



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Problema de Specht para T-ideais de álgebras de Lie sobre corpos de característica positiva

Edgardo Bladimir Aguirre Rodríguez

São Carlos-SP
Agosto de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Problema de Specht para T-ideais de álgebras de Lie sobre corpos de característica positiva

Edgardo Bladimir Aguirre Rodríguez

Orientador: Prof. Dr. Dimas José Gonçalves

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Agosto de 2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Edgardo Bladimir Aguirre Rodríguez, realizada em 21/08/2025.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Dimas José Gonçalves (UFSCar)

Profa. Dra. Carina Alves Severo (UNESP)

Prof. Dr. Fabio Ferrari Ruffino (UFSCar)

*Para todas as pessoas que
estiveram no meu caminho até aqui,
este trabalho também pertence a vocês.*

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao meu orientador, Professor Dr. Dimas José Gonçalves, por sua orientação paciente e incansável. Sem sua dedicação, apoio e confiança, este trabalho não teria sido possível.

Sou igualmente grato ao Departamento de Matemática da UFSCar, pelo acolhimento acadêmico e humano ao longo do mestrado, e pela oportunidade de crescer como pesquisador.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES, a quem agradeço pelo investimento contínuo na formação científica.

À minha mãe, com amor e profunda gratidão, por sua força, sacrifício e fé inabalável. Aos meus amigos em Honduras, que me incentivaram e impulsionaram no caminho da ciência e do conhecimento, minha eterna admiração e carinho.

A todas as pessoas com quem compartilhei experiências ao longo da vida, especialmente em Honduras — familiares, colegas, professores e conhecidos — deixo aqui minha sincera gratidão. Cada encontro, cada conversa e cada gesto de apoio contribuíram, direta ou indiretamente, para que esta conquista fosse possível.

Resumo

Dada uma álgebra, podemos nos questionar se o T-ideal das suas identidades polinomiais é finitamente gerado. Tal problema, formulado em 1950, é conhecido como o Problema de Specht, e já tem resposta, por exemplo, no caso em que a álgebra é associativa. Para álgebras de Lie, o problema permanece em aberto quando o corpo é de característica 0, e um primeiro contra-exemplo foi dado por Vaughan-Lee quando a característica é 2.

Nesta dissertação, apresentaremos um resultado do matemático Drensky, que consiste em exibir T-ideais não finitamente gerados da álgebra de Lie livre para todos os corpos de característica positiva.

Palavras-chave: Álgebras de Lie; Problema de Specht; Identidades polinomiais; Característica positiva; Variedades infinitamente baseadas; T-ideais; Álgebras não associativas.

Abstract

Given an algebra, one may ask whether the T-ideal of its polynomial identities is finitely generated. This question, formulated in 1950, is known as the Specht Problem, and it already has an answer in some cases—for instance, when the algebra is associative. For Lie algebras, the problem remains open when the field has characteristic zero, and a first counterexample was given by Vaughan-Lee in the case of characteristic 2.

In this dissertation, we present a result by the mathematician Vesselin Drensky, which exhibits T-ideals that are not finitely generated in the free Lie algebra over any field of positive characteristic.

Keywords: Lie algebras; Specht problem; Polynomial identities; Positive characteristic; Infinitely based varieties; T-ideals; Non-associative algebra.

Sumário

Introdução	1
1 Teoria básica de Álgebras de Lie	3
1.1 Conceitos básicos de álgebras	3
1.1.1 Homomorfismos e Ideais	5
1.1.2 Álgebra Quociente e Teorema de Isomorfismo	6
1.2 Álgebras de Lie	7
1.2.1 Álgebra de Lie a partir de uma álgebra associativa	9
1.2.2 Álgebras de Lie a partir de espaços vetoriais	10
1.2.3 Álgebra de Lie gerada	13
1.2.4 Álgebra de Lie de derivações	14
1.2.5 Produto semidireto de álgebras de Lie	15
1.3 Álgebras de Lie Nilpotentes e Solúveis	18
2 Uma introdução às PI-álgebras de Lie	21
2.1 Álgebra de Lie Livre	21
2.1.1 Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW) e Teorema de Witt	23
2.2 Identidades Polinomiais em Álgebras de Lie	26
2.3 T -ideais e variedades de álgebras de Lie	27
2.3.1 T -ideais de álgebras de Lie	27
2.3.2 Variedades de álgebras de Lie	30
2.4 Identidades polinomiais multi-homogêneas	32
2.5 O Problema de Specht	37
3 Contraexemplo ao problema de Specht para T-ideais de Álgebras de Lie	41
3.1 Conjunto T_n e álgebra de Lie A_n	41
3.2 Álgebra de Lie D_n	46
3.3 Álgebra de Lie B_n	49
3.4 Álgebra de Lie C_n	56
3.5 T -ideal infinitamente gerado	61

4	Identities Polinomiais de Álgebras de Lie de Dimensão Finita	63
4.1	Algumas aplicações de T_n e C_n	63
4.2	Algumas identidades de C_n	64
4.3	Álgebra de Lie L_2	66
	Referências Bibliográficas	70

Introdução

As álgebras de Lie surgiram no final do século XIX nos trabalhos de Sophus Lie, inicialmente motivadas pelo estudo das simetrias de equações diferenciais e dos grupos de transformações contínuas. Com o passar das décadas, essas estruturas algébricas não associativas tornaram-se centrais em diversos ramos da matemática e da física teórica, especialmente na teoria de representações, na geometria diferencial, na teoria de Galois diferencial e na física de partículas.

Formalmente, uma álgebra de Lie é um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} , dotada de uma multiplicação bilinear chamada de colchete $[\cdot, \cdot]$ que satisfaz duas propriedades fundamentais: a antissimetria e a identidade de Jacobi. Apesar de sua definição simples, essas estruturas exibem uma teoria profunda e variada, em especial quando se considera a dependência em relação à característica do corpo base.

Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ nas variáveis não necessariamente comutativas/associativas x_1, \dots, x_n e com coeficientes num corpo \mathbb{K} é chamado de identidade polinomial para uma \mathbb{K} -álgebra A se

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in A$, ou seja, se f se anula sempre que trocamos as suas variáveis por elementos de A . É claro que o polinômio nulo sempre será uma identidade polinomial para A , mas se além deste polinômio existir outra identidade polinomial, então A será chamada de PI-álgebra. São exemplos de PI-álgebras as álgebras comutativas, álgebras de dimensão finita e outras mais.

Um dos temas centrais na teoria das identidades polinomiais em álgebras é o chamado Problema de Specht, formulado por Wilhelm Specht em 1950 no contexto de álgebras associativas sobre corpos de característica zero. A questão proposta por Specht consiste em saber se todo ideal de identidades polinomiais (também chamado de T -ideal) é finitamente gerado. Em outras palavras, pergunta-se se existe um conjunto finito de identidades a partir do qual todas as demais possam ser obtidas por meio delas.

No caso das álgebras associativas sobre corpos de característica zero, o problema foi resolvido positivamente por A. R. Kemer no ano de 1987, em um trabalho notável que utilizou técnicas sofisticadas envolvendo representações de grupos simétricos e estruturas radicais (ver [8]). No entanto, quando se trata de corpos de característica positiva, o comportamento das identidades polinomiais se torna significativamente mais complexo. Diversos resultados demonstraram que, nesse contexto, o problema de Specht tem resposta negativa.

No âmbito das álgebras de Lie, o estudo das identidades polinomiais remonta aos trabalhos de M. R. Vaughan-Lee [9], Yu. A. Bahturin [2], e V. S. Drensky [5], os quais construíram exemplos explícitos de variedades infinitamente baseadas de álgebras de Lie sobre corpos de característica positiva. Nesses trabalhos, mostrou-se que existem T-ideais que não admitem uma base finita de identidades, o que fornece contraexemplos diretos ao problema de Specht nesse cenário.

Esses avanços permitiram compreender melhor a estrutura e a complexidade das identidades em álgebras de Lie em característica positiva. Entretanto, vários problemas permanecem em aberto, sendo um deles o Problema de Specht quando o corpo é de característica 0.

A presente dissertação está inserida nesse contexto e tem como objetivo estudar o Problema de Specht para T-ideais de álgebras de Lie sobre corpos de característica positiva, analisando construções existentes que mostram o fracasso da finitude das identidades, e explorando os mecanismos que levam à falha da propriedade de Specht em diferentes níveis.

A estrutura do trabalho está organizada em quatro capítulos, descritos a seguir:

Capítulo 1 – Preliminares: Neste capítulo, são apresentados os conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo da dissertação. Discutem-se os conceitos de álgebra de Lie, como construí-las e algumas propriedades.

Capítulo 2 - Uma introdução às PI-álgebras de Lie: Neste capítulo, são apresentados os conceitos de álgebra de Lie livre, o Teorema de PBW, identidades polinomiais e propriedades dos T-ideais.

Capítulo 3 – Construção de um contraexemplo: Neste capítulo, apresentamos de maneira detalhada alguns resultados de [5]. Em particular, mostra-se aqui o resultado principal desta dissertação que consiste em exibir um T -ideal na álgebra de Lie livre infinitamente gerado quando o corpo é de característica positiva.

Capítulo 4 – Uma álgebra de dimensão $2p + 3$: Constrói-se uma álgebra de Lie de dimensão finita cujas identidades polinomiais não são finitamente geradas. Esse exemplo ilustra que a finitude das identidades pode falhar mesmo em álgebras de dimensão pequena, reforçando a complexidade do problema.

Através dessa organização, este trabalho oferece uma abordagem abrangente do Problema de Specht em álgebras de Lie sobre corpos de característica positiva, consolidando construções fundamentais e discutindo os desdobramentos teóricos que envolvem T-ideais infinitamente gerados nesse contexto.

