



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática



Homologia Singular e Orientação em Variedades

Aluno: Victorio Amadeo Cremasco

Curso: Matemática

RA: 800737

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos

Curso: Matemática

Centro: Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

São Carlos-SP
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática



Homologia Singular e Orientação em Variedades

Monografia apresentada ao Curso de
Bacharelado em Matemática da
Universidade Federal de São Carlos.

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Lopes
dos Santos.

São Carlos-SP
2025



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - CCM/CCET
 Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905
 Telefone: (16) 33518221 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 9/2025/CCM/CCET

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

VICTORIO AMADEO CREMASCO

HOMOLOGIA SINGULAR E ORIENTAÇÃO EM VARIEDADES

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 20 de fevereiro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Edivaldo Lopes dos Santos
Membro da Banca 1	Pedro Luiz Queiroz Pergher
Membro da Banca 2	Dirk Töben



Documento assinado eletronicamente por **Dirk Toben, Professor(a) Adjunto(a)**, em 17/04/2025, às 10:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edivaldo Lopes dos Santos, Professor(a) do Ensino Superior**, em 17/04/2025, às 10:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Luiz Queiroz Pergher, Professor(a) do Ensino Superior**, em 24/04/2025, às 11:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1782311** e o código CRC **7EBFC6C5**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.007529/2025-59

SEI nº 1782311

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

In memoria di nonno

Agradecimentos

Agradeço a Deus e a minha família, em especial meus pais, Angelica Jerolamo Cremasco e Marcos Donizeti Cremasco, e meu irmão, Moyses Amadeo Cremasco, pelo suporte e apoio incondicional em todas as etapas de minha vida até o presente momento. Agradeço ao meu orientador, Edivaldo Lopes dos Santos, pela orientação e continuado amparo acadêmico. Agradeço também à equipe do SESI 408 Limeira e a todos os professores que fizeram parte da minha formação até agora, em especial, Dirk Toben, pela vital colaboração no estudo e entendimento dos conceitos que permeiam este trabalho, e Fernando Cesar Quatroni, que me apresentou à essa bela arte que é a matemática e sem o qual minha instalação em São Carlos seria incerta. Nessa nota, agradeço a Claudia Silvana da Costa e Regina da Silva Costa, por serem as melhores e mais atenciosas senhorias que um locatário poderia querer. Agradeço também aos amigos e colegas que pude fazer aqui em São Carlos, em especial, Guilherme Yuji Sato e Rebeca Margarido Veloso, Miguel Costa Rosales e Nichollas Monteiro, Vitor Schiavuzzo, Nelson Amorim e Gabriela Watanabe, Kimberly da Silva Rocha e Carlos Passarim, e tantos outros os quais, cada um à sua maneira, tornaram esses últimos quatro anos de estadia numa cidade estranha muito mais divertidos. Enfim, dedico esta monografia ao meu avô, Mauro Jerolamo, cujo exemplo de vida é a bússola sobre a qual quem vos escreve procura guiar seus passos.

Resumo

O presente trabalho explora os conceitos de orientação e orientabilidade em variedades topológicas. Para tal, começamos com um estudo preliminar acerca da teoria elementar de módulos, a fim de desenvolver a linguagem algébrica necessária para o que se segue. Em seguida, prosseguiremos com o estudo da teoria de homologia singular, cujos frutos mais proveitosos se mostrarão sendo a sequência exata de homologia, o teorema de excisão e a sequência de Mayer-Vietoris. A seguir, discutimos variedades topológicas e espaços de recobrimento como preparação para a definição e construção do conceito de orientação propriamente, bem como de uma outra grande estrutura associada conhecida como o feixe de R -orientação de uma variedade. Este último é o que nos dará uma profusão de critérios de orientabilidade, os quais poderão ser aplicados na obtenção de inúmeros exemplos após a última etapa do trabalho, esta que discute homologia celular e nos permitirá efetuar o cálculo do complexo singular de diversos espaços apresentados ao longo desta monografia.

Palavras-chave: Topologia. Topologia Algébrica. Homologia Singular. Orientação. Variedades. Variedades topológicas. Feixe de R -orientação. CW-complexos. Homologia celular.

Abstract

This work explores the concepts of orientation and orientability in topological manifolds. To begin, we start with a preliminary study of the elementary theory of moduli, in order to develop the algebraic language necessary for what follows. Next, we proceed with the study of singular homology theory, whose most useful outcomes will turn out to be the exact sequence of homology, the excision theorem, and the Mayer-Vietoris sequence. Following this, we discuss topological manifolds and covering spaces as preparation for the definition and construction of the concept of orientation itself, as well as another major associated structure known as the R -orientation sheaf of a manifold. This latter structure will provide us with a wealth of orientability criteria, which shall be applied to obtain numerous examples after the final section of the work, which discusses cellular homology and will allow us to compute the singular complex of various spaces presented throughout this monograph.

Keywords: Topology. Algebraic Topology. Singular Homology. Orientation. Manifolds. Topological manifolds. R -orientation sheaf. CW-complexes. Cellular homology.

Sumário

1	Introdução	1
2	Módulos: um estudo preliminar	2
2.1	Módulos	2
2.2	Somas e Produtos	7
2.3	Módulos Livres	10
3	Introdução à Homologia Singular	12
3.1	Geometria Afim	12
3.2	Teoria Singular	16
3.3	Complexos de Cadeia	24
4	Elos entre Homologia e Homotopia	26
4.1	Teoria Elementar de Homotopia	26
4.2	Invariância da Homologia sob Homotopia	32
4.3	A relação entre π_1 e H_1	36
5	Homologia de Pares	40
5.1	Homologia Relativa	40
5.2	A sequência exata de homologia	45
5.3	O Teorema de Excisão	48
5.4	A sequência de Mayer-Vietoris	61
6	Variedades e Orientação	66
6.1	Variedades Topológicas	66
6.2	Orientação em Variedades Topológicas	71
6.3	Espaços de Recobrimento	76
6.4	O Feixe de R -orientação de uma Variedade	82
7	Homologia Celular	93
7.1	CW-complexos	93
7.2	Homologia de CW-complexos	99

Sumário

7.3	Números de Betti e Característica de Euler	104
7.4	Números de Incidência	106
8	Considerações finais	115
	Referências Bibliográficas	116

Capítulo 1

Introdução

Em algum ponto na vida de jovens matemáticos entusiastas, alguns deles talvez possam ter se deparado com um certo conto, um sobre uma superfície com apenas um lado. Uma tal figura poderia ser obtida tomando uma tira de papel, torcendo-a uma vez e então colando as suas bordas uma na outra. A história prossegue nos contando que se uma formiga estivesse sobre a superfície de um tal objeto e começasse a caminhar, após uma volta inteira a mesma se veria do lado oposto de onde havia partido. Tal fenômeno de “unilateralidade” teria algo a ver com o fato, como foi dito ao jovem, de uma tal figura não ser “orientável”, o que quer que isso significasse. Curioso sobre essa última experiência, tal indivíduo viu-se inspirado em compreender sobre o que essa tal “orientação” se tratava afinal. É num cenário semelhante, significativamente menos esopiano, que se encontra situado este trabalho, cujo principal objetivo será formalizar e aprofundar essa noção de orientação num contexto dado. Para tal, escolhemos explorar uma versão topológica, com razoável generalidade, deste objeto, de sorte que a nossa empreitada irá se espalhar, nas palavras de Marvin J. Greenberg, por uma das maiores criações matemáticas do século XX, a topologia algébrica. Dedicaremos os próximos capítulos desta monografia ao esforço de desenvolver a teoria e as ferramentas necessárias para se definir e trabalhar adequadamente com o conceito de orientação em variedades. Ao longo do caminho, nos depararemos com resultados formidáveis, além de profundas e belas conexões entre diversas áreas do conglomerado intelectual que é a topologia algébrica. Finalmente, esperamos que o leitor aprecie o desenrolar dos acontecimentos que seguem o estopim inicial ilustrado no início deste excerto.

Capítulo 2

Módulos: um estudo preliminar

Começaremos esta monografia com o estudo do instrumental algébrico sobre o qual a teoria de homologia singular se sustenta. Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados elementares da teoria de módulos. Após definirmos módulos propriamente, desbravaremos somas, produtos e os morfismos nativos à estrutura algébrica previamente estabelecida. Por fim, dedicaremos atenção especial à noção de módulo livre.

2.1 Módulos

Daremos início à essa seção com algumas ressalvas introdutórias acerca da noção de anel. Ao decorrer do texto, um anel R sempre será unitário, i.e., possuirá uma unidade $1_R \neq 0$. Um homomorfismo de anéis $\omega : R \rightarrow L$ sempre será tal que $\omega(1_R) = 1_L$. Por fim, recorde que os endomorfismos de um grupo abeliano A formam um anel denotado por $End(A, A)$, basta munir $End(A, A)$ das operações de soma e composição de homomorfismos de grupos.

Definição 2.1. Um *módulo à esquerda* sobre um anel R ou um *R -módulo à esquerda* é um par (A, ω) onde A é um grupo abeliano e $\omega : R \rightarrow End(A, A)$ é um homomorfismo de anéis. Denotaremos por λa o elemento $(\omega(\lambda))(a) \in A$ para $\lambda \in R$ e $a \in A$.

Em vista da última observação, podemos falar de *R operando à esquerda* de A , no sentido de que, a cada par $(\lambda, a) \in R \times A$, associamos o elemento λa . Claramente, para quaisquer $a, a_1, a_2 \in A$ e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in R$, verifica-se

- i. $(\lambda_1 + \lambda_2)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a$
- ii. $(\lambda_1 \lambda_2)a = \lambda_1(\lambda_2 a)$
- iii. $1_R a = a$
- iv. $\lambda(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2$

Note ainda que, se uma operação de R sobre A satisfaz as propriedades acima, então essa define um homomorfismo de anéis $\omega : R \rightarrow \text{End}(A, A)$ por $(\omega(\lambda))(a) = \lambda a$ para $\lambda \in R$ e $a \in A$.

Seja R um anel. Definimos o *anel oposto de R* , e denotamos por R^{opp} , o anel com os mesmos elementos e operação de adição, mas com a multiplicação realizada na ordem oposta. Mais explicitamente, o anel oposto de um anel $(R, +, \cdot)$ é o anel $(R, +, *)$ cujo produto é dado por $\lambda * \mu = \mu \cdot \lambda$ para $\lambda, \mu \in R$. A rigor, R e R^{opp} não precisam ter os *mesmos* elementos, basta que os conjuntos subjacentes estejam em correspondência biunívoca. Desse modo, o produto em R^{opp} fica definido via essa última identificação.

Um *módulo à direita* sobre um anel R é simplesmente um R^{opp} -*módulo à esquerda*. Claramente, se R é comutativo, as noções de módulo à esquerda e à direita coincidem. Por conveniência, usaremos o termo ‘módulo’ para indicar ‘módulo à esquerda’.

Exemplo 2.1. Seja $R = \mathbb{Z}$ o anel dos inteiros. Todo grupo abeliano A possui uma estrutura de \mathbb{Z} -*módulo*. Para $a \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$, defina

$$na = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ a + a + \dots + a \text{ } n \text{ vezes}, & \text{se } n > 0, \\ -(-na), & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

Exemplo 2.2. Seja $R = K$ um corpo. Um K -*módulo* é um espaço vetorial sobre K .

Definição 2.2. Sejam A e B R -*módulos*. Um *homomorfismo de R -módulos* $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de grupos abelianos tal que $\varphi(\lambda a) = \lambda(\varphi(a))$ para todo $\lambda \in R$ e $a \in A$.

Evidentemente, a aplicação identidade de A é um homomorfismo de R -*módulos*, o qual denotaremos por $1_A : A \rightarrow A$. Se φ é sobrejetora, indicaremos por $\varphi : A \twoheadrightarrow B$. Se φ for injetora, usaremos $\varphi : A \hookrightarrow B$. Por fim, no caso de φ ser uma bijeção, escreveremos $\varphi : A \xrightarrow{\sim} B$ e diremos que φ é um isomorfismo. Se existir um tal homomorfismo φ , diremos A e B são isomorfos, e em símbolos faremos $A \cong B$.

Seja A' um subgrupo de A com $\lambda a' \in A'$ para todo $\lambda \in R$ e $a' \in A'$. Então, A' juntamente com a operação induzida de R é chamado um *submódulo* de A . Considere A' um submódulo de A . Podemos imbuir uma estrutura de R -*módulo* no grupo quociente A/A' definindo $\lambda(a + A') = (\lambda a) + A'$ para todo $\lambda \in R$ e $a' \in A'$. Notadamente, temos um homomorfismo injetivo $i : A' \hookrightarrow A$ e um homomorfismo sobrejetor $\pi : A \twoheadrightarrow A/A'$.

Para um homomorfismo arbitrário $\varphi : A \rightarrow B$, denotaremos por $\ker \varphi = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$ o *kernel* de φ e por $\text{im } \varphi = \varphi(A) = \{b \in B : b = \varphi(a) \text{ para algum } a \in A\}$ a

imagem de φ . É fácil ver que $\ker \varphi$ e $\operatorname{im} \varphi$ são submódulos de A e B , respectivamente. Também pode-se verificar que o isomorfismo canônico de grupos $\mu : A/\ker \varphi \xrightarrow{\sim} \varphi(A)$ é um isomorfismo de R -módulos. Se $\mu : A' \hookrightarrow A$ é injetora, podemos identificar A' com o submódulo $\mu(A')$ de A . Analogamente, se $\varepsilon : A \twoheadrightarrow A''$ é sobrejetora, podemos identificar A'' com $A/\ker \varepsilon$.

Definição 2.3. Sejam $\varphi : A \rightarrow B$ e $\psi : B \rightarrow C$ homomorfismos de R -módulos. A sequência $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ é dita *exata* (em B), se $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Se uma sequência $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1}$ é exata em A_1, \dots, A_n , então a sequência é simplesmente dita exata.

Exemplo 2.3. Como exemplos, mencionamos:

- (a) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B$ é exata (em A) se, e somente se, φ é injetora.
- (b) $A \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow 0$ é exata (em B) se, e somente se, φ é sobrejetora.
- (c) A sequência $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A'' \rightarrow 0$ é exata (em A' , A e A'') se, e somente se, μ induz um isomorfismo $A' \xrightarrow{\sim} \mu(A)$ e ε induz um isomorfismo $A/\mu(A) \xrightarrow{\sim} A''$. Essencialmente, A' é um submódulo de A e A'' é o módulo quociente correspondente. Uma sequência exata satisfazendo as condições acima será chamada *exata curta*, e por vezes escrita como $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$.

Definição 2.4. Sejam A, B, C e D R -módulos e sejam α, β, γ e δ homomorfismos de R -módulos. Dizemos que o *diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{\delta} & D \end{array}$$

comuta quando $\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma : A \rightarrow D$. Essa noção se generaliza naturalmente para diagramas maiores e mais complicados.

Lema 2.1. Sejam $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ e $B' \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B''$ duas sequências exatas curtas. Suponha que, no diagrama comutativo abaixo,

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\mu} & A & \xrightarrow{\varepsilon} & A'' \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha'' \\ B' & \xrightarrow{\mu'} & B & \xrightarrow{\varepsilon'} & B'' \end{array}$$

quaisquer dois dos três homomorfismos α' , α ou α'' sejam isomorfismos. Então o terceiro também será um isomorfismo.

Demonstração. Façamos por casos. Primeiramente, suponha que α' e α'' sejam isomorfismos, então devemos mostrar que α é isomorfismo. Começamos mostrando que $\ker \alpha = \{0\}$. Seja $a \in \ker \alpha$. Da comutatividade do diagrama, temos $0 = \varepsilon' \alpha a = \alpha'' \varepsilon a$.

Como α'' é isomorfismo, segue que $\varepsilon a = 0$ e $a \in \ker \varepsilon = \operatorname{im} \mu$. Dessa forma, existe $a' \in A'$ tal que $\mu a' = a$. Portanto, $0 = \alpha \mu a' = \mu' \alpha' a'$, novamente, pela comutatividade do diagrama. Da injetividade de $\mu' \alpha'$, segue que $a' = 0$. Então, $a = \mu a' = 0$. Agora, mostraremos que α é sobrejetiva. Seja $b \in B$. Dado que α'' é isomorfismo, existe $a'' \in A''$ tal que $\alpha'' a'' = \varepsilon' b$. Como ε é sobrejetora, existe $\bar{a} \in A$ tal que $\varepsilon \bar{a} = a''$. Dessa forma, temos que $\varepsilon(b - \alpha \bar{a}) = \varepsilon' b - \varepsilon' \alpha \bar{a} = \varepsilon' b - \alpha'' \varepsilon \bar{a} = 0$. Da exatidão da sequência inferior, existe $b' \in B'$ com $\mu' b' = b - \alpha \bar{a}$. Como α é isomorfismo, existe $a' \in A'$ tal que $\alpha' a' = b'$. Agora, note que $\alpha(\mu a' + \bar{a}) = \alpha \mu a' + \alpha \bar{a} = \mu' \alpha' a' + \alpha \bar{a} = \mu' b' + \alpha \bar{a} = b$, donde concluímos que $b \in \operatorname{im} \alpha$.

Suponha, agora, que α' e α são isomorfismos. Provaremos que $\ker \alpha'' = \{0\}$. Seja $a'' \in \ker \alpha''$. Sendo ε sobrejetiva, existe $a \in A$ com $\varepsilon a = a''$. Da comutatividade do diagrama, temos que $0 = \alpha'' \varepsilon a = \varepsilon' \alpha a$. Segue que $\alpha a \in \ker \varepsilon' = \operatorname{im} \mu'$. Portanto, existe $b' \in B'$ com $\alpha a = \mu' b'$. Sendo α' isomorfismo, existe $a' \in A'$ tal que $b' = \alpha' a'$. Logo, $\alpha a = \mu' b' = \mu' \alpha' a' = \alpha \mu a'$, novamente pela comutatividade do diagrama. Como α é injetiva, temos que $\mu a' = a$. Dessa forma, $a \in \operatorname{im} \mu = \ker \varepsilon$, donde $0 = \varepsilon a = a''$. Quanto à sobrejetividade, considere $b'' \in B''$. Sendo ε' sobrejetora, existe $b \in B$ com $\varepsilon b = b''$. Sendo α isomorfismo, existe $a \in A$ tal que $\alpha a = b$. Da comutatividade do diagrama, segue que $b'' = \varepsilon' b = \varepsilon' \alpha a = \alpha'' \varepsilon a$, donde concluímos que $b'' \in \operatorname{im} \alpha''$.

Finalmente, suponha α e α'' isomorfismos. Afirmamos que $\ker \alpha' = \{0\}$. De fato, considere $a' \in \ker \alpha'$. Da comutatividade do diagrama, $0 = \mu' \alpha' a' = \alpha \mu a'$. Como α é isomorfismo, segue que $\mu a' = 0$. Sendo μ injetora, têm-se que $a' = 0$. Por fim, resta provarmos a sobrejetividade de α' . Seja $b' \in B'$. A exatidão da sequência inferior nos diz que $\mu' b' \in \operatorname{im} \mu' = \ker \varepsilon'$. Sendo α isomorfismo, existe $a \in A$ com $\alpha a = \mu' b'$. Do comentário acima e da comutatividade do diagrama, segue que $0 = \varepsilon' \mu' b' = \varepsilon' \alpha a = \alpha'' \varepsilon a$. Como α'' é isomorfismo, temos que $\varepsilon a = 0$. Logo, a exatidão da sequência superior nos dá que $a \in \ker \varepsilon = \operatorname{im} \mu$. Portanto, existe $a' \in A'$ tal que $\mu a' = a$. Novamente, pela comutatividade do diagrama, $\mu' b' = \alpha a = \alpha \mu a' = \mu' \alpha' a'$. Sendo μ' injetiva, segue que $b' = \alpha' a'$, e $b' \in \operatorname{im} \alpha'$, como queríamos. ■

Proposição 2.1 (Lema dos cinco). *Suponha que, no diagrama comutativo abaixo, as linhas sejam exatas e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ sejam isomorfismos.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
 \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow & & \varphi_4 \downarrow & & \varphi_5 \downarrow \\
 B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
 \end{array}$$

Então φ_3 é isomorfismo.

Demonstração. Com efeito, primeiro mostremos $\ker \varphi_3 = \{0\}$. De fato, considere $a_3 \in \ker \varphi_3$. Da comutatividade do diagrama, $0 = \beta_3 \varphi_3 a_3 = \varphi_4 \alpha_3 a_3$. Como φ_4 é isomorfismo,

segue que $\alpha_3 a_3 = 0$. Da exatidão da sequência superior, existe $a_2 \in A_2$ tal que $a_3 = \alpha_2 a_2$. Novamente, pela comutatividade do diagrama, $\beta_2 \varphi_2 a_2 = \varphi_3 \alpha_2 a_2 = \varphi_3 a_3 = 0$. Da exatidão da sequência inferior, existe $b_1 \in B_1$ tal que $\varphi_2 a_2 = \beta_1 b_1$. Sendo φ_1 isomorfismo, existe $a_1 \in A_1$ tal que $b_1 = \varphi_1 a_1$. Dessa forma, temos que $\varphi_2(a_2 - \alpha_1 a_1) = \varphi_2 a_2 - \varphi_2 \alpha_1 a_1 = \varphi_2 a_2 - \beta_1 \varphi_1 a_1 = \varphi_2 a_2 - \beta_1 b_1 = 0$. Como φ_2 é isomorfismo, temos que $a_2 = \alpha_1 a_1$. Concluimos, a partir da exatidão da sequência superior, $a_3 = \alpha_2 a_2 = \alpha_2 \alpha_1 a_1 = 0$.

Resta provarmos a sobrejetividade de φ_3 . Seja $b_3 \in B_3$. Como φ_4 é isomorfismo, existe $a_4 \in A_4$ tal que $\beta_3 b_3 = \varphi_4 a_4$. Da comutatividade do diagrama, segue que $\varphi_5 \alpha_4 a_4 = \beta_4 \varphi_4 a_4 = \beta_4 \beta_3 b_3 = 0$. Sendo φ_5 isomorfismo, temos que $\alpha_4 a_4 = 0$. Da exatidão da sequência superior, existe $a_3 \in A_3$ tal que $a_4 = \alpha_3 a_3$. Novamente, pela comutatividade do diagrama, $\beta_3(b_3 - \varphi_3 a_3) = \beta_3 b_3 - \beta_3 \varphi_3 a_3 = \beta_3 b_3 - \varphi_4 \alpha_3 a_3 = \beta_3 b_3 - \varphi_4 a_4 = 0$. Da exatidão da sequência inferior, existe $b_2 \in B_2$ tal que $\beta_2 b_2 = b_3 - \varphi_3 a_3$. Sendo φ_2 isomorfismo, existe $a_2 \in A - 2$ tal que $b_2 = \varphi_2 a_2$. Finalmente, temos que $b_3 = \beta_2 b_2 + \varphi_3 a_3 = \beta_2 \varphi_2 a_2 + \varphi_3 a_3 = \varphi_3 \alpha_2 a_2 + \varphi_3 a_3 = \varphi_3(\alpha_2 a_2 + a_3) \in im \varphi_3$, como queríamos. ■

2.2 Somas e Produtos

Sejam A e B R -módulos. Definimos a *soma direta* $A \oplus B$ de A e B como o conjunto de pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$ juntamente com a adição e operação de R -módulo dadas por $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ e $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, respectivamente. Claramente, $i_A : A \rightarrow A \oplus B$ definida por $i_A(a) = (a, 0)$ e $i_B : B \rightarrow A \oplus B$ definida por $i_B(b) = (0, b)$ são homomorfismos de R -módulos.

Proposição 2.2. *Seja M um R -módulo, $\psi_A : A \rightarrow M$ e $\psi_B : B \rightarrow M$ homomorfismos de R -módulos. Então existe uma única aplicação*

$$\psi = \langle \psi_A, \psi_B \rangle : A \oplus B \rightarrow M$$

tal que $\psi \circ i_A = \psi_A$ e $\psi \circ i_B = \psi_B$. Dito de outra forma, para todo R -módulo M e aplicações ψ_A e ψ_B como acima, existe um único homomorfismo ψ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i_A} & A \oplus B & \xleftarrow{i_B} & B \\ & \searrow \psi_A & \downarrow \psi & \swarrow \psi_B & \\ & & M & & \end{array}$$

Demonstração. Defina $\psi(a, b) = \psi_A(a) + \psi_B(b)$. Para ver que esse é o único homomorfismo $\psi : A \oplus B \rightarrow M$ satisfazendo $\psi \circ i_A = \psi_A$ e $\psi \circ i_B = \psi_B$, basta notar que

$$\psi(a, b) = \psi((a, 0) + (0, b)) = \psi(a, 0) + \psi(0, b) = \psi \circ i_A(a) + \psi \circ i_B(b) = \psi_A + \psi_B.$$

■

Podemos facilmente expandir a construção acima para mais de dois R -módulos. Seja $\{A_j\}_{j \in J}$ uma família de R -módulos indexados por J . Definimos a soma direta $\bigoplus_{j \in J} A_j$ dos módulos A_j como segue: um elemento de $\bigoplus_{j \in J} A_j$ é uma família $(a_j)_{j \in J}$ onde $a_j \in A_j$ e $a_j \neq 0$ apenas para um número finito de índices. A adição é definida por $(a_j)_{j \in J} + (b_j)_{j \in J} = (a_j + b_j)_{j \in J}$ e a operação de R -módulo por $\lambda(a_j)_{j \in J} = (\lambda a_j)_{j \in J}$. Para cada $k \in J$, podemos definir aplicações injetivas $i_k : A_k \rightarrow \bigoplus_{j \in J} A_j$ pondo $i_k(a_k) = (b_j)_{j \in J}$ com $b_j = 0$ para $j \neq k$ e $b_k = a_k$.

Proposição 2.3. *Seja M um R -módulo e $\{\psi_j\}_{j \in J}$ uma família de homomorfismos de R -módulos definidos em A_j para cada $j \in J$ e tomando valores em M . Então existe um único homomorfismo*

$$\psi = \langle \psi_j \rangle : \bigoplus_{j \in J} A_j \rightarrow M,$$

tal que $\psi \circ i_j = \psi_j$ para todo $j \in J$.

Demonstração. Definimos $\psi((a_j)_{j \in J}) = \sum_{j \in J} \psi_j(a_j)$. Essa definição faz sentido, uma vez que $a_j \neq 0$ apenas para um número finito de índices. Dessa forma, vemos que a aplicação ψ é o único homomorfismo $\psi : \bigoplus_{j \in J} A_j \rightarrow M$ tal que $\psi \circ i_j = \psi_j$ para todo $j \in J$. Com efeito, se ψ' é um homomorfismo com a propriedade acima

$$\begin{aligned} \psi'((a_j)_{j \in J}) &= \psi\left(\sum_{k \in J} (b_j^k)_{j \in J}\right) = \psi'\left(\sum_{i=1}^m (b_j^{k_i})_{j \in J}\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \psi'((b_j^{k_i})_{j \in J}) = \sum_{i=1}^m \psi' \circ i_{k_i}(a_{k_i}) = \sum_{j \in J} \psi_j(a_j), \end{aligned}$$

onde os a_{k_i} denotam os termos não nulos de $(a_j)_{j \in J}$ e $(b_j^{k_i})_{j \in J}$ a imagem desses a_{k_i} por i_{k_i} . ■

Chamamos atenção para o fato de que a propriedade acima caracteriza a soma direta de R -módulos e as aplicações i_j a menos de isomorfismo. Mais precisamente, considere S um R -módulo e aplicações injetivas $i'_j : A_j \rightarrow S$ verificando a propriedade enunciada na proposição 2.2. Primeiramente, escreva $T = \bigoplus_{j \in J} A_j$ e faça $M = T$ e $\psi_j = i_j$ para cada $j \in J$. Por hipótese, existe um único homomorfismo $\psi : S \rightarrow T$ que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{i'_j} & S \\ & \searrow i_j & \downarrow \psi \\ & & T \end{array}$$

comutar para cada $j \in J$. Escolhendo $M = S$ e $\psi'_j = i'_j$, obtemos um único homomorfismo $\psi' : \bigoplus_{j \in J} A_j \rightarrow S$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{i_j} & T \\ & \searrow i'_j & \downarrow \psi' \\ & & S \end{array}$$

comuta para cada $j \in J$. Observe ainda que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{i_j} & T \\ & \searrow i_j & \downarrow \psi \circ \psi' \\ & & T \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow 1_T \\ \downarrow \end{array}$$

comuta tanto para a aplicação identidade 1_T quanto para $\psi \circ \psi'$, donde concluímos que $\psi \circ \psi' = 1_T$. Da mesma forma, prova-se que $\psi' \circ \psi = 1_S$. Portanto, ψ e ψ' são ambos isomorfismos.

A seguir, definimos o *produto direto* $\prod_{j \in J} A_j$ de uma família $\{A_j\}_{j \in J}$ de R -módulos. Um elemento de $\prod_{j \in J} A_j$ é uma família $(a_j)_{j \in J}$ em que $a_j \in A_j$ para cada $j \in J$. A adição é dada por $(a_j)_{j \in J} + (b_j)_{j \in J} = (a_j + b_j)_{j \in J}$ e a operação de R -módulo por $\lambda(a_j)_{j \in J} = (\lambda a_j)_{j \in J}$. Para cada $k \in J$, podemos definir *projeções* $\pi_k : \prod_{j \in J} A_j \rightarrow A_k$ como $\pi_k(a_j)_{j \in J} = a_k$. Note ainda que, para uma família finita A_1, \dots, A_n de R -módulos, os módulos $\prod_{j \in J} A_j$ e $\bigoplus_{j \in J} A_j$ são idênticos.

Proposição 2.4. *Seja M um R -módulo e $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ uma família de homomorfismos de R -módulos definidos em A_j para cada $j \in J$ e tomando valores em M . Então, existe um único homomorfismo $\varphi = \{\varphi_j\} : M \rightarrow \prod_{j \in J} A_j$ tal que, para cada $j \in J$, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & & A_j \\ & \nearrow \varphi_j & \uparrow \pi_j \\ M & \dashrightarrow \varphi & \prod_{j \in J} A_j \end{array}$$

comuta, i.e., $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j$.

Demonstração. Defina $\varphi(x) = (\varphi_j(x))_{j \in J}$, $x \in M$. Claramente, φ é um homomorfismo de R -módulos. Quanto à unicidade, considere um homomorfismo $\varphi' : M \rightarrow \prod_{j \in J} A_j$ satisfazendo $\pi_j \circ \varphi' = \varphi_j$ para cada $j \in J$. Escreva $\varphi'(x) = (b_j^x)_{j \in J}$ para $x \in M$ e $b_j^x \in A_j$. Observe que $\pi_j \circ \varphi = \varphi_j = \pi_j \circ \varphi'$, donde concluímos $\varphi_j(x) = b_j^x$. Segue que $\varphi(x) = \varphi'(x)$ para todo $x \in M$ e, conseqüentemente, $\varphi = \varphi'$. ■

Da mesma forma como ocorre com a soma direta, a propriedade enunciada na proposição acima caracteriza o produto direto de R -módulos e as projeções π_k a menos de isomorfismo. A prova dessa afirmação segue os mesmos moldes que aquela feita para a soma direta.

2.3 Módulos Livres

Seja A um R -módulo e S um subconjunto de A . Consideramos o conjunto A_0 de todos os elementos da forma $\sum_{s \in S} \lambda_s s$ onde $\lambda_s \in R$ e $\lambda_s \neq 0$ apenas para um número finito de elementos de $s \in S$. É fácil verificar que A_0 é um submódulo de A ; a saber, o menor submódulo de A contendo S . Se, para um subconjunto $S \subset A$, ocorrer $A_0 = A$, diremos que S é um conjunto de *geradores* de A . Quando A admitir um conjunto finito de geradores, diremos que A é finitamente gerado. Um conjunto S de geradores de A é dito uma *base* para A se a expressão $a = \sum_{s \in S} \lambda_s s$ é única para todo $a \in A$. Note que um conjunto de geradores S é uma base de A se, e somente se, é *linearmente independente*, i.e., se $\sum_{s \in S} \lambda_s s = 0$ implica $\lambda_s = 0$ para todo $s \in S$. Chamamos atenção para o fato de que nem todo R -módulo possui uma base.

Definição 2.5. Seja P um R -módulo e $S \subset P$ um subconjunto de P . Diremos que P é *livre no conjunto* S quando S for uma base para P . P será dito *livre* se for livre em algum de seus subconjuntos.

Proposição 2.5. *Suponha que o R -módulo P é livre no conjunto S . Então $P \cong \bigoplus_{s \in S} R_s$, onde $R_s = R$ como um R -módulo à esquerda para cada $s \in S$. Reciprocamente, o R -módulo $\bigoplus_{s \in S} R_s$ é livre no conjunto $\{1_{R_s} : s \in S\}$.*

Demonstração. Para cada $a \in P$, escreva $a = \sum_{s \in S} \lambda_s s$ e defina

$$\begin{aligned} \varphi : P &\longrightarrow \bigoplus_{s \in S} R_s \\ a &\longmapsto \varphi(a) = (\lambda_s)_{s \in S}. \end{aligned}$$

Observe que a unicidade da expressão $a = \sum_{s \in S} \lambda_s s$ garante a boa definição de φ . Defina também, para cada $s \in S$, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_s : R_s &\longrightarrow P \\ \lambda_s &\longmapsto \psi_s(\lambda_s) = \lambda_s s. \end{aligned}$$

Note ainda que cada ψ_s é um homomorfismo de R -módulos. Segue da proposição 2.2 que a família $\{\psi_s\}_{s \in S}$ dá origem à um único homomorfismo

$$\psi = \langle \psi_s \rangle : \bigoplus_{s \in S} R_s \rightarrow P; (\lambda_s)_{s \in S} \mapsto \psi((\lambda_s)_{s \in S}) = \sum_{s \in S} \psi_s(\lambda_s) = \sum_{s \in S} \lambda_s s.$$

Por fim, têm-se que $\varphi(\psi((\lambda_s)_{s \in S})) = (\lambda_s)_{s \in S}$ e $\varphi(\psi(a)) = a$, donde concluímos que φ e ψ são ambos isomorfismos. A afirmação restante decorre da própria definição da soma direta, dado que cada R_s , quando visto como um R_s -módulo, é livre no conjunto $\{1_{R_s}\}$. ■

Proposição 2.6. *Seja P livre no conjunto S . Para cada R -módulo M e toda aplicação f de S no conjunto M subjacente, existe um único homomorfismo de R -módulos $\varphi : P \rightarrow M$ estendendo f .*

Demonstração. Para cada $a \in P$, escreva $a = \sum_{s \in S} \lambda_s s$ e defina $\varphi(a) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s)$. Claramente, esse é o único homomorfismo com a propriedade requerida. Com efeito, temos que $\varphi(s) = f(s)$ para todo $s \in S$. Agora, considere φ' um homomorfismo verificando a propriedade acima. Segue de

$$\varphi'(a) = \varphi'\left(\sum_{s \in S} \lambda_s s\right) = \varphi'\left(\sum_{k=1}^m \lambda_{s_k} s_k\right) = \sum_{k=1}^m \lambda_{s_k} \varphi'(s_k) = \sum_{k=1}^m \lambda_{s_k} f(s_k) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s),$$

onde λ_{s_k} são os coeficientes não nulos da expressão $a = \sum_{s \in S} \lambda_s s$, que $\varphi' = \varphi$. ■

Proposição 2.7. *Todo R -módulo A é quociente de um módulo livre P .*

Demonstração. Seja S um conjunto de geradores de A . Faça $P = \bigoplus_{s \in S} R_s$ com $R_s = R$ para cada $s \in S$ e defina $\varphi : P \rightarrow A$ aplicando a proposição anterior como a única extensão da aplicação f dada por $f(1_{R_s}) = s$. Claramente, φ é sobrejetora, donde concluímos $P/\ker \varphi \cong A$. ■

Proposição 2.8. *Considere P um R -módulo livre. Para cada homomorfismo sobrejetor $\varepsilon : B \rightarrow C$ de R -módulos e todo homomorfismo $\gamma : P \rightarrow C$, existe um homomorfismo $\beta : P \rightarrow B$ tal que $\varepsilon\beta = \gamma$.*

Demonstração. Seja P livre em S . Da sobrejetividade de ε , podemos obter elementos $b_s \in B$ com $\varepsilon(b_s) = \gamma(s)$ para cada $s \in S$. Aplicando a proposição 2.5, defina β como a única extensão da aplicação $f : S \rightarrow B$ dada por $f(s) = b_s$. Note ainda que tanto $\varepsilon\beta$ quanto γ são extensões da aplicação $g : S \rightarrow C$ dada por $g(s) = \gamma(s)$ para cada $s \in S$, donde concluímos $\varepsilon\beta = \gamma$. ■

Capítulo 3

Introdução à Homologia Singular

Neste capítulo, começaremos a dar conteúdo ao enfoque principal dessa monografia. Dedicaremos as próximas seções à exposição das definições e resultados que constituirão a introdução do autor à teoria de homologia singular.

3.1 Geometria Afim

O Espaço Euclidiano, quando visto como construído puramente geométrico, vê-se completamente despojado de coordenadas cartesianas e das operações de adição e multiplicação por escalar usuais de \mathbb{R}^n ; possui apenas pontos, retas, planos e toda sorte de entes geométricos. Sob essa ótica, desprovido de uma estrutura métrica ou vetorial, será referido simplesmente como *Espaço Afim*. Mais precisamente

Definição 3.1. Um *Espaço Afim* de dimensão n sobre \mathbb{R} é um conjunto E juntamente com uma ação de grupo simplesmente transitiva $\pi : E \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ do grupo aditivo \mathbb{R}^n sobre E . Escrevemos $\pi((P, v)) = P + v$.

Note que, pela definição acima, para cada par de pontos $P, Q \in E$ existe um único vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $P = Q + v$. Dessa forma, podemos definir $P - Q$ como o único vetor v supracitado. Considere $t \in \mathbb{R}$ arbitrário. Definimos $tP + (1 - t)Q$ como o único ponto $S \in E$ tal que $S - Q = t(P - Q)$, essa última sendo uma equação vetorial. Se $P \neq Q$, o conjunto de tais pontos para todo $t \in \mathbb{R}$ é definida como a *reta* através de P e Q . Mais geralmente, dados pontos $P_0, P_1, \dots, P_r \in E$ e números reais $a_0, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ tais que $a_0 + a_1 + \dots + a_r = 1$, podemos definir o ponto

$$\sum_{i=0}^r a_i P_i$$

como o único S tal que

$$S - P_0 = \sum_{i=0}^r a_i (P_i - P_0).$$

Se P_0, P_1, \dots, P_r são *independentes*, i.e., os vetores $P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0$ são linearmente independentes no sentido clássico, o conjunto de tais pontos S é um espaço afim de dimensão r chamado de *span* de P_0, P_1, \dots, P_r . Cada ponto S no span tem um único conjunto de coordenadas (a_0, a_1, \dots, a_r) ditas as *coordenadas baricêntricas* de S relativas a P_0, P_1, \dots, P_r .

Dados $P, Q \in E$ distintos, os pontos $tP + (1 - t)Q$ na reta através de P e Q que satisfazem $0 \leq t \leq 1$ formam o *segmento de reta* através de P e Q . Um subconjunto de um espaço afim é dito *convexo* se contém os segmentos de reta através de quaisquer dois de seus pontos.

Mais geralmente, dados pontos independentes P_0, P_1, \dots, P_r , definimos o *simplexo geométrico* gerado por P_0, P_1, \dots, P_r , e denotaremos por SG_r , como o conjunto dos pontos S no span de P_0, P_1, \dots, P_r cujas coordenadas baricêntricas são todas não-negativas.

Proposição 3.1. *O simplexo geométrico gerado por P_0, P_1, \dots, P_r é o menor subconjunto convexo de E contendo P_0, P_1, \dots, P_r , também conhecido como o envoltório convexo do conjunto $\{P_0, P_1, \dots, P_r\}$.*

Demonstração. Denotaremos o envoltório convexo do conjunto $\{P_0, P_1, \dots, P_r\}$ como $EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$. Primeiramente, mostraremos que $EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\}) \subset SG_r$. Para isso, é suficiente mostrarmos que SG_r contém os pontos P_0, P_1, \dots, P_r e é convexo. Têm-se

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + \dots + 0 \cdot P_r, \\ P_1 &= 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + \dots + 0 \cdot P_r, \\ &\vdots \\ P_r &= 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + \dots + 1 \cdot P_r, \end{aligned}$$

portanto $\{P_0, P_1, \dots, P_r\} \subset SG_r$. Para mostrar que SG_r é convexo, considere $P, Q \in SG_r$ e escreva

$$P = \sum_{i=0}^r a_i P_i, \quad Q = \sum_{i=0}^r b_i P_i,$$

onde $0 \leq a_i, b_i \leq 1$ para $i = 0, 1, \dots, r$ e $\sum_{i=0}^r a_i = \sum_{i=0}^r b_i = 1$. Note ainda que, para $0 \leq t \leq 1$, temos

$$tP + (1 - t)Q = t \sum_{i=0}^r a_i P_i + (1 - t) \sum_{i=0}^r b_i P_i = \sum_{i=0}^r [ta_i + (1 - t)b_i] P_i.$$

Além disso,

$$\sum_{i=0}^r ta_i + (1 - t)b_i = t \sum_{i=0}^r a_i + (1 - t) \sum_{i=0}^r b_i = t + (1 - t) = 1,$$

e $0 \leq ta_i + (1-t)b_i$, para $i = 0, 1, \dots, r$. Dessa forma, o segmento de reta através de P e Q está inteiramente contido em SG_r , donde temos que SG_r é convexo, como queríamos.

