



**Universidade Federal de São Carlos**

*Campus Sorocaba*

Centro de Ciências e Tecnologias para a Sustentabilidade

Licenciatura em Matemática

Pedro Henrique Cardoso

**Aplicação de Otimização Não-Linear para a Modelagem de  
uma Carteira de Investimentos**

Sorocaba - SP

2025

Pedro Henrique Cardoso

## **Aplicação de Otimização Não-Linear para a Modelagem de uma Carteira de Investimentos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba, para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Orientador:** Dr. Sadao Massago

Departamento de Física, Química e Matemática (DFQM)

**Coorientadora:** Dra. Anielia Fagundes Carrara

Departamento de Economia (DEc)

Sorocaba - SP

2025

Cardoso, Pedro Henrique

Aplicação de Otimização Não-Linear para a Modelagem  
de uma Carteira de Investimentos / Pedro Henrique  
Cardoso -- 2025.  
102f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos,  
campus Sorocaba, Sorocaba  
Orientador (a): Sadao Massago  
Banca Examinadora: Aniela Fagundes Carrara, Geraldo  
Edmundo Silva Júnior, Graciele Paraguaia Silveira, Paulo  
César Oliveira,  
Bibliografia

1. Carteira de Investimentos. 2. Otimização Não-Linear.  
3. Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. I.  
Cardoso, Pedro Henrique. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática  
(SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano -  
CRB/8 6979



**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

**COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE SOROCABA - CCML-So/CCTS**

Rod. João Leme dos Santos km 110 - SP-264, s/n - Bairro Itinga, Sorocaba/SP, CEP 18052-780

Telefone: (15) 32298874 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 2/2025/CCML-So/CCTS

**Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso**

**Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)**

## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**PEDRO HENRIQUE CARDOSO**

**APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR PARA A MODELAGEM DE UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba**

Sorocaba, 24 de julho de 2025

### **ASSINATURAS E CIÊNCIAS**

<b>Cargo/Função</b>	<b>Nome Completo</b>
Orientador	Prof. Dr. Sadao Massago
Coorientadora	Profa. Dra. Aniela Fagundes Carrara
Membro da Banca 1	Prof. Dr. Geraldo Edmundo Silva Júnior
Membro da Banca 2	Profa. Dra. Graciele P. Silveira

Cargo/Função	Nome Completo
Membro da Banca 3	Prof. Dr. Paulo César Oliveira



Documento assinado eletronicamente por **Graciele Paraguaia Silveira, Docente**, em 24/07/2025, às 16:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aniela Fagundes Carrara, Professor(a) do Ensino Superior**, em 24/07/2025, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sadao Massago, Docente**, em 24/07/2025, às 17:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Edmundo Silva Junior, Professor(a) do Ensino Superior**, em 25/07/2025, às 14:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Cesar Oliveira, Docente**, em 25/07/2025, às 16:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **1890881** e o código CRC **0708A3DD**.

Referência: Caso responda a este documento, indicar expressamente o Processo nº 23112.020289/2025-88

SEI nº 1890881

Modelo de Documento: Grad: Defesa TCC: Folha Aprovação, versão de 02/Agosto/2019

## ***Dedicatória***

*Dedico esse trabalho ao meu amado pai, **Alécio Cardoso**, e a minha querida tia, **Silvia Ubucata**. Infelizmente vocês me deixaram muito cedo! Sou imensamente grato pelos lindos ensinamentos que aprendi com ambos! É imensa a saudade! Vocês fazem uma enorme falta em minha vida, mas gosto de pensar que de algum lugar celestial, vocês devem estar imensamente felizes por mais essa conquista!*

*Dedico também a todas as crianças adultas que, quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas!*

# **Agradecimentos**

*Em primeiro lugar, agradeço a **Deus** por mais essa grande conquista! Obrigado por me conceder serenidade nos momentos difíceis, por me acalmar nas horas de tristeza e ansiedade, e por ter me guiado em cada etapa deste percurso. Sou profundamente grato pelas portas que me foram abertas ao longo da graduação. Sem Tua presença constante, nada disso seria possível.*

## **À minha família:**

*À minha mãe, **Karine Ferreira Cardoso**, minha eterna base e maior apoiadora. Obrigado pelo seu amor incondicional e pelo apoio em todos os momentos em que precisei. À minha avó materna, **Carmela Barros Ferreira** (minha segunda mãe!), que cuidou de mim com tanto carinho durante todo esse processo, minha gratidão eterna!*

*As minhas tias, **Ismênia (Tia Nena)**, **Rosana** e **Vanessa**, e ao meu **Tio Silvio**, por sempre me incentivarem e acreditarem em mim. Às minhas primas **Simone Ubucata** e **Fernanda Nobre**, e meu irmão, Soldado 1ª Classe **Lucas Rogério Cardoso**, pelo constante incentivo.*

*Aos meus queridos “irmãos de quatro patas”, os cães **Bebê** e **Snoopy**, e às gatinhas **Bella Elis**, **Giovanna (Gigi)** e **Katarina**, obrigado por fazerem companhia nas madrugadas solitárias de estudo e por me darem alegria nos momentos mais difíceis.*

## **Aos professores:**

*Ao Professor **Dr. Sadao Massago**, meu Orientador, pela paciência, generosidade, amizade e, principalmente, pelos ensinamentos que me marcaram profundamente. Agradeço por tantas horas de atenção dedicadas ao meu trabalho e por ser uma verdadeira inspiração. Foi uma grande honra, ser orientado pelo senhor! Gratidão por ter aceitado ingressar junto a mim em uma nova jornada, e ser meu Coorientador no Mestrado!*

*À Professora **Dra. Aniela Carrara**, minha Coorientadora, por sua atenção constante, gentileza e por ter sido fundamental no meu ingresso no Mestrado em Economia. Gratidão por sua dedicação e apoio durante a monografia, pelo grande auxílio na disciplina de Política Monetária e, principalmente, por ter aceitado ser minha Orientadora no Mestrado! Só tenho a agradecer!*

*Ao Professor **Dr. Paulo César Oliveira**, meu grande mestre da Educação Matemática e parceiro de pesquisa, por acreditar em mim desde o primeiro dia de aula. Agradeço imensamente por fazer parte desta banca e, pelo lindo artigo que publicamos juntos.*

À Professora **Dra. Graciele Paraguaia**, por sua generosidade, paciência e apoio ao longo do curso. Obrigado por acreditar no meu potencial e por aceitar integrar esta banca.

Ao Professor **Dr. Geraldo Edmundo**, meu agradecimento por ter aceitado compor a banca e por ter sido um mestre tão importante na reta final da graduação. Em especial, sou grato por ter me acolhido e auxiliado significativamente nas disciplinas do Mestrado.

Aos professores do Departamento de Matemática:

- **Dra. Deisemara Ferreira**, por sempre ser extremamente solícita, pelas brilhantes aulas de Pesquisa Operacional, e principalmente pelo apoio nessa reta final do curso e pelas oportunidades concedidas a mim;
- **Dra. Ana Mereu**, por sempre ser extremamente gentil e por ter me ajudado nas monitorias;
- **Dr. Antônio Venezuela**, pela paciência e gentileza durante o curso;
- **Dra. Renata Prensteter Gama**, pelas inspiradoras aulas de Educação Matemática e os conselhos generosos fornecidos a mim;
- **Dra. Magda Peixoto**, por sua dedicação, pelas oportunidades que a senhora me concedeu de crescimento, pelos convites e pela confiança dados a mim para ministrar palestras para as turmas de Mestrado, e por despertar em mim o gosto pela ciência.

Agradeço também aos professores de outros departamentos, em especial à professora de Física, **Dra. Adriana Delgado**, por sua gentileza e paciência, por sua ajuda nas disciplinas, pelos conselhos e por sempre me incentivar.

À Universidade Estadual Paulista (UNESP) Campus Sorocaba, deixo minha gratidão, em nome da querida Professora **Dra. Maria Lúcia Pereira (Malu)**, pela acolhida generosa, pela oportunidade de cursar um semestre como aluno especial e por sempre me incentivar em prosseguir na vida acadêmica.

Aos professores **MSc. Renato Mello** e **Dra. Bruna Lamoglia**, do Instituto Federal de São Paulo (IFSP) Campus Salto, meu sincero agradecimento pela recepção calorosa e por me acolherem como aluno especial.

*Aos professores da ETEC de Votorantim, onde cursei o ensino médio, minha sincera gratidão por todo o ensino e por me receberem de maneira extremamente gentil para realizar meus estágios, e pela oportunidade de retornar como docente. Em especial, agradeço aos meus queridos professores de Matemática, **Luciá Piacetelli** e **Marcos Cassar**, por terem despertado em mim o amor pela Matemática e pela docência. Seus ensinamentos foram fundamentais para que eu seguisse esse caminho com paixão e propósito.*

*À querida secretária de curso, **Rafaela Arakaki (Rafa)**, minha sincera gratidão pela ajuda constante, atenção e generosidade ao longo do curso. “Rafa, você é o coração deste curso!”*

### **Aos amigos:**

*Às amigas **Vitória Sauze**, **Láisa Carvalho**, **Gabriela Freire** e **Arlene Pereira**, manifesto minha gratidão pela amizade, generosidade e por estarem ao meu lado nos momentos mais difíceis. Vocês tornaram a jornada universitária muito mais leve. Aos amigos **Antônio dos Santos**, **Vagner Henrique** e **André Garrote**, obrigado pela parceria e companheirismo.*

*Aos colegas do Mestrado em Economia, especialmente ao NEA (Núcleo de Pesquisa em Economia Aplicada), e as colegas **Jéssica Souza**, **Melissa Yakabe (Mel)**, **Rebecca Dall’Oca** e **MSc. Anna Clara Boscolo** estendo minha gratidão pela amizade de vocês.*

*Também agradeço a amiga, **Dra. Mônica Pinheiro**, uma das minhas maiores referências em docência universitária, e minha primeira inspiração acadêmica.*

*E agradeço também, aqueles que não foram citados aqui, mas que contribuíram diretamente ou indiretamente para realização deste trabalho!*

*“Tudo posso naquele que me fortalece, naquele que guia meus passos, naquele que me levanta, tudo posso em ti ó Deus.”*

***Filipenses 4:13***

*“O bem sempre vence o mal. O mal vence por alguns minutos, por algum tempo. Mas o bem sempre vence o mal. E não teríamos razão para viver, mesmo que esta vida termine no pó, não teríamos nenhuma razão para viver se o mal vencesse o bem.”*

***Silvio Santos***

# Resumo

O presente trabalho teve como objetivo, a construção de uma carteira de investimentos formada por ativos negociados na B3 (Bolsa de Valores Brasileira) para o 2º semestre de 2025 (mais precisamente para o mês de Julho), utilizando como principal ferramenta, a Otimização Não-Linear e teorias do universo da Economia, em particular a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. A modelagem matemática resulta em um problema não linear, requerendo o uso da Programação Não-Linear para a otimização de um portfólio de investimentos, na qual a solução desse problema é fornecida por meio do Método do Gradiente e do Método de Newton, com o auxílio do *software* livre GNU Octave, compatível com MATLAB. Os ativos inseridos na pesquisa, se referem a uma análise do desempenho dos mesmos referente ao 2º semestre de 2024 e ao 1º semestre de 2025, na qual foram analisados os dez melhores ativos durante esse período, e selecionados os cinco ativos que apresentaram as melhores correlações. O trabalho também foi complementado com conceitos de Matemática Financeira e de alguns Parâmetros Estatísticos.

**Palavras-Chave:** Carteira de Investimentos; Otimização Não-Linear; Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz; Método do Gradiente; Método de Newton.

# Abstract

This work aimed to build an investment portfolio formed by assets traded on the B3 (Brazilian Stock Exchange) for the year 2025, using as the main tool, Nonlinear Optimization and theories from the world of Economics, in particular Markowitz's Modern Portfolio Theory. The mathematical modeling results in a nonlinear problem, requiring the use of Nonlinear Programming to optimize an investment portfolio, in which the solution to this problem is provided through the Gradient Method and Newton's Method, with the aid of the free software GNU Octave, compatible with MATLAB. The assets included in the research refer to an analysis of their performance for the second half of 2024 and the first half of 2025, in which the ten best assets during this period were analyzed, and the five assets that had the best correlations were selected. The work was also complemented with concepts of Financial Mathematics and some Statistical Parameters.

**Keywords:** Investment Portfolio; Nonlinear Optimization; Markowitz's Modern Portfolio Theory; Gradient Method; Newton's Method.

## Lista de Figuras

1	Albert Percival Rowe . . . . .	19
2	George Dantzig . . . . .	23
3	Função Objetivo do problema . . . . .	25
4	Região Factível do problema . . . . .	26
5	Forma Geral do problema . . . . .	26
6	Exemplos Geométricos do Conjunto Convexo e do Não-Convexo . . . . .	28
7	Função Estritamente Convexa . . . . .	29
8	Função Convexa . . . . .	29
9	Função Não-Convexa, e nem Côncava . . . . .	29
10	Função Diferenciável e Convexa . . . . .	32
11	Uma iteração do Método do Gradiente . . . . .	36
12	Uma iteração do Método de Newton para equações em $\mathbb{R}$ . . . . .	37
13	Harry Max Markowitz . . . . .	47
14	Risco e retorno de uma carteira de dois ativos em função da correlação. . . . .	50
15	Foto da fachada da B3 . . . . .	55

## Lista de Tabelas

1	Rendimento percentual mensal dos Ativos . . . . .	60
2	Rendimento percentual médio dos Ativos . . . . .	60
3	Correlação entre os Ativos . . . . .	61
4	Variância e Covariância entre os Ativos . . . . .	61
5	Correlação entre os cinco melhores ativos que estão em destaque . . . . .	62
6	Risco do ativo PETR4 (PETROBRÁS) . . . . .	62
7	Risco do ativo COGN3 (COGNA) . . . . .	63
8	Risco do ativo TIMS3 (TIM BRASIL) . . . . .	63
9	Risco do ativo TOTS3 (TOTVS) . . . . .	63
10	Risco do ativo SBSP3 (SABESP) . . . . .	63
11	Correlações entre os Ativos selecionados . . . . .	64
12	Média e Desvio-Padrão dos Ativos selecionados . . . . .	65
13	Parâmetros utilizados nos algoritmos . . . . .	69
14	Resultados fornecidos pelos algoritmos . . . . .	69
15	Solução Ótima fornecida pelos algoritmos . . . . .	69
16	Erro Relativo de cada método . . . . .	70

# Sumário

<b>1</b>	<b>Pesquisa Operacional</b>	<b>19</b>
1.1	Breve História da Pesquisa Operacional . . . . .	19
1.2	Modelagem Matemática . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Otimização Não-Linear</b>	<b>22</b>
2.1	Breve Histórico sobre a Otimização Linear e Não-Linear . . . . .	22
2.2	Problema de Otimização Não-Linear . . . . .	23
2.2.1	Exemplo de um Problema de Otimização Não-Linear . . . . .	25
2.3	Pontos Ótimos e Localmente Ótimos . . . . .	27
2.4	Características de um Problema de Otimização Não-Linear . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Convexidade</b>	<b>28</b>
3.1	Conjunto Convexo . . . . .	28
3.2	Funções Convexas . . . . .	28
3.3	Definições importantes de Análise no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	30
3.4	Condições de Otimalidade de Primeira Ordem . . . . .	32
3.5	Condições de Otimalidade de Segunda Ordem . . . . .	33
3.6	Problemas de Otimização Convexa . . . . .	33
3.7	Função Lagrangiana . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Alguns Métodos para a Resolução de Problemas de Otimização Não-Linear</b>	<b>35</b>
4.1	Método do Gradiente . . . . .	35
4.1.1	Algoritmo do Gradiente Puro . . . . .	35
4.2	Método de Newton . . . . .	36
4.2.1	Método de Newton para resolução de equações . . . . .	37
4.2.2	Método de Newton para Otimização Irrestrita . . . . .	38
4.2.3	Algoritmo de Newton . . . . .	38
4.3	Backtracking . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Conceitos de Economia</b>	<b>40</b>
5.1	Conceitos de Matemática Financeira . . . . .	40
5.2	Parâmetros Estatísticos . . . . .	42

<b>6</b>	<b>Teoria de Markowitz</b>	<b>46</b>
6.1	Biografia de Harry Markowitz . . . . .	46
6.2	O uso da Teoria de Markowitz . . . . .	47
6.2.1	Fronteira Eficiente . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Indicadores Econômicos</b>	<b>52</b>
7.1	Principais Indicadores Econômicos no Brasil . . . . .	52
7.2	Tipos de Investimentos . . . . .	53
7.2.1	Tipos de Ações . . . . .	54
7.2.2	Bolsa de Valores . . . . .	55
7.3	Breve panorama do cenário econômico para o Ano de 2025 . . . . .	55
7.4	Panorama dos Melhores Investimentos Econômicos para o Ano de 2025 . . . . .	56
<b>8</b>	<b>Carteira de Investimento</b>	<b>59</b>
8.1	Formação da Carteira de Investimentos . . . . .	60
8.2	Problema de Programação Não-Linear a ser Otimizado na perspectiva de um Investidor Moderado . . . . .	64
8.3	Resultados Obtidos e Comentários . . . . .	68
<b>9</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>72</b>
9.1	Algumas ideias para Trabalhos Futuros . . . . .	73
	<b>Referências</b>	<b>74</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Resolução do Portfólio</b>	<b>81</b>
A.1	SQP (Sequential Quadratic Programming) . . . . .	81
A.2	Newton Simples . . . . .	84
A.3	Gradiente com Backtracking . . . . .	87
A.4	Newton com Backtracking . . . . .	90
A.5	Newton com Lagrange . . . . .	93
<b>B</b>	<b>Métodos Implementados</b>	<b>96</b>
B.1	Cálculo do Gradiente . . . . .	96

B.2	Cálculo da Hessiana . . . . .	97
B.3	Método de Newton Simples . . . . .	98
B.4	Método do Gradiente com Backtracking . . . . .	99
B.5	Método de Newton com Backtracking . . . . .	100
<b>C</b>	<b>Função de Leitura</b>	<b>101</b>

## Introdução

O presente trabalho teve como objetivo, a construção de uma carteira de investimentos formada por ativos negociados na B3 (Bolsa de Valores Brasileira) para o 2º semestre de 2025 (mais precisamente para o mês de Julho), utilizando como principal ferramenta, a Otimização Não-Linear e teorias do universo da Economia, em particular a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. A modelagem matemática resulta em um problema não linear, requerendo o uso da Programação Não-Linear para a otimização de um portfólio de investimentos, na qual a solução desse problema é fornecida por meio do Método do Gradiente e do Método de Newton, com o auxílio do *software* livre GNU Octave, compatível com MATLAB. Os ativos inseridos na pesquisa, se referem a uma análise do desempenho dos mesmos referente ao 2º semestre de 2024 e ao 1º semestre de 2025, na qual foram analisados os dez melhores ativos durante esse período, e selecionados os cinco ativos que apresentaram as melhores correlações. O trabalho também foi complementado com conceitos de Matemática Financeira e de alguns Parâmetros Estatísticos.

O Capítulo 1 descreve as características da Pesquisa Operacional, sendo esta a área de conhecimento que engloba a Otimização Não-Linear, apresentando alguns fatos históricos e aplicações desse ramo da Matemática.

O Capítulo 2 apresenta a Otimização Não-Linear, também conhecida como Programação Não-Linear (PNL), como também uma breve história sobre sua origem, e a exposição de um problema de PNL.

Já o Capítulo 3 apresenta o significado de Convexidade, explanando de forma detalhada o que é um conjunto convexo e uma função convexa.

O Capítulo 4 expõe alguns tipos de resolução para problemas de Otimização Não-Linear, mostrando também os respectivos algoritmos de cada Método.

O Capítulo 5 traz os principais conceitos de Economia que foram utilizados na monografia, apresentando os conteúdos de Matemática Financeira e Estatística.

O Capítulo 6 apresenta um estudo sobre a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, evidenciando uma breve biografia sobre seu principal autor (Harry Markowitz), e a utilização dessa teoria no universo dos investimentos.

O Capítulo 7 apresenta os ativos que foram utilizados na modelagem da carteira, além de uma breve análise do panorama econômico para o segundo semestre do ano de 2025.

No Capítulo 8 ocorre a modelagem da carteira de investimento, com análise sobre cada um

dos ativos que constituem o portfólio, assim como um estudo que proporcionou que a mesma fosse otimizada, e seus respectivos resultados.

O Capítulo 9 apresenta as considerações finais do trabalho, e também algumas sugestões para trabalhos futuros.

