$$

então, o fato de $\omega(t)$ ser um campo paralelo é equivalente ao sistema de equações diferenciais (não-linear) dado por:

$$\begin{cases} u''(t) + \Gamma_{11}^1 (u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1 (v'(t))^2 = 0, \\ v''(t) + \Gamma_{11}^2 (u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2 (v'(t))^2 = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

obtido pela Equação (2.10) tomando $a(t) = u'(t)$, $b(t) = v'(t)$ e igualando a zero os coeficientes

de $X_u(t)$ e $X_v(t)$. Em outras palavras, $\gamma : I \rightarrow S$ é uma geodésica se, e somente se, o Sistema (3.11) é satisfeito para todo intervalo aberto $J \subset I$ tal que $\gamma(J) \subset V$. Denotamos o Sistema (3.11) como *equações diferenciais das geodésicas de S* .

Proposição 3.10 (Unicidade da geodésica). *Dados um ponto $p \in S$ e um vetor $w \in T_p S$, $w \neq 0$, existem $\varepsilon > 0$ e uma única curva geodésica parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = w$.*

Demonstração. Sejam $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(A) \subset S$ uma parametrização de S em $p = X(u_0, v_0)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$. Pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, existem $\varepsilon > 0$ e uma única solução,

$$\beta(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

do Sistema (3.11) de maneira que $\beta(0) = (u_0, v_0)$ e $\beta'(0) = (a, b)$. Logo, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a única geodésica de S tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = aX_u + bX_v = w$. \square

A razão pela qual consideramos $w \neq 0$ na Proposição 3.10 acima vem do fato de termos excluído curvas constantes na Definição 3.6 de geodésicas parametrizadas. Ademais, isso mostra que os círculos maximais são as únicas geodésicas da esfera S^2 no Exemplo 3.3.

4 APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

4.1 PARABOLOIDES PARAMETRIZADOS

Exemplo 4.1 (Parabolóide Elíptico). Seja S o parabolóide elíptico dado pela parametrização $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (av \cos u, bv \sin u, v^2)$, onde $a, b > 0$ são constantes, $v \in [0, +\infty)$ e $u \in [0, 2\pi]$. Determinemos as curvas geodésicas em S . De início, calculamos os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$X_u(u, v) = (-av \sin u, bv \cos u, 0), \quad X_v(u, v) = (a \cos u, b \sin u, 2v),$$

por conseguinte,

$$\begin{cases} E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = v^2 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u), \\ F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = \sin u \cos u (b^2 - a^2) v, \\ G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + 4v^2, \end{cases}$$

assim, $EG - F^2 = a^2 b^2 v^2 + 4v^4 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)$. Ademais, temos as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} E_u(u, v) &= 2v^2 (a^2 - b^2) \sin u \cos u, & E_v(u, v) &= 2v (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u), \\ F_u(u, v) &= v (b^2 - a^2) (\cos^2 u - \sin^2 u), & F_v(u, v) &= (b^2 - a^2) \sin u \cos u, \\ G_u(u, v) &= 2 (b^2 - a^2) \sin u \cos u, & G_v(u, v) &= 8v. \end{aligned}$$

Observamos que continuar com os cálculos à mão se torna uma tarefa laboriosa. De fato, calculando apenas um dos símbolos de Christoffel obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1(u, v) &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + 4v^2)(2v^2 (a^2 - b^2) \sin u \cos u)}{2(a^2 b^2 v^2 + 4v^4 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u))} \\ &\quad - \frac{2(\sin u \cos u (b^2 - a^2) v)(v (b^2 - a^2) (\cos^2 u - \sin^2 u))}{2(a^2 b^2 v^2 + 4v^4 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u))} \\ &\quad + \frac{(\sin u \cos u (b^2 - a^2) v)(2v (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u))}{2(a^2 b^2 v^2 + 4v^4 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u))}. \end{aligned}$$

Isto acontece pois estamos lidando com uma superfície regular sem nenhum tipo de simetria e, portanto, os cálculos não se simplificam durante as etapas. Em contrapartida, consideremos o caso onde $a = b = 1$, isto é, o parabolóide gerado pela rotação de uma parábola em

torno do eixo Oz . Em vista disto, temos o exemplo a seguir.

Exemplo 4.2 (Paraboloide de revolução). Seja S o paraboloido de revolução dado pela parametrização regular $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2)$, onde $v \in [0, +\infty)$ e $u \in [0, 2\pi]$.

Isto posto, temos agora uma simetria axial fazendo com que os cálculos e quantidades simplifiquem substancialmente em comparação com o Exemplo 4.1. Com efeito, calculamos os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$X_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0), \quad X_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 2v),$$

dessa forma,

$$\begin{cases} E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = v^2, \\ F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + 4v^2, \end{cases}$$

assim, $EG - F^2 = v^2(1 + 4v^2)$ com derivadas parciais:

$$E_u(u, v) = F_u(u, v) = F_v(u, v) = G_u(u, v) = 0, \quad E_v(u, v) = 2v, \quad G_v(u, v) = 8v.$$

Observamos que estamos lidando com uma parametrização ortogonal da superfície S . Por fim, utilizando as Equações (2.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1(u, v) &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} = 0, & \Gamma_{11}^2(u, v) &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = -\frac{v}{(1 + 4v^2)}, \\ \Gamma_{12}^1(u, v) &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{v}, & \Gamma_{12}^2(u, v) &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = 0, \\ \Gamma_{22}^1(u, v) &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} = 0, & \Gamma_{22}^2(u, v) &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} = \frac{4v}{(1 + 4v^2)}. \end{aligned}$$

Substituindo as quantidades obtidas acima no Sistema (3.11) temos

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{2u'(t)v'(t)}{v(t)} = 0, \\ v''(t) - \frac{v(t)(u'(t))^2}{1 + 4(v(t))^2} + \frac{4v(t)(v'(t))^2}{1 + 4(v(t))^2} = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Temos algumas conclusões a partir desse sistema de equações. De início, os meridianos $u = \text{constante}$ e $v = v(s)$ parametrizados pelo comprimento de arco $s(t)$ são geodésicas. De fato,

a primeira equação do Sistema (4.1) é trivialmente satisfeita por $u = \text{constante}$ ($u'(s) = u''(s) = 0$) e a segunda equação torna-se:

$$v''(s) + \frac{4v(s)(v'(s))^2}{1+4(v(s))^2} = 0 \implies v''(s) = -\frac{4v(s)(v'(s))^2}{1+4(v(s))^2}.$$

Calculando a primeira forma fundamental $I_p(w)$, $w = a(s)X_u(s) + b(s)X_v(s)$, ao longo do meridiano parametrizado pelo comprimento de arco $s(t)$ temos que

$$\begin{aligned} I_p(w) &= I_p(a(s), b(s)) = \begin{bmatrix} a(s) & b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) & F(s) \\ F(s) & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(s) \\ b(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & v'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v(s))^2 & 0 \\ 0 & 1+4(v(s))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v'(s) \end{bmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Assim, segue que:

$$(1+4(v(s))^2)(v'(s))^2 = 1 \implies (v'(s))^2 = \frac{1}{1+4(v(s))^2}, \quad (4.2)$$

Derivando com respeito ao comprimento de arco $s(t)$ segue que

$$\begin{aligned} 2v'(s)v''(s) &= -\frac{8v(s)v'(s)}{(1+4(v(s))^2)^2} \stackrel{(4.2)}{=} -\frac{8v(s)(v'(s))^3}{1+4(v(s))^2} \\ \implies v''(s) &= -\frac{4v(s)(v'(s))^2}{1+4(v(s))^2}, \end{aligned}$$

como queríamos. Por outro lado, no caso dos paralelos parametrizados $u = u(s)$ e $v = \text{const.}$ segue da primeira equação do Sistema (4.1):

$$u''(s) = 0 \implies u'(s) = \text{const.}$$

Logo,

$$\frac{v(s)(u'(s))^2}{1+4(v(s))^2} = 0 \implies v(s) = 0.$$

Portanto, nenhum paralelo será uma geodésica no parabolóide de revolução. Vejamos agora a obtenção de curvas geodésicas que não são paralelos e nem meridianos, ou seja, $u = u(s)$ e $v = v(s)$. Consideremos a primeira equação do Sistema (4.1),

$$v(s)u''(s) = -2u'(s)v'(s) \implies \frac{u''(s)}{u'(s)} = -2\frac{v'(s)}{v(s)},$$

Esta é uma equação diferencial do tipo separável. Dessa forma, ao resolvermos em relação ao comprimento de arco $s(t)$, obtemos:

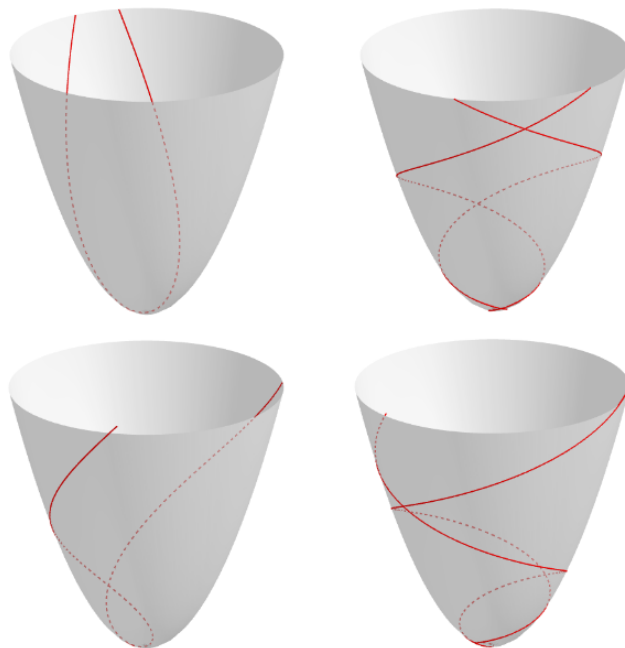
$$\ln u'(s) = -2 \ln v(s) + \ln c \implies u'(s) = \frac{c}{(v(s))^2} \implies u(s) = \int_{s_0}^s \frac{c}{(v(s))^2} ds + K. \quad (4.3)$$