Teoria básica de Álgebras de Lie

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos fundamentais que servirão de base para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Neste capítulo apresentamos as definições e resultados básicos de álgebras de Lie, com exemplos bem detalhados de construções de álgebras de Lie, álgebra de Lie gerada, álgebra de derivações, produto semidireto e álgebras de Lie nilpotentes e metabelianas. Para a leitura deste trabalho é preciso estar familiarizado com as principais definições e teoremas clássicos relacionados às estruturas algébricas fundamentais, tais como grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais. Os anéis considerados neste trabalho não são necessariamente associativos.

1.1 Conceitos básicos de álgebras

Nesta dissertação, \mathbb{K} sempre denotará um corpo e todos os espaços vetoriais serão sobre \mathbb{K} .

Definição 1.1. Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto. Dizemos que A é uma \mathbb{K} -álgebra (ou álgebra) se existem três operações

$$\begin{array}{lll} + : A \times A \rightarrow A & * : A \times A \rightarrow A & \cdot : \mathbb{K} \times A \rightarrow A \\ (a, b) \mapsto a + b & (a, b) \mapsto a * b & (\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a \end{array}$$

que satisfazem as três sentenças abaixo:

1. $(A, +, \cdot)$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial.
2. $(A, +, *)$ é um anel.
3. $\lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b = a * (\lambda \cdot b)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $a, b \in A$.

Note que uma álgebra é um \mathbb{K} -espaço vetorial A com uma operação bilinear $* : A \times A \rightarrow A$. Dizemos que as operações $+$ e $*$ são as operações de soma (ou adição) e produto (ou multiplicação) da álgebra A . No que segue, daremos alguns nomes para certas classes de álgebras:

- Se o produto $*$ é associativo, então A é uma álgebra associativa.

- Se o produto $*$ é comutativo, então A é uma álgebra comutativa.
- Se o anel $(A, +, *)$ tem unidade, então A é uma álgebra com unidade.

Por comodidade, para todos $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, simplesmente escreveremos:

$$a * b = ab \text{ e } \lambda \cdot a = \lambda a.$$

Exemplo 1.2. Seja $M_n(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbb{K} . Então, $M_n(\mathbb{K})$ é uma álgebra com as operações usuais de soma, produto por escalar e multiplicação. Note que $M_n(\mathbb{K})$ é uma álgebra associativa com unidade (matriz identidade).

Exemplo 1.3. Seja V um espaço vetorial. Denotamos por $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ o conjunto dos operadores lineares de V , isto é,

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V) = \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ é transformação linear}\}.$$

Sabemos que $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de soma e produto por escalar. Portanto, com a multiplicação dada pela operação de composição de funções \circ , temos que $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ torna-se uma álgebra.

Exemplo 1.4. Seja S um subespaço vetorial de uma álgebra A . Note que S é uma álgebra se, e somente se, $uv \in S$ para todos $u, v \in S$. Neste caso, dizemos que S é uma subálgebra de A .

Exemplo 1.5. Seja A uma álgebra associativa. O centro de A , denotado por $Z(A)$, é o conjunto

$$Z(A) = \{z \in A \mid za = az \text{ para todo } a \in A\}.$$

Temos que $Z(A)$ é uma subálgebra de A . Note que se A é comutativa, então $Z(A) = A$.

Exemplo 1.6. Seja V um espaço vetorial com base $B = \{e_i : i \in I\}$.

(a) Se V é uma álgebra, então para quaisquer dois elementos

$$u = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \quad v = \sum_{j \in I} \beta_j e_j$$

em V , onde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} uv &= \left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) \left(\sum_{j \in I} \beta_j e_j \right) = \sum_{i \in I} \left[\alpha_i e_i \left(\sum_{j \in I} \beta_j e_j \right) \right] \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (\alpha_i e_i) (\beta_j e_j) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \alpha_i \beta_j (e_i e_j). \end{aligned}$$

Note que a multiplicação entre quaisquer dois elementos de V depende do produto entre quaisquer dois elementos da base B de V .

(b) Para cada $i, j \in I$ fixe um elemento $v_{ij} \in V$. Agora, para quaisquer dois elementos

$$u = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \quad v = \sum_{j \in I} \beta_j e_j$$

em V defina a multiplicação entre eles por

$$uv = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) \left(\sum_{j \in I} \beta_j e_j \right) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \alpha_i \beta_j v_{ij}.$$

Pode ser mostrado que V é uma álgebra. Note que $e_i e_j = v_{ij}$, ou seja, definindo a multiplicação entre quaisquer dois elementos da base B de V e estendendo para quaisquer dois elementos de V por linearidade, teremos em V uma estrutura de álgebra.

O item (b) do exemplo nos ensina a construir álgebras a partir de espaços vetoriais.

1.1.1 Homomorfismos e Ideais

Definição 1.7. Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \rightarrow B$ é chamada de homomorfismo de álgebras se:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

para todos $a, b \in A$. Neste caso, se φ é bijetora, dizemos que φ é um isomorfismo de álgebras, e as álgebras A e B são isomorfas. Escrevemos $A \cong B$.

Assim como na teoria de anéis, podemos definir os conceitos de monomorfismo, epimorfismo, endomorfismo e automorfismo.

Exemplo 1.8. Fixe $a = (a_{ij})_{ij} \in \text{Gl}_n(\mathbb{K})$, onde $\text{Gl}_n(\mathbb{K})$ é o grupo linear geral. Relembramos que $\text{Gl}_n(\mathbb{K})$ é o subconjunto de $M_n(\mathbb{K})$ formado pelas matrizes invertíveis. A função $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$, dada por

$$\varphi(x) = axa^{-1}$$

é um isomorfismo de álgebras, chamado de automorfismo interno associado ao elemento a .

Definição 1.9. Sejam A e B duas álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo entre elas. Definimos:

- O Kernel ou núcleo de φ como o conjunto $\ker(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$.
- A imagem de φ como o conjunto $\text{im}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$.

Pode ser mostrado que se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, então a sua imagem é uma subálgebra de B . No que se refere ao núcleo, para caracterizá-lo será necessária a seguinte definição.

Definição 1.10. Seja I um subespaço vetorial de uma álgebra A .

- Dizemos que I é um ideal à esquerda de A se $ai \in I$ para todos $a \in A$ e $i \in I$.
- Dizemos que I é um ideal à direita de A se $ia \in I$ para todos $a \in A$ e $i \in I$.
- Dizemos que I é um ideal bilateral (ou ideal) de A se I é um ideal à esquerda e à direita de A .

Exemplo 1.11. Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, então $\ker(\varphi)$ é um ideal de A . De fato, $\ker(\varphi)$ é um subespaço vetorial e se $x \in \ker(\varphi)$, então para todo $a \in A$, temos que

$$\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a)0 = 0.$$

Assim $ax \in \ker(\varphi)$. Analogamente, $xa \in \ker(\varphi)$. Portanto, $\ker(\varphi)$ é um ideal.

Exemplo 1.12. Seja $U_n(\mathbb{K})$ a subálgebra de $M_n(\mathbb{K})$ formada pelas matrizes triangulares superiores. Seja I o subconjunto de $U_n(\mathbb{K})$ formado pelas matrizes estritamente triangulares superiores, ou seja,

$$I = \{(m_{ij})_{ij} \in U_n(\mathbb{K}) \mid m_{ii} = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}.$$

Então I é um ideal de $U_n(\mathbb{K})$.

Os conceitos a seguir são muito usados na teoria de anéis, aqui adaptamos eles para nosso estudo de álgebras.

1.1.2 Álgebra Quociente e Teorema de Isomorfismo

Se temos uma álgebra A e um ideal I dela, é natural definir uma relação de equivalência \sim da seguinte maneira. Dados $a, b \in A$, dizemos que a se relaciona com b ($a \sim b$), se $a - b \in I$. Desta forma, podemos definir as classes de equivalências como segue:

$$\bar{a} = \{b \in A \mid a \sim b\} = a + I.$$

Exemplo 1.13. O conjunto $\frac{A}{I} = \{a + I \mid a \in A\}$ junto com as operações

- $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$,
- $(a + I)(b + I) = ab + I$,
- $\alpha(a + I) = \alpha a + I$,

onde $a, b \in A$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, forma uma álgebra, chamada de álgebra quociente.

Vamos provar agora o seguinte teorema clássico na teoria de grupos e anéis, adaptado para álgebras, no qual será de utilidade quando falarmos de álgebras relativamente livres.

Teorema 1.14 (Teorema de Isomorfismo). *Sejam A e B duas álgebras e $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo entre elas. Então*

$$\frac{A}{\ker(\varphi)} \cong \text{im}(\varphi).$$

Demonstração. Definimos a aplicação

$$\psi : \frac{A}{\ker(\varphi)} \rightarrow \text{im}(\varphi) \text{ como sendo } \psi(a + \ker(\varphi)) = \varphi(a).$$

a) Provaremos que ψ está bem definida.

De fato, se $a + \ker(\varphi) = b + \ker(\varphi)$, então

$$a - b \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(a - b) = 0 \Rightarrow \varphi(a) - \varphi(b) = 0.$$

Assim, $\varphi(a) = \varphi(b)$, ou seja, $\psi(a + \ker(\varphi)) = \psi(b + \ker(\varphi))$. Portanto, ψ está bem definida.

b) Provaremos que ψ é um homomorfismo.

De fato,

$$\begin{aligned} \psi((a + \ker(\varphi))(b + \ker(\varphi))) &= \psi(ab + \ker(\varphi)) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \\ &= \psi(a + \ker(\varphi))\psi(b + \ker(\varphi)). \end{aligned}$$

Portanto, ψ é um homomorfismo.

c) Provaremos que ψ é uma bijeção.