Em seguida, encontram-se as referências bibliográficas que serviram de base de informação para as pesquisas realizadas.

Por último, há um apêndice, com códigos escritos em GNU Octave, que concedeu a solução otimizada do Problema de Programação Não-Linear.

Este trabalho é uma continuação de uma Iniciação Científica que recebeu apoio do PIBIC (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - Processo: **167007/2023-8**) do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) realizada pelo primeiro autor deste trabalho que teve como título: “Aplicação de Pesquisa Operacional para a Construção de uma Carteira de Investimentos”, onde foi realizada uma modelagem de uma carteira de investimentos utilizando a Otimização Linear. Com a finalização do trabalho, notamos que mesmo sendo extremamente importante e necessária para a compreensão do universo da Modelagem Matemática, a Programação Linear acabou sendo uma modelagem simplista e limitada para a construção de problemas de investimento.

Ao analisar diversos trabalhos acadêmicos publicados (Artigos, Teses, Dissertações e Monografias), na área de Pesquisa Operacional aplicado ao campo dos investimentos, notamos que a maioria utilizou Programação Quadrática e Programação Não-Linear. Por sugestão do orientador, a Otimização Não-Linear (ONL), foi escolhida para ser aplicada na Monografia.

No aspecto Metodológico, a ONL possui diversos métodos no qual resolvem seus problemas. Em decorrência do tempo, apenas dois métodos foram estudados e apresentados: o Método de Newton e o Método do Gradiente.

Neste trabalho, a restrição de não negatividade das variáveis foi resolvida pela função penalidade, enquanto a restrição de igualdade foi solucionada pela função penalidade, ou pela função lagrangiana. Também se verificou a convexidade do problema, o que garante que a solução obtida é de fato, a solução ótima do problema.

# 1 Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional (PO) é uma ciência matemática que possui como principal objetivo, a aplicação de diversos métodos científicos para a resolução de problemas de alta complexidade. A PO é uma ferramenta para o auxílio na tomada de decisões, e de otimização da operação de recursos finitos [1].

## 1.1 Breve História da Pesquisa Operacional

Essa área de conhecimento se originou um ano antes do início da Segunda Guerra Mundial, em 1938, e foi concebida pelo físico britânico Albert Percival Rowe (Figura 1), no qual tinha o intuito de construir radares para a defesa do espaço aéreo no território britânico.

Figura 1: Albert Percival Rowe



Fonte: Foto retirada do site [2].

Com o fim da Guerra em 1945, inúmeros cientistas decidiram prosseguir com o desenvolvimento da Pesquisa Operacional, mas modificando o objetivo, na qual não seria mais para fins militares. A partir dos anos 50, os Estados Unidos e a Inglaterra foram os principais países a efetuar um grande investimento nessa área, na qual se ampliaram os campos de aplicação para inúmeras organizações de diversos setores, como o comercial, o industrial, e até mesmo para o setor público [3].

Em 1952, nos Estados Unidos, surgiu a ORSA (*Operations Research Society of America*), que é o primeiro grupo de cientistas que estudavam a Pesquisa Operacional no território americano. No ano seguinte, a Inglaterra constituiu a ORS (*Operations Research Society*), e em

1957, em Oxford, foi realizada a primeira conferência internacional de Pesquisa Operacional. Em 1959 foi criada a IFORS (*International Federation of Operational Research Societies*), com o intuito de desenvolver a pesquisa operacional como uma ciência unificada, e promover o seu avanço em diversas nações [1].

No território brasileiro, a Pesquisa Operacional eclode nos anos 60, na qual em 1968, ocorre o I Simpósio de Pesquisa Operacional, realizado na cidade de São José dos Campos, no Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), e no ano seguinte, em 1969, foi fundada a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO), com o intuito de promover o desenvolvimento da pesquisa operacional [1].

Na Pesquisa Operacional, existem diferentes tipos de Modelagem Matemática para a construção de problemas, sendo algumas delas:

- Otimização Linear Contínua;
- Otimização Linear Inteira;
- Otimização Linear Inteira Mista;
- Otimização Não-Linear;
- Teoria dos Jogos.

Lembrando que um problema de otimização é aquele tipo de problema que busca encontrar a melhor solução (o "ótimo") dentre um conjunto de soluções possíveis, dadas certas restrições, ou seja, encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa, tal como:

- Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros;
- Um viajante quer minimizar o tempo de transporte;
- O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo.

Sendo que esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função, ou seja, minimizar ou maximizar uma função objetivo, sendo que esta função representa o principal objetivo do tomador de decisão [4].

## **1.2 Modelagem Matemática**

De maneira geral, a Modelagem Matemática possui como principal objetivo, transformar situações da realidade em problemas matemáticos, cujas soluções devem ser entendidas na linguagem usual. Importante ressaltar, que a mesma surgiu com a necessidade do homem em dominar o habitat em que vive [5].

A Modelagem Matemática consiste na representação matemática do que ocorre na natureza a partir de um modelo conceitual, construído com base no levantamento e interpretação de dados e em observações do sistema real, possuindo como principal objetivo um melhor entendimento do sistema atual, possibilitando assim prever situações futuras, e até mesmo passadas, com o intuito de direcionar e melhorar a tomada de decisão [5].

## 2 Otimização Não-Linear

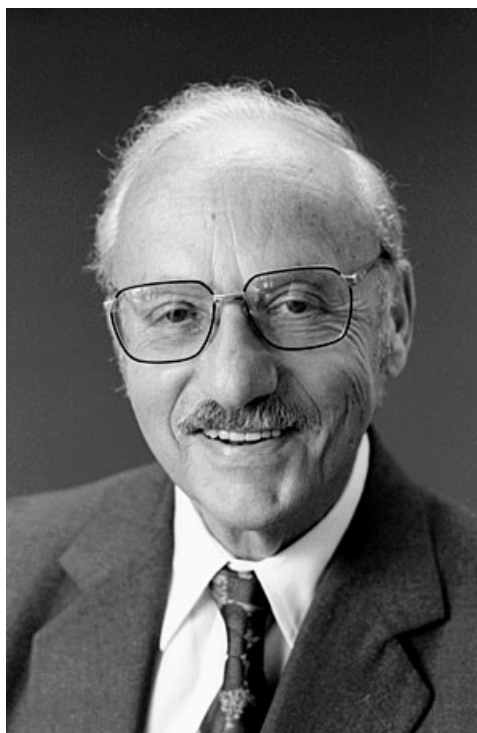
A Otimização Não-Linear, ou Programação Não-Linear (PNL) se estabelece como um modelo matemático empregado para descrever um determinado problema, sendo que a palavra “não-linear” evidencia que a *função objetivo* e/ou pelo menos uma das restrições envolvidas no problema são funções não lineares, enquanto a palavra “programação” se compreende como sinônimo de “planejamento” [6]. Podemos encontrar problemas de Programação Não-Linear em inúmeras áreas, tais como: economia, engenharia, ciência da computação, finanças, dentre outras [7].

### 2.1 Breve Histórico sobre a Otimização Linear e Não-Linear

Adentrando na perspectiva histórica, a lapidação da Programação Linear (PL) se iniciou na metade do século XVIII, no momento em que alguns economistas inicializaram a redigir sistemas econômicos em termos matemáticos. A primeira exemplificação de um problema de PL, foi efetuada em 1826, quando o célebre matemático Fourier, iniciou os seus estudos sobre desigualdades lineares, com o intuito de encontrar um ponto mínimo dentro de um poliedro, e a solução desse problema, tornou-se o embrião do Método Simplex [8].

O problema que fundamentou a Programação Linear, foi otimizado no ano de 1947, pelo matemático George Dantzig (Figura 2) e pelo economista Marshall Wood, em conjunto com o Departamento de Força Aérea Americana. Este grupo de pesquisa tinha como principal objetivo pesquisar a viabilização da Matemática para a resolução de problemas de planejamento e programação existentes no universo militar. No ano seguinte, em 1948, o grupo recebeu o título oficial de **Projeto SCOOP** (*Scientific Computation of Optimum Programs*) [1].

Figura 2: George Dantzig



Fonte: Foto retirada do artigo [9].

Também no ano de 1947, ocorreu a publicação do *Método Simplex* para a resolução de problemas de Programação Linear, no qual em conjunto com o *Método de Pontos Interiores*, publicado em 1984, são atualmente os principais instrumentos computacionais para a resolução de problemas de otimização linear [10].

A origem da Otimização Não-Linear se deu a partir do trabalho publicado em 1951 pelos matemáticos Harold Kuhn e Albert Tucker, que ficou conhecido como Condições de KKT (Karush-Kuhn-Tucker), na qual são condições que confirmam que a solução de um problema de Otimização Linear seja ótima. Nos anos 70, houve uma ampliação no número de pesquisas e de aplicações da Otimização Não-Linear, devido a expansão da capacidade de processamento dos computadores, e pelo desenvolvimento de microcomputadores [11].

## 2.2 Problema de Otimização Não-Linear

A solução de um problema de Otimização Não-Linear se dá pelo processo de otimização, isto é, encontrar uma solução ótima para o problema, respeitando todas as variáveis do mesmo. O problema de otimização se estabelece pela busca dos minimizadores (ou maximizadores) de uma função existente em uma certa região [12].

---

Podemos apresentar um problema de Otimização Não-Linear, em um modelo na qual chamamos de *forma padrão*, como evidenciado abaixo:

$$\text{Minimizar } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a } g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

onde:

- a função  $f$  a ser minimizada é denominada ***função objetivo***;
- chamamos  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  de ***variável de decisão***;
- as desigualdades  $g_i(x) \leq 0$  são chamadas de ***restrições de desigualdade***;
- as equações  $h_i(x) = 0$  são chamadas de ***restrições de igualdade***.

Se não houver restrições, ou seja,  $m = p = 0$ , dizemos que o problema (2.1) é ***irrestrito***.

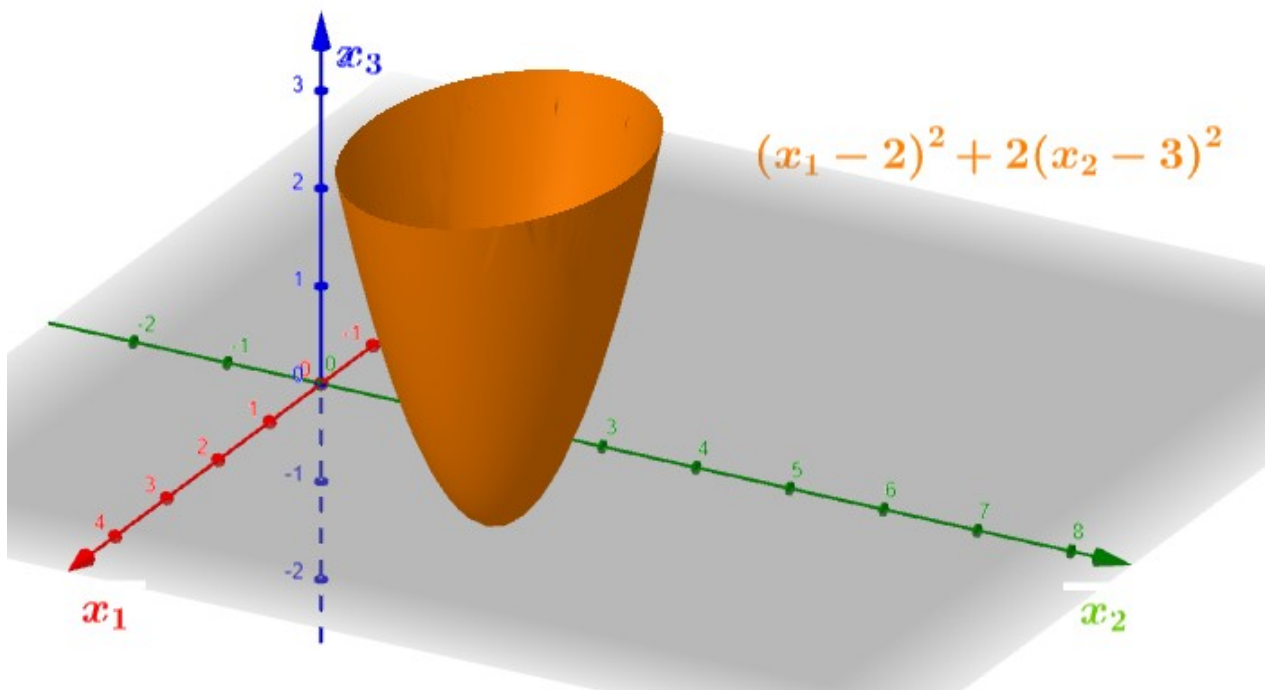
### 2.2.1 Exemplo de um Problema de Otimização Não-Linear

Para compreender melhor, segue abaixo um exemplo de um problema de Otimização Não-Linear:

- a função objetivo a ser minimizada no problema é (Figura 3):

$$\text{Min } z = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 3)^2$$

Figura 3: Função Objetivo do problema



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do *software* Geogebra 3D [13].

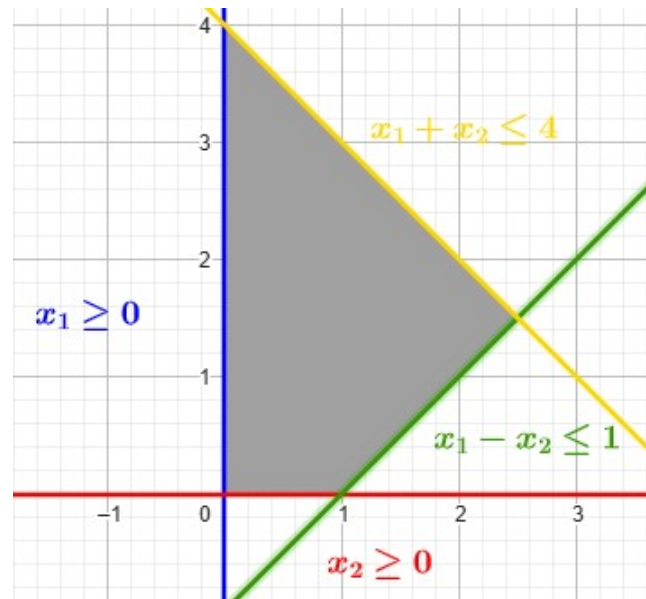
- as restrições de composição são determinadas por (Figura 4):

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Figura 4: Região Factível do problema



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do *software* Geogebra 2D [13].

Com essas informações conseguimos construir a forma geral desse problema (Figura 5):

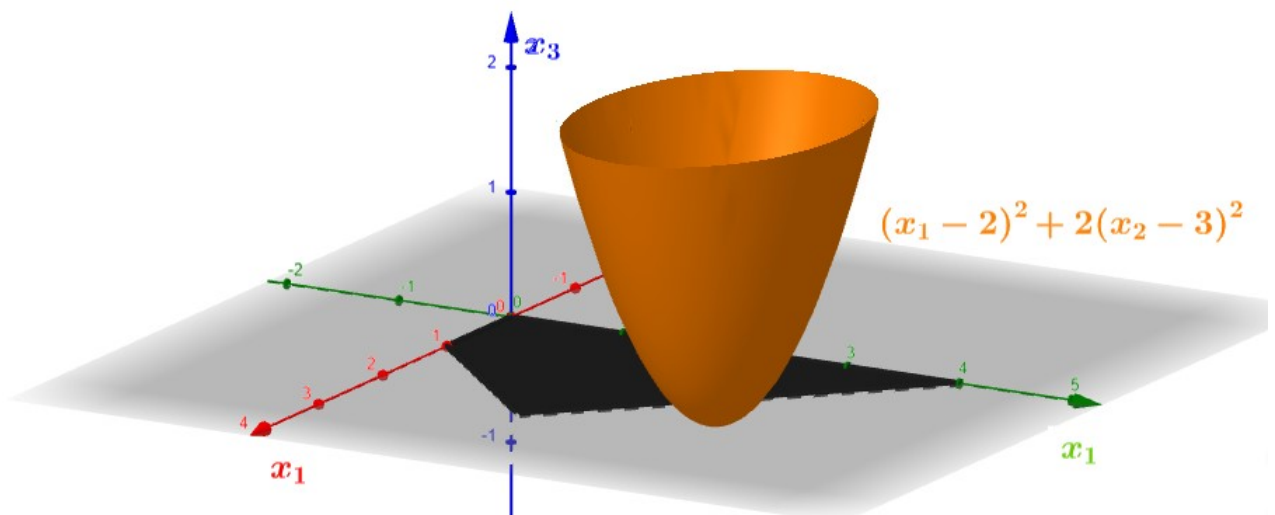
$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 3)^2$$

$$\text{sujeito a } x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Figura 5: Forma Geral do problema



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do *software* Geogebra 3D [13].

## 2.3 Pontos Ótimos e Localmente Ótimos

Dizemos que um ponto de mínimo  $x^*$  é uma *solução ótima*, se  $x^*$  satisfaz a condição de restrição, e  $f_0(x^*) = p^*$ , onde  $p^* \leq f(x)$  para todo  $x$  que satisfaz a restrição [14].

O conjunto de todas as soluções ótimas é o *conjunto ótimo*, na qual é denotado por:

$$X_{opt} = \{x | g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p, f_0(x) = p^*\}. \quad (2.2)$$

Se existe uma solução ótima para o problema (2.1), é dito que o valor ótimo foi atingido ou alcançado, e portanto o problema é *solucionável*.

Dizemos que uma solução viável  $x$  (ou seja, uma solução que satisfaz as restrições de um problema de otimização) é um ótimo local se existe um  $\delta > 0$  tal que:

$$f(x) = \inf\{f(z) | g_i(z) \leq 0, i = 1, \dots, m \text{ e } h_i(z) = 0, i = 1, \dots, p, \|z - x\| \leq \delta\}. \quad (2.3)$$

## 2.4 Características de um Problema de Otimização Não-Linear

Dentre as características que são de caráter único existentes dentro de um problema de Otimização Não-Linear, podemos citar:

- A solução ótima nem sempre está no conjunto de pontos extremos;
- Um deslocamento contínuo numa direção linear pode não levar a valores continuamente crescentes ou decrescentes da função objetivo;
- A região factível pode não ser um conjunto convexo;
- Um ótimo local pode não ser um ponto ótimo global.

### 3 Convexidade

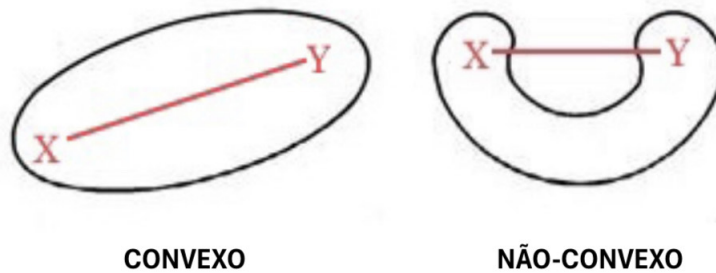
#### 3.1 Conjunto Convexo

Um conjunto  $C$  é convexo se, e somente se, o segmento de reta entre quaisquer dois pontos em  $C$  estiver em  $C$ , ou seja, para qualquer  $x, y \in C$  e qualquer  $\lambda$  com  $0 \leq \lambda \leq 1$ , temos [15]:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Na Figura 6, podemos notar visualmente a diferença entre um conjunto convexo, e um conjunto não-convexo.

Figura 6: Exemplos Geométricos do Conjunto Convexo e do Não-Convexo



Fonte: Figura adaptada do livro [15].

#### 3.2 Funções Convexas

Uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é **convexa** quando o domínio de  $f$  for um conjunto convexo e, para todo  $x, y \in \text{dom } f$  e  $\lambda$  com  $0 \leq \lambda \leq 1$ , temos [14]:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (3.1)$$

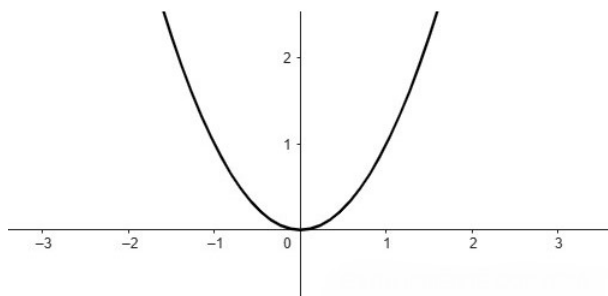
Geometricamente, essa desigualdade determina que o segmento de reta entre  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  encontra-se acima do gráfico de  $f$ .