Finalmente, como supomos que a geodésica do parabolóide está parametrizada pelo comprimento de arco, podemos obter a primeira forma fundamental. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} I_p(u'(s), v'(s)) &= \begin{bmatrix} u'(s) & v'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v(s))^2 & 0 \\ 0 & 1 + 4(v(s))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} = 1 \\ \implies (v(s))^2 (u'(s))^2 + (1 + 4(v(s))^2) (v'(s))^2 &= 1 \\ \stackrel{(4.3)}{\implies} (v(s))^2 \left(\frac{c^2}{(v(s))^4} \right) + (1 + 4(v(s))^2) (v'(s))^2 &= 1 \\ \implies v'(s) = \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{(v(s))^2} \right) \left(\frac{1}{1 + 4(v(s))^2} \right)} &= F(v). \end{aligned}$$

Logo, esta será a solução geral de uma curva geodésica em um parabolóide que não é um meridiano parametrizado (Ver Figura 21).

Figura 21 – Exemplos de geodésicas no parabolóide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Nesta seção iremos estudar as curvas geodésicas parametrizadas em superfícies de revolução. Nesse sentido, utilizaremos o Sistema (3.11) para estudar localmente as geodésicas de uma superfície dada pela parametrização regular:

$$\begin{aligned} X : [0, 2\pi] \times (a, b) &\longrightarrow S \subset \mathbf{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \operatorname{sen} u, g(v)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $f(v) > 0$ para $v \in (a, b)$. Inicialmente, determinemos os coeficientes da primeira forma fundamental I_p , para tal:

$$X_u(u, v) = (-f(v) \operatorname{sen} u, f(v) \cos u, 0), \quad X_v(u, v) = (f'(v) \cos u, f'(v) \operatorname{sen} u, g'(v)),$$

por conseguinte,

$$\begin{cases} E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = (f(v))^2 \operatorname{sen}^2 u + (f(v))^2 \cos^2 u = (f(v))^2, \\ F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = (f'(v))^2 \cos^2 u + (f'(v))^2 \operatorname{sen}^2 u + (g'(v))^2 \\ \quad = (f'(v))^2 + (g'(v))^2, \end{cases}$$

assim, $EG - F^2 = (f(v))^2 ((f'(v))^2 + (g'(v))^2)$. Observamos que X é uma parametrização ortogonal da superfície S . Ademais, temos as derivadas parciais:

$$E_u(u, v) = F_u(u, v) = F_v(u, v) = G_u(u, v) = 0,$$

$$E_v(u, v) = 2f(v)f'(v), \quad G_v(u, v) = 2(f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)).$$

De posse das expressões anteriores, calculamos os símbolos de Christoffel para a parametrização (4.4) utilizando as Equações (2.9). Segue que:

$$\Gamma_{11}^1(u, v) = \Gamma_{12}^2(u, v) = \Gamma_{22}^1(u, v) = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2(u, v) = -\frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2},$$

$$\Gamma_{12}^1(u, v) = \frac{f(v)f'(v)}{(f(v))^2},$$

$$\Gamma_{22}^2(u, v) = \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}.$$

Com tais valores, o Sistema (3.11) de equações diferenciais será dado por:

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{2f(v)f'(v)}{(f(v))^2} u'(t)v'(t) = 0, \\ v''(t) - \frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} (u'(t))^2 + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} (v'(t))^2 = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Obtemos alguns resultados a partir deste sistema de equações. A princípio, verificamos que os meridianos $u = \text{constante}$ e $v = v(s)$ parametrizados pelo comprimento de arco $s(t)$ são curvas geodésicas. De fato, a primeira equação do Sistema (4.5) é trivialmente satisfeita, pois $u(s) = u_0 = \text{constante}$. Por outro lado, a segunda equação torna-se:

$$v''(s) + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} (v'(s))^2 = 0.$$

De fato, calculando a primeira forma fundamental I_p ao longo do meridiano parametrizado pelo comprimento de arco $s(t)$, obtemos:

$$I_p(0, v'(s)) = \begin{bmatrix} 0 & v'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (f(v))^2 & 0 \\ 0 & (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v'(s) \end{bmatrix} = 1.$$

Em vista disto,

$$((f'(v))^2 + (g'(v))^2) (v'(s))^2 = 1 \implies (v'(s))^2 = \frac{1}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}, \quad (4.6)$$

para todo $s \in I$. Derivando a expressão acima com respeito ao comprimento de arco $s(t)$ segue que

$$\begin{aligned} 2v'(s)v''(s) &= -\frac{2(f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v))}{((f'(v))^2 + (g'(v))^2)^2} (v'(s)) \\ &\stackrel{(4.6)}{=} -\frac{2(f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v))}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} (v'(s))^3. \end{aligned}$$

Logo, obtemos:

$$v''(s) = -\frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} (v'(s))^2, \quad v'(s) \neq 0.$$

Portanto, a segunda equação do Sistema (4.5) também é satisfeita. Outra maneira de verificarmos que os meridianos são geodésicas consiste em observarmos que o vetor aceleração de um meridiano é paralelo ao vetor normal à superfície, visto que é uma seção normal de S . Assim, a derivada covariante do vetor tangente ao meridiano é nula.

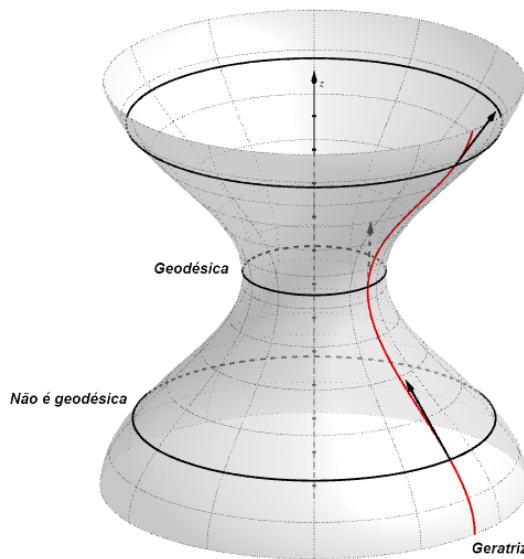
Agora, iremos determinar quais paralelos $u = u(s)$ e $v = \text{const.}$ parametrizados pelo comprimento do arco $s(t)$ são geodésicas parametrizadas de S . Segue da primeira das Equações (4.5) que $u''(s) = 0 \implies u'(s) = \text{const.}$ Por outro lado, a segunda equação afirma que:

$$\frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} (u'(s))^2 = 0.$$

Logo, para que o paralelo seja uma curva geodésica é necessário que $f'(v) = 0$, uma vez que, por hipótese, $f(v) > 0$ para todo $v \in (a, b)$.

Em outras palavras, uma condição necessária para que um paralelo de uma superfície de revolução S seja geodésica é que o vetor tangente à geratriz da superfície no ponto que dá origem ao paralelo é paralelo ao eixo de revolução. Esta condição é suficiente, uma vez que implica que o vetor aceleração é paralelo ao vetor normal à superfície e, portanto, a derivada covariante do vetor tangente ao paralelo é nula (Ver Figura 22).

Figura 22 – Geodésicas na superfície de revolução.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante observarmos uma consequência geométrica da primeira equação do Sistema (4.5) de equações diferenciais. Como $f(v) > 0$ para todo $v \in (a, b)$, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$((f(v))^2 u'(t))' = (f(v))^2 u''(t) + 2f(v)f'(v)u'(t)v'(t) = 0.$$

Consequentemente,

$$(f(v))^2 u'(t) = \text{const.} = c. \tag{4.7}$$

Por outro lado, o ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ de uma curva geodésica $X(u(s), v(s))$ parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$ com um paralelo que a intersecta é dado por:

$$\cos \theta = \frac{|\langle X_u, u'(s)X_u + v'(s)X_v \rangle|}{|X_u|} = |f(v)u'(s)|,$$

pois $|X_u|^2 = \langle X_u, X_u \rangle = (f(v))^2$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ na base $\{X_u, X_v\}$ associada à parametrização. Isto posto, visto que $f(v) = r$ é o raio do paralelo no ponto de interseção e utilizando da Equação (4.7), obtemos o que denotamos como *relação de Clairaut* para superfícies de revolução:

$$r \cos \theta = \text{const.} = |c|. \quad (4.8)$$

Finalmente, seja $u = u(s)$ e $v = v(s)$ uma curva geodésica parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$, que iremos supor não ser um meridiano ou um paralelo da superfície de revolução S . Dessa forma, calculando sua primeira forma fundamental I_p , obtemos:

$$I_p(u'(s), v'(s)) = \begin{bmatrix} u'(s) & v'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (f(v))^2 & 0 \\ 0 & (f'(v))^2 + (g'(v))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} = 1.$$