Por definição da imagem de φ , claramente ψ é sobrejetora. Notemos que uma função é injetora se, e somente se, seu núcleo é formado apenas pelo elemento nulo. Logo, ψ é injetora pois se $a + \ker(\varphi) \in \ker(\psi)$, então

$$\psi(a + \ker(\varphi)) = \varphi(a) = 0$$

e $a \in \ker(\varphi)$, ou seja, $a + \ker(\varphi) = \ker(\varphi)$. Portanto, $\ker(\psi) = \{\ker(\varphi)\} = \{\bar{0}\}$.

Desta forma, ψ é um isomorfismo e $\frac{A}{\ker(\varphi)} \cong \text{im}(\varphi)$. □

Observação 1.15. Sempre que tivermos um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \rightarrow B$ e um ideal $J \subseteq \ker(\varphi)$, podemos definir um homomorfismo $\psi : A/J \rightarrow B$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow \pi & \searrow \psi & \\ A/J & & \end{array}$$

onde $\pi(a) = a + J$ é a projeção natural e $\psi(a + J) = \varphi(a)$ para todo $a \in A$. Usando um argumento análogo ao do último teorema, temos que a aplicação ψ está bem definida porque $J \subseteq \ker(\varphi)$. Além disso, ψ é um homomorfismo de álgebras com imagem igual a $\text{im}(\varphi)$ e núcleo igual a $\ker(\varphi)/J$.

1.2 Álgebras de Lie

Definição 1.16. Uma álgebra G será chamada de álgebra de Lie se cumpre os dois itens a seguir:

1. $xx = 0$,
2. $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$,

para todos $x, y, z \in G$.

De agora em diante, o produto xy de dois elementos x, y de uma álgebra de Lie G será escrito na forma $[x, y]$, e será chamado de colchete de Lie.

- A condição 1, $([x, x] = 0)$, é equivalente a $[x, y] = -[y, x]$ se o corpo \mathbb{K} não tem característica 2. Esta condição é conhecida como Antissimetria.

– De fato, suponha que $[x, y] = -[y, x]$ para todos $x, y \in G$. Então se $x \in G$,

$$[x, x] = -[x, x] \quad \Rightarrow \quad 2[x, x] = 0 \quad \Rightarrow \quad [x, x] = 0.$$

– Reciprocamente, se $[x, x] = 0$ para todo $x \in G$, e utilizando o fato de que o produto é bilinear, temos que:

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \quad \Rightarrow \quad [x, y] = -[y, x].$$

Note que aqui não usamos o fato que a característica de \mathbb{K} é 2, ou seja, tal propriedade é válida para toda álgebra de Lie sobre qualquer corpo e será usada exhaustivamente ao longo do texto.

- A condição 2, $([x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0)$, é conhecida como Identidade de Jacobi, e também pode ser escrita de duas maneiras:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]],$$

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]].$$

No que segue vamos definir algumas notações para o colchete de vários elementos.

Notação 1.17. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ e seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$. Definimos o comutador de comprimento n e o comutador com potências dentro de si por:

- $[x_1, x_2, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n],$

- $[x_1, x_2^0] = x_1,$

- $[x_1, x_2^n] = \left[x_1, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{n\text{-vezes}} \right],$

- $[x_1^n, x_2] = \left[\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n\text{-vezes}}, x_2 \right].$

Lema 1.18. *Seja G uma álgebra de Lie. Se $x, y, z, w \in G$, então*

$$[x, y, [z, w]] = [x, y, z, w] - [x, y, w, z].$$

Demonstração. Pela identidade de Jacobi, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
& [z, w, [x, y]] + [w, [x, y], z] + [[x, y], z, w] = 0 \\
& \Rightarrow [[z, w], [x, y]] = -[w, [x, y], z] - [[x, y], z, w] \\
& \Rightarrow -[[x, y], [z, w]] = -[[w, [x, y]], z] - [[x, y], z, w] \\
& \Rightarrow -[[x, y], [z, w]] = [[x, y], w], z] - [[x, y], z, w] \\
& \Rightarrow [[x, y], [z, w]] = [[x, y], z, w] - [[x, y], w, z] \\
& \Rightarrow [x, y, [z, w]] = [x, y, z, w] - [x, y, w, z],
\end{aligned}$$

como era o desejado. □

Exemplo 1.19. Seja \mathcal{A} um espaço vetorial. Se para todos $x, y \in \mathcal{A}$ definirmos $[x, y] = 0$, então \mathcal{A} será uma álgebra de Lie. Tais álgebras de Lie, ou seja, as álgebras de Lie com colchetes nulos, são chamadas de álgebras de Lie abelianas.

Exemplo 1.20. Seja S um subespaço vetorial de uma álgebra de Lie G . Pelo Exemplo 1.4, S será uma álgebra de Lie, chamada de subálgebra de Lie de G , se para todos $x, y \in S$ tivermos $[x, y] \in S$.

1.2.1 Álgebra de Lie a partir de uma álgebra associativa

Uma classe importante de álgebras de Lie surge das álgebras associativas, na qual permite obter exemplos relevantes. A passagem de uma álgebra associativa para uma álgebra de Lie é feita por meio da operação de comutador, que mede o quanto o produto associativo falha em ser comutativo.

Definição 1.21. Seja A uma álgebra associativa. Se $a, b \in A$, dizemos que

$$[a, b] = ab - ba$$

é o comutador de a e b .

A operação de comutador define uma nova multiplicação bilinear em A , que satisfaz as propriedades fundamentais de uma álgebra de Lie, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 1.22. *Seja A uma álgebra associativa. O espaço vetorial A com o produto comutador $[a, b] = ab - ba$ é uma álgebra de Lie, denotada por $A^{(-)}$.*

Demonstração. O produto da álgebra associativa A é uma função bilinear por definição. Assim, como o colchete é uma combinação linear de funções bilineares, segue que também é bilinear. Logo, $A^{(-)}$ é uma álgebra.

- Para provar que o comutador é antissimétrico, tomamos $x \in A^{(-)}$. Temos $[x, x] = xx - xx = 0$.

- Para provar que o comutador cumpre com a identidade de Jacobi, tomamos $x, y, z \in A^{(-)}$. Temos

$$\begin{aligned} & [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] \\ & = x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) - (zx - xz)y + z(xy - yx) - (xy - yx)z \\ & = x(yz) - x(zy) - (yz)x + (zy)x + y(zx) - y(xz) - (zx)y + (xz)y + z(xy) - z(yx) - (xy)z + (yx)z = 0, \end{aligned}$$

pois o produto na álgebra A é associativo.

Portanto, $A^{(-)}$ é uma álgebra de Lie. □

Exemplo 1.23. Seja V um espaço vetorial. Sejam $M_n(\mathbb{K})$ e $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ as álgebras do Exemplo 1.2 e Exemplo 1.3 respectivamente. Sabemos que o produto de matrizes e a composição de funções são operações associativas. Logo, $(M_n(\mathbb{K}))^{(-)}$ e $(\text{End}_{\mathbb{K}}(V))^{(-)}$ são álgebras de Lie com o colchete de Lie definido como na Proposição 1.22:

$$[A, B] = AB - BA, \quad \text{para } A, B \in M_n(\mathbb{K}),$$

$$[T_1, T_2] = T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1, \quad \text{para } T_1, T_2 \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V).$$

Exemplo 1.24. Seja $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ o subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{K})$ formado pelas matrizes com traço zero. Note que para $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, temos:

$$\text{tr}([A, B]) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0.$$

Logo, $[A, B] \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Segue do Exemplo 1.20 que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ é uma subálgebra de Lie de $(M_n(\mathbb{K}))^{(-)}$.

1.2.2 Álgebras de Lie a partir de espaços vetoriais

Vimos no Exemplo 1.6 como construir uma álgebra estendendo por linearidade o produto definido entre os elementos da base. Na próxima proposição veremos um critério para que tal construção seja uma álgebra de Lie.

Proposição 1.25. *Seja V uma álgebra com base $B = \{e_i : i \in I\}$. Suponha que os três itens abaixo são satisfeitos:*

1. $[e_i, e_i] = 0$ para todo $i \in I$,
2. $[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$ para todos $i, j \in I$,
3. $[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] = 0$ para todos $i, j, k \in I$.

Então, V é uma álgebra de Lie.

Demonstração. Para que V seja uma álgebra de Lie é necessário verificar a propriedade de antissimetria e a identidade de Jacobi:

- Dado $u = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, temos

$$[u, u] = \left[\left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right), \left(\sum_{j \in I} \alpha_j e_j \right) \right] = \sum_{i, j \in I} \alpha_i \alpha_j [e_i, e_j] = \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j ([e_i, e_j] + [e_j, e_i]) + \sum_i \alpha_i^2 ([e_i, e_i]).$$

Pelos itens 1 e 2 do enunciado, segue que $[u, u] = 0$.

- Sejam $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{K}$ e sejam $u, v, w \in V$ dados por:

$$u = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \quad v = \sum_{j \in I} \beta_j e_j, \quad w = \sum_{k \in I} \gamma_k e_k.$$

Temos

$$\begin{aligned} & [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = \\ & = \left[\sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \sum_{j, k \in I} \beta_j \gamma_k [e_j, e_k] \right] + \left[\sum_{j \in I} \beta_j e_j, \sum_{k, i \in I} \gamma_k \alpha_i [e_k, e_i] \right] + \left[\sum_{k \in I} \gamma_k e_k, \sum_{i, j \in I} \alpha_i \beta_j [e_i, e_j] \right] \\ & = \sum_{i, j, k \in I} \alpha_i \beta_j \gamma_k [e_i, [e_j, e_k]] + \sum_{i, j, k \in I} \alpha_i \beta_j \gamma_k [e_j, [e_k, e_i]] + \sum_{i, j, k \in I} \alpha_i \beta_j \gamma_k [e_k, [e_i, e_j]] \\ & = \sum_{i, j, k \in I} \alpha_i \beta_j \gamma_k ([e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]]). \end{aligned}$$

Pelo item 3 do enunciado, segue que

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = \sum_{i, j, k \in I} \alpha_i \beta_j \gamma_k (0) = 0.$$

Logo, a identidade de Jacobi é válida em V .