Uma função  $f$  é **estritamente convexa** se, para todo  $x \neq y$  e  $0 < \lambda < 1$  vale:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (3.2)$$

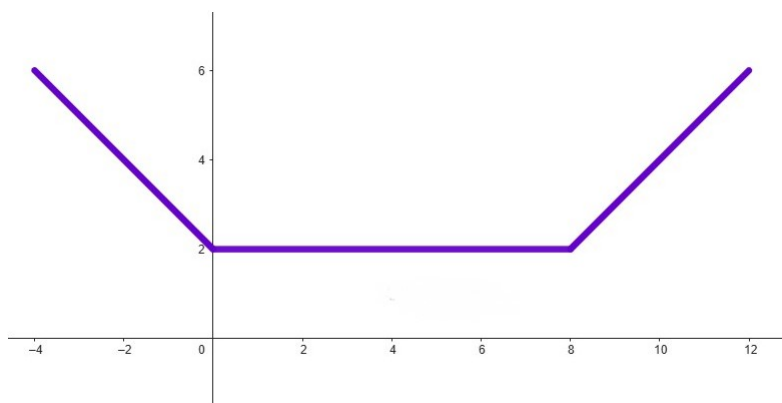
Nas Figuras 7, 8 e 9, é possível visualizar as diferenças geométricas entre as funções.

Figura 7: Função Estritamente Convexa



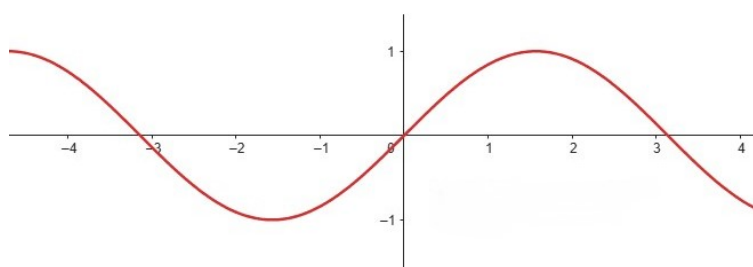
Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do *software* Geogebra 2D [13].

Figura 8: Função Convexa



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do *software* Geogebra 2D [13].

Figura 9: Função Não-Convexa, e nem Côncava



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do *software* Geogebra 2D [13].

Importante ressaltar que a combinação linear positiva (combinação linear cujos coeficientes são positivos) das funções convexas também é uma função convexa.

### 3.3 Definições importantes de Análise no $\mathbb{R}^n$

**Definição 3.3.1 (Matriz Jacobiana).** Dada uma função vetorial diferenciável de várias variáveis reais  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  para  $x \in \mathbb{R}^m$ , a representação matricial de sua derivada é denominada matriz Jacobiana de  $F$  e é definida como sendo [16]:

$$J_F = F' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

**Definição 3.3.2 (Vetor Gradiente).** O vetor gradiente de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , é o vetor cujas componentes são as derivadas parciais de  $f$ , e será denotado por  $\nabla f$ , que é [16]:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

**Definição 3.3.3 (Matriz Hessiana).** Dada uma função real de várias variáveis,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , duas vezes diferenciável, a transposta da Matriz Jacobiana (derivada) do gradiente de  $f$  (que é uma função vetorial) é denominada Matriz Hessiana de  $f$ , que é definido como sendo [17]:

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

**Observação:** Note que, se todas as derivadas parciais de segunda ordem são contínuas, a matriz hessiana será uma matriz simétrica.

**Definição 3.3.4 (Matriz Hessiana Orlada).**

Seja a função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , a restrição  $g_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $i = 1, \dots, p$ , e a função lagrangiana  $F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(x)$  do seguinte problema:

Minimizar  $f$

sujeito a  $g_i(x) = 0$ , sendo  $i = 1, \dots, p$ .

Então a Matriz Hessiana Orlada é definida como sendo [18]:

$$H(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_m} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}.$$

Determinando os menores principais de ordens  $p + 1, p + 2, \dots, p + m$ , no qual de forma mais precisa, temos:

$$\Delta_{p+1}, \Delta_{p+2}, \dots, \Delta_{p+m}$$

onde calculamos:

$$(-1)^p \Delta_{p+1}, \dots, (-1)^p \Delta_{p+m}$$

cujo  $\Delta_k$  é o determinante do menor principal (ou seja, determinante do bloco  $k \times k$  no lado superior esquerdo).

Assim, temos que:

- Se todos os valores forem positivos, resulta em um mínimo local da função;
- Se  $(-1)^p \Delta_{p+1} < 0$  e a partir daí os sinais se alternarem, então resulta em um máximo local da função.

### 3.4 Condições de Otimalidade de Primeira Ordem

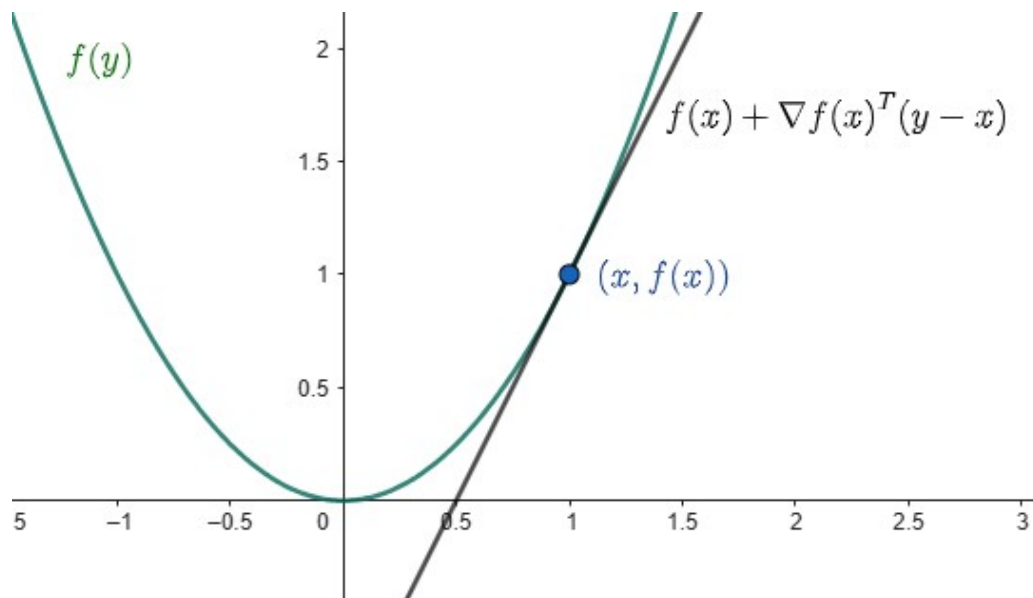
Supondo que  $f$  seja diferenciável, ou seja, se seu gradiente  $\nabla f$  exista em cada ponto do dom  $f$ , cujo domínio é aberto, então temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.4.1** Se existe  $\nabla f$  em todos pontos do domínio,  $f$  é convexa se, e somente se, o dom  $f$  é convexo e

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \quad (3.3)$$

vale para qualquer  $x, y \in \text{dom } f$  [14]. A desigualdade representada pela equação 3.3 é representada pela Figura 10.

Figura 10: Função Diferenciável e Convexa



Fonte: Elaborado pelo autor com auxílio do *software* Geogebra 2D [13].

A função afim em relação a  $y$ , expressa por  $f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$  é a aproximação de Taylor de primeira ordem de  $f$  próximo a  $x$ . A desigualdade (3.3) implica que a aproximação de Taylor de primeira ordem é sempre um subestimador global da função, portanto a função é convexa.

A desigualdade (3.3), mostra que a partir de informações locais sobre uma função convexa é possível derivar informações globais. Essa é provavelmente uma das propriedades mais importantes das funções convexas e dos problemas de otimização convexa. A desigualdade (3.3) mostra que se  $\nabla f(x) = 0$ , então para todo  $y \in \text{dom } f$ ,  $f(y) \geq f(x)$ , portanto  $x$  é um minimizador global da função  $f$ .

A convexidade estrita também pode ser descrita por uma condição de primeira ordem:  $f$  é estritamente convexa se, e somente se,  $\text{dom } f$  é convexo e para  $x, y \in \text{dom } f, x \neq y$ , temos:

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \quad (3.4)$$

**Observação:** Temos que uma função  $f$  com  $\text{dom } f$  convexo é côncava se, e somente se,

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \quad (3.5)$$

para todo  $x, y \in \text{dom } f$  [14]. Note que, uma função  $f$  é côncava se, e somente se,  $-f$  é convexa.

### 3.5 Condições de Otimalidade de Segunda Ordem

Agora considere uma função  $f$  duas vezes diferenciável, isto é, sua segunda derivada  $\text{Hess } f = \nabla^2 f$  existe em cada ponto de  $\text{dom } f$ . Então  $f$  é convexa se, e somente, se  $\text{dom } f$  é convexo e para todo  $x \in \text{dom } f$ ,

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad (3.6)$$

na qual significa que  $\vec{v}^t \text{Hess } f(x) \vec{v} \geq 0$  para todo vetor  $\vec{v}$ . Para uma função real de uma variável, isso se reduz à condição  $f''(x) \geq 0$ , sendo  $\text{dom } f$  convexo, ou seja um intervalo, o que implica que o gráfico de  $f$  tem a concavidade para cima na vizinhança de  $x$ . [14].

### 3.6 Problemas de Otimização Convexa

Um *problema de otimização convexa* se define como sendo um caso particular do problema de otimização não-linear (2.1), na qual pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &\quad \quad \quad a_i^T x = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $f, g_1, g_2, \dots, g_m$  são funções convexas.

Realizando a comparação do problema (3.7) com o problema de otimização mais geral (2.1), o problema convexo possui os três requisitos adicionais, sendo eles:

- A função objetivo deve ser convexa;
- As funções de restrição de desigualdade precisam ser convexas;
- As funções de restrição de igualdade  $h_i(x) = a_i^T x - b_i$  devem ser afins.

Em um problema de otimização convexa, minimizamos uma função objetivo convexa sobre um conjunto convexo [16].

### 3.7 Função Lagrangiana

Para otimizar uma função  $f(x_1, \dots, x_n)$  sujeita a restrição de uma função  $g(x_1, \dots, x_n) = c$ , podemos introduzir uma nova variável  $\lambda$  e definir a função lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda(g(x_1, \dots, x_n) - c).$$

Para encontrar os pontos críticos da função  $\mathcal{L}$  é necessário resolver:

$$\nabla \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0.$$

O que implica em  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \nabla f + \lambda \nabla g = 0$  e  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g - c = 0$ .

A resolução do sistema, composto por  $(n + 1)$  equações e  $(n + 1)$  incógnitas, fornece todos os possíveis candidatos para os máximos e mínimos locais.

Sendo que o ponto de mínimo com a condição de restrição de igualdade também será um ponto estacionário da função lagrangiana, o ponto de mínimo ou de máximo pode ser resolvido, obtendo o ponto estacionário da função lagrangiana associada.

E para o caso geral com  $n$  variáveis e  $m$  restrições, o problema é fornecido pela maximização (ou minimização) de  $f(x)$ , sujeito a  $g_j(x) = 0$ , onde  $j = 1, 2, \dots, m$  e  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ .

Neste caso, a função lagrangiana  $\mathcal{L}$ , terá um multiplicador de Lagrange  $\lambda_j$  para cada restrição:

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x).$$

As condições necessárias são:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \text{ onde } i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = g_j(x), \text{ onde } j = 1, \dots, m \end{cases}$$

formada por  $(n + m)$  equações em função de  $(n + m)$  incógnitas [19].

## 4 Alguns Métodos para a Resolução de Problemas de Otimização Não-Linear

Neste capítulo, iremos abordar alguns métodos de resolução específicos para problemas de Programação Não-Linear, e também explicar seus respectivos algoritmos para o melhor entendimento.

### 4.1 Método do Gradiente

O Método do Gradiente, também conhecido como Método de Cauchy, é um dos métodos mais antigos e mais bem reconhecidos para resolver problemas de maximização e de minimização de uma função de várias variáveis. O método é extremamente relevante, pois no ponto de vista teórico, é um dos mais simples para a obtenção de uma análise satisfatória.

Esse método é um processo iterativo que, a cada etapa, faz uma busca na direção oposta ao vetor gradiente da função objetivo no ponto corrente. A justificativa dessa escolha se fundamenta no fato de que o gradiente da função objetivo avaliado em um determinado ponto  $x$  aponta para a direção de maior crescimento de  $f$  a partir desse ponto. Sendo assim, a direção oposta ao vetor gradiente é a que fornece um maior decréscimo na função objetivo [16].

De fato, se  $d = -\nabla f(x)$  e  $v \in \mathbb{R}^n$  é tal que  $\|v\| = \|d\|$ , então:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x) = \nabla f(x) \cdot d = -\|\nabla f(x)\| \cdot \|d\| = -\|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| \leq \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| \cos \theta \leq \nabla f(x) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x).$$

Esse método visa minimizar funções, sempre caminhando na direção de  $-\nabla f(x)$ , que localmente representa a direção na qual a função decresce de forma rápida. O algoritmo parte de  $x_k$  e efetua a busca na direção de  $d_k$ , obtendo um novo ponto  $x_{k+1}$ , cujo valor de  $f$  é menor [15]. O algoritmo apresentado a seguir, se refere ao Método do Gradiente Puro.

#### 4.1.1 Algoritmo do Gradiente Puro

Se  $x^k \in \mathbb{R}^n$  é tal que  $\nabla f(x^k) \neq 0$ , os passos para determinar  $x^{k+1}$  são [15]:

**Passo 1:** Calcular  $d_k = -\nabla f(x^k)$ .

**Passo 2:** (*Busca linear exata*)

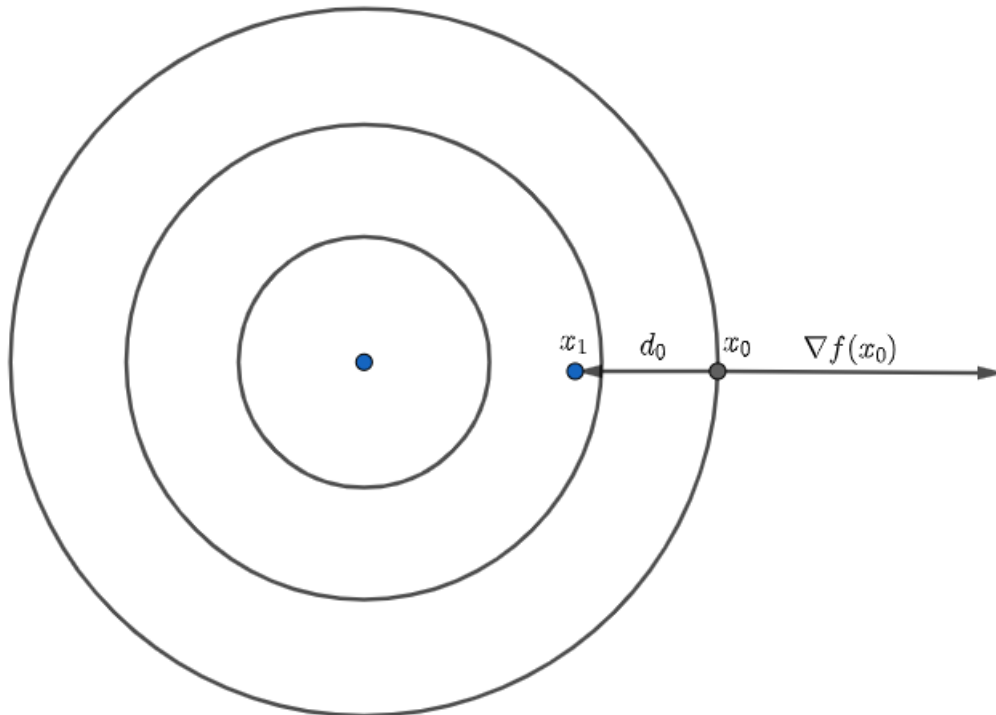
Determinar  $\lambda_k > 0$  que minimize  $f(x_k + \lambda_k d_k)$ , ou que satisfaça alguma condição de decréscimo adequado.

**Passo 3:** Fazer  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$ .

O algoritmo é aplicado para  $k = 1, 2, \dots, m$ , até obter um resultado satisfatório (ou satisfazer algum outro critério de parada).

A Figura 11 representa uma iteração do Método do Gradiente para a busca do ponto de mínimo.

Figura 11: Uma iteração do Método do Gradiente



Fonte: Figura adaptada da Dissertação [16].

## 4.2 Método de Newton

O Método de Newton é amplamente estudado, no qual tanto o algoritmo básico (Newton Puro), quanto suas variantes, no qual incorporam a busca linear, são bastante utilizados para resolver sistemas de equações não lineares e também para minimização de funções [16]. Este método baseia-se no fato de que o ponto ótimo corresponde aos pontos críticos, cujas derivadas se anulam [19].

### 4.2.1 Método de Newton para resolução de equações

Considerando  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e o problema de resolver os sistemas não lineares [16]:

$$F(x) = 0. \quad (4.1)$$

Na maioria dos casos reais, não conseguimos resolvê-los de maneira direta, o que leva a usar os métodos numéricos. A ideia do Método de Newton é aproximar  $F$  por seu polinômio de Taylor de primeira ordem. Sendo uma estimativa  $\bar{x}$ , considere assim o sistema linear  $F(x) \approx T(x) = F(\bar{x}) + J_F(\bar{x})(x - \bar{x})$  para um ponto  $\bar{x}$  dado, onde  $J_F$  representa a matriz jacobiana de  $F$ . Assim, a equação (4.1) poderá ser aproximado pelo sistema linear:

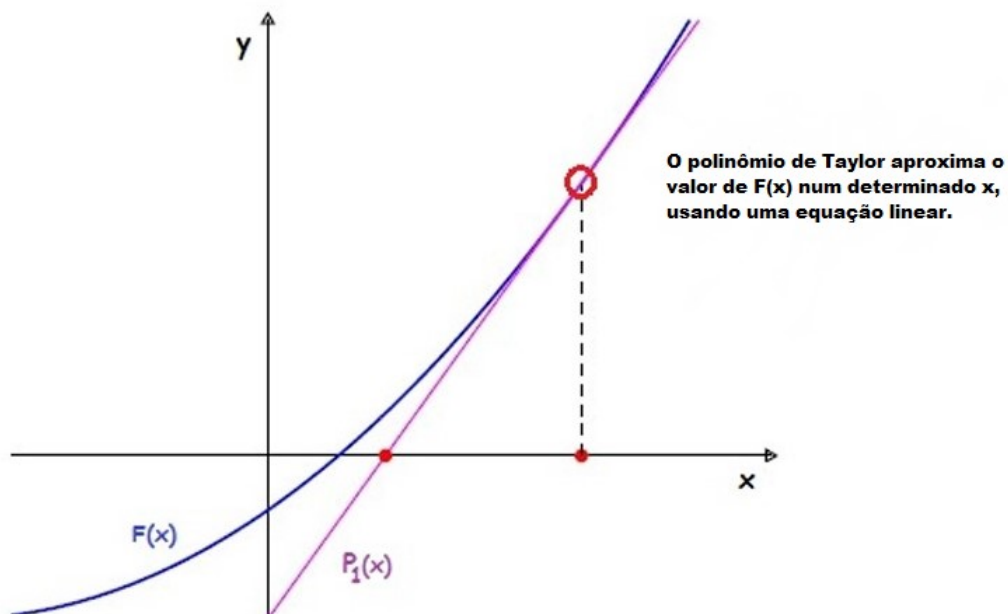
$$T(x) = F(\bar{x}) + J_F(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0. \quad (4.2)$$

Caso  $J_F(\bar{x})$  seja inversível, o sistema (4.2) pode ser resolvido e fornece:

$$x = \bar{x} - (J_F(\bar{x}))^{-1}F(\bar{x}).$$

A Figura 12 representa uma iteração do Método de Newton para a resolução de equações.

Figura 12: Uma iteração do Método de Newton para equações em  $\mathbb{R}$



Fonte: Figura adaptada da Dissertação [16].

### 4.2.2 Método de Newton para Otimização Irrestrita

Considerando o problema de minimização irrestrita [15]:

$$\text{Min } f(x) \text{ e } x \in \mathbb{R}^n \quad (4.3)$$

no qual  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ . Os pontos ótimos de  $f$  são pontos estacionários e  $\nabla f(x) = 0$ . Aplicando a relação (4.2) para  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida como:

$$F(x) = \nabla f(x).$$

E observando que  $J_F(x) = \nabla^2 f(x)$ , obtém a equação:

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) = 0 \quad (4.4)$$

em relação a  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se  $\nabla^2 f(x_k)$  não for singular, obtém  $x = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ . Supondo que  $\nabla^2 f(x_k)$  seja não singular para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , obtemos o seguinte esquema iterativo:

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k), \text{ sendo } k = 0, 1, \dots \quad (4.5)$$

### 4.2.3 Algoritmo de Newton

Se  $x^k$  é tal que  $\nabla f(x^k) \neq 0$ , os passos para determinar  $x^{k+1}$  são [15]:

**Passo 1:** Determinar  $d_k$  tal que:

$$\nabla^2 f(x^k) d_k = -\nabla f(x^k),$$

que é a direção do ponto crítico. Notamos que este passo pode não estar bem definido se  $\nabla^2 f(x^k)$  for singular.