Quanto à prova de que $SG_r \subset EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$, faremos por indução. Para $r = 1$, considere $P \in SG_1$. Note que,

$$P = \sum_{i=0}^1 a_i P_i = a_0 P_0 + a_1 P_1 = a_i P_0 + (1 - a_0) P_1.$$

Portanto, P pertence ao segmento de reta através de P_0 e P_1 . Sendo $EC(\{P_0, P_1\})$ convexo, concluímos que $P \in EC(\{P_0, P_1\})$. Tomemos por hipótese indutiva que $SG_{r-1} \subset EC(\{P_0, P_1, \dots, P_{r-1}\})$. Considere $P \in SG_r$ e escreva $P = \sum_{i=0}^r a_i P_i$ onde

$0 \leq a_i$ e $\sum_{i=0}^1 a_i = 1$ para $i = 0, 1, \dots, r$. Em particular, $0 \leq a_r \leq 1$. Se $a_r = 1$, então $a_0 = a_1 = \dots = a_{r-1} = 0$ e $P = P_r \in EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$. Suponhamos agora que $a_r \neq 1$. Nesse caso, $1 - a_r = a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1} \neq 0$ e podemos escrever

$$P = \sum_{i=0}^r a_i P_i = (a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1}) \sum_{i=0}^{r-1} \frac{a_i P_i}{a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1}} + (1 - a_0 - a_1 - \dots - a_{r-1}) P_r.$$

Observe ainda que $0 \leq \frac{a_i}{a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1}}$ para $i = 0, 1, \dots, r-1$. Definindo

$$M = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{a_i P_i}{a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1}},$$

o argumento acima nos diz que $M \in SG_{r-1}$. Daí, $M \in EC(\{P_0, P_1, \dots, P_{r-1}\}) \supset SG_{r-1}$.

Chamamos atenção para o fato de que o envoltório convexo do conjunto $\{P_0, P_1, \dots, P_r\}$ é, ele próprio, um conjunto convexo que contém qualquer subconjunto $X \subset \{P_0, P_1, \dots, P_r\}$. Portanto, $EC(X) \subset EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$. Em particular, $EC(\{P_0, P_1, \dots, P_{r-1}\}) \subset EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$, e concluímos $M \in EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$. Dessa forma, $P = (a_0 + a_1 + \dots + a_{r-1})M + (1 - a_0 - a_1 - \dots - a_{r-1})P_r$ pertence ao segmento de reta através de M e P_r , e sendo $EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$ convexo, isso nos diz que $P \in EC(\{P_0, P_1, \dots, P_r\})$. ■

Uma função f entre espaços afins E e E' será chamada uma *aplicação afim* se

$$f(tP + (1-t)Q) = tf(P) + (1-t)f(Q)$$

para todo $P, Q \in E$ e $t \in \mathbb{R}$. Observe que, se $f(P) \neq f(Q)$, f leva a reta através P e Q na reta através $f(P)$ e $f(Q)$. Também pode-se demonstrar que toda aplicação desse tipo

é obtida como segue: seja T uma transformação linear de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^n . Escolha um ponto $0 \in E$ e um ponto $0' \in E'$. Então

$$f(P) = 0' + T(P - 0), \quad P \in E$$

é uma aplicação afim. Reciprocamente, dada uma aplicação afim f , fixe $0 \in E$. Para cada vetor $v \in \mathbb{R}^n$, ponha $P = 0 + v$, de modo que a equação

$$T(v) = f(P) - f(0),$$

define uma transformação linear T . Dessa forma, se $E = E'$, uma aplicação afim de E em si próprio consistirá simplesmente numa transformação linear composta com uma translação.

Escolher uma origem $0 \in E$ como feito acima estabelece uma correspondência biunívoca $P \mapsto 0 + v$ entre E e \mathbb{R}^n . Transformamos E num espaço topológico por meio dessa correspondência. Nessa topologia, aplicações afim são claramente contínuas.

Por fim, se P_0, P_1, \dots, P_r são pontos independentes cujo span é E todo, qualquer aplicação afim é unicamente determinada pelo que ela faz nesses pontos. Com efeito,

basta notar que $f\left(\sum_{i=0}^n a_i P_i\right) = \sum_{i=0}^n a_i f(P_i)$.

3.2 Teoria Singular

Tomaremos um produto infinito enumerável de cópias de \mathbb{R} e consideraremos os vetores

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, \dots, 0, \dots) \\ E_1 &= (1, 0, \dots, 0, \dots) \\ &\vdots \\ E_n &= (0, 0, \dots, 1, \dots), \text{ etc.}, \end{aligned}$$

nesse produto. Identificaremos \mathbb{R}^n com o subespaço em que todas as componentes à direita da n -ésima são nulas. Denotaremos por Δ_n o simplexo geométrico gerado por E_0, E_1, \dots, E_n , o qual será chamado de *n -simplexo padrão*. Dessa forma, Δ_0 é um ponto, Δ_1 o intervalo unitário, Δ_2 um triângulo, Δ_3 um tetraedro, etc.

Sejam P_0, \dots, P_n pontos em algum espaço afim E . Então, $(P_0 \dots P_n)$ irá denotar a restrição à Δ_n da única aplicação afim de \mathbb{R}^n para E que associa E_i com P_i para $i = 0, 1, \dots, n$.

Definição 3.2. Seja X um espaço topológico. Um *n -simplexo singular* é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$.

Para $n = 0$ na definição acima, σ corresponde a um ponto de X . Para $n = 1$, a um caminho em X . Para $n = 2$, é uma aplicação contínua do triângulo padrão em X , etc. Note ainda que a aplicação afim $(P_0 \dots P_n)$ é um n -simplexo singular no espaço afim E . No que se segue, iremos somar n -simplexos singulares de X de modo puramente formal.

Definição 3.3. Seja X um espaço topológico e R um anel (abeliano e unitário). Definimos o conjunto $S_n(X; R)$ como o *R -módulo* livre sobre o conjunto dos n -simplexos singulares de X . Mais precisamente, os elementos de $S_n(X; R)$ são todas as combinações lineares formais

$$\sum_{i=1}^m \nu_i \sigma_i,$$

em que $m \in \mathbb{N}$, $\nu_i \in R$ e $\sigma_i : \Delta_n \rightarrow X$ é um n -simplexo singular de X . Estas somas serão chamadas de *n -cadeias singulares* de X .

Observe que a única maneira de uma tal soma ser nula será, por definição, quando todos os ν_i forem, eles próprios, nulos. Quando não houver risco de confusão, denotaremos $S_n(X; R)$ simplesmente por $S_n(X)$.

Gostaríamos de chamar a atenção do leitor para os cuidados em se diferenciar n -simplexos de n -cadeias singulares. Recorde que o primeiro consiste em aplicações de Δ_n em X , enquanto o último são combinações lineares formais de q -simplexos singulares.

Contudo, é possível identificar cada n -simplexo singular com uma n -cadeia. Com efeito, se σ for um n -simplexo, basta considerar a n -cadeia singular dada por $\sum_{i=1}^1 1_R \sigma$.

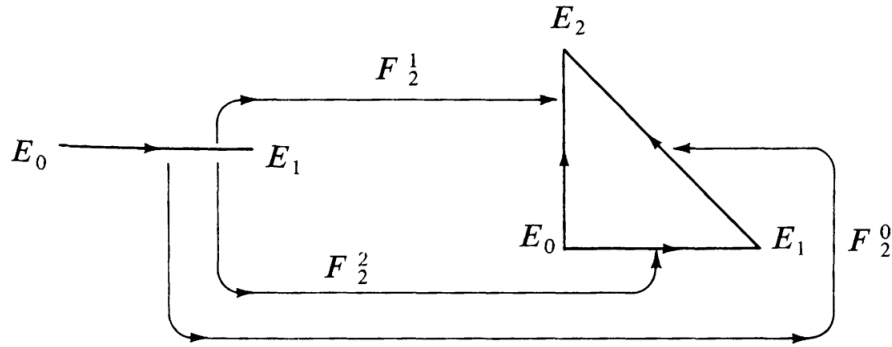
Além disso, não se deve confundir um n -simplexo singular com a sua imagem. Por exemplo, $\sigma : \Delta_1 \rightarrow X$ e $\sigma' : \Delta_1 \rightarrow X$ definido por

$$\sigma'(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \sigma(1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

são elementos distintos de $S_1(X)$, porém, suas imagens são idênticas. Para $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq i \leq n$, definimos a aplicação afim $F_n^i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ por

$$F_n^i(E_j) = \begin{cases} E_j, & j < i, \\ E_{j+1}, & j \geq i. \end{cases}$$

Diagramadamente, para $n = 2$ temos



Vê-se que F_n^i é um homeomorfismo afim de Δ_{n-1} para a face de Δ_n oposta ao vértice E_i .

Definição 3.4. Para um n -simplexo singular arbitrário $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$, chamaremos o $(n - 1)$ -simplexo singular

$$\sigma^{(i)} := \sigma \circ F_n^i : \Delta_{n-1} \rightarrow X$$

de i -ésima face de σ .

Definição 3.5. Seja σ um n -simplexo singular. Definimos o *bordo* de σ como a $(n - 1)$ -cadeia singular

$$\partial\sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}.$$

Sendo $S_n(X)$ um R -módulo livre sobre os n -simplexos singulares de X , podemos estender ∂ para um homomorfismo de módulos $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$. A saber,

$$\partial\left(\sum_{i=1}^m \nu_i \sigma_i\right) := \sum_{i=1}^m \nu_i \partial\sigma_i.$$

Para $n = 0$, o bordo de uma 0-cadeia é definido como 0.

Lema 3.1. $F_n^i F_{n-1}^j = F_n^j F_{n-1}^{i-1}$ para $j < i$.

Demonstração. O lema segue das computações abaixo.

$$\begin{array}{cccccc}
E_0 & \xleftarrow{F_n^i} & E_0 & \xleftarrow{F_{n-1}^j} & E_0 & \xrightarrow{F_{n-1}^{i-1}} & E_0 & \xrightarrow{F_n^j} & E_0 \\
E_1 & \xleftarrow{F_n^i} & E_1 & \xleftarrow{F_{n-1}^j} & E_1 & \xrightarrow{F_{n-1}^{i-1}} & E_1 & \xrightarrow{F_n^j} & E_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
E_{j-1} & \xleftarrow{F_n^i} & E_{j-1} & \xleftarrow{F_{n-1}^j} & E_{j-1} & \xrightarrow{F_{n-1}^{i-1}} & E_{j-1} & \xrightarrow{F_n^j} & E_{j-1} \\
E_{j+1} & \xleftarrow{F_n^i} & E_{j+1} & \xleftarrow{F_{n-1}^j} & E_j & \xrightarrow{F_{n-1}^{i-1}} & E_j & \xrightarrow{F_n^j} & E_{j+1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
E_{i-1} & \xleftarrow{F_n^i} & E_{i-1} & \xleftarrow{F_{n-1}^j} & E_{i-2} & \xrightarrow{F_{n-1}^{i-1}} & E_{i-2} & \xrightarrow{F_n^j} & E_{i-1} \\
E_{i+1} & \xleftarrow{F_n^i} & E_i & \xleftarrow{F_{n-1}^j} & E_{i-1} & \xrightarrow{F_{n-1}^{i-1}} & E_i & \xrightarrow{F_n^j} & E_{i+1} \\
E_{i+2} & \xleftarrow{F_n^i} & E_{i+1} & \xleftarrow{F_{n-1}^j} & E_i & \xrightarrow{F_{n-1}^{i-1}} & E_{i+1} & \xrightarrow{F_n^j} & E_{i+2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
E_{n+1} & \xleftarrow{F_n^i} & E_n & \xleftarrow{F_{n-1}^j} & E_{n-1} & \xrightarrow{F_{n-1}^{i-1}} & E_n & \xrightarrow{F_n^j} & E_{n+1}
\end{array}$$

■

Proposição 3.2. $\partial\partial = 0$.

Demonstração. É suficiente mostrarmos que $\partial\partial\sigma = 0$ para σ um n -simplexo singular. De fato,

$$\begin{aligned}
\partial\partial\sigma &= \partial \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial\sigma^{(i)} \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (\sigma \circ F_n^i) \circ F_{n-i}^j \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_n^i \circ F_{n-1}^j + \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_n^i \circ F_{n-1}^j \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_n^i \circ F_{n-1}^j + \sum_{0 \leq j' < i' \leq n} (-1)^{i'+j'+1} \sigma \circ F_n^{j'} \circ F_{n-1}^{i'-1} \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_n^i \circ F_{n-1}^j + \sum_{0 \leq j' < i' \leq n} (-1)^{i'+j'+1} \sigma \circ F_n^{i'} \circ F_{n-1}^{j'} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde $j' = i - 1$ e $i' = j$ acima. Isso prova o teorema. ■

Definição 3.6. Uma n -cadeia singular c com $\partial c = 0$ é chamada de n -ciclo singular de X . Se $c = \partial c'$ para alguma $(n+1)$ -cadeia c' , então c é dito um n -bordo singular de X .

Duas n -cadeias c_1 e c_2 são ditas *homólogas*, simbolicamente $c_1 \sim c_2$, quando a n -cadeia $c_1 - c_2$ é um n -bordo singular. Denotaremos por $Z_n(X; R)$ e $B_n(X; R)$ o conjunto dos n -ciclos de X e o conjunto dos n -bordos de X , respectivamente. Observe que, escrevendo $\partial_n = \partial : S_n(X; R) \rightarrow S_{n-1}(X; R)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $Z_n(X; R) = \ker \partial_n$ e $B_n(X; R) = \text{im } \partial_{n+1}$. Note ainda que, da proposição anterior, $B_n(X; R) \subset Z_n(X; R)$. Estamos finalmente em condições de definir o conceito central dessa seção:

Definição 3.7. Definimos o n -ésimo módulo de homologia singular de X como o quociente

$$H_n(X; R) := \frac{Z_n(X; R)}{B_n(X; R)}.$$

Escreveremos simplesmente $H_n(X)$ quando a referência ao anel R for clara.

Exemplo 3.1. Seja $X = \{x_0\}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe exatamente um n -simplexo singular, a saber, a aplicação constante $\sigma_n : \Delta_n \rightarrow x_0$. Da definição do R -módulo livre $S_n(X; R)$, teremos que $S_n(X; R) = \{\alpha\sigma_n : \alpha \in R\}$. Observe ainda que, considerando a aplicação $\alpha\sigma_n \mapsto \alpha$, concluí-se $S_n(X; R) \cong R$. Em vista das observações acima, estamos interessados em avaliar qual o comportamento do operador bordo sobre cada um desses simplexos. Com efeito,

$$\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1} = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \right) \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \sigma_{n-1}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } n = 0, \end{cases}$$

dado que, sendo $\sigma^{(i)}$ um $(n-1)$ -simplexo singular, esse só pode ser σ_{n-1} . Daí,

$$Z_n(X; R) = \begin{cases} R\sigma_n, & \text{se } n \text{ é ímpar ou } n = 0, \\ 0, & \text{se } n \text{ é par e } n > 0, \end{cases}$$

$$B_n(X; R) = \begin{cases} R\sigma_n, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

donde concluímos

$$H_n(X; R) = \begin{cases} 0, & \text{se } n > 0, \\ R, & \text{se } n = 0, \end{cases}$$

onde o isomorfismo $H_0(X; R) \cong R$ é dado por $\alpha\sigma_0 \mapsto \alpha$.

Proposição 3.3. *Seja $(X_k)_{k \in K}$ a família das componentes conexas por caminhos de um espaço topológico X . Então,*

$$H_n(X; R) \cong \bigoplus_{k \in K} H_n(X_k; R),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Primeiramente, sendo cada Δ_n conexo por caminhos, para todo n -simplexo singular σ a imagem $\sigma(\Delta_n)$ está contida em alguma componente conexa por caminhos X_k . Dessa forma, qualquer n -cadeia singular c se decompõe unicamente como

$$c = \sum_{k \in K} c_k,$$

em que cada c_k é uma n -cadeia singular de X_k e $c_k \neq 0$ apenas para um número finito de índices. Portanto, podemos identificar $S_n(X)$ com $\bigoplus_{k \in K} S_n(X_k)$. Afirmamos que esta

identificação nos fornece os isomorfismos

$$Z_n(X) \cong \bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k) \quad \text{e} \quad B_n(X) \cong \bigoplus_{k \in K} B_n(X_k).$$

Com efeito, note que a definição do operador ∂ nos dá $\partial c_k \in S_{n-1}(X_k)$ para cada $k \in K$. Começaremos provando $B_n(X) \cong \bigoplus_{k \in K} B_n(X_k)$. Suponha $c \in B_n(X)$ e escreva $c = \sum_{k \in K} c_k$.

Então, existe $c' \in S_{n+1}(X)$ tal que $c = \partial c'$. Escreva $c' = \sum_{k \in K} c'_k$ com $c'_k \in S_{n+1}(X_k)$ e

observe que

$$\sum_{k \in K} c_k = c = \partial c' = \partial \sum_{k \in K} c'_k = \sum_{k \in K} \partial c'_k,$$

donde concluimos que $c_k = \partial c'_k \in B_n(X_k)$ para cada $k \in K$. Agora, tome $c \in Z_n(X)$ e escreva novamente $c = \sum_{k \in K} c_k$. Note que,

$$\sum_{k \in K} 0 = 0 = \partial c = \partial \sum_{k \in K} c_k = \sum_{k \in K} \partial c_k.$$

Donde concluimos que cada ∂c_k é igual a zero. Logo, obtemos $c_k \in Z_n(X_k)$ para todo $k \in K$. As observações acima provam a afirmação. Considere as projeções canônicas $\pi_k : Z_n(X_k; R) \rightarrow H_n(X_k; R)$ dadas por $z_k \mapsto [z_k]$. A partir de cada π_k , definiremos uma aplicação π'_k como

$$\begin{aligned} \pi'_k : Z_n(X_k; R) &\longrightarrow \bigoplus_{k \in K} H_n(X_k; R) \\ z_k &\longmapsto \pi'_k(z_k) = (a_j)_{j \in K} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k, \\ [z_k], & \text{se } j = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente, π'_k é um homomorfismo de R -módulos entre $Z_n(X_k)$ e $\bigoplus_{k \in K} H_n(X_k)$. Da proposição 2.2, existe um único homomorfismo $\pi : \bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k) \rightarrow \bigoplus_{k \in K} H_n(X_k)$ tal que $\pi'_k = \pi \circ i_k$ para todo $k \in K$, onde $i_k : Z_n(X_k) \rightarrow \bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k)$ é a inclusão de $Z_n(X_k)$ em $\bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k)$. Ilustramos essas relações com o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} Z_n(X_k) & & \\ \downarrow i_k & \searrow \pi'_k & \\ \bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k) & \xrightarrow{\pi} & \bigoplus_{k \in K} H_n(X_k) \end{array}$$

Observe ainda que a aplicação π acima é um epimorfismo. Além disso, para cada família $(z_k)_{k \in K} \in \bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k)$, temos

$$\pi((z_k)_{k \in K}) = \sum_{k \in K} \pi'_k(z_k),$$

donde conclui-se que $\pi((z_k)_{k \in K}) = 0$ se, e somente se, $\pi'_k(z_k) = 0$ para cada $k \in K$. Dessa forma, $\ker \pi \cong \bigoplus_{k \in K} \ker \pi'_k$. Contudo, recorde que a definição de π'_k nos dá

$\ker \pi'_k = B_n(X_k)$. Finalmente, teremos

$$\begin{aligned} H_n(X) &= \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \cong \bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k) / \bigoplus_{k \in K} B_n(X_k) \\ &= \bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k) / \bigoplus_{k \in K} \ker \pi'_k \\ &\cong \bigoplus_{k \in K} Z_n(X_k) / \ker \pi \\ &\cong \bigoplus_{k \in K} H_n(X_k), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Corolário 3.1. $H_0(X; R)$ é um R -módulo livre sobre tantos geradores quanto houverem componentes conexas por caminhos de X .

Demonstração. Considere o caso $X \neq \emptyset$ conexo por caminhos. Mostraremos que $H_0(X; R)$ possui exatamente um gerador, donde o corolário segue da proposição anterior. Escolha $x_0 \in X$ e tome, para cada $x \in X$, σ_x um caminho de x_0 para x . Observe que $\partial\sigma_x = x - x_0$. Afirmamos que uma 0-cadeia singular $c = \sum_{i=1}^m \nu_i x_i$ é um bordo se, e somente se, $\sum_{i=1}^m \nu_i = 0$.

Com efeito, suponha $\sum_{i=1}^m \nu_i = 0$. Então,

$$c = \sum_{i=1}^m \nu_i x_i - \left(\sum_{i=1}^m \nu_i \right) x_0 = \sum_{i=1}^m \nu_i (x - x_0) = \sum_{i=1}^m \nu_i \partial\sigma_x = \partial \left(\sum_{i=1}^m \nu_i \sigma_x \right).$$

Reciprocamente, suponha $c = \partial \left(\sum_{j=1}^l \nu_j \sigma_j \right)$. Note que,

$$c = \partial \left(\sum_{j=1}^l \nu_j \sigma_j \right) = \sum_{j=1}^l \nu_j \partial\sigma_j = \sum_{j=1}^l \nu_j (\sigma_j(1) - \sigma_j(0)) = \sum_{j=1}^l \nu_j \sigma_j(1) + \sum_{j=1}^l -\nu_j \sigma_j(0),$$

e $\sum_{j=1}^l \nu_j - \nu_j = 0$, como queríamos. Defina

$$\begin{aligned} \phi : Z_0(X; R) &\longrightarrow R \\ c = \sum_{i=1}^m \nu_i x_i &\longmapsto \sum_{i=1}^m \nu_i, \end{aligned}$$

e note que, pela afirmação acima, $\ker \phi = B_0(X; R)$. Observe ainda que toda 0-cadeia é um ciclo por definição, donde concluímos que ϕ é sobrejetora. Portanto,

$$H_0(X; R) = \frac{Z_0(X; R)}{B_0(X; R)} \cong R,$$

como queríamos. ■

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Obviamente, se $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ é um n -simplexo singular de X , então $f \circ \sigma$ é um de Y . Dessa forma, f induz o homomorfismo de R -módulos

$$\begin{aligned} S_n(f) : S_n(X; R) &\longrightarrow S_n(Y; R) \\ \sum_{i=1}^m \nu_i \sigma_i &\longmapsto \sum_{i=1}^m \nu_i (f \circ \sigma_i). \end{aligned}$$

Claramente, o funtor S_n verifica

- i. $S_n(id_X) = id_{S_n(X; R)}$,
- ii. $S_n(g \circ f) = S_n(g) \circ S_n(f)$.

Lema 3.2. $\partial S_n(f) = S_{n-1}(f) \partial$.

Demonstração. É suficiente mostrar que a afirmação vale para n -simplexos singulares. Nesse caso,

$$\partial S_n(f)(\sigma) = \partial(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma) \circ F_n^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ (\sigma \circ F_n^i) = S_{n-1}(f) \partial \sigma.$$

■

Observe que o lema acima também nos diz que $S_n(f)(Z_n(X; R)) \subset Z_n(Y; R)$ e $S_n(f)(B_n(X; R)) \subset B_n(Y; R)$. Portanto, está bem definido o homomorfismo

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(X; R) &\longrightarrow H_n(Y; R) \\ [z] &\longmapsto [S_n(f)(z)]. \end{aligned}$$

Além disso, é fácil ver que as propriedades i. e ii. acima continuam válidas para H_n . Mais ainda, isto nos diz que os grupos de homologia de um espaço topológico são invariantes por homeomorfismo. Mais precisamente, afirmamos que se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $H_n(f) : H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R)$ é um isomorfismo. De fato, observe que

$$id_{H_n(X; R)} = H_n(id_X) = H_n(f^{-1} \circ f) = H_n(f^{-1}) \circ H_n(f).$$

Aplicando o mesmo argumento para $id_{H_n(Y; R)}$, obtemos que $(H_n(f))^{-1} = H_n(f^{-1})$ e a afirmação segue. Embora o enfoque dessa monografia destoe da teoria de categorias, nota-se que H_n é um funtor da categoria dos espaços topológicos para a categoria dos R -módulos. Essa última observação encerra esta seção.

3.3 Complexos de Cadeia

Nesta seção, apresentamos as propriedades algébricas daquilo que chamaremos de *complexo de cadeia*, tendo em mente o *complexo singular* como principal exemplo. Em suma, abstrairemos os principais conceitos da seção anterior.

Definição 3.8. Um *complexo de cadeia* sobre R é uma sequência $C = (C_n, \partial_n)$ de R -módulos livres e homomorfismos $\partial : C_n \rightarrow C_{n-1}$ de sorte que $\partial_n \partial_{n-1} = 0$. Dito de outro modo, é uma sequência

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

de sorte que a aplicação de dois morfismos consecutivos é nula. Na maioria dos casos, C_n será trivial quando $n < 0$. Diremos ainda que um elemento de C_n possui *dimensão* n .

Exemplo 3.2. O *complexo singular* de um espaço topológico X é o complexo de cadeia em que $C_n = S_n(X)$ e ∂_n é o operador de bordo construído na definição 3.5 para todo $n \in \mathbb{N}$. Por vezes, denotamos $(S_n(X), \partial_n)$ simplesmente por $S(X)$.

Definição 3.9. Uma sequência de homomorfismos (f_n) com $f_n : C_n \rightarrow C'_n$ é uma *aplicação de cadeia* quando $\partial'_n f_n = f_{n-1} \partial_n$, i.e., quando o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_{n+1} \downarrow & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Por vezes, denotaremos a sequência $(f_n : C_n \rightarrow C'_n)$ por $f : C \rightarrow C'$.

Exemplo 3.3. Pelo que fora feito no final da seção anterior, vemos que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ induz uma aplicação de cadeia $S(f) : S(X) \rightarrow S(Y)$.

Da mesma forma como fizemos no caso topológico, definimos os submódulos $Z_n(C)$ e $B_n(C)$ de C_n como $Z_n(C) := \ker \partial_n$ e $B_n(C) := \operatorname{im} \partial_{n+1}$. Nesse contexto, importaremos a nomenclatura usual da teoria singular e chamaremos os elementos de $Z_n(C)$ e $B_n(C)$ de n -ciclos e n -bordos, respectivamente.

Definição 3.10. O n -ésimo módulo de homologia de C é o R -módulo definido por

$$H_n(C) := \frac{Z_n(C)}{B_n(C)}.$$

Note agora que, para uma aplicação de cadeia $f : C \rightarrow C'$, têm-se $f(Z_n(C)) \subset Z_n(C')$ e $f(B_n(C)) \subset B_n(C')$. Isso ocorre pois o lema 3.2, usado para a prova desse fato no caso

singular, é inerente à f no contexto presente em virtude da definição 3.9. Dessa forma, fica bem definido o homomorfismo

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(C) &\longrightarrow H_n(C') \\ [z] &\longmapsto [f_n(z)]. \end{aligned}$$

Verifica-se que as propriedades functoriais de H_n no contexto singular permanecem válidas no caso geral. Dessa forma, $H = (H_n)$ define um functor da categoria dos complexos de cadeia e aplicações de cadeia na categoria dos R -módulos e homomorfismos.

Embora a definição a seguir possa parecer desconexa do resto dessa seção por agora, uma motivação devida se mostrará aparente nas seções subsequentes.

Definição 3.11. Uma *homotopia de cadeia* entre duas aplicações de cadeia $f : C \rightarrow C'$ ($f_n : C_n \rightarrow C'_n$) e $g : C \rightarrow C'$ ($g_n : C_n \rightarrow C'_n$) é uma sequência de homomorfismos $D = (D_n : C_n \rightarrow C'_n)$ tal que $\partial_{n+1}D_n + D_{n-1}\partial_n = f_n - g_n$. Diagramadamente, temos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \searrow^{D_n} & \downarrow^{f_n - g_n} & \swarrow_{D_{n-1}} & & & \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Escrevemos $D : f \simeq g$ e dizemos que f e g são homotópicas.

Teorema 3.1. *Duas aplicações de cadeia homotópicas induzem a mesma aplicação em homologia. Mais precisamente, se $f \simeq g$, então $H_n(f) = H_n(g)$.*

Demonstração. Sejam $f, g : C \rightarrow C'$ aplicações de cadeia com $D : f \simeq g$. Considere $[z] \in H_n(C)$ arbitrário. Da definição de $H_n(C)$, temos que $z \in Z_n(C)$, donde obtemos $f_n(z) - g_n(z) = \partial'_{n+1}D_n(z) \in B_n(C')$. Portanto, concluímos que $H_n(f)[z] = [f_n(z)] = [g_n(z)] = H_n(g)[z]$. Da arbitrariedade de $[z]$, obtemos $H_n(f) = H_n(g)$, como queríamos. ■

No exemplo 3.1, consideramos $X = \{x_0\}$ e observamos que $H_n(X) = 0$ para todo $n > 0$ e $H_0(X) \cong R$. A próxima definição, e a que encerra esta seção, abstrai a primeira dessas propriedades.

Definição 3.12. Um complexo de cadeia C é *acíclico* de $H_n(C) = 0$ para todo n . Isso significa que $\text{im } \partial_{n+1} = \ker \partial_n$ para todo n ($\text{im } \partial_1 = C_0$ se $C_n = 0$ para $n < 0$). O termo *exato* é usado com o mesmo significado.

Capítulo 4

Elos entre Homologia e Homotopia

Ao longo deste capítulo, empenharemos nossos esforços em exibir os primeiros elos entre a teoria de homologia singular como foi até aqui desenvolvida e a teoria de homotopia elementar. Esta última constitui o outro grande pilar da topologia algébrica, de modo que a existência e a natureza das relações em questão tornam evidente a beleza ímpar da área.

4.1 Teoria Elementar de Homotopia

A fim de situar o leitor, informamos que o conteúdo desta primeira seção consiste numa exposição sucinta dos conceitos nativos à teoria de homotopia que mostrar-se-ão necessários no que se segue. Todavia, um estudo mais aprofundado foge ao escopo desse trabalho, e o leitor interessado poderá encontrar as demonstrações e construções com maior riqueza de detalhes em [1]. A partir daqui, adotaremos $I = [0, 1]$.

Definição 4.1. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ duas aplicações contínuas entre espaços topológicos X e Y . Considere $A \subset X$ um subconjunto. Dizemos que f e g são *homotópicas com relação à A* se existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que, para todo $x \in X$, $a \in A$ e $t \in I$, têm-se $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$, e $H(a, t) = f(a) = g(a)$.

A aplicação H é então chamada uma *homotopia relativa à A* entre f e g , e escreveremos $f \simeq_{rel A} g$ ou, por vezes, $H : f \simeq_{rel A} g$. Quando $A = \emptyset$, diremos simplesmente que f e g são *homotópicas* e que H é uma *homotopia*.

Lema 4.1. A relação $\simeq_{rel A}$ é uma equivalência no conjunto das aplicações contínuas de X em Y .

Demonstração. A relação é reflexiva pois $F(x, t) = f(x)$ é uma homotopia relativa à A de f em f . É simétrica: se $F : f \simeq_{rel A} g$, então $G : g \simeq_{rel A} f$, onde G é dado por $G(x, t) = F(x, 1 - t)$. Finalmente, a relação é transitiva: se $F : f \simeq_{rel A} g$ e $G : g \simeq_{rel A} h$,

então $H : f \simeq_{rel A} h$, onde H é dado por

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

■

As classes de equivalência da relação acima são chamadas *classes de homotopia*. A classe de homotopia de uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ será denotada por $[f]$.

Teorema 4.1. *Sejam $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$ aplicações contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$. Em outras palavras, a composição preserva homotopias.*

Demonstração. Sejam $F : X \times I \rightarrow Y$ e $G : Y \times I \rightarrow Z$ as homotopias entre f e f' , e g e g' , respectivamente. Definimos uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Z$ de $g \circ f$ em $g' \circ f'$ como $H(x, t) = G(F(x, t), t)$.

■

Definição 4.2. Seja X espaço topológico, $A \subset X$ um subconjunto e $i : A \hookrightarrow X$ a inclusão. A é dito

- i. Um retrato de X se existe uma aplicação $r : X \rightarrow A$ contínua, chamada de retração, com $r \circ i = id_A$.
- ii. Um retrato de deformação de X se existe uma retração r com $i \circ r \simeq id_X$.
- iii. Um retrato de deformação forte de X se existe uma retração r com $i \circ r \simeq_A id_X$.

Exemplo 4.1. S^n é retrato de deformação forte do disco pontuado $D^{n+1} - \{0\}$ e do espaço $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Em ambos os casos, a retração é dada por $x \mapsto x/\|x\|$.

Definição 4.3. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Diremos que f é uma *equivalência de homotopia* entre dois espaços topológicos X e Y se existe $g : Y \rightarrow X$, também contínua, tal que

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq id_X : X \rightarrow X, \\ f \circ g &\simeq id_Y : Y \rightarrow Y. \end{aligned}$$

A aplicação g é dita a *inversa homotópica*, ou *homotopia inversa*, de f . Também dizemos que X e Y possuem o mesmo *tipo de homotopia* ou que são *equivalentes sob homotopia*. Neste caso, escrevemos $X \equiv Y$. É fácil ver que a relação “ \equiv ” é uma equivalência no conjunto dos espaços topológicos.

Exemplo 4.2. Retratos de deformação (fortes ou não) são, claramente, equivalências de homotopia.

Definição 4.4. Um espaço topológico X é dito *contrátil* se é equivalente sob homotopia a um ponto.

Teorema 4.2. *Seja X espaço topológico. Então X é contrátil se, e somente se, a aplicação $id_X : X \rightarrow X$ é homotópica à uma aplicação constante.*

Demonstração. Se $f : X \rightarrow \{p\}$ é uma equivalência de homotopia com homotopia inversa $g : \{p\} \rightarrow X$, então $g \circ f \simeq id_X$ e $g \circ f$ é uma aplicação constante (basta notar que $(g \circ f)(x) = g(p) \forall x \in X$). Reciprocamente, suponha $id_X \simeq constante$ e seja $f : X \rightarrow X$ dada por $f(x) = c \forall x \in X$ tal função. Dessa forma, definindo

$$\begin{array}{ccc} f' : X & \longrightarrow & \{p\} \\ x & \longmapsto & p \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} i : \{p\} & \longrightarrow & X \\ p & \longmapsto & p, \end{array}$$

temos que $i \circ f' = f \simeq id_X$ e $f' \circ i = id_{\{p\}}$, em particular, $f' \circ i \simeq id_{\{p\}}$, como queríamos demonstrar. ■

Corolário 4.1. *Um espaço contrátil X é conexo por caminhos.*

Demonstração. Com efeito, se F é uma homotopia entre id_X e uma aplicação constante $X \rightarrow \{p\}$, $p \in X$, então, para cada $x \in X$, a correspondência $t \mapsto F(x, t)$ define um caminho de x para p . ■

Exemplo 4.3. Todo subconjunto convexo S de \mathbb{R}^n é contrátil. Com efeito, tome $x_0 \in S$ e considere a aplicação $H : S \times I \rightarrow S$ dada por $H(x, t) = (1-t)x + tx$ para todo $x \in S$ e $t \in I$. Vê-se que a H é uma homotopia entre a identidade id_S e a aplicação constante igual à x_0 . Segue do teorema acima que S é contrátil. Em particular, todo n -simplexo padrão é contrátil.

Definição 4.5. Seja X espaço topológico e $\sigma, \tau : I \rightarrow X$ caminhos em X . Diremos que σ e τ são *homotópicos por caminhos* quando $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$. Chamaremos σ de um *laço em x_0* quando $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0 \in X$. Denotamos por ϵ_{x_0} o caminho constante em $x_0 \in X$, i.e., $\epsilon_{x_0}(t) = x_0$ para todo $t \in I$.

Definição 4.6. Sejam $\sigma, \tau : I \rightarrow X$ caminhos num espaço topológico X . Definimos o produto $\sigma\tau$ por

$$\sigma\tau(t) := \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tau(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definimos o *caminho inverso* de σ por $\sigma^{-1}(t) := \sigma(1-t)$.

Lema 4.2. *Se $F : \sigma \simeq_{\{0,1\}} \sigma'$ e $G : \tau \simeq_{\{0,1\}} \tau'$, então $\sigma\tau \simeq_{\{0,1\}} \sigma'\tau'$ e $\sigma^{-1} \simeq_{\{0,1\}} \sigma'^{-1}$.*

Demonstração. Defina $H : I \times I \rightarrow X$ por

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s - 1, t), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Claramente, $H : \sigma\tau \simeq_{\{0,1\}} \sigma'\tau'$. Fazendo $K(s, t) = F(1 - s, t)$, obviamente têm-se $K : \sigma^{-1} \simeq_{\{0,1\}} \sigma'^{-1}$. ■

Definição 4.7. Considere $\Omega(X, x_0)$ o conjunto dos laços em $x_0 \in X$. Definimos

$$\pi_1(X, x_0) := \frac{\Omega(X, x_0)}{\simeq_{\{0,1\}}} = \{[\sigma] : \sigma \in \Omega(X, x_0)\}$$

como o *grupo fundamental* do par (X, x_0) .

Teorema 4.3. $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo munido do produto $[\sigma][\tau] = [\sigma\tau]$.

Demonstração. Primeiramente, note que o lema 4.2 garante a boa definição da operação acima. Considere $\sigma, \tau, \omega : I \rightarrow X$ laços em x_0 .

Associatividade: Definindo

$$F(s, t) = \begin{cases} \sigma(4s/(1+t)), & 0 \leq 4s \leq 1+t, \\ \tau(4s-t-1), & 1+t \leq 4s \leq 2+t, \\ \omega((4s-t-2)/(2-t)), & 2+t \leq 4s \leq 4, \end{cases}$$

vemos que $F : (\sigma\tau)\omega \simeq_{\{0,1\}} \sigma(\tau\omega)$, donde obtemos $[(\sigma\tau)\omega] = [\sigma(\tau\omega)]$.

Existência de elemento neutro: Definindo

$$G(s, t) = \begin{cases} x_0, & 0 \leq 2s \leq 1-t, \\ \sigma((2s-1+t)/(1+s)), & 1-t \leq 2s \leq 2, \end{cases}$$

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma(2s/(1+t)), & 0 \leq 2s \leq 1+t, \\ x_0, & 1+t \leq 2s \leq 2, \end{cases}$$

vemos que $G : \epsilon_{x_0}\sigma \simeq_{\{0,1\}} \sigma$ e $H : \sigma\epsilon_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} \sigma$, donde obtemos $[\epsilon_{x_0}\sigma] = [\sigma\epsilon_{x_0}] = [\sigma]$.

Existência de elemento inverso: Definindo

$$K(s, t) = \begin{cases} \sigma(2s), & 0 \leq 2s \leq t, \\ \sigma(t), & t \leq 2s \leq 2-t, \\ \sigma^{-1}(2s-1), & 2-t \leq 2s \leq 2, \end{cases}$$

$$L(s, t) = \begin{cases} \sigma^{-1}(2s), & 0 \leq 2s \leq t, \\ \sigma(t), & t \leq 2s \leq 2-t, \\ \sigma(2s-1), & 2-t \leq 2s \leq 2, \end{cases}$$

vemos que $K : \epsilon_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} \sigma\sigma^{-1}$ e $L : \epsilon_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} \sigma^{-1}\sigma$, donde obtemos $[\sigma\sigma^{-1}] = [\epsilon_{x_0}] = [\sigma^{-1}\sigma]$. Isso conclui a demonstração. ■

Teorema 4.4. *Seja α um caminho de x_0 para x_1 no espaço topológico X . Então*

$$\begin{aligned} \alpha_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\sigma] &\longmapsto [\alpha^{-1}\sigma\alpha] \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Em particular, se X é conexo por caminhos, $\pi_1(X, x_0)$ não depende do ponto x_0 a menos de isomorfismo. Neste caso, escreveremos somente $\pi_1(X)$.

Demonstração. Observe que, do lema 4.2, $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \sigma'$ implica em $\alpha^{-1}\sigma\alpha \simeq_{\{0,1\}} \alpha^{-1}\sigma'\alpha$, e a boa definição de α_* fica garantida. Mostremos então que α_* é um isomorfismo.

α_* é homomorfismo: De fato, temos

$$\alpha_*([\sigma][\tau]) = \alpha_*([\sigma\tau]) = [\alpha^{-1}\sigma\tau\alpha] = [\alpha^{-1}\sigma\alpha][\alpha^{-1}\tau\alpha],$$

visto que $\alpha^{-1}\sigma\tau\alpha \simeq_{\{0,1\}} \alpha^{-1}\sigma\alpha\alpha^{-1}\tau\alpha$.

α_* é monomorfismo: Com efeito, se $\alpha_*([\sigma]) = [\epsilon_{x_1}]$ para $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, então ocorre $\alpha^{-1}\sigma\alpha \simeq_{\{0,1\}} \epsilon_{x_1}$, donde temos que $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \alpha\epsilon_{x_1}\alpha^{-1} \simeq_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$.

α_* é epimorfismo: Seja $[\tau] \in \pi_1(X, x_1)$. Note que $\alpha_*([\alpha\tau\alpha^{-1}]) = [\tau]$. ■

Definição 4.8. Um espaço topológico X é dito *simplesmente conexo* quando é conexo por caminhos e o seu grupo fundamental é trivial, i.e., este possui apenas o elemento neutro.