Segue assim que,

$$(f(v))^2 (u'(s))^2 + ((f'(v))^2 + (g'(v))^2) (v'(s))^2 = 1, \quad (4.9)$$

que conjuntamente com a Equação (4.7), é equivalente à segunda equação do Sistema (4.5). De fato, substituindo os valores obtidos na equação acima temos,

$$((f'(v))^2 + (g'(v))^2) \left(\frac{dv}{ds}(s) \right)^2 + \frac{c^2}{(f(v))^2} = 1,$$

pois $(u'(s))^2 = \frac{c^2}{(f(v))^4}$. Assim, derivando com relação ao comprimento de arco $s(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \frac{dv}{ds} \left(\frac{d^2v}{ds^2}(s) \right) ((f')^2 + (g')^2) + \left(\frac{dv}{ds}(s) \right)^2 (2f'f'' + 2g'g'') \left(\frac{dv}{ds}(s) \right) \\ = \frac{2ff'c^2}{f^4} \left(\frac{dv}{ds}(s) \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por último, multiplicando a Equação (4.10) acima por $\frac{1}{2v'((f')^2 + (g')^2)}$ e substituindo

$\frac{c^2}{f^4} = (u')^2$, obtemos a segunda equação do Sistema (4.5):

$$v''(s) - \frac{f(v)f'(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} (u'(s))^2 + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f'(v))^2 + (g'(v))^2} (v'(s))^2 = 0.$$

Desta forma, uma curva geodésica pode ser tangente à um paralelo de S que não é uma geodésica com $v'(s) = 0$. No entanto, pela relação de Clairaut (4.8) e pela unicidade das geodésicas na Proposição 3.10, tal fato acontece apenas em pontos isolados.

Por outro lado, como $c \neq 0$ e, por hipótese, a geodésica não é um meridiano, obtemos $u'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Segue que podemos inverter¹ $u = u(s)$, obtendo $s = s(u)$, e, assim, $\bar{v}(u) = v(s(u))$. Multiplicando a Equação (4.9) por $\left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 &= (f(\bar{v}))^2 \left(\frac{du}{ds}(s(u))\right)^2 \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 \\ &\quad + ((f'(\bar{v}))^2 + (g'(\bar{v}))^2) \left(\frac{dv}{ds}(s(u))\right)^2 \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 = (f(\bar{v}))^2 + ((f'(\bar{v}))^2 + (g'(\bar{v}))^2) \left(\frac{d\bar{v}}{du}(u)\right)^2.$$

Em contrapartida, pela Equação (4.7) obtemos a seguinte relação:

$$\left(\frac{du}{ds}(s)\right)^2 = \frac{c^2}{(f(v(s)))^4} \implies \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^2 = \frac{(f(\bar{v}(u)))^4}{c^2}, \quad (4.11)$$

por conseguinte,

$$\begin{aligned} \frac{(f(\bar{v}))^4}{c^2} &= (f(\bar{v}))^2 + ((f'(\bar{v}))^2 + (g'(\bar{v}))^2) \left(\frac{d\bar{v}}{du}(u)\right)^2 \\ \implies (f(\bar{v}))^2 &= c^2 + c^2 \frac{((f'(\bar{v}))^2 + (g'(\bar{v}))^2)}{(f(\bar{v}))^2} \left(\frac{d\bar{v}}{du}(u)\right)^2 \\ \implies \left(\frac{d\bar{v}}{du}(u)\right)^2 &= \frac{(f(\bar{v}))^2}{c^2} \frac{(f(\bar{v}))^2 - c^2}{(f'(\bar{v}))^2 + (g'(\bar{v}))^2}. \end{aligned}$$

¹ Lima, Elon L. (2014). Análise real volume 2. Teorema da Aplicação inversa, p. 115.

Logo, como $v'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$, segue que

$$\frac{du}{d\bar{v}}(\bar{v}(u)) = \frac{1}{\frac{d\bar{v}}{du}(u(\bar{v}))}.$$

Logo,

$$\frac{du}{d\bar{v}}(\bar{v}) = \pm \frac{c}{f(\bar{v})} \sqrt{\frac{(f'(\bar{v}))^2 + (g'(\bar{v}))^2}{(f(\bar{v}))^2 - c^2}}.$$

Integrando ambos os membros de v_0 a v obtemos

$$u(v) = \pm c \int_{v_0}^v \frac{1}{f(x)} \sqrt{\frac{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}{(f(x))^2 - c^2}} dx + K,$$

que é a equação de um segmento da curva geodésica para uma superfície de revolução que não é nem um paralelo nem um meridiano. Observamos que, como $\bar{v}(u) = v(s(u))$ e $s'(u) > 0$ para todo u e pela Equação (4.11), segue que o sinal '+' ocorre quando $v'(s(u)) > 0$ e o sinal '-' quando $v'(s(u)) < 0$.

5 RELAÇÃO E INTEGRAL DE CLAIRAUT

Sabemos que uma curva geodésica parametrizada $\gamma(t)$ pode ser obtida como solução do Sistema de equações diferenciais (não-linear) (3.11) dado um ponto e uma direção tangente de uma aplicação regular $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ como condições iniciais. Todavia, em uma parte significativa dos casos, as equações diferenciais geodésicas se tornam extremamente laboriosas ou simplesmente impossíveis de serem resolvidas sem a utilização de métodos numéricos.

Isto posto, existem certos casos onde a solução do sistema das geodésicas pode ser reduzida à integrais definidas. Em particular, uma curva geodésica parametrizada em uma superfície de revolução S pode ser obtida através da *relação de Clairaut*.

5.1 PARAMETRIZAÇÃO DE CLAIRAUT

Consideremos uma superfície parametrizada regular S dada pela aplicação $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ como na Definição 2.1. Fixado um ponto $p = (u_0, v_0) \in A$, podemos denotar as curvas coordenadas $u \mapsto X(u, v_0)$ e $v \mapsto X(u_0, v)$ como *curva u -parâmetro* e *curva v -parâmetro*, respectivamente. Ademais, seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada regular em S . Então, pela Equação (2.5), a primeira forma fundamental de S é dada por:

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2.$$

Consideremos agora uma parametrização ortogonal da superfície S . Então, utilizando as Equações (2.9), temos que o Sistema (3.11) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{E_u}{2E} (u'(t))^2 + \frac{E_v}{E} u'(t) v'(t) - \frac{G_u}{2E} (v'(t))^2 = 0, \\ v''(t) - \frac{E_v}{2G} (u'(t))^2 + \frac{G_u}{G} u'(t) v'(t) + \frac{G_v}{2G} (v'(t))^2 = 0, \end{cases}$$

visto que neste caso,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1(u, v) &= \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{12}^1(u, v) &= \frac{E_v}{E}, & \Gamma_{22}^1(u, v) &= -\frac{G_u}{2E}, \\ \Gamma_{11}^2(u, v) &= -\frac{E_v}{2G}, & \Gamma_{12}^2(u, v) &= \frac{G_u}{2G}, & \Gamma_{22}^2(u, v) &= \frac{G_v}{2G}. \end{aligned}$$

Definição 5.1 (Parametrização de Clairaut (O'Neill, 2006, p. 353)). Uma v -parametrização de Clairaut $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização ortogonal tal que $E_u = G_u = 0$.

Observamos que pela Definição 5.1, a aplicação X em (4.4) de superfícies de revolução é uma v -parametrização de Clairaut. Relembrando na Proposição 3.7 que uma curva regular possuindo uma reparametrização pelo comprimento de arco como geodésica é denotada *pré-*

geodésica temos o seguinte lema.

Lema 5.1 (Lema de Clairaut (O'Neill, 2006, p. 353)). *Seja $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(A) \subset S$ uma v -parametrização de Clairaut. Então,*

- a) *As curvas v -parâmetro $X(u_0, v)$ são pré-geodésicas;*
- b) *Uma curva u -parâmetro $X(u, v_0)$ é uma geodésica se, e somente se, $E_v(u, v_0) = 0$.*

Demonstração. Inicialmente, consideremos a seguinte base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 :

$$\left\{ \frac{X_u}{\sqrt{E}}, \frac{X_v}{\sqrt{G}}, N = \frac{X_u \wedge X_v}{\sqrt{EG}} \right\},$$

e uma curva v -parâmetro $\gamma(t) = X(u_0, v(t))$. Dessa forma, $\gamma'(t) = v'(t) \frac{X_v}{\sqrt{G}}$ pois sua velocidade não possui componente na direção X_u . Portanto, derivando a expressão acima obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= v''(t) \frac{X_v}{\sqrt{G}} + \frac{v'(t)}{G} \left[(X_{vu} u'(t) + X_{vv} v'(t)) \sqrt{G} - \frac{1}{2\sqrt{G}} (G_u u'(t) + G_v v'(t)) X_v \right] \\ &= v''(t) \frac{X_v}{\sqrt{G}} + \frac{(v'(t))^2 X_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{(v'(t))^2 G_v X_v}{2G\sqrt{G}}. \end{aligned}$$

Para que $\gamma(t)$ seja uma geodésica, sua aceleração $\gamma''(t)$ deve ser normal à S em $(u(t), v(t))$ para todo $t \in I$, i.e. $\langle \gamma''(t), X_u(t) \rangle = \langle \gamma''(t), X_v(t) \rangle = 0$. De fato, como X é uma v -parametrização de Clairaut segue que

$$G_v = 2 \langle X_{vv}, X_v \rangle, \quad G_u = 2 \langle X_{vu}, X_v \rangle = 0, \quad F_v = \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle = 0.$$