A demonstração está finalizada. □

Exemplo 1.26. Seja o espaço vetorial \mathfrak{h}_n sobre o corpo \mathbb{K} , gerado pelo conjunto $\{x_i, y_i, z \mid i \in I\}$, onde I é um conjunto finito com n elementos. Suponha que u, v são elementos da base de \mathfrak{h}_n e satisfazem as seguintes relações:

$$[u, v] = \begin{cases} z, & \text{se } u = x_i, v = y_i \text{ para todo } i \in I, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pode-se verificar que os elementos da base com o produto definido desta maneira satisfazem as condições da Proposição 1.25, assim o espaço \mathfrak{h}_n é uma álgebra de Lie na qual é chamada de álgebra de Lie de Heisenberg \mathfrak{h}_n .

O resultado a seguir mostra como construir um produto cartesiano de álgebras de Lie, considerando as álgebras como espaços vetoriais, e definindo o colchete como produto coordenada a coordenada.

Proposição 1.27 (Produto cartesiano de álgebras de Lie). *Seja $\{G_i \mid i \in I\}$ uma família não vazia de álgebras de Lie sobre um corpo \mathbb{K} . O produto cartesiano (ou produto direto externo) dessas álgebras, dado por*

$$G = \prod_{i \in I} G_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \mid f(i) \in G_i \right\},$$

com as operações

- *Adição:* $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$,
- *Produto por escalar:* $(\lambda f)(i) = \lambda f(i)$ e
- *Colchete:* $([f, g])(i) = [f(i), g(i)]$,

para todos $f, g \in G$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, é uma álgebra de Lie.

Demonstração. Se consideramos as álgebras G_i como espaços vetoriais, então o produto cartesiano de espaços vetoriais com a adição e produto por escalar é, de fato, um espaço vetorial. Além disso, se $f, g, h \in G$ e $i \in I$ note que,

$$\begin{aligned} ([f + g, h])(i) &= [(f + g)(i), h(i)] = [f(i) + g(i), h(i)] = [f(i), h(i)] + [g(i), h(i)] \\ &= ([f, h])(i) + ([g, h])(i). \end{aligned}$$

Portanto, $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$. Analogamente, $([f, g + h])(i) = ([f, g])(i) + ([f, h])(i)$. Logo, o colchete é bilinear. Temos que G é uma álgebra. Agora só precisamos provar a antissimetria e a identidade de Jacobi.

- Note que, $([f, f])(i) = [f(i), f(i)] = 0$, pois $f(i) \in G_i$. Portanto, o colchete é antissimétrico.
- Note que,
 - $([f, [g, h]])(i) = [f(i), ([g, h])(i)] = [f(i), [g(i), h(i)]] \in G_i$.
Analogamente,
 - $([g, [h, f]])(i) = [g(i), [h(i), f(i)]] \in G_i$ e
 - $([h, [f, g]])(i) = [h(i), [f(i), g(i)]] \in G_i$.

Logo,

$$\begin{aligned} ([f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]])(i) &= ([f, [g, h]])(i) + ([g, [h, f]])(i) + ([h, [f, g]])(i) \\ &= [f(i), [g(i), h(i)]] + [g(i), [h(i), f(i)]] + [h(i), [f(i), g(i)]] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o colchete cumpre com a identidade de Jacobi.

Provamos que $G = \prod_{i \in I} G_i$ é uma álgebra de Lie. □

Se $\{G_i \mid i \in I\}$ é uma família enumerável de álgebras de Lie, então $I \subseteq \mathbb{N}$. Neste caso, costumamos identificar o elemento abaixo em notação de "sequência". Ou seja, dado $f \in G$ e sendo $f(i) = f_i$, então

$$(f_i)_{i \in I} = \left[f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \right].$$

Portanto,

$$G = \prod_{i \in I} G_i = \left\{ (f_i)_{i \in I} \right\} = \left\{ (f_1, f_2, \dots) \mid f_i \in G_i, \text{ para todo } i \in I \right\}.$$

Neste caso, as operações são dadas por:

- Adição: $(f_1, f_2, \dots) + (g_1, g_2, \dots) = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots)$;
- Produto por escalar: $\lambda(f_1, f_2, \dots) = (\lambda f_1, \lambda f_2, \dots)$;
- Colchete: $[(f_1, f_2, \dots), (g_1, g_2, \dots)] = ([f_1, g_1], [f_2, g_2], \dots)$;

para todos $(f_1, f_2, \dots), (g_1, g_2, \dots) \in G$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

1.2.3 Álgebra de Lie gerada

Definição 1.28. Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de uma álgebra de Lie G . A interseção de todas as subálgebras de Lie de G que contêm S é chamada de subálgebra de Lie gerada por S . Ela será denotada por $\langle S \rangle$.

Note que $\langle S \rangle$ é a menor subálgebra de G que contém S .

Proposição 1.29. Seja $S = \{a_i : i \in I\}$ um subconjunto não vazio de uma álgebra de Lie G . Então, a subálgebra de Lie de G gerada por S é

$$\langle S \rangle = \text{span}_{\mathbb{K}} \left\{ [a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}] \mid i_1, i_2, \dots, i_t \in I \text{ e } t \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstração. Denote por A o subespaço vetorial de G dado por

$$A = \text{span}_{\mathbb{K}} \left\{ [a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}] \mid i_1, i_2, \dots, i_t \in I \text{ e } t \in \mathbb{N} \right\}.$$

Provaremos que A é uma subálgebra de Lie de G . Pelo Exemplo 1.20, basta provar que para todos $s_1, s_2 \in A$ vale que $[s_1, s_2] \in A$. Sejam

$$s_1 = \sum_i \alpha_i [a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}] \text{ e } s_2 = \sum_j \beta_j [a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}], \text{ com } \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}.$$

Então segue da bilinearidade do colchete que:

$$[s_1, s_2] = \left[\sum_i \alpha_i [a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}], \sum_j \beta_j [a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}] \right]$$

$$\Rightarrow [s_1, s_2] = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j [[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}], [a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}]].$$

Fixado t , provaremos por indução em s que $[[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}], [a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_s}]]$ é uma combinação linear de elementos da forma $[z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_{t+s}}]$ tal que $z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_{t+s}} \in \{a_{i_1}, \dots, a_{i_t}, a_{j_1}, \dots, a_{j_s}\}$.

- Se $s = 1$, então $[[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}], a_{j_1}] = [a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}, a_{j_1}]$ e temos o que desejamos.
- Suponha que o resultado é válido para todo $t \in \mathbb{N}$ e um fixado s . Pelo Lema 1.18, temos

$$\begin{aligned} & [[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}], [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}, a_{j_{s+1}}]] = [[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}], [[a_{j_1}, \dots, a_{j_s}], a_{j_{s+1}}]] \\ & = [[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}], [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}], a_{j_{s+1}}] - [[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}], a_{j_{s+1}}, [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}]] \\ & = \left[[[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}], [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}]], a_{j_{s+1}} \right] - \left[[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}, a_{j_{s+1}}], [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}] \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução em $[[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}], [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}]]$ e $\left[[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}, a_{j_{s+1}}], [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}] \right]$, teremos que $\left[[[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}], [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}]], a_{j_{s+1}} \right]$ e $\left[[a_{i_1}, \dots, a_{i_t}, a_{j_{s+1}}], [a_{j_1}, \dots, a_{j_s}] \right]$ são combinações lineares de elementos da forma

$$[z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_{t+s+1}}]$$

com $z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_{t+s+1}} \in \{a_{i_1}, \dots, a_{i_t}, a_{j_1}, \dots, a_{j_{s+1}}\}$.

Em particular,

$$[s_1, s_2] = \sum_k \gamma_k [z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_{t+s}}],$$

onde $z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_{t+s}} \in S$. Ou seja, $[s_1, s_2] \in A$. Provamos que A é uma subálgebra de Lie de G .

Como $S \subset A$, por definição temos que $\langle S \rangle \subseteq A$. Por outro lado, como $\langle S \rangle$ é uma álgebra de Lie que contém S , segue que $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t}] \in \langle S \rangle$ para todos $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t} \in S$. Como $\langle S \rangle$ também é um espaço vetorial, segue que as combinações lineares de tais comutadores estão em $\langle S \rangle$, ou seja, $A \subseteq \langle S \rangle$.

Portanto, $\langle S \rangle = A$. \square

1.2.4 Álgebra de Lie de derivações

Para que o leitor possa comparar o assunto desta dissertação com o do artigo no qual consta o nosso resultado principal, adotaremos a mesma convenção do artigo quando falarmos em derivações. A convenção aqui é a seguinte: dada uma álgebra de Lie G e uma transformação linear $T : G \rightarrow G$ (operador linear de G), a imagem de um elemento $u \in G$ por T denotaremos por $(u)T$. Ou seja, T aplicado em u será denotado por $(u)T$. Neste caso, se T_1 e T_2 são operadores lineares de G , então a composição $T_1 \circ T_2$ é dada por

$$(u)(T_1 \circ T_2) = ((u)T_1)T_2$$

para todo $u \in G$.

Definição 1.30. Seja G uma álgebra de Lie e seja $\delta : G \rightarrow G$ uma transformação linear. Dizemos que δ é uma derivação se, para todos $u, v \in G$,

$$([u, v])\delta = [(u)\delta, v] + [u, (v)\delta].$$

Denotamos por $\text{Der}(G)$, ou simplesmente por $\mathcal{D}(G)$, o conjunto das derivações de G .

Proposição 1.31. Se G é uma álgebra de Lie, então $\mathcal{D}(G)$ é uma subálgebra de Lie de $(\text{End}_{\mathbb{K}}(G))^{(-)}$.