Lema 4.3. *Seja X espaço topológico e $F : I \times I \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Definindo $\alpha(t) = F(0, t)$, $\beta(t) = F(1, t)$, $\gamma(s) = F(s, 0)$ e $\delta(s) = F(s, 1)$ para todo $s, t \in I$, têm-se que $\delta \simeq_{\{0,1\}} \alpha^{-1}\gamma\beta$.*

Demonstração. Mostraremos que $\epsilon_{\delta(0)}\delta\epsilon_{\delta(1)} \simeq_{\{0,1\}} \alpha^{-1}\gamma\beta$. O lema seguirá do fato que $\epsilon_{\delta(0)}\delta\epsilon_{\delta(1)} \simeq_{\{0,1\}} \delta$. Com efeito, considere as aplicações

$$E(s, t) = \begin{cases} \delta(0), & 0 \leq s \leq t, \\ \alpha(1 - s + t), & t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$$G(s, t) = \begin{cases} \beta(s + t), & 0 \leq s \leq 1 - t \\ \delta(1), & 1 - t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

e defina

$$H(s, t) = \begin{cases} E(3s, t), & 0 \leq 3s \leq 1, \\ F(3s - 1), & 1 \leq 3s \leq 2, \\ G(3s - 2), & 2 \leq 3s \leq 3. \end{cases}$$

Vemos que $H : \alpha^{-1}\gamma\beta \simeq_{\{0,1\}} \epsilon_{\delta(0)}\delta\epsilon_{\delta(1)}$, como queríamos. ■

Teorema 4.5. *Um espaço topológico contrátil é simplesmente conexo.*

Demonstração. Seja X contrátil e σ um laço em x_0 . Considere a homotopia $F : X \times I \rightarrow X$ entre a identidade id_X e uma constante $x_1 \in X$ fornecida pelo teorema 4.2 de modo que $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = x_1$ para todo $x \in X$. Defina $H(s, t) = F(\sigma(s), t)$ e observe que $H : \sigma \simeq \epsilon_{x_1}$. Agora, faça $\alpha(t) = H(0, t)$. Temos $H(0, t) = F(\sigma(0), t) = F(\sigma(1), t) = H(1, t)$. Dessa forma, segue do lema anterior que $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \alpha\epsilon_{x_1}\alpha^{-1} \simeq_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$, como queríamos. ■

Agora, considere $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre os espaços topológicos X e Y . Fazendo $y_0 = f(x_0)$, obtemos o assim chamado *homomorfismo induzido* por f dado por

$$\begin{aligned} f_{\#} : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [a] &\longmapsto [f \circ a]. \end{aligned}$$

Como $a \simeq a' \implies f \circ a \simeq f \circ a'$, vemos que $f_{\#}$ está bem definido. Adicionalmente, é fácil ver que $f \circ (ab) = (f \circ a)(f \circ b)$ para a e b laços arbitrários em x_0 , de modo que $f_{\#}([a][b]) = f_{\#}([a])f_{\#}([b])$, donde concluímos que $f_{\#}$ é de fato um homomorfismo.

Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ aplicações contínuas entre espaços topológicos X , Y e Z . Obtemos, como acima, os homomorfismos induzidos

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{e} \quad g_{\#} : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0),$$

com $y_0 = f(x_0)$ e $z_0 = g(y_0)$. Vemos imediatamente que

$$(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Z, z_0).$$

Em adição à isso, vê-se que se $id : X \rightarrow X$ é a aplicação identidade em X , então $id_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade em $\pi_1(X, x_0)$. Por último, observamos que se duas aplicações contínuas $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ são homotópicas relativas ao ponto base x_0 , então para cada laço a em x_0 temos $f \circ a \simeq g \circ a$, donde concluímos $f_{\#}([a]) = g_{\#}([a])$. Assim, f e g induzem o mesmo homomorfismo nos grupos fundamentais.

Das considerações acima, segue-se que se $h : X \rightarrow Y$ for um homeomorfismo, então o homomorfismo induzido $h_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo. Dito de outro modo, espaços homeomorfos possuem grupos fundamentais isomorfos. Em virtude dessa última propriedade, dizemos que o grupo fundamental é um invariante topológico.

Com os resultados e definições acima em mãos, daremos sentido à definição 3.11 cunhada no final do capítulo anterior.

4.2 Invariância da Homologia sob Homotopia

Nesta seção, deixaremos claro que as aparições da palavra *homotopia* nas definições 3.11 e 4.1 não foram mera coincidência. O objetivo principal será mostrar que duas aplicações homotópicas (pela definição 4.1) induzem a mesma aplicação em homologia. Mais precisamente, provaremos que se $H : f \simeq g$ é uma homotopia entre aplicações contínuas, então existe uma homotopia de cadeia $D : S(f) \simeq S(g)$. Seguirá então do teorema 3.1 que $H(f) = H(g)$.

Adicionalmente, a funtorialidade de H nos dá que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n(f)$ será um isomorfismo quando $f : X \rightarrow Y$ for uma equivalência de homotopia. Com efeito, seja $g : Y \rightarrow X$ uma inversa homotópica de f . Temos

$$\begin{aligned} f \circ g \simeq id_Y &\implies H_n(f) \circ H_n(g) = H_n(f \circ g) = id_{H_n(Y)}, \\ g \circ f \simeq id_X &\implies H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = id_{H_n(X)}, \end{aligned}$$

donde obtemos o desejado.

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas e $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Considere ainda as inclusões $i_0, i_1 : X \hookrightarrow X \times I$ definidas por $i_0(x) = (x, 0)$ e $i_1(x) = (x, 1)$ para todo $x \in X$. Note que, sendo $H(\cdot, 0) = f$ e $H(\cdot, 1) = g$, podemos escrever $f = H \circ i_0$ e $g = H \circ i_1$. Afirmamos que, se $P : S(i_0) \simeq S(i_1)$, então existe uma homotopia de cadeia entre $S(f)$ e $S(g)$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} P : S(i_0) \simeq S(i_1) &\implies \partial P + P\partial = S(i_0) - S(i_1) \\ &\implies S(H) \circ (\partial P + P\partial) = S(H) \circ (S(i_0) - S(i_1)) \\ &\implies S(H)\partial P + S(H)P\partial = S(H)S(i_0) - S(H)S(i_1) \\ &\implies \partial[S(H)P] + [S(H)P]\partial = S(f) - S(g), \end{aligned}$$

e $S(H)P : f \simeq g$, como queríamos. Dessa forma, resta que mostremos a existência de uma tal homotopia de cadeia P . Definimos aplicações afim

$$T_n^j : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n \times I$$

para $j = 0, 1, \dots, n$ por

$$T_n^j(E_k) = \begin{cases} (E_k, 0), & \text{se } k \leq j, \\ (E_{k-1}, 1), & \text{se } k > j. \end{cases}$$

Lema 4.4. *Valem os seguintes:*

- a. $T_n^{j+1} \circ F_{n+1}^i = (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j$ ($i \leq j$);
- b. $T_n^j \circ F_{n+1}^{i+1} = (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j$ ($i > j$);
- c. $T_n^i \circ F_{n+1}^i = T_n^{i-1} \circ F_{n+1}^i$ ($1 \leq i \leq n$);

$$d. T_n^0 \circ F_{n+1}^0 = \iota_1;$$

$$e. T_n^n \circ F_{n+1}^{n+1} = \iota_0;$$

onde $\iota_t : \Delta_n \rightarrow \Delta_n \times I$ é dada por $\iota_t(x) = (x, t)$ para todo $x \in \Delta_n$.

Demonstração. Basta que verifiquemos as igualdades acima para os vértices E_k . Faremos por casos. Para o item a.:

i. Se $k < i \leq j$, então

$$\begin{aligned} T_n^{j+1} \circ F_{n+1}^i(E_k) &= T_n^{j+1}(E_k) = (E_k, 0) \\ &= (F_n^i \times id)(E_k, 0) \\ &= (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j(E_k). \end{aligned}$$

ii. Se $i \leq k \leq j$, então

$$\begin{aligned} T_n^{j+1} \circ F_{n+1}^i(E_k) &= T_n^{j+1}(E_{k+1}) = (E_{k+1}, 0) \\ &= (F_n^i \times id)(E_k, 0) \\ &= (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j(E_k). \end{aligned}$$

iii. Se $i \leq j < k$, então

$$\begin{aligned} T_n^{j+1} \circ F_{n+1}^i(E_k) &= T_n^{j+1}(E_{k+1}) = (E_k, 1) \\ &= (F_n^i \times id)(E_{k-1}, 1) \\ &= (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j(E_k). \end{aligned}$$

Para o item b.:

i. Se $k \leq j < i$, então

$$\begin{aligned} T_n^j \circ F_{n+1}^{i+1}(E_k) &= T_n^j(E_k) = (E_k, 0) \\ &= (F_n^i \times id)(E_k, 0) \\ &= (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j(E_k). \end{aligned}$$

ii. Se $j < k \leq i$, então

$$\begin{aligned} T_n^j \circ F_{n+1}^{i+1}(E_k) &= T_n^j(E_k) = (E_{k-1}, 1) \\ &= (F_n^i \times id)(E_{k-1}, 1) \\ &= (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j(E_k). \end{aligned}$$

iii. Se $j < i < k$, então

$$\begin{aligned} T_n^j \circ F_{n+1}^{i+1}(E_k) &= T_n^j(E_{k+1}) = (E_k, 1) \\ &= (F_n^i \times id)(E_{k-1}, 1) \\ &= (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j(E_k). \end{aligned}$$

Para o item c.:

i. Se $1 \leq k < i \leq n$, então

$$\begin{aligned} T_n^i \circ F_{n+1}^i(E_k) &= T_n^i(E_k) = (E_k, 0) \\ &= T_n^{i-1}(E_k) \\ &= T_n^{i-1} \circ F_{n+1}^i(E_k). \end{aligned}$$

ii. Se $1 \leq i \leq k \leq n$, então

$$\begin{aligned} T_n^i \circ F_{n+1}^i(E_k) &= T_n^i(E_{k+1}) = (E_k, 1) \\ &= T_n^{i-1}(E_{k+1}) \\ &= T_n^{i-1} \circ F_{n+1}^i(E_k). \end{aligned}$$

Para o item d.:

$$T_n^0 \circ F_{n+1}^0(E_k) = T_n^0(E_{k+1}) = (E_k, 1) = \iota_1(E_k).$$

Para o item e.:

i. Se $k < n + 1$, então

$$T_n^n \circ F_{n+1}^{n+1}(E_k) = T_n^n(E_k) = (E_k, 0) = \iota_0(E_k).$$

ii. Se $k = n + 1$, então

$$T_n^n \circ F_{n+1}^{n+1}(E_k) = T_n^n(E_{k+1}) = (E_k, 0) = \iota_0(E_k).$$

Isso demonstra o lema. ■

Finalmente, estamos em condições de demonstrar a existência da homotopia de cadeia $P : S(i_0) \simeq S(i_1)$ supracitada.

Teorema 4.6. $S(i_0) \simeq S(i_1)$.

Demonstração. Seja $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ um n -simplexo singular. Considere a aplicação

$$(\sigma \times id) \circ T_n^j : \Delta_{n+1} \rightarrow X \times I.$$

Defina $P\sigma \in S_{n+1}(X \times I)$ por $P\sigma := \sum_{j=0}^n (-1)^j (\sigma \times id) \circ T_n^j$. Estendendo P linearmente para n -cadeias singulares, obtemos uma sequência de homomorfismos $P : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$ (os quais chamaremos de *operadores de prisma*). Afirmamos que esta exata sequência

estabelece a homotopia de cadeia entre $S(i_1)$ e $S(i_0)$ que procurávamos. Com efeito, devemos mostrar que $P\partial + \partial P = S(i_1) - S(i_0)$. Seja $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ um n -simplexo singular. Fazendo uso do lema anterior, computamos

$$\begin{aligned}
P\partial\sigma &= P \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ F_n^i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j [(\sigma \circ F_n^i) \times id] \circ T_{n-1}^j \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j + \\
&\quad \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ (F_n^i \times id) \circ T_{n-1}^j \\
&= - \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{1+i+j} (\sigma \times id) \circ T_n^j \circ F_{n+1}^{i+1} \\
&\quad - \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{1+i+j} (\sigma \times id) \circ T_n^{j+1} \circ F_{n+1}^i.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\partial P\sigma &= \partial \sum_{j=0}^n (-1)^j (\sigma \times id) \circ T_n^j = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i [(\sigma \times id) \circ T_n^j] \circ F_{n+1}^i \\
&= \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ T_n^j \circ F_{n+1}^i + \sum_{i=j=0}^n (\sigma \times id) \circ T_n^i \circ F_{n+1}^i \\
&\quad - \sum_{i=j+1=1}^{n+1} (\sigma \times id) \circ T_n^{i-1} \circ F_{n+1}^i + \sum_{1 \leq j+1 < i \leq n+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ T_n^j \circ F_{n+1}^i \\
&= \sum_{0 \leq i < j' \leq n-1} (-1)^{1+i+j'} (\sigma \times id) \circ T_n^{j'+1} \circ F_{n+1}^i + (\sigma \times id) \circ T_n^0 \circ F_{n+1}^0 + \\
&\quad \sum_{i=j=1}^n (\sigma \times id) \circ T_n^i \circ F_{n+1}^i - \sum_{i=j+1=1}^n (\sigma \times id) \circ T_n^i \circ F_{n+1}^i \\
&\quad - (\sigma \times id) \circ T_n^n \circ F_{n+1}^{n+1} + \sum_{1 \leq j < i' \leq n} (-1)^{1+i'+j} (\sigma \times id) \circ T_n^j \circ F_{n+1}^{i'+1} \\
&= \sum_{0 \leq i < j' \leq n-1} (-1)^{1+i+j'} (\sigma \times id) \circ T_n^{j'+1} \circ F_{n+1}^i + (\sigma \times id) \circ \iota_1 \\
&\quad - (\sigma \times id) \circ \iota_0 + \sum_{1 \leq j < i' \leq n} (-1)^{1+i'+j} (\sigma \times id) \circ T_n^j \circ F_{n+1}^{i'+1}.
\end{aligned}$$

Em que $j' = j - 1$ e $i' = i - 1$ acima. Por fim,

$$P\partial\sigma + \partial P\sigma = (\sigma \times id) \circ \iota_1 - (\sigma \times id) \circ \iota_0 = i_1 \circ \sigma - i_0 \circ \sigma = S(i_1)\sigma - S(i_0)\sigma,$$

como queríamos. ■

4.3 A relação entre π_1 e H_1

Teorema 4.7. *Existe um homomorfismo*

$$\chi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

que leva a classe de homotopia $[\gamma]$ de um laço γ à classe de homologia do 1-simplexo singular γ . Mais ainda, se X é conexo por caminhos, χ é sobrejetor e o seu núcleo é o subgrupo comutador de $\pi_1(X, x_0)$.

Recordamos que o subgrupo comutador de um grupo G , denotado por $[G, G]$, é o subgrupo normal gerado pelo conjunto $\{[a, b] = aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\}$ dos comutadores de G . O coeficiente $G/[G, G]$ é chamado de *abelianização* de G .

Demonstração. Primeiramente, se $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, então o 1-simplexo singular γ é um 1-ciclo. De fato, $\partial\gamma = x_0 - x_0 = 0$.

χ está bem definido: Sejam γ e γ' laços em x_0 e $F : \gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma'$. Defina um 2-simplexo singular σ de X como segue. Faça $\sigma(E_0) = x_0$. Para qualquer ponto Q de Δ_2 diferente de E_0 , o segmento de E_0 para Q encontra o lado oposto à E_0 num ponto, digamos, Q' . Escrevemos

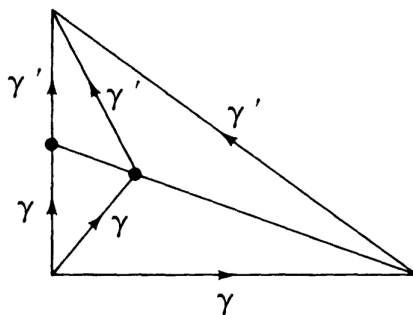
$$\begin{aligned} Q' &= tE_2 + (1-t)E_1 \\ Q &= sQ' + (1-s)E_0, \end{aligned}$$

para $s, t \in I$. Defina $\sigma(Q) := F(s, t)$. A continuidade de σ segue do fato que Δ_2 é o espaço quociente de $I \times I$ sob a aplicação

$$\begin{aligned} (s, t) &\mapsto Q \\ (0, t) &\mapsto E_0, \end{aligned}$$

para $s, t \in I$. Agora, $\partial\sigma = \gamma - \gamma' + \epsilon_{x_0}$. Sendo ϵ_{x_0} o bordo do 2-simplexo singular constante igual à x_0 , vemos que $\gamma \sim \gamma'$.

χ é homomorfismo: Definimos um 2-simplexo singular σ a partir do diagrama abaixo de sorte que $\partial\sigma = \gamma + \gamma' - \gamma\gamma$.



Dessa forma, temos $\gamma\gamma' \sim \gamma + \gamma'$. Segue que

$$\chi([\gamma][\gamma']) = \chi([\gamma\gamma']) = [\gamma\gamma'] = [\gamma + \gamma'] = [\gamma] + [\gamma'] = \chi([\gamma]) + \chi([\gamma']),$$

como queríamos. Perceba que usamos os colchetes para denotar simultaneamente as classes de homotopia e de homologia. O leitor deverá distinguir ambas a partir do contexto em que estiverem inseridas.

χ é epimorfismo: Suponha X conexo por caminhos e seja $\sum \alpha_i \sigma_i$ um 1-ciclo de X . Temos $0 = \partial z = \sum \alpha_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0))$. Escolha caminhos η_{i_0} de x_0 para $\sigma_i(0)$ e η_{i_1} de $\sigma_i(1)$ para x_0 , e faça tal escolha de modo que os caminhos dependam somente dos extremos e não dos índices. Mais precisamente, se $\sigma_i(k) = \sigma_j(l)$, então $\eta_{i_k} = \eta_{j_l}$, onde $k, l = 0, 1$. Dessa forma, teremos $0 = \sum \alpha_i (\eta_{i_1} - \eta_{i_0})$. Definimos $\tau_i := \eta_{i_0} + \sigma_i - \eta_{i_1}$, donde temos que

$$z = \sum \alpha_i \sigma_i = \sum \alpha_i \sigma_i + \sum \alpha_i (\eta_{i_1} - \eta_{i_0}) = \sum \alpha_i (\eta_{i_1} + \sigma_i - \eta_{i_0}) = \sum \alpha_i \tau_i.$$

Definimos laços (em x_0) $\gamma_i = \eta_{i_0} \sigma_i \eta_{i_1}^{-1}$ e notamos que

$$\chi(\prod \gamma_i^{\alpha_i}) = \sum \alpha_i [\gamma_i] = \sum \alpha_i [\tau_i] = z,$$

como queríamos. Perceba que as passagens acima dependem fortemente da natureza da ação do anel \mathbb{Z} em $\pi_1(X)$ no grupo aditivo $H_1(X; \mathbb{Z})$.

$\ker \chi = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$: Novamente, suponha X conexo por caminhos. Sendo χ um homomorfismo de grupos entre $\pi_1(X, x_0)$ e o grupo abeliano subjacente ao \mathbb{Z} -módulo $H_1(X; \mathbb{Z})$, segue de

$$\chi(aba^{-1}b^{-1}) = \chi(a)\chi(b)\chi(a^{-1})\chi(b^{-1}) = \chi(a)\chi(a^{-1})\chi(b)\chi(b^{-1}) = 1$$

que $[\pi_1(X), \pi_1(X)] \subset \ker \chi$. Reciprocamente, suponha que um laço γ em x_0 possa ser escrito como $\gamma = \prod \sigma_i^{\varepsilon_i}$, onde os σ_i são caminhos em X (não necessariamente laços ou distintos) e $\varepsilon_i = \pm 1$. Definimos

$$\exp(\sigma_i) = \sum_{j: \sigma_j = \sigma_i} \varepsilon_j.$$

Lema 4.5. *Se $\exp(\sigma_i) = 0$ para cada fator distinto σ_i em γ , então $[\gamma] \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$.*

Demonstração. Escolha caminhos η_{i_0} e η_{i_1} de x_0 para os pontos iniciais e finais de σ_i , respectivamente, e novamente escolha esses caminhos de modo que estes dependam somente dos extremos e não dos índices. Dessa forma, temos

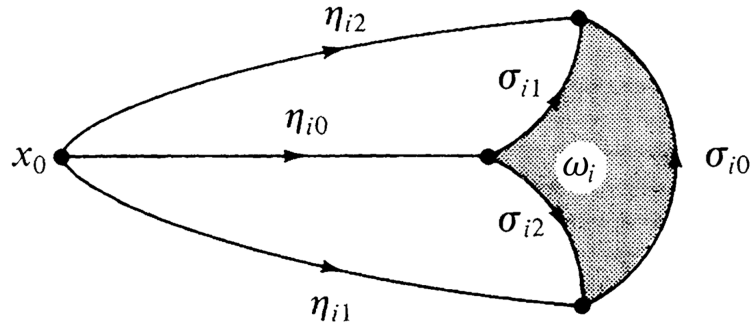
$$\gamma = \prod \sigma_i^{\varepsilon_i} \simeq_{\{0,1\}} \prod (\eta_{i_0} \sigma_i \eta_{i_1}^{-1})^{\varepsilon_i}.$$

Escrevendo $\tau_i = \eta_{i_0} \sigma_i \eta_{i_1}^{-1}$ vemos que

$$\begin{aligned} [\gamma][\pi_1(X), \pi_1(X)] &= [\prod \sigma_i^{\varepsilon_i}][\pi_1(X), \pi_1(X)] \\ &= [\prod \tau_i^{\varepsilon_i}][\pi_1(X), \pi_1(X)] \\ &= \prod [\tau_i]^{\varepsilon_i} [\pi_1(X), \pi_1(X)] \\ &= \prod [\tau_j]^{\exp(\sigma_j)} [\pi_1(X), \pi_1(X)] \\ &= [\pi_1(X), \pi_1(X)], \end{aligned}$$

onde o produtório na penúltima igualdade acima percorre as classes de homotopia de cada fator distinto τ_j . Note ainda que essa mesma passagem faz uso do fato de que o quociente $\pi_1/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ é abeliano, ou seja, $(ab)[\pi_1(X), \pi_1(X)] = (ba)[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ para quaisquer $a, b \in \pi_1(X)$. Concluimos que $[\gamma] \in [\pi_1(X), \pi_1(X)]$, como queríamos. ■

Prosseguimos com a prova do teorema 4.7. Considere γ um laço em x_0 homólogo à 0 em $H_1(X; \mathbb{Z})$, i.e., $\gamma = \partial \sum \alpha_i \omega_i$ onde cada ω_i é um 2-simplexo singular de X . Escreva $\partial \omega = \sigma_{i_0} - \sigma_{i_1} + \sigma_{i_2}$. Então, após coletar todos os termos da soma $\sum \alpha_i (\sigma_{i_0} - \sigma_{i_1} + \sigma_{i_2})$, vemos que γ aparece com coeficiente 1 no somatório em questão, enquanto os outros caminhos são todos acompanhados de coeficientes nulos (*). Mais uma vez, escolha caminhos η_{i_j} , $j = 0, 1, 2$, de x_0 para $\sigma_{i_2}(0)$, $\sigma_{i_0}(0)$ e $\sigma_{i_1}(1)$, respectivamente, tal que eles só dependam dos extremos e não dos índices.



Considere os laços em x_0

$$\tau_{i_0} := \eta_{i_1} \sigma_{i_0} \eta_{i_2}^{-1}, \quad \tau_{i_1} := \eta_{i_0} \sigma_{i_1} \eta_{i_2}^{-1}, \quad \tau_{i_2} := \eta_{i_0} \sigma_{i_2} \eta_{i_1}^{-1},$$

e defina $\tau_i = \tau_{i_0} \tau_{i_1}^{-1} \tau_{i_2}$. Em Δ_2 podemos considerar, para cada $i = 0, 1, 2$, $F_i^2 : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ como um caminho em Δ_2 . Dessa forma, $F_0^2 (F_1^2)^{-1} F_2^2$ é um laço em E_1 , e sendo Δ_2 simplesmente conexo (vide exemplo 4.1 e teorema 4.5), têm-se $F_0^2 (F_1^2)^{-1} F_2^2 \simeq_{\{0,1\}} \epsilon_{E_1}$. Composto essa homotopia de caminhos com ω_i vemos que

$$\tau_i = \tau_{i_0} \tau_{i_1}^{-1} \tau_{i_2} \simeq_{\{0,1\}} \eta_{i_0} \sigma_{i_0} \sigma_{i_1}^{-1} \sigma_{i_2} \eta_{i_1}^{-1} \simeq_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0},$$

donde podemos concluir que $\prod [\tau]^\alpha = 1 \in \pi_1(X)$. Notando que, por (*), cada σ_{i_j} que aparece em $\prod \tau^\alpha$ também ocorre em γ com o mesmo expoente. Mais ainda, dado que os η_{i_j} sempre vêm em pares de expoentes ± 1 , vemos que o caminho $\gamma (\prod \tau^\alpha)^{-1}$ satisfaz as hipóteses do lema anterior, i.e., o $\exp(\cdot)$ de cada uma de suas componentes é nulo. Daí,

$$[\gamma] = [\gamma (\prod \tau^\alpha)^{-1}] \in [\pi_1(X), \pi_1(X)],$$

donde obtemos $\ker \chi \subset [\pi_1(X), \pi_1(X)]$. ■

Corolário 4.2. *Se X é conexo por caminhos, então*

$$\frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} \cong H_1(X; \mathbb{Z}).$$

Demonstração. Imediato do primeiro teorema de isomorfismo da teoria de grupos. ■

Corolário 4.3. *Se X é conexo por caminhos, então χ é isomorfismo se, e somente se, $\pi_1(X)$ é abeliano.*

Demonstração. Segue do fato mais geral da teoria de grupos de que um grupo G é abeliano se, e somente se, seu subgrupo comutador $[G, G]$ é trivial. ■

Convidamos o leitor a apreciar o contraste que esse teorema evoca. A demonstração aqui apresentada é técnica e razoavelmente intrincada, mas o resultado em si é de fácil compreensão. Reivindicamos somente que, se X é conexo por caminhos, então o primeiro módulo de homologia de X sobre \mathbb{Z} coincide com a abelianização de seu grupo fundamental.

É fascinante o fato de que, mesmo em vista da grande distinção nas formulações da teoria de homologia e da teoria de homotopia, relações como as descritas nesta seção e na anterior ainda puderam ser exibidas. Finalmente, esperamos que o conteúdo das seções 4.2 e 4.3 tenham, mesmo que em parte, justificado a afirmação que encerra a introdução deste capítulo.

Capítulo 5

Homologia de Pares

No capítulo seguinte, iremos desenvolver a teoria de homologia até então apresentada numa direção mais sofisticada. Ao considerar as relações entre os respectivos módulos de homologia de um par (X, A) , veremos que uma nova gama de técnicas será adicionada ao estojo do topólogo algébrico. Estas adições serão aquilo que, em última análise, nos permitirão realizar o objetivo mor desse trabalho.

5.1 Homologia Relativa

Seja X espaço topológico e $A \subset X$ um subconjunto. Considere o par de espaços topológicos (X, A) em que A possui a topologia induzida por X . Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n(A; R)$ é um submódulo de $S_n(X; R)$. Precisamente, é o R -módulo livre gerado pelos n -simplexos singulares de X cuja imagem está restrita à A . Podemos então considerar o quociente

$$S_n(X, A) := \frac{S_n(X)}{S_n(A)}.$$

Como fizemos acima, ao longo desta seção iremos omitir o anel R a fim de simplificar a notação. Claramente, $\partial(S_n(A)) \subset S_{n-1}(A)^*$. Dessa forma, vemos que ∂ induz um homomorfismo $\bar{\partial}$ de sorte que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} S_n(A) & \hookrightarrow & S_n(X) & \twoheadrightarrow & S_n(X, A) \\ \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \bar{\partial} \downarrow \\ S_{n-1}(A) & \hookrightarrow & S_{n-1}(X) & \twoheadrightarrow & S_{n-1}(X, A) \end{array}$$

comuta. Com efeito, para $c \in S_n(X)$, definimos $\bar{\partial}(c + S_n(A)) := \partial c + S_{n-1}(A)$. Note que, se $c' = c + a$ para $a \in S_n(A)$, então $\partial c' = \partial c + \partial a$. A boa definição de $\bar{\partial}$ decorre então de (*). Sendo $\partial^2 = 0$ e a projeção canônica $S_n(X) \twoheadrightarrow S_n(X, A)$ sobrejetora, segue que

$\overline{\partial\partial} = 0$. Dessa forma, obtemos um complexo de cadeia $(S_n(X, A), \overline{\partial}_n)$ e podemos definir os submódulos

$$\begin{aligned} Z_n(X, A) &:= \ker \overline{\partial}_n : S_n(X, A) \rightarrow S_{n-1}(X, A), \\ B_n(X, A) &:= \operatorname{im} \overline{\partial}_{n+1} : S_{n+1}(X, A) \rightarrow S_n(X, A), \end{aligned}$$

de $S_n(X, A)$.

Definição 5.1. Definimos o n -ésimo módulo de homologia relativa singular do par (X, A) como o quociente

$$H_n(X, A) := \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)}.$$

Denotaremos as classes de $H_n(X, A)$ por $[z]_{(X, A)}$.

Alternativamente, podemos definir $H_n(X, A)$ diretamente de $S_n(X)$. Considere a pré-imagem de $Z_n(X, A)$ (e de $B_n(X, A)$ respectivamente) sob a projeção canônica $\pi : S_n(X) \twoheadrightarrow S_n(X, A)$. A comutatividade do diagrama acima nos permite escrever

$$\begin{aligned} Z'_n(X, A) &:= \pi^{-1}(Z_n(X, A)) = \{c \in S_n(X) : \partial c \in S_{n-1}(A)\}, \\ B'_n(X, A) &:= \pi^{-1}(B_n(X, A)) = \{c \in S_n(X) : \exists b \in S_{n+1}(X); c + \partial b \in S_n(A)\}. \end{aligned}$$

Note que a condição $c + \partial b \in S_n(A)$ acima equivale a dizer que a cadeia c é homóloga à alguma cadeia de $S_n(A)$. Os elementos de $Z'_n(X, A)$ e $B'_n(X, A)$ serão chamados, respectivamente, n -ciclos e n -bordos relativos à A .

Lema 5.1. $H_n(X, A) \cong Z'_n(X, A)/B'_n(X, A)$.

Demonstração. Como $Z_n(X, A) \cong Z'_n(X, A)/S_n(A)$ e $B_n(X, A) \cong B'_n(X, A)/S_n(A)$ (recorde a definição de $Z'_n(X, A)$ e $B'_n(X, A)$), obtemos

$$H_n(X, A) = \frac{Z_n(X, A)}{B_n(X, A)} \cong \frac{\frac{Z'_n(X, A)}{S_n(A)}}{\frac{B'_n(X, A)}{S_n(A)}} \cong \frac{Z'_n(X, A)}{B'_n(X, A)}.$$

■

Note que, se $A = \emptyset$, por definição teremos $S_n(A) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $S_n(X, \emptyset) = S_n(X)$ e, conseqüentemente, $H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$. Portanto, qualquer discussão acerca de módulos de homologia relativa inclui, como caso particular, os módulos de homologia singular originais.

Considere, como anteriormente, outro par de espaços topológicos (Y, B) . Seja ainda $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ uma aplicação contínua entre pares, i.e., $f : X \rightarrow Y$ é contínua e $f(A) \subset B$. Desse modo, a aplicação de cadeia

$$S_n(f) : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$$

verifica $S_n(f)(S_n(A)) \subset S_n(B)$, e podemos induzir um homomorfismo

$$\overline{S_n(f)} : S_n(X, A) \rightarrow S_n(Y, B)$$

por $c + S_n(A) \mapsto S_n(f)c + S_n(B)$. Além disso, como $\partial_n S_n(f) = S_{n-1}(f)\partial'_n$ (pois $S_n(f)$ é uma aplicação de cadeia entre $(S_n(X), \partial_n)$ e $(S_n(Y), \partial'_n)$), obtemos $\overline{\partial_n S_n(f)} = \overline{S_{n-1}(f)\partial'_n}$. Segue então que $\overline{S_n(f)}$ verifica $\overline{S_n(f)}(Z_n(X, A)) \subset Z_n(Y, B)$ e $\overline{S_n(f)}(B_n(X, A)) \subset B_n(Y, B)$. Finalmente, obtemos o homomorfismo induzido

$$\overline{H_n(f)} : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

fazendo $[z]_{(X,A)} \mapsto [\overline{S_n(f)}z]_{(Y,B)}$. Como esperado, o funtor $\overline{H_n}$ verifica

- i. $\overline{H_n(f)}(id_X) = id_{H_n(X,A)}$,
- ii. $\overline{H_n((g \circ f))} = \overline{H_n(g)} \circ \overline{H_n(f)}$.

Em última análise, a functorialidade de $\overline{H_n}$ decorre da functorialidade de S_n . Nas seções posteriores à esta, usaremos as notações $H_n(f)$ e $\overline{H_n(f)}$ indiscriminadamente, e ficará a cargo do leitor distinguir ambas a partir do contexto em que estiverem inseridas.

Exemplo 5.1. Considere a inclusão entre pares $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$. Obtemos, a partir de j , o homomorfismo induzido

$$\overline{H_n(j)} : H_n(X) \rightarrow H_n(X, A).$$

Por outro lado, a inclusão entre pares $i : (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$ induz o homomorfismo

$$\overline{H_n(i)} : H_n(A) \rightarrow H_n(X).$$

Considere, agora, a composição

$$\overline{H_n(j \circ i)} : H_n(A) \rightarrow H_n(X, A).$$

Como $Z_n(A) \subset B'_n(X, A)$, vemos que $\overline{H_n(ji)} = 0$.

Proposição 5.1. *Seja $(X_k)_{k \in K}$ a família das componentes conexas por caminhos de X e faça $A_k = X_k \cap A$. Então,*

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{k \in K} H_n(X_k, A_k),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. A demonstração segue os mesmos moldes daquela da proposição 3.3, salvo algumas modificações. Primeiramente, identificamos

$$S_n(X, A) = \bigoplus_{k \in K} S_n(X_k, A_k)$$

observando que $S_n(X) = \bigoplus_{k \in K} S_n(X_k)$ e $S_n(A) = \bigoplus_{k \in K} S_n(A_k)$. Com efeito, a primeira dessas afirmações é clara. Quanto à segunda, considere, para $c \in S_n(A)$, a decomposição

$$c = \sum_{k \in K} c_k$$

fornecida pela demonstração da proposição 3.3 onde cada c_k é uma cadeia de X_k . Sendo c uma cadeia de A , devemos ter que cada c_k é, também, uma cadeia A . Concluimos então $c_k \in S_n(A_k)$ para todo $k \in K$, como queríamos. A partir dessa identificação, a demonstração prossegue do mesmo modo, apenas substituindo-se o operador ∂ por $\bar{\partial}$, e os módulos singulares usuais pelos respectivos correspondentes em homologia relativa. ■

Proposição 5.2. *Se $A \subset X$ é não vazio e X é conexo por caminhos, então $H_0(X, A) = 0$.*

Demonstração. Tome $x_0 \in A$. Dada uma 0-cadeia (0-ciclo) $c = \sum \nu_i x_i$ arbitrária, escolha caminhos σ_i de x_0 para x_i . Então

$$\partial(\sum \nu_i \sigma_i) = \sum \nu_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = c - (\sum \nu_i) x_0,$$

i.e., c é homólogo à $(\sum \nu_i) x_0 \in S_0(A)$, e obtemos $c \in B'_0(X, A)$. ■

Corolário 5.1. *Se $(X_k)_{k \in K}$ são as componentes conexas por caminhos de X , então $H_0(X, A)$ é um R -módulo livre gerado por quantos geradores forem os índices k tais que X_k não encontra A .*

Demonstração. De fato, no exemplo 3.1, vimos que $H_0(X_k, A_k) \cong R$ quando tivermos $A_k = X_k \cap A = \emptyset$. O resultado segue, então, das duas proposições acima. ■

Concluimos essa seção com o análogo para homologia relativa da discussão feita em 4.2 (Invariância da Homologia sob Homotopia).

Definição 5.2. Duas aplicações de pares $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são homotópicas se existe uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(A \times I) \subset B$.

Teorema 5.1. *Duas aplicações de pares $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotópicas induzem a mesma aplicação em homologia.*

Demonstração. Na seção 4.2, provamos o caso $A = B = \emptyset$. Naquela ocasião, observamos que era suficiente exibir uma homotopia de cadeia entre $S(i_0)$ e $S(i_1)$, em que as aplicações $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$ são dadas por $i_t(x) = (x, t)$ para $t = 0, 1$. Note ainda que i_0 e i_1 definem aplicações de pares $i_0, i_1 : (X, A) \rightarrow (X \times A, A \times I)$. Da mesma forma, aqui também é

suficiente exibirmos uma homotopia de cadeia entre $\overline{S_n(i_0)}$ e $\overline{S_n(i_1)}$. Com efeito, observe que o operador de prisma

$$\begin{aligned} P : S_n(X) &\longrightarrow S_{n+1}(X \times I) \\ \sum \nu_i \sigma_i &\mapsto \sum \nu_i \sum (-1)^j (\sigma_i \times id) \circ T_n^j \end{aligned}$$

verifica $P(S_n(A)) \subset S_{n+1}(A \times I)$. Portanto, podemos definir

$$\begin{aligned} \overline{P} : S_n(X, A) &\longrightarrow S_{n+1}(X \times I, A \times I) \\ c + S_n(A) &\mapsto Pc + S_{n+1}(A \times I). \end{aligned}$$

Afirmamos que o operador \overline{P} acima estabelece uma homotopia de cadeia entre $\overline{S_n(i_0)}$ e $\overline{S_n(i_1)}$. De fato, temos

$$\begin{aligned} (\overline{S_n(i_0)} - \overline{S_n(i_1)})(c + S_n(A)) &= (S_n(i_1)c + S_n(A \times I)) - (S_n(i_0)c + S_n(A \times I)) \\ &= (S_n(i_1) - S_n(i_0))c + S_n(A \times I) \\ &= (P\partial + \partial P)c + S_n(A \times I) \\ &= (P\partial c + S_n(A \times I)) + (\partial Pc + S_n(A \times I)) \\ &= \overline{P}(\partial c + S_{n-1}(A)) + \overline{\partial}(Pc + S_{n+1}(A \times I)) \\ &= \overline{P}\overline{\partial}(c + S_n(A)) + \overline{\partial}\overline{P}(c + S_n(A)) \\ &= (\overline{P}\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{P})(c + S_n(A)), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

5.2 A seqüência exata de homologia

Nesta seção, exibiremos um homomorfismo de ligação $H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ a partir do qual poderemos obter uma seqüência infinita

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

a qual fará jus ao título dessa seção. Com efeito, definiremos o *homomorfismo conectante* $\partial : H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$ por $[c]_{(X,A)} \mapsto [\partial c]$, onde $c \in Z'_n(X, A)$, i.e., $c \in S_n(X)$ e $\partial c \in S_{n-1}(A)$. Segue de $\partial\partial = 0$ que $\partial c \in Z_n(A)$. Considere ainda um outro representante c' de $[c]_{(X,A)} \in H_n(X, A)$. Evidentemente, temos $c' = c + \partial b + a$, onde $b \in S_{n+1}(X)$ e $a \in S_n(A)$. Portanto,

$$\partial c' = \partial(c + \partial b + a) = \partial c + \partial\partial b + \partial a = \partial c + \partial a.$$

Como $\partial a \in B_{n-1}(A)$, segue que $[\partial c] = [\partial c + \partial a] = [\partial c'] \in H_{n-1}(A)$, donde obtemos a boa definição de $\partial : H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$. Além disso, note que

$$\partial([c]_{(X,A)} + [c']_{(X,A)}) = [\partial(c + c')] = [\partial c + \partial c'] = \partial[c]_{(X,A)} + \partial[c']_{(X,A)},$$

para quaisquer $[c]_{(X,A)}, [c']_{(X,A)} \in H_n(X, A)$. Dessa forma, obtemos a seqüência de homomorfismos antecipada acima. A seqüência em questão é ilustrada abaixo

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\overline{H_n(i)}} H_n(X) \xrightarrow{\overline{H_n(j)}} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

e nos referiremos à ela como a *seqüência relativa de homologia* do par (X, A) .

Teorema 5.2. *A seqüência de homologia relativa é exata.*

Demonstração. Do exemplo 5.1, obtemos $\text{im } \overline{H_n(i)} \subset \ker \overline{H_n(j)}$. Adicionalmente, se $\overline{H_n(j)}[z] = 0$ para $z \in Z_n(X)$, então $z + \partial b = a$ para algum $b \in S_{n+1}(X)$ e $a \in S_n(A)$. Portanto, $[z] = [a] = \overline{H_n(i)}[a]$, e concluímos $\ker \overline{H_n(j)} = \text{im } \overline{H_n(i)}$. Dessa forma, exatidão em $H_n(X)$ está verificada. Prossigamos verificando que a seqüência é exata em $H_n(A)$.

$\text{im } \partial \subset \ker \overline{H_n(i)}$: Considere $[c]_{(X,A)} \in H_{n+1}(X, A)$. Como $\partial c \in B_n(X)$, obtemos $\overline{H_n(i)}\partial[c] = 0$.