Então,

$$\left\langle \gamma''(t), \frac{X_u}{\sqrt{E}} \right\rangle = \frac{v''(t)}{\sqrt{EG}} \langle X_v, X_u \rangle + \frac{(v'(t))^2}{\sqrt{EG}} \langle X_{vv}, X_u \rangle - \frac{(v'(t))^2 G_v}{2G\sqrt{EG}} \langle X_v, X_u \rangle = 0,$$

e,

$$\begin{aligned} \left\langle \gamma''(t), \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle &= \frac{v''(t)}{G} \langle X_v, X_v \rangle + \frac{(v'(t))^2}{G} \langle X_{vv}, X_v \rangle - \frac{(v'(t))^2 G_v}{2G^2} \langle X_v, X_v \rangle \\ &= v''(t) + \frac{(v'(t))^2 G_v}{2G} - \frac{(v'(t))^2 G_v}{2G} = 0 \iff v'(t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Logo, as curvas v -parâmetro $X(u_0, v(t))$ são pré-geodésicas, pois possuem velocidade unitária com aceleração paralela à normal da superfície S após reparametrização pelo comprimento de arco $s(t)$. Por outro lado, consideremos uma curva u -parâmetro $\delta(t) = X(u(t), v_0)$. Analogamente ao caso anterior temos $\delta'(t) = u'(t) \frac{X_u}{\sqrt{E}}$ e, visto que $E_u = 2 \langle X_{uu}, X_u \rangle = 0$ segue

que:

$$\begin{aligned}\delta''(t) &= u''(t) \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \frac{u'(t)}{E} \left[(X_{uu} u'(t) + X_{uv} v'(t)) \sqrt{E} - \frac{1}{2\sqrt{E}} (E_u u'(t) + E_v v'(t)) X_u \right] \\ &= u''(t) \frac{X_u}{\sqrt{E}} + \frac{(u'(t))^2 X_{uu}}{\sqrt{E}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\langle \delta''(t), \frac{X_u}{\sqrt{E}} \right\rangle = \frac{u''(t)}{E} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{(u'(t))^2}{E} \langle X_{uu}, X_u \rangle = 0 \iff u'(t) = \text{constante}.$$

Além disso, como $F_u = \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_{uv}, X_v \rangle = 0$ e $E_v = 2 \langle X_{uv}, X_u \rangle$, então:

$$\left\langle \delta''(t), \frac{X_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{u''(t)}{\sqrt{EG}} \langle X_u, X_v \rangle + \frac{(u'(t))^2}{\sqrt{EG}} \langle X_{uu}, X_v \rangle = -\frac{(u'(t))^2 E_v}{2\sqrt{EG}} = 0 \iff E_v = 0.$$

Logo, uma curva u -parâmetro $X(u(t), v_0)$ é uma geodésica parametrizada se, e somente se, $E_v(u(t), v_0) = 0$ como queríamos demonstrar. \square

Para o caso de uma superfície de revolução S , o Lema 5.1 fornece uma demonstração alternativa do fato que os meridianos em S são curvas geodésicas e os paralelos são geodésicas se, e somente se, $f'(v) = 0$. Atentemos que uma superfície S dada por uma v -parametrização de Clairaut não necessariamente é uma superfície de revolução, no entanto os termos *meridianos* e *paralelos* ainda são utilizados para as curvas v -parâmetro e u -parâmetro, respectivamente.

Exemplo 5.1 (Helicoide). Seja S o helicoide parametrizado por $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde:

$$X(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au), \quad a > 0.$$

Verificamos facilmente que $F = 0$ e $E = G = a^2 \cosh^2 v$. Logo, X é uma v -parametrização de Clairaut pois é ortogonal com $E_u = G_u = 0$. Observamos que S não é uma superfície de revolução.

Proposição 5.1 (Relação de Clairaut (O'Neill, 2006, p. 354)). *Sejam $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma v -parametrização de Clairaut e $\gamma : I \rightarrow S$, $\gamma(s) = (u(s), v(s))$, uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$ em S . Se θ é o ângulo de $X_u(s)$ à $\gamma'(s)$, então:*

$$\sqrt{E} \cos \theta = c, \tag{5.1}$$

onde $c = c(\gamma)$ é denominada constante de Clairaut.

Demonstração. Inicialmente, como $E_u = G_u = 0$ e pelo fato de X ser uma v -parametrização de

Clairaut, segue que o sistema de equações diferenciais das geodésicas de S se reduz à:

$$\begin{cases} u''(s) + \frac{E_v}{E} u'(s) v'(s) = 0, \\ v''(s) - \frac{E_v}{2G} (u'(s))^2 + \frac{G_v}{2G} (v'(s))^2 = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Isto posto, pela primeira equação do Sistema (5.2) acima segue que $E u'(s)$ é uma constante $c \in \mathbb{R}$. De fato, ao derivarmos a expressão:

$$\frac{d}{ds} (E(s) u'(s)) = E_v(s) v'(s) u'(s) + E(s) u''(s) = 0 \implies E(s) u'(s) = \text{constante},$$

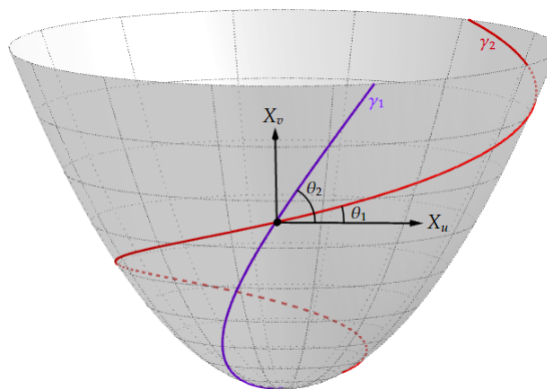
como desejado. A partir disto, para mostrarmos que $c = \sqrt{E} \cos \theta$ basta atentarmos que:

$$\begin{cases} \langle \gamma'(s), X_u(s) \rangle = \langle u'(s) X_u + v'(s) X_v, X_u \rangle = u'(s) E = c, \\ \langle \gamma'(s), X_u(s) \rangle = |\gamma'(s)| |X_u(s)| \cos \theta = \sqrt{E} \cos \theta, \end{cases} \implies c = \sqrt{E} \cos \theta,$$

pois $\gamma(s)$ é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco $s(t)$, $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ e $\langle u, v \rangle = |u| |v| \cos \theta$ para quaisquer vetores u, v em um espaço vetorial V . \square

Segue de imediato do fato $|\cos \theta| \leq 1$ que $E \geq c^2$ e portanto $1 \geq c^2/E$. Intuitivamente, a constante de Clairaut $c = c(\gamma)$ associada a cada geodésica $\gamma(s)$ determina o ângulo θ na qual a curva transpassa os paralelos de S (Ver Figura 23) em relação ao eixo de rotação. Por exemplo, uma geodésica $\alpha(s)$ com $c(\alpha) = 0$ possui $\theta = \pi/2$ ou $3\pi/2$ e portanto será um meridiano. Logo, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\theta \in [0, \pi/2]$, considerando o menor ângulo entre os vetores X_u e $\gamma'(s)$.

Figura 23 – Duas geodésicas com $c(\gamma)$ distintos.



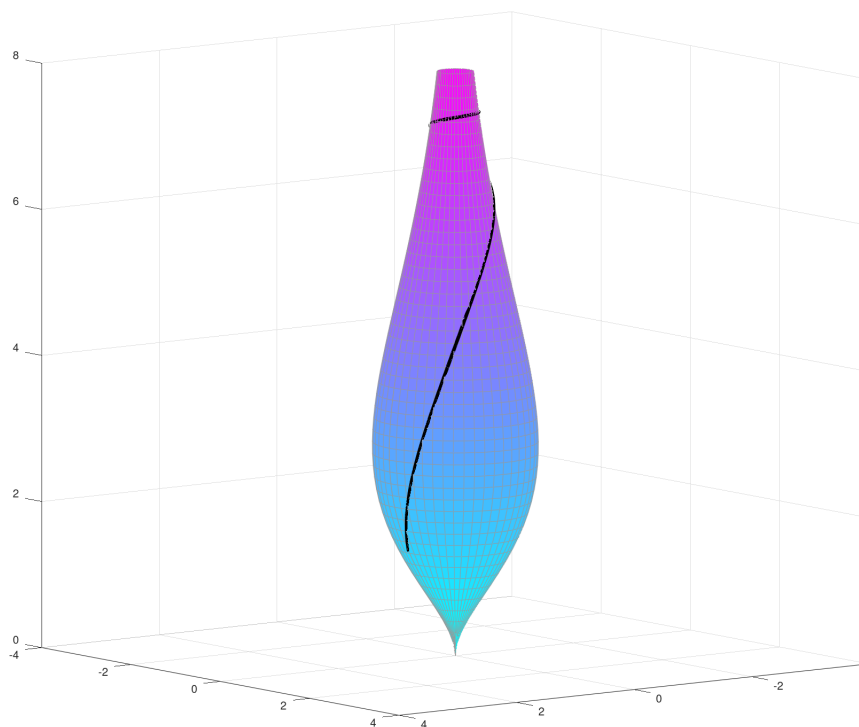
Fonte: Elaborada pelo autor (Geogebra, 2024).

Desta forma, deslocando-se através de $\gamma(s)$ na direção na qual E está crescendo, a equação:

$$c^2 = E \cos^2 \theta, \quad c = c(\gamma) \neq 0, \quad (5.3)$$

implica que $|\cos \theta|$ está decrescendo. Logo, a geodésica $\gamma(s)$ está sendo forçada a se reorientar na direção dos meridianos de S , pois $|\theta|$ está crescendo. Por outro lado, se E está decrescendo então a Equação (5.3) implica que $|\cos \theta|$ está crescendo. Logo, $\gamma(s)$ está sendo forçada a se reorientar na direção dos paralelos de S , pois $|\theta|$ está decrescendo (Ver Figura 24).