**Passo 2:** Fazer  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$ , onde  $\lambda_k$  é determinado por meio da *Busca Linear* de forma análoga ao caso do método de gradiente.

**Observação:** No caso de procurar o ponto de mínimo, observe que, se  $\nabla^2 f$  for contínua ela será simétrica e se não for degenerado também, será definida positiva (todos auto valores são positivos ou equivalentemente,  $v^t \nabla^2 f v > 0$  para todo  $v$ ) perto do mínimo local, podendo usar a decomposição de Cholesky. No caso de não estar suficientemente próximo do ponto de mínimo, pode não ser positivo definido, o que costuma usar o Método de Cholesky modificado para forçar na direção onde  $\nabla^2 f$  seja supostamente positiva definida.

### 4.3 Backtracking

Uma das formas simples de se obter o passo  $\lambda_k$  para o Método do Gradiente e/ou o Método de Newton para a busca de um ponto de mínimo é usar o algoritmo “*Backtracking*” [12]. O *Backtracking* tem como objetivo, evitar que o ponto candidato à solução ótima, passe pelo ponto de mínimo, aumentando o valor da função, em vez de diminuir. No qual o algoritmo se resume como segue:

- Primeiramente, é necessário fixar as constantes  $0 < \epsilon < 0.5$  e  $\eta = 1.1$  (ou  $\eta = 1.2$ );
- Em seguida, considera-se  $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ , para assim efetuar:

$\alpha = 1$

para  $i = 1, 2, \dots$

se  $\phi(\alpha) \leq f(x_k) + \epsilon \phi'(0)\alpha$  então

$$\lambda_k = \alpha$$

pare

senão

$$\alpha = \alpha/\eta$$

fim se

fim para

onde  $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$  e  $\phi'(0) = \langle \nabla f(x_k), d_k \rangle$ .

## 5 Conceitos de Economia

A palavra “**Economia**” pode ser definida como uma ciência social que analisa como o indivíduo e a sociedade, realizam a tomada de decisão para empregar recursos na produção de bens e serviços, com o intuito de distribuir os mesmos entre as diversas pessoas e grupos existentes na sociedade [20].

### 5.1 Conceitos de Matemática Financeira

Vários conceitos de Matemática Financeira e Estatística são necessários para a construção da Carteira de Investimentos, como também para o cálculo dos Parâmetros Estatísticos.

- **Investimento**

Se define como uma aplicação de qualquer tipo de recurso, com o intuito de receber, um valor superior ao que foi investido após um período de tempo [21]. Todo o investimento é compreendido como um ativo pertencente a alguém que tenha expectativa de retorno futuro [22].

- **Rendas**

Representam a remuneração dos agentes que colaboram, de algum modo, no processo produtivo de uma economia. A mesma pode ser transcorrida de diferentes modos, como por exemplo: salários recebidos, lucros sobre capital investido, dentre outros [21].

- **Poupança**

É a parcela da renda economizada pelos agentes econômicos que não foi consumida na aquisição de bens e serviços [21].

- **Retorno**

É o resultado de uma aplicação (*investimento*) após um determinado período de tempo, sendo o total de ganhos ou perdas provenientes do investimento. O *retorno* é uma variável importante para analisar um investimento, pois permite o investidor comparar os resultados reais, com os esperados, e construir a sua tomada de decisão para o próximo investimento [22].

- **Lucro**

É todo o retorno positivo de investimentos realizados por uma pessoa ou por uma empresa, na qual o mesmo pode ser em bens ou em dinheiro. Matematicamente, é um valor que ultrapassa o valor do capital investido [21].

- **Portfólio (Carteira) de Investimentos**

É um conjunto constituído por diversos tipos de ativos financeiros, pertencentes a um investidor, podendo ser ele pessoa física ou jurídica, como por exemplo, ações, títulos públicos, poupança, fundos de investimentos, ações imobiliárias, dentre outras [23].

- **Ações**

São títulos representativos da menor fração do capital social de uma empresa (podendo ser sociedade anônima, sociedade por ações ou companhia) que são adquiridas por um determinado investidor, tornando o mesmo, um “coproprietário” com direito a participação nos resultados da empresa, mas não um credor da companhia [21].

- **Taxa de Juros**

É o coeficiente que determina o valor dos juros, lembrando que a mesma costuma estar acompanhada por uma unidade de tempo (mês, semestre, ano, dentre outras) [24].

- **Inflação**

O processo de *inflação* pode ser definida como um aumento generalizado nos preços de bens e serviços de uma economia em um determinado período de tempo, que representa a desvalorização da moeda [24].

- **Risco**

No universo do mercado financeiro, o risco é a probabilidade de perda em razão de uma exposição ao mercado, na qual pode acontecer devido aos eventos, tal como variações nas taxas de juros e nos preços de mercado, por lucrar menos que o previsto, ou não lucrar, ou obter prejuízo. Estatisticamente, costuma ser representado através do desvio padrão. No campo dos investimentos, existem dois tipos de riscos que são o *risco diversificável*, que é aquele que pode ser diluído de forma total ou parcial pela diversificação da carteira de investimentos, e está relacionado com as características básicas do título e do mercado de negociação, e o *risco sistemático* (ou *não diversificável*), que não pode ser eliminado

ou reduzido por meio da diversificação, sendo relacionado com as variações nas taxas de juros da economia, o processo inflacionário, a situação política e o comportamento das cotações no mercado de títulos [21].

- **Diversificação**

É a divisão do capital investido em diferentes ativos financeiros, no qual essa prática faz com que se reduza o risco da perda do capital investido [21].

- **Volatilidade**

Pode ser compreendida como as mudanças ocorridas nos preços de um ativo em razão de modificações verificadas nas taxas de juros do mercado [21].

- **Incerteza**

São situações em que não é possível a atribuição de probabilidades para a ocorrência de um determinado evento [21].

Muitos dos conceitos de Matemática Financeira são utilizados na Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, através dos Parâmetros Estatísticos que serão abordados na próxima seção.

## 5.2 Parâmetros Estatísticos

A Estatística é o campo de estudo focado na coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados assim como na obtenção de conclusões válidas e na tomada de decisões razoáveis baseadas em tais análises [25].

Como a área de mercado de capitais, possui características fortemente previsionais e centralizadas em ambientes de incerteza, não podemos de forma evidente prescindir o uso do método estatístico na avaliação de instrumentos financeiros, mas de maneira mais rigorosa, grande parte da evolução conceitual e prática apresentada pelos mecanismos do mercado financeiro é atribuída ao uso das técnicas estatísticas no processo de avaliação de ativos e do risco de decisões [21].

A presença dos parâmetros estatísticos é de suma importância para a área da Economia, principalmente no âmbito dos investimentos, no qual a Estatística pode ser uma ferramenta fundamental para auxiliar na previsão sobre o futuro da economia em diversos contextos micro<sup>1</sup> e macroeconômicos<sup>2</sup>, como a Inflação, um agente de extrema relevância e causador de grande impacto no cenário econômico. Conseqüentemente, a estatística também é um grande auxiliador na tomada de decisões [21].

Os parâmetros estatísticos que serão utilizados neste trabalho são os seguintes:

- **Média**

A *média* se define de modo geral como a medida de tendência central mais frequentemente utilizada, na qual existem diversos tipos de média [21]. Neste trabalho, será utilizado a média aritmética simples e ponderada.

- **Média Aritmética Simples:**

A *média aritmética simples* ( $\bar{x}$ ) é calculada pela divisão entre a soma do conjunto de informações, que são os valores de uma distribuição ( $x_i$ ) e o número de valores contidos nesse conjunto ( $n$ ) [21]:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

- **Média Aritmética Ponderada:**

A *média aritmética ponderada* ( $x_p$ ) é utilizada quando se atribuem diferentes pesos a cada elemento do conjunto de informações, e a mesma é obtida pela divisão entre a soma dos valores de uma distribuição ponderada ( $x_i$ ) pelos respectivos pesos ( $a_i$ ) e a soma dos pesos, isto é [21]:

$$x_p = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \times a_i)}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

---

<sup>1</sup>A **Microeconomia** é a análise dos fenômenos econômicos de forma individual [26], sendo que a mesma analisa a formação de preços no mercado, tal como a interação entre a empresa e o consumidor, na decisão do preço e da quantidade de um bem ou serviço em um mercado específico [27].

<sup>2</sup>A **Macroeconomia** é o estudo de problemas econômicos dentro de uma abordagem ampla [26], analisando a determinação e o comportamento de grandes agregados, tais como: renda e produto nacionais, emprego e desemprego, taxas de juros, taxa de câmbio, dentre outros [27].

- **Variância**

A *variância* ( $S^2$ ) é a medida de variabilidade (grau de dispersão) de um conjunto de valores em relação a sua média ( $\bar{x}$ ) [28], no qual a variância de um conjunto de números:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  de uma amostra de  $n$  elementos é representada pela seguinte fórmula:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

sendo que  $(x_i - \bar{x})$  é o desvio de cada um dos números  $x_i$  em relação à média da amostra ( $\bar{x}$ ) [21].

- **Desvio-Padrão**

O *desvio-padrão* ( $S$ ) se define como sendo a raiz quadrada positiva da *variância* ( $S^2$ ) [28], isto é:

$$S = \sqrt{S^2}.$$

- **Coefficiente de Variação**

O *coeficiente de variação* ( $CV$ ) é um parâmetro estatístico que aponta o tamanho do desvio-padrão em relação à média em porcentagem, representado na fórmula a seguir [28]:

$$CV = \left( \frac{\text{Desvio-padrão}}{\text{Média}} \cdot 100 \right) \%$$

- **Covariância**

A *covariância* tem o intuito de identificar como determinados valores se relacionam entre si. É uma medida estatística que avalia como duas variáveis ( $x$  e  $y$ ) se movimentam ao mesmo tempo em relação a seus próprios valores médios. Podemos também dizer, que a *covariância* indica a “simetria” entre  $x$  e  $y$  [21].

A fórmula do cálculo da *covariância* é:

$$S_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}.$$

No campo da Economia, a *covariância* é utilizada na análise de risco de investimentos, no qual se dois títulos apresentarem associações positivas, ou seja, se o valor da *covariância* for maior que 0, as taxas de retorno de ambos os títulos, apresentam comportamento da mesma tendência. Se a *covariância* for negativa, significa que os dois ativos possuem relações inversas, sendo assim o retorno de um título tende a assumir uma conduta diferente do outro [21].

#### • Correlação

A concepção de *correlação* visa explicar o grau de relacionamento verificado no comportamento de duas ou mais variáveis, pela seguinte equação:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

no qual:

- $r_{xy}$  é o coeficiente de correlação da amostra;
- $S_{xy}$  é a covariância da amostra;
- $S_x$  é o desvio-padrão da amostra de  $x$ ;
- $S_y$  é o desvio padrão da amostra de  $y$ .

A correlação entre duas variáveis indica o modo em que ambas se movem em conjunto, sendo que a quantificação dessa relação é medido estatisticamente por meio do *coeficiente de correlação*, na qual o mesmo pode variar de **-1** a **+1** [21].

Quando o coeficiente de correlação for igual a **-1**, podemos dizer que as variáveis estudadas estão inversamente correlacionadas, ou seja, se a variável  $Y$  diminui, a variável  $x$  tende a aumentar. Quando o coeficiente de correlação for igual a **+1**, as variáveis em estudo são perfeitamente relacionadas, isto é, um crescimento da variável  $x$  leva consequentemente um crescimento da variável  $y$  [21].

## 6 Teoria de Markowitz

Ao construir uma Carteira de Investimentos, os investidores têm como objetivo, obter o maior lucro possível adentro de um cenário de risco reduzido, sendo esse um contexto ideal para um investidor no cenário econômico atual. Para obter essa situação, a utilização da Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz é de suma importância.

### 6.1 Biografia de Harry Markowitz

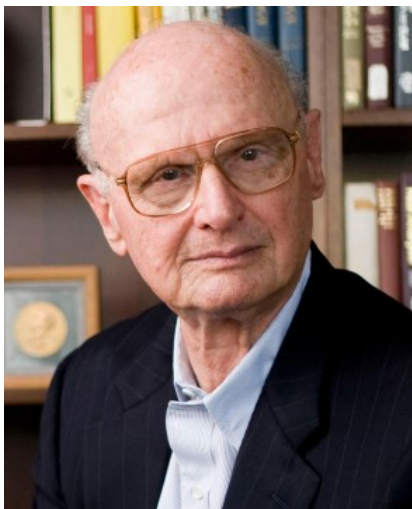
Markowitz nasceu em 1927, na cidade de Chicago, e realizou sua graduação em Bacharelado em Economia na mesma cidade, na Universidade de Chicago, e escolheu como sua principal linha de pesquisa a “Economia da Incerteza”, na qual trabalhou com Pesquisa na mesma área na universidade, com foco no âmbito dos investimentos [29].

Em 1952, ingressou na *RAND Corporation*, uma empresa norte-americana, criada em 1948, logo após o fim da Segunda Guerra Mundial, que tinha como objetivo, conectar o planejamento militar com decisões de pesquisa e desenvolvimento [30]. Nessa empresa, conheceu e trabalhou com George Dantzig, um dos fundadores da Programação Linear, na qual aprendeu sobre a mesma, e sobre o Método Simplex, e com sua ajuda, desenvolveu um algoritmo de linha crítica para a identificação das carteiras ótimas de média-variância, que mais tarde ficou conhecida como Fronteira de Markowitz [29].

Em 1952, publicou seu célebre artigo sobre “Seleção de Portfólio” no *Journal of Finance*, e trabalhou os 38 anos seguidos com inúmeras pessoas esse tema, com foco na aplicação de técnicas matemáticas ou computacionais em problemas práticos, relacionados à problemas de negócios sob incerteza e de tomada de decisão [30]. Em 1955, recebeu o título de Doutor pela Universidade de Chicago, com uma tese relacionada a Teoria do Portfólio, e em seguida ficou um ano realizando pesquisas na *Cowles Foundation for Research in Economics*, da Universidade de Yale [29].

No ano de 1989, ganhou o Prêmio Teoria John Von Neumann em Teoria em Pesquisas Operacionais da Sociedade de Pesquisa Operacional da América (*Operations Research Society of America*) e do Instituto de Ciências de Gestão (*Institute of Management Sciences*), e no ano seguinte, conquistou o Prêmio Nobel de Economia [29].

Figura 13: Harry Max Markowitz



Fonte: Foto retirada do site institucional [29].

Foi professor de Finanças na *Baruch College* em Nova York, e depois se tornou professor na ilustre Universidade da Califórnia em San Diego (*University of California, San Diego*) [31]. Markowitz faleceu de pneumonia aos 95 anos, em 22 de Junho de 2023, em San Diego, deixando um grande legado para a Economia.

## 6.2 O uso da Teoria de Markowitz

Markowitz desenvolveu a Teoria Moderna de Portfólio, com o intuito de auxiliar os investidores a maximizarem o retorno esperado de suas carteiras de ativos, e ao mesmo tempo, minimizar o risco da mesma, na qual consequentemente, auxilia os investidores em suas respectivas tomada de decisões adentro do mercado financeiro [32].

A teoria do portfólio define a rentabilidade do ativo como uma variável aleatória, e uma carteira de ativos como uma combinação ponderada de ativos, na qual o retorno de uma carteira se determina como uma combinação ponderada dos retornos dos ativos, como na fórmula a seguir [33]:

$$R_p = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$$

onde:

$R_p$  : retorno esperado da carteira;

$x_i$  : peso do ativo  $i$  na carteira (sendo que o peso é a parcela gasta com o ativo sobre o valor total da carteira);

$\mu_i$  : retorno esperado do ativo  $i$ ;

$n$  : número de ativos na carteira.

O retorno da carteira também é definido como uma variável aleatória, que possui um valor esperado e uma variância. Sendo que o risco de uma carteira não depende somente do risco de cada elemento que a compõe e de sua participação no investimento total, mas também da forma como seus ativos se relacionam (covariância) entre si [21]. Sendo, a variância das carteiras composta por diferentes ativos, é dada por [33]:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j s_{ij}$$

onde:

$V$  : variância da carteira;

$n$  : número de ativos na carteira;

$x_i$  : peso do ativo  $i$  na carteira;

$x_j$  : peso do ativo  $j$  na carteira;

$s_{ij}$  : covariância entre os ativos  $i$  e  $j$ .

A diversificação, proposta na Teoria de Markowitz, permite a redução ou até a eliminação total do risco diversificável de um portfólio de investimentos, sendo que, ao selecionarem ativos com correlação totalmente negativa entre si, o risco presente na carteira pode ser eliminado. Mas em contrapartida, a parcela do risco sistemático estará sempre presente, pois não pode ser reduzida por meio da diversificação.

É importante lembrar que a diversificação com o intuito de diminuir o risco não é uma tomada de decisão aleatória, mas sim uma elaboração formada pela observação das correlações dos retornos dos ativos, com o intuito de estabelecer a melhor composição possível de uma carteira de ativos [21].

Outra questão que é muito importante a ser levantada, é que a diversificação não é apenas fornecida quando o investimento é feito em mais de um ativo, mas a diversificação também ocorre quando o investimento é realizado em ativos de diferentes setores econômicos, pois se um determinado ativo sofrer uma desvalorização por algo que ocorreu em seu setor, os demais ativos que compõem a carteira não serão atingidos, em virtude de não terem uma correlação positiva elevada.

Um aspecto muito relevante presente na teoria do portfólio, é que o risco de um ativo preservado fora de uma carteira, é diferente do seu risco quando o mesmo é incluído na mesma, lembrando que a medida estatística utilizada para medir o risco é o desvio-padrão [21].

---

O risco que um determinado investidor está disposto a assumir, pode depender também de inúmeros fatores sociais, como idade, sexo, estado civil, classe social, profissão, perspectivas futuras, dentre outros. A construção de uma carteira pode variar demasiadamente devido a essas características, sendo que os investidores são normalmente divididos em três grupos: conservadores, moderados e arrojados (ou agressivos) [34].

- O *investidor conservador* possui muita aversão ao risco, tendo como objetivo preservar seu capital, preferindo investimentos com o risco zero e com menor volatilidade, como por exemplo: fundos de renda fixa e tesouro direto;
- O *investidor moderado* tem o intuito de ganhar dinheiro, aceitando correr um certo tipo de risco, admitindo que sua aplicação fique um determinado período sem remuneração e até mesmo tenha uma pequena perda. A preferência desse tipo de investidor é investir em fundos multimercados;
- O *investidor arrojado*, ou *agressivo*, pensa como um especulador financeiro, visando a rentabilidade do seu investimento, assumindo grandes riscos. Esse grupo de investidores prefere investir em ações, fundos de ações e derivativos, e possui investimentos bem diversificados.

O investidor deve ter conhecimento sobre qual grupo de investidores se encaixa, pois isso auxilia a escolher qual dos investimentos são mais adequados para o mesmo, e conseqüentemente gera uma maior proteção aos possíveis imprevistos, além de ser mais uma forma de minimizar os riscos.