$\ker \overline{H_n(i)} \subset \text{im } \partial$: Seja $[a] \in H_n(A)$ tal que $\overline{H_n(i)}[a] = 0$, i.e., $a \in B_n(X)$. Dessa forma, existe $b \in S_{n+1}(X)$ tal que $\partial b = a$. Vemos que $b \in Z'_{n+1}(X, A)$ donde $[a] = \partial[b]_{(X,A)}$.

Por fim, mostramos exatidão em $H_n(X, A)$.

$\text{im } \overline{H_n(j)} \subset \ker \partial$: Seja $[z] \in H_n(X)$. Observe que $\partial z = 0 \in S_{n-1}(A)$, donde temos $z \in Z'_n(X, A)$. Dessa forma, $\partial \overline{H_n(j)}[z] = \partial[z]_{(X,A)} = [\partial z] = 0$.

$\ker \partial \subset \text{im } \overline{H_n(j)}$: Tome $[c]_{(X,A)} \in H_n(X, A)$ tal que $\partial[c]_{(X,A)} = 0$, i.e., $\partial c \in B_{n-1}(A)$. Portanto, existe $a \in S_n(A)$ tal que $\partial a = \partial c$. Observe que $\partial(c - a) = \partial c - \partial a = 0$, donde temos $c - a \in Z_n(X)$. Dessa forma, $\overline{H_n(j)}[c - a] = [c - a]_{(X,A)} = [c]_{(X,A)}$. ■

Exemplo 5.2. A sequência de homologia termina à direita em

$$\dots \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{\overline{H_0(j)}} H_0(X, A) \longrightarrow 0.$$

Exatidão em $H_0(X, A)$ significa que a imagem de $\overline{H_0(j)}$ corresponde ao núcleo do homomorfismo nulo, i.e., $\overline{H_0(j)}$ é sobrejetor.

Exemplo 5.3. Seja $x_0 \in X$ e $A = \{x_0\}$. Então $H_n(X) \cong H_n(X, A)$ para todo $n > 0$. Recorde que, pelo exemplo 3.1, $H_n(A) = 0$ para todo $n > 0$. Com efeito, para todo $n \geq 2$, temos

$$0 \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{\overline{H_n(j)}} H_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

Do exemplo 2.3, segue que $\overline{H_n(j)}$ é um isomorfismo. Para $n = 1$, o 0 mais à esquerda acima será substituído por $H_0(A) \cong R$. No entanto, claramente $\partial : Z'_1(X, A) \rightarrow H_0(A)$ é trivial, de modo que $\overline{H_1(j)}$ também é um isomorfismo.

Proposição 5.3. *Seja $A \subset X$ um retrato de deformação. Então $H_n(X, A) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Considere a sequência de homologia relativa

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\overline{H_n(i)}} H_n(X) \xrightarrow{\overline{H_n(j)}} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Observe que, sendo A retrato de deformação, temos que a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ é uma equivalência de homotopia. Portanto, vemos que $\overline{H_n(i)}$ é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, a exatidão da sequência nos diz que $\text{im } \partial = \ker \overline{H_{n-1}(i)} = 0$. Daí, temos $\ker \partial = H_n(X, A)$. Por outro lado, $\ker \overline{H_n(j)} = \text{im } \overline{H_n(i)} = H_n(X)$ nos dá que $\text{im } \overline{H_n(j)} = 0$. Por fim, temos $H_n(X, A) = \ker \partial = \text{im } \overline{H_n(j)} = 0$, como queríamos. ■

Exemplo 5.4. Seja $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ o n -disco e $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ a $n - 1$ -esfera. Recorde que D^n é contrátil, donde segue que $H_q(D^n) = 0 \forall q > 0$. Considere agora a sequência de homologia relativa para o par (D^n, S^{n-1}) :

$q \geq 2$: Note que no diagrama

$$H_q(D^n) = 0 \longrightarrow H_q(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0 = H_{q-1}(D^n),$$

o exemplo 2.3 nos permite concluir facilmente que $\partial : H_q(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1})$ é um isomorfismo.

$q = 1$: Para $n > 1$, temos

$$H_1(D^n) = 0 \longrightarrow H_1(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_0(S^{n-1}) \xrightarrow{\overline{H_0(i)}} H_0(D^n) \xrightarrow{\overline{H_0(j)}} 0 = H_0(D^n, S^{n-1}),$$

em que a igualdade $H_0(D^n, S^{n-1}) = 0$ à esquerda segue do corolário 5.1. Observe ainda que $\overline{H_0(i)}$ é um isomorfismo, visto que S^{n-1} é retrato de deformação de D^n para $n > 1$.

Portanto, ∂ é trivial. Concluímos que $H_1(D^n, S^{n-1}) = 0$.

Para $n = 1$, temos $H_1(D^1, S^0) \cong \ker \overline{H_0(i)}$ na sequência acima. Utilizando das identificações $H_0(S^0) \cong R \times R$ e $H_0(D^1) \cong R$, vemos que o homomorfismo $\overline{H_0(i)}$ é dado por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$. Portanto, $\ker \overline{H_0(i)} = \{(\alpha, -\alpha) \in R \times R : \alpha \in R\} \cong R$. Finalmente, temos

$$H_1(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0, & n > 1, \\ R, & n = 1. \end{cases}$$

Mais tarde, calcularemos $H_q(D^n, S^{n-1})$ (e conseqüentemente $H_{q-1}(S^{n-1})$). Encerramos essa seção com o seguinte resultado:

Proposição 5.4. *A sequência de homologia relativa é natural no par (X, A) .*

Demonstração. Com “natural no par (X, A) ”, queremos dizer que uma aplicação contínua $f : (X, A) \rightarrow (X', A')$ induz uma sequência infinita de retângulos comutativos

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(A') & \longrightarrow & H_n(X') & \longrightarrow & H_n(X', A') & \longrightarrow & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

onde os homomorfismos verticais são aqueles induzidos em homologia por f . Com efeito, os primeiros dois retângulos da esquerda para a direita comutam trivialmente à nível de simplexos. Quanto ao último retângulo à direita, a comutatividade é imediata de $S_{n-1}(f)\partial = \partial S_n(f)$. ■

Exemplo 5.5. Suponha $A \subset X \subset X'$. É possível generalizar o que fizemos anteriormente para obter uma sequência exata de homologia

$$\cdots \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X', A) \longrightarrow H_n(X', X) \longrightarrow H_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

a qual é natural na tripla (X', X, A) . Para tal, basta considerarmos o diagrama comutativo abaixo, o qual é obtido ao se combinar engenhosamente as sequências de homologia dos pares (X, A) , (X', A) e (X', X) .

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X') & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & & & \\ H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X', A) & \longrightarrow & H_n(X', X) & & \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X') \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & H_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X', A) \end{array}$$

5.3 O Teorema de Excisão

Nesta seção, nos ocuparemos em mostrar que, dado um par (X, A) , existem subespaços $U \subset A$ que podem ser “cortados” do espaço X sem afetar os módulos de homologia relativa. Mais precisamente, definimos o corte supracitado como segue:

Definição 5.3. Seja (X, A) um par de espaços topológicos com $A \subset X$ e $U \subset A$ um subconjunto. A inclusão $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ será chamada uma *excisão* se induzir um isomorfismo

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow H_n(X, A)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Nessas condições, diremos ainda que U pode ser *excisado* de (X, A) .

Teorema 5.3 (de Excisão). *Se o fecho de U está contido no interior de A ($\bar{U} \subset \mathring{A}$), então U pode ser excisado.*

Antes de provarmos o teorema acima, prosseguiremos com a exibição de algumas aplicações e resultados adjacentes.

Teorema 5.4. *Suponha $V \subset U \subset A$ e que estejam satisfeitos*

- i. V pode ser excisado de (X, A) ,*
- ii. $(X \setminus U, A \setminus U)$ é um retrato de deformação de $(X \setminus V, A \setminus V)$.*

Então U pode ser excisado de (X, A) .

Demonstração. Considere

$$(X \setminus U, A \setminus U) \xleftarrow{i} (X \setminus V, A \setminus V) \xrightarrow{r} (X \setminus U, A \setminus U),$$

onde r acima é uma retração. De *ii.*, vemos que $id_{(X \setminus V, A \setminus V)} \simeq i \circ r$. Segue do teorema 5.1 que $H_n(i \circ r) = H_n(id_{(X \setminus V, A \setminus V)})$, e portanto, $H_n(i)$ é um isomorfismo (com inversa $H_n(r)$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, sendo $i' : (X \setminus V, A \setminus V) \rightarrow (X, A)$ e $j : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X \setminus V, A \setminus V)$ as inclusões de $(X \setminus V, A \setminus V)$ em (X, A) e $(X \setminus U, A \setminus U)$ em (X, A) , respectivamente, claramente $j = i' \circ i$. Por functorialidade, concluímos que $H_n(j) = H_n(i') \circ H_n(i)$ é um isomorfismo (recorde que i' é uma excisão), i.e., o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} H_n(X \setminus U, A \setminus U) & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(X \setminus V, A \setminus V) \\ & \searrow H_n(j) & \downarrow H_n(i') \\ & & H_n(X, A) \end{array}$$

Assim, U pode ser excisado de (X, A) , como queríamos. ■

Exemplo 5.6. Considere $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Defina

$$D_n^+ = \{(x_0, \dots, x_n) \in S_n : x_n \geq 0\} \text{ e } D_n^- = \{(x_0, \dots, x_n) \in S_n : x_n \leq 0\}$$

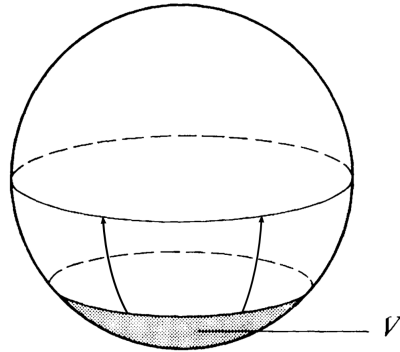
os hemisférios norte e sul, respectivamente, da n -esfera, de modo que $D_n^+ \cap D_n^- = S^{n-1}$ é o equador de S^n . Excisando o interior do hemisfério sul da esfera, i.e., o conjunto

$$U = \{(x_0, \dots, x_n) \in S_n : x_n < 0\},$$

observe que não podemos aplicar o teorema 5.3 diretamente à $(D_n^+, S^{n-1}) \hookrightarrow (S^n, D_n^-)$, uma vez que $\bar{U} = D_n^- \not\subset \overset{\circ}{D}_n^-$. Portanto, considere

$$V = \{(x_0, \dots, x_n) \in S_n : x_n < -\frac{1}{2}\}.$$

Note que o conjunto V acima, diferentemente de U , atende às hipóteses do teorema de excisão. Ademais, vemos que (D_n^+, S^{n-1}) é um retrato de deformação de $(S^n \setminus V, D_n^- \setminus V)$ (basta que nos movamos ao longo de grandes círculos).



Dessa forma, o teorema 5.4 se aplica e obtemos

Proposição 5.5. A inclusão $(D_n^+, S^{n-1}) \hookrightarrow (S^n, D_n^-)$ é uma excisão.

Agora, observemos que a projeção $(D_n^+, S^{n-1}) \rightarrow (D^n, S^{n-1})$ é um homeomorfismo. Ademais, vimos no exemplo 5.4 que $\partial : H_q(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{q-1}(S^{n-1})$ (o homomorfismo conectante) é um isomorfismo para $q \geq 2$. Por outro lado, sendo D_n^- contrátil, a sequência de homologia relativa

$$H_q(D_n^-) = 0 \longrightarrow H_q(S^n) \xrightarrow{a} H_q(S^n, D_n^-) \longrightarrow 0 = H_{q-1}(D_n^-),$$

nos dá que $a : H_q(S^n) \rightarrow H_q(S^n, D_n^-)$ é um isomorfismo para todo $q \geq 2$. Dessa forma, segue da proposição 5.5 e da observação acima que $H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$ para todo $q \geq 2$ e $n \geq 1$. Ainda pelo exemplo 5.4, sabemos que

$$H_1(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0, & n > 1, \\ R, & n = 1. \end{cases}$$

Temos, também, a seguinte sequência exata para $n \geq 1$

$$0 \longrightarrow H_1(S^n) \xrightarrow{a} H_0(S^n, D_n^-) \xrightarrow{b} H_0(D_n^-) \xrightarrow{c} H_0(S^n) \longrightarrow 0.$$

Sendo c um isomorfismo (pelo mesmo argumento utilizado para $\overline{H_0(j)}$ no exemplo 5.4), vemos que b é trivial e, conseqüentemente, a é um isomorfismo. Dessa forma, obtemos

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} H_1(S^1) \cong H_1(D^1, S^0) \cong R, & q = n, \\ H_1(S^{n-q+1}) \cong H_1(D^{n-q+1}, S^{n-q}) \cong 0, & q < n, \\ H_{q-n}(S^0) \cong 0, & q > n, \end{cases}$$

em que o último caso acima decorre do exemplo 3.1 e da proposição 3.3. Temos provado

Corolário 5.2. Para $q \geq 1$ e $n \geq 1$, temos

$$H_q(S^n) \cong H_q(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} R, & q = n, \\ 0, & q \neq n. \end{cases}$$

Corolário 5.3. S^{n-1} não é um retrato de D^n .

Demonstração. Suponha que uma retração $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ exista. Considere, então, o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{H_{n-1}(i)} & H_{n-1}(D^n) \\ & \searrow \text{id}_{H_n(S^{n-1})} & \downarrow H_n(r) \\ & & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

onde $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ é a inclusão. Para $n \geq 2$, isso equivale à dizer que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow \text{id}_R & \downarrow \\ & & R \end{array}$$

comuta, o que é ridículo. Quanto à $n = 1$, primeiramente identificamos $H_0(S^0) \cong R \times R$ e $H_0(D^1) \cong R$. Dessa forma, vemos que o homomorfismo $H_0(i)$ é, necessariamente, dado por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$ (sendo $H_0(i)$ induzido por uma inclusão, o mesmo leva representantes em representantes). Da comutatividade do diagrama acima, segue que $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta \mapsto (\alpha, \beta)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in R$. Portanto, teríamos também $(\beta, \alpha) \mapsto \beta + \alpha \mapsto (\beta, \alpha)$. Sendo $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (R é um grupo aditivo abeliano), concluímos que $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ para todo $\alpha, \beta \in R$, o que também é absurdo (recorde a restrição imposta ao anel R no início da seção 2.1 e tome $\alpha = 0$ e $\beta = 1$).

■

Teorema 5.5 (do ponto fixo de Brouwer). *Qualquer aplicação contínua do n -disco nele mesmo possui um ponto fixo.*

Demonstração. Suponha que exista uma aplicação contínua $f : D^n \rightarrow D^n$ que não possua pontos fixos. Para cada $x \in D^n$, considere a reta determinada por x e $f(x)$. Mova ao longo dessa reta na direção de $f(x)$ para x até o ponto $r(x)$ em S^{n-1} for atingido. Dessa forma, é possível mostrar que a aplicação $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ assim definida é uma retração de D^n em S^{n-1} , o que é uma contradição. ■

Exemplo 5.7. Considere $H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Seja $\alpha \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$ o elemento correspondente à 1 em $H_n(S^n; \mathbb{Z})$. Para uma aplicação contínua $f : S^n \rightarrow S^n$, definimos o *grau* de f (e escrevemos $\deg(f)$) como o único inteiro verificando

$$\deg(f) \cdot \alpha = H_n(f)(\alpha).$$

Por exemplo, $f : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $z \mapsto z^n$ é tal que $\deg(f) = n$.

Teorema 5.6. \mathbb{R}^n não é homeomorfo à \mathbb{R}^m se $n \neq m$.

Demonstração. Suponha que exista um homeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nesse caso, a aplicação $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ também é um homeomorfismo. Sendo $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \approx S^{n-1}$ e $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \approx S^{m-1}$, obtemos um isomorfismo $H_j(S^{n-1}) \rightarrow H_j(S^{m-1})$. No entanto, pelo corolário 5.2, isso é um absurdo para $j = n - 1$ ou $j = m - 1$ a menos que seja $n = m$. ■

Proposição 5.6. *Para $n \geq 1$, seja $s : S^n \rightarrow S^n$ a reflexão $s(x_0, \dots, x_n) = (-x_0, \dots, x_n)$. Então $H_n(s) : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ é dada por $H_n(s) = -id$.*

Demonstração. Fazemos por indução. Para $n = 1$, seja $c : \Delta_1 \rightarrow S^1$ um n -simplexo singular que gera $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. É suficiente mostrarmos $H_1(s)[c] = [S_1(s)(c)] = -[c]$. Sendo S^1 conexo por caminhos, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $c(0) = c(1) = (0, -1)$. Dessa forma, construímos um 2-simplexo singular σ como segue. Faça $\sigma(E_1) = (0, -1)$. Para qualquer outro ponto Q de Δ_2 , o segmento de E_1 para Q encontra o lado oposto à E_0 num ponto, digamos, Q' . Escrevemos

$$Q = tQ' + (1 - t)E_1,$$

para $t \in I$ e definimos $\sigma(Q) = c(t)$. Temos, então, $\partial\sigma = c - \epsilon_{(0,-1)} + c^{-1}$. Observe ainda que, sendo $c(0) = c(1) = (0, -1)$, vemos que $c^{-1} = s \circ c = S_1(s)(c)$. Dito de outro modo, percorrer c no sentido inverso é a mesma coisa que percorrer a imagem espelhada de c em relação ao eixo das ordenadas. Finalmente, como $\epsilon_{(0,-1)}$ é o bordo da aplicação constante

$\Delta_2 \rightarrow (0, -1)$, concluimos que $S_1(s)(c) \sim -c$, donde obtemos o desejado. Agora, considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, D_n^-) & \longleftarrow & H_n(D_n^+, S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ H_n(s) \downarrow & & H_n(s) \downarrow & & H_n(s) \downarrow & & H_{n-1}(s) \downarrow \\ H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, D_n^-) & \longleftarrow & H_n(D_n^+, S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

o qual afirmamos ser comutativo. Com efeito, os dois primeiros quadrados da esquerda para a direita comutam trivialmente, dado que as arestas horizontais são induzidas por inclusões. O último quadrado à direita comuta por causa da naturalidade da sequência de homologia relativa enunciada na proposição 5.4. Ademais, segue das discussões realizadas anteriormente nessa seção que todas as arestas horizontais do diagrama acima são isomorfismos. Isso nos permite obter um quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{\sim} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ H_n(s) \downarrow & & \downarrow H_{n-1}(s) \\ H_n(S^n) & \xrightarrow{\sim} & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

de modo que, se $H_{n-1}(s) = -id$, então $H_n(s) = -id$. Isso conclui a demonstração. ■

Corolário 5.4. *Seja $A : S^n \rightarrow S^n$ dada por $x \mapsto -x$ a aplicação antipodal. Então $H_n(A) = (-1)^{n+1}id$.*

Demonstração. Defina $s_i : S^n \rightarrow S^n$ por $s_i(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n)$ para cada $i = 0, \dots, n$. Observe que $A = s_0 \circ s_1 \circ \dots \circ s_n$, donde o resultado segue da proposição anterior e de $H_n(A) = H_n(s_0) \circ H_n(s_1) \circ \dots \circ H_n(s_n)$. ■

Definição 5.4. Um campo vetorial em S^n é uma aplicação $\nu : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com $\nu(x) \perp x$ para todo $x \in S^n$. O campo é dito *contínuo* se a aplicação ν for contínua.

Teorema 5.7 (da bola cabeluda). *A esfera S^n admite um campo vetorial contínuo sem zeros se, e somente se, n é ímpar. Em particular, qualquer campo vetorial contínuo em S^2 possui um zero.*

Demonstração. Para n ímpar, definimos $\nu(x_0, \dots, x_n) = (-x_1, x_0, -x_2, x_3, \dots, -x_n, x_{n-1})$. Claramente, ν é um campo vetorial contínuo em S^n sem zeros. Suponha agora que exista um campo vetorial contínuo $\nu : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ sem zeros para n par. Colocamos $\omega(x) = \frac{\nu(x)}{\|\nu(x)\|}$ e definimos $F : S^n \times I \rightarrow S^n$ por $F(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\omega(x)$. Observe que $F(x, 0) = x$ e $F(x, 1) = -x = A(x)$, donde obtemos $F : id \simeq A$. Pelo teorema de invariância sob homotopia, concluimos que $H_n(id) = H_n(A)$. Contudo, sendo n par, segue do corolário 5.4 acima que $H_n(A) = -id$, o que é um absurdo. ■

Retomemos com a demonstração do Teorema de Excisão, a qual envolverá algumas ideias completamente novas. Primeiramente, considere $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X . Diremos que um n -simplexo singular $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ é *pequeno de ordem \mathcal{U}* se este mapeia Δ_n inteiramente num dos U_i (i.e., $\sigma(\Delta_n) \subset U_i$ para algum $i \in I$). Além disso, chamaremos uma n -cadeia singular $c = \sum \nu_j \sigma_j \in S_n(X)$ de \mathcal{U} -*adaptada* quando cada um dos simplexos σ_j for pequeno de ordem \mathcal{U} .

Teorema 5.8 (das Cadeias Adaptadas). *Toda classe de homologia relativa em $H_n(X, A)$ pode ser representada por uma cadeia \mathcal{U} -adaptada.*

Para a construção de uma tal cadeia, utilizaremos a técnica de *subdivisão baricêntrica*. Com efeito, definimos o *baricentro* de Δ_n como o ponto

$$B_n := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n E_j.$$

No que se segue, tomaremos sempre $n' > n$. Considere, agora, uma aplicação afim $\sigma : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n'}$. Definimos uma aplicação afim $C_n \sigma : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_{n'}$ por

$$C_n \sigma(E_k) = \begin{cases} B_{n'} , & k = 0, \\ \sigma(E_{k-1}) , & k \geq 1. \end{cases}$$

Colocamos

$$S_k^{af}(\Delta_n) := \{\sigma = \sum \nu_j \sigma_j \in S_k(\Delta_n) : \sigma_j \text{ é afim}\},$$

e, estendendo C_n linearmente, obtemos um homomorfismo

$$\begin{aligned} C_n : S_n^{af}(\Delta_{n'}) &\longrightarrow S_{n+1}^{af}(\Delta_{n'}) \\ \sum \nu_j \sigma_j &\longmapsto \sum \nu_j C_n \sigma_j. \end{aligned}$$

Lema 5.2. *Seja $c = \sum \nu_j \sigma_j \in S^{af}(\Delta_{n'})$. Então,*

$$i. \partial C_0 c = c - (\sum \nu_j) B_{n'},$$

$$ii. \partial C_n c = c - C_{n-1} \partial c \text{ para } n \geq 1.$$

Demonstração. Para *i.*, é suficiente considerarmos apenas 0-simplexos afins. Dessa forma, seja $\sigma : \Delta_0 \rightarrow \Delta_{n'}$ afim. Vemos que $C_0 \sigma(E_0) = B_{n'}$ e $C_0 \sigma(E_1) = \sigma(E_0)$. Portanto,

$$\partial C_0 \sigma(E_0) = C_0 \sigma(E_1) - C_0 \sigma(E_0) = \sigma(E_0) - B_{n'} ,$$

como queríamos. Quanto à *ii.*, novamente, basta que consideremos somente simplexos afins. Com efeito, seja $\sigma : \Delta_n \rightarrow \Delta_{n'}$. Para $k = 0$,

$$\begin{aligned} \partial C_n \sigma(E_0) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (C_n \sigma \circ F_{n+1}^i)(E_0) \\ &= C_n \sigma(E_1) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i C_n \sigma(E_0) \\ &= \sigma(E_0) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i B_{n'}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sigma(E_0) - C_{n-1}\partial\sigma(E_0) &= \sigma(E_0) - C_{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ F_n^i)(E_0) \\
&= \sigma(E_0) - \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{n-1} (\sigma \circ F_n^i)(E_0) \\
&= \sigma(E_0) - \sum_{i=0}^n (-1)^i B_{n'} \\
&= \sigma(E_0) + \sum_{i'=1}^{n+1} (-1)^{i'} B_{n'},
\end{aligned}$$

onde $i' = i + 1$ acima. Além disso, para $0 < k \leq n$, temos

$$\begin{aligned}
\partial C_n \sigma(E_k) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (C_n \sigma \circ F_{n+1}^i)(E_k) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i C_n \sigma(E_{k+1}) + \sum_{k < i \leq n+1} (-1)^i C_n \sigma(E_k) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \sigma(E_k) + \sum_{k < i \leq n+1} (-1)^i \sigma(E_{k-1}).
\end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
\sigma(E_k) - C_{n-1}\partial\sigma(E_k) &= \sigma(E_k) - C_{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ F_n^i)(E_k) \\
&= \sigma(E_k) - \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{n-1} (\sigma \circ F_n^i)(E_k) \\
&= \sigma(E_k) - \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ F_n^i)(E_{k-1}) \\
&= \sigma(E_k) - \sum_{0 \leq i \leq k-1} (-1)^i \sigma(E_k) - \sum_{k \leq i \leq n} (-1)^i \sigma(E_{k-1}) \\
&= \sigma(E_k) + \sum_{1 \leq i' \leq k} (-1)^{i'} \sigma(E_k) + \sum_{k < i' \leq n+1} (-1)^{i'} \sigma(E_{k-1}) \\
&= \sum_{0 \leq i' \leq k} (-1)^{i'} \sigma(E_k) + \sum_{k < i' \leq n+1} (-1)^{i'} \sigma(E_{k-1}),
\end{aligned}$$

em que $i' = i + 1$. Isso conclui a demonstração. ■

Lema 5.3. Para qualquer espaço topológico X e qualquer $n \in \mathbb{N}$, associamos homomorfismos

$$\begin{aligned}
Sd_n : S_n(X) &\longrightarrow S_n(X) \\
Q_n : S_n(X) &\longrightarrow S_{n+1}(X)
\end{aligned}$$

tais que

i. Sd_n é uma aplicação de cadeia, i.e., $\partial Sd_n = Sd_{n-1}\partial$,

ii. $Q = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}} : id \simeq Sd = (Sd_n)_{n \in \mathbb{N}}$, i.e., $id - Sd_n = \partial Q_n + Q_{n-1}\partial$,

iii. Sd e Q são naturais, i.e., para cada $f : X \rightarrow Y$ contínua, os diagramas comutam

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{Sd_n} & S_n(X) & & S_n(X) & \xrightarrow{Q_n} & S_{n+1}(X) \\ S_n(f) \downarrow & & \downarrow S_n(f) & & S_n(f) \downarrow & & \downarrow S_{n+1}(f) \\ S_n(Y) & \xrightarrow{Sd_n} & S_n(Y) & & S_n(Y) & \xrightarrow{Q_n} & S_{n+1}(Y) \end{array}$$

Demonstração. Construimos Sd_n e Q_n recursivamente. Para $n = 0$, fazemos $Sd_0 := id$ e $Q_0 := 0$. Claramente, $i.$ – $iv.$ estão satisfeitas. Para um simplexo $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ arbitrário, definimos

$$\begin{aligned} Sd_n(\sigma) &:= S_n(\sigma)(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))), \\ Q_n(\sigma) &:= S_{n+1}(\sigma)(C_n(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))). \end{aligned}$$

Verificamos $i.$ – $iv.$ por indução. Para $iii.$, calculamos

$$\begin{aligned} Sd_n(S_n(f)(\sigma)) &= S_n(S_n(f)(\sigma))(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\ &= S_n(f \circ \sigma)(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\ &= S_n(f) \circ S_n(\sigma)(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\ &= S_n(f)(Sd_n(\sigma)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_n(S_n(f)(\sigma)) &= S_{n+1}(S_n(f)(\sigma))(C_n(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\ &= S_{n+1}(f \circ \sigma)(C_n(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\ &= S_{n+1}(f) \circ S_{n+1}(\sigma)(C_n(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\ &= S_{n+1}(f)(Q_n(\sigma)). \end{aligned}$$

Para $i.$, primeiro consideramos $X = \Delta_n$ e $\sigma = id_{\Delta_n}$,

$$\begin{aligned} \partial Sd_n(id_{\Delta_n}) &= \partial(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\ &= Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}) - C_{n-2}(\partial Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n})) \\ &= Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}) - C_{n-2}(Sd_n\partial\partial(id_{\Delta_n})) \\ &= Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}). \end{aligned}$$

Quanto à um simplexo singular $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \partial Sd_n(\sigma) &= \partial Sd_n(S_n(\sigma)(id_{\Delta_n})) = \partial S_n(\sigma)Sd_n(id_{\Delta_n}) \\ &= S_{n-1}(\sigma)\partial Sd_n(id_{\Delta_n}) = S_{n-1}(\sigma)Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}) \\ &= Sd_{n-1}S_{n-1}(\sigma)\partial(id_{\Delta_n}) = Sd_{n-1}\partial S_n(\sigma)(id_{\Delta_n}) \\ &= Sd_{n-1}\partial\sigma, \end{aligned}$$

como queríamos. Para *ii.*, novamente consideremos primeiramente $X = \Delta_n$ e $\sigma = id_{\Delta_n}$,

$$\begin{aligned}
\partial Q_n(id_{\Delta_n}) &= \partial(C_n(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\
&= id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}) - \\
&\quad C_{n-1}\partial(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n})) \\
&= id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}) - \\
&\quad C_{n-1}[\partial(id_{\Delta_n}) - \partial Sd_n(id_{\Delta_n}) - \partial Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n})] \\
&= id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}) - \\
&\quad C_{n-1}[\partial(id_{\Delta_n}) - \partial Sd_n(id_{\Delta_n}) - \\
&\quad (\partial(id_{\Delta_n}) - Sd_{n-1}(\partial(id_{\Delta_n})) + Q_{n-2}\partial(\partial(id_{\Delta_n})))] \\
&= id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}),
\end{aligned}$$

como desejado. Quanto à um simplexo singular $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
\partial Q_n(\sigma) &= \partial Q_n(S_n(\sigma)(id_{\Delta_n})) = \partial S_{n+1}(\sigma)Q_n(id_{\Delta_n}) \\
&= S_n(\sigma)\partial Q_n(id_{\Delta_n}) = S_n(\sigma)(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n})) \\
&= S_n(\sigma)(id_{\Delta_n}) - S_n(\sigma)Sd_n(id_{\Delta_n}) - S_n(\sigma)Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}) \\
&= \sigma - S_n(\sigma)(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) - \\
&\quad S_n(\sigma)S_n(\partial(id_{\Delta_n}))(C_n(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\
&= \sigma - S_n(\sigma)(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) - \\
&\quad S_n(\sigma \circ \partial(id_{\Delta_n}))(C_n(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\
&= \sigma - S_n(\sigma)(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) - \\
&\quad S_n(\partial\sigma)(C_n(id_{\Delta_n} - Sd_n(id_{\Delta_n}) - Q_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \\
&= \sigma - Sd_n(\sigma) - Q_{n-1}\partial\sigma,
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Lema 5.4. *Seja $\sigma : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ é afim, então qualquer simplexo σ_j em $Sd_n(\sigma)$ é afim e*

$$diam(\sigma_j) \leq \frac{n}{n+1} diam(\sigma).$$

Demonstração. Começemos observando na expressão

$$Sd_n(\sigma) = S_n(\sigma)(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n})))$$

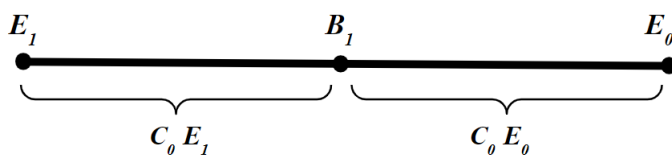
que a parcela $C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n})) \in S_n^{af}(\Delta_n)$ e independe de σ . Adicionalmente, se σ for afim, vemos que $Sd_n(\sigma) = S_n(\sigma)(C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))) \in S_n^{af}(\Delta_n)$, como queríamos. Ademais, afirmamos que o diâmetro de um tal simplexo afim σ_j é igual à distância máxima entre dois de seus vértices. Com efeito, recorde que um simplexo afim σ é o envoltório convexo de $k+1$ pontos linearmente independentes x_0, \dots, x_k em algum \mathbb{R}^n . Dessa forma, o diâmetro de σ é definido como

$$d(\sigma) = diam(\sigma(\Delta_k)) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in \sigma(\Delta_k)\},$$

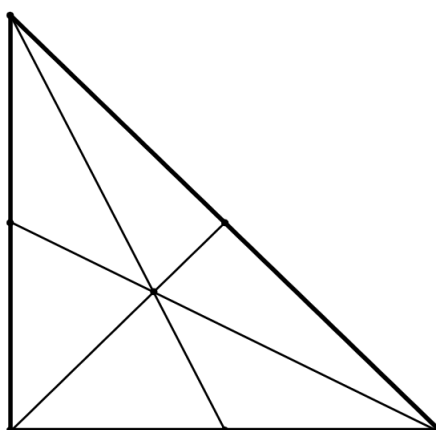
e queremos mostrar que $d(\sigma) = \text{máx}\{\|x_i - x_j\| : 0 \leq i < j \leq k\}$. Primeiramente, mostramos que, dados pontos $x, y \in \sigma(\Delta_k)$, podemos encontrar um vértice x_i tal que $\|x - y\| \leq \|x - x_i\|$. De fato, escreva $y = \sum a_i x_i$ e observe que

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|(\sum a_i)x - \sum a_i x_i\| \\ &= \|\sum a_i(x - x_i)\| \leq \sum a_i \|x - x_i\| \\ &\leq \sum a_i \text{máx}\{\|x - x_j\| : 0 \leq j \leq k\} \\ &= \text{máx}\{\|x - x_j\| : 0 \leq j \leq k\}. \end{aligned}$$

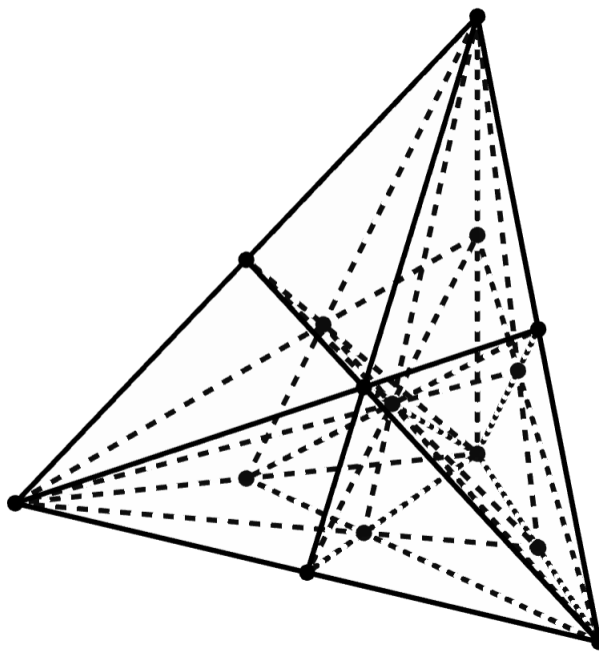
Em particular, vemos que $\|x_i - x\| \leq \|x_i - x_j\|$ para algum $j \neq i$. Dessa forma, dados pontos $x, y \in \sigma(\Delta_k)$, obtemos x_i e x_j ($i \neq j$) tais que $\|x - y\| \leq \|x - x_i\| \leq \|x_i - x_j\|$. Segue que $d(\sigma) = \text{máx}\{\|x_i - x_j\| : 0 \leq i < j \leq k\}$. Com esse fato em mente, buscaremos entender mais profundamente como a expressão $C_{n-1}(Sd_{n-1}\partial(id_{\Delta_n}))$ se comporta. Para $n = 1$, a parcela $Sd_0\partial(id_{\Delta_1})$ se reduz à cadeia afim $E_1 - E_0$, onde E_1 e E_0 acima são os 0-simplexos constantes iguais à E_1 e E_0 em Δ_1 , respectivamente. A cadeia $C_0(E_1 - E_0) = C_0E_1 - C_0E_0$ é ilustrada abaixo:



Para $n = 2$, a parcela $Sd_1\partial(id_{\Delta_2})$ divide cada face de Δ_2 do mesmo modo como o segmento $[0, 1]$ foi dividido acima. Em seguida, C_1 une cada sub segmento ao baricentro B_2 , dando origem a seis 2-simplexos afins como abaixo:



Ilustraremos ainda o caso de $n = 3$. Agora, $Sd_2\partial(id_{\Delta_3})$ divide cada face do tetraedro Δ_3 como feito para o triângulo Δ_2 acima. Posteriormente, C_3 une cada sub triângulo ao baricentro B_3 para gerar 24 novos 3-simplexos afins como segue:



Para um n arbitrário, vemos que $Sd_n(id_{\Delta_n})$ opera recursivamente realizando a divisão baricêntrica das faces de Δ_n e só então o operador C_n realiza a extrusão de cada um desses sub $n-1$ -simplexos em direção ao baricentro B_n . Dessa forma, vemos que os vértices de cada simplexo σ_j em $Sd_n(id_{\Delta_n})$ estão todos na mesma face de Δ_n a menos de um, o qual corresponde à B_n . Mais ainda, exatamente um dos vértices de σ_j é necessariamente um vértice de Δ_n . Considere, agora, uma aplicação afim $\sigma : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ arbitrária. Sendo σ afim, é possível mostrar que a cadeia $Sd_n(\sigma)$ acabará por ser uma versão reescalada, rotacionada ou espelhada de $Sd_n(id_{\Delta_n})$. Em última análise, queremos concluir que Sd_n subdivide σ da mesma forma como o faz para id_{Δ_n} , i.e., os vértices de cada σ_j também estão restritos à mesma face $\sigma^{(i)}$ de $\partial\sigma$ a menos do ponto $\sigma(B_n)$, e que um dos vértices de σ_j é um vértice de σ . Note ainda que $\sigma(B_n)$ acima é o baricentro de $\sigma(\Delta_n)$. Finalmente, mostremos que

$$\text{diam}(\sigma_j) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma).$$

Com efeito, primeiramente suponha que os vértices p e q de σ_j tais que $\|p-q\| = \text{diam}(\sigma_j)$ estão em $\partial\sigma$. Pela análise anterior, achamos por hipótese de indução que

$$\|p-q\| \leq \frac{n-1}{n} \text{diam}(\sigma^{(i)}) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma),$$

para algum $0 \leq i \leq n$. Agora, considere o caso em que um dos vértices nos quais o diâmetro de σ_j é atingido é $\sigma(B_n)$. Suponha que o outro vértice é, também, um vértice de σ . Nesse caso,

$$\begin{aligned}
\|\sigma(E_i) - \sigma(B_n)\| &= \left\| \sigma(E_i) - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \sigma(E_j) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n (\sigma(E_i) - \sigma(E_j)) \right\| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \|\sigma(E_i) - \sigma(E_j)\| \\
&\leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma).
\end{aligned}$$

Suponha agora que $\|p - B_n\| = \text{diam}(\sigma_j)$ para p no interior de alguma face $\sigma^{(i)}$. Sendo $\sigma(B_n)$ o baricentro de σ , segue de um resultado da geometria plana que

$$\|p - \sigma(B_n)\| = \frac{1}{2} \|\sigma(E_i) - B_n\| \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma),$$

em que $\sigma(E_i)$ é o vértice oposto à face $\sigma^{(i)}$. Isso conclui a demonstração do lema. ■

A partir dos dois lemas acima, podemos concluir o seguinte; primeiramente,

$$Sd - Sd^2 = Sd\partial Q + SdQ\partial = \partial SdQ + SdQ\partial,$$

donde obtemos uma homotopia de cadeia $SdQ : Sd \simeq Sd^2$, de modo que temos $id \simeq Sd^2$. Por indução, vemos que $id \simeq Sd^r$ para todo $r > 0$. Além disso,

$$\text{diam}(\sigma_j) \leq \left(\frac{n}{n+1} \right)^r \text{diam}(\sigma)$$

para σ afim e qualquer σ_j em $Sd^r(\sigma)$. Para o que se segue, recordemos o seguinte resultado:

Lema 5.5 (do número de Lebesgue). *Para cada cobertura aberta \mathcal{U} de um espaço métrico compacto X , existe um $\delta > 0$ tal que cada bola aberta de raio δ em X está inteiramente contida em algum elemento de \mathcal{U} . Qualquer δ satisfazendo a propriedade acima será chamado um número de Lebesgue para a cobertura \mathcal{U} em X .*

Proposição 5.7. *Seja $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ um n -simplexo singular em X e $\mathcal{U} = \bigcup U_i$ uma cobertura aberta de X . Então existe um $r > 0$ tal que $Sd_n^r(\sigma)$ é uma cadeia \mathcal{U} -adaptada.*

Demonstração. Sendo $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\mathcal{V} = \bigcup \sigma^{-1}(U_i)$ uma cobertura aberta de Δ_n , obtemos do lema acima um $\delta > 0$ tal que σ mapeia a δ -vizinhança de qualquer ponto em Δ_n inteiramente em um dos elementos de \mathcal{U} . Pelo lema 5.4, e do fato que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^r = 0,$$

exite um $r > 0$ de sorte que cada simplexo em $Sd_n^r(id_{\Delta_n})$ tem diâmetro inferior à δ . Segue de $Sd_n^r(\sigma) = S_n(\sigma)Sd_n^r(id_{\Delta_n})$ que $Sd_n^r(\sigma)$ é \mathcal{U} -adaptada, como queríamos. ■

O Teorema das Cadeias Adaptadas segue, então, do fato que $id \simeq Sd^r$, de modo que, para z um n -ciclo relativo à A arbitrário, temos $[z]_{(X,A)} = [Sd_n^r z]_{(X,A)}$, como desejado. Finalmente, estamos em condições de provar o Teorema de Excisão. Considere a cobertura aberta $\mathcal{U} = \{X \setminus \bar{U}, \mathring{A}\}$ de X . Dada uma classe de homologia relativa em $H_n(X, A)$, tome um representante $z = \sum \nu_i \sigma_i$ que é uma cadeia \mathcal{U} -adaptada. Agora, observe que qualquer σ_j que não mapeie Δ_n inteiramente em $X \setminus U \supset X \setminus \bar{U}$, deve fazê-lo em $\mathring{A} \subset A$. Portanto, esses σ_j podem ser descartados da expressão $\sum \nu_i \sigma_i$ sem alterar a classe de homologia relativa de z . Tendo omitido tais σ_i , vemos que z pode ser considerado como um ciclo relativo à $A \setminus U$ em $X \setminus U$. Dessa forma,

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$$

é sobrejetor. Agora, suponha z um n -ciclo relativo à $A \setminus U$ em $X \setminus U$ de sorte que $[z]_{(X,A)} = 0$, i.e., $z = a + \partial w$ para $a \in S_n(A)$ e $w \in S_{n+1}(X)$. Tome $r > 0$ tal que $Sd^r w$ é \mathcal{U} -adaptada. Nesse caso, podemos escrever $Sd^r w = w_1 + w_2$ em que todos os simplexes aparecendo em w_1 e w_2 mapeiam Δ_{n+1} inteiramente em $X \setminus U$ e A , respectivamente. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} Sd^r z &= Sd^r a + Sd^r \partial w \\ &= Sd^r a + \partial Sd^r w \\ &= Sd^r a + \partial w_1 + \partial w_2, \end{aligned}$$

donde obtemos $Sd^r z - \partial w_1 = Sd^r a + \partial w_2$. Note que o lado esquerdo desta última equação é uma cadeia em $X \setminus U$, enquanto o lado direito é uma cadeia em A , de modo que ambos são cadeias em $A \setminus U$. Por fim, observamos que $Sd^r z$ é homólogo à uma cadeia em $A \setminus U$, e concluimos que $H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$ é injetor. Isso prova o Teorema de Excisão.