Demonstração. Pela bilinearidade do colchete, não é difícil ver que $\mathcal{D}(G)$ é um subespaço vetorial de $(\text{End}_{\mathbb{K}}(G))^{(-)}$. Portanto, segue do Exemplo 1.20 que $\mathcal{D}(G)$ será uma subálgebra de Lie de $(\text{End}_{\mathbb{K}}(G))^{(-)}$ se, para todos $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{D}(G)$, tivermos $[\delta_1, \delta_2] \in \mathcal{D}(G)$. Pois bem, se $u, v \in G$, então

$$\begin{aligned} ([u, v])[\delta_1, \delta_2] &= ([u, v])(\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1) \\ &= ([u, v])(\delta_1 \circ \delta_2) - ([u, v])(\delta_2 \circ \delta_1) = (([u, v])\delta_1)\delta_2 - (([u, v])\delta_2)\delta_1 \\ &= ([(u)\delta_1, v] + [u, (v)\delta_1]) \delta_2 - ([(u)\delta_2, v] + [u, (v)\delta_2]) \delta_1 \\ &= ([(u)\delta_1, v]) \delta_2 + ([u, (v)\delta_1]) \delta_2 - ([(u)\delta_2, v]) \delta_1 - ([u, (v)\delta_2]) \delta_1 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} [((u)\delta_1)\delta_2, v] + [(u)\delta_1, (v)\delta_2,] + [(u)\delta_2, (v)\delta_1] + [u, ((v)\delta_1)\delta_2] \\ - [((u)\delta_2)\delta_1, v] - [(u)\delta_2, (v)\delta_1,] - [(u)\delta_1, (v)\delta_2] - [u, ((v)\delta_2)\delta_1] \end{array} \right\} \\ &= [((u)\delta_1)\delta_2, v] + [u, ((v)\delta_1)\delta_2] - [((u)\delta_2)\delta_1, v] - [u, ((v)\delta_2)\delta_1] \\ &= [((u)\delta_1)\delta_2, v] - [((u)\delta_2)\delta_1, v] + [u, ((v)\delta_1)\delta_2] - [u, ((v)\delta_2)\delta_1] \\ &= [((u)\delta_1)\delta_2 - ((u)\delta_2)\delta_1, v] + [u, ((v)\delta_1)\delta_2 - ((v)\delta_2)\delta_1] \\ &= [(u)(\delta_1 \circ \delta_2) - (u)(\delta_2 \circ \delta_1), v] + [u, (v)(\delta_1 \circ \delta_2) - (v)(\delta_2 \circ \delta_1)] \\ &= [(u)(\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1), v] + [u, (v)(\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)]. \\ &\Rightarrow ([u, v])[\delta_1, \delta_2] = [(u)[\delta_1, \delta_2], v] + [u, (v)[\delta_1, \delta_2]]. \end{aligned}$$

Portanto, $[\delta_1, \delta_2] \in \mathcal{D}(G)$ e $\mathcal{D}(G)$ é uma subálgebra de Lie de $(\text{End}_{\mathbb{K}}(G))^{(-)}$. \square

1.2.5 Produto semidireto de álgebras de Lie

Nesta subseção falaremos um pouco do produto semidireto entre duas álgebras de Lie, assunto este que precisaremos no Capítulo 3 desta dissertação.

Proposição 1.32. Sejam A e G álgebras de Lie e seja $\varphi : G \rightarrow \mathcal{D}(A)$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Definimos o produto semidireto de A por G referente a φ como sendo o conjunto

$$B = A \rtimes_{\varphi} G = \{(a, g) \mid a \in A, g \in G\}$$

dotado das seguintes operações:

- *Adição:* $(a_1, g_1) + (a_2, g_2) = (a_1 + a_2, g_1 + g_2)$ para todos $(a_1, g_1), (a_2, g_2) \in B$.
- *Produto por escalar:* $\lambda(a, g) = (\lambda a, \lambda g)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(a, g) \in B$.
- *Colchete:* $[(a_1, g_1), (a_2, g_2)] = ([a_1, a_2]_A + (a_1)((g_2)\varphi) - (a_2)((g_1)\varphi), [g_1, g_2]_G)$, onde $[\cdot, \cdot]_A$ é o colchete em A , e $[\cdot, \cdot]_G$ é o colchete em G .

Então, $B = A \rtimes_{\varphi} G$ é uma álgebra de Lie.

Demonstração. Se consideramos as álgebras de Lie A e G como espaços vetoriais, então de fato $B = A \rtimes_{\varphi} G$ com as operações de adição e produto por escalar é o produto cartesiano de espaços vetoriais, no qual é um espaço vetorial. Assim, só precisamos provar que a operação colchete é antissimétrica e cumpre com a identidade de Jacobi.

- *Antissimetria:* De fato, note que

$$[(a, g), (a, g)] = ([a, a]_A + (a)((g)\varphi) - (a)((g)\varphi), [g, g]_G) = (0, 0),$$

para todo $(a, g) \in B$. Portanto o colchete é antissimétrico.

- *Identidade de Jacobi:* Sejam $(a_1, g_1), (a_2, g_2), (a_3, g_3) \in B$. Note que

$$\begin{aligned} [(a_1, g_1), [(a_2, g_2), (a_3, g_3)]] &= \left[(a_1, g_1), ([a_2, a_3] + (a_2)((g_3)\varphi) - (a_3)((g_2)\varphi), [g_2, g_3] \right] \\ &= \left(\left(\begin{array}{c} [a_1, [a_2, a_3] + (a_2)((g_3)\varphi) - (a_3)((g_2)\varphi] + (a_1)(([g_2, g_3])\varphi) \\ - \left([a_2, a_3] + (a_2)((g_3)\varphi) - (a_3)((g_2)\varphi) \right) ((g_1)\varphi) \end{array} \right), [g_1, [g_2, g_3]] \right) \\ &= \left(\left(\begin{array}{c} [a_1, [a_2, a_3]] + [a_1, (a_2)(g_3)\varphi] - [a_1, (a_3)((g_2)\varphi)] + (a_1)(([g_2, g_3])\varphi) \\ - \left([a_2, a_3] \right) ((g_1)\varphi) - \left((a_2)((g_3)\varphi) \right) ((g_1)\varphi) + \left((a_3)((g_2)\varphi) \right) ((g_1)\varphi) \end{array} \right), [g_1, [g_2, g_3]] \right) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} &[(a_2, g_2), [(a_3, g_3), (a_1, g_1)]] \\ &= \left(\left(\begin{array}{c} [a_2, [a_3, a_1]] + [a_2, (a_3)(g_1)\varphi] - [a_2, (a_1)((g_3)\varphi)] + (a_2)(([g_3, g_1])\varphi) \\ - \left([a_3, a_1] \right) ((g_2)\varphi) - \left((a_3)((g_1)\varphi) \right) ((g_2)\varphi) + \left((a_1)((g_3)\varphi) \right) ((g_2)\varphi) \end{array} \right), [g_2, [g_3, g_1]] \right) e \\ &[(a_3, g_3), [(a_1, g_1), (a_2, g_2)]] \\ &= \left(\left(\begin{array}{c} [a_3, [a_1, a_2]] + [a_3, (a_1)(g_2)\varphi] - [a_3, (a_2)((g_1)\varphi)] + (a_3)(([g_1, g_2])\varphi) \\ - \left([a_1, a_2] \right) ((g_3)\varphi) - \left((a_1)((g_2)\varphi) \right) ((g_3)\varphi) + \left((a_2)((g_1)\varphi) \right) ((g_3)\varphi) \end{array} \right), [g_3, [g_1, g_2]] \right). \end{aligned}$$

Pela identidade Jacobi, temos que

$$\begin{aligned} [a_1, [a_2, a_3]] + [a_2, [a_3, a_1]] + [a_3, [a_1, a_2]] &= 0 \text{ e} \\ [g_1, [g_2, g_3]] + [g_2, [g_3, g_1]] + [g_3, [g_1, g_2]] &= 0. \end{aligned}$$

Como $(g)\varphi$ é uma derivação de A em A , para todo $g \in G$, segue que

$$\begin{aligned} \left([a_2, a_3] \right) ((g_1)\varphi) &= \left[(a_2)((g_1)\varphi), a_3 \right] + \left[a_2, (a_3)((g_1)\varphi) \right], \\ \left([a_3, a_1] \right) ((g_2)\varphi) &= \left[(a_3)((g_2)\varphi), a_1 \right] + \left[a_3, (a_1)((g_2)\varphi) \right] \text{ e} \\ \left([a_1, a_2] \right) ((g_3)\varphi) &= \left[(a_1)((g_3)\varphi), a_2 \right] + \left[a_1, (a_2)((g_3)\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Como φ é um homomorfismo e o produto em $\mathcal{D}(A)$ é o comutador, segue que

$$\begin{aligned} (a_1) \left(([g_2, g_3])\varphi \right) &= (a_1) \left([(g_2)\varphi, (g_3)\varphi] \right) = (a_1) \left((g_2)\varphi(g_3)\varphi - (g_3)\varphi(g_2)\varphi \right) \\ &= (a_1) \left((g_2)\varphi(g_3)\varphi \right) - (a_1) \left((g_3)\varphi(g_2)\varphi \right) \\ &= \left((a_1)(g_2)\varphi \right) ((g_3)\varphi) - \left((a_1)(g_3)\varphi \right) ((g_2)\varphi). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} (a_2) \left(([g_3, g_1])\varphi \right) &= \left((a_2)(g_3)\varphi \right) ((g_1)\varphi) - \left((a_2)(g_1)\varphi \right) ((g_3)\varphi) \text{ e} \\ (a_3) \left(([g_1, g_2])\varphi \right) &= \left((a_3)(g_1)\varphi \right) ((g_2)\varphi) - \left((a_3)(g_2)\varphi \right) ((g_1)\varphi). \end{aligned}$$

Logo, pela antissimetria temos o resultado que desejamos,

$$[(a_1, g_1), [(a_2, g_2), (a_3, g_3)]] + [(a_2, g_2), [(a_3, g_3), (a_1, g_1)]] + [(a_3, g_3), [(a_1, g_1), (a_2, g_2)]] = (0, 0).$$

Portanto $B = A \rtimes_{\varphi} G$ é uma álgebra de Lie. \square

Quando estiver claro no contexto quem é a função φ , escreveremos simplesmente $G \rtimes A$ ao invés de $G \rtimes_{\varphi} A$.