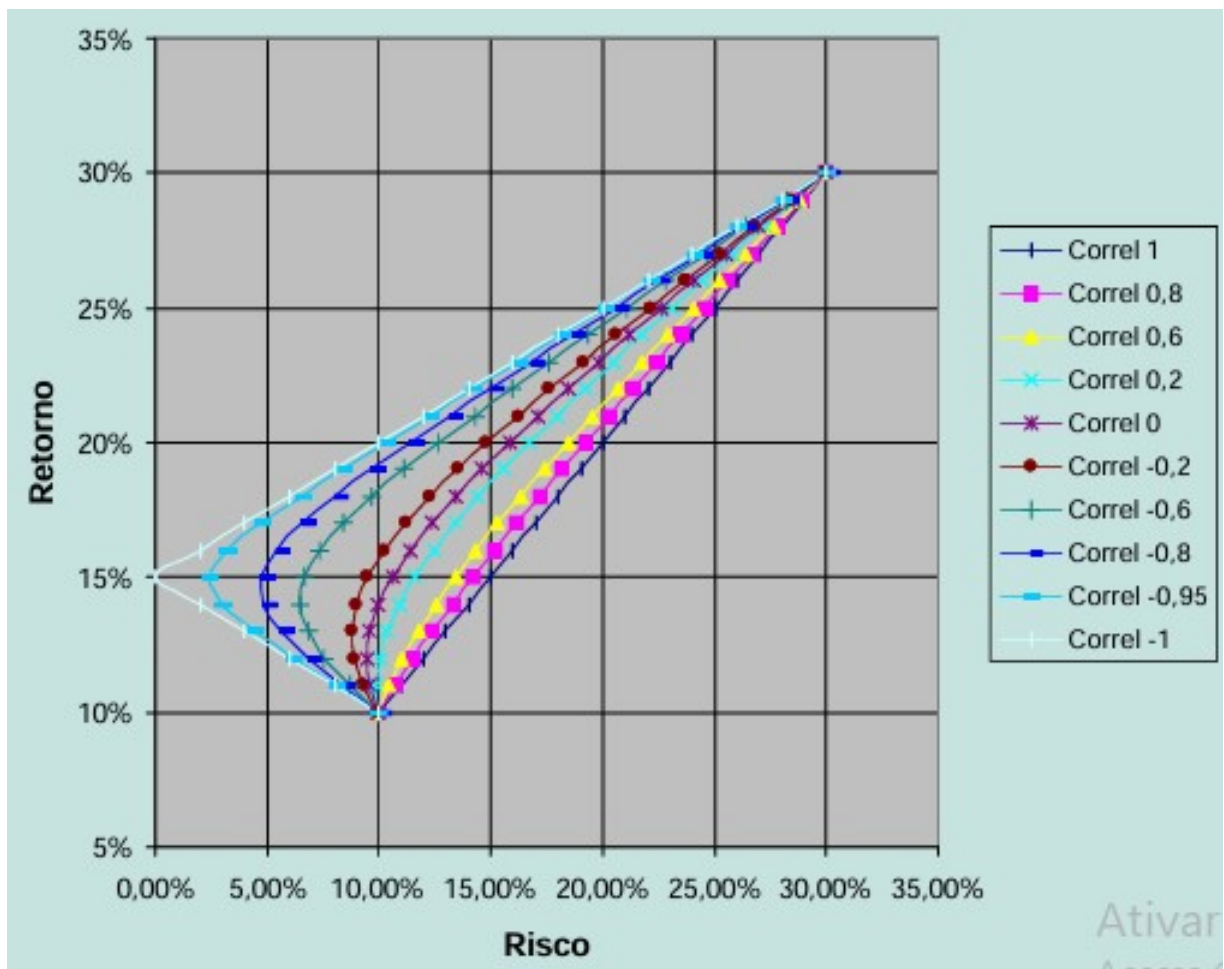
### 6.2.1 Fronteira Eficiente

A seleção da melhor carteira de investimentos para um investidor racional que avalia a relação entre risco e retorno em suas decisões fica limitada às combinações disponíveis na fronteira eficiente. A Teoria Moderna de Portfólios trata-se da combinação de um determinado grupo de  $n$  ativos formando infinitas e diferentes carteiras, sendo que a fronteira eficiente é uma curva que unifica todas as carteiras que são capazes de gerar o maior retorno possível para cada nível de risco. Esses portfólios que estão na fronteira eficiente, denominados de portfólios eficientes são escolhidos através de três informações, sendo elas: a taxa de retorno das ações que compõem a carteira, a variância das taxas de retorno, e a covariância entre as taxas de retorno [35].

Markowitz notou que o risco de um ativo dentro de uma carteira é diferente do risco desse mesmo ativo sozinho, sendo que por esse motivo, começou a considerar três dimensões para o investimento: risco, retorno e covariância (correlação entre os investimentos). Pelo fato da covariância possuir uma grande amplitude, os especialistas da área de investimentos preferem trabalhar com o coeficiente de correlação que varia de -1 a +1 [21].

Os ativos que possuem uma correlação mais próxima de +1 são os que têm uma variação muito próxima ao longo do tempo, e se um sofrer uma variação, o outro também sofrerá. Já os ativos que possuem a correlação mais próxima do -1, são os que sofrem variações contrárias, ou seja, quando um ativo aumenta, o outro diminui, e vice-versa. Podemos observar isso de melhor maneira com a fronteira eficiente, como visto na Figura 14.

Figura 14: Risco e retorno de uma carteira de dois ativos em função da correlação.



Fonte: Figura retirada do artigo [33].

Observando a Figura 14, é possível perceber que, quanto mais o coeficiente de correlação se aproxima de -1, menor é o risco mínimo (sendo este o ponto à esquerda da curva localizado na Figura 14). Em contrapartida, quanto mais próximo o coeficiente está de +1, maior risco mínimo. É importante citar que, no mercado financeiro, encontrar ativos com a correlação perfeitamente negativa (-1) é praticamente impossível [36].

Para cada correlação fixa, o maior retorno, implica em um maior risco (a partir do ponto do risco mínimo).

O investidor racional, deverá escolher entre as carteiras com menor risco, aquela com maior retorno possível. Segundo Markowitz, o investidor ao considerar a relação risco/retorno, o mesmo deverá optar por uma carteira que está localizada na fronteira eficiente.

## 7 Indicadores Econômicos

Como apresentado no capítulo anterior, a diversificação na modelagem de uma carteira de investimentos é primordial para a obtenção de um retorno maior acompanhado de um risco de perdas menor, sendo o papel de um investidor racional, criar esse cenário ideal. Para isso, o mesmo pode contar com o auxílio de informações sobre o histórico das cotações dos investimentos, além dos mais recentes fatores que impactam a modelagem da carteira de investimentos, no qual as informações de ambos os fatores do cenário econômico são muito importantes para a construção da mesma.

O presente capítulo apresenta a definição dos principais indicadores econômicos, e também o panorama dos melhores investimentos para o segundo semestre de 2025, segundo especialistas do mercado financeiro, ao analisar o comportamento dos mesmos durante o segundo semestre de 2024 e o primeiro semestre de 2025.

### 7.1 Principais Indicadores Econômicos no Brasil

Antes de realizar uma análise do cenário econômico, é necessário obter a definição de alguns indicadores econômicos que são divulgados pelo Boletim Focus, um relatório semanal feito pelo Banco Central do Brasil no qual resume as expectativas do mercado sobre os principais indicadores da economia brasileira, sendo eles:

- **Taxa Selic**

É a taxa básica de juros da economia, no qual influencia outras taxas de juros do país, como taxas de empréstimos, financiamentos e aplicações financeiras. A taxa SELIC é atualmente fixada pelo Banco Central, em reuniões periódicas do COPOM (Comitê de Política Monetária), como resultado de uma política monetária que tem uma meta de inflação para cumprir [37].

- **IPCA**

É o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo, que tem por objetivo medir a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, referentes ao consumo pessoal das famílias, sendo que o mesmo é calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) [38].

- **PIB**

O Produto Interno Bruto (PIB), se define como sendo a soma de todos os bens e serviços finais produzidos por um país, estado ou cidade, geralmente em um ano [39].

- **Taxa de Câmbio**

É o preço, em moeda nacional, de uma unidade de moeda estrangeira. O Boletim Focus fornece o valor em Reais referente ao Dólar (Moeda oficial dos Estados Unidos) [40].

## 7.2 Tipos de Investimentos

De maneira geral, os investimentos podem ser divididos em dois grupos, Renda Fixa e Renda Variável, no qual:

- **Renda Fixa**

A *renda fixa* se determina como sendo um investimento com regras de remuneração definidas no momento da aplicação, no qual o investidor tem maior segurança em relação ao que esperar e os ativos de renda fixa oferecem, geralmente, menor risco, além disso, o retorno é possível de ser estimado, já que a condição de remuneração é conhecida desde o momento da aplicação. Lembrando que os investimentos de renda fixa podem ser Prefixado (que é quando a taxa de juros é definida no momento da aplicação e não muda até o vencimento) ou Pós-fixado (no qual a rentabilidade acompanha um índice de referência, como a Taxa Selic ou o CDI) [41]. Dentre os tipos de investimentos que pertencem a este grupo, temos [42]:

- Poupança;
- Certificado de Depósito Bancário (CDB);
- Tesouro Direto;
- Letra de Crédito do Agronegócio (LCA);
- Letra de Crédito Imobiliário (LCI);
- Debêntures.

- **Renda Variável**

A *renda variável* inclui investimentos cujo retorno não é previsível, pois depende de fatores como oferta e demanda, conjuntura econômica e desempenho da empresa ou ativo, mas geralmente, o retorno é bem maior do que em comparação à renda fixa, mas em compensação o risco também é maior. Dentre os tipos de investimentos que pertencem a este grupo, temos [43]:

- Ações;
- Fundos de Imobiliários;
- Criptomoedas;
- Fundos de Índices (ETFs - Exchange Traded Funds).

### 7.2.1 Tipos de Ações

Em sua maioria, as ações são representadas por dois grupos, sendo [44]:

- **Ações Ordinárias**

As ações ordinárias conferem aos seus titulares direitos de voto nas assembleias de acionistas, no qual como resultado, os acionistas têm mais controle sobre as políticas corporativas e questões de gestão. Os códigos das ações ordinárias têm final **3** (Exemplo: SBSP3).

- **Ações Preferenciais**

As ações preferenciais priorizam os investidores, proporcionando maiores direitos sobre os lucros e ativos de uma empresa, mas em compensação os acionistas não possuem participação nas assembleias. Os códigos das ações preferenciais têm final **4** (Exemplo: PETR4).

Existem também alguns subgrupos existentes nesses grupos de ações. Importante citar, que quando o ativo possui no final do seu código, o número **11** (Exemplo: BPAC11), pode significar duas características [45]:

- O ativo pode ser um BDRs (Brazilian Depositary Receipts), no qual representa ações de empresas estrangeiras; ou

- Podem ser Units, que são combinações de ações ordinárias e preferenciais ou ETFs (Exchange Traded Funds).

### 7.2.2 Bolsa de Valores

A Bolsa de Valores, em qualquer lugar do mundo, possui como principal função, atuar como um mercado organizado onde ocorre a negociação de ativos financeiros, no qual além de reunir investidores interessados em comprar e vender ativos financeiros, a bolsa também possui o papel de estabelecer as regras e as condições para que essas negociações ocorram de maneira transparente e segura [46].

A Bolsa de Valores oficial do Brasil, é a B3, sigla para **Brasil, Bolsa e Balcão**, onde se localiza na cidade de São Paulo.

Figura 15: Foto da fachada da B3



Fonte: Foto retirada do site oficial da B3 [47].

### 7.3 Breve panorama do cenário econômico para o Ano de 2025

Segundo o Boletim Focus, o ano de 2024 se encerrou com a taxa Selic em 11,75% a.a., e o preço do dólar se findou em R\$ 6,05, enquanto o IPCA fechou em 4,83%, acima da Meta de Inflação que foi de 3%. É importante ressaltar que também houve o crescimento do PIB que se ampliou em 3,5% em relação a 2023 [48].

Comparando esses dados, com o último relatório analisado publicado no dia 16/05/2025, a taxa Selic aumentou para 14,75% a.a., o IPCA foi para 5,50%, mas em contrapartida o câmbio

---

diminuiu para R\$ 5,82 [49], enquanto o crescimento esperado do PIB para 2025 é de 2%. Além disso, é importante ressaltar que a Meta de Inflação definida pelo Conselho Monetário Nacional (CMN) para o ano de 2025 é de 3%, com intervalo de tolerância de 1,5 ponto percentual para cima ou para baixo, ou seja, o limite inferior é 1,5% e o superior é 4,5%. Com essas projeções, se intensificaram a percepção de incerteza entre os investidores, resultando em uma postura mais avessa ao risco e, conseqüentemente, na retração dos investimentos em ativos de renda variável [50].

No âmbito internacional, em virtude da imposição de tarifas comerciais propostas pelo governo americano, os analistas esperam uma alta volatilidade na bolsa brasileira em virtude de um contexto internacional incerto, no qual acrescenta desafios ao crescimento econômico global [51].

## **7.4 Panorama dos Melhores Investimentos Econômicos para o Ano de 2025**

De acordo com os especialistas, 2025 será um ano pouco favorável para os investidores que desejam focar nas ações da bolsa de valores, assim como em outros ativos de renda variável, como os fundos imobiliários. Sendo que isso representa que os investimentos de maior atratividade, ainda são os investimentos de renda fixa, sendo este considerado uma aplicação conservadora, justamente pela taxa de juros elevada, no qual acaba gerando assim um alto custo de oportunidade, em que o mesmo reflete o valor das oportunidades perdidas ao fazer uma escolha, evidenciando a relação entre as decisões e as renúncias [50].

Dentre as aplicações de renda fixa com retornos mais significativos, estão os Títulos do Tesouro Direto, como Tesouro Selic e o Tesouro IPCA, além dos CDBs (Certificado de Depósito Bancário), LCIs (Letras de Crédito Imobiliário) e LCAs (Letras de Crédito do Agronegócio), na qual todos esses investimentos foram sugeridos devido à uma estratégia eficiente em um cenário que possui uma alta na taxa de juros, em virtude de serem ativos de renda fixa, no qual são indexados à inflação ou possuem taxas prefixadas [52].

O cenário para investir em ações no ano de 2025, se mostrou ser mais dificultoso principalmente com relação aos dois anos anteriores, em virtude do crescimento da taxa de juros e da ampliação da instabilidade econômica. Mas para especialistas, as escolhas mais atrativas são investir em ações oriundas de empresas sólidas no mercado, ou seja, que possuem em seu histórico resultados consistentes e boas perspectivas de crescimento ao longo prazo.

---

Segundo um levantamento realizado por uma empresa no qual presta consultorias para a análise de investimentos (Elos Ayta Consultoria), feito a pedido da própria B3, segue algumas ações que mais renderam no primeiro trimestre de 2025 [53]:

- COGNA (COGN3) - pelo fato de ter apresentado excelentes resultados e, em alguns períodos, rentabilidade significativa, sendo que no primeiro trimestre de 2025, a empresa registrou lucro líquido de R\$ 95,1 milhões, revertendo o prejuízo do mesmo período do ano anterior. Além disso, o lucro ajustado aumentou 205% em relação ao primeiro trimestre de 2024, superando as expectativas do mercado [54];
- ASSAÍ (ASAI3) - em virtude de, no primeiro trimestre de 2025 ter registrado um lucro líquido de R\$ 162 milhões, considerando os dados antes dos ajustes do IFRS16<sup>3</sup>, o que representa um crescimento de 74,2% em relação ao mesmo período de 2024. Já após a aplicação das normas contábeis do IFRS16, que incluem os efeitos de contratos de arrendamento como aluguéis, o lucro foi de R\$ 117 milhões, refletindo uma alta de 95% na comparação anual [56];
- CVC BRASIL (CVCB3) - em decorrência de ter apresentado sinais de recuperação em 2024, com lucro líquido ajustado de R\$ 53,8 milhões no ano (revertendo prejuízo de R\$ 238 milhões em 2023) e R\$ 8,5 milhões no quarto trimestre de 2024 [57];
- CYRELA REALT (CYRE3) - pelo fato de ter apresentado um lucro líquido de R\$ 328 milhões no primeiro trimestre de 2025, no qual evidencia um aumento de 23% em relação ao mesmo período de 2024, além de expressar uma receita líquida que totalizou R\$ 1,953 bilhão, crescimento de 24% na mesma base de comparação anual [58];
- TIM BRASIL (TIMS3) - por ter registrou lucro líquido normalizado de R\$ 810 milhões no primeiro trimestre de 2025, avanço de 56% na comparação com o mesmo período um ano antes, sendo que o aumento no lucro da empresa se deu pela ampliação da receita com os planos pós-pagos de telefonia e internet móvel [59];
- TOTVS (TOTS3) - pelo motivo de apresentar um lucro líquido ajustado de R\$ 227,7 milhões, assim registrando uma alta de 43,7% em relação ao desempenho do ano de 2024, com avanço de quase 20% na receita líquida [60];

---

<sup>3</sup>IFRS16 (International Financial Reporting Standard 16) é uma norma contábil que visa ampliar a transparência e a comparabilidade das demonstrações financeiras relacionadas a arrendamentos [55].

- BTG PACTUAL (BPAC11) - devido a apresentar uma alta de 16,6% no lucro líquido ajustado do primeiro trimestre de 2025 em comparação ao ano anterior, para R\$ 3,37 bilhões, sustentado por carteira de crédito e redução em suas despesas, mostrando ter um desempenho forte em um ambiente econômico desafiador, marcado pela volatilidade e incerteza global [61];
- MAGAZINE LUIZA (MGLU3) - em virtude de apresentar uma forte recuperação no início de 2025, acumulando alta de 18,15% no ano e 2,95% apenas em fevereiro, negociadas a R\$ 7,67 [62].

## 8 Carteira de Investimento

Dado que a Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz foi concebida para ser aplicada nos portfólios de ações, os investimentos selecionados para compor o portfólio são ações negociadas na B3.

Como explicitado no capítulo anterior, dentre os ativos selecionados para compor a carteira estão: COGNA (COGN3), ASSAÍ (ASAI3), CVC BRASIL (CVCB3), CYRELA REALT (CYRE3), TIM BRASIL (TIMS3), TOTVS (TOTS3), BTG PACTUAL (BPAC11) e MAGAZINE LUIZA (MGLU3). Além destes, estão presentes no portfólio:

- SABESP (SBSP3) - com a privatização aprovada pelo Assembléia Legislativa de São Paulo (ALESP), e sancionada pelo governador do mesmo estado, a empresa mostra um otimismo no mercado, em relação a eficiência da companhia, além de gerar mais receita, devido à redução dos custos gerenciais, em virtude do processo de desestatização, sendo que em números obteve lucro líquido de R\$ 1,5 bilhão no primeiro trimestre de 2025, um salto de 80% em relação ao ganho dos primeiros três meses de 2024 e acima da expectativa média no mercado [63].
- PETROBRÁS (PETR4) - dado ser uma das aplicações mais populares entre os ativos brasileiros, no qual iniciou o ano de 2025 com resultados financeiros robustos, registrando um lucro líquido de R\$ 35,2 bilhões no primeiro trimestre, um aumento de 48,6% em relação ao mesmo período do ano anterior. Esse desempenho superou as projeções do mercado, impulsionado por fatores não recorrentes, como variações cambiais [64].

Sendo assim, os dez ativos que foram selecionados para compor a carteira são: COGNA (COGN3), ASSAÍ (ASAI3), CVC BRASIL (CVCB3), CYRELA REALT (CYRE3), TIM BRASIL (TIMS3), TOTVS (TOTS3), BTG PACTUAL (BPAC11), MAGAZINE LUIZA (MGLU3), SABESP (SBSP3) e PETROBRÁS (PETR4).

Ao analisar a carteira, é de extrema relevância notar que cada um dos dez ativos escolhidos é oriundo de um setor diferente da economia, sendo que isso demonstra a diversificação presente na Teoria de Markowitz, e que o mesmo recomenda ao construir uma carteira para obter melhores resultados, visto que se um dos ativos sofrer algum prejuízo devido alguma característica própria do setor econômico a qual pertence, as demais ações não sofrerão.

Dessa forma, notamos que a COGNA pertence ao setor de serviços educacionais, a MAGAZINE LUIZA à indústria de eletrodomésticos, a CVC BRASIL à indústria de viagens e

turismo, a CYRELA REALT ao setor imobiliário (especializada na incorporação e na construção de empreendimentos residenciais), o ASSAÍ à indústria de alimentos, a PETROBRÁS à indústria de extração de petróleo e gás natural, a TIM ao setor de telecomunicações, o BTG PACTUAL ao setor bancário, a SABESP à indústria de saneamento básico, e a TOTVS setor de tecnologia e internet.

## 8.1 Formação da Carteira de Investimentos

Com os dez ativos selecionados, é necessário realizar o levantamento de suas respectivas rentabilidades mensais ao longo do período analisado (2º semestre de 2024 e 1º semestre de 2025), como também a média anual de cada ativo ao decorrer do mesmo período, sendo que ambas as informações são necessárias para o estudo estatístico presente na Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. Sendo que essas informações estão situadas nas Tabelas 1 e 2, na qual foram construídas com o intuito de facilitar o entendimento dos valores trabalhados. Lembrando que esses cálculos estatísticos foram elaborados com o auxílio da planilha eletrônica Microsoft Excel<sup>(TM)</sup> [65].