5.4 A sequência de Mayer-Vietoris

Encerramos este capítulo com a apresentação de um último dispositivo algébrico associado à computação de módulos de homologia singular. No que se segue, consideraremos *tríades* (X, X_1, X_2) , triplas ordenadas de espaços topológicos tais que X_1 e X_2 são ambos subespaços de X .

Excisando $X_1 \setminus X_1 \cap X_2$ e $X_2 \setminus X_1 \cap X_2$ de $X_1 \cup X_2$, obtemos as inclusões

$$k_1 : (X_2, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1) \quad \text{e} \quad k_2 : (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2).$$

Se ambas k_1 e k_2 forem excisões, a tríade é dita *exata*, ou seja,

$$H_n(k_i) : H_n(X_{i'}, X_1 \cap X_2) \rightarrow H_n(X_1 \cup X_2, X_i)$$

será um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(i, i') = (1, 2)$ ou $(2, 1)$. Observe ainda que a exatidão da tríade (X, X_1, X_2) depende apenas de $X_1 \cup X_2$.

Exemplo 5.8. Se X_1 e X_2 são ambos subconjuntos abertos do espaço topológico X , então (X, X_1, X_2) é exata. Primeiramente, consideramos a inclusão k_2 . Podemos assumir $X = X_1 \cup X_2$. Fazendo $A = X_1$ e $U = X_1 \setminus X_1 \cap X_2$, segue de $X \setminus U = X_2$ que U é um subconjunto fechado de X contido no aberto A , e o teorema de excisão se aplica. O raciocínio para k_1 é análogo.

Exemplo 5.9. Da proposição 5.5, vemos que (S^n, D_n^+, D_n^-) é uma tríade exata.

Lema 5.6 (Barratt-Whitehead). *Dado um diagrama de R -módulos e homomorfismos no qual todos os retângulos comutam e as linhas são exatas*

$$\begin{array}{ccccccccc} C_{i+1} & \longrightarrow & A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i & \xrightarrow{g_i} & C_i & \xrightarrow{h_i} & A_{i-1} & \longrightarrow & B_{i-1} \\ \gamma_{i+1} \downarrow & & \alpha_i \downarrow & & \beta_i \downarrow & & \gamma_i \downarrow & & \alpha_{i-1} \downarrow & & \beta_{i-1} \downarrow \\ C'_{i+1} & \longrightarrow & A'_i & \xrightarrow{f'_i} & B'_i & \xrightarrow{g'_i} & C'_i & \xrightarrow{h'_i} & A'_{i-1} & \longrightarrow & B'_{i-1} \end{array}$$

se os γ_i são isomorfismos, então há uma sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\Phi_i} A'_i \oplus B_i \xrightarrow{\Psi_i} B'_i \xrightarrow{\Gamma_i} A_{i-1} \longrightarrow \cdots,$$

em que $\Phi_i = (\alpha_i \oplus f_i)\Delta$, $\Psi_i = \nabla'(-f'_i \oplus \beta_i)$, $\Gamma_i = h_i \gamma_i^{-1} g'_i$, $\Delta(a) = (a, a)$ e $\nabla'(x, y) = x + y$. Nos referiremos à essa sequência como a sequência de Barratt-Whitehead da escada acima.

Demonstração. Verificamos exatidão em A_i :

($\text{im } \Gamma_{i+1} \subset \ker \Phi_i$) Seja $b' \in B'_{i+1}$. Calculamos $\Phi_i \Gamma_{i+1} b' = \Phi_i h_{i+1} \gamma_{i+1}^{-1} g'_{i+1} b' = (\alpha h_{i+1} \gamma_{i+1}^{-1} g'_{i+1} b', f_i h_{i+1} \gamma_{i+1}^{-1} g'_{i+1} b') = (h'_{i+1} \gamma_{i+1} \gamma_{i+1}^{-1} g'_{i+1} b', f_i h_{i+1} \gamma_{i+1}^{-1} g'_{i+1} b') = (0, 0)$. ($\ker \Phi_i \subset \text{im } \Gamma_{i+1}$) Seja $a \in A_i$ tal que $\Phi_i a = (0, 0)$. Então, $(0, 0) = \Phi_i a = (\alpha_i a, f_i a) \implies \exists c \in C_{i+1} : a = h_{i+1} c \implies 0 = \alpha_i h_{i+1} c = h'_{i+1} \gamma_{i+1} c \implies \exists b' \in B'_{i+1} : \gamma_{i+1} c = g'_{i+1} b' \implies$

$a = h_{i+1}\gamma'_{i+1}g'_{i+1}b' \in im \Gamma_{i+1}$.

Verificamos exatidão em $A'_i \oplus B_i$:

($im \Phi_i \subset ker \Psi_i$) Seja $a \in A_i$. Calculamos $\Psi_i\Phi_i a_i = \Psi_i(\alpha_i a, f_i a) = -f'_i \alpha_i a + \beta_i f_i a = 0$.
 ($ker \Psi_i \subset im \Phi_i$) Seja $(a', b) \in A'_i \oplus B_i$ tal que $\Psi_i(a', b) = 0$. Então, $-f'_i a' + \beta_i b = 0 \implies f'_i a' = \beta_i b \implies 0 = g'_i f'_i a' = g'_i \beta_i b \implies 0 = g'_i \beta_i b = \gamma_i g_i b \implies g_i b = 0 \implies \exists a \in A_i : b = f_i a \implies f'_i a' = \beta_i b = \beta_i f_i a = f'_i \alpha_i a \implies f'_i(\alpha_i a - a') = 0 \implies \exists c' \in C'_{i+1} : \alpha_i a - a' = h'_{i+1} c' \implies \exists c \in C_{i+1} : c' = \gamma_{i+1} c \implies a' = \alpha_i a - h'_{i+1} \gamma_{i+1} c = \alpha_i a - \alpha_i h_{i+1} c = \alpha_i(a - h_{i+1} c) \in im \Phi_i$.

Verificamos exatidão em B'_i :

($im \Psi_i \subset ker \Gamma_i$) Seja $(a', b) \in A'_i \oplus B_i$. Calculamos $\Gamma_i \Psi_i(a', b) = \Gamma_i(-f'_i a' + \beta_i b) = -h_i \gamma_i^{-1} g'_i f'_i a' + h_i \gamma_i^{-1} g'_i \beta_i b = h_i \gamma_i^{-1} \gamma_i g_i b = 0$.
 ($ker \Gamma_i \subset im \Psi_i$) Seja $b' \in B'_i$ tal que $\Gamma_i b' = 0$. Então, $h_i \gamma_i^{-1} g'_i b' = 0 \implies \exists b \in B_i : \gamma_i^{-1} g'_i b' = g_i b \implies g'_i b' = \gamma_i g_i b \implies g'_i b' = g'_i \beta_i b \implies g'_i(\beta_i b - b') = 0 \implies \exists a' \in A'_i : \beta_i b - b' = f'_i a' \implies b' = -f'_i a' + \beta_i b \in im \Psi_i$. ■

Façamos $X = X_1 \cup X_2$ e $A = X_1 \cap X_2$. Para $(i, i') = (1, 2)$ ou $(2, 1)$, as inclusões $(X_{i'}, A) \hookrightarrow (X, X_i)$ induzem a escada

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X_{i'}) & \longrightarrow & H_n(X_{i'}, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_{i'}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X_i) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, X_i) & \longrightarrow & H_{n-1}(X_i) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}$$

na qual cada retângulo é comutativo e as linhas horizontais são exatas. Com efeito, a comutatividade segue trivialmente do fato que todos os homomorfismos acima são induzidos por inclusões, enquanto a exatidão das linhas é evidente. Portanto, quando (X, X_1, X_2) é uma tríade exata, o lema acima nos permite obter a sequência de Barratt-Whitehead correspondente. Esta última recebe um nome especial.

Definição 5.5. Diremos que a sequência de Barratt-Whitehead associada à tríade exata (X, X_1, X_2)

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\Phi_n} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{\Psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\Gamma_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

é a *sequência de Mayer-Vietoris* da tríade.

Exemplo 5.10. Sejam $U_1, U_2 \subset X$ abertos do espaço topológico X tais que $X = U_1 \cup U_2$. Suponha que $A = U_1 \cap U_2$ é acíclico, i.e., $H_n(U_1 \cup U_2) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando a sequência de Mayer-Vietoris, obtemos $0 \rightarrow H_n(U_1) \oplus H_n(U_2) \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0$, donde podemos concluir que $H_n(U_1) \oplus H_n(U_2) = H_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.11. *Sequência de Mayer-Vietoris Relativa.* Suponha que (X, X_1, X_2) seja uma tríade exata mas que não tenhamos, necessariamente, $X = X_1 \cup X_2$. Faça $Y = X_1 \cup X_2$ e $A = X_1 \cap X_2$. Existe então uma *sequência de Mayer-Vietoris Relativa*

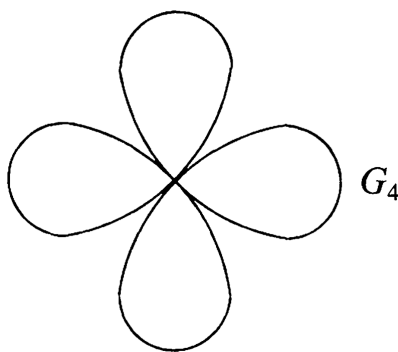
$$\cdots \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, X_1) \oplus H_n(X, X_2) \rightarrow H_n(X, Y) \rightarrow H_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

a qual é exata e natural para aplicações entre tríades exatas. A prova desse fato consiste em aplicar o lema de Barrat-Whitehead na escada obtida a partir das sequências exatas de homologia para as triplas (X, X_1, Y) e (X, X_2, Y) , em conjunto com o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (X_1, A) & \longrightarrow & (X, A) & \longrightarrow & (X, X_1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (Y, X_2) & \longrightarrow & (X, X_2) & \longrightarrow & (X, Y) \end{array}$$

cujas setas são inclusões e, em especial, aquela mais à esquerda é uma excisão.

Exemplo 5.12. Um *grafo* é um espaço formado apenas pela união finita de *arcos fechados*¹, os quais podem se interceptar somente nas extremidades. Por motivos não declarados aqui, há casos em que é interessante calcular a homologia de um grafo, em especial, de grafos conexos por caminhos. Além disso, pode-se mostrar que todo grafo conexo (por caminhos) é equivalente sob homotopia à uma *rosa* com r pétalas G_r ,



a união de r cópias de S^1 tendo um único ponto em comum. Dessa forma, basta que computemos a homologia de G_r . Com efeito, se $r = 1$, então $G_1 = S^1$ e $H_n(G_1)$ é conhecido. Para $r \geq 2$, temos que $G_r = S^1 \cup G_{r-1}$, com $S^1 \cap G_{r-1} = P$. Agora, afirmamos que a tríade (G_r, G_{r-1}, S^1) é exata. De fato, as aplicações

$$k_1 : (G_{r-1}, \{P\}) \hookrightarrow (G_r, S^1) \quad \text{e} \quad k_2 : (S^1, \{P\}) \hookrightarrow (G_r, G_{r-1})$$

são obtidas excisando $S^1 \setminus \{P\}$ e $G_{r-1} \setminus \{P\}$, respectivamente. Por meio da excisão de abertos um pouco menores, nos vemos em condições de aplicar o teorema de Excisão, a

¹Um arco fechado é um espaço homeomorfo à $[0, 1]$ ou S^1

partir do qual um argumento envolvendo retratos de deformação conclui que k_1 e k_2 são excisões. Portanto, podemos fazer uso da sequência de Mayer-Vietoris. Para $n > 0$, temos

$$0 = H_n(\{P\}) \xrightarrow{\Phi} H_n(S^1) \oplus H_n(G_{r-1}) \xrightarrow{\Psi} H_n(G_r) \xrightarrow{\Gamma} H_{n-1}(\{P\}),$$

donde vemos que $H_n(G_r) \cong H_n(S^1) \oplus H_n(G_{r-1})$ para $n > 1$. Esse isomorfismo continua válido para $n = 1$, como pode ser visto ao mostrar que $\Gamma_1 : H_1(G_r) \rightarrow H_0(\{P\})$ é nulo. Por indução, obtemos

$$H_n(G_r) = \begin{cases} 0, & n > 1, \\ R \oplus R \oplus \cdots \oplus R \text{ } r \text{ vezes,} & n = 1. \end{cases}$$

Exemplo 5.13. Como aplicação da sequência de Mayer-Vietoris relativa, a seguir descreveremos uma técnica utilizada no cálculo do grau de uma aplicação, uma que poderá ser aplicada na maioria dos casos que surgem na prática. Suponha $R = \mathbb{Z}$ e que $f : S^n \rightarrow S^n$ (contínua), $n > 0$, possui a propriedade de que, para algum ponto $y \in S^n$, a pré-imagem $f^{-1}(\{y\})$ é formada por apenas finitos pontos, digamos x_1, \dots, x_m . Sejam U_1, \dots, U_m vizinhanças abertas disjuntas de tais pontos, mapeados por f sobre uma vizinhança V , também aberta, de y . Então $f(U_i - \{x_i\}) \subset V - \{y\}$ para cada i , e temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & H_n(U_i, U_i - \{x_i\}) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(V, V - \{y\}) \\ & \cong \swarrow & \downarrow k_i & & \downarrow \cong \\ H_n(S^n, S^n - \{x_i\}) & \xleftarrow{p_i} & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(\{y\})) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(S^n, S^n - \{y\}) \\ & \nwarrow \cong & \uparrow j_* & & \uparrow \cong \\ & & H_n(S^n) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(S^n) \end{array}$$

no qual todas as aplicações são as óbvias. Em particular, k_i e p_i são induzidas por inclusões, de sorte que os triângulos e quadrados do diagrama comutam. Assim sendo, os dois isomorfismos na metade superior do diagrama são provenientes de excisões, enquanto os dois isomorfismos inferiores advêm de sequências exatas de homologia. Por meio desses quatro isomorfismos, os dois módulos na parte superior do diagrama podem ser identificados com $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, de modo que o homomorfismo $H_n(f)$ mais acima se reduz à multiplicação por um inteiro, o qual será dito o *grau local* de f em x_i e denotado por $\deg f|_{x_i}$. Por exemplo, se f é um homeomorfismo, então y pode ser qualquer ponto e há apenas um x_i correspondente, de sorte que todas as aplicações no diagrama acima são isomorfismos e $\deg f|_{x_i} = \deg f = \pm 1$. Mais geralmente, se f mapeia cada U_i homeomorficamente sobre V , então $\deg f|_{x_i} = \pm 1$ para cada i . Finalmente, apresentamos a fórmula que reduz o cálculo do grau de uma aplicação à obtenção dos graus locais:

Proposição 5.8. $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$.

Demonstração. A sequência de Mayer-Vietoris relativa da tríade

$$(S^n, S^n - \{x_2, \dots, x_m\}, S^n - \{x_1\})$$

nos dá

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n, S^n - f^{-1}(\{y\})) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n - \{x_2, \dots, x_m\}) \oplus H_n(S^n, S^n - \{x_1\}) \\ \uparrow & & \downarrow \\ 0 = H_{n+1}(S^n, S^n) & & H_n(S^n, S^n) = 0 \end{array}$$

donde obtemos $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(\{y\})) \cong H_n(S^n, S^n - \{x_2, \dots, x_m\}) \oplus H_n(S^n, S^n - \{x_1\})$. Aplicando este argumento indutivamente, concluimos que

$$H_n(S^n, S^n - f^{-1}(\{y\})) \cong \bigoplus_{i=1}^m H_n(S^n, S^n - \{x_i\}).$$

Por excisão, o termo $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(\{y\}))$ no diagrama será a soma direta dos módulos $H_n(U_i, U_i - \{x_i\}) \cong \mathbb{Z}$, com k_i sendo a inclusão à i -ésima coordenada do somando. Além disso, a aplicação p_i será a projeção sobre a i -ésima coordenada do somando, visto que o triângulo superior comuta e $p_i k_j = 0$ para $j \neq i$, pois $p_i k_j$ percorre $0 = H_n(U_j, U_j) = H_n(U_j, U_j - \{x_i\})$. Identificando os módulos exteriores do diagrama com \mathbb{Z} como anteriormente, a comutatividade do triângulo inferior nos diz que $p_i j_*(1) = 1$ para cada i , donde $j(1) = (1, \dots, 1) = \sum_i k_i(1)$. A comutatividade do quadrado superior nos diz que o $H_n(f)$ central leva $k_i(1)$ em $\deg f|_{x_i}$, de sorte que a soma $\sum_i k_i(1) = j(1)$ é levada à $\sum_i \deg f|_{x_i}$. A comutatividade do quadrado inferior então nos dá a fórmula $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$. ■

Encerramos ressaltando que a sequência de Mayer-Vietoris de uma tríade exata se mostra notavelmente útil no cálculo de módulos de homologia singular de espaços mais complicados, bem como na obtenção de resultados já conhecidos sob uma perspectiva mais algébrica.

Capítulo 6

Variedades e Orientação

Neste capítulo, buscaremos cumprir o objetivo central deste trabalho, este sendo o de abordar o conceito de orientação em variedades topológicas. Nas seções que se seguem, nos dedicaremos à esta empreitada em duas frentes: primeiramente, iremos definir propriamente orientabilidade, ao passo que reservamos espaço para uma apropriada discussão acerca de variedades propriamente. Por outro lado, empenharemos nossos esforços restantes na obtenção de critérios de orientabilidade, objetivo este que esperamos atingir por meio da definição de um recobrimento particular tendo a variedade em questão como base.

6.1 Variedades Topológicas

Nesta seção, exploraremos uma classe especial de espaços topológicos, a saber, aqueles os quais chamaremos de *variedades topológicas*. A definição apropriada desses objetos requer uma discussão preliminar de alguns tópicos de topologia geral, cuja apresentação julgamos pertinente na atual conjuntura deste trabalho. Começemos com o seguinte

Definição 6.1. Um espaço topológico X é dito de *Hausdorff* se para cada par de pontos distintos $x, y \in X$ existem abertos disjuntos $U_x, U_y \subseteq X$ contendo x e y , respectivamente.

Observe que todo subespaço de um espaço de Hausdorff é, ele próprio, de Hausdorff. Com efeito, para cada par de pontos distintos num tal subespaço, basta considerar os abertos relativos para obter, a partir do par de abertos disjuntos no espaço todo, os abertos disjuntos que procuramos. À seguir, enunciamos um resultado que nos será útil mais tarde.

Teorema 6.1. *Em um espaço de Hausdorff, todo ponto é um conjunto fechado.*

Demonstração. Seja X um espaço de Hausdorff. Para cada $x \in X$, basta provarmos que $X - \{x\}$ é aberto. Com efeito, para cada $y \in X - \{x\}$, existem abertos $U_x, U_y \subseteq X$ contendo x e y , respectivamente, tal que $U_x \cap U_y = \emptyset$, de modo que $U_y \subseteq X - \{x\}$. Dessa

forma, teremos $\cup_{y \in X - \{x\}} U_y = X - \{x\}$. Portanto, concluímos que $X - \{x\}$ é aberto e, consequentemente, que $\{x\}$ é fechado. ■

Definição 6.2. Seja X um espaço topológico. Uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de X é dita uma *base* para a topologia de X quando ocorrem os seguintes:

- i. Cada elemento de \mathcal{B} é um subconjunto aberto de X .
- ii. Cada subconjunto aberto de X é a união de alguma coleção de elementos de \mathcal{B} .

Definição 6.3. Um espaço topológico é dito *segundo contável* quando admite uma base contável para sua topologia.

Como ocorre com a propriedade de Hausdorff, subespaços de espaços segundo contáveis seguem sendo segundo contáveis. De fato, o argumento segue o mesmo princípio de se considerar abertos relativos a fim de se obter uma base contável para o mesmo.

Exemplo 6.1. O espaço \mathbb{R}^n com a sua topologia usual é segundo contável. A base em questão é formada pelas bolas abertas de raio racional cujas coordenadas dos respectivos centros são todas racionais.

Definição 6.4. Um espaço topológico M é dito *localmente euclidiano de dimensão n* se, para cada ponto de M , existe uma vizinhança desse ponto em M a qual é homeomorfa à um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Uma tal vizinhança será dita uma *vizinhança euclidiana* do ponto em questão.

Lema 6.1. *Um espaço topológico M é localmente euclidiano de dimensão n se, e somente se, verifica qualquer uma das seguintes:*

- i. Cada ponto de M possui uma vizinhança homeomorfa a um disco aberto de \mathbb{R}^n .*
- ii. Cada ponto de M possui uma vizinhança homeomorfa à \mathbb{R}^n .*

Demonstração. É imediato que qualquer espaço verificando *i.* ou *ii.* é localmente euclidiano de dimensão n . Reciprocamente, suponha que M é localmente euclidiano de dimensão n . Como qualquer disco aberto de \mathbb{R}^n é homeomorfo ao próprio \mathbb{R}^n , as condições *i.* e *ii.* são equivalentes, de modo que basta provarmos *i.*. Com efeito, dado um ponto $p \in M$, seja U uma vizinhança de p admitindo um homeomorfismo $f : U \rightarrow V$, onde V é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Sendo V aberto em \mathbb{R}^n , existe um disco B contido em V tal que $f(p) \in B$, donde vemos que $f^{-1}(B) \subset M$ é a vizinhança procurada. ■

Finalmente, estamos em condições de enunciar a principal definição da presente seção.

Definição 6.5. Uma *variedade topológica de dimensão n* , também conhecida como n -variedade topológica, n -variedade ou simplesmente variedade, é um espaço topológico segundo contável, de Hausdorff e localmente euclidiano de dimensão n .

O exemplo mais óbvio de uma n -variedade topológica é o próprio espaço \mathbb{R}^n . Mais que isso, qualquer subconjunto aberto de \mathbb{R}^n - ou de qualquer n -variedade - é novamente uma n -variedade, como mostra a próxima proposição.

Proposição 6.1. *Cada subconjunto aberto de uma n -variedade é, ele mesmo, uma n -variedade.*

Demonstração. Com efeito, já ressaltamos previamente que todo subconjunto aberto V de uma n -variedade M é tanto de Hausdorff como segundo contável. Agora, para cada $p \in V$, obtemos uma vizinhança homeomorfa à um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . A intercessão desta vizinhança com o aberto em questão ainda é aberta em M , ainda homeomorfa à algum aberto de \mathbb{R}^n , e está contida em V , de modo que V é localmente euclidiano de dimensão n . Portanto, obtemos o desejado. ■

Com a teoria de homologia que desenvolvemos até agora em mãos, podemos mostrar que a dimensão de uma variedade é uma propriedade intrínseca.

Lema 6.2. *Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Então, para cada ponto $x \in U$, temos $H_{n-1}(U - \{x\}) \neq 0$.*

Demonstração. Considere a sequência de Mayer-Vietoris da tríade $(U, \mathbb{R}^n - \{x\}, \mathbb{R}^n)$:

$$H_n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{n-1}(U - \{x\}) \rightarrow H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n).$$

Sendo $H_q(\mathbb{R}^n) = 0$ para todo $q \geq 1$, a exatidão da sequência acima nos diz que $H_{n-1}(U - \{x\}) \cong H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{x\})$. Como $H_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$, concluímos que $H_{n-1}(U - \{x\}) \cong H_{n-1}(U) \oplus \mathbb{R} \neq 0$, como queríamos. ■

Lema 6.3. *Se $m > n$, então \mathbb{R}^m não é homeomorfo à nenhum subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{R}^m \approx U$ onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Se $n = 0$, não há bijeção entre \mathbb{R}^m e um ponto, e o resultado segue. Caso seja $n = 1$, teríamos $\mathbb{R}^m - \{y\} \approx U - \{x\}$. Sendo $\mathbb{R}^m - \{y\}$ conexo e $U - \{x\}$ não, obtemos a contradição. Para $n \geq 2$, o lema anterior nos diz que

$$0 \neq H_{n-1}(U - \{x\}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^m - \{y\}) \cong H_{n-1}(S^{m-1}) \cong 0,$$

que é absurdo. ■

Proposição 6.2 (Invariância de Dimensão). *Se $n \neq m$, então uma variedade topológica $M \neq \emptyset$ não pode ser simultaneamente uma n -variedade e uma m -variedade.*

Demonstração. Suponha que exista uma tal variedade M , i.e., para cada $p \in M$, podemos obter vizinhanças U e V homeomorfas à \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente. Suponha também, sem perda de generalidade, que $m > n$. Agora, sendo $U \cap V$ aberto em M , vemos que essa interseção é simultaneamente homeomorfa à algum aberto X de \mathbb{R}^m e algum aberto Y de \mathbb{R}^n , donde obtemos um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ entre tais abertos X e Y . Sendo X aberto em \mathbb{R}^m , existe uma bola aberta B de dimensão m , contida em X , a qual é homeomorfa à $h(B)$. No entanto, a imagem $h(B)$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , e sendo $B \approx \mathbb{R}^m$, o lema anterior nos permite concluir que uma tal variedade não existe. ■

Antes de encerrarmos essa seção, gostaríamos de chamar a atenção do leitor para a hipótese $M \neq \emptyset$ na proposição acima. Observe que, se $M = \emptyset$, as condições para que M seja uma variedade são todas satisfeitas por vacuidade. Mais que isso, ainda por vacuidade, o conjunto vazio se qualifica como uma variedade de qualquer dimensão não negativa (incluindo 0). Nesse cenário, não é possível atribuir sentido ao conceito de dimensão de maneira razoável, de modo que se faz necessário desconsiderar este caso nos momentos em que a boa definição da dimensão é requerida ou desejada. Encerramos estabelecendo alguns exemplos importantes de variedades topológicas.

Exemplo 6.2. A esfera S^n é uma n -variedade topológica para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, como $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, obtemos de imediato as propriedades de Hausdorff e segundo contável. Resta mostrarmos que S^n é localmente euclidiana. Para tal, considere

$$\begin{aligned} \sigma : S^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \sigma(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x_{n+1}}, \end{aligned}$$

a projeção estereográfica de $S^n \setminus \{N\}$ em \mathbb{R}^n , onde $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $N = (0, 0, \dots, 1)$ denota o polo norte da n -esfera. A continuidade de σ é clara, basta observar que σ é produto e composição de funções sabidamente contínuas. O mesmo vale para a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \setminus \{N\} \\ u &\longmapsto \sigma^{-1}(u) = \frac{(2u_1, \dots, 2u_n, \|u\|^2 - 1)}{\|u\|^2 + 1}, \end{aligned}$$

onde $u = (u_1, \dots, u_n)$, a qual se verifica ser uma inversa bilateral para σ , de modo que esta última é um homeomorfismo entre $S^n \setminus \{N\}$ e \mathbb{R}^n . Em particular, isso provém uma vizinhança euclidiana para cada ponto de S^n à exceção de N . A projeção análoga baseada no polo sul $S = (0, 0, \dots, -1)$ fornece a vizinhança procurada para N .

Exemplo 6.3. O espaço projetivo sobre o corpo \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) $\mathbb{K}P^n$ definido como o espaço quociente $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ onde $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : x = \lambda y$, com aplicação quociente $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}P^n$ dada por $x = (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$, é uma variedade de dimensão n se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $2n$ se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Para ver isso, vejamos antes que a projeção π é um mapa aberto. Seja $U \subset \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ um aberto. Devemos mostrar que $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto em $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Com efeito, se $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$, então existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda x \in U$. Sendo U aberto em $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\lambda x, \varepsilon) \subset U$. Afirimo que $B(x, \frac{\varepsilon}{|\lambda|}) \subset \pi^{-1}(\pi(U))$. De fato, se $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{|\lambda|})$, então $\|y - x\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Daí, $\|\lambda y - \lambda x\| < \varepsilon$, e temos $\lambda y \in B(\lambda x, \varepsilon) \subset U$, logo, $\pi(y) \in \pi(U)$, e vemos que $y \in \pi^{-1}(\pi(U))$, como queríamos. Com esse fato em mãos, verificamos as propriedades Hausdorff e segundo contável. Com efeito, se $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ é uma base enumerável para $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$, então a relação $\pi(\cup U_i) = \cup \pi(U_i)$ nos dá que $\{\pi(U_n) | n \in \mathbb{N}\}$ é uma base contável para $\mathbb{K}P^n$. Agora, sejam $[x], [y] \in \mathbb{K}P^n$ pontos distintos. Defina

$$\mathcal{O}_x = \{\lambda x / \|x\| : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1\} \text{ e } \mathcal{O}_y = \{\lambda y / \|y\| : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1\}$$

e note que $\pi(\mathcal{O}_x) \subset [x]$, assim como $\pi(\mathcal{O}_y) \subset [y]$. Tome

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{\text{dist}(x/\|x\|, \mathcal{O}_y), \text{dist}(y/\|y\|, \mathcal{O}_x)\},$$

de sorte que $V_{[x]} = \pi(B(\frac{x}{\|x\|}, \delta))$ e $V_{[y]} = \pi(B(\frac{y}{\|y\|}, \delta))$ serão as vizinhanças disjuntas de $[x]$ e $[y]$ procuradas. Resta verificarmos que $\mathbb{K}P^n$ é localmente euclidiano. Com efeito, para cada $i = 0, \dots, n$, defina $U_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} : x_i \neq 0\}$ e faça $V_i = \pi(U_i)$. Claramente, $\mathbb{K}P^n = \cup V_i$. Agora, considere

$$\begin{aligned} \varphi_i : V_i &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ [x] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Basta mostrarmos que φ_i é um homeomorfismo para cada i . De fato, é fácil ver que, para $i = 0, \dots, n$, a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1} : \mathbb{K}^n &\longrightarrow V_i \\ x &\longmapsto [x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_n] \end{aligned}$$

é a inversa de φ_i . Além disso, se definirmos

$$\begin{aligned} \varphi_i^* : U_i &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), \end{aligned}$$

vemos facilmente que φ_i^* é contínua para todo i e verifica $\varphi_i^* = \varphi_i \circ \pi$, de modo que, da propriedade universal dos quocientes, obtemos a continuidade de φ_i . Finalmente, pondo $\psi_i : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$, $(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})$, temos $\varphi_i^{-1} = \pi \circ \psi_i$, e a continuidade de φ_i^{-1} segue então da continuidade de ψ_i . Como a dimensão real de \mathbb{C}^n é o dobro da complexa, obtemos o desejado quanto à dimensão dessas variedades.

6.2 Orientação em Variedades Topológicas

Ao longo desta seção, X denotará uma variedade topológica de dimensão $n \geq 1$.

Lema 6.4. *Para cada ponto $x \in X$, temos $H_n(X, X - \{x\}) \cong R$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança euclidiana de x , ou seja, podemos assumir U homeomorfa à \mathbb{R}^n . Aplicando o teorema de excisão para o subconjunto fechado $X \setminus U$ do aberto $X - \{x\}$ (X é Hausdorff), obtemos $H_n(U, U - \{x\}) \cong H_n(X, X - \{x\})$. Agora, considere

$$H_n(U) \rightarrow H_n(U, U - \{x\}) \rightarrow H_{n-1}(U - \{x\}) \rightarrow H_{n-1}(U)$$

a sequência exata de homologia do par $(U, U - \{x\})$. Para $n > 1$, a contratibilidade de U nos dá que $H_n(U, U - \{x\}) \cong H_{n-1}(U - \{x\})$. Como $(U - \{x\})$ é homotopicamente equivalente à S^{n-1} , obtemos $H_n(U, U - \{x\}) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong R$. Quanto à $n = 1$, primeiramente identificamos $H_0(U - \{x\}) \cong H_0(S^0) \cong R \times R$ e $H_0(U) \cong R$. Dessa forma, o argumento presente no corolário 5.3 nos permite obter $H_n(U, U - \{x\}) \cong R$. ■

Exemplo 6.4. Considere o caso $n = 2$ e $R = \mathbb{Z}$. Então, existem dois possíveis elementos de $H_2(X, X - \{x\}) \cong H_1(U - \{x\})$ os quais podem gerar o grupo cíclico infinito dos inteiros, a saber, aqueles associados a laços contornando x exatamente uma vez em direções opostas. Escolher um desses geradores corresponde, intuitivamente, à escolha de uma “orientação sobre o ponto x ”.

Inspirados pelo exemplo acima, definimos

Definição 6.6. Uma R -orientação local de X em x é um gerador do R -módulo $H_n(X, X - \{x\})$.

A fim de definir uma noção de orientação em X globalmente, nossa intuição nos diz que deveríamos ter orientações de X dadas a cada ponto de modo que tais orientações locais “concordem” entre si. A princípio, não sabemos se esse feito é mesmo possível. No entanto, o próximo lema mostra que sempre podemos obter tais orientações concordando numa vizinhança de um dado ponto $x \in X$.

Lema 6.5 (de Continuação). *Dado um elemento $\alpha_x \in H_n(X, X - \{x\})$, existe uma vizinhança aberta U de x e $\alpha \in H_n(X, X \setminus U)$ de modo que $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$, onde*

$$j_x^U : H_n(X, X \setminus U) \longrightarrow H_n(X, X - \{x\})$$

é o homomorfismo canônico induzido pela inclusão.

Demonstração. Primeiramente, se σ é um n -simplexo singular, definimos o *suporte* de σ , e denotamos por $|\sigma|$, como sendo a imagem $\sigma(\Delta_n)$. Para uma n -cadeia singular $c = \sum \nu_i \sigma_i$, definimos $|c| = \cup_i |\sigma_i|$. Agora, seja a um ciclo relativo representando α_x . Observe que o suporte $|\partial a|$ de ∂a é um subconjunto compacto de X contido em $X - \{x\}$ (é união finita de subconjuntos compactos de X , a saber, as imagens $\sigma_i(\Delta_n)$), de sorte que $U = X \setminus |\partial a|$ é uma vizinhança aberta de x (X é de Hausdorff, logo todo subconjunto compacto é fechado). Tome $\alpha \in H_n(X, X \setminus U)$ como a classe de homologia de a relativa à $X \setminus U$. ■

O resultado acima nos permite obter elementos $\alpha_y \in H_n(X, X - \{y\})$ para y próximo à x (i.e., para $y \in U$), a partir de α_x , colocando $\alpha_y = j_y^U(\alpha)$. Pensamos nesses elementos como concordantes pois todos se originam do mesmo elemento $\alpha \in H_n(X, X \setminus U)$. Chamamos α de uma *continuação* de α_x em U . Devemos mostrar ainda que

Lema 6.6 (de Coerência). *Se α_x é um gerador de $H_n(X, X - \{x\})$, então U e α podem ser escolhidos de modo que α_y é um gerador de $H_n(X, X - \{y\})$ para todo $y \in U$.*

Obtemos o lema acima como consequência do resultado a seguir, consideravelmente mais forte.

Lema 6.7 (da Localidade Constante). *Toda vizinhança W de x contém uma vizinhança U de x tal que, para cada $y \in U$, j_y^U é um isomorfismo. Em particular, isso nos diz que α_x possui uma única continuação em U .*

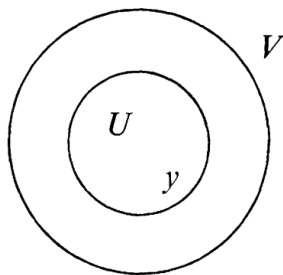
Demonstração. Seja V uma vizinhança euclidiana de x contida em W (assuma V homeomorfa ao disco aberto unitário), e considere um aberto U correspondendo à uma bola aberta de raio estritamente menor que 1. Dessa forma, para cada $y \in U$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, X \setminus U) & \longleftarrow & H_n(V, V \setminus U) & \longrightarrow & H_{n-1}(V \setminus U) \\ j_y^U \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X, X - \{y\}) & \longleftarrow & H_n(V, V - \{y\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(V - \{y\}) \end{array}$$

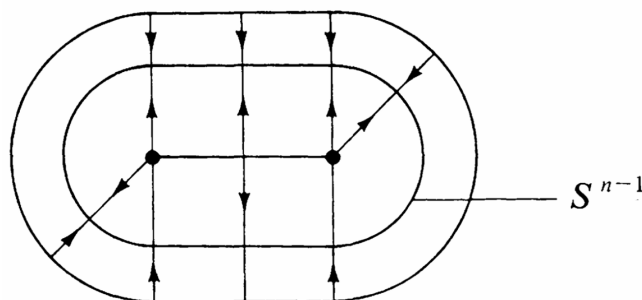
no qual as linhas horizontais à esquerda são excisões (portanto isomorfismos), enquanto as da direita são os homomorfismos conectantes (os quais também serão isomorfismos caso $n > 1$, pois V é contrátil)¹. Agora, a linha vertical mais à direita é um isomorfismo pois a inclusão $V \setminus U \hookrightarrow V - \{y\}$ é uma equivalência de homotopia (imagine $V - \{y\}$ expandindo-se radialmente em direção à $V \setminus U$).

Estendendo essa equivalência para uma entre os pares $(V, V \setminus U)$ e $(V, V - \{y\})$, vemos que a linha vertical ao centro também um isomorfismo. Finalmente, o lema 2.1 nos permite concluir que j_y^U é um isomorfismo. ■

¹Para $n = 1$, as ideias presentes no exemplo 5.4 nos permitem concluir o desejado.



Observamos ainda que as únicas propriedades de U utilizadas no argumento acima são (a) $(V, V \setminus U) \rightarrow (X, X \setminus U)$ é uma excisão, e (b) a inclusão $i : V \setminus U \rightarrow V - \{y\}$ induz um isomorfismo $H_{n-1}(V \setminus U) \rightarrow H_{n-1}(V - \{y\})$ para cada $y \in U$. Vejamos que essas duas propriedades também são satisfeitas se tomarmos U como um paralelepípedo fechado de dimensão $d \leq n$ contendo x . A propriedade (a) é imediata. Agora, tomemos uma $(n-1)$ -esfera contida em $V \setminus U$. Sabemos que a inclusão $i' : S^{n-1} \rightarrow V - \{y\}$ é uma equivalência de homotopia, e podemos mostrar facilmente que a inclusão $i'' : S^{n-1} \rightarrow V \setminus U$ também o será (o caso $d = 1, n = 2$ é ilustrado abaixo);



Desse modo, $H_{n-1}(i) = H_{n-1}(i')H_{n-1}(i'')^{-1}$.

Definição 6.7. Dado um subespaço $U \subset X$, um elemento $\alpha \in H_n(X, X \setminus U)$ tal que $j_y^U(\alpha)$ é um gerador de $H_n(X, X - \{y\})$ para cada $y \in U$ será chamado uma *R-orientação local* de X sobre U .

Considere agora $V, U \subset X$ subespaços com $V \subset U$ e $j_V^U : H_n(X, X \setminus U) \rightarrow H_n(X, X \setminus V)$ o homomorfismo induzido pela inclusão. Se α é uma *R-orientação local* sobre U , então $j_V^U(\alpha)$ é uma sobre V , pois temos $j_y^V[j_V^U(\alpha)] = j_y^U(\alpha)$ para cada $y \in U$. Definimos agora uma *R-orientação global* em X . Suponha que nos são dados

- (i) uma família de subespaços U_i os quais cobrem X (i.e., $X = \cup_i U_i$).
- (ii) para cada i , uma orientação local $\alpha_i \in H_n(X, X \setminus U_i)$ de X sobre U_i .