Exemplo 1.33. Dada uma álgebra de Lie G , considere a sua álgebra de Lie de derivações $\mathcal{D}(G)$. O produto semidireto de G por $\mathcal{D}(G)$ referente ao homomorfismo identidade de $\mathcal{D}(G)$ é a álgebra de Lie $G \rtimes \mathcal{D}(G)$ com colchete dado por:

$$[(g_1, \delta_1), (g_2, \delta_2)] = ([g_1, g_2] + (g_1)\delta_2 - (g_2)\delta_1, [\delta_1, \delta_2])$$

para todos $g_1, g_2 \in G$ e $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{D}(G)$.

O próximo exemplo é uma adaptação do anterior e será útil na construção da álgebra de Lie B_n que aparecerá no resultado principal desta dissertação.

Exemplo 1.34. Se no Exemplo 1.33 tomarmos uma subálgebra "abeliana" D de $\mathcal{D}(G)$, então a álgebra $G \rtimes D$ terá colchete dado por:

$$[(g_1, \delta_1), (g_2, \delta_2)] = ([g_1, g_2] + (g_1)\delta_2 - (g_2)\delta_1, 0)$$

para todos $g_1, g_2 \in G$ e $\delta_1, \delta_2 \in D$.

1.3 Álgebras de Lie Nilpotentes e Solúveis

Nesta seção, estudaremos as álgebras de Lie nilpotentes e as solúveis, nas quais desempenham um papel fundamental na teoria estrutural das álgebras de Lie, sendo frequentemente utilizadas na caracterização e no estudo de identidades polinomiais.

Definição 1.35. Sejam A, B subconjuntos de uma álgebra de Lie G . Definimos o produto de A por B como sendo

$$[A, B] = \text{span}\{[a, b] \mid a \in A, b \in B\}.$$

Note que, se A, B são ideais de G , então $[A, B]$ é um ideal de G . Pois, dado $x \in G$, $a \in A$ e $b \in B$, pela identidade de Jacobi, temos que

$$[x, [a, b]] = -[a, [b, x]] - [b, [x, a]].$$

Como A, B são ideais de G , temos que $[b, x] \in B$ e $[x, a] \in A$, e conseqüentemente

$$[x, [a, b]] = -[[a, b], x] \in [A, B].$$

Portanto, $[A, B]$ é um ideal de G .

Como G é um ideal de si mesmo, então $[G, G]$ é um ideal de G . Assim, indutivamente, temos que $G^2 = [G, G]$, $G^3 = [G^2, G]$, ..., $G^{k+1} = [G^k, G]$ são ideais de G , para todo $k \geq 1$. Uma vez que $[g_1, g_2, \dots, g_{k+1}] = [[g_1, g_2], g_3, \dots, g_{k+1}] \in G^k$, temos as seguintes inclusões:

$$\dots \subseteq G^{k+1} \subseteq G^k \subseteq \dots \subseteq G^3 \subseteq G^2 \subseteq G^1 = G.$$

Se denotamos $G^{(1)} = [G, G]$, então $G^{(2)} = [[G, G], [G, G]]$ é um ideal de G e assim, indutivamente, $G^{(3)} = [G^{(2)}, G^{(2)}]$, ..., $G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}]$ são ideais de G , para todo $k \geq 0$. Valem as seguintes inclusões:

$$\dots \subseteq G^{(k+1)} \subseteq G^{(k)} \subseteq \dots \subseteq G^{(2)} \subseteq G^{(1)} \subseteq G^{(0)} = G.$$

Logo, temos as seguintes definições.

Definição 1.36. Seja G uma álgebra de Lie.

a) A série central descendente da álgebra de Lie G é definida indutivamente por:

$$\begin{aligned} G^1 &= G \\ G^2 &= [G, G] \\ G^3 &= [G^2, G] \\ &\vdots \\ G^k &= [G^{k-1}, G]. \end{aligned}$$

b) A série derivada de G é definida indutivamente por:

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= G \\ G^{(1)} &= [G, G] \\ G^{(2)} &= [G^{(1)}, G^{(1)}] \\ &\vdots \\ G^{(k)} &= [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

Definição 1.37. Dizemos que G é uma álgebra de Lie solúvel, se existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $G^{(n)} = \{0\}$. O menor tal n é chamado de classe de solubilidade de G .

Definição 1.38. Dizemos que G é uma álgebra de Lie nilpotente, se existe um inteiro $m \geq 0$ tal que $G^{m+1} = \{0\}$. O menor tal m é chamado de classe de nilpotência de G .

Estas definições nos dizem que uma álgebra de Lie é solúvel de classe n se sua série derivada se anula no passo n mas não no anterior. Do mesmo modo, G é nilpotente de classe m , se sua série central descendente se anula no passo $m + 1$ mas não no anterior.

Exemplo 1.39. Seja $A \neq \{0\}$ uma álgebra de Lie abeliana, ou seja, $A^2 = A^{(1)} = \{0\}$. Então, A é nilpotente de classe 1 e solúvel de classe 1.

Observação 1.40. Se G é uma álgebra de Lie, então G^k/G^{k+1} e $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ são álgebras de Lie abelianas para todo k . De fato, note que G^k e $G^{(k)}$ são subálgebras de Lie de G , e $G^{k+1} \subseteq G^k$, $G^{(k+1)} \subseteq G^{(k)}$ são ideais. Segue do Exemplo 1.13 que G^k/G^{k+1} e $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ são álgebras de Lie.

- Sejam $g^k + G^{k+1}, h^k + G^{k+1} \in G^k/G^{k+1}$, onde $g^k, h^k \in G^k$. Então

$$a = [g^k + G^{k+1}, h^k + G^{k+1}] = [g^k, h^k] + G^{k+1}.$$

Como $g^k = [g_1, \dots, g_k]$ e $h = h^k \in G$, segue que $[g^k, h^k] = [g_1, \dots, g_k, h] \in G^{k+1}$. Portanto, $a = 0$.

- Sejam $g^{(k)} + G^{(k+1)}, h^{(k)} + G^{(k+1)} \in G^{(k)}/G^{(k+1)}$, onde $g^{(k)}, h^{(k)} \in G^{(k)}$. Então

$$a = [g^{(k)} + G^{(k+1)}, h^{(k)} + G^{(k+1)}] = [g^{(k)}, h^{(k)}] + G^{(k+1)}.$$

É claro que $[g^{(k)}, h^{(k)}] \in G^{(k+1)}$. Portanto, $a = 0$.

Portanto as álgebras G^k/G^{k+1} e $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ são álgebras de Lie abelianas.

Se agora tomamos $g^{(k)} = [g^{(k-1)}, \tilde{g}^{(k-1)}] \in G^{(k)}$ e $g^{(1)} = [g_1, g_2]$, $g_1, g_2 \in G$, note que

$$\begin{aligned} g^{(k)} &= [g^{(k-1)}, \tilde{g}^{(k-1)}] = [[g^{(k-2)}, \tilde{g}^{(k-2)}], \tilde{g}^{(k-1)}] = [g^{(k-2)}, \tilde{g}^{(k-2)}, \tilde{g}^{(k-1)}] \\ &= [[g^{(k-3)}, \tilde{g}^{(k-3)}], \tilde{g}^{(k-2)}, \tilde{g}^{(k-1)}] = [g^{(k-3)}, \tilde{g}^{(k-3)}, \tilde{g}^{(k-2)}, \tilde{g}^{(k-1)}] = \dots \\ &= [g^{(1)}, \tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \dots, \tilde{g}^{(k-1)}] = [g_1, g_2, \tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \dots, \tilde{g}^{(k-1)}] \in G^{k+1}. \end{aligned}$$

Isto quer dizer que $G^{(k)} \subseteq G^{k+1}$ para todo $k \geq 0$. Ou seja, a série derivada tem decrescimento mais rápido que a série central descendente.

Acima nos diz que toda álgebra de Lie nilpotente é necessariamente solúvel. No entanto, a recíproca não é verdadeira em geral, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.41. A álgebra de Lie $M_2(\mathbb{K})^{(-)}$ não é nilpotente nem solúvel. No entanto, a sua subálgebra $U_2(\mathbb{K})^{(-)}$ das matrizes triangulares superiores é solúvel, mas não é nilpotente.

Seja e_{ij} a matriz com 1 na entrada (i, j) e zero nas outras entradas para $1 \leq i, j \leq 2$. Então as matrizes e_{11}, e_{12}, e_{22} formam uma base para $U_2(\mathbb{K})^{(-)}$. Para calcular o produto entre duas matrizes precisamos calcular o produto entre dois elementos da base. Desta maneira, note que

$$[e_{11}, e_{12}] = e_{12}, \quad [e_{11}, e_{22}] = 0, \quad [e_{22}, e_{12}] = -e_{12}.$$

Isto nos diz que $(U_2(\mathbb{K})^{(-)})^2 = (U_2(\mathbb{K})^{(-)})^{(1)} = \text{span}\{e_{12}\}$. Como $[e_{12}, e_{12}] = 0$, segue que

$$(U_2(\mathbb{K})^{(-)})^{(2)} = \left[(U_2(\mathbb{K})^{(-)})^{(1)}, (U_2(\mathbb{K})^{(-)})^{(1)} \right] = 0.$$

Ou seja, a série derivada de $U_2(\mathbb{K})^{(-)}$ se anula no passo 2, portanto é solúvel. Além disso, o produto entre os elementos da base nos diz que

$$(U_2(\mathbb{K})^{(-)})^k = \text{span}\{e_{12}\}$$

para todo $k \geq 2$. Ou seja a série central descendente de $U_2(\mathbb{K})^{(-)}$ não se anula em nenhum passo k . Portanto não é nilpotente.