Tabela 1: Rendimento percentual mensal dos Ativos

Mês\Ativos	COGN3	ASAI3	CVCB3	CYRE3	TIMS3	TOTS3	BPAC11	MGLU3	SBSP3	PETRA4
jul/24	-14,12%	-5,03%	-7,14%	3,40%	10,14%	-8,81%	5,50%	-8,13%	17,70%	-1,70%
ago/24	-9,87%	-2,55%	8,24%	11,95%	1,44%	8,00%	9,05%	9,85%	7,35%	8,25%
set/24	-6,57%	-21,94%	-5,58%	-5,96%	3,67%	-5,48%	-7,43%	-20,23%	-4,57%	-15,20%
out/24	10,16%	0,27%	10,22%	5,95%	-11,48%	4,48%	-2,80%	-2,47%	1,86%	-0,28%
nov/24	-8,51%	-11,88%	17,07%	-15,36%	-4,91%	-7,98%	-6,89%	-4,55%	0,98%	8,33%
dez/24	-15,50%	-14,70%	-42,50%	-7,88%	-7,96%	-2,19%	-9,21%	-28,02%	-4,82%	0,35%
jan/25	25,95%	21,51%	42,75%	15,48%	2,83%	27,33%	20,41%	11,41%	3,39%	1,76%
fev/25	7,80%	-1,04%	-12,18%	1,57%	3,43%	2,64%	-3,04%	-4,16%	0,43%	-4,67%
mar/25	37,50%	13,04%	22,54%	15,18%	11,32%	-4,15%	6,71%	41,96%	7,39%	3,42%
abr/25	26,79%	22,08%	2,36%	8,26%	11,62%	12,74%	13,09%	-5,41%	15,40%	-17,40%
mai/25	15,12%	22,09%	9,22%	0,73%	3,50%	12,20%	3,78%	-1,07%	3,06%	3,03%
jun/25	6,06%	2,50%	10,13%	1,84%	4,82%	-1,18%	1,80%	12,91%	-1,93%	-4,79%

Fonte: INVESTING. Dados Históricos [66].

Tabela 2: Rendimento percentual médio dos Ativos

Período\Ativos	COGN3	ASAI3	CVCB3	CYRE3	TIMS3	TOTS3	BPAC11	MGLU3	SBSP3	PETRA4
2º Sem/2024 e 1º Sem/2025	6,23%	2,03%	4,59%	2,93%	2,37%	3,13%	2,58%	0,17%	3,85%	-1,58%

Fonte: INVESTING. Dados Históricos [66].

Com os dados obtidos na Tabela 1, é possível construir a Tabela 3, na qual mostra o valor de correlação entre cada um dos dez ativos.

Tabela 3: Correlação entre os Ativos

Ativos	COGN3	ASAI3	CVCB3	CYRE3	TIMS3	TOTS3	BPAC11	MGLU3	SBSP3	PETR4
COGN3	1,0000									
ASAI3	0,8322	1,0000								
CVCB3	0,6077	0,5738	1,0000							
CYRE3	0,6579	0,6810	0,5166	1,0000						
TIMS3	0,4289	0,4427	0,2197	0,4575	1,0000					
TOTS3	0,5315	0,7376	0,4804	0,5799	0,0502	1,0000				
BPAC11	0,5965	0,7975	0,6434	0,8315	0,5600	0,7315	1,0000			
MGLU3	0,6780	0,5511	0,7160	0,6899	0,4290	0,1793	0,5462	1,0000		
SBSP3	0,2328	0,4561	0,2084	0,4991	0,6146	0,1128	0,6247	0,2692	1,0000	
PETR4	-0,1479	0,0100	0,2838	0,0336	-0,3763	-0,0027	0,0193	0,3619	-0,0659	1,0000

Fonte: INVESTING. Dados Históricos [66].

E também é possível construir a Tabela 4, que representa o valor das variâncias e covariâncias de cada um dos dez ativos.

Tabela 4: Variância e Covariância entre os Ativos

Ativos	COGN3	ASAI3	CVCB3	CYRE3	TIMS3	TOTS3	BPAC11	MGLU3	SBSP3	PETR4
COGN3	0,0310									
ASAI3	0,0218	0,0222								
CVCB3	0,0223	0,0178	0,0434							
CYRE3	0,0109	0,0095	0,0101	0,0088						
TIMS3	0,0055	0,0048	0,0033	0,0031	0,0054					
TOTS3	0,0099	0,0116	0,0106	0,0057	0,0004	0,0111				
BPAC11	0,0094	0,0107	0,0120	0,0070	0,0037	0,0069	0,0081			
MGLU3	0,0213	0,0146	0,0266	0,0115	0,0056	0,0034	0,0087	0,0317		
SBSP3	0,0029	0,0048	0,0031	0,0033	0,0032	0,0008	0,0040	0,0034	0,0050	
PETR4	-0,0021	0,0001	0,0048	0,0003	-0,0022	0,0000	0,0001	0,0052	-0,0004	0,0065

Fonte: INVESTING. Dados Históricos [66].

Na Tabela 4, as células sombreadas representam a variância entre os ativos que correspondem, sendo que para as variáveis iguais é calculado a variância, e as outras células representam a covariância entre os ativos ao qual estão relacionados, no qual para variáveis diferentes, calcula-se a covariância. Lembrando que as Tabelas 3 e 4 estão na forma triangular, pois são representações de matrizes simétricas.

Para construir uma carteira de investimento composta por cinco ativos entre os dez selecionados anteriormente, é necessário escolher as cinco melhores ações utilizando da perspectiva da relação risco-retorno.

No Capítulo 6, foi abordado sobre a importância da correlação entre os ativos, na qual quanto mais próximo o valor for de -1, menor serão os riscos. Para o risco da carteira ser ainda mais minimizado, além da diversificação que é fornecida por meio da escolha de ativos

de diferentes setores da economia, é necessário escolher os cinco ativos que apresentam as menores correlações. A Tabela 5 fornece nas células que estão sombreadas, os menores valores de correlação existentes entre os dez ativos.

Tabela 5: Correlação entre os cinco melhores ativos que estão em destaque

Ativos	COGN3	ASAI3	CVCB3	CYRE3	TIMS3	TOTS3	BPAC11	MGLU3	SBSP3	PETR4
<b>COGN3</b>	1,0000									
<b>ASAI3</b>	0,8322	1,0000								
<b>CVCB3</b>	0,6077	0,5738	1,0000							
<b>CYRE3</b>	0,6579	0,6810	0,5166	1,0000						
<b>TIMS3</b>	0,4289	0,4427	0,2197	0,4575	1,0000					
<b>TOTS3</b>	0,5315	0,7376	0,4804	0,5799	0,0502	1,0000				
<b>BPAC11</b>	0,5965	0,7975	0,6434	0,8315	0,5600	0,7315	1,0000			
<b>MGLU3</b>	0,6780	0,5511	0,7160	0,6899	0,4290	0,1793	0,5462	1,0000		
<b>SBSP3</b>	0,2328	0,4561	0,2084	0,4991	0,6146	0,1128	0,6247	0,2692	1,0000	
<b>PETR4</b>	<b>-0,1479</b>	0,0100	0,2838	0,0336	<b>-0,3763</b>	<b>-0,0027</b>	0,0193	0,3619	<b>-0,0659</b>	1,0000

Fonte: INVESTING. Dados Históricos [66].

Com a tabela anterior, conseguimos determinar que os cinco ativos selecionados para compor a carteira de investimento, por possuírem os menores valores de correlação, são: PETROBRÁS (PETR4), COGNA (COGN3), TIM BRASIL (TIMS3), TOTVS (TOTS3) e SABESP (SBSP3).

Em virtude dessa carteira constituída por esses ativos ser otimizada, é necessário que seja identificado o risco individual de cada um desses ativos, sendo que essa informação é fornecida através do coeficiente de variação exposto no Capítulo 5.

As cinco tabelas indicadas a seguir, mostra o cálculo do risco individual de cada um dos cinco ativos.

Tabela 6: Risco do ativo PETR4 (PETROBRÁS)

PETROBRÁS (PETR4)	
Variância	0,0065
Desvio-Padrão	0,0805
Média	<b>-1,58%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7: Risco do ativo COGN3 (COGNA)

<b>COGNA (COGN3)</b>	
<b>Variância</b>	<b>0,0310</b>
<b>Desvio-Padrão</b>	<b>0,1761</b>
<b>Média</b>	<b>6,05%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 8: Risco do ativo TIMS3 (TIM BRASIL)

<b>TIM BRASIL (TIMS3)</b>	
<b>Variância</b>	<b>0,0054</b>
<b>Desvio-Padrão</b>	<b>0,0732</b>
<b>Média</b>	<b>2,37%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 9: Risco do ativo TOTS3 (TOTVS)

<b>TOTVS (TOTS3)</b>	
<b>Variância</b>	<b>0,0111</b>
<b>Desvio-Padrão</b>	<b>0,1056</b>
<b>Média</b>	<b>3,13%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 10: Risco do ativo SBSP3 (SABESP)

<b>SABESP (SBSP3)</b>	
<b>Variância</b>	<b>0,005</b>
<b>Desvio-Padrão</b>	<b>0,0710</b>
<b>Média</b>	<b>3,85%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 8.2 Problema de Programação Não-Linear a ser Otimizado na perspectiva de um Investidor Moderado

Modelando um problema para um investidor de perfil moderado, o mesmo deve sempre buscar a minimização dos riscos da carteira, sendo que os critérios de minimização do risco da carteira variam de investidor para investidor, assim como as restrições à serem inseridas no problema.

O problema de otimização não-linear que será otimizado é determinado por uma carteira composta por cinco ativos, escolhido dentre dez ativos, através de análises estatísticas. Com isso, determinamos que:

$$n = 5,$$

na qual  $n$  se refere ao número de ativos existentes da carteira.

Levando em conta, que os ativos escolhidos são: COGN3, TIMS3, TOTS3, SBSP3 e PETR4, temos que:

$x_1$  : é o peso do ativo COGN3 (COGNA) na composição da carteira;

$x_2$  : é o peso do ativo TIMS3 (TIM BRASIL) na composição da carteira;

$x_3$  : é o peso do ativo TOTS3 (TOTVS) na composição da carteira;

$x_4$  : é o peso do ativo SBSP3 (SABESP) na composição da carteira.

$x_5$  : é o peso do ativo PETR4 (PETROBRÁS) na composição da carteira;

As Tabelas 11 e 12 são os dados que serão usados no programa:

Tabela 11: Correlações entre os Ativos selecionados

Ativos	COGN3	TIMS3	TOTS3	SBSP3	PETR4
COGN3	1	0,4289	0,5315	0,2328	-0,1479
TIMS3	0,4289	1	0,0502	0,6146	-0,3763
TOTS3	0,5315	0,0502	1	0,1128	-0,0027
SBSP3	0,2328	0,6146	0,1128	1	-0,0659
PETR4	-0,1479	-0,3763	-0,0027	-0,0659	1

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Tabela 12: Média e Desvio-Padrão dos Ativos selecionados

Ativos	COGN3	TIMS3	TOTS3	SBSP3	PETR4
Média	0,0605	0,0237	0,0313	0,0385	-0,0158
Desvio-Padrão	0,1761	0,0732	0,1056	0,071	0,0805

Fonte: Elaborado pelo Autor.

A função objetivo do problema será representada pela minimização da variância da carteira:

$$\text{VAR}(R_p) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i x_j s_{ij}$$

onde  $s_{ij}$  é a covariância que pode ser recuperada da correlação  $r_{ij}$  por  $s_{ij} = r_{ij} \delta_i \delta_j$ , onde  $\delta_k$  é o desvio padrão do ativo  $k$ .

E também deseja maximizar a soma das participações dos ativos ponderadas pelo seu retorno médio da carteira (Esperança):

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^5 x_i \mu_i$$

relembrando que  $\mu_i$  é o retorno esperado (média) do ativo  $i$ .

A restrição do problema será a soma das participações de cada ativo na carteira, no que deve ser igual a 100%:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 1.$$

Então, a restrição resulta na seguinte forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1.$$

Além disso, será necessário as restrições de não-negatividade:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Portanto, temos um problema com duas funções objetivo, denominado de Problema Multiobjetivo, sendo ele representado por:

$$\text{Min VAR}(R_p)$$

$$\text{Max } E(R_p)$$

$$\text{sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Uma das estratégias para a obter resolução de um problema multiobjetivo é realizar uma combinação linear, no qual transformará para um problema com apenas um único objetivo. Inicialmente, observe que  $\text{Max } E(R_p)$  é equivalente a  $\text{Min } -E(R_p)$ . Assim, poderá considerar a minimização da combinação linear, isto é,

$$\text{Min } Z(x) = \alpha \cdot \text{VAR}(R_p) + \beta \cdot (-E(R_p)), \text{ com } \alpha, \beta > 0.$$

Escolhendo  $\alpha = \frac{K}{2}$  e  $\beta = 1$ , temos:

$$Z(x) = \frac{K}{2} \text{VAR}(R_p) - E(R_p).$$

Sendo que  $K > 0$ , é a constante de aversão ao risco, que é escolhido pelo investidor, no qual quanto maior o  $K$ , menor será o risco envolvido.

Assim, o problema se define por [67]:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \frac{K}{2} \text{VAR}(R_p) - E(R_p) \\ &\text{sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 = 0 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Analisando a função objetivo do problema modelado, é possível notar que a mesma é uma função convexa. Para observar essa característica, é necessário analisar a esperança do portfólio ( $E$ ), no qual é uma função linear em termos de  $x$ .

Temos que,  $E(x) = \mu^t x$  para  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  onde  $\mu_i$  são retornos esperados dos ativos do portfólio. Portanto, a função é tanto convexo quanto côncava, sendo que  $-E(x)$  é convexa.

A variância do portfólio é uma função quadrática em relação a  $x$ . Sendo que  $V = x^t G x$  para a matriz de covariância  $G$  entre ativos da carteira (com entradas  $g_{ij} = s_{ij}$  é a covariância entre os ativos  $i$  e  $j$ ), no qual é simétrica e positiva semidefinida ( $\forall x, x^t G x \geq 0$ ) [68], o que implica que é uma função convexa.

Como  $Z(x)$  é uma combinação linear com coeficientes positivos das funções convexas, é uma função convexa [12]. Conseqüentemente, a função objetivo do problema é representado por uma minimização convexa, sendo que o problema possui as suas restrições (uma restrição de igualdade e uma restrição de não negatividade dos parâmetros). As restrições de não negatividade dos parâmetros e a restrição de igualdade podem ser incorporadas na função objetiva com o uso da função de penalidade.

Dado

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f \\ & \text{sujeito a } g_i(x) \leq 0 \\ & \quad h_i(x) = 0. \end{aligned}$$

poderá considerar o problema irrestrito com a seguinte função objetivo:

$$\phi(x) = f(x) + \sum_i p_i(g_i(x)) + \sum_j q_j(h_j(x))$$

onde:

$$p(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u \leq 0 \\ \frac{C}{2} \cdot u^2, & \text{se } u > 0 \end{cases}$$

e  $q(u) = \frac{D}{2} \cdot u^2$ , no qual  $C$  e  $D$  são constantes positivas [12].

Com isso, o valor de  $\phi$  cresce muito rapidamente fora da região factível, forçando a voltar para a região factível pelo processo de minimização. Dentro da região factível,  $\phi(x) = f(x)$ , e com isso, espera-se que a solução do problema original seja o ponto de mínimo de  $\phi$ . Além disso, pela escolha da função penalidade no qual é convexa, se  $f$ ,  $g$  e  $h$  forem convexas,  $\phi$  também será convexa.

Assim, o problema é fornecido pela minimização da função objetivo convexa  $\phi(x) = \frac{K}{2}V(x) - E(x) + \sum_i p_i(-x_i) + q_j(h(x))$ , onde  $h(x) = x_1 + \dots + x_n - 1$ , é um problema convexo sem restrições.

Para a resolução desse problema, foi utilizado o Método do Gradiente e de Newton com o algoritmo *Backtracking*, no qual ocorre a busca pelo ponto de mínimo da função, enquanto o Método de Newton Simples realiza a busca pelo ponto crítico, em virtude que o único ponto crítico é o ponto de mínimo global, por ser convexo.

Uma outra forma de resolver o problema, é utilizar a função lagrangiana na restrição de igualdade, deixando a função penalidade somente para a restrição de não negatividade.

Com a função penalidade somente na restrição de desigualdade, teremos o seguinte problema de minimização:

$$\begin{aligned} & \phi(x) = f(x) + \sum_i p_i(g_i(x)) \\ & \text{sujeito a } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 = 0 \end{aligned}$$

onde  $f(x) = \frac{K}{2}\text{VAR}(x) - E(x)$ . Notamos que  $\phi(x)$  é convexa, e sua restrição de igualdade  $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 = 0$  é uma função afim regular (regular por imagem de  $h(x)$  conter uma bola, sendo que neste caso, um intervalo com centro na origem [12], pois  $h$  é contínua e  $h(0, \dots, 0) = -1$  e  $h(2, 0, \dots, 0) = 1$ ), o que implica que a solução do problema também é um ponto estacionário da função lagrangiana  $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$  [12].

Para este caso, foi aplicado o Método de Newton Simples sem o *Backtracking* para obter o ponto crítico. Note que o *Backtracking* acaba forçando na direção do mínimo, o que não pode ser usado para o ponto estacionário da lagrangiana, que nem sempre será um ponto de mínimo. Para a análise de resultados, foi utilizado o Método SQP (Sequential Quadratic Programming) presente no GNU Octave como referência.

### 8.3 Resultados Obtidos e Comentários

O programa foi implementado em GNU Octave que é um programa de código aberto concebido em 1988, compatível com o programa comercial MATLAB, destinada principalmente a computações numéricas.

Essa linguagem fornece uma interface de linha de comando, assim como uma interface gráfica, para resolver problemas lineares e não lineares numericamente, e para executar outros experimentos numéricos, incluindo a resolução de problemas lineares e não lineares [69].

Os algoritmos testados foram os seguintes:

- Método de Newton Simples (com o fator de escala 0.1 para os passos);
- Método do Gradiente com *Backtracking*;
- Método de Newton com *Backtracking*;
- Método de Newton Simples com Lagrange.

Para referência, foi usado o SQP (*Sequential Quadratic Programming*) embutido em GNU Octave. Em todos os algoritmos, foram colocados os parâmetros expostos pela Tabela 13.

Tabela 13: Parâmetros utilizados nos algoritmos

Parâmetros Utilizados	
K	6
C	10000
D	100

Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo que o valor escolhido para K (constante de aversão ao risco), foi em virtude do perfil do investidor, no qual para o presente trabalho é o de Perfil Moderado. Os valores de C e D são os pesos da função penalidade para restrições de não negatividade e de igualdade, respectivamente. Na Tabela 14, são fornecidos os resultados de todos os algoritmos, e na Tabela 15, apresenta a solução ótima do problema.

Tabela 14: Resultados fornecidos pelos algoritmos

	SQP	Newton Simples	Gradiente com Backtracking	Newton com Backtracking	Newton com Lagrange
Tempo (em s)	0,062837	1,5367	12,055	0,1083	2,0617
Iteração	20	351	2359	7	314
E(x)	0,041457	0,041461	0,037689	0,041461	0,041458
Desvio-Padrão	0,069606	0,069611	0,069244	0,06961	0,069606
f(x)	-0,026923	-0,026924	-0,023304	-0,026924	-0,026923

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 15: Solução Ótima fornecida pelos algoritmos

Solução Ótima	SQP	Newton Simples	Gradiente com Backtracking	Newton com Backtracking	Newton com Lagrange
COGN3 (COGNA)	0,161	1,61E-01	1,77E-01	0,16133	0,16133
TIMS3 (TIM BRASIL)	0	-9,34E-06	2,18E-01	-0,0000018667	-0,0000093418
TOTS3 (TOTVS)	0,0823	8,23E-02	2,07E-01	0,082325	0,082296
SBSP3 (SABESP)	0,756	7,56E-01	3,98E-01	0,75646	0,7564
PETR4 (PETROBRÁS)	0	-1,56E-05	-5,94E-06	-0,0000081581	-0,000015632

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Enquanto na Tabela 16, temos os dados que fornecem o Erro Relativo de cada método utilizado.

Tabela 16: Erro Relativo de cada método

	Newton Simples	Gradiente com Backtracking	Newton com Backtracking	Newton com Lagrange
<b>Tempo (em s)</b>	23,45533682	190,8455687	0,7235068511	31,81028693
<b>Iterações</b>	16,55	116,95	0,65	14,7
<b>E(x)</b>	0,00009648551511	0,09088935524	0,00009648551511	0,00002412137878
<b>Desvio-Padrão</b>	0,00007183288797	0,005200701089	0,00005746631038	0
<b>f(x)</b>	0,00003714296327	0,1344203841	0,00003714296327	0

Fonte: Elaborado pelo Autor.