Figura 24 – Interpretação física da relação de Clairaut.



Fonte: Elaborada pelo autor (Octave, 2024).

Observamos que $\cos \theta$ não pode mudar de sinal durante a análise da curva $\gamma(s)$. De fato, se caso for nulo mesmo que em apenas um único ponto, a Equação (5.3) garante que $\gamma(s)$ é tangente à um meridiano de S . Logo, pela Proposição 3.10, o parametriza.

Para os físicos, a relação de Clairaut é apenas a lei da conservação do momento angular para uma partícula com velocidade unitária restrita à S sujeita somente por um campo de força normal à S em todos os pontos (Tapp, 2016, p. 251).

Proposição 5.2 (Integral de Clairaut (O’Neill, 2006, p. 357)). *Seja $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma v -parametrização de Clairaut. Então, toda geodésica $\gamma(s)$ tal que $\gamma'(s)$ nunca é ortogonal aos meridianos pode ser parametrizada como $\beta(v) = (u(v), v)$ onde:*

$$u(v) = u(v_0) \pm \int_{v_0}^v \frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{E}\sqrt{E-c^2}} dv, \quad c = c(\gamma).$$

Demonstração. Primeiramente, pela Proposição 3.3 podemos supor que $\gamma(s)$ possui velocidade unitária. Então, ao calcular a primeira forma fundamental I_p para o vetor $\gamma'(s)$ temos

$$I_p(\gamma'(s)) = \begin{bmatrix} u'(s) & v'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(s) \\ v'(s) \end{bmatrix} = E(s) (u'(s))^2 + G(s) (v'(s))^2 = 1, \quad (5.4)$$

uma vez que X é uma parametrização ortogonal. Por outro lado, pela Proposição 5.1 temos $u'(s) = \frac{c}{E(s)}$, onde $c = c(\gamma)$. Assim, substituindo esta expressão na Equação (5.4) obtemos

$$E(s) \frac{c^2}{(E(s))^2} + G(s) (v'(s))^2 = 1 \implies v(s) \implies v'(s) = \pm \sqrt{\frac{E(s) - c^2}{E(s)G(s)}}. \quad (5.5)$$

A velocidade $\gamma'(s)$ nunca é ortogonal aos meridianos e, em particular, $\gamma'(s)$ nunca é paralelo aos paralelos parametrizados da superfície S . Em outras palavras, $v'(s)$ nunca se anula para todo $s \in I$. Logo, pelo Teorema da função inversa², as funções $u = u(s)$ e $v = v(s)$ podem ser reparametrizadas como $u = u(s(v))$ e $s = s(v)$. Portanto, utilizando a Equação (5.5) e $\frac{du}{ds}(s) = \frac{c}{E(s)}$, obtemos:

$$\frac{du}{dv}(v) = \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dv}(v) = \pm \frac{c}{E(v)} \sqrt{\frac{E(v)G(v)}{E(v) - c^2}} \implies u(v) = u(v_0) \pm \int_{v_0}^v \frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{E}\sqrt{E - c^2}} dv,$$

como queríamos demonstrar. □

5.2 APLICAÇÕES DA RELAÇÃO DE CLAIRAUT

Exemplo 5.2 (Plano euclidiano). Consideremos o plano euclidiano \mathbb{E}^2 parametrizado pelas coordenadas polares $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u)$, $v \in \mathbb{R}$ e $u \in [0, 2\pi]$. Assim,

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = v^2, \quad F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = 1,$$

ou seja, X é uma v -parametrização de Clairaut. Observamos que as geodésicas v -parâmetro de X são retas que passam pela origem do plano. Por outro lado, pela Proposição 5.2 as geodésicas restantes podem ser parametrizadas como $\beta(v) = (u(v), v)$ onde:

$$u(v) = u(v_0) \pm \int_{v_0}^v \frac{c}{v\sqrt{v^2 - c^2}} dv = u(v_0) \pm \int_{v_0}^v \frac{d}{dv} \left(\arccos \left(\frac{c}{v} \right) \right) dv, \quad c = c(\gamma).$$

Logo, $u - u_0 = \pm \arccos(c/v)$, ou equivalentemente, $v \cos(u - u_0) = c$, que é a equação polar da reta no plano. Aqui, a constante de Clairaut possui o significado geométrico de ser a

² Lima, Elon L. (2014). Análise real volume 2. Teorema da Aplicação inversa, p. 115.

menor distância da origem à reta.

Exemplo 5.3 (Hiperboloide de uma folha). Seja S o hiperboloide de uma folha do Exemplo 3.2 dado pela parametrização $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ definida por:

$$X(u, v) = \left(a\sqrt{1+v^2} \cos u, a\sqrt{1+v^2} \sin u, bv \right),$$

onde $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. Para determinar as geodésicas em S , inicialmente calculamos os coeficientes da primeira forma fundamental, ou seja,

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = a^2(1+v^2), \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = \frac{a^2 v^2}{1+v^2} + b^2.$$

Assim, X é uma v -parametrização de Clairaut. Em vista disto, pelo Lema 5.1 temos que todos os meridianos v -parâmetro são pré-geodésicas. Ademais, pela Proposição 5.2 obtemos que as geodésicas restantes podem ser parametrizadas como $\beta(v) = (u(v), v)$ onde:

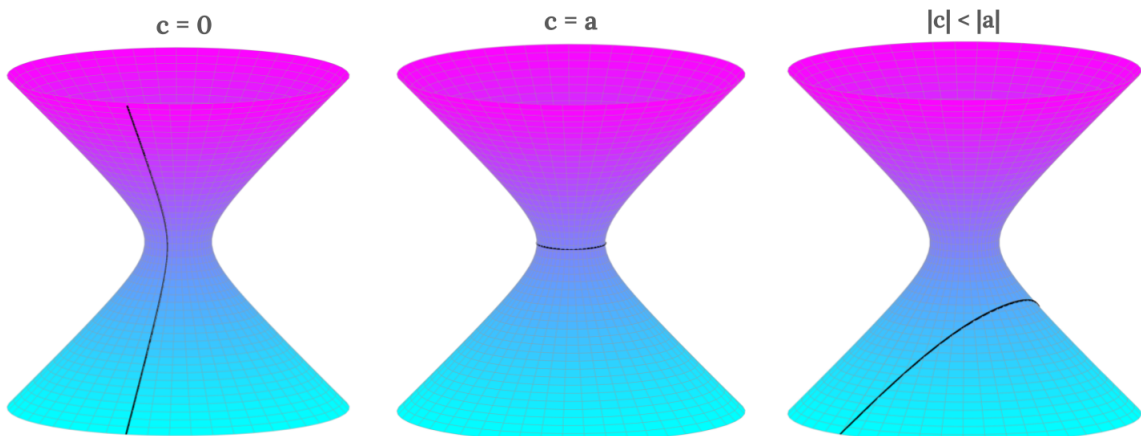
$$u(v) = u(v_0) \pm \int_{v_0}^v \frac{c\sqrt{\frac{a^2 v^2}{1+v^2} + b^2}}{\sqrt{a^2(1+v^2)}\sqrt{a^2(1+v^2) - c^2}} dv, \quad c = c(\gamma).$$

Por outro lado, pela Proposição 5.1 podemos classificar todas as geodésicas no hiperboloide de uma folha utilizando da relação de Clairaut para a superfície S , isto é,

$$\sqrt{E} \cos \theta = c \implies a\sqrt{(1+v^2)} \cos \theta = c, \quad c = c(\gamma), \quad (5.6)$$

onde, ao analisarmos a Equação (5.6) acima, obtemos três casos distintos (Ver Figura 25).

Figura 25 – Relação de Clairaut no hiperboloide.



Fonte: Elaborada pelo autor (Octave, 2024).

- a) $c = 0$ (meridianos). Uma vez que $a > 0$ e $\sqrt{1+v^2} \geq 1$ então, o ângulo θ do vetor X_u à velocidade $\gamma'(s)$ é dado por $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\gamma(s)$ é a parametrização de um meridiano.

Observamos que este resultado concorda com o fato de todas as curvas v -parâmetro serem pré-geodésicas.

- b) $\theta = 0$ (paralelos). Então, $\cos \theta = 1$ e $\gamma(s)$ é a parametrização de um paralelo da superfície S . Em vista disto, obtemos $f(v) = a\sqrt{1+v^2} = c$. Assim, pelo Lema 5.1, um paralelo em uma superfície de revolução é uma geodésica se, e somente se, $f'(v) = 0$. Portanto,

$$f'(v) = \frac{av}{\sqrt{1+v^2}} = 0 \xrightarrow{a>0} v = 0.$$

Logo, o único paralelo no hiperboloide S é a curva do equador, que satisfaz a relação $c = a$. Observamos que este fato condiz com os cálculos realizados no Exemplo 3.2.

- c) $0 \neq c \neq a$. Neste caso, $a\sqrt{1+v^2} \cos \theta = c$. Isto posto, como $|\cos \theta| \leq 1$ então:

$$a^2(1+v^2) \geq c^2 \xrightarrow{v \neq 0} |c| < |a|. \quad (5.7)$$

Logo, todas as geodésicas restantes podem ser parametrizadas através da constante $c = c(\gamma)$ dada pela Equação (5.7).