Observação 1.42. Se G é uma álgebra de Lie nilpotente, então

$$Z(G) \neq \{0\}.$$

Ou seja, o centro de uma álgebra de Lie nilpotente é não trivial. De fato, se G é nilpotente, então existe $k > 0$ tal que $G^{k+1} = \{0\}$ e $G^k \neq \{0\}$. Uma vez que $G^{k+1} = [G^k, G] = \{0\}$, segue que $G^k \subseteq Z(G)$. Portanto, $Z(G) \neq \{0\}$.

Se G é uma álgebra de Lie solúvel de classe menor ou igual a 2, então dizemos que G é uma álgebra de Lie metabeliana. De maneira equivalente, uma álgebra de Lie G é metabeliana se, e somente se,

$$G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}] = [[G, G], [G, G]] = \{0\}.$$

Uma introdução às PI-álgebras de Lie

Neste capítulo, introduzimos os conceitos fundamentais que servirão de base para o estudo das identidades polinomiais em álgebras de Lie (PI-álgebras de Lie). Discutimos a construção das álgebras livres numa classe de álgebras, e os teoremas clássicos de Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW) e Witt, que exibem a aparência da álgebra de Lie livre. As principais referências utilizadas são [1] e [4].

2.1 Álgebra de Lie Livre

Definição 2.1. Seja \mathfrak{B} uma classe de álgebras e seja $L(X) \in \mathfrak{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X . A álgebra $L(X)$ é chamada de álgebra livre na classe \mathfrak{B} , livremente gerada por X , se satisfaz a seguinte propriedade:

- *Propriedade Universal:* Para qualquer álgebra $G \in \mathfrak{B}$, toda aplicação $f : X \rightarrow G$ pode ser estendida a um único homomorfismo $\varphi : L(X) \rightarrow G$.

Uma álgebra livre é a álgebra mais geral possível com respeito ao seu conjunto de geradores X . Não impõe nenhuma relação entre seus elementos, só as mesmas que a estrutura da classe de álgebras onde está definida.

Exemplo 2.2. Seja X um conjunto qualquer, a álgebra de polinômios $\mathbb{K}[X]$ é livre na classe das álgebras associativas, comutativas e unitárias.

Exemplo 2.3. Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto qualquer enumerável. Considere uma palavra como algo do tipo $x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_m}$, ou seja, uma sequência finita de elementos de X . Denote por $\mathbb{K}\langle X \rangle$ o espaço vetorial com base dada pelo conjunto de todas as palavras. Assim, um elemento de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ tem a forma

$$\sum_{i=(i_1, \dots, i_m)} \alpha_i x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m},$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Definimos o produto entre dois elementos da base de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ por

$$(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m})(x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n}) = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n},$$

ou seja, concatenação das palavras. Agora, estendendo o produto à quaisquer dois elementos de $\mathbb{K}\langle X \rangle$, como no Exemplo 1.6, temos que $\mathbb{K}\langle X \rangle$ é uma álgebra associativa. Provaremos que tal álgebra é livre na classe de todas as álgebras associativas. Seja A uma álgebra associativa e seja $f : X \rightarrow A$ uma aplicação arbitrária. Pela teoria de Álgebra Linear, existe uma única transformação linear $\varphi : \mathbb{K}\langle X \rangle \rightarrow A$ que age nos elementos da base do domínio (palavras) da seguinte forma:

$$\varphi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = f(x_{i_1})f(x_{i_2})\cdots f(x_{i_n}) \in A.$$

Agora, dadas duas palavras (elementos da base de $\mathbb{K}\langle X \rangle$), $w_1 = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ e $w_2 = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$, como o produto em $\mathbb{K}\langle X \rangle$ é dado por concatenação de palavras, e o produto em A é associativo, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(w_1w_2) &= \varphi((x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m})) = \varphi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) \\ &= f(x_{i_1})\cdots f(x_{i_n})f(x_{j_1})\cdots f(x_{j_m}) = (f(x_{i_1})\cdots f(x_{i_n}))(f(x_{j_1})\cdots f(x_{j_m})) \\ &= \varphi(x_{i_1}\cdots x_{i_n})\varphi(x_{j_1}\cdots x_{j_m}) = \varphi(w_1)\varphi(w_2). \end{aligned}$$

Logo, φ é um homomorfismo de álgebras associativas que estende f . Além disso, φ é única, pois se $\psi : \mathbb{K}\langle X \rangle \rightarrow A$ é outro homomorfismo tal que $\psi(x_i) = f(x_i)$ para todo i , então

$$\psi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = \psi(x_{i_1})\psi(x_{i_2})\cdots\psi(x_{i_n}) = f(x_{i_1})f(x_{i_2})\cdots f(x_{i_n}) = \varphi(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}).$$

Logo, $\mathbb{K}\langle X \rangle$ satisfaz a propriedade universal da álgebra associativa livre.

Os elementos de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ são chamados de polinômios. Se as "possíveis" letras que formam as palavras de um polinômio f são x_1, \dots, x_n , então escrevemos $f = f(x_1, \dots, x_n)$.

Por exemplo,

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$$

é um polinômio; note que ele é não nulo. Um outro exemplo é

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_1x_1x_3 + x_2x_1x_2x_1 - 7x_3x_2.$$

Aqui cabe um comentário: podemos obter outras álgebras associativas livres, por meio de construção análoga a acima, trocando o conjunto X por qualquer conjunto de qualquer cardinalidade.

Exemplo 2.4. Seja $\mathbb{K}\{X\}$ o espaço vetorial com base o conjunto de todas as palavras não associativas, ou seja, palavras da forma

$$(x_{i_1}\cdots)(\cdots x_{i_n}), \quad x_{i_k} \in X,$$

onde os parênteses estão distribuídos de forma arbitrária. A multiplicação em $\mathbb{K}\{X\}$ é dada por $u * v = (u)(v)$ para quaisquer duas palavras u e v . Então esta álgebra é livre na classe de todas as álgebras. Ela é chamada de álgebra absolutamente livre.

E a álgebra de Lie Livre? A álgebra de Lie livre $L(X)$, por definição, é a álgebra de Lie mais geral possível. Ela é gerada por X e seus elementos não tem relações entre si além daquelas que definem uma álgebra, antissimetria e identidade de Jacobi. Para mostrar a aparência desta álgebra precisamos de algumas definições e teoremas que constam na próxima subseção.

2.1.1 Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW) e Teorema de Witt

Definição 2.5. Seja A uma álgebra associativa e G uma álgebra de Lie. Se G é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que A é uma álgebra envolvente de G .

Definição 2.6. A álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie G é uma álgebra associativa $U = U(G)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- G é uma subálgebra de $U^{(-)}$;
- U satisfaz a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra associativa A e todo homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : G \rightarrow A^{(-)}$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \rightarrow A$ que estende ϕ . Ou seja,

$$\psi|_G = \phi.$$

Teorema 2.7 (Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW)). *Toda álgebra de Lie G admite, a menos de isomorfismo, uma única álgebra envolvente universal $U(G)$. Se G é uma álgebra de Lie com base $\{e_i \mid i \in I\}$ e I está ordenado, então $U(G)$ possui uma base formada pelos produtos*

$$e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_t}, \quad i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_t, \quad t \geq 1.$$

Demonstração. Para fins desta demonstração denotaremos o produto entre dois elementos $u, v \in G$ por $u \times v$. Como G tem base $\{e_i \mid i \in I\}$, sabemos que o produto entre quaisquer dois elementos seu é determinado a partir do produto entre quaisquer dois elementos da base. Sendo assim, escreva

$$e_i \times e_j = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k e_k, \quad i, j \in I, \quad \alpha_{ij}^k \in \mathbb{K}.$$

Considere a álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle X \rangle$, livremente gerada por $X = \{x_i \mid i \in I\}$, do Exemplo 2.3. Seja $J \subseteq \mathbb{K}\langle X \rangle$ o ideal gerado pelos elementos

$$f_{ij} = [x_i, x_j] - \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k x_k,$$

onde $[x_i, x_j] = x_i x_j - x_j x_i$ é o comutador (Definição 1.21). Assim,

$$J = \text{span} \left\{ f_{ij}, g f_{ij}, f_{ij} h, g f_{ij} h \mid g, h \in \mathbb{K}\langle X \rangle, i, j \in I \right\}.$$

Agora, denote $U = \mathbb{K}\langle X \rangle / J$. Pelo Exemplo 1.13, U é uma álgebra associativa, e denotaremos $y_i = x_i + J$, para todo $i \in I$. Pela Proposição 1.22, $U^{(-)}$ é uma álgebra de Lie com produto comutador. Além disso, para todos $y_i, y_j, y_k \in U^{(-)}$ temos que

$$[y_i, y_j] - \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k y_k = 0, \quad \text{isto é,} \quad [y_i, y_j] = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k y_k$$

em $U^{(-)}$.