O método que apresentou o menor erro absoluto revelou-se o mais adequado, no qual vale lembrar que não se trata de um problema de tempo crítico (onde a urgência da solução é o fator decisivo). Por outro lado, aquele com o maior desvio em relação à referência foi considerado o menos eficiente. Em detalhes, temos que:

- O Método de Newton com Lagrange foi o único a obter erro nulo em comparação ao SQP, sendo portanto o melhor em termos de precisão;
- O Método de Newton Simples e o Método de Newton com *Backtracking* também mostraram desempenho sólido, com erros residuais quase nulos, resultando em soluções plenamente aceitáveis;
- O Método do Gradiente com *Backtracking* teve o pior resultado, exibindo um erro considerável, no qual compromete a qualidade da carteira gerada, mesmo apresentando uma diversificação na escolha dos ativos.

Embora o critério tempo não seja o fator de maior relevância na construção do presente trabalho, é possível comparar os tempos de execução (excluindo o SQP, que serve apenas como referência) a partir da planilha Excel disponível. Nessa análise, o Método Newton com *Backtracking* foi o mais rápido entre os métodos utilizados, enquanto o Método do Gradiente com *Backtracking* foi o mais demorado para obter a solução ótima do problema, pelo fato de não aproveitar a segunda derivada, pois o problema apresentou uma segunda derivada não nula.

Do ponto de vista da composição da carteira, alguns ativos receberam peso zero (ou muito perto de zero). Isso indica que, no compromisso entre minimizar o risco e maximizar o retorno, esses ativos, provavelmente caracterizados por fornecer um baixo retorno médio e/ou um alto risco, não contribuíram para a fronteira ótima e, portanto, foram naturalmente excluídos.

O Método de Newton com Lagrange, apresentou os melhores resultados, em virtude de incorporar diretamente as condições de otimalidade via multiplicadores de Lagrange, no qual eliminou a necessidade de termos de penalidade na restrição de igualdade. Essa formulação evita o desequilíbrio entre o objetivo e as penalizações, conferindo maior estabilidade e precisão à convergência do método.

## 9 Considerações Finais

Ao decorrer da pesquisa, é possível notar que construir um portfólio de investimentos formada por ativos que são negociados na B3 (Bolsa de Valores Brasileira) é complexo e exige demasiado estudo, sendo que investir todo ou grande parte do seu capital é altamente arriscado. Além disso, o cenário econômico que o país está percorrendo, impacta diretamente no mercado financeiro.

A aplicação da Otimização Não-Linear na construção de uma carteira de investimentos demonstrou ser uma abordagem extremamente eficiente e eficaz para otimizar o portfólio. Através das técnicas presentes na Programação Não-Linear, foi viável desenvolver uma estratégia que reúne e equilibra risco e retorno, considerando as expectativas do mercado de ações, como também as características individuais de cada ativo.

Os resultados obtidos, indicam que uma carteira diversificada, edificada através de modelos matemáticos e dados históricos, pode alcançar uma performance superior em comparação a uma seleção aleatória de ativos.

É importante lembrar que não existe um modelo de carteira ótima, pois cada uma é feita para um tipo de perfil de investidor, tornando assim a modelagem de um portfólio algo extremamente peculiar para o investidor.

O estudo matemático apresentado neste trabalho orienta o investidor em direção ao cenário desejado para seus investimentos e também contribui para mitigar possíveis cenários desfavoráveis. No entanto, na prática, ele não garante a rentabilidade do portfólio. Em síntese, investir em uma carteira de ações pode ser vantajoso para aqueles que sabem tomar decisões acertadas no universo dos investimentos.

É importante ressaltar também que existem diferenças entre construir um estudo acadêmico, e aplicar esse estudo na Bolsa de Valores, pois para se investir é necessário que o investidor seja cliente de uma corretora de investimento, fazendo com que uma parte do retorno fornecido pelo portfólio fique com a corretora, sendo isso representado pelas taxas administrativas, ou seja, existem mais fatores de decisão para além da construção de um estudo matemático.

## 9.1 Algumas ideias para Trabalhos Futuros

- Utilizar o Método de Cholesky modificado no Algoritmo de Newton com *Backtracking*, para assim tentar evitar que convirja para o ponto de máximo local quando não há garantia de convexidade da função, e/ou que processo pare quando a matriz hessiana é singular, no qual isto permite lidar com problemas mais complexos;
- Utilizar o Método de Newton Modificado em vez do Método de Newton Tradicional para reduzir os cálculos necessários;
- No caso da carteira, poderá considerar a linha de capital  $E = \frac{K}{2}V + C$ , onde  $C$  é o constante que representa o retorno do ativo de risco zero, no qual poderá maximizar o  $K$ , ou seja, considerando  $K(x) = \frac{2(E(x)-C)}{V(x)}$ , poderá pensar no problema:

Maximizar  $K(x)$

sujeito a  $x_1 + \dots + x_n = 1$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

no qual esse problema não é convexo [70]. Neste cenário, estará procurando pela carteira que maximize a relação retorno/risco.

Algumas dessas ideias provavelmente serão concretizadas em virtude de um possível ingresso no Programa de Pós-Graduação (Mestrado Acadêmico) em Economia Aplicada na UFS-Car Sorocaba, no qual tenho o intuito de continuar meus estudos na linha de pesquisa de Aplicação de Modelagem Matemática para a Construção de Portfólios de Investimentos.

---

## Referências

- [1] ARENALES, M. N. et al. *Pesquisa Operacional*. 1. ed. São Paulo: McGraw Hill Brasil, 2007.
- [2] WIKIPÉDIA. *Albert Percival Rowe*. 2025. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Albert\\_Rowe\\_\(physicist\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Albert_Rowe_(physicist)). Acesso em: 20 jan. 2025.
- [3] FREDERICK S; LIEBERMAN, G. J. . *Introdução à Pesquisa Operacional*. 9. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2013.
- [4] STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning, 2017.
- [5] SILVA JÚNIOR, A. F. *Modelagem Matemática Aplicada aos Fenômenos Físicos*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2022.
- [6] LACHTERMACHER, G. *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2016.
- [7] MATHWORKS. *Nonlinear Programming*. 2025. Disponível em: <https://la.mathworks.com/discovery/nonlinear-programming.html>. Acesso em: 10 jul. 2025.
- [8] JOHN, K. S. *Modeling the Army's Modernization Strategy in Response to Fiscal Constraints: A Linear Programming Approach*. Dissertação (Master's Thesis) — Naval Postgraduate School, Monterey, CA, 2021.
- [9] COTTLE, R.; JOHNSON, E.; WETS, R. George B. Dantzig (1914–2005). *Notices of the AMS*, v. 54, n. 3, p. 344–362, 2007.
- [10] CARVALHO, S. M. S. *Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidroelétrico com manobras programadas*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade Estadual de Campinas (IMECC–UNICAMP), Campinas, 2007.
- [11] ROSAL, M. C. F. *Programação Não-Linear aplicada à Otimização de Redes Pressurizadas de Distribuição de Água*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, Recife, 2007.

- 
- [12] LUENBERGER D. G.; YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming*. 4. ed. Reading: Addison-Wesley, 2015.
- [13] GEOGEBRA. *GeoGebra 2D/3D*. Linz, Áustria, 2025.
- [14] COSTA, J. S. *Programação Não-Linear Inteira Mista aplicada ao Problema de Dimensionamento de Lotes*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Rio de Janeiro, 2022.
- [15] FRIEDLANDER, A. *Elementos de Programação Não-Linear*. Campinas: UNICAMP, 2012.
- [16] FERRAZ, B. A. *Métodos Computacionais de Otimização*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, 2017.
- [17] MASSAGO, S. *Matriz Hessiana e Aplicações*. São Carlos, 2010. Notas de Aula.
- [18] GROSSINHO, M. R. *Lições de Cálculo para Economia*. Lisboa: Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa (ISEG), 2009.
- [19] BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [20] GREMAUD, A. P. et al. *Introdução à Economia*. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2017.
- [21] ASSAF, A. *Mercado Financeiro*. São Paulo: Atlas, 2014.
- [22] VEIGA, A. L. B. C.; CRUZ, M. A. *Fundamentos de Finanças*. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2009.
- [23] TUROLLA, F. *Gestão de Portfólio de Investimentos*. São Paulo: Editora Senac São Paulo, 2020.
- [24] ASSAF, A. *Matemática Financeira e suas Aplicações*. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.
- [25] CASTRO, J. L.; FERNANDES, M. W. S.; ALMEIDA, R. L. F. de. *Estatística e Probabilidade*. Brasília: Fundação Cecierj / CAPES, 2015. Livro Didático.
- [26] MATA, H. T. C. *Macroeconomia*. Salvador: UFBA - Faculdade de Ciências Contábeis (Superintendência de Educação a Distância), 2018.

- 
- [27] VASCONCELLOS, M. A. S.; GARCIA, M. E. *Fundamentos de Economia*. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2002.
- [28] MORETTIN, L. G. *Estatística Básica – Vol. 1: Probabilidade*. São Paulo: Makron Books, 1999.
- [29] UC SAN DIEGO - Rady School of Management. *Harry Markowitz - Adjunct Professor of Finance (Retired)*. Disponível em: <https://rady.ucsd.edu/faculty-research/faculty/emeriti-faculty/harry-markowitz.html>. Acesso em: 10 abr. 2024.
- [30] THE NOBEL PRIZE. *Harry M. Markowitz - Biographical*. Disponível em: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1990/markowitz/biographical/>. Acesso em: 10 abr. 2024.
- [31] KLEIN, D. B.; DAZA, R.; MEAD, H. Harry M. Markowitz (Ideological Profiles of the Economics). *Econ Journal Watch*, v. 10, n. 3, p. 440–443, 2013.
- [32] MARQUES, S. et al. Comparação de desempenhos de carteiras otimizadas pelo modelo de markowitz e a carteira de ações do Ibovespa. *Revista Evidenciação Contábil & Finanças*, v. 1, n. 1, p. 20–37, 2013.
- [33] JUNIOR, C. G.; MONTEVECHI, J. A. B.; PAMPLONA, E. O. Seleção de carteiras através do modelo de markowitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas). In: *Anais do IX Simpósio de Engenharia de Produção – SIMPEP*. Bauru, SP: SIMPEP, 2002. p. 1–10. Disponível em: <[http://www.rodriгоfernandez.com.br/ecomп/ref/excel\\_markowitz.pdf](http://www.rodriгоfernandez.com.br/ecomп/ref/excel_markowitz.pdf)>.
- [34] HAUBERT, F. L. C.; LIMA, C. R. M.; LIMA, M. V. A. Finanças comportamentais: uma investigação com base na teoria do prospecto e no perfil do investidor de estudantes de cursos stricto sensu portugueses. *Revista de Ciências da Administração*, v. 16, n. 38, p. 183–195, 2014.
- [35] SANTOS, D. R. et al. Escolha de carteira de investimento: aplicação no mercado financeiro brasileiro. *Brazilian Applied Science Review*, v. 5, n. 1, p. 568–583, 2021.
- [36] ZIN, R. A.; TARSO, E. Como o pequeno investidor pode usar as teorias de graham e markowitz. *Revista Brasileira de Contabilidade e Gestão*, v. 4, n. 8, p. 28–41, 2016.

- 
- [37] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Taxa SELIC*. 2025. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic>. Acesso em: 21 mai. 2025.
- [38] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). *Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)*. 2025. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?=&t=o-que-e>. Acesso em: 21 mai. 2025.
- [39] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). *Produto Interno Bruto (PIB)*. 2025. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/pib.php>. Acesso em: 21 mai. 2025.
- [40] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *O que é Câmbio*. 2025. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/estabilidadefinanceira/oqueecambio>. Acesso em: 21 mai. 2025.
- [41] EXAME. *Prefixado, pós-fixado ou híbrido: qual a melhor opção para investir em renda fixa?*. 2025. Disponível em: <https://exame.com/invest/guia/prefixado-pos-fixado-ou-hibrido-qual-a-melhor-opcao-para-investir-em-renda-fixa/>. Acesso em: 04 jul. 2025.
- [42] EXAME. *Renda Fixa: o que é, como investir e quais as melhores aplicações*. 2024. Disponível em: <https://exame.com/invest/guia/renda-fixa>. Acesso em: 04 jul. 2025.
- [43] EXAME. *Entenda o que é renda variável e quais são as opções*. 2025. Disponível em: <https://exame.com/invest/guia/entenda-o-que-e-renda-variavel-e-quais-sao-as-opcoes/>. Acesso em: 04 jul. 2025.
- [44] EXAME. *Qual a diferença entre ações ordinárias e preferenciais?* 2022. Disponível em: <https://exame.com/invest/guia/qual-a-diferenca-entre-acoes-ordinarias-e-preferenciais/>. Acesso em: 04 jul. 2025.
- [45] B3 - BORA INVESTIR. *Códigos das Ações - O que é, significado e definição*. 2024. Disponível em: <https://borainvestir.b3.com.br/glossario/codigos-das-acoes/>. Acesso em: 04 jul. 2025.

- 
- [46] INFOMONEY. *O que é a B3 e como investir na bolsa brasileira*. 2022. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/guias/o-que-e-b3/>. Acesso em: 10 jul. 2025.
- [47] B3. *A Bolsa do Brasil*. 2025. Disponível em: <https://www.b3.com.br/>. Acesso em: 10 jul. 2025.
- [48] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Boletim Focus: Relatório de Mercado – 27 de Dezembro de 2024*. 2024. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/content/focus/focus/R20241227.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2025.
- [49] BANCO CENTRAL DO BRASIL. *Boletim Focus: Relatório de Mercado – 16 de Maio de 2025*. 2025. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/content/focus/focus/R20250516.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2025.
- [50] EXAME. *Selic a 15% em 2025? Especialistas dizem onde investir em renda fixa*. 2025. Disponível em: <https://exame.com/invest/onde-investir/selic-a-15-em-2025-especialistas-dizem-onde-investir-em-renda-fixa/>. Acesso em: 29 abr. 2025.
- [51] EXAME. *FMI reduz projeção de crescimento do Brasil em 2025; veja o novo valor*. 2025. Disponível em: <https://exame.com/economia/fmi-reduz-projecao-de-crescimento-do-brasil-em-2025-veja-o-novo-valor/>. Acesso em: 29 abr. 2025.
- [52] EXAME. *Os 5 melhores investimentos para 2024*. Disponível em: <https://exame.com/invest/guia/melhores-investimentos/>. Acesso em: 23 mai. 2024.
- [53] B3 - BORA INVESTIR. *As 10 ações do Ibovespa que mais subiram no 1º trimestre de 2025*. 2025. Disponível em: <https://borainvestir.b3.com.br/tipos-de-investimentos/renda-variavel/acoes/as-10-acoes-do-ibovespa-que-mais-subiram-no-1o-trimestre-de-2025/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [54] INFOMONEY. *Cogna (COGN3) reverte prejuízo e lucra R\$ 95 milhões no 1º trimestre*. 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/cogna-cogn3-resultados-primeiro-trimestre-2025/>. Acesso em: 17 mai. 2025.

- 
- [55] DATTOS. ***IFRS 16: tudo o que você precisa saber sobre a norma contábil.*** 2024. Disponível em: <https://www.dattos.com.br/blog/ifrs-16/>. Acesso em: 01 jun. 2025.
- [56] INFOMONEY. ***Assaí (ASAI3) registra lucro de R\$ 162 milhões no 1º tri, avanço anual de 74,2%.*** 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/assai-asai3-resultados-primeiro-trimestre-2025/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [57] INFOMONEY. ***CVC (CVCB3) reverte prejuízo com lucro ajustado de R\$ 8,5 mi no 4T e vê "nova fase".*** 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/cvc-cvcb3-resultados-quarto-trimestre-2024/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [58] INFOMONEY. ***Cyrela (CYRE3) tem lucro líquido de R\$ 328 milhões no 1º trimestre, alta anual de 23%.*** 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/cyrela-cyre3-resultados-primeiro-trimestre-2025/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [59] INFOMONEY. ***TIM (TIMS3) lucra R\$ 810 mi no 1º tri, alta anual de 56%, e aprova R\$ 300 mi em JCP.*** 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/tim-tims3-resultados-primeiro-trimestre-2025/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [60] INFOMONEY. ***Totvs (TOTS3) eleva lucro ajustado em 44% no 1º trimestre, a R\$ 227,7 milhões.*** 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/totvs-tots3-resultados-primeiro-trimestre-2025/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [61] INFOMONEY. ***BTG Pactual (BPAC11) tem alta de 16,6% no lucro do 1º tri, para R\$ 3,37 bi.*** 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/btg-pactual-bpac11-tem-alta-de-166-no-lucro-do-1o-tri-para-r-337-bi/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [62] INFOMONEY. ***Magazine Luiza (MGLU3) dispara 18% em 2025: até onde vai a alta das ações da empresa?.*** 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/m>

- 
- ercados/magazine-luiza-mglu3-dispara-18-em-2025-ate-onde-vai-a-alta-das-acoes-da-empresa/. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [63] INFOMONEY. **Sabesp (SBSP3) vê lucro subir 80% no 1T, a R\$ 1,5 bi, e anuncia recompra de ações**. 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/sabesp-sbsp3-resultados-primeiro-trimestre-2025-anuncio-recompra-acoes/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [64] INFOMONEY. **Após balanço, ação da Petrobras caminha entre investimentos e política de dividendos**. 2025. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/apos-balanco-acao-da-petrobras-caminha-entre-investimentos-e-politica-de-dividendos/>. Acesso em: 17 mai. 2025.
- [65] MICROSOFT CORPORATION. **Microsoft Excel**. Redmond, WA, 2019.
- [66] INVESTING. **Investing.com Brasil - Finanças, Câmbio e Investimentos: Histórico de Cotações**. 2025. Disponível em: <https://br.investing.com>. Acesso em: 05 jun. 2025.
- [67] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. 1. ed. Nova York: Springer, 1999.
- [68] BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harper & Row, 1980.
- [69] EATON, J. W. et al. **GNU Octave: Version 9.3.0 Manual**. Boston, MA, 2024.
- [70] ELTON, E.; GRUBER, M.; BROWN, S. **Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos**. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

## Apêndice

Segue abaixo os códigos utilizados no software OCTAVE, para a obtenção da solução do primeiro problema [69]:

### A Resolução do Portfólio

#### A.1 SQP (Sequential Quadratic Programming)

```
% Portfolio com sqp (sequential quadratic programming) do Octave
% Usando modelo de portfolio apresentado em Nocedal, 2nd edition, cap 16,
% pag. 450

% Ter alguma coisa antes da declaracao de funcao para ser reconhecida como
% script e nao o arquivo somente da funcao.
% Observacao: se iniciar com declaracao da funcao, sera assumido que eh
% arquivo de funcao que contem apenas uma funcao com mesmo nome do arquivo.

disp('Portfolio usando sqp (sequential quadratic programmong) do GNU Octave
');

%% funcoes da carteira

% retorno esperado da carteira
function y = E(x)
    global Mu;
    y = Mu*x;
endfunction

% Variancia da carteira
function y = V(x)
    global G;
    y = transpose(x)*G*x;
endfunction

% minimizar esta
function y=f(x)
    global K;
```

```

    y = (K/2)*V(x) - E(x);
endfunction

# condition g(x) = 0 (soma = 1)
function y = g(x)
    y=[sum(x)-1];
endfunction

%% inicio do processamento

global K = 6; % parametro de aversao ao risco: usado em f(x)

% lendo esperanca e desvio padrao
data = loadcsv("portfolio_esperanca-e-desvio_padrao.csv", "Delimiter", ';' ,
    "DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);
global Mu = data(1,:);
desvio_padrao = data(2,:);

% le correlacao e recupera o covariancia
data = loadcsv("portfolio_correlacao.csv", "Delimiter", ';' , "
    DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);
global G = data;
[n, temp] = size(data);
for i=1:n
    for j=1:n
        G(i,j)=G(i,j)*desvio_padrao(i)*desvio_padrao(j);
    end;
end

x0 = ones(n,1); % ponto inicial
% calculando pelo metodo sqp (sequential quadratic programming)
t0 = cputime();
[x, obj, info, iter, nf, lambda] = sqp (x0, @f, @g, [], zeros(n,1), ones(n
    ,1)); % com 0 <= x <= 1
disp('CPU time'); cputime() - t0

% Mostrando valores
disp('iter:'); iter
disp('lambda'); lambda
x

```

```
disp('f(x)'); f(x)
disp('g(x): deve ser nulo'); g(x)

disp('E(x)'); E(x)
disp('V(x)'); V(x)
disp('desvio padrao'); sqrt(V(x))

%disp('pressione ENTER');
%pause(); % pausa
```