Proposição 5.3 (Comportamento assintótico). *Nenhuma geodésica de uma superfície de revolução pode ser assintótica a um paralelo a não ser que este paralelo seja uma geodésica.*

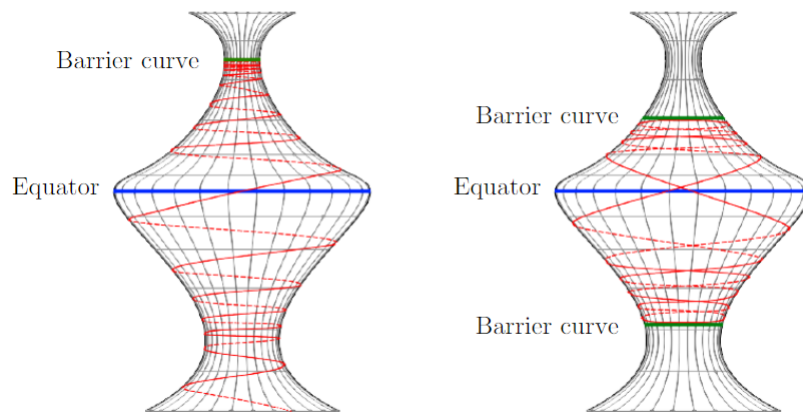
Demonstração. Ver (do Carmo, 2005, Página 363). □

Partindo da Proposição 5.3, suponhamos que $\gamma(s)$ é uma geodésica com constante de Clairaut $c(\gamma)$ que se aproxima de um paralelo \mathcal{P} com mesma constante de Clairaut $c(\gamma)$. Se $\gamma(s)$ intersecta \mathcal{P} então deve o fazer tangencialmente, pois $c = c \cos \theta \implies \theta = 0$. Portanto, temos duas situações a considerar:

- a) \mathcal{P} é uma geodésica. Neste caso, no ponto de interseção teríamos duas geodésicas diferentes com o mesmo vetor tangente, o que contradiz a Proposição 3.10 da unicidade da geodésica. Logo, $\gamma(s) \sim \mathcal{P}$ assintoticamente.
- b) \mathcal{P} não é uma geodésica. Neste caso, pela Equação (5.3) a distância radial $E = f(v)$ atinge o seu ponto crítico de mínimo em relação à constante $c(\gamma)$ e sua única opção restante é crescer. Logo, $\gamma(s)$ efetivamente é 'refletida' pelo paralelo \mathcal{P} .

O paralelo \mathcal{P} que possui quaisquer uma das condições anteriores é denominado *curva de barreira*, pois atua como limitador para a geodésica $\gamma(s)$ (Ver Figura 26).

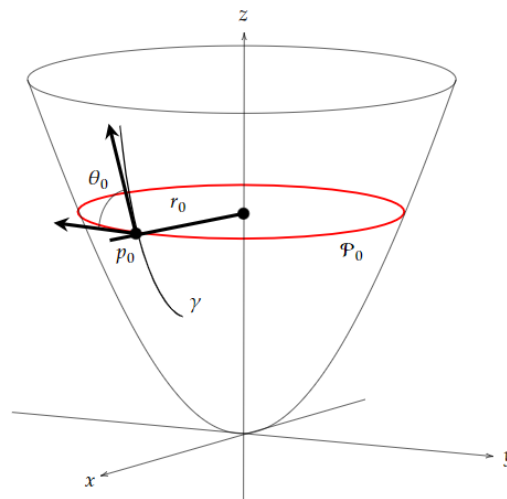
Figura 26 – Curvas de barreira.



Fonte: Figura 4 (Celano, 2022, p. 5).

Exemplo 5.4 (Rotas das geodésicas no parabolóide). Mostremos que qualquer geodésica no parabolóide de revolução $x^2 + y^2 = z$, que não é um meridiano, se intersecta uma infinidade de vezes. Inicialmente, pelo Exemplo 4.2 nenhum paralelo do parabolóide é uma geodésica e pela Proposição 3.10 os meridianos são as únicas geodésicas passando pela origem $(0, 0, 0)$.

Assim, sejam $\gamma(s) = (v(s) \cos u(s), v(s) \sin u(s), v(s)^2)$ uma geodésica que passa por $p_0 \neq (0, 0, 0)$, \mathcal{P}_0 o paralelo que contém p_0 , r_0 o raio deste paralelo e $0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ o ângulo que $\gamma(s)$ faz com \mathcal{P}_0 em p_0 (Ver Figura 27).

Figura 27 – Curva γ passando por p_0 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela Equação (5.1), temos que:

$$r \cos \theta = r_0 \cos \theta_0 = |c|, \quad r = v(s), \quad c = c(\gamma).$$

Como $\gamma(s)$ não é um meridiano, então $\theta \in [0, \pi/2)$ e $|c| \neq 0$. Visto que $(v(s))^2 u'(s) = c \neq 0$ pela Equação (4.7), podemos supor que $u'(s) > 0$ e, portanto, $c > 0$. Pela Equação (5.3), temos que $v(s) = r \geq c$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $v(s) = c$ se, e somente se, $\theta = 0$.

Afirmção. Existe um único $\bar{s} \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}) = c$.

Demonstração. Como nenhum paralelo do parabolóide é uma geodésica, então pela Proposição 5.3 a geodésica $\gamma(s)$ não pode aproximar assintoticamente nenhum paralelo. Isto posto, seja $c' = \inf_{s \in \mathbb{R}} v(s)$. Se existe $\bar{s} \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}) = c'$ e $c' > c$, então pela relação de Clairaut, o ângulo θ' que $\gamma(s)$ faz com o paralelo $v(s) = c'$ no ponto de interseção é diferente de zero, isto é, $\gamma(s)$ corta o paralelo transversalmente.

Portanto, existiriam pontos de $\gamma(s)$ em paralelos de raios menores do que c , contradizendo $c' = \inf_{s \in \mathbb{R}} v(s)$. Logo, se existe $\bar{s} \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}) = c' \implies c' = c$ e $\gamma(s)$ é tangente ao paralelo de raio c no ponto de interseção $\gamma(\bar{s})$.

Suponhamos que não exista $\bar{s} \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}) = c' = \inf_{s \in \mathbb{R}} v(s)$. Então existe uma sequência (s_n) de números reais tais que a $(v(s_n))$ é decrescente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v(s_n) = c'$ e $v(s_n) \geq c'$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, (s_n) não possui uma sequência limitada $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} |s_n| = +\infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$.

Então $v(s) \in (v(s_{n+1}), v(s_n))$ para todo $s \in (s_n, s_{n+1})$, pois caso contrário existiria $s^* \in (s_n, s_{n+1})$ tal que $v'(s^*) = 0 \implies v(s^*) = c$. Portanto, $\inf_{s \in \mathbb{R}} v(s) = c$ e existe $s^* \in \mathbb{R}$ tal que $v(s^*) = c$, contradizendo a hipótese. Assim, $\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = c'$, e $v(s) > c'$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Ou seja, $\gamma(s)$ é assintótica ao paralelo $\mathcal{P}_{c'}$, absurdo pela Proposição 5.3.

Finalmente, suponhamos que existe $\hat{s} \neq \bar{s}$ tal que $v(\hat{s}) = c$. Então, sendo $\hat{s} < \bar{s}$, ou $v(s) = c$ para todo $s \in [\hat{s}, \bar{s}]$ ou existe um ponto de máximo $\tilde{s} \in (\hat{s}, \bar{s})$, onde $v(\tilde{s}) > c$ e $v'(\tilde{s}) = 0$. No primeiro caso chegamos a uma contradição pois o paralelo $v(s) = c$ não é uma geodésica, e no segundo caso também chegamos a uma contradição, pois $r \cos \theta$ seria maior que c em \tilde{s} , uma vez que $r = v(\tilde{s}) > c$ e $\theta(\tilde{s}) = 0$.

Logo, existe um único ponto $\bar{s} \in \mathbb{R}$ tal que $v(\bar{s}) = c$ e, portanto, pela relação de Clairaut, existe um único ponto $\bar{s} \in \mathbb{R}$ tal que $v'(\bar{s}) = 0$. Portanto, $v'(s) > 0$ em $(\bar{s}, +\infty)$ e $v'(s) < 0$ em $(-\infty, \bar{s})$. \square

Afirmção. Se $s \rightarrow \pm\infty$ então $v(s) \rightarrow +\infty$ ($\implies \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$).

Demonstração. Suponhamos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) \neq +\infty$. Então existe uma sequência crescente (s_n) tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ e $(v(s_n))$ converge para um ponto c' . Como a sequência (s_n) é crescente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ e $v'(s) > 0$ em $(\bar{s}, +\infty)$, temos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = c'$ e $c' = \sup_{s \in [\bar{s}, +\infty)} v(s)$, ou seja, a geodésica $\gamma(s)$ é assintótica ao paralelo $\mathcal{P}_{c'}$ de raio c' ,

absurdo pela Proposição 5.3. Logo, $\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = +\infty$. Analogamente, provamos que $\lim_{s \rightarrow -\infty} v(s) = +\infty$. \square

Afirmação. Se $s \rightarrow \pm\infty$, então $u(s) \rightarrow \pm\infty$.