Chamaremos a família (U_i, α_i) de um *sistema de R-orientação*, ou simplesmente de *R-orientação*, se a seguinte condição de compatibilidade for satisfeita:

- (iii) para cada $x \in X$, se $x \in U_i \cap U'_i$, então $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U'_i}(\alpha'_i)$.

Neste caso, uma *R-orientação local* é definida em cada ponto x inequivocamente por

- (iv) $\alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i)$, se $x \in U_i$.

Agora, dada um outro sistema de R -orientação (V_k, β_k) , dizemos que esta define a mesma R -orientação em X se

(v) $\alpha_x = \beta_x$ para todo $x \in X$.

Definida desse jeito, a condição (v) define uma relação de equivalência entre sistemas de R -orientação. Finalmente, uma R -orientação global em X será, por definição, uma classe de equivalência dessa relação. Diremos que X é R -orientável (resp. orientável) se um tal sistema de R -orientação (resp. um sistema de \mathbb{Z} -orientação) existe.

Proposição 6.3. *Uma subvariedade aberta V de uma variedade R -orientável X é R -orientável. Além disso, X é R -orientável se, e somente se, todas as suas componentes conexas o são.*

Demonstração. Seja (U_i, α_i) um sistema de R -orientação para X . Para cada $x \in V$, tome $\beta_x \in H_n(V, V - \{x\})$ como sendo o único elemento correspondendo à α_x pela excisão $H_n(V, V - \{x\}) \rightarrow H_n(U, U - \{x\})$. O lema da localidade constante nos permite obter uma vizinhança aberta V_x de x tal que $V_x \subset V \cap U_i$ para algum i e β_x possua uma única continuação à uma R -orientação $\bar{\beta}_x$ de V sobre V_x . Podemos ir mais além e escolher V_x tão pequena de modo que $X \setminus V$ esteja contido no interior de $X \setminus V_x$, ou seja, de modo que $X \setminus V$ possa ser excisado de $X \setminus V_x$. Então, para cada $y \in V_x$, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} H_n(V, V - \{y\}) & \longrightarrow & H_n(X, X - \{y\}) & \longrightarrow & H_n(X, X \setminus U_i) \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ H_n(V, V \setminus V_x) & \longrightarrow & H_n(X, X \setminus V_x) & \longrightarrow & H_n(X, X \setminus U_i) \end{array}$$

mostra que a R -orientação local de X sobre y induzida por $\bar{\beta}_x$ coincide com β_y . Portanto, $(V_x, \bar{\beta}_x)$ é um sistema de R -orientação para V . Adicionalmente, sendo as componentes conexas de uma variedade X subconjuntos abertos, o fato provado acima nos diz que estas são R -orientáveis quando X o for. Reciprocamente, se as componentes conexas de uma variedade X forem subvariedades R -orientáveis, basta “unir” os sistemas de R -orientação de cada componente para obter um sistema de R -orientação para a variedade toda. ■

Proposição 6.4. *Duas R -orientações de uma variedade conexa X que coincidam ao menos num ponto são iguais.*

Demonstração. Seja $A \neq \emptyset$ o conjunto em que tais R -orientações coincidam. Novamente, o lema da localidade constante nos permite concluir que A e $X \setminus A$ são ambos abertos em X . Com efeito, se $x \in X$ é um ponto em que as duas R -orientações coincidam (resp. difiram), podemos obter uma vizinhança aberta de x contida em A (resp. $X \setminus A$) na qual α_x admite uma única continuação, ou seja, de modo que as duas R -orientações coincidam (resp. difiram) em todo ponto y numa tal vizinhança. Sendo X conexo, temos $A = X$. ■

Corolário 6.1. *Uma variedade orientável conexa possui exatamente duas orientações distintas.*

Demonstração. Com efeito, havendo apenas duas escolhas possíveis de gerador para $H_n(X, X - \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ em todo $x \in X$, o resultado segue imediatamente da proposição acima. ■

Exemplo 6.5. Considere $X = S^n$. Para cada $x \in X$, considere ainda a sequência exata de homologia do par $(S^n, S^n - \{x\})$

$$H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n, S^n - \{x\}) \rightarrow H_n(S^n - \{x\}) \rightarrow H_{n-1}(S^n).$$

Para $n > 1$, a exatidão da sequência e a contratibilidade de $S^n - \{x\}$ nos dizem que $H_n(S^n) \cong H_n(S^n, S^n - \{x\})$. Quanto à $n = 1$, observemos que $H_0(S^1 - \{x\}) \rightarrow H_0(S^1)$ é um isomorfismo, de modo que nesse caso também temos $H_1(S^1) \cong H_1(S^1, S^1 - \{x\})$. Dessa forma, tomando a cobertura aberta consistindo somente do conjunto X e α um gerador de $H_n(S_n)$, vemos que $(X, \alpha)^2$ é uma R -orientação para a esfera S^n .

Exemplo 6.6. A variedade $X = \mathbb{R}^n$, sendo homeomorfa à S^n menos um ponto, é R -orientável pela proposição 6.4.

Proposição 6.5. *Toda variedade possui uma única \mathbb{Z}_2 -orientação.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, devemos ter α_x como sendo o único elemento não nulo de $H_n(X, X - \{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Daí, o lema 6.7 nos permite tomar uma vizinhança aberta U_x de x na qual α_x possui uma única continuação. Claramente, tais continuações são compatíveis. ■

Encerramos observando que a escolha por nomear \mathbb{Z} -orientabilidade simplesmente como orientabilidade não é vazia. Na verdade, pode ser mostrado que se X é orientável, então X é R -orientável para qualquer anel de coeficientes R . Esse fato segue do teorema de coeficientes universais, nativo da teoria de álgebra homológica, o qual nos dá meios para determinar $H_q(X, A; R)$ a partir de $H_q(X, A; \mathbb{Z})$.

²recorde que $H_n(S^n) = H_n(S_n, \emptyset)$

6.3 Espaços de Recobrimento

Tendo definido orientabilidade como acima, nos voltamos ao esforço de obter dispositivos que nos permitam melhor lidar com tal definição. Para isto, dedicaremos a última seção deste capítulo à obtenção de múltiplos critérios de orientabilidade, mas não sem antes introduzirmos os prolegômenos necessários. Esta última intenção constitui o objetivo da presente seção.

Definição 6.8. Sejam \tilde{X} e X espaços topológicos, e $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação. Diremos que a tripla (\tilde{X}, X, p) é um *recobrimento* se, para cada $x \in X$, existir uma vizinhança aberta $U \subset X$ tal que

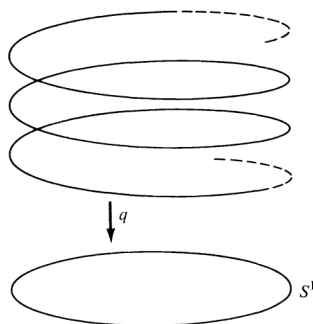
- i. $p^{-1}(U) = \dot{\cup} \tilde{U}_j$, para abertos (não vazios) disjuntos $\tilde{U}_j \subset \tilde{X}$, $j \in J$;
- ii. $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ é um homeomorfismo para todo $j \in J$.

Diremos ainda que p é *trivial* sobre U , e que os abertos \tilde{U}_j são *folhas* sobre U . Chamaremos \tilde{X} de *espaço de recobrimento*, X de *base do recobrimento*, p de *projeção do recobrimento* e a pré-imagem $p^{-1}(x)$ de *fibra* sobre $x \in X$.

Exemplo 6.7. Considere a aplicação $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$; $t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Afirmamos que p é uma projeção de recobrimento. Com efeito, qualquer intervalo aberto próprio ou arco em S^1 serve como uma vizinhança trivial. Para o caso particular de $1 \in S^1$, denote por U o intervalo aberto à direita que percorre i à $-i$. Então

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right).$$

Note que p mapeia os intervalos $(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ homeomorficamente sobre U . Podemos visualizar o recobrimento acima como a projeção de uma espiral infinita sobre S^1 , na qual cada ponto na espiral é mapeado ao ponto imediatamente abaixo deste.



Lema 6.8. Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento. Valem os seguintes:

- i. p é contínuo;
- ii. p é um homeomorfismo local;
- iii. p é sobrejetor;
- iv. a fibra $p^{-1}(x)$ é discreta para todo $x \in X$.

Demonstração. *i.* Seja $U \subset X$ um aberto arbitrário. Para cada $x \in U$, denote por $U_x \subset X$ a vizinhança aberta de x sobre a qual p é trivial. Sendo p recobrimento, existem abertos $\tilde{U}_x^j \subset \tilde{X}$ tais que $p^{-1}(U_x) = \dot{\cup}_{j \in J} \tilde{U}_x^j$ e $p|_{\tilde{U}_x^j} : \tilde{U}_x^j \rightarrow U_x$ é um homeomorfismo para cada $x \in X$. Sendo U aberto, a interseção $U_x \cap U$ é aberta para cada $x \in U$. Mais que isso, $U_x \cap U \subset U_x$, de modo que cada $(p|_{\tilde{U}_x^j})^{-1}(U_x \cap U) \subset \tilde{U}_x^j$ é um aberto $(p|_{\tilde{U}_x^j})^{-1}(U_x \cap U)$ é um homeomorfismo para todo $j \in J$. Escrevendo $V_x^j = (p|_{\tilde{U}_x^j})^{-1}(U_x \cap U)$, vemos que $p^{-1}(U_x \cap U) = \dot{\cup}_{j \in J} V_x^j$, donde obtemos que $p^{-1}(U_x \cap U)$ é aberta para cada $x \in X$. Logo, concluímos que

$$p^{-1}(U) = p^{-1}\left(\bigcup_{x \in U} U_x\right) \cap U = p^{-1}\left(\bigcup_{x \in U} U_x \cap U\right) = \bigcup_{x \in U} p^{-1}(U_x \cap U),$$

é aberta, e p é contínua.

ii. Para cada $x \in X$, fixando umas das folhas na condição *ii.* da definição 6.8, obtemos o homeomorfismo local desejado.

iii. Para cada $x \in X$, qualquer um dos homeomorfismos $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \rightarrow U$ nos dá ao menos um elemento em $p^{-1}(x)$, de modo que p é sobrejetor.

iv. Para cada $x \in X$, as condições *i.* e *ii.* nos dizem que cada folha sobre a vizinhança trivial de x contém um, e exatamente um, elemento de $p^{-1}(x)$. Logo, as folhas nos fornecem os abertos para que a fibra $p^{-1}(x)$ seja discreta. ■

Teorema 6.2 (Unicidade de Levantamento). *Seja $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento e $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma aplicação contínua. Suponha, ainda, que Y é conexo. Se existe uma aplicação contínua $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$, então \tilde{f} é única. Uma tal aplicação \tilde{f} será dita um levantamento de f .*

Demonstração. Seja $\hat{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $p \circ \hat{f} = f$. Defina

$$A := \{y \in Y : \tilde{f}(y) = \hat{f}(y)\},$$

$$D := \{y \in Y : \tilde{f}(y) \neq \hat{f}(y)\},$$

e note que $Y = A \dot{\cup} D$ com $y_0 \in A$. Mostraremos que A e D são ambos abertos, donde o fato de Y ser conexo nos permitirá concluir que $D = \emptyset$ e $A = Y$. Seja $y_1 \in Y$ e $U \subset X$ uma vizinhança aberta de $f(y_1)$ sobre a qual p é trivial. Se $y_1 \in A$, $\tilde{f}(y_1) = \hat{f}(y_1)$ é um ponto numa folha \tilde{U} de $p^{-1}(U)$. Escrevendo $V = \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \hat{f}^{-1}(\tilde{U})$, obtemos

$$\tilde{f}|_V = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ p \circ \tilde{f}|_V = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f|_V = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ p \circ \hat{f}|_V = \hat{f}|_V,$$

donde concluímos que V é uma vizinhança aberta de y_1 contida em A . Se $y_1 \in D$, $\tilde{f}(y_1)$ e $\hat{f}(y_1)$ são pontos em folhas distintas, digamos, em \tilde{U}_1 e \tilde{U}_2 . Sendo \tilde{U}_1 e \tilde{U}_2 disjuntas, vemos que $\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}_1) \cap \hat{f}^{-1}(\tilde{U}_2)$ é uma vizinhança aberta de y_1 contida em D . ■

Teorema 6.3 (Levantamento de Caminhos). *Seja $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento. Se σ é um caminho em X com $\sigma(0) = x_0$, então existe um único caminho $\tilde{\sigma}$ em \tilde{X} com $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{x}_0$ e $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.*

Demonstração. A unicidade do caminho $\tilde{\sigma}$, caso este exista, segue do teorema anterior (I é conexo). Provamos a existência em casos:

Caso 1. A projeção de recobrimento p é trivial sobre todo X . Se \tilde{U} é a folha contendo x_0 e $\psi : X \rightarrow \tilde{U}$ a inversa de $p|_{\tilde{U}}$, então $\tilde{\sigma} := \psi \circ \sigma$ é o levantamento procurado.

Caso geral. Da definição de recobrimento e da compacidade de I , podemos particionar o intervalo unitário I por $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de modo que cada $\sigma([t_i, t_{i+1}])$ está inteiramente contido numa vizinhança de $\sigma(t_i)$ sobre a qual p é trivial para $i = 1, \dots, n$. Pelo Caso 1, podemos levantar $\sigma|_{[t_0, t_1]}$ a um caminho $\sigma_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{X}$ com $\sigma_1(0) = \tilde{x}_0$. Suponha, por indução, que possamos levantar $\sigma|_{[t_0, t_i]}$ para $\sigma_i : [t_0, t_i] \rightarrow \tilde{X}$ com $\sigma_i(0) = \tilde{x}_0$. Então, pelo Caso 1, podemos levantar $\sigma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ para um caminho que leva t_i em $\sigma_i(t_i)$. A composição de σ com tal levantamento nos dá σ_{i+1} . Dessa forma, $\tilde{\sigma} := \sigma_n$ é o levantamento procurado. ■

Teorema 6.4 (Levantamento de Homotopias). *Seja $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento, $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ contínua e $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ um levantamento de f . Então qualquer homotopia $F : Y \times I \rightarrow X$ com $F(\cdot, 0) = f$ pode ser levantada a uma homotopia $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ com $\tilde{F}(\cdot, 0) = \tilde{f}$.*

Demonstração. A prova é feita em vários passos:

Passo 1. Para p trivial sobre todo X , considere \tilde{U} a folha contendo \tilde{x}_0 e $\psi : X \rightarrow \tilde{U}$ a inversa de $p|_{\tilde{U}}$. Então $\tilde{F} := \psi \circ F$ é o levantamento procurado.

Passo 2. Sendo I compacto, para todo $y \in Y$ existe uma vizinhança aberta V_y e uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ (dependente de y) tal que $F(V_y \times [t_i, t_{i+1}])$ está inteiramente contida numa vizinhança aberta de $F(y, t_i)$ sobre a qual p é trivial. Pelo passo 1, e seguindo o mesmo argumento de indução presente no teorema anterior, podemos levantar $F|_{V_y \times I}$ para uma aplicação contínua $\tilde{F} : V_y \times I \rightarrow \tilde{X}$ com $\tilde{F}(y', 0) = \tilde{f}(y')$ para cada $y' \in V_y$.

Passo 3. Veremos agora que os levantamentos no passo 2 para $V_y \times I$ e $V_{y'} \times I$ coincidem em $(V_y \cap V_{y'}) \times I$, donde poderemos juntá-los para obtermos o levantamento desejado em $Y \times I$. De fato, se $y_1 \in V_y \cap V_{y'}$, então temos dois levantamentos de $F|_{y_1 \times I}$ coincidindo em $(y_1, 0)$. Pelo Teorema 6.2 ($y_1 \times I$ é conexo), tais levantamentos devem concordar em todo $y_1 \times I$. ■

Corolário 6.2. *Se σ e τ são caminhos em X com ponto inicial x_0 e $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$, então $\tilde{\sigma} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\tau}$. Em particular, $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\tau}$ tem o mesmo ponto inicial e final.*

Demonstração. Se $F : I \times I \rightarrow X$ é a homotopia entre σ e τ , o teorema anterior nos permite obter uma homotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ entre $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\tau}$. Resta mostrarmos que uma tal homotopia preserva os extremos de $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\tau}$. Com efeito, como $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$, vemos que os caminhos $F(0, \cdot)$ e $F(1, \cdot)$ são ambos constantes (são iguais a $\sigma(0) = \tau(0)$ e $\sigma(1) = \tau(1)$, respectivamente). Dessa forma, como claramente o único levantamento de um caminho constante em X é um caminho constante em \tilde{X} , os respectivos levantamentos $\tilde{F}(0, \cdot)$ e $\tilde{F}(1, \cdot)$ serão ambos constantes, e $\tilde{F} : \tilde{\sigma} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\tau}$ como desejado. ■

Corolário 6.3. *O homomorfismo induzido $p_{\#} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é injetor.*

Demonstração. Se $\tilde{\sigma}$ é um laço em \tilde{x}_0 tal que $p \circ \tilde{\sigma} \simeq_{\{0,1\}} \epsilon_{x_0}$, então o corolário acima nos dá $\tilde{\sigma} \simeq_{\{0,1\}} \epsilon_{\tilde{x}_0}$. ■

Este último resultado inicia uma empreitada que buscará relacionar recobrimentos com os grupos fundamentais dos espaços envolvidos. As próximas definições e resultados resgatam um dispositivo da teoria de grupos que servirá bem a este interesse.

Definição 6.9. Seja G um grupo e S um conjunto. Uma *ação* (à esquerda) de G em S é uma aplicação $G \times S \rightarrow S$; $(g, s) \mapsto g \cdot s$, satisfazendo

i. $1 \cdot s = s$;

ii. $(gh) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$;

para todo $s \in S$ e $g, h \in G$. Para $s \in S$, o subgrupo $G_s := \{g \in G : g \cdot s = s\} \leq G$ será chamado de *estabilizador* de s ou *grupo de isotopia* de s . Chamaremos de *órbita* de s o subconjunto $G \cdot s = \{g \cdot s : s \in S\} \subset S$.

Lema 6.9. *Se $g \cdot s_0 = s_1$, então $G_{s_0} = g^{-1}G_{s_1}g$.*

Demonstração. Se $h \in g^{-1}G_{s_1}g$, então existe $h' \in G_{s_1}$ tal que $h = g^{-1}h'g$. Logo,

$$h \cdot s_0 = (g^{-1}h'g) \cdot s_0 = (g^{-1}h') \cdot (g \cdot s_0) = (g^{-1}h') \cdot s_1 = g^{-1} \cdot (h' \cdot s_1) = g^{-1} \cdot s_1 = s_0$$

nos dá $h \in G_{s_0}$. Reciprocamente, para $h \in G_{s_0}$, temos

$$(ghg^{-1}) \cdot s_1 = (gh) \cdot (g^{-1} \cdot s_1) = (gh) \cdot s_0 = g \cdot (h \cdot s_0) = g \cdot s_0 = s_1,$$

donde obtemos que $ghg^{-1} \in G_{s_1}$. Daí, $h = g^{-1}(ghg^{-1})g \in g^{-1}G_{s_1}g$, como queríamos. ■

Lema 6.10. *O conjunto S é particionado pelas suas órbitas. Mais especificamente, quaisquer duas órbitas em S são iguais ou disjuntas.*

Demonstração. Sejam $s_0, s_1 \in S$ e suponha que exista $u \in (G \cdot s_0) \cap (G \cdot s_1)$. Então, existem $g_0, g_1 \in G$ tais que $g_0 \cdot s_0 = u = g_1 \cdot s_1$. Assim sendo, teremos $g \cdot s_0 = (gg_0^{-1}g_1) \cdot s_1$ e $g \cdot s_1 = (gg_1^{-1}g_0) \cdot s_0$ para todo $g \in G$, donde obtemos $G \cdot s_0 = G \cdot s_1$, como desejado. ■

Proposição 6.6. *A aplicação $G/G_s \rightarrow G \cdot s; gG_s \mapsto g \cdot s$, é uma bijeção para todo $s \in S$.*

Demonstração. Para $g, g' \in gG_s$, considere $h \in G_s$ tal que $g = gh$. Note que $g \cdot s = (g'h) \cdot s = g' \cdot (h \cdot s) = g' \cdot s$, e vemos que a aplicação acima está bem definida. Além disso, para todo $h \in G \cdot s$, existe (por definição) $g \in G$ tal que $h = g \cdot s$, donde obtemos a sobrejetividade. Agora, se $g \cdot s = g' \cdot s$, então $(g^{-1}g') \cdot s = s$, donde $g^{-1}g' \in G_s$ e, conseqüentemente, $gG_s = g'G_s$. Isso prova a injetividade e conclui nosso argumento. ■

Definição 6.10. Diremos que um grupo G age *transitivamente* num conjunto S se, para todo $s, s' \in S$, existir um $g \in G$ tal que $g \cdot s = s'$, i.e., $G \cdot s = S$ para todo $s \in S$. A ação é dita *simplesmente transitiva* se, se, para todo $s, s' \in S$, existir um único $g \in G$ tal que $g \cdot s = s'$.

Voltemos agora ao contexto de espaços de recobrimento. Tome $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento. Em geral, o levantamento $\tilde{\sigma}_{\tilde{x}_0}$ a $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ de um laço σ em $x_0 \in X$ não necessariamente é um laço em \tilde{x}_0 . No entanto, seu ponto final será algum ponto na fibra $p^{-1}(x_0)$, e como esse ponto depende apenas da classe de homotopia de σ (vide Corolário 6.2), podemos definir uma ação de $\pi_1(X, x_0)$ na fibra $p^{-1}(x_0)$ por

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) \times p^{-1}(x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ ([\sigma], \tilde{x}) &\longmapsto [\sigma] \cdot \tilde{x} = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}}(1). \end{aligned}$$

Com efeito, para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}$, note que $1 \cdot \tilde{x} = \varepsilon_{x_0} \cdot \tilde{x} = (\tilde{\varepsilon}_{x_0})_{\tilde{x}}(1) = \varepsilon_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$ bem como $[\sigma] \cdot ([\tau] \cdot \tilde{x}) = [\sigma] \cdot (\tilde{\tau}_{\tilde{x}}(1)) = \tilde{\sigma}_{\tilde{\tau}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \tilde{\sigma}_{\tilde{\tau}_{\tilde{x}}(1)}(1) = ([\sigma][\tau]) \cdot \tilde{x}$.

Lema 6.11. $\pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0} = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ para $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Demonstração. Se $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}$, então $[\sigma] \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$, donde o levantamento $\tilde{\sigma}_{\tilde{x}_0}$ de σ a \tilde{x}_0 é um laço em \tilde{x}_0 . Logo, $[\tilde{\sigma}_{\tilde{x}_0}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_0} \in p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Reciprocamente, para $[\sigma] \in p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, existe um laço $\tilde{\sigma}$ em \tilde{x}_0 tal que $p \circ \tilde{\sigma} \simeq_{\{0,1\}} \sigma$. Levantando essa última homotopia, obtemos $\tilde{\sigma} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_0}$ e, por conseqüência, $[\sigma] \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_0$, donde concluímos $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}$. ■

Lema 6.12. *Se \tilde{X} é conexo por caminhos, então $\pi_1(X, x_0)$ age transitivamente na fibra $p^{-1}(x_0)$.*

Demonstração. Sejam $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ e $\tilde{\sigma}$ um caminho em \tilde{X} de \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 . Note que $\sigma = p \circ \tilde{\sigma}$ é um laço em x_0 cujo levantamento a \tilde{x}_1 é $\tilde{\sigma}$, donde $[\sigma] \cdot \tilde{x}_1 = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_1}(1) = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_2$. ■

Corolário 6.4. *Se \tilde{X} é conexo por caminhos, a aplicação*

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) / p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ [\sigma] \left(p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \right) &\longmapsto [\sigma] \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_0}(1) \end{aligned}$$

é uma bijeção. Em particular, se $p^{-1}(x_0)$ é finito, o número de pontos na fibra é igual ao índice do subgrupo $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Demonstração. Com efeito, o lema 6.12 nos diz que $\pi_1(X, x_0)$ age transitivamente em $p^{-1}(x_0)$, donde obtemos $\pi_1(X, x_0) \cdot \tilde{x}_0 = p^{-1}(x_0)$. Além disso, o lema 6.11 nos dá $\pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0} = p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, e a afirmação segue da proposição 6.7. ■

Lema 6.13. *Se X é conexo por caminhos, todas as fibras possuem a mesma cardinalidade. Caso seja finita, tal cardinalidade será dita o número de folhas do recobrimento.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ e σ um caminho em X de x para y . Defina

$$\begin{aligned} \psi : p^{-1}(x) &\longrightarrow p^{-1}(y) \\ \tilde{x} &\longmapsto \psi(\tilde{x}) = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}}(1), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\sigma}_{\tilde{x}}$ é o levantamento de σ a \tilde{x} . Note que $p(\tilde{\sigma}_{\tilde{x}}(1)) = \sigma(1) = y$, e vemos que de fato $\tilde{\sigma}_{\tilde{x}}(1) \in p^{-1}(y)$ para todo \tilde{x} . Assim sendo, a boa definição de ψ está garantida. Mais que isso, afirmamos que ψ é a bijeção procurada. Com efeito, fazendo $\tilde{x} = \tilde{\sigma}_{\tilde{y}}(1)$ para cada $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$, temos $\tilde{y} = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}}(1)$. Logo, ψ é sobrejetora. Quanto a injetividade, se $\tilde{\sigma}_{\tilde{x}_1}(1) = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_2}(1)$, então $\tilde{\sigma}_{\tilde{x}_1} = (\tilde{\sigma}_{\tilde{y}})^{-1} = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_2}$, onde $\tilde{y} = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_1}(1) = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_2}(1)$. Portanto, teremos $\tilde{x}_1 = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_1}(0) = \tilde{\sigma}_{\tilde{y}}(1) = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}_2}(0) = \tilde{x}_2$, como desejado. ■

Encerramos com um último corolário, um cujo enunciado foi capaz de, por si só, tornar toda esta seção necessária. Essa afirmação será justificada logo mais. Finalmente, como consequência imediata do Corolário 6.4 e do lema 6.13, temos provado

Corolário 6.5. *O índice $[p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) : \pi_1(X, x_0)]$ é igual ao número de folhas de p .*

6.4 O Feixe de R -orientação de uma Variedade

Nesta seção, estudaremos orientabilidade por meio das lentes da teoria de feixes, uma área ampla da qual apenas tomaremos emprestadas algumas técnicas e definições. Ao fazê-lo, obteremos uma compreensão mais profunda da definição de orientação em variedades, bem como alguns critérios de orientabilidade. Começamos, pois, com um resultado que une o conteúdo da última seção com o das anteriores.

Teorema 6.5. *Seja X uma variedade conexa não-orientável. Então existe um recobrimento de duas folhas $p: \tilde{X} \rightarrow X$ tal que \tilde{X} é orientável e conexo.*

Demonstração. Definimos \tilde{X} como o conjunto dos pares (x, α_x) tais que $x \in X$ e α_x é um dos dois geradores de $H_n(X, X - \{x\}; \mathbb{Z})$. Seja $p: \tilde{X} \rightarrow X$ dada por $p(x, \alpha_x) = x$ para todo $(x, \alpha_x) \in \tilde{X}$. Mostremos que a tripla (\tilde{X}, X, p) é o recobrimento procurado. Para tal, considere U aberto em X , α_U uma orientação local de X sobre U e faça

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, \alpha_x) : x \in U, \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}.$$

De imediato, o lema 6.7 nos fornece uma vizinhança da forma acima para cada $(x, \alpha_x) \in \tilde{X}$. Além disso, suponha

$$(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle.$$

Novamente pelo lema 6.7, existe uma vizinhança aberta $U'' \subset U \cap U'$ de x tal que α_x possui uma única continuação $\alpha_{U''}$ em U'' . Temos então $j_{U''}^U(\alpha_U) = \alpha_{U''} = j_{U''}^{U'}(\alpha_{U'})$, de modo que $\langle U'', \alpha_{U''} \rangle \subset \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle$ (recorde que $j_x^U = j_x^{U''} \circ j_{U''}^U$ e $j_x^{U'} = j_x^{U''} \circ j_{U''}^{U'}$). Dessa forma, os conjuntos $\langle U, \alpha_U \rangle$ formam uma base para uma topologia em \tilde{X} . Nesta topologia, p mapeia $\langle U, \alpha_U \rangle$ homeomorficamente sobre U (dado $V \subset U$ aberto, $(p|_{\langle U, \alpha_U \rangle})^{-1}(V) = \langle V, \alpha_V \rangle$, $\alpha_V = j_V^U(\alpha_U)$, e $p(\langle V, \alpha_V \rangle) = V$). Além disso, se U é um aberto como no lema 6.7 (i.e., j_y^U é um isomorfismo para cada $y \in U$), então

$$p^{-1}(U) = \langle U, \alpha_U \rangle \cup \langle U, -\alpha_U \rangle$$

com $\langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U, -\alpha_U \rangle = \emptyset$ (sendo j_x^U um isomorfismo para todo $x \in U$, os dois geradores de $H_n(X, X \setminus U) \cong \mathbb{Z}$ são mapeados cada um num dos dois geradores distintos de $H_n(X, X - \{x\}) \cong \mathbb{Z}$), e temos em mãos um recobrimento de duas folhas. Mostremos brevemente que \tilde{X} é uma variedade topológica. Com efeito, sendo \tilde{X} localmente homeomorfo (lema 6.8) a uma variedade, as propriedades Hausdorff e localmente euclidiano são imediatas. Ademais, se $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma base enumerável de X , então

$$\mathcal{B} = \{\langle V_i, \alpha_{V_i} \rangle\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{\langle V_i, -\alpha_{V_i} \rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$$

(assuma, s.p.g., que cada V_i admita uma orientação local)³ é uma base enumerável de \tilde{X} . Prossigamos mostrando que \tilde{X} é orientável. Para cada $x \in X$, tome $V \supset U$ uma

³o lema 6.7 nos garante que os abertos básicos de X que admitem orientação local formam uma base

vizinhança aberta como na prova do lema 6.7 tal que α_V , uma orientação local de X sobre V , exista e faça $\alpha_U = j_U^V(\alpha_V)$. Usando os homeomorfismos $p|_{\langle V, \alpha_V \rangle}$ e $p|_{\langle U, \alpha_U \rangle}$ para induzir isomorfismos em homologia, o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X, X \setminus U) & \longleftarrow & H_n(V, V \setminus U) & \longrightarrow & H_{n-1}(V \setminus U) \\
j_y^U \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
H_n(X, X - \{y\}) & \longleftarrow & H_n(V, V - \{y\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(V - \{y\}) \\
& \swarrow & \swarrow & \searrow & \searrow \\
& & H_n(\tilde{X}, \tilde{X} \setminus \tilde{U}) & \longleftarrow & H_n(\tilde{V}, \tilde{V} \setminus \tilde{U}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\tilde{V} \setminus \tilde{U}) \\
& \swarrow & j_{\tilde{y}}^{\tilde{U}} \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
& & H_n(\tilde{X}, \tilde{X} - \{\tilde{y}\}) & \longleftarrow & H_n(\tilde{V}, \tilde{V} - \{\tilde{y}\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\tilde{V} - \{\tilde{y}\})
\end{array}$$

nos permite orientar \tilde{X} localmente em \tilde{U} (da mesma maneira como fizemos no lema 6.7), onde $\tilde{V} = \langle V, \alpha_V \rangle$, $\tilde{U} = \langle U, \alpha_U \rangle$ e $\tilde{y} = (y, \alpha_y)$ ($\alpha_y = j_y^U(\alpha_U)$) acima. Considere, agora, $y \in \langle U_1, \alpha_{U_1} \rangle \cap \langle U_2, \alpha_{U_2} \rangle$ e denote por $\tilde{\alpha}_{U_1}$ e $\tilde{\alpha}_{U_2}$ as respectivas orientações locais de \tilde{X} em $\langle U_1, \alpha_{U_1} \rangle$ e $\langle U_2, \alpha_{U_2} \rangle$. Devemos mostrar que $j_{\tilde{y}}^{\tilde{U}_1}(\tilde{\alpha}_{U_1}) = j_{\tilde{y}}^{\tilde{U}_2}(\tilde{\alpha}_{U_2})$. Com efeito, sejam $V_1 \supset U_1$ e $V_2 \supset U_2$ as vizinhanças abertas de U_1 e U_2 mencionadas acima. Observe que o valor de $j_{\tilde{y}}^{\tilde{U}_i}(\tilde{\alpha}_{U_i})$ depende de U_i , V_i , α_{V_i} e $j_y^{U_i}(\alpha_{U_i})$ para $i = 1, 2$. No entanto, quando escolhermos α_{V_1} e α_{V_2} tais que

$$j_y^{V_1}(\alpha_{V_1}) = j_y^{U_1}(j_{U_1}^{V_1}(\alpha_{V_1})) = j_y^{U_1}(\alpha_{U_1}) = j_y^{U_2}(\alpha_{U_2}) = j_y^{U_1}(j_{U_2}^{V_2}(\alpha_{V_2})) = j_y^{V_2}(\alpha_{V_2}),$$

nos vemos confinados à $\langle V_1, \alpha_{V_1} \rangle \cap \langle V_2, \alpha_{V_2} \rangle$ enquanto transitamos entre X e \tilde{X} no diagrama acima, de sorte que todas as setas coincidem nas interseções em questão. Dessa forma, para $y \in \langle U_1, \alpha_{U_1} \rangle \cap \langle U_2, \alpha_{U_2} \rangle$, $j_{\tilde{y}}^{\tilde{U}_1}(\tilde{\alpha}_{U_1}) = j_{\tilde{y}}^{\tilde{U}_2}(\tilde{\alpha}_{U_2})$, donde concluímos que \tilde{X} é orientável. Finalmente, suponha que \tilde{X} não é conexo. Afirmamos que, para cada componente conexa (por caminhos)⁴ C , $p|_C : C \rightarrow X$ é um recobrimento de uma folha. Com efeito, para cada $x \in X$, seja V uma vizinhança conexa por caminhos de x contida numa vizinhança U de x sobre a qual p é trivial. Nesse caso, teremos $(p|_C)^{-1}(V) = \cup V_j$ para $V_j = U_j \cap p^{-1}(V)$, bem como $(p|_C)|_{V_j} : V_j \rightarrow V$ homeomorfismo para cada j com $p^{-1}(U) = \cup U_j$. De fato, basta notar que, sendo C um aberto conexo por caminhos maximal, cada V_j ou está contido inteiramente em C ou não toca C em lugar algum. Além disso, $(p|_C)^{-1}(x)$ deve possuir apenas um ponto. Em verdade, é evidente que $(p|_C)^{-1}(x)$ possui ao menos um elemento. Agora, se tivéssemos $(p|_C)^{-1}(x) = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$, poderíamos alcançar todos os pontos de \tilde{X} via levantamento de caminhos sem nunca deixarmos C , ou seja, teríamos $\tilde{X} = C$ conexo, um absurdo. Dessa forma, sendo cada $p|_C : C \rightarrow X$ um recobrimento de uma folha, vemos que estes são homeomorfismos entre cada componente conexa de \tilde{X} e X , o qual não é

⁴ \tilde{X} é localmente homeomorfo à X , o qual é localmente conexo por caminhos.

orientável. Este último fato contraria a proposição 6.4, donde concluímos que \tilde{X} é conexo. ■

Corolário 6.6. *Toda variedade simplesmente conexa é orientável. Mais geralmente, toda variedade conexa cujo grupo fundamental não contém subgrupo de índice 2 é orientável.*

Demonstração. Caso X não fosse orientável, o teorema anterior nos forneceria um recobrimento de duas folhas, de modo que $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ possuiria índice 2 em $\pi_1(X, x_0)$ (vide corolário 6.5). ■

Ressaltamos que o resultado acima nos permite concluir novamente que as esferas S^n são orientáveis para $n > 1$, agora sem a necessidade de exibir um sistema de orientação global. Em realidade, a construção acima pode ser generalizada para que obtenhamos um outro recobrimento (análogo à \tilde{X}) contendo \tilde{X} como um subespaço quando $R = \mathbb{Z}$. Considere X^0 o conjunto de todos os pares (x, α_x) tais que $x \in X$ e $\alpha_x \in H_n(X, X - \{x\})$. Aqui, não assumimos α_x um gerador. Defina $p : X^0 \rightarrow X$ por $p(x, \alpha_x) = x$. Dado um aberto U e $\alpha_U \in H_n(X, X \setminus U)$, defina

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, \alpha_x) : x \in U, \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}.$$

Mostremos que esses conjuntos formam uma base para uma topologia em X^0 . Com efeito, os argumentos presentes na prova do teorema 6.5 acima que justificam esta afirmação em \tilde{X} se aplicam igualmente aqui, visto que no caso anterior nada fora assumido sobre os elementos α_x serem geradores ou não. Pelo mesmo motivo, p mapeia os abertos básicos $\langle U, \alpha_U \rangle$ homeomorficamente sobre U . Agora, se U é um aberto no qual j_y^U é um isomorfismo para cada $y \in U$, então

$$p^{-1}(U) = \dot{\cup} \langle U, \alpha_{\xi} \rangle,$$

$\alpha_{\xi} \in H_n(X, X \setminus U)$, com $\langle U, \alpha_{\xi} \rangle$ dois a dois disjuntos (se houvesse $(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_{\xi} \rangle \cap \langle U, \alpha_{\xi'} \rangle$ para $\alpha_{\xi} \neq \alpha_{\xi'}$, teríamos $j_x^U(\alpha_{\xi}) = \alpha_x = j_x^U(\alpha_{\xi'})$). Dessa forma, obtemos uma projeção de recobrimento de X^0 sobre X cujas fibras $p^{-1}(x)$ estão em correspondência um-a-um com os elementos de $H_n(X, X - \{x\})$. X^0 é dito o feixe de R -orientação de X . Agora, assumamos $R = \mathbb{Z}$. Definimos uma função v em X^0 tomando valores nos inteiros não-negativos como segue: dado $(x, \alpha_x) \in X^0$, o elemento α_x é um múltiplo inteiro de um gerador de $H_n(X, X - \{x\})$; o valor absoluto deste múltiplo independendo do gerador escolhido. Este número nós chamamos $v(x, \alpha_x)$.

Lema 6.14. *Para $q > 0$, $v^{-1}(q)$ é aberto em X^0 e $v^{-1}(q) \rightarrow X$ é um recobrimento de duas folhas.*

Demonstração. Dado $(x, \alpha_x) \in v^{-1}(q)$, tome $U \subset X$ uma vizinhança aberta de x na qual j_y^U é um isomorfismo para cada $y \in U$ e α_U a única continuação de α_x em

U . Seja α_x^q um gerador de $H_n(X, X - \{x\})$. Assim sendo, temos $\alpha_x = q \cdot \alpha_x^q$ (ou $\alpha_x = q \cdot (-\alpha_x^q)$) e, conseqüentemente, $\alpha_U = (j_x^U)^{-1}(\alpha_x) = (j_x^U)^{-1}(q \cdot \alpha_x^q) = q \cdot (j_x^U)^{-1}(\alpha_x^q)$. Faça $(j_x^U)^{-1}(\alpha_x^q) = \alpha_U^q$ e note que, sendo j_x^U um isomorfismo, α_U^q é um gerador de $H_n(X, X \setminus U)$. Portanto,

$$\alpha_y = j_y^U(\alpha_U) = j_y^U(q \cdot \alpha_U^q) = q \cdot j_y^U(\alpha_U^q),$$

onde $j_y^U(\alpha_U^q)$ acima é um gerador de $H_n(X, X - \{y\})$ (j_y^U é um isomorfismo). Logo, $v(y, \alpha_y) = q$ para todo $(y, \alpha_y) \in \langle U, \alpha_U \rangle$, donde vemos que $\langle U, \alpha_U \rangle \subset v^{-1}(q)$. Concluimos que $v^{-1}(q)$ é aberto em X^0 . Observe ainda que, se U é como acima (i.e., tal que cada j_y^U é um isomorfismo para $y \in U$), então

$$p^{-1}(U) = \langle U, \alpha_U \rangle \cup \langle U, -\alpha_U \rangle$$

com $\langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U, -\alpha_U \rangle = \emptyset$, $\alpha_U \in H_n(X, X \setminus U)$ um gerador, $\langle U, \alpha_U \rangle$ e $\langle U, -\alpha_U \rangle$ ambos contidos em $v^{-1}(q)$. Vemos que $v^{-1}(q) \rightarrow X$ é um recobrimento de duas folhas. ■

Exemplo 6.8. Para anéis arbitrários R , definimos uma relação de equivalência $a \sim b$ se $a = ub$, onde u é um elemento inversível de R . Aqui, notamos que os elementos inversíveis de um anel R são precisamente os geradores desse anel (quando visto como um R -módulo). Denotaremos o conjunto das classes de equivalência dessa relação por $R \text{ mod } u$. Agora, para cada $(x, \alpha_x) \in X^0$, temos que $\alpha_x = \lambda_x \mu_x$, onde $\mu_x \in H_n(X, X - \{x\})$ é um gerador, e definimos $v : X^0 \rightarrow R \text{ mod } u$ por $v(x, \alpha_x) = [\lambda_x]$. Seja $\mu'_x \in H_n(X, X - \{x\})$ outro gerador com $\alpha_x = \lambda'_x \mu'_x$. Mostremos que $\lambda_x \sim \lambda'_x$, i.e., verifiquemos a boa definição de $v : X^0 \rightarrow R \text{ mod } u$. Com efeito, o isomorfismo $H_n(X, X - \{x\}) \cong R$ mapeia μ_x e μ'_x em elementos inversíveis u_x e u'_x de R , respectivamente. Assim, $\lambda_x u_x = \lambda'_x u'_x \implies \lambda_x = \lambda'_x \mu'_x \mu_x^{-1} = \mu'_x \mu_x^{-1} \lambda'_x \implies \lambda_x \sim \lambda'_x$, como desejado. Vejamos que, para $a \in R$, $v^{-1}([a])$ é aberto em X^0 e $v^{-1}([a]) \rightarrow X$ é um recobrimento em tantas folhas quantos forem os elementos inversíveis de R . De fato, seja $(x, \alpha_x) \in v^{-1}([a])$. Então, $\alpha_x = a \cdot \alpha_x^a$ para $\alpha_x^a \in H_n(X, X - \{x\})$ um gerador. Tome $\langle U, \alpha_U \rangle \subset X^0$ uma vizinhança básica de (x, α_x) na qual j_y^U é um isomorfismo para todo $y \in U$ e α_U a única continuação de α_x em U . Daí, $\alpha_U = (j_x^U)^{-1}(\alpha_x) = (j_x^U)^{-1}(a \cdot \alpha_x^a) = a \cdot (j_x^U)^{-1}(\alpha_x^a)$. Faça $\alpha_U^a = (j_x^U)^{-1}(\alpha_x^a)$. Note que α_U^a é um gerador de $H_n(X, X \setminus U)$ e $\alpha_y = j_y^U(\alpha_U) = j_y^U(a \cdot \alpha_U^a) = a \cdot j_y^U(\alpha_U^a)$, donde vemos que $v(y, \alpha_y) = [a]$ para todo $(y, \alpha_y) \in \langle U, \alpha_U \rangle$. Logo, $\langle U, \alpha_U \rangle \subset v^{-1}([a])$ e obtemos a primeira das afirmações acima. Observe ainda que, se U é como acima, então

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{u \in R \text{ inversível}} \langle U, u \cdot \alpha_U \rangle,$$

com $\langle U, u \cdot \alpha_U \rangle \cap \langle U, u' \cdot \alpha_U \rangle = \emptyset$ se $u \neq u'$. Em particular, se 1 denota a classe em $R \text{ mod } u$ contendo $1 \in R$, $v^{-1}(1)$ é um recobrimento de X no qual cada fibra está em correspondência biunívoca com o grupo multiplicativo dos elementos inversíveis de R .