## A.2 Newton Simples

```
% Portfolio usando metodo de newton simples com as funcoes penalidade
% Usando o modelo de portfolio apresentado em Nocedal, 2nd edition, cap 16,
    pag. 450

% Ter alguma coisa antes da declaracao da funcao para ser reconhecida como
    script e nao o arquivo somente da funcao.
% Observacao: se iniciar com declaracao da funcao, sera assumido que eh
    arquivo de funcao que contem apenas uma funcao com mesmo nome do arquivo.

disp('Portfolio com o metodo de newton simples com funcoes de penalidade');

%% funcoes da carteira

% retorno esperado da carteira
function y = E(x)
    global Mu;
    y = Mu*x;
endfunction

% Vaancia da carteira
function y = V(x)
    global G;
    y = transpose(x)*G*x;
endfunction

% minimizar esta
function y=f(x)
    global K;
    y = (K/2)*V(x) - E(x);
endfunction

% restricao do tipo g(x)=0 (soma dos pesos igual a 1)
function y = g(x)
    y=sum(x)-1;
endfunction

# restricao de desigualdade h(x) <= 0 (para x>=0, h(x) = -x)
```

```
function y = h(x)
    y=-x;
endfunction

% funcao penalidade (p(x) grande para x >= 0 e p(x) = 0 para x <= 0)
function z = penalty(x)
    global C;
    if x<= 0
        z = 0;
    else
        z = (C/2)*(x^2); % para ter segunda derivada = C para x \geq 0
    end
endfunction

% funcao penalidade bilateral (p(x) grande para x != 0 e p(x) = 0 para x ==
    0)
function z = penaltybilateral(x)
    global D;
    z = (D/2)*(x^2); % para ter segunda derivada D
endfunction

function y = phi(x) % funcao + penalidades
    y = f(x) + penaltybilateral(g(x)) + sum(arrayfun(@penalty, h(x)) );
endfunction

%% inicio do processo
% parametro das funcoes penalidades
global C=1E4;
global D=1E2;

global K = 6; % parametro de aversao ao risco, usado em f(x)

%% lendo e preparando dados

% le esperanca e desvio padrao
data = loadcsv("portfolio_esperanca-e-desvio_padrao.csv", "Delimiter", ';' ,
    "DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);
global Mu = data(1,:); # usado em E(x)
desvio_padrao = data(2,:);
```

```
% le correlacao e recupera o covariancia
data = loadcsv("portfolio_correlacao.csv", "Delimiter", ';', "
    DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);

global G = data; # usado em R(x)

[n, temp] = size(data);
for i=1:n
    for j=1:n
        G(i, j)=G(i, j)*desvio_padrao(i)*desvio_padrao(j);
    end;
end

x0 = ones(n,1); % ponto inicial

% calculando pelo metodo de newton simples, com funcoes de penalidade
t0 = cputime();
[x, iter] = newton_simple(@phi, x0, eps, 1000, 0.1);
disp('CPU time'); cputime() - t0

% Mostrando valores
disp('iter:'); iter
x
disp('f(x)'); f(x)
disp('g(x): deve ser nulo'); g(x)

disp('grad phi (deve ser nulo)'); calc_grad(@phi, x)

disp('E(x)'); E(x)
disp('V(x)'); V(x)
disp('desvio padrao'); sqrt(V(x))

%disp('pressione ENTER');
%pause(); % pausa
```

### A.3 Gradiente com Backtracking

```
% Portfolio usando metodo de gradiente (com backtracking) e funcao
penalidade
% Usando o modelo de portfolio apresentado em Nocedal, 2nd edition, cap 16,
pag. 450
% Ter alguma coisa antes da declaracao da funcao para ser reconhecida como
script e nao o arquivo somente da funcao.
% Observacao: se iniciar com declaracao da funcao, sera assumido que eh
arquivo de funcao que contem apenas uma funcao com mesmo nome do arquivo.

disp('Portfolio com o metodo de gradiente com backtracking');

%% funcoes da carteira

% retorno esperado da carteira
function y = E(x)
    global Mu;
    y = Mu*x;
endfunction

% Variancia da carteira
function y = V(x)
    global G;
    y = transpose(x)*G*x;
endfunction

% minimizar esta
function y=f(x)
    global K;
    y = (K/2)*V(x) - E(x);
endfunction

% restricao do tipo g(x)=0 (soma dos pesos igual a 1)
function y = g(x)
    y=sum(x)-1;
endfunction
```

```

# restricao de desigualdade h(x) <= 0 (para x>=0, h(x) = -x)
function y = h(x)
    y=-x;
endfunction

% funcao penalidade (p(x) grande para x >= 0 e p(x) = 0 para x <= 0)
function z = penalty(x)
    global C;
    if x<= 0
        z = 0;
    else
        z = (C/2)*(x^2); % para ter primeira derivada continua e segunda
        derivada C
    end
endfunction

% funcao penalidade bilateral (p(x) grande para x != 0 e p(x) = 0 para x ==
    0)
function z = penaltybilateral(x)
    global D;
    z = (D/2)*(x^2); % para ter primeira derivada continua e segunda derivada
    D
endfunction

function y = phi(x) % funcao + penalidades
    y = f(x) + penaltybilateral(g(x)) + sum(arrayfun(@penalty, h(x)) );
endfunction

%% inicio do processo
% parametros das funcoes penalidade
global C=1E4;
global D=1E2;

global K = 6; % parametro de aversao ao risco, usado em f(x)

%% lendo e preparando dados

% le esperanca e desvio padrao
data = loadcsv("portfolio_esperanca-e-desvio_padrao.csv", "Delimiter", ',');

```

```
    "DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);
global Mu = data(1,:); # usado em E(x)
desvio_padrao = data(2,:);

% le correlacao e recupera o covariancia
data = loadcsv("portfolio_correlacao.csv", "Delimiter", ';', "
    DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);

global G = data; # usado em R(x)

[n, temp] = size(data);
for i=1:n
    for j=1:n
        G(i,j)=G(i,j)*desvio_padrao(i)*desvio_padrao(j);
    end;
end

x0 = ones(n,1); % ponto inicial

% calculando pelo metodo de gradiente
t0 = cputime();
[x, iter, count] = gradient_backtracking(@phi, x0, eps, 1000);
disp('CPU time'); cputime() - t0

% Mostrando valores
disp('iter:'); iter
disp('count:'); count
x
disp('f(x)'); f(x)
disp('g(x): deve ser nulo'); g(x)

disp('grad phi (deve ser nulo)'); calc_grad(@phi, x)

disp('E(x)'); E(x)
disp('V(x)'); V(x)
disp('desvio padrao'); sqrt(V(x))

%disp('pressione ENTER');
%pause(); % pausa
```

## A.4 Newton com Backtracking

```
% Portfolio usando metodo de newton com backtracking e as funcoes
penalidade

% Usando o modelo de portfolio apresentado em Nocedal, 2nd edition, cap 16,
pag. 450

% Ter alguma coisa antes da declaracao da funcao para ser reconhecida como
script e nao o arquivo somente da funcao.

% Observacao: se iniciar com declaracao da funcao, sera assumido que eh
arquivo de funcao que contem apenas uma funcao com mesmo nome do arquivo.

disp('Portfolio com o metodo de newton com backtracking e funcoes de
penalidade');

%% funcoes da carteira

% retorno esperado da carteira
function y = E(x)
    global Mu;
    y = Mu*x;
endfunction

% Variancia da carteira
function y = V(x)
    global G;
    y = transpose(x)*G*x;
endfunction

% minimizar esta
function y=f(x)
    global K;
    y = (K/2)*V(x) - E(x);
endfunction

% restricao do tipo g(x)=0 (soma dos pesos igual a 1)
function y = g(x)
    y=sum(x)-1;
endfunction
```

```
# restricao de desigualdade  $h(x) \leq 0$  (para  $x \geq 0$ ,  $h(x) = -x$ )
function y = h(x)
    y=-x;
endfunction

% funcao penalidade ( $p(x)$  grande para  $x \geq 0$  e  $p(x) = 0$  para  $x \leq 0$ )
function z = penalty(x)
    global C;
    if x<= 0
        z = 0;
    else
        z = (C/2)*(x^2); % para ter segunda derivada = C para  $x \geq 0$ 
    end
endfunction

% funcao penalidade bilateral ( $p(x)$  grande para  $x \neq 0$  e  $p(x) = 0$  para  $x == 0$ )
function z = penaltybilateral(x)
    global D;
    z = (D/2)*(x^2); % para ter segunda derivada D
endfunction

function y = phi(x) % funcao + penalidades
    y = f(x) + penaltybilateral(g(x)) + sum(arrayfun(@penalty, h(x)) );
endfunction

%% inicio do processo
% parametros das funcoes penalidade
global C=1E4;
global D=1E2;

global K = 6; % parametro de aversao ao risco, usado em f(x)

%% lendo e preparando dados

% le esperanca e desvio padrao
data = loadcsv("portfolio_esperanca-e-desvio_padrao.csv", "Delimiter", ',',
    "DecimalSeparator", '.', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);
```

```
global Mu = data(1, :); # usado em E(x)
desvio_padrao = data(2, :);

% le correlacao e recupera o covariancia
data = loadcsv("portfolio_correlacao.csv", "Delimiter", ';', "
    DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);

global G = data; # usado em R(x)

[n, temp] = size(data);
for i=1:n
    for j=1:n
        G(i, j)=G(i, j)*desvio_padrao(i)*desvio_padrao(j);
    end;
end

x0 = ones(n,1); % ponto inicial

% calculando pelo metodo de newton com backtracking
t0 = cputime();
[x, iter, count] = newton_backtracking(@phi, x0, eps, 1000);
disp('CPU time'); cputime() - t0

% Mostrando valores
disp('iter:'); iter
disp('count:'); count
x
disp('f(x)'); f(x)
disp('g(x): deve ser nulo'); g(x)

disp('grad phi (deve ser nulo)'); calc_grad(@phi, x)

disp('E(x)'); E(x)
disp('V(x)'); V(x)
disp('desvio padrao'); sqrt(V(x))

%disp('pressione ENTER');
%pause(); % pausa
```

## A.5 Newton com Lagrange

```
% Portfolio usando metodo de Newton com funcao lagrandiana (e penalidadena
    esigualdade)
% Usando o modelo de portfolio apresentado em Nocedal, 2nd edition, cap 16,
    pag. 450
% Ter alguma coisa antes da declaracao de funcao para ser reconhecida como
    script e nao o arquivo somente da funcao.
% Observacao: se iniciar com declaracao da funcao, sera assumido que eh
    arquivo de funcao que contem apenas uma funcao com mesmo nome do arquivo.

disp('Portfolio com o Metodo de Newton, usando a funcao lagrangiana');

%% funcoes da carteira

% retorno esperado da carteira
function y = E(x)
    global Mu;
    y = Mu*x;
endfunction

% Variancia da carteira
function y = V(x)
    global G;
    y = transpose(x)*G*x;
endfunction

% minimizar esta
function y=f(x)
    global K;
    y = (K/2)*V(x) - E(x);
endfunction

% restricao do tipo g(x)=0 (soma dos pesos igual a 1)
function y = g(x)
    y=sum(x)-1;
endfunction
```

```

# restricao de desigualdade h(x) <= 0 (para x>=0, h(x) = -x)
function y = h(x)
    y=-x;
endfunction

% funcao penalidade (p(x) grande para x >= 0 e p(x) = 0 para x <= 0)
function z = penalty(x)
    global C;
    if x<= 0
        z = 0;
    else
        z = (C/2)*(x^2); % para ter segunda derivada = C, para x \geq 0
    end
endfunction

% funcao lagrangiana + penalidade
function y = phi(parameter)
    % separando lambda (multiplicador de Lagrange) de x
    lambda = parameter(end:end); % pegando o ultimo parametro
    x = parameter(1:end-1); % pegando exceto o ultimo
    y = f(x) + lambda * g(x) + sum(arrayfun(@penalty, h(x)) );
endfunction

%% inicio do processamento
% parametro da funcao penalidade
global C=1E4;

global K = 6; % parametro de aversao ao risco (usado em f(x))

% lendo e preparando dados
data = loadcsv("portfolio_esperanca-e-desvio_padrao.csv", "Delimiter", ';',
    "DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);
global Mu = data(1,:); # usado em E(x)
desvio_padrao = data(2,:);

%disp('DEBUG: '); Mu
%disp('DEBUG: '); desvio_padrao

% le correlacao e recupera o covariancia

```

```
data = loadcsv("portfolio_correlacao.csv", "Delimiter", ',', "
    DecimalSeparator", ',', "HeaderLines", 1, "HeaderColumns", 1);
global G = data; % usado em R(x)
[n, temp] = size(data);
for i=1:n
    for j=1:n
        G(i, j)=G(i, j)*desvio_padrao(i)*desvio_padrao(j);
    end;
end

x0 = ones(n,1); % ponto inicial
lambda = 1; % multiplicador de lagrange inicial

% calculando pelo metodo de Newton
t0 = cputime();
[param, iter] = newton_simple(@phi, [x0; lambda], eps, 1000, 1E-1);
disp('CPU time'); cputime() - t0

% separando lambda do x
lambda = param(end:end); % pegando o ultimo (multiplicador de Lagrange)
param(end:end) = []; % removendo o ultimo (para obter x)
x = param;

% Mostrando valores
disp('iter:'); iter
disp('lambda'); lambda

x
disp('grad phi (deve ser nulo)'); calc_grad(@phi, [x; lambda])
disp('f(x)'); f(x)
disp('g(x): deve ser nulo'); g(x)

disp('E(x)'); E(x)
disp('V(x)'); V(x)
disp('desvio padrao'); sqrt(V(x))

%disp('pressione ENTER');
%pause(); % pausa
```

## B Métodos Implementados

### B.1 Cálculo do Gradiente

```
% Calcula gradiente aproximado de f (referencia: Nocedal, 2nd edition, cap.
8, pag. 195)

function grad = calc_grad(f,x0,step=0.5E-4)
[m,n]=size(x0); # row, column
if n != 1
    disp("calc_grad(): x0 com dimensao invalida");
    return;
end
grad = ones(m,1);
x = x0;
f0 = f(x0);
for i=1:m
    x(i,1) = x(i,1)+step;
    fx = f(x);
    x(i,1) = x0(i,1); # restore as x0
    grad(i, 1) = (fx - f0)/step;
end;
end %function
```

## B.2 Cálculo da Hessiana

```
% Calcula hessiana aproximada de f (referencia: Nocedal, 2nd edition, cap.
8, pag. 202)

function hess = calc_hess(f,x0,step=0.5E-4)
    [m,n]=size(x0); # row, column
    if n != 1
        disp("calc_hess(): x0 com dimensao invalida");
        return;
    end
    hess = ones(m,m);
    x = x0;
    f0 = f(x0);
    for i=1:m
        for j=i:m
            x(i,1) = x(i,1)+step;
            fi = f(x);
            x(j,1) = x(j,1)+step;
            fij = f(x);
            x(i,1) = x(i,1) - step; % preview x(i)
            fj = f(x);
            x(i,1) = x0(i,1); % restore x(i)
            x(j,1) = x0(j,1); % restore x(j)
            hess(i, j) = (fij - fi - fj + f0)/(step*step);
            hess(j,i) = hess(i,j);
        end
    end
end %function
```

### B.3 Método de Newton Simples

```
% Metodo de Newton simples (referencia: Luenberger, cap. 8, section 8, pag.
246)
function [x, iter] = newton_simple(f, x0, tolerance=0.5E-8, maxiter=100,
    stepfactor=1.0)
x = x0;
for k=1:maxiter
    x0 = x;
    grad = calc_grad(f, x0);
    hess = calc_hess(f, x0);
    if rcond(hess) <= tolerance
        disp('newton_simple() Hess(f) eh mau condicionado ou singular');
        break;
    end
    d = - (hess \ grad); % hess * d = - grad
    h = stepfactor*d;
    x = x0 + h;
    if norm(h) <= tolerance
        break;
    end
end %for
iter = k;
end %function
```

## B.4 Método do Gradiente com Backtracking

```
% Metodo de descida gradiente (Referencia: Luenberger, cap. 8, section 6,
pag. 234) com backtracking (referencia: Luenberger cap. 8, section 6,
pag 233)
function [x, iter, count] = gradient_backtracking(f, x0, tolerance=0.5E-8,
maxiter=1000,epsilon=0.3, eta=1.1)
x = x0;
fx = f(x0);
count=1;
for k=1:maxiter
    x0 = x;
    f0 = fx;
    grad = calc_grad(f, x0);
    d = -grad; % direcao de descida
    grad_dot_d = transpose(grad) * d;
    alpha = 1;
    do
        h = alpha.*d;
        x = x0 + h;
        fx = f(x);
        if fx <= f0 + epsilon*alpha*grad_dot_d
            break
        else
            alpha /= eta;
            count++;
        end
    until false;
    if norm(h) <= tolerance
        break;
    end
end %for
iter = k;
end %function
```

## B.5 Método de Newton com Backtracking

```
% Metodo de Newton (referencia: Luenberger, cap. 8, section 8, pag. 246)
% com backtracking (referencia: Luenberger cap. 8, section 6, pag 233)
function [x, iter, count] = newton_backtracking(f, x0, tolerance=0.5E-8,
    maxiter=1000,epsilon=0.3, eta=1.1)
x = x0;
fx = f(x0);
count=1;
for k=1:maxiter
    x0 = x;
    f0 = fx;
    grad = calc_grad(f, x0);
    hess = calc_hess(f, x0);
    if rcond(hess) <= tolerance
        disp('newton_simple() Hess(f) eh mau condicionado ou singular');
        break;
    end
    d = - (hess \ grad); % direcao de descida
    grad_dot_d = transpose(grad) * d;
    alpha = 1;
    do
        h = alpha.*d;
        x = x0 + h;
        fx = f(x);
        if fx <= f0 + epsilon*alpha*grad_dot_d
            break
        else
            alpha /= eta;
            count++;
        end
    until false;
    if norm(h) <= tolerance
        break;
    end
end %for
iter = k;
end %function
```

## C Função de Leitura

```

% Some idea from
% https://stackoverflow.com/questions/72742616/how-to-read-csv-files-with-gnu-octave-if-the-delimiter-is
% https://stackoverflow.com/questions/13625519/how-to-remove-a-particular-set-of-rows-from-a-cell-array
% https://stackoverflow.com/questions/48012702/how-to-pass-variadic-arguments-in-octave
% % https://docs.octave.org/v9.1.0/Variable\_002dlength-Argument-Lists.html#XREFvarargin
% and csvread, textscan syntax
% params (varargin) is textscan ones + DecimalSeparator and HeaderColumns
function data = loadcsv(fname, varargin)
    repeat=-1; % default is all rows
    decimal_separator=".";
    header_lines=0;
    header_columns=0;
    param=varargin; % copy params
    % if odd optional parameters, first is repeat
    if mod(length(param), int8(2)) != 0 % odd
        repeat=param{1};
        param(1)=[];
    end
    % Parse parameters
    i=1; n=idivide(length(param), int8(2), "fix");
    while(i<= n)
        deleteitem=true;
        if strcmpi(param{2*i-1}, "DecimalSeparator")
            decimal_separator = param{2*i};
        elseif strcmpi(param{2*i-1}, "HeaderLines")
            header_lines = param{2*i};
        elseif strcmpi(param{2*i-1}, "HeaderColumns")
            header_columns = param{2*i};
        else
            deleteitem=false;
        end
        if deleteitem
            param(2*i-1:2*i) = []; n--;
        end
    end
end

```

```
else
    i++;
end
end %while
fileid = fopen(fname, 'r'); % open the file
% skip header rows, if the case
while(header_lines>0)
    fgetl(fileid); % skip row
    header_lines--;
end
% read data
data = [];
line = "a"; % empty string fail here
while (line != -1) && ((repeat == -1) || (repeat > 0))
    line = fgetl(fileid); % like fgets, but discard newline char
    if line != -1 % not EOF
        if header_columns <= 0 % no header columns
            row = cell2mat(textscan(line, "%s", param{:}));
        else # with header columns
            row = textscan(line, "%s", param{:});
            row{1,1}(1:header_columns) = []; % delete header columns, if the
case
            row = cell2mat(row);
        end
        if decimal_separator != '.'
            row = strrep(row, decimal_separator, '.'); % change decimal
separator
        end
        data = [data; transpose(row)]; % add row (transposed to take as row)
    end %if
    if repeat != -1
        repeat--;
    end
end %while
fclose(fileid); % close file
data = str2double(data); % convert to double
end %function
```