Demonstração. Sendo $f(v) = v$ e $g(v) = v^2$, então pela Proposição 5.2 temos que:

$$u(v) - u(c_1) = \pm c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-c^2}}, \quad c_1 > c, \quad c = c(\gamma).$$

Portanto, para $s > \bar{s}$, onde $v'(s) > 0$, temos:

$$u(v) - u(c_1) = c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-c^2}} dv > c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} dv = c(\log v - \log c_1),$$

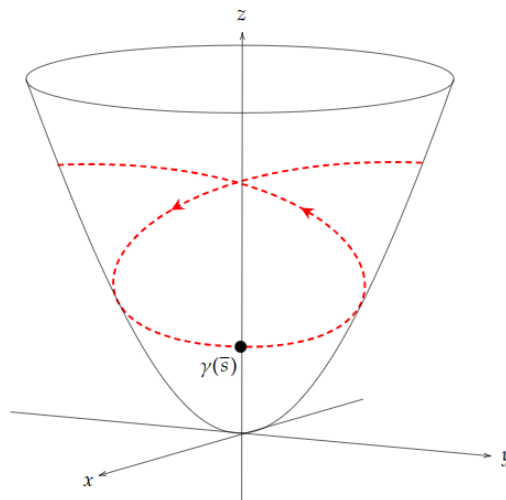
pois $\frac{1+4v^2}{v^2-c^2} > 1$ e $c > 0$. Logo, $\lim_{v \rightarrow +\infty} u(v) = +\infty$, ou seja, $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = +\infty$, pois $\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s) = +\infty$. Para $s < \bar{s}$, onde $v'(s) < 0$, temos que:

$$u(v) - u(c_1) = -c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} \sqrt{\frac{1+4v^2}{v^2-c^2}} dv < -c \int_{c_1}^v \frac{1}{v} dv = -c(\log v - \log c_1).$$

Assim, $\lim_{v \rightarrow +\infty} u(v) = -\infty$, ou seja, $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = -\infty$ pois $\lim_{s \rightarrow -\infty} v(s) = +\infty$. \square

Concluimos que a geodésica $\gamma(s)$ intersecta todos os meridianos um número infinito de vezes e, portanto, se auto interseção uma infinidade de vezes, já que dois segmentos $\gamma|_{[\bar{s}, +\infty)}$ e $\gamma|_{(-\infty, \bar{s}]}$ dão uma infinidade de voltas em torno do parabolóide (Ver Figura 28).

Figura 28 – Rotas das geodésicas no parabolóide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 PLANO HIPERBÓLICO E TORO

Proposição 5.4 (Tensor e curvatura Gaussiana). *Para o plano \mathbb{R}^2 com tensor métrico definido por $\langle v, w \rangle = \frac{v \cdot w}{h^2(p)}$, $p \in \mathbb{R}^2$, a curvatura Gaussiana é:*

$$K = h(h_{uu} + h_{vv}) - (h_u^2 + h_v^2).$$

Demonstração. Ver O’Neill (2006, p. 331). □

Exemplo 5.5 (Plano hiperbólico). Consideremos a função (régua) dada por:

$$h(u, v) = 1 - \frac{u^2 + v^2}{4}.$$

Estabelecendo $h > 0$ então, o produto interno hiperbólico $\langle v, w \rangle$ é utilizado apenas no disco aberto $u^2 + v^2 < 4$ de raio 2 em \mathbb{R}^2 . Deste processo, a superfície geométrica resultante é denominada *modelo de Disco de Poincaré* \mathbb{H}^2 . Observe que segue da Proposição 5.4 que o plano hiperbólico possui curvatura gaussiana constante $K = -1$.

Portanto, à medida que um ponto (u, v) se aproxima da borda de \mathbb{H}^2 , ou seja do círculo $u^2 + v^2 = 4$, temos que a função $h(u, v)$ tende à zero. Calculemos as curvas geodésicas neste espaço utilizando da parametrização por coordenadas polares $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u)$. De início, a função régua $h(u, v)$ que descreve a estrutura geométrica conforme de \mathbb{H}^2 depende

apenas da distância euclidiana de v à origem $0 \in \mathbb{H}^2$. De fato,

$$h(v) = h(X(u, v)) = 1 - \frac{(v \cos u)^2 + (v \sin u)^2}{4} = 1 - \frac{v^2}{4}.$$

Portanto, pela Proposição 5.4 obtemos:

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = \frac{v^2}{h^2}, \quad F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = \frac{1}{h^2}.$$

Dessa forma, X é uma v -parametrização de Clairaut. Portanto, as curvas v -parâmetros, ou seja, as retas que passam pela origem de \mathbb{H}^2 , são pré-geodésicas pelo Lema 5.1. Por outro lado, pela Proposição 5.2 obtemos que as geodésicas restantes podem ser parametrizadas como $\beta(v) = (u(v), v)$ onde:

$$\frac{du}{dv}(v) = \pm \frac{c \left(\frac{1}{h}\right)}{\left(\frac{v}{h}\right) \sqrt{\frac{v^2}{h^2} - c^2}} = \pm \frac{ch}{v^2 \sqrt{1 - \left(\frac{ch}{v}\right)^2}}, \quad c = c(\gamma).$$

Esta equação pode ser integrada explicitamente ao considerar:

$$w = \frac{a}{v} \left(1 + \frac{v^2}{4}\right), \quad \text{onde } a = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}, \quad \text{com } c = c(\gamma).$$

Dessa forma, após alguns cálculos obtemos:

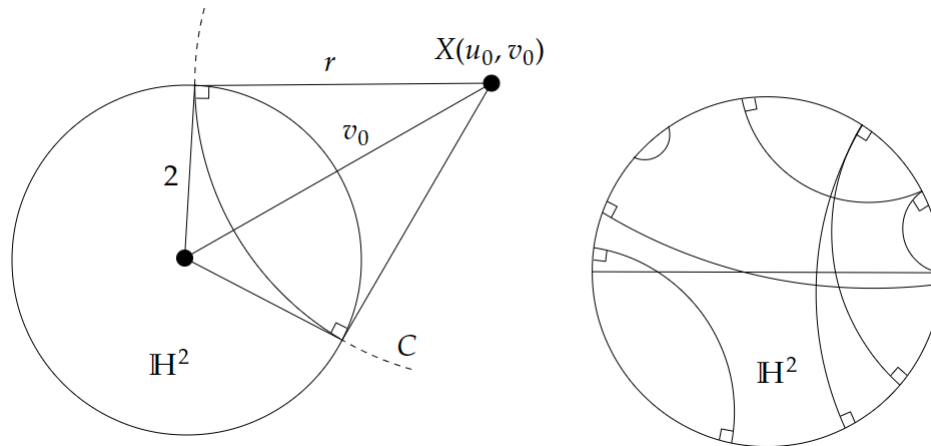
$$\frac{du}{dv}(v) = \pm \frac{\frac{dw}{dv}(v)}{\sqrt{1 - w^2}} \implies u - u_0 = \pm \cos^{-1} w \implies \cos(u - u_0) = w = \frac{a}{v} \left(1 + \frac{v^2}{4}\right),$$

ou seja,

$$v^2 + 4 - \frac{4v}{a} \cos(u - u_0) = 0.$$

Pela *lei dos cossenos* ($A^2 + B^2 - 2AB \cos u = C^2$) segue que a equação polar de um círculo de raio r com centro $X(u_0, v_0)$ é $v^2 + v_0^2 - 2v_0v \cos(u - u_0) = r^2$. Portanto, a rota de uma curva geodésica $\beta(s)$ é um círculo C com $v_0 = r^2 + 4$. Como $v_0 > 2$, o centro do círculo C está fora do espaço \mathbb{H}^2 . Ademais, essa relação também implica que C é ortogonal à borda de \mathbb{H}^2 (Ver Figura 29).

Figura 29 – Geodésicas no Disco de Poincaré.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 5.6 (Toro de revolução). Consideremos o toro T com centro na origem do espaço \mathbb{R}^3 dado pela parametrização $X : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow T \subset \mathbb{R}^3$ e definida por:

$$X(u, v) = ((R + r \cos v) \cos u, (R + r \cos v) \sin u, r \sin v),$$

onde $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$ e $0 < r < R$. Para determinarmos as geodésicas em T , inicialmente calculemos seus coeficientes da primeira forma fundamental:

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle = (R + r \cos v)^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle = r^2.$$

Assim, observamos que X é uma v -parametrização de Clairaut. Por outro lado, ao aplicarmos as informações anteriores no Sistema (5.2) de equações diferenciais da geodésicas, obtemos:

$$\begin{cases} u''(s) - \frac{2r \sin v}{(R + r \cos v)^2} u'(s) v'(s) = 0, \\ v''(s) + \frac{\sin v}{r} (u'(s))^2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo Lema 5.1 obtemos que todos os meridianos v -parâmetro são pré-geodésicas. Ademais, pela Proposição 5.2 obtemos que as geodésicas restantes podem ser parametrizadas como $\beta(v) = (u(v), v)$ onde:

$$u(v) = u(v_0) \pm \int_{v_0}^v \frac{cr}{(R + r \cos v) \sqrt{(R + r \cos v)^2 - c^2}} dv, \quad c = c(\gamma).$$

Todavia, a integral acima não possui solução na forma fechada, apenas numérica. Em contrapartida, pela Proposição 5.1 somos capazes de classificar todas as geodésicas no toro de

revolução T utilizando da relação de Clairaut:

$$\sqrt{E} \cos \theta = c \implies (R + r \cos v) \cos \theta = c, \quad c = c(\gamma), \quad (5.8)$$