Considere G e $U^{(-)}$ como espaços vetoriais, e defina a transformação linear $\pi : G \rightarrow U^{(-)}$ como sendo aquela em que $\pi(e_i) = y_i$ para todo $i \in I$. Por linearidade, para todo $u = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \in G$, vale

$$\pi \left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i \right) = \sum_{i \in I} \alpha_i \pi(e_i) = \sum_{i \in I} \alpha_i y_i.$$

Note que π é um homomorfismo de álgebras de Lie, pois

$$\begin{aligned} \pi(e_i \times e_j) &= \pi \left(\sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k e_k \right) = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k \pi(e_k) = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k y_k = [y_i, y_j] \\ &= [\pi(e_i), \pi(e_j)]. \end{aligned}$$

Pode ser mostrado que π é injetora, veja [4, Página 12]. Logo, G é isomorfa a subálgebra $\text{Im}(\pi)$ de $U^{(-)}$. Segue que U , é uma álgebra envolvente de G . Provaremos agora que U é uma álgebra envolvente universal de G . Para isso, de agora em diante, assumiremos

$$G = \text{Im}(\pi).$$

Neste caso, $\{y_i \mid i \in I\}$ é uma base de G , e

$$y_i \times y_j = [y_i, y_j] = \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k y_k.$$

Seja A uma álgebra associativa, e seja $\varphi : G \rightarrow A^{(-)}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Pela propriedade universal, existe um homomorfismo de álgebras associativas

$$\theta : \mathbb{K}\langle X \rangle \rightarrow A, \text{ tal que } \theta(x_i) = \varphi(y_i).$$

Note que $J \subseteq \text{Ker}(\theta)$, pois

$$\begin{aligned} \theta(f_{ij}) &= \theta \left([x_i, x_j] - \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k x_k \right) = \theta([x_i, x_j]) - \theta \left(\sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k x_k \right) = [\theta(x_i), \theta(x_j)] - \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k \theta(x_k) \\ &= [\varphi(y_i), \varphi(y_j)] - \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k \varphi(y_k) = \varphi([y_i, y_j]) - \varphi \left(\sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k y_k \right) \\ &= \varphi \left([y_i, y_j] - \sum_{k \in I} \alpha_{ij}^k y_k \right) = \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $f_{ij} \in \text{ker}(\theta)$, portanto $J \subseteq \text{ker}(\theta)$. Pela Observação 1.15, existe um homomorfismo

$$\psi : U \rightarrow A, \text{ tal que } \psi(f + J) = \theta(f).$$

Em particular,

$$\psi(y_i) = \psi(x_i + J) = \theta(x_i) = \varphi(y_i), \quad i \in I.$$

Como ψ e φ são transformações lineares que coincidem na base de G , segue que

$$\varphi = \psi|_G.$$

Agora, suponha que $\bar{\psi} : U \rightarrow A$ é outro homomorfismo de álgebras associativas tal que $\bar{\psi}|_G = \varphi$. Dado $u \in U$, existe $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}) \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ tal que

$$u = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}) + J = f(x_{i_1} + J, x_{i_2} + J, \dots, x_{i_t} + J) = f(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_t}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(u) &= \bar{\psi}(f(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_t})) = f(\bar{\psi}(y_{i_1}), \bar{\psi}(y_{i_2}), \dots, \bar{\psi}(y_{i_t})) = f(\varphi(y_{i_1}), \varphi(y_{i_2}), \dots, \varphi(y_{i_t})) \\ &= f(\psi(y_{i_1}), \psi(y_{i_2}), \dots, \psi(y_{i_t})) = \psi(f(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_t})) = \psi(u). \end{aligned}$$

Como u é um elemento qualquer de U , segue que

$$\bar{\psi} = \psi.$$

Portanto, todo homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : G \rightarrow A^{(-)}$ se estende a um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \rightarrow A$, mostrando assim que $U = \mathbb{K}\langle X \rangle / J$ é a álgebra envolvente universal da álgebra de Lie G . \square

Definição 2.8. A álgebra de Lie livre, livremente gerada por X , é a álgebra de Lie livre na classe de todas as álgebras de Lie, livremente gerada por X .

Teorema 2.9 (Witt). A subálgebra de Lie $L(X)$ de $\mathbb{K}\langle X \rangle^{(-)}$ gerada por X é isomorfa à álgebra de Lie livre, livremente gerada por X . Além disso, vale a identidade:

$$U(L(X)) = \mathbb{K}\langle X \rangle.$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes:

- Mostraremos que $U(L(X)) = \mathbb{K}\langle X \rangle$.

Seja A uma álgebra associativa e seja $\phi : L(X) \rightarrow A^{(-)}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Pela propriedade universal da álgebra associativa livre, temos que a aplicação $\phi_0 : X \rightarrow A$ definida por $\phi_0(x) = \phi(x)$ induz um único homomorfismo $\psi : \mathbb{K}\langle X \rangle \rightarrow A$. Como um elemento qualquer de $L(X)$ é uma combinação linear de comutadores $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}]$ e

$$\phi([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}]) = [\phi(x_{i_1}), \phi(x_{i_2}), \dots, \phi(x_{i_t})] = [\psi(x_{i_1}), \psi(x_{i_2}), \dots, \psi(x_{i_t})] = \psi([x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}])$$

segue que $\psi|_{L(X)} = \phi$. Pela definição da álgebra envolvente universal, temos portanto nossa igualdade $U(L(X)) = \mathbb{K}\langle X \rangle$.

- Provaremos que $L(X)$ é uma álgebra de Lie livre.

Seja G uma álgebra de Lie e seja $f : X \rightarrow G$ uma função. Pelo Teorema PBW, segue que G tem uma álgebra envolvente universal A . Pela propriedade universal da álgebra associativa livre, a aplicação $f : X \rightarrow A$ induz um único homomorfismo $\varphi : \mathbb{K}\langle X \rangle \rightarrow A$. Note que a restrição de φ

a $L(X)$ é um homomorfismo de $L(X)$ em $A^{(-)}$, $\varphi|_{L(X)} : L(X) \rightarrow A^{(-)}$, que envia os geradores de $L(X)$ em G . Portanto, a imagem de $\varphi|_{L(X)}$ está contida em G e temos uma extensão da aplicação $f : X \rightarrow G$ por um único homomorfismo $\varphi|_{L(X)} : L(X) \rightarrow G$. Por definição, $L(X)$ é livre na classe de todas as álgebras de Lie.

Provando assim nosso teorema. □

2.2 Identidades Polinomiais em Álgebras de Lie

As identidades polinomiais desempenham um papel fundamental no estudo das estruturas algébricas, pois revelam propriedades universais que devem ser satisfeitas por uma determinada álgebra. No contexto das álgebras de Lie, essas identidades nos permitem classificar e compreender variedades de álgebras de Lie, como veremos no decorrer do texto.

De agora em diante, X será o conjunto infinito enumerável $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e $L(X)$ a álgebra de Lie livre, livremente gerada por X .

Definição 2.10. Seja G uma álgebra de Lie. Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(X)$ é uma identidade polinomial de G , se para todos $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$, vale:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

Denotamos o conjunto de todas as identidades polinomiais de G por $T(G)$. Ou seja,

$$T(G) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(X) \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \text{ para todos } a_1, a_2, \dots, a_n \in G\}.$$

Uma identidade polinomial impõe uma relação algébrica que deve ser satisfeita universalmente pelos elementos de G , caracterizando uma propriedade estrutural da álgebra.

O polinômio nulo é uma identidade polinomial de G . Se além deste, existe uma outra identidade polinomial, então dizemos que G é uma PI-álgebra. Ou seja, se $T(G) \neq \{0\}$, dizemos que G é uma PI-álgebra.

Exemplo 2.11. Denote por f_m o polinômio

$$f_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = [x_1, x_2, \dots, x_m].$$

Pela Definição 1.38, f_{m+1} é uma identidade polinomial para toda álgebra de Lie nilpotente G de classe m , ou seja, $f_{m+1} \in T(G)$ e $f_m \notin T(G)$.

Exemplo 2.12. Seja $\delta_0(x) = x$. Pela Definição 1.37, o polinômio

$$\delta_k = \delta_k(x_1, x_2, \dots, x_{2^k}) = [\delta_{k-1}, \delta_{k-1}], \quad k \geq 1,$$

é uma identidade polinomial para toda álgebra de Lie solúvel de classe k . Ou seja, se G é uma álgebra de Lie solúvel de classe k , então $\delta_k \in T(G)$. Em particular,

$$\delta_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \in T(A)$$

para toda álgebra de Lie metabeliana A .

Observação 2.13. Pelo Exemplo 2.12, se G é uma álgebra de Lie metabeliana, então

$$\delta_2(g_1, g_2, g_3, g_4) = [[g_1, g_2], [g_3, g_4]] = 0$$

para todos $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$. Pelo Lema 1.18, temos que

$$[[g_1, g_2], [g_3, g_4]] = [g_1, g_2, g_3, g_4] - [g_1, g_2, g_4, g_3].$$

Ou seja, $0 = [g_1, g_2, g_3, g_4] - [g_1, g_2, g_4, g_3]$. Portanto, $[g_1, g_2, g_3, g_4] = [g_1, g_2, g_4, g_3]$.

2.3 T -ideais e variedades de álgebras de Lie

O estudo das identidades polinomiais em álgebras de Lie nos conduz naturalmente à noção de T -ideais — ideais invariantes por endomorfismos da álgebra de Lie livre. Esses objetos desempenham um papel central na descrição das variedades de álgebras de Lie, que são classes de álgebras definidas por conjuntos de identidades. Nesta seção, exploramos as propriedades fundamentais dos T -ideais e sua relação com as variedades.

2.3.1 T -ideais de álgebras de Lie

Definição 2.14. Um ideal I de $L(X)$ é chamado de T -ideal se $\varphi(f) \in I$, para todo $f \in I$ e todo endomorfismo $\varphi : L(X) \rightarrow L(X)$ de álgebras de Lie.

Proposição 2.15. *Seja I um ideal de $L(X)$. Então I é um T -ideal se, e somente se,*

$$f(f_1, f_2, \dots, f_n) \in I,$$

para quaisquer $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$ e quaisquer $f_1, f_2, \dots, f_n \in L(X)$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que I é um T -ideal. Sejam $f = f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $f_1, \dots, f_n \in L(X)$. Pela propriedade universal da álgebra de Lie livre, existe um único endomorfismo de álgebras de Lie

$$\varphi