Note que $v^{-1}(0)$ também será aberto, com a diferença que $v^{-1}(0) \rightarrow X$ será na verdade um recobrimento de uma única folha, logo, um homeomorfismo. Observe ainda que X^0 , sendo a união disjunta dos $v^{-1}(q)$, nunca será conexo, visto que cada $v^{-1}(q)$ é aberto. Por último, chamamos atenção para o fato que $v^{-1}(1)$ coincide com \tilde{X} para $R = \mathbb{Z}$. Agora, considere $A \subset X$ um subespaço. Uma *seção sobre A* é uma aplicação contínua $s : A \rightarrow X^0$ tal que $(p \circ s)(a) = a$ para todo $a \in A$. Se $i : A \rightarrow X$ denota a inclusão de A em X , a condição acima se reduz à $p \circ s = i$. Para $x \in A$, faça $s'(x) \in H_n(X, X - \{x\})$ denotar a segunda coordenada de $s(x)$, i.e., $s(x) = (x, s'(x))$. Defina

$$\Gamma A = \{s : A \rightarrow X^0 : s \text{ é uma seção sobre } A\}$$

o conjunto de todas as seções sobre A . Note que, se $s, s_1, s_2 \in \Gamma A$ e $\lambda \in R$, então

$$x \mapsto (x, s'_1(x) + s'_2(x)) \quad \text{e} \quad x \mapsto (x, \lambda s'(x))$$

definem novas seções sobre A , as quais denotaremos por $s_1 + s_2$ e λs , respectivamente. Estas operações fazem de ΓA um R -módulo, cujo elemento neutro é dado pela seção

$$x \mapsto (x, 0).$$

Seções sobre a totalidade de X serão chamadas de *seções globais*. Sob esta ótica, apresentamos uma nova interpretação do conceito de orientabilidade.

Proposição 6.7. *X é R -orientável se, e somente se, existe uma seção global s tomando valores em $v^{-1}(1)$.*

Demonstração. Suponha X R -orientável e seja (U_k, α_k) um sistema de R -orientação. Dessa forma, está bem definida⁵ a aplicação

$$\begin{aligned} s : X &\longrightarrow v^{-1}(1) \\ x &\longmapsto s(x) = (x, j_x^{U_i}(\alpha_i)), \end{aligned}$$

onde U_i é algum aberto do sistema de R -orientação que contém x . Mostremos que s define a seção global desejada. Com efeito, resta apenas verificarmos a continuidade de s . Para tal, considere $x \in s^{-1}(\langle U, \alpha_U \rangle)$ ($\langle U, \alpha_U \rangle \subset v^{-1}(1)$ um aberto básico). Claramente, temos $s(x) = (x, j_x^{U_i}(\alpha_i)) \in \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U_i, \alpha_{U_i} \rangle$. Daí, obtemos $\langle V, \alpha_V \rangle$ uma vizinhança básica de $s(x)$ tal que $\langle V, \alpha_V \rangle \subset \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U_i, \alpha_{U_i} \rangle$. Portanto, $j_x^V(\alpha_V) = j_x^U(\alpha_U) = j_x^{U_i}(\alpha_{U_i})$ para todo $x \in V$, de modo que $V \subset s^{-1}(\langle U, \alpha_U \rangle)$. Concluimos que s é contínua. Reciprocamente, seja

$$\begin{aligned} s : X &\longrightarrow v^{-1}(1) \\ x &\longmapsto s(x) = (x, s'(x)) \end{aligned}$$

uma seção global tomando valores em $v^{-1}(1)$. Exibamos um sistema de R -orientação para X . Com efeito, para cada $x \in X$, seja $\langle U_k, \alpha_k \rangle \subset v^{-1}(1)$ uma vizinhança básica de $s(x)$.

⁵Recorde que, se U_i e $U_{i'}$ ambos contém x , $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_{i'}}(\alpha_{i'})$

Da continuidade de s , obtemos V_k uma vizinhança aberta de x tal que $V_k \subset s^{-1}(\langle U_k, \alpha_k \rangle)$. Fazendo $\beta_k = j_{V_k}^{U_k}(\alpha_k)$, mostremos que (V_k, β_k) é o sistema de R -orientação procurado. De fato, suponha $x \in V_k \cap V_l$. Temos, então, $s(x) \in \langle U_k, \alpha_k \rangle \cap \langle U_l, \alpha_l \rangle$. Daí, obtemos $\langle W, \alpha_W \rangle$ uma vizinhança básica de $s(x)$ tal que $\langle W, \alpha_W \rangle \subset \langle U_k, \alpha_k \rangle \cap \langle U_l, \alpha_l \rangle$. Logo,

$$j_x^{V_k}(\beta_k) = j_x^{V_k}(j_{V_k}^{U_k}(\alpha_k)) = j_x^{U_k}(\alpha_k) = j_x^{U_l}(\alpha_l) = j_x^{V_l}(j_{V_l}^{U_l}(\alpha_l)) = j_x^{V_l}(\beta_l),$$

e temos o desejado. ■

Observe ainda que, sendo cada R -orientação de X e toda seção global unicamente determinadas pelas R -orientações locais $\alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i)$ e pelos valores de $s'(x)$, respectivamente, observamos que as diferentes R -orientações de X estão em correspondência biunívoca com as seções globais tomando valores em $v^{-1}(1)$. Mais geralmente, para qualquer $A \subset X$, dizemos que X é R -orientável ao longo de A se há uma seção sobre A tomando valores em $v^{-1}(1)$.

Proposição 6.8. *X é R -orientável ao longo de A se, e somente se, existe um homeomorfismo $\phi : p^{-1}(A) \rightarrow A \times R$ (R munido da topologia discreta) tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(A) & \xrightarrow{\phi} & A \times R \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

comuta e $\phi|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \rightarrow x \times R$ é um isomorfismo na segunda coordenada para cada $x \in A$. Nesse caso, ΓA é isomorfo ao módulo de todas as aplicações contínuas de A em R . Além disso, se A possui k componentes conexas (k finito), então $\Gamma A \cong R^k$.

Demonstração. Suponha X R -orientável e seja $s : A \rightarrow v^{-1}(1)$ uma seção. Assim sendo, $s'(x)$ é um gerador para cada $x \in A$. Logo, se $(x, \alpha_x) \in p^{-1}(A)$, há um único escalar $\lambda_x \in R$ tal que $\alpha_x = \lambda_x s'(x)$, donde definimos ϕ por $\phi(x, \alpha_x) = (x, \lambda_x)$, $x \in A$. Observe que, se U é uma vizinhança aberta de x na qual α_x possui uma única continuação α_U , então ϕ é uma bijeção entre $\langle U, \alpha_U \rangle$ e $U \times \lambda_x$, portanto um homeomorfismo. Reciprocamente, dado ϕ , recuperamos a seção s fazendo $s(x) = \phi^{-1}(x, 1)$, $x \in A$. Agora, seja $s \in \Gamma A$. A comutatividade do diagrama nos permite escrever $\phi(x) = (x, \psi(x))$, donde podemos definir $r_s : A \rightarrow R$ por $r_s(x) = \psi(s'(x))$. Note que r_s assim definida é contínua. Da mesma forma, se $r : A \rightarrow R$ é contínua, definimos uma seção s_r sobre A fazendo $s_r(x) = (x, \psi^{-1}(r(x)))$. Mostremos que estas associações constituem um isomorfismo entre ΓA e o módulo de todas as aplicações contínuas de A em R . Com efeito, comecemos notando que $s \mapsto r_s$ e $r \mapsto s_r$ são inversas uma da outra. Além disso, se $s_1, s_2 \in \Gamma A$ e $\lambda \in R$, então

$$r_{s_1 + \lambda s_2}(x) = \psi(s_1'(x) + \lambda s_2'(x)) = \psi(s_1'(x)) + \lambda \psi(s_2'(x)) = r_{s_1}(x) + \lambda r_{s_2}(x),$$

e temos o desejado. Por último, se A possui k componentes conexas, qualquer aplicação contínua de A em R deve ser constante nessas componentes (recorde que R está munido da topologia discreta), de modo que tantas tais aplicações existem quantos forem os elementos de R e as componentes conexas de A , i.e., R^k . ■

A hipótese de que $\phi|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \rightarrow x \times R$ é um isomorfismo na segunda coordenada para cada $x \in A$ pode se passar como arbitrária à primeira vista. No entanto, em contextos mais gerais, tal propriedade é esperada para o tipo de mapa em questão. Nesses casos, é dito que a aplicação preserva os *talos* do feixe. De qualquer forma, não iremos nos aprofundar mais nesse mérito. Agora, faremos uma última observação em preparação para o enunciado daquele que se mostrará o resultado central desta seção. Com efeito, é possível definir um homomorfismo canônico

$$j_A : H_n(X, X \setminus A) \rightarrow \Gamma A$$

por $j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha))$ para cada $x \in A$. Devemos verificar a continuidade de $j_A(\alpha)$. Seja a um ciclo relativo representando α . Se $U = X \setminus |\partial a|$, então U é aberto e contém A , e se $\alpha_U \in H_n(X, X \setminus U)$ é a classe de homologia de a relativa a $X \setminus U$, então α_U induz α sob a inclusão de $X \setminus U$ em $X \setminus A$. Agora, dado $x \in A$, considere V uma vizinhança aberta de x tal que $V \subset U$ e $j_x^A(\alpha)$ possui uma única continuação α_V em V . Como α_U induz α_V , $j_A(\alpha)$ mapeia $V \cap A$ em $\langle V, \alpha_V \rangle$, mas conjuntos como este último formam uma base de vizinhanças de $(x, j_x^A(\alpha))$ em X^0 , e temos o desejado. Além disso, se $B \subset A$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X \setminus A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma A \\ j_B^A \downarrow & & \downarrow r \\ H_n(X, X \setminus B) & \xrightarrow{j_B} & \Gamma B \end{array}$$

no qual a seta vertical r é definida como a restrição de seções sobre A ao subconjunto B . Enunciamos, sem prova por agora, o principal resultado da presente seção.

Teorema 6.6. *Suponha $A \subset X$ fechado. Então*

i. $H_q(X, X \setminus A) = 0$ para $q > n$,

ii. j_A é um monomorfismo cuja imagem é o submódulo $\Gamma_c A$ das seções com suporte compacto, i.e.,

$$j_A : H_n(X, X \setminus A) \xrightarrow{\cong} \Gamma_c A.$$

Em particular, $j_X : H_n(X) \xrightarrow{\cong} \Gamma_c A$ e $H_q(X) = 0$ para $q > n$.

Uma seção $s \in \Gamma_c A$ é dita possuir *suporte compacto* se esta concorda com a seção nula fora de algum subconjunto compacto de A (o subconjunto compacto em questão dependendo de s em geral). Se A é compacto, então claramente $\Gamma_c A = \Gamma A$.

Corolário 6.7. *Se A é conexo e não-compacto, então $H_n(X, X \setminus A) = 0$. Em particular, $H_n(X) = 0$ se X é conexo e não-compacto.*

Demonstração. Se $\alpha \in H_n(X, X \setminus A)$, então $vj_A(\alpha)$ é constante por conexidade, e como $j_A(\alpha)$ é nula fora de algum compacto, $\alpha = 0$. ■

Corolário 6.8. *Se A é compacto com k componentes conexas e X é R -orientável ao longo de A , então $H_n(X, X \setminus A) \cong R^k$.*

Demonstração. Imediato da proposição 6.9. ■

Corolário 6.9. *Seja X uma variedade conexa e compacta. Suponha que, para todo $a \in R$ não-nulo e todo elemento inversível $u \in R$, $ua = a$ implique $u = 1$ (isso se verifica, por exemplo, quando R é um domínio de integridade). Então*

$$H_n(X) = \begin{cases} R, & \text{se } X \text{ é } R\text{-orientável} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Caso X seja R -orientável, a afirmação de que $H_n(X) = R$ segue imediatamente da proposição 6.9. Por outro lado, se $H_n(X) = 0$, o teorema 6.6 nos dá $\Gamma X = 0$, de modo que não poderá existir seção global $X \rightarrow v^{-1}(1)$ e, conseqüentemente, X não será R -orientável. Agora, suponha que tenhamos uma seção global $s \in \Gamma X$ não nula. Então, sendo $vs(X)$ constante em $R \text{ mod } u$ (X é conexo), existe $a \in R$, $a \neq 0$, tal que $s'(x) = a \cdot \alpha_x$ para todo $x \in X$ onde $\alpha \in H_n(X, X - \{x\})$ é um gerador. Portanto, a hipótese sobre R nos dá que $s'(x)/a$ está bem definido⁶ como gerador de $H_n(X, X - \{x\})$, e vemos que o mapa $x \mapsto (x, s(x)/a)$ é uma seção global tomando valores em $v^{-1}(1)$, de modo que X é R -orientável. Mais ainda, a fim de que X não seja R -orientável, não pode haver seção global não nula, de modo que $\Gamma X = 0$ nesse caso. Daí, o teorema 6.6 nos permite concluir $H_n(X) = 0$. ■

Vemos então que uma R -orientação numa variedade conexa e compacto é determinada por um gerador de ΓX , ou um gerador ζ do módulo “top” de homologia $H_n(X)$; ζ é dito a *classe fundamental* da R -orientação. Dessa forma, a R -orientação local em cada ponto x será dada por $j_x^X(\zeta)$.

Corolário 6.10. *Se X é uma variedade conexa e compacta, então $H_n(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Imediato do teorema anterior e da proposição 6.6. ■

⁶Para $a, b \in R$ e $u \in R$ inversível, $b = ua \Rightarrow \frac{b}{a} = ua \Rightarrow (u^{-1} \frac{b}{a})a = a \Rightarrow (u^{-1} \frac{b}{a}) = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = u$.

Demonstração do Teorema 6.6. Faremos a prova em etapas.

Passo 0. *A* vazio. Óbvio, visto que os módulos de homologia relativa $H_q(X, X \setminus A)$ são todos reduzidos à 0.

Passo 1. Se o teorema é válido para A_1 , A_2 e $A_1 \cap A_2$, então o mesmo vale para $A = A_1 \cup A_2$. Fazemos uso da sequência de Mayer-Vietoris relativa (exemplo 5.11) da tríade $(X, X \setminus A_1, X \setminus A_2)$ para obtermos $H_q(X, X \setminus A) = 0$ para $q > n$. Com efeito, o trecho

$$H_{q+1}(X, X \setminus A_1 \cap A_2) \rightarrow H_q(X, X \setminus A) \rightarrow H_q(X, X \setminus A_1) \oplus H_q(X, X \setminus A_2)$$

se reduz à

$$0 \rightarrow H_q(X, X \setminus A) \rightarrow 0$$

para $q > n$, o que nos dá o desejado. Agora, para $q = n$, observe que o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_q(X, X \setminus A) & \longrightarrow & H_q(X, X \setminus A_1) \oplus H_q(X, X \setminus A_2) & \longrightarrow & H_q(X, X \setminus A_1 \cap A_2) \\ & & \downarrow j_A & & \downarrow j_{A_1} \oplus j_{A_2} & & \downarrow j_{A_1 \cap A_2} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c A & \xrightarrow{(r_1, -r_2)} & \Gamma_c A_1 \oplus \Gamma_c A_2 & \xrightarrow{r_1 + r_2} & \Gamma_c A_1 \cap A_2 \end{array}$$

comuta e $j_{A_1} \oplus j_{A_2}$ e $j_{A_1 \cap A_2}$ são isomorfismos. Finalmente, aplicamos a prova do terceiro caso do lema 2.1 para obtermos que j_A é um isomorfismo.

Passo 2. A é compacto, conexo e inteiramente contido numa vizinhança coordenada sobre a qual p é trivial. Por excisão, podemos substituir X por \mathring{D}^n .

Caso 1. A é um paralelepípedo retangular (de dimensão menor ou igual à n). Nesse caso, (i) segue do exemplo 5.4 e da proposição 5.5 (note que $(\mathring{D}^n, \mathring{D}^n \setminus A) \simeq (D^n, S^{n-1})$), enquanto (ii) ocorre devido à observação feita na sequência do lema da localidade constante e da proposição 6.9, pois A é conexo e \mathring{D}^n é R -orientável.

Caso 2. A é união finita de paralelepípedos retangulares A_1, \dots, A_m tais que cada aresta de cada A_i é paralela à algum hiperplano coordenado de \mathbb{R}^n . Pelo caso anterior, assumimos $m > 1$. Argumentamos por indução sobre m . Seja $A' = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$. Então $A' \cap A_m$ é um conjunto do mesmo tipo, união de no máximo $m - 1$ tais paralelepípedos (de dimensão menor, talvez, mas não importa), de modo que a hipótese indutiva se aplica à A' e $A' \cap A_m$. Pelo passo 1, o teorema é válido para A .

Caso 3. A compacto inteiramente contido numa vizinhança coordenada U sobre a qual p é trivial. Dado $s \in \Gamma A$, podemos assumir que s mapeia A numa mesma folha sobre U (caso contrário, a compacidade de A e a normalidade de U nos dão m abertos disjuntos cobrindo A tais que o mesmo é verdade para cada $U_i \cap A$). Então s se estende à $s^* \in \Gamma U$ (a inversa de p naquela folha). Para cada ponto $x \in A$, escolha um paralelepípedo retangular de dimensão n contendo x no seu interior, cujas arestas são todas paralelas aos hiperplanos coordenados, e contido em U . Seja A' a união desses paralelepípedos, uma união finita

dado que A é compacto. Pelo caso 2 e o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X \setminus A') & \xrightarrow{j_{A'}} & \Gamma A' \ni s^*|A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X, X \setminus A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma A \ni s \end{array}$$

vemos que s está na imagem de j_A . Portanto, j_A é sobrejetor. Seja $\alpha \in H_q(X, X \setminus A)$, onde $q \geq n$. Caso seja $q = n$, suponha $j_A(\alpha) = 0$. Mostremos que $\alpha = 0$. Com efeito, seja z um ciclo relativo representando α . Então $X - |\partial z|$ é um aberto $V \supset A$. Seja α' a classe de homologia de z em $H_q(X, X \setminus V)$. Se $q = n$, como $j_x^V(\alpha') = j_x^A(\alpha) = 0$ para todo $x \in A$, o lema da localidade constante nos dá um aberto V' com $A \subset V' \subset V$ tal que $j_x^V(\alpha') = 0$ para todo $x \in V'$. Agora, construa A' como acima de modo que $A \subset A' \subset V' \cap U$. Então, $j_{A'}^V(\alpha) = 0$ pelo caso 2, donde $\alpha = j_{A'}^A(j_{A'}^V(\alpha')) = 0$.

Passo 3. A compacto. Nesse caso, A é união finita de compactos A_1, \dots, A_m cada um dos quais está contido numa vizinhança coordenada sobre a qual p é trivial. Usamos o argumento indutivo presente no caso 2 do passo 2 em conjunto com os passos 1 e 2.

Passo 4. Se $A \subset U$, U aberto com fecho compacto, então o teorema é válido para U e A . Faremos uso da sequência exata de homologia para a tripla

$$(X, U \cup (X \setminus \bar{U}), (U \setminus A) \cup (X \setminus \bar{U})).$$

Note que, por excisão,

$$H_q(U, U \setminus A) \simeq H_q(U \cup (X \setminus \bar{U}), (U \setminus A) \cup (X \setminus \bar{U})).$$

Para $q > n$, temos

$$H_{q+1}(X, U \cup (X \setminus \bar{U})) \rightarrow H_q(U, U \setminus A) \rightarrow H_q(X, (U \setminus A) \cup (X \setminus \bar{U})).$$

O primeiro e o último módulos são triviais pelo passo 3 aplicado à variedade X e aos compactos $\bar{U} \setminus U$ e $\bar{A} \cup (\bar{U} \setminus U)$, donde $H_q(U, U \setminus A) = 0$. Para $q = n$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(U, U \setminus A) & \longrightarrow & H_n(X, (U \setminus A) \cup (X \setminus \bar{U})) & \longrightarrow & H_n(X, U \cup (X \setminus \bar{U})) \\ & & \downarrow j_A & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c A & \xrightarrow{i} & \Gamma \bar{A} \cup (\bar{U} \setminus U) & \xrightarrow{r} & \Gamma \bar{U} \setminus U \end{array}$$

onde o monomorfismo i é definido como segue: seja $s \in \Gamma_c A$ nula fora de um compacto $K \subset A$. Então $i(s)|A = s$ e $i(s) = 0$ fora de K (identificamos U^0 com $p^{-1}(U)$). A partir desse diagrama, concluímos que j_A é um isomorfismo.

Passo 5. Caso geral. Dado $s \in \Gamma_c A$ nula fora do compacto $K \subset A$, existe um aberto $U \supset K$ tal que \bar{U} é compacto (cubra K com finitas vizinhanças coordenadas). Considere $A' = A \cap U$ e $s' = s|_{A'}$. Pelo passo 4 aplicado à $j_{A'}$ e o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus A') & \longrightarrow & H_n(X, X \setminus A) \\ j_{A'} \downarrow & & \downarrow j_A \\ s' \in \Gamma_c A' & \xrightarrow{i} & s \in \Gamma_c A \end{array}$$

vemos que s pertence à imagem de j_A . Seja $\alpha \in H_q(X, X \setminus A)$. Para $q = n$, assumamos que $j_A(\alpha) = 0$. Mostremos que $\alpha = 0$. Com efeito, seja z um ciclo relativo representando α . Aplicando o argumento acima para $|z|$, obtemos um aberto $U \supset |z|$ tal que \bar{U} é compacto. Seja $A' = A \cap U$. Pelo mesmo diagrama comutativo, acabamos para $q = n$; quanto à $q > n$, sabemos que a classe de z em $H_q(U, U \setminus A')$ é zero pelo passo 4, por razão maior $\alpha = 0$. ■

Ao final deste capítulo, chamamos atenção para o corolário 6.9. O critério de orientabilidade ali obtido será o nosso motor pelas próximas seções, i.e., a seguir dedicaremos nossos esforços ao desenvolvimento de ferramentas que nos permitam utilizar tal critério na obtenção de uma miríade de exemplos tanto para variedades orientáveis como não orientáveis. Encerramos com uma breve consideração acerca de mapas que *preservam orientação*.

Exemplo 6.9. Seja $f : X \rightarrow Y$ um recobrimento de m folhas, onde X e Y são ambas variedades conexas e compactas de dimensão n . Seja $R = \mathbb{Z}$. Para cada $x \in X$, escolha uma vizinhança U de x a qual é mapeada homeomorficamente por f sobre uma vizinhança V de $y = f(x)$. Nesse caso, f induz um isomorfismo

$$H_n(X, X - \{x\}) \rightarrow H_n(U, U - \{x\}) \rightarrow H_n(V, V - \{y\}) \rightarrow H_n(Y, Y - \{y\}).$$

Diremos que f *preserva orientação* se, para cada x , o isomorfismo acima leva a orientação local em x na orientação local em y . Sejam ζ_x e ζ_y as classes fundamentais para as orientações de X e Y , respectivamente. Então $H_n(f)(\zeta_x)$ é um múltiplo de ζ_y ; esse múltiplo será dito o *grau* de f e denotado por $deg(f)$. Assim, f preserva orientação se, e somente se, seu grau é positivo; nesse caso, $deg(f) = m$. Para ver isso, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, X - \{f^{-1}(y)\}) \cong \bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} H_n(X, X - \{x\}) & \longrightarrow & H_n(Y, Y - \{y\}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n(X) & \xrightarrow{H_n(f)} & H_n(Y) \end{array}$$

Capítulo 7

Homologia Celular

No capítulo que encerra esta monografia, discutiremos ainda uma última teoria de homologia, uma que supera consideravelmente a teoria singular no quesito computação. Como veremos, há uma classe (surpreendentemente ampla) de espaços topológicos cujo cálculo dos módulos de homologia singular pode ser encurtado significativamente. A matemática que permeia tal atalho é notavelmente ímpar, no sentido em que suas ideias residem num misto muito animador de utilidade e intuitividade. Ainda nessa nota, o leitor verá que o apelo geométrico aqui presente é capaz de fornecer experiências verdadeiramente recreativas enquanto o mesmo se vê internalizando os conceitos apresentados.

7.1 CW-complexos

Nesta seção, definiremos a classe de espaços topológicos à qual nos referimos anteriormente. Com efeito, diremos que um espaço é uma n -célula, ou simplesmente uma *célula*, se este for homeomorfo ao interior do disco unitário \mathring{D}^n .

Definição 7.1. Uma *decomposição celular* (X, \mathcal{Z}) de um espaço topológico X é uma família \mathcal{Z} de subconjuntos de X tal que cada $e \in \mathcal{Z}$ é uma célula e $X = \bigcup_{e \in \mathcal{Z}} e$. Definimos ainda $\mathcal{Z}_n := \{e \in \mathcal{Z} : \dim(e) = n\}$ como o conjunto das n -células de X e o *n -esqueleto* de X como o subespaço $X^n := \bigcup_{e \in \mathcal{Z}} \{e \in \mathcal{Z} : \dim(e) \leq n\}$. Nesse caso, obtemos uma sequência

$$\emptyset := X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$$

de subespaços verificando $X = \bigcup X^n$. Para cada célula e , denotaremos por \bar{e} o fecho de e em X . A diferença $\dot{e} := \bar{e} \setminus e$ é denominada o *bordo* de e .

Notemos que, no presente momento, não há relação alguma entre as células e a topologia de X . A próxima definição se ocupará em estabelecer tal elo.

¹Esta nota de rodapé deverá ser interpretada como um expoente.

Definição 7.2. Seja X espaço topológico, \mathcal{Z} uma decomposição celular e $e \in \mathcal{Z}^n$ uma célula. Diremos que uma aplicação contínua $\varphi : D^n \rightarrow X$ é uma *aplicação característica* de e se tivermos $\varphi(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$, $\varphi(\overset{\circ}{D}^n) = e$ e $\varphi|_{\overset{\circ}{D}^n}$ um homeomorfismo. A restrição $\varphi|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ será dita uma *aplicação de adesão* de e .

Convidamos o leitor a pensar em aplicações características como a adesão de discos de uma dimensão n dada no espaço X sendo colados pelo bordo em outros discos preexistentes de dimensão inferior.

Lema 7.1. Para X Hausdorff, teremos $\bar{e} = \varphi(D^n) \subset X^{n-1} \cup e$ e $\dot{e} = \varphi(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$. Em particular, \bar{e} e \dot{e} serão compactos.

Demonstração. Da continuidade de φ , vemos que a imagem $\varphi(D^n) \subset \bar{e}$ é compacta no espaço de Hausdorff X , portanto fechada. Então, $e \subset \varphi(D^n)$ implica $\bar{e} \subset \varphi(D^n)$, donde obtemos $\varphi(D^n) = \bar{e}$. Ademais, $\varphi(\overset{\circ}{D}^n \cup S^{n-1}) = e \cup \dot{e}$, e de $\varphi(\overset{\circ}{D}^n) = e$, segue que $\dot{e} \subset \varphi(S^{n-1})$. Além disso, $\varphi(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$ e $e \cap X^{n-1} = \emptyset$, donde $\varphi(S^{n-1}) \subset \dot{e}$. Daí, temos $\varphi(S^{n-1}) = \dot{e}$. ■

Definição 7.3. Um *CW-complexo* (ou *CW-espaço*) é um espaço de Hausdorff X com uma decomposição celular \mathcal{Z} cujas células possuem todas uma aplicação característica e verificam as condições

C: \bar{e} intersecta no máximo um número finito de células para cada $e \in \mathcal{Z}$;

W: se $A \subset X$ é um subespaço de X tal que $A \cap \bar{e}$ é fechado em \bar{e} para cada $e \in \mathcal{Z}$, então A é fechado em X .

O CW-complexo X será dito de dimensão n ($\dim X = n$) se $X = X^n$ e $X \neq X^{n-1}$. Quando $X \neq X^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, diremos que X é de dimensão infinita ($\dim X < \infty$). Chamaremos um CW-complexo de finito se o número de suas células assim o for, e de infinito caso contrário.

Exemplo 7.1. (i) Um CW-complexo finito é compacto. De fato, um tal espaço será união finita de compactos, a saber, os fechos de suas células.

(ii) Um espaço de Hausdorff X com uma decomposição celular \mathcal{Z} finita (i.e., $|\mathcal{Z}| < \infty$), tal que cada célula possui uma aplicação característica é um CW-complexo. Com efeito,

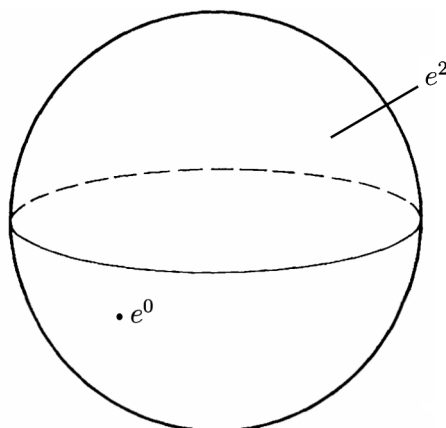
C: Evidente.

W: $X \setminus A = \bigcap_{e \in \mathcal{Z}} X \setminus (A \cap \bar{e})$ é interseção finita de abertos², portanto, aberto em X .

(iii) Uma decomposição celular de S^n . Cada ponto $e^0 \in S^n$ define uma 0-célula. Faça $e^n = S \setminus e^0$ e note que teremos $S^n = e^n \cup e^0$. Nesse caso, qualquer homeomorfismo relativo $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, e^0)$ servirá como aplicação característica para a n -célula e^n . O item

²Sendo X Hausdorff, $A \cap \bar{e}$ fechado em $X \Rightarrow A \cap \bar{e}$ compacto em $X \Rightarrow A \cap \bar{e}$ fechado em X .

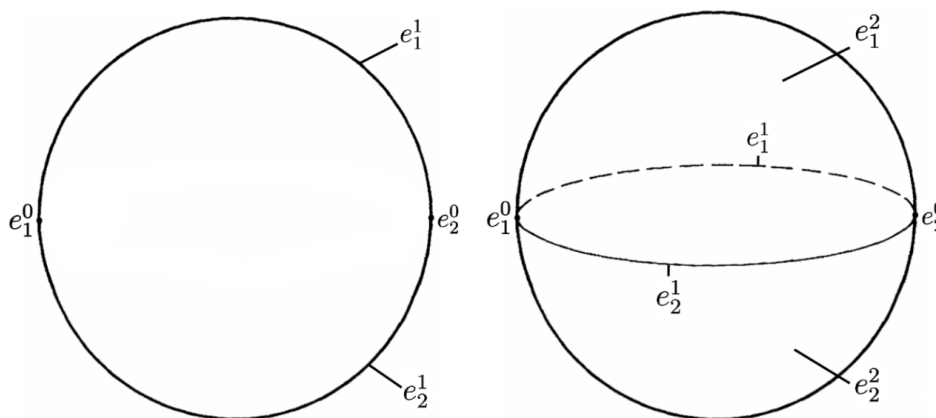
anterior nos diz então que S^n será um CW-complexo. O caso $n = 2$ é ilustrado.



(iv) Uma decomposição alternativa de S^n . Agora, daremos uma construção indutiva para uma estrutura celular em S^n . Com efeito, para S^0 , defina $e_1^0 = -1$ e $e_2^0 = 1$. Claramente, $S^0 = e_1^0 \dot{\cup} e_2^0$.

$$\bullet \overset{e_1^0}{\bullet} \dots \dots \dots \bullet \overset{e_2^0}{\bullet}$$

Para S^1 , comecemos com as mesmas 0-células e_1^0 e e_2^0 , para então adicionarmos os arcos e_1^1 e e_2^1 em S^1 , ambos com extremos em e_1^0 e e_2^0 . Novamente, teremos $S^1 = e_1^0 \dot{\cup} e_2^0 \dot{\cup} e_1^1 \dot{\cup} e_2^1$. Da mesma forma, teremos $S^2 = e_1^0 \dot{\cup} e_2^0 \dot{\cup} e_1^1 \dot{\cup} e_2^1 \dot{\cup} e_1^2 \dot{\cup} e_2^2$, onde e_1^2 e e_2^2 correspondem cada um a um hemisfério aberto de S^2 .



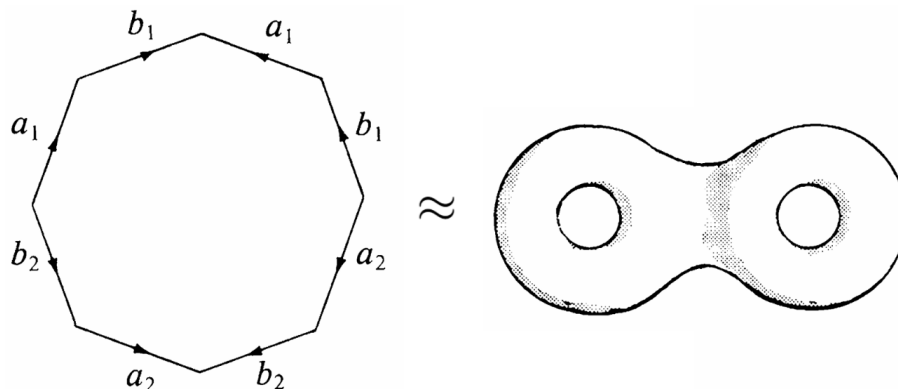
Prosseguindo desse modo, obtemos

$$S^n = \bigcup_{k=0}^n e_1^k \dot{\cup} e_2^k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Além disso, note que nesse caso teremos $X^0 = S^0$, $X^1 = S^1$, $X^2 = S^2$, ..., $X^n = S^n$. Aqui, escolhemos ignorar a obtenção explícita das aplicações características em prol de uma abordagem mais geométrica; pense nesses mapas como deformando os discos D^n nos

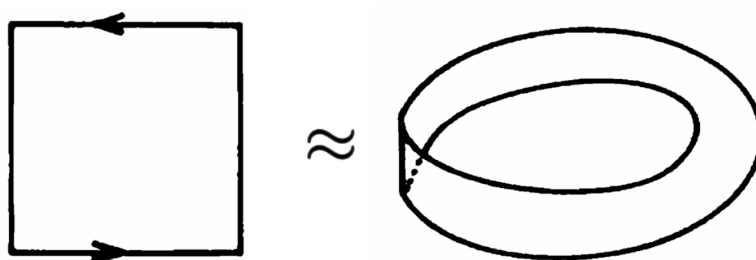
arcos e hemisférios acima de modo que o bordo seja colado no esqueleto pré-existente.

(v) Para $g \geq 1$, considere um $4g$ -ágono regular e defina F_g como o espaço quociente obtido ao identificar o perímetro de um tal polígono pela relação $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Por exemplo, se $g = 2$, então F_2 será dado por



Observe que o processo de colagem acima colapsa todos os vértices do polígono em um único ponto, o qual tomaremos como nossa 0-célula. Daí, tomamos como 1-células as $2g$ arestas distintas $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ e o interior da figura como nossa singular 2-célula. Vemos então que F_g é um CW-complexo com essa decomposição. Observe que o caso $g = 1$ corresponde ao *toro* T^2 , a superfície obtida ao se identificar os lados opostos de um quadrado entre si.

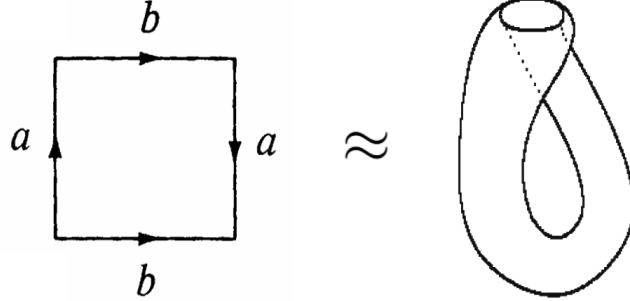
(vi) No quadrado $I \times I$, considere a relação $(t, 0) \sim (1 - t, 1) \forall t \in [0, 1]$. A superfície resultante \mathcal{M} é conhecida como a *faixa de Möbius*, e é também obtida ao se identificar um par de arestas opostas num quadrado como segue:



Fazendo como no item acima, obtemos uma decomposição CW para esse espaço com duas 0-células, a saber, o vértice superior à esquerda (o qual é identificado com o vértice inferior à direita) e o vértice superior à direita (o qual é identificado com o vértice inferior à esquerda), três 1-células correspondendo às três arestas distintas e uma única 2-célula.

(vii) Identificando o perímetro de um quadrado pela relação $abab^{-1}$, obtemos uma superfície fechada \mathcal{K} amplamente conhecida como *garrafa de Klein*, ilustrada abaixo. Prossequindo como no item (v), obtemos uma decomposição celular com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula, a saber, o vértice comum, as arestas a e b e o interior

do quadrado, respectivamente. Note ainda que as decomposições celulares de \mathcal{K} e T^2 possuem o mesmo número de células de cada dimensão, de sorte que o número de células obviamente não determina um CW-complexo.



(viii) Definimos o *espaço real projetivo* $\mathbb{R}P^n$ como o espaço quociente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ onde $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$, com aplicação quociente $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ dada por $x = (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$. Observe que esse mapa identifica retas passando pela origem num único ponto em $\mathbb{R}P^n$. Portanto, vemos que a restrição $\pi|_{S^n}$ é contínua e sobrejetora, de modo que $\mathbb{R}P^n$ será compacto. Obviamente, $\pi|_{S^n}(x) = \pi|_{S^n}(y) \Leftrightarrow x = \pm y$. Fazemos

$$e^k := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_{k+1} = \dots = x_n = 0, x_k \neq 0\},$$

de sorte que temos

$$\bar{e}^k := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \approx \mathbb{R}P^n.$$

Definimos a aplicação característica $\varphi_k : D^k \rightarrow \bar{e}^k$ por

$$\varphi_k(\xi) = \varphi_k(\xi_0, \dots, \xi_{k-1}) = [\xi_0 : \dots : \xi_{k-1} : \sqrt{1 - \|\xi\|^2} : 0 : \dots : 0]$$

para cada $\xi \in D^n$. Veja que a aplicação é claramente contínua. Verifiquemos a sobrejetividade. Com efeito, seja $[x' : x_k : 0 : \dots : 0] \in \bar{e}^k$ onde $x' = (x_0, \dots, x_{k-1})$. Podemos supor, sem perda de generalidade, $x_k \geq 0$. Tomamos $\xi = \frac{x'}{\sqrt{\|x'\|^2 + |x_k|^2}} \in D^k$ e calculamos

$$\begin{aligned} \varphi_k(\xi) &= \left[\frac{x'}{\sqrt{\|x'\|^2 + |x_k|^2}} : \sqrt{1 - \frac{\|x'\|^2}{\sqrt{\|x'\|^2 + |x_k|^2}}} : 0 : \dots : 0 \right] \\ &= \left[\frac{x'}{\sqrt{\|x'\|^2 + |x_k|^2}} : \sqrt{\frac{|x_k|^2}{\sqrt{\|x'\|^2 + |x_k|^2}}} : 0 : \dots : 0 \right] \\ &= [x' : |x_k| : 0 : \dots : 0] \\ &= [x' : x_k : 0 : \dots : 0]. \end{aligned}$$

Dessa forma, teremos ainda $\varphi_k(\dot{D}^n) = e^k$ e $\varphi_k(S^{n-1}) = \dot{e}^k$ ($\sqrt{1 - \|\xi\|^2} = 0 \Leftrightarrow \|\xi\| = 1$).