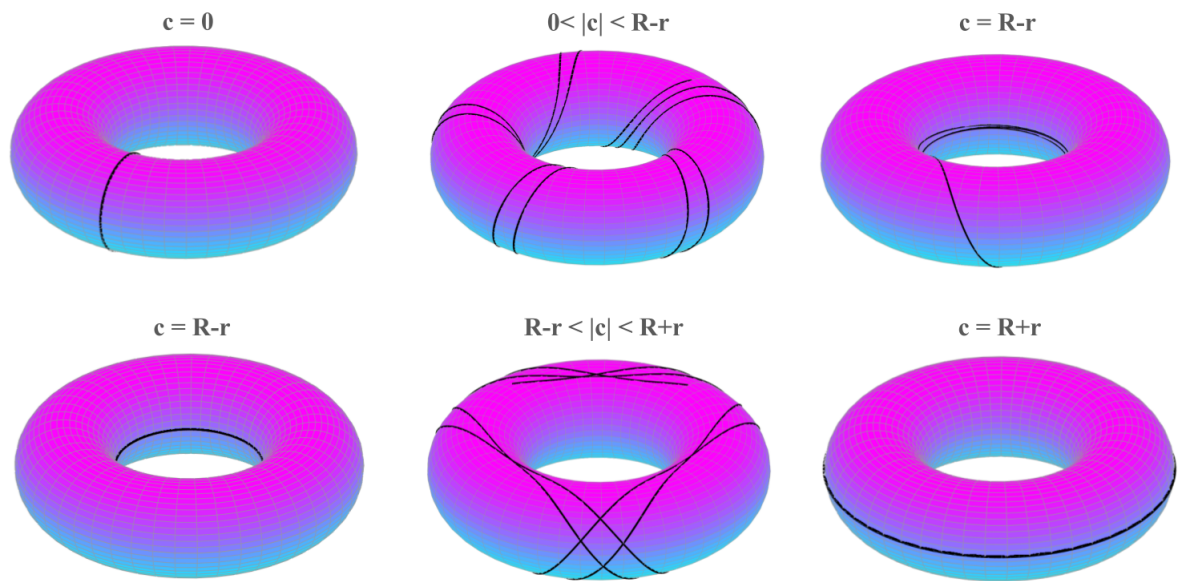
onde ao analisar a Equação (5.8), classificamos as geodésicas em T em famílias distintas. A saber:

- a) $c = 0$ (meridianos). Segue de imediato do Lema 5.1 que todos os meridianos no toro T são geodésicas parametrizadas.
- b) $\theta = 0$ (paralelos). Dessa forma, obtemos $f(v) = (R + r \cos v) = c$. Segue pelo Lema 5.1 que um paralelo em uma superfície de revolução é uma geodésica se, e somente se, $f'(v) = 0$. Portanto, $f'(v) = -r \sin v = 0 \xrightarrow{r > 0} v = 0$ ou $v = \pi$.
Logo, os únicos paralelos no toro T são os equadores interno e externo, que satisfazem as relações $c = R - r$ e $c = R + r$, respectivamente.
- c) $0 < |c| < R - r$. Neste caso, as curvas geodésicas transpassam ambos equadores interno e externo. Essas curvas são denominadas *ilimitadas*, pois passam por todos os pontos da superfície. Ademais, como consequência da Equação (5.8), $\gamma(s)$ passa pelos equadores em ângulos diferentes e, à medida que $c \rightarrow R - r$, as geodésicas tangenciam o equador interno mais rápido do que comparado ao equador externo.
- d) $c = R - r$. Outras geodésicas que possuem mesma constante de Clairaut $c(\gamma)$ que o equador interno, obtemos pela Proposição 5.3 que o tangenciam assintoticamente.
- e) $R - r < |c| < R + r$. Pela relação de Clairaut sabemos que uma curva geodésica não pode deixar a região $E \geq c^2$, uma vez que $|\cos \theta| \leq 1$. Para geodésicas ilimitadas, essa restrição não possui impacto, mas neste caso é relevante. De fato, se $\theta = 0$ para algum v_0 então $\gamma(s)$ é tangente ao v_0 -paralelo. Portanto:

$$(R + r \cos v)^2 \geq (R + r \cos v_0)^2 \implies \cos v \geq \cos v_0,$$

ou seja, $\gamma(s)$ está restrita à parte externa de T entre o v_0 -paralelo e $-v_0$ -paralelo. Neste caso, a geodésica é denominada *limitada*. Observamos que à medida que $v_0 \rightarrow \pi$, então essa região expande-se de forma a abranger todo o toro T (Ver Figura 30).

Figura 30 – Classificação de geodésicas no toro.



Fonte: Elaborada pelo autor (Octave, 2024).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta monografia teve como objetivo principal estudar as geodésicas em superfícies de rotação. Ao decorrer da discussão, evidenciamos que uma curva geodésica parametrizada $\gamma(t)$ pode ser obtida como solução de um sistema de equações diferenciais (não-linear) dado um ponto e uma direção tangente de uma aplicação regular $X : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ como condições iniciais e calculamos as geodésicas para uma superfície de rotação geral.

Para os casos onde o sistema de equações diferenciais não possui solução fechada, definimos o que denotamos por parametrização de Clairaut. Esta, para qual abrange os resultados retratados nos capítulos antepassados, nos auxiliou na obtenção de geodésicas a partir da relação de Clairaut. Com esta equação, calculamos as geodésicas em espaços mais complexos tais como o toro e o plano hiperbólico.

REFERÊNCIAS

- CELANO, Kyle. Why Curves Curve: The Geodesics on the Torus. **ResearchGate**, 2022. Citado na p. 61.
- DO CARMO, Manfredo Perdigão. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. Citado nas pp. 6, 10, 11, 14, 15, 17–20, 23, 26, 31, 32, 35, 36, 38, 40, 60.
- GEOGEBRA. GNU General Public License (GPL). **GeoGebra 6.0.850.0**, 2024. Citado na p. 56.
- KLANG, Jesse. Computing Geodesics on Two Dimensional Surfaces. **StudyLib**. Disponível em: <https://studylib.net/doc/7339462/computing-geodesics-on-two-dimensional-surfaces>, 2005. Citado na p. 71.
- O'NEILL, Barret. **Elementary Differential Geometry**. University of California: Elsevier, 2006. Citado nas pp. 6, 53–55, 57, 64.
- OCTAVE. GNU General Public License (GPL). **GNU Octave 9.2.0**, 2024. Citado nas pp. 57, 59, 68.
- TAPP, Kristopher. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Suíça: Springer, 2016. Citado na p. 57.
- TENENBLAT, Keti. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Blucher, 2008. Citado nas pp. 6–9, 11, 13, 20, 21.

APÊNDICE A – CÓDIGO DO OCTAVE

Código baseado no artigo de [Klang \(2005\)](#).

```

# pkg load symbolic

function eq_gd = equacoes(t,xx,flag,Gm);
    eq_gd = zeros(4,1);

    u = xx(1);
    v = xx(3);

    EsubU_2E = eval(Gm(1));
    EsubV_E = eval(Gm(2));
    GsubU_2E = eval(Gm(3));
    EsubV_2G = eval(Gm(4));
    GsubU_G = eval(Gm(5));
    GsubV_2G = eval(Gm(6));

    Val = [EsubU_2E;EsubV_E;GsubU_2E;EsubV_2G;GsubU_G;GsubV_2G];
    display(Val);
    display(t);

    eq_gd(1) = xx(2);
    eq_gd(2) = -EsubU_2E*xx(2)^2 -EsubV_E*xx(2)*xx(4) +GsubU_2E*xx(4)^2;
    eq_gd(3) = xx(4);
    eq_gd(4) = EsubV_2G*xx(2)^2 -GsubU_G*xx(2)*xx(4) +GsubV_2G*xx(4)^2;

endfunction

# Parametros superficie
u = sym('u');
v = sym('v');

x = (2.5+cos(v)).*cos(u);
y = (2.5+cos(v)).*sin(u);
z = sin(v);

# Condições iniciais INIT = [uinit; duinit; vinit; dvinit]
dt = linspace(0,100,1000)
INIT = [0; .2; pi/2; .1];

# Coeficientes 1 forma e Gammas; F = 0
U = [x;y;z];
XsubU = diff(U,'u');

```

```

XsubV = diff(U,'v');
E = simplify(XsubU.*XsubU);
G = simplify(XsubV.*XsubV);

EsubU = diff(E,'u');
EsubV = diff(E,'v');
GsubU = diff(G,'u');
GsubV = diff(G,'v');

C = [E;G;EsubU;EsubV;GsubU;GsubV];
display(C);

EsubU_2E = simplify(C(3)/(2*C(1)));
EsubV_E = simplify(C(4)/C(1));
GsubU_2E = simplify(C(5)/(2*C(1)));
EsubV_2G = simplify(C(4)/(2*C(2)));
GsubU_G = simplify(C(5)/C(2));
GsubV_2G = simplify(C(6)/(2*C(2)));

Gm = [EsubU_2E;EsubV_E;GsubU_2E;EsubV_2G;GsubU_G;GsubV_2G];
display(Gm);

# Plot superficie
[u,v] = meshgrid(linspace(0,2*pi,50), linspace(0,2*pi,50));
x_g = eval(x);
y_g = eval(y);
z_g = eval(z);

s = surf(x_g,y_g,z_g,'FaceAlpha',1);
colormap cool;
set(s, 'edgecolor',[.6, .6, .6])
axis equal;
hold on;

b = waitforbuttonpress()

# Plot curva, o sistema de equacoes ordinarias
# e solucionado pelo metodo Bogacki-Shampine
# Mais informacoes sobre o metodo pode ser encontrado em:
# https://en.wikipedia.org/wiki/Bogacki-Shampine\_method
[t,X] = ode23 (@equacoes, dt, INIT, [], Gm);
u = X(:,1);
v = X(:,3);
x_gg = eval(x);
y_gg = eval(y);
z_gg = eval(z);
plot3(x_gg, y_gg, z_gg,'color','black','linewidth', 3);

```

Exceto quando indicado o contrário, a licença deste item é descrito como
Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Brazil