Agora, verificamos a injetividade de $\varphi_k|_{\overset{\circ}{D}^k}$. Suponha $\varphi_k(\xi) = \varphi_k(\eta)$ para $\xi, \eta \in \overset{\circ}{D}^k$. Então, temos $\xi = \lambda\eta$ e $\sqrt{1 - \|\xi\|^2} = \lambda\sqrt{1 - \|\eta\|^2}$, donde obtemos

$$\|\xi\|^2 + 1 - \|\xi\|^2 = \lambda^2\|\eta\|^2 + \lambda^2(1 - \|\eta\|^2) \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \xi = \eta.$$

Finalmente, sendo D^k compacto e \bar{e}^k fechado em $\mathbb{R}P^n$, vemos que $\varphi_k : D^k \rightarrow \bar{e}^k$ é fechada, de sorte que $\varphi_k|_{\overset{\circ}{D}^k}$ será um homeomorfismo. Além disso, já vimos que se $\|\xi\| = 1$, então $\varphi_k(\xi) = [\xi : 0 : \dots : 0]$, donde teremos $\varphi_k|_{S^{k-1}} : S^{k-1} \rightarrow X^{k-1} \approx \mathbb{R}P^{k-1}$. A partir das células e^k , construiremos uma decomposição celular de $\mathbb{R}P^n$ indutivamente fazendo

$$X_0 = \{pnt\} \approx \mathbb{R}P^0 \subset X^1 \approx \mathbb{R}P^1 \subset X^2 \approx \mathbb{R}P^2 \subset \dots \subset X^n \approx \mathbb{R}P^n$$

via as inclusões $[x_0, \dots : x_{k_1}] \in \mathbb{R}P^k \mapsto [x_0, \dots : x_{k_1} : 0 : \dots : 0] \in \mathbb{R}P^n$ para $k \leq n$. Assim, vemos que $\mathbb{R}P^n = e^0 \dot{\cup} e^1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} e^n$.

(ix) Definimos o *espaço complexo projetivo* $\mathbb{C}P^n$ como o espaço quociente $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ onde $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : x = \lambda y$, com aplicação quociente $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ dada por $z = (z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0 : \dots : z_n]$. Uma decomposição celular muito similar àquela obtida no item anterior pode ser dada para $\mathbb{C}P^n$, i.e., construída a partir de sucessivas imersões de $\mathbb{C}P^{k-1}$ em $\mathbb{C}P^k$. No entanto, como o espaço complexo tem o dobro da dimensão real, a diferença fundamental aqui será que as células ocorrerão somente em dimensões pares, de sorte que teremos $\mathbb{C}P^n = e^0 \dot{\cup} e^2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} e^{2n}$.

7.2 Homologia de CW-complexos

Tendo definido CW-complexos acima em toda a sua generalidade, nos voltamos para o estudo da homologia de espaços como esses para os quais há decomposição finita. Ademais, recorde que se (X, \mathcal{Z}) é um tal complexo, então este será compacto.

Lema 7.2. *Para cada célula $e \in \mathcal{Z}$, denote por φ_e a respectiva aplicação característica. Então, a aplicação*

$$\bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_n} H_i(\varphi_e) : \bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_n} H_i(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow H_i(X^n, X^{n-1})$$

é um isomorfismo para todo i .

Demonstração. Façamos $\dot{D}^n := D^n \setminus \{0\}$ e $\dot{X}^n := X^{n-1} \cup \left(\bigcup_{e \in \mathcal{Z}_n} \varphi_e(\dot{D}^n) \right) = X^n \setminus \bigcup_{e \in \mathcal{Z}_n} \varphi_e(0)$

Observe que a inclusão $S^{n-1} \hookrightarrow \dot{D}^n$ é uma equivalência de homotopia com inversa $x \mapsto x/\|x\|$. Definimos

$$Y^n := \bigsqcup_{e \in \mathcal{Z}_n} D^n, \quad Y^{n-1} := \bigsqcup_{e \in \mathcal{Z}_n} S^{n-1} \quad \text{e} \quad \dot{Y}^n := \bigsqcup_{e \in \mathcal{Z}_n} \dot{D}^n$$

e notamos que $Y^{n-1} \hookrightarrow \dot{Y}^n$ e $X^{n-1} \hookrightarrow \dot{X}^n$ são equivalências de homotopia. Consideramos, então,

$$(Y^n, Y^{n-1}) \hookrightarrow (Y^n, \dot{Y}^n) \xrightarrow{\phi} (X^n, \dot{X}^n) \hookleftarrow (X^n, X^{n-1}),$$

em que $\phi := \bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_n} \varphi_e$. Vejamos que as duas inclusões acima induzem isomorfismos em homologia. Com efeito, aplicamos o lema dos cinco à

$$\begin{array}{ccccccccc} H_i(Y^{n-1}) & \longrightarrow & H_i(Y^n) & \longrightarrow & H_i(Y^n, Y^{n-1}) & \longrightarrow & H_{i-1}(Y^{n-1}) & \longrightarrow & H_{i-1}(Y^n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_i(\dot{Y}^n) & \longrightarrow & H_i(Y^n) & \longrightarrow & H_i(Y^n, \dot{Y}^n) & \longrightarrow & H_{i-1}(\dot{Y}^n) & \longrightarrow & H_{i-1}(Y^n) \end{array}$$

para obter $H_i(Y^n, Y^{n-1}) \cong H_i(Y^n, \dot{Y}^n)$, e à

$$\begin{array}{ccccccccc} H_i(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_i(X^n) & \longrightarrow & H_i(X^n, X^{n-1}) & \longrightarrow & H_{i-1}(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_{i-1}(X^n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_i(\dot{X}^n) & \longrightarrow & H_i(X^n) & \longrightarrow & H_i(X^n, \dot{X}^n) & \longrightarrow & H_{i-1}(\dot{X}^n) & \longrightarrow & H_{i-1}(X^n) \end{array}$$

para obter $H_i(X^n, X^{n-1}) \cong H_i(X^n, \dot{X}^n)$. Por outro lado, teremos que as inclusões $(Y^n \setminus Y^{n-1}, \dot{Y}^n \setminus Y^{n-1}) \hookrightarrow (Y^n, \dot{Y}^n)$ e $(X^n \setminus X^{n-1}, \dot{X}^n \setminus X^{n-1}) \hookrightarrow (X^n, \dot{X}^n)$ são excisões. Finalmente, a aplicação ϕ acima nos dá $(Y^n \setminus Y^{n-1}, \dot{Y}^n \setminus Y^{n-1}) \approx (X^n \setminus X^{n-1}, \dot{X}^n \setminus X^{n-1})$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_n} H_i(D^n, S^{n-1}) &\cong H_i(Y^n, Y^{n-1}) \\
&\cong H_i(Y^n, \dot{Y}^n) \cong H_i(Y^n \setminus Y^{n-1}, \dot{Y}^n \setminus Y^{n-1}) \\
&\cong H_i(X^n \setminus X^{n-1}, \dot{X}^n \setminus X^{n-1}) \\
&\cong H_i(X^n, \dot{X}^n) \cong H_i(X^n, X^{n-1}),
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Corolário 7.1. *Temos*

$$H_i(X^n, X^{n-1}) \cong \begin{cases} R^{|\mathcal{Z}_n|}, & i = n \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

para todo i .

Demonstração. Imediato do lema acima e das computações anteriores dos módulos de homologia relativa do par (D^n, S^{n-1}) . ■

Agora, considere $K_n(X, \mathcal{Z}) := H_n(X^n, X^{n-1})$ e $\partial_n : K_n(X, \mathcal{Z}) \rightarrow K_{n-1}(X, \mathcal{Z})$ definido pelo seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^n) \\
& & \downarrow & \searrow \partial_n & \\
H_{n-1}(X^{n-2}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})
\end{array}$$

Calculando $\partial_n \partial_{n-1}$, vemos que $\partial_n \partial_{n-1} = 0$, pois

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(X^n, X^{n-1}) & & & & & & \\
\downarrow \partial & \searrow & & & & & \\
H_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X^{n-1}) & & & & \\
& & \downarrow \partial & & & & \\
& & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & & & & \\
& & \downarrow & & & & \\
& & H_{n-2}(X^{n-2}) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & H_{n-2}(X^{n-2}) & & \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}) & &
\end{array}$$

Recorde que a sequência de homologia relativa do par (X^{n-1}, X^{n-2}) é exata em $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$. Portanto, vemos que $(K_n(X, \mathcal{Z}), \partial_n)$ é um complexo de cadeia, o assim chamado *complexo celular* do par (X, \mathcal{Z}) .

Lema 7.3. $H_n(X^p, X^q) = 0$ para $p \geq q \geq n$ ou $n > p \geq q$.

Demonstração. Faremos por indução sobre $p - q$. Com efeito, a afirmação é clara para $p - q = 0$. Agora, suponha $p - q > 0$. Consideramos a sequência exata de homologia da tripla (X^p, X^{q+1}, X^q) :

$$H_n(X^{q+1}, X^q) \longrightarrow H_n(X^p, X^q) \longrightarrow H_n(X^p, X^{q+1}).$$

Da hipótese de indução, vemos que $H_n(X^p, X^{q+1}) = 0$. Por outro lado, como $q \geq n$ ou $n > p > q$, temos $n \neq q + 1$, donde $H_n(X^{q+1}, X^q) = 0$ pelo corolário 7.1. Logo, $H_n(X^p, X^q) = 0$ como queríamos. ■

Corolário 7.2. $H_n(X^p) = 0$ para $n > p$.

Demonstração. Aplicando o lema anterior para $q = 0$, obtemos $H_n(X^p, X^0) = 0$. Segue da seguinte sequência exata

$$0 = H_n(X^0) \longrightarrow H_n(X^p) \longrightarrow H_n(X^p, X^0) = 0$$

que $H_n(X^p) = 0$. ■

Corolário 7.3. $H_n(X, X^q) = 0$ para $q \geq n$.

Demonstração. Tome $p \geq q$ grande o suficiente para que tenhamos $X = X^p$ e aplique o lema. Recorde que um tal p existe pois X é um CW-complexo finito. ■

Corolário 7.4. Para $r > n$, $X^r \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo $H_n(X^r) \cong H_n(X)$.

Demonstração. A afirmação é imediata do corolário anterior aplicado à sequência exata de homologia do par (X, X^r) , que fica sendo

$$0 = H_{n+1}(X, X^r) \longrightarrow H_n(X^r) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, X^r) = 0.$$

Lema 7.4. Para $r > n$ e $n \geq q$, a inclusão $(X^r, X^q) \hookrightarrow (X, X^q)$ induz um isomorfismo $H_n(X^r, X^q) \cong H_n(X, X^q)$.

Demonstração. Como $r \geq n + 1$, o corolário 7.3 nos dá $H_n(X, X^r) \cong H_n(X, X^r) = 0$, e a afirmação segue desse fato aplicado à sequência exata de homologia da tripla (X, X^r, X^q) , que fica sendo

$$0 = H_{n+1}(X, X^r) \longrightarrow H_n(X^r, X^q) \longrightarrow H_n(X, X^q) \longrightarrow H_n(X, X^r) = 0.$$

■

O próximo resultado, o qual estamos finalmente em condições de provar, revela a conexão inesperada e brutalmente poderosa entre os complexos singular e celular de X , e configura o objetivo central desta seção. No que se segue, α_n denota $|\mathcal{L}_n|$.

Teorema 7.1. $H_n(K_*(X, \mathcal{L})) \cong H_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. O diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & & & & H_n(X^{n-2}) = 0 \\
 & & \downarrow \partial & \searrow \partial_{n+1} & & & \downarrow \\
 0 = H_n(X^{n-1}) & \longrightarrow & H_n(X^n) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\psi} & H_{n-1}(X^{n-1}) \\
 & & \downarrow & & \searrow \partial_n & & \downarrow \\
 & & H_n(X^{n+1}) & & & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H_n(X^{n+1}, X^n) & & & &
 \end{array}$$

possui linhas e colunas exatas. Portanto,

$$\begin{aligned}
 H_n(X) &\cong H_n(X^{n+1}) \\
 &\cong H_n(X^n) / \partial H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\
 &\cong i_* H_n(X^n) / i_* \partial H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\
 &= \ker \psi / \partial_{n+1} H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \\
 &= \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1} \\
 &= H_n(K_*(X, \mathcal{L})),
 \end{aligned}$$

como desejado. ■

Exemplo 7.2. Em S^n , $n \geq 2$, considere a decomposição celular \mathcal{L} com $\alpha_0 = \alpha_n = 1$ e $\alpha_j = 0$ para $j \neq 0, n$. Pelo que vimos anteriormente, a sequência do complexo celular $(K_*(S^n, \mathcal{L}))$ fica sendo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow K_n = R \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K_0 = R.$$

Nesse caso, a abundância de zeros na sequência nos permite recuperar facilmente, a partir do teorema anterior, o fato de que

$$H_j(S^n) \cong H_j(K_*(S^n, \mathcal{L})) = \begin{cases} R & j = 0, n \\ 0, & j \neq 0, n. \end{cases}$$

Exemplo 7.3. Em $\mathbb{C}P^n$, considere a decomposição \mathcal{L} com $\alpha_0 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2n} = 1$ e $\alpha_j = 0$ para outros j 's. Assim sendo, o complexo celular de $(\mathbb{C}P^n, \mathcal{L})$ fica como

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow K_{2n} = R \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_3 = 0 \longrightarrow K_2 = R \longrightarrow K_1 = 0 \longrightarrow K_0 = R.$$

Novamente, como cada termo não nulo na sequência se vê rodeado de zeros, obtemos

$$H_j(\mathbb{C}P^n) \cong H_j(K_*(\mathbb{C}P^n, \mathcal{L})) = \begin{cases} R & j = 0, 2, \dots, 2n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os dois exemplos acima servem para ilustrar a efetividade imediata que o teorema 7.1 possui na realização do cálculo do complexo singular de um CW-complexo finito, no sentido em que recupera resultados já obtidos de forma mais direta, ao passo que alcança toda uma nova classe de espaços, potencialmente realizando cálculos inéditos. No entanto, os casos aqui apresentados dependem fortemente da abundância de zeros no complexo celular, fenômeno este que de forma alguma é recorrente. Felizmente, tal dificuldade poderá ser contornada conforme desenvolvamos mais profundamente nossas ferramentas.

7.3 Números de Betti e Característica de Euler

Nesta seção, nos desviaremos brevemente do nosso objetivo de calcular a homologia do complexo celular para apresentar um invariante característico de espaços que admitem decomposição CW finita. Com efeito, no que se segue, R será um corpo.

Definição 7.4. A dimensão $b_j(X; R) := \dim_R H_j(X; R)$ será dita o j -ésimo número de Betti de X sobre R .

Definição 7.5. A série $\chi(X; R) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j b_j(X; R)$ é definida como a *característica de Euler* de X sobre R .

Agora, considere (X, \mathcal{Z}) um CW-complexo finito e faça $\alpha_j := |\mathcal{Z}_n|$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} b_j(X; R) &= \dim_R H_j(X; R) = \dim_R H_j(K_*(X, \mathcal{Z})) \\ &= \dim_R \frac{\ker \partial_j: K_j(X, \mathcal{Z}) \rightarrow K_{j-1}(X, \mathcal{Z})}{\operatorname{im} \partial_{j+1}: K_{j+1}(X, \mathcal{Z}) \rightarrow K_j(X, \mathcal{Z})} \\ &\leq \dim_R \ker \partial_j: K_j(X, \mathcal{Z}) \rightarrow K_{j-1}(X, \mathcal{Z}) \\ &\leq \dim_R K_j(X, \mathcal{Z}) = \alpha_j, \end{aligned}$$

de sorte que $b_j(X; R) < \infty$ para cada j e $\chi(X; R)$ está bem definida.

Lema 7.5. Se (V_i, α_i) é um complexo de espaços vetoriais com dimensão finita sobre R verificando $V_j = 0$ para $j > n$ ou $j < 0$, então

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_R H_j(V_*) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_R V_j.$$

Demonstração. Calculamos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_R V_j &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\dim_R \operatorname{im} \alpha_j + \dim_R \ker \alpha_j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\dim_R \ker \alpha_j - \dim_R \operatorname{im} \alpha_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_R \frac{\ker \alpha_j}{\operatorname{im} \alpha_{j+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_R H_j(V_*). \end{aligned}$$

Corolário 7.5. $\chi(X; R) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \alpha_j$.

Demonstração. Aplicamos o lema anterior para $V_j = K_j(X, \mathcal{Z}) \cong R^{\alpha_j}$.

Observe que o termo à direita não depende do corpo de coeficientes R , de modo que podemos escrever $\chi(X) := \chi(X; R)$. Mais que isso, embora a característica de Euler possa ser calculada via uma decomposição finita do espaço, sua definição original não depende de forma alguma de qualquer eventual estrutura CW. Dessa forma, a soma

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \alpha_j$$

permanece constante entre todas as possíveis decomposições CW para X , um fato tanto quanto fortuito. A seguir, utilizamos o último corolário para calcular a característica de Euler de alguns espaços conhecidos.

Exemplo 7.4. Em S^n , $n \geq 2$, considere a decomposição celular \mathcal{L} com $\alpha_0 = \alpha_n = 1$ e $\alpha_j = 0$ para $j \neq 0, n$. Temos

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{de } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Observe que o caso $n = 2$ contém a fórmula de Euler clássica para poliedros convexos. Para ver isso, dilate o poliedro em questão até que a superfície do mesmo seja aquela de uma 2-esfera. Daí os vértices, as arestas e as faces induzirão naturalmente uma decomposição CW em S^2 e teremos

$$\#\text{vértices} - \#\text{arestas} + \#\text{faces} = \chi(S^2) = 2.$$

Exemplo 7.5. Em $\mathbb{C}P^n$, considere a decomposição com $\alpha_0 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2n} = 1$ e $\alpha_j = 0$ para outros j 's. Daí, $\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$ para todo n . Quanto à $\mathbb{R}P^n$, temos uma decomposição celular com $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 1$ e $\alpha_j = 0$ para outros j 's, de sorte que

$$\chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{de } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Encerremos pontuando que a importância da característica de Euler se mostra bem mais profunda do que talvez tenhamos transparecido. Com efeito, recordamos aqui o Teorema de Gauss-Bonet, resultado este que estabelece um elo substancial entre geometria e topologia, no qual a característica de Euler protagoniza um papel fundamental.

7.4 Números de Incidência

Na seção que encerra esse trabalho, apresentaremos a ferramenta mais poderosa que teremos em mãos para o cálculo de módulos de homologia singular. Nos referimos ao entendimento dos operadores de bordo $\partial_{n+1} : K_{n+1}(X, \mathcal{Z}) \rightarrow K_n(X, \mathcal{Z})$ via *matrizes de incidência*, objeto este que definiremos a seguir. Como veremos, o estudo de tal aparato nos permitirá calcular a homologia de inúmeras variedades topológicas aqui apresentadas, fornecendo o golpe de misericórdia na determinação de orientabilidade no caso conexo e compacto. Com efeito, sejam R um anel comutativo com unidade e (X, \mathcal{Z}) um CW-complexo finito. Para $n = 0$, vemos de

$$\begin{array}{ccc}
 K_1(X, \mathcal{Z}) & \xrightarrow{\partial_1} & K_0(X, \mathcal{Z}) \\
 \cong & & \cong \\
 H_1(X^1, X^0) & \xrightarrow{\quad} & H_0(X^0) \\
 \cong & & \cong \\
 \bigoplus_{f \in \mathcal{Z}_1} H_1(\varphi_f)(H_1(D^1, S^0)) & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_0} H_0(\{e\}) \\
 \cong & & \cong \\
 \bigoplus_{f \in \mathcal{Z}_1} R & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_0} R
 \end{array}$$

que ∂_1 é dado por uma matriz $(\partial_e^f)_{(\alpha_0 \times \alpha_1)}$, onde $e \in \mathcal{Z}_0$ e $f \in \mathcal{Z}_1$, a qual chamaremos de *matriz de incidência* de ∂_1 . Nesse caso, é fácil calcular as entradas ∂_e^f . De fato, um gerador de $H_1(D^1, S^0) \cong R$ pode ser representado por $c : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $t \mapsto 2t - 1$. Daí,

$$\partial_1 H_1(\varphi_f)[c] = \partial_1[\varphi_f \circ c] = \varphi_f(c(1)) - \varphi_e(c(0)) = \varphi_f(1) - \varphi_f(0).$$

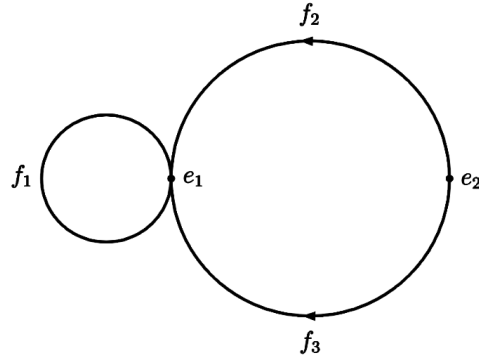
Portanto, a análise se reduz a dois casos. Primeiramente, se $\varphi_f(1) = \varphi_f(0)$, então $\partial_e^f = 0$. Por outro lado, se $\varphi_f(1) \neq \varphi_f(0)$, então

$$\partial_e^f = \begin{cases} 1, & \text{se } e = \varphi_f(1) \\ -1, & \text{se } e = \varphi_f(-1) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e temos um completo entendimento do operador ∂_1 .

Exemplo 7.6. Considere o CW-complexo X ilustrado abaixo com a decomposição \mathcal{Z} indicada. Obviamente, $\partial_{e_1}^{f_1} = \partial_{e_2}^{f_1} = 0$. Com as aplicações características indicadas, temos $\partial_{e_1}^{f_2} = \partial_{e_1}^{f_3} = 1$ e $\partial_{e_2}^{f_2} = \partial_{e_2}^{f_3} = -1$. O complexo celular fica sendo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow R^3 \xrightarrow{\partial_1} R^2,$$



e a matriz de incidência de ∂_1 determinada por $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{im } \partial_1 &= \text{im} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \{(\alpha, -\alpha) : \alpha \in R\} \cong R, \\ \text{ker } \partial_1 &= \text{ker} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \{(\alpha, \beta, -\beta) : \alpha, \beta \in R\} \cong R^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} H_0(X; R) &\cong H_0(K_*(X, \mathcal{Z}); R) = R^2 / \text{im } \partial_1 \cong R^2 / R \cong R, \\ H_1(X; R) &\cong H_1(K_*(X, \mathcal{Z}); R) = \text{ker } \partial_1 / \{0\} \cong R^2 / \{0\} \cong R^2, \\ H_n(X; R) &\cong H_n(K_*(X, \mathcal{Z}); R) = \text{ker } \partial_n / \text{im } \partial_{n+1} \cong \{0\} / \{0\} \cong 0, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$H_n(X; R) = \begin{cases} R, & n = 0 \\ R^2, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

O caso $n \geq 1$ é significativamente mais complicado. Novamente, considere

$$\begin{array}{ccc} K_{n+1}(X, \mathcal{Z}) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & K_n(X, \mathcal{Z}) \\ \parallel & & \parallel \\ H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H_n(X^n, X^{n-1}) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_n} H_{n+1}(\varphi_e)(H_{n+1}(D^{n+1}, S^n)) & \rightarrow & \bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_n} H_n(\varphi_e)(H_n(D^n, S^{n-1})) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{f \in \mathcal{Z}_{n+1}} R & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \bigoplus_{e \in \mathcal{Z}_n} R \end{array}$$

Portanto, ∂_{n+1} será dado por uma matriz $(\partial_e^f)_{(\alpha_n \times \alpha_{n+1})}$, também denominada como *matriz de incidência* de ∂_{n+1} , onde $e \in \mathcal{Z}_n$ e $f \in \mathcal{Z}_{n+1}$, cujas entradas ∂_e^f serão ditas os *números de incidência* de ∂_{n+1} . Queremos calculá-los.

Definição 7.6. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$ um subconjunto fechado não-vazio. Dizemos que (X, A) é um *bom par* se existe um aberto $U \subset X$ contendo A de sorte que A é retrato de deformação de U .

Exemplo 7.7. (X^{n+1}, X^n) e (D^{n+1}, S^n) são bons pares. De fato, tome $\dot{X}^{n+1} \supset X^n$ e $\dot{D}^{n+1} \supset S^n$ como os abertos requeridos.

Lema 7.6. *Seja (X, A) um bom par. Então $H_n(X, A) \cong H_n(X/A, A/A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Tome um aberto $U \subset X$ tal que $A \subset U$ e A é retrato de deformação de U . Considere o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccccc} (X, A) & \longleftarrow & (X, U) & \longleftarrow & (X \setminus A, U \setminus A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (X/A, A/A) & \longleftarrow & (X/A, U/A) & \longleftarrow & (X/A \setminus A/A, U/A \setminus A/A) \end{array}$$

Note que, se as setas verticais todas representam a projeção ao quociente, as duas setas horizontais à esquerda são equivalências homotópicas entre pares, enquanto as da esquerda são excisões. Observe ainda que a projeção mais à esquerda é na verdade um homeomorfismo. Portanto, em homologia temos

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X, U) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X \setminus A, U \setminus A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X/A, U/A) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X/A \setminus A/A, U/A \setminus A/A) \end{array}$$

Daí, vemos que $H_n(X, A) \cong H_n(X/A, A/A)$. ■

Corolário 7.6. *Se (X, A) é um bom par, então $H_n(X, A) \cong H_n(X/A)$ para $n > 0$.*

Demonstração. Imediato do lema acima e do exemplo 5.3. ■

Finalmente estamos em condições de computar os números de incidência de ∂_{n+1} . Como veremos a seguir, realizaremos esse feito em termos do grau das aplicações Δ_e^f que definiremos abaixo. A partir do próximo resultado, teremos à nossa disposição um dispositivo geométrico e razoavelmente prático para o cálculo do complexo celular de CW-complexos finitos. Com efeito, enunciamos

Proposição 7.1. $\partial_e^f = \deg \Delta_e^f$, onde Δ_e^f é o mapa $S^n \rightarrow X^n \rightarrow S^n$ obtido ao se compor a aplicação de adesão de f com o mapa quociente que colapsa $X^n \setminus e$ a um ponto.

Demonstração. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\partial} & H_n(S^n) & \xrightarrow{\Delta_e^f} & H_n(S^n) \cong H_n(D^n/S^{n-1}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(D^n, S^{n-1}) \\
 \downarrow H_{n+1}(\varphi_f) & & \downarrow H_n(\varphi_f|_{S^n}) & & \downarrow H_n(q_e) \uparrow H_n(\tilde{\varphi}_e) & & \downarrow H_n(\varphi_e) \\
 H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{\partial} & H_n(X^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X^n/X^{n-1}) & & \\
 \searrow \partial_{n+1} & & \downarrow j_* & \nearrow \cong & \xleftarrow{\pi_e} & & \\
 & & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(\varphi_e)(H_n(D^n, S^{n-1})) & &
 \end{array}$$

onde $j_* : H_n(X^n) \rightarrow H_n(X^n, X^{n-1})$ é a aplicação em homologia induzida pela inclusão $(X^n, \emptyset) \hookrightarrow (X^n, X^{n-1})$, $q_e : X^n/X^{n-1} \rightarrow D^n/S^{n-1}$ colapsa o complemento da célula e a um ponto enquanto identifica o quociente resultante com $S^n = D^n/S^{n-1}$ via a aplicação característica φ_e , e os isomorfismos $H_n(X^n, X^{n-1}) \cong H_n(X^n/X^{n-1})$ e $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong H_n(D^n/S^{n-1})$ são aqueles descritos no corolário 7.6. Observe que, no diagrama acima, o colapso de $X^n \setminus e$ é dividido em duas etapas: a trivialização do $n - 1$ -esqueleto X^{n-1} no quociente X^n/X^{n-1} seguido da contração das demais células em X^n , à exceção de e , a um mesmo ponto. A necessidade desse ato será evidenciada a seguir. Com efeito, seja $\alpha \in H_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$ tal que $\partial\alpha = 1 \in H_n(S^n) \cong R$ ($\partial : H_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\sim} H_n(S^n)$). Assim, $H_{n+1}(\varphi_f)$ mapeia α num gerador do somando direto de R 's correspondente à célula f . Aqui identificaremos as células e e f com os geradores nas correspondentes somas diretas do complexo celular. Daí, a comutatividade da metade esquerda do diagrama nos dá $\partial_{n+1}f = j_*H_n(\varphi_f|_{S^n})\partial\alpha$. Em termos de bases para o módulo livre $H_n(X^n, X^{n-1})$ correspondendo às células $e \in \mathcal{Z}_n$, a aplicação $H_n(q_e)$ é a projeção de $H_n(X^n/X^{n-1})$ sobre a componente R correspondente à célula e . Dessa forma, temos

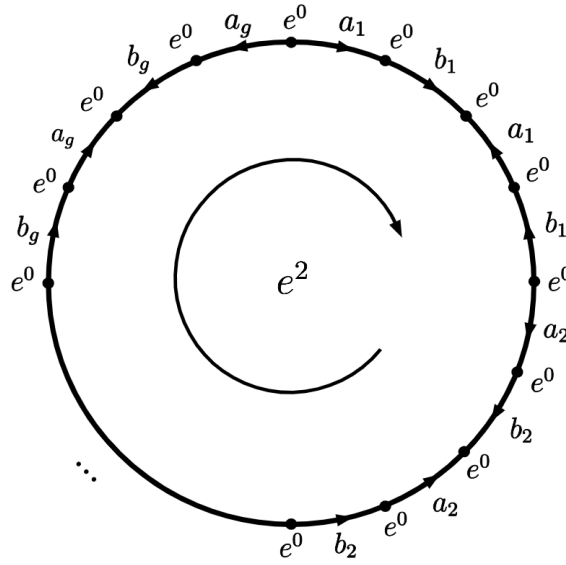
$$\partial_e^f \cdot 1 = \pi_e(\partial_{n+1}f) = \pi_e(j_*H_n(\varphi_f|_{S^n})\partial\alpha) = \Delta_e^f(\partial\alpha),$$

e obtemos $\partial_e^f = \text{deg } \Delta_e^f$ como desejado. ■

No que fizemos acima, note que se uma célula $e \in \mathcal{Z}_n$ não compõe o bordo de uma outra célula $f \in \mathcal{Z}_{n+1}$, a aplicação Δ_e^f se reduz a uma contração a um ponto, de sorte que $\partial_e^f = 0$ nesse caso. Mais que isso, se $R = \mathbb{Z}$, o número de incidência ∂_e^f indica quantas vezes e em qual sentido o bordo de f percorre a célula e . É a partir dessa observação que realizaremos a maioria dos cálculos de números de incidência nos exemplos a seguir.

Exemplo 7.8. *Superfícies fechadas e orientadas F_g .* Em F_g , considere a decomposição celular com uma 0-célula, $2g$ 1-células e uma 2-célula, e as aplicações características indicadas abaixo. O complexo celular fica sendo

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}$$



Aqui, $\partial_1 \equiv 0$, pois, havendo somente uma 0-célula, teremos $\varphi_{a_i}(1) = e^0 = \varphi_{a_i}(-1)$ (e $\varphi_{b_i}(1) = e^0 = \varphi_{b_i}(-1)$) para cada $i = 1, 2, \dots, g$. Além disso, também temos $\partial_2 \equiv 0$, visto que cada a_i (e b_i) compõe o bordo de e^2 sempre acompanhado de seu inverso, de sorte que $\partial_{a_i}^{e^2} = \partial_{b_i}^{e^2} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, g$. Portanto,

$$\begin{aligned} H_0(F_g; \mathbb{Z}) &\cong H_0(K_*(F_g, \mathcal{L}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\text{im } \partial_1 = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}, \\ H_1(F_g; \mathbb{Z}) &\cong H_1(K_*(F_g, \mathcal{L}); \mathbb{Z}) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 = \mathbb{Z}^{2g} / \{0\} = \mathbb{Z}^{2g}, \\ H_2(F_g; \mathbb{Z}) &\cong H_2(K_*(F_g, \mathcal{L}); \mathbb{Z}) = \ker \partial_2 / \text{im } \partial_3 = \mathbb{Z} / \{0\} = \mathbb{Z}, \\ H_n(F_g; \mathbb{Z}) &\cong H_n(K_*(F_g, \mathcal{L}); \mathbb{Z}) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1} = \{0\} / \{0\} = 0, \quad n > 2. \end{aligned}$$

Logo, obtemos

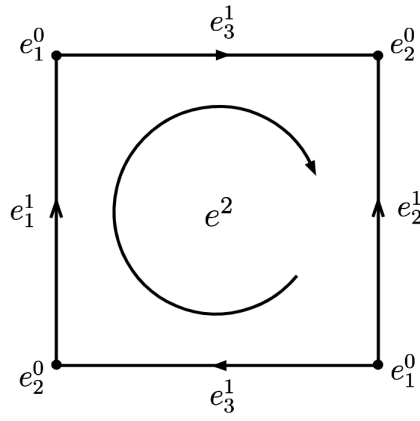
$$H_n(F_g; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & n = 1, \\ \mathbb{Z}, & n = 2, \\ 0, & n > 2. \end{cases}$$

Exemplo 7.9. Faixa de Möbius. Em \mathcal{M} , considere a decomposição celular abaixo com as aplicações características indicadas. O complexo celular fica sendo

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^2$$

Quanto aos números de incidência, vemos que $\partial_{e_1^1}^{e_1^1} = 1$, $\partial_{e_2^1}^{e_1^1} = -1$, $\partial_{e_1^0}^{e_2^1} = -1$, $\partial_{e_2^0}^{e_2^1} = 1$, $\partial_{e_0^1}^{e_3^1} = -1$, $\partial_{e_2^1}^{e_3^1} = 1$, $\partial_{e_1^2}^{e_2^2} = 1$, $\partial_{e_2^2}^{e_2^2} = -1$ e $\partial_{e_3^2}^{e_2^2} = 2$, de modo que as matrizes de incidência

de ∂_1 e ∂_2 são dadas por $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, respectivamente.



Portanto,

$$\begin{aligned} \text{im } \partial_1 &= \text{im} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \{(\alpha, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}, \\ \text{ker } \partial_1 &= \text{ker} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \{(\alpha, \beta, \alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2, \\ \text{im } \partial_2 &= \text{im} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \{(\alpha, -\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}, \\ \text{ker } \partial_2 &= \text{ker} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \{0\}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} H_0(\mathcal{M}; \mathbb{Z}) &\cong H_0(K_*(\mathcal{M}, \mathcal{X}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 / \text{im } \partial_1 \cong \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \\ H_1(\mathcal{M}; \mathbb{Z}) &\cong H_1(K_*(\mathcal{M}, \mathcal{X}); \mathbb{Z}) = \text{ker } \partial_1 / \text{im } \partial_2 \cong \mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \\ H_2(\mathcal{M}; \mathbb{Z}) &\cong H_2(K_*(\mathcal{M}, \mathcal{X}); \mathbb{Z}) = \text{ker } \partial_2 / \text{im } \partial_3 = \{0\} / \{0\} = 0, \\ H_n(\mathcal{M}; \mathbb{Z}) &\cong H_n(K_*(\mathcal{M}, \mathcal{X}); \mathbb{Z}) = \text{ker } \partial_n / \text{im } \partial_{n+1} = \{0\} / \{0\} = 0, \quad n > 2. \end{aligned}$$

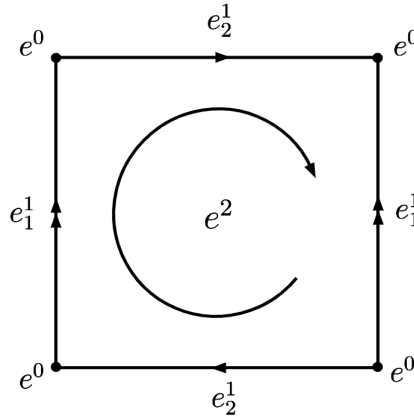
Logo, temos

$$H_n(\mathcal{M}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 7.10. *Garrafa de Klein.* Em \mathcal{K} , considere a decomposição celular abaixo com as aplicações características indicadas. O complexo celular fica sendo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}$$

Quanto aos números de incidência, temos que $\partial_{e_1^1}^{e_1^0} = 0$, $\partial_{e_2^1}^{e_2^0} = 0$, $\partial_{e_1^1}^{e_2^1} = 2$ e $\partial_{e_2^1}^{e_1^1} = 0$.



Assim, as matrizes de incidência de ∂_1 e ∂_2 são dadas por $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto,

$$\text{im } \partial_1 = \text{im} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \{0\},$$

$$\text{ker } \partial_1 = \text{ker} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{Z}^2,$$

$$\text{im } \partial_2 = \text{im} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \{(2\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z} \oplus \{0\},$$

$$\text{ker } \partial_2 = \text{ker} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \{0\}.$$

Daí, obtemos

$$H_0(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \cong H_0(K_*(\mathcal{X}, \mathcal{L}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\text{im } \partial_1 \cong \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z},$$

$$H_1(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \cong H_1(K_*(\mathcal{X}, \mathcal{L}); \mathbb{Z}) = \text{ker } \partial_1 / \text{im } \partial_2 \cong \mathbb{Z}^2 / 2\mathbb{Z} \oplus \{0\} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2,$$

$$H_2(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \cong H_2(K_*(\mathcal{X}, \mathcal{L}); \mathbb{Z}) = \text{ker } \partial_2 / \text{im } \partial_3 = \{0\} / \{0\} = 0,$$

$$H_n(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \cong H_n(K_*(\mathcal{X}, \mathcal{L}); \mathbb{Z}) = \text{ker } \partial_n / \text{im } \partial_{n+1} = \{0\} / \{0\} = 0, \quad n > 2.$$

Logo, temos

$$H_n(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 7.11. *Espaços reais projetivos.* Considere $\mathbb{R}P^n$ com a decomposição *CW* consistindo de uma única célula e^k em cada dimensão $k \leq n$ cujas aplicações características são aquelas indicadas no item (viii) do exemplo 7.1. Convidamos o leitor a notar que as aplicações de adesão $\varphi_{e^k}|_{S^{k-1}} : S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1} = X^{k-1}$ serão recobrimentos de duas folhas. Para compreender o operador de bordo ∂_k , devemos computar o grau da composição

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi_{e^k}|_{S^{k-1}}} \mathbb{R}P^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} = S^{k-2},$$

Orientáveis	Não-orientáveis
$\mathbb{R}^n, n \geq 1$	\mathcal{M}
$S^n, n \geq 1$	\mathcal{K}
$F_g, g \geq 1$	$\mathbb{R}P^n, n$ par
$\mathbb{R}P^n, n$ ímpar	
$\mathbb{C}P^n, n \geq 1$	

Capítulo 8

Considerações finais

Enfim, chegamos a uma conclusão para este trabalho. Tendo obtido a divisão das variedades aqui apresentadas entre orientáveis e não-orientáveis acima, vemos atingido, ao menos por agora, o interesse mor do autor no que tange orientação e orientabilidade em variedades topológicas. Recordamos que o enfoque em orientação (\mathbb{Z} -orientação) em vez de abordar R -orientação em toda sua generalidade nas seções que seguem a 6.2 é bem menos restritivo do que possa parecer. Em verdade, já fora comentado que o teorema dos coeficientes universais, nativo da álgebra homológica, é o aparato que reduz a homologia sobre um anel R arbitrário ao produto tensorial entre homologia integral (sobre \mathbb{Z}) e o anel em questão. Assim, mesmo que já tenhamos tido o suficiente de orientação e orientabilidade por ora, no que tange a teoria circundante a estes conceitos quem vos escreve está longe de ter acabado. É seguro dizer que o presente trabalho serviu como porta de entrada e estudo direcionado para o que virá a se mostrar necessário como base em futuros estudos em topologia algébrica. O autor se vê na eminência de uma pós-graduação, e comemora a oportunidade de dar prosseguimento ao estudo da teoria que foi ao mesmo tão belamente apresentada, apresentação esta que aqui está concretizada. Enfim, encerramos este trabalho com satisfação, e por último recordamos a fala que iniciou esta monografia, com o sentimento de que aquele senso de curiosidade fora correspondido, e agora, ao final desta empreitada, vê-se renovado.

Referências Bibliográficas

- [1] BREDON, G. E. *Topology and geometry*. Graduate Texts in Mathematics. 139. New York: Springer-Verlag, 557 p. **1993**.
- [2] CREMASCO, V. A. *O Grupo Fundamental, Espaços de Recobrimento e aplicações*. Relatório Final de Iniciação Científica, São Carlos, UFSCar, **2024**.
- [3] CROOM, F., *Basic Concepts of Algebraic Topology*. Springer-Verlag, N.Y., **1978**.
- [4] GREENBERG, M. J.; Harper, John R. *Algebraic topology: a first course*. Mathematics Lecture Note Series, 58. The Benjaming/Cummings Publishing Company 311 p., **1981**.
- [5] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, **2002**
- [6] HILTON, P. J.; STAMMBACH, U. *A Course in Homological Algebra – 2 ed.* Graduate Texts in Mathematics, 4. Springer, New York **1997**.
- [7] KOSNIOWSKI, C. *A first course in algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, **1980**.
- [8] LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, New York. **2000**.
- [9] LIMA, E. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro, IMPA, **2006**.
- [10] MUNKRES, James R., *Topology. 2nd ed.* Prentice Hall, 537 p. **2000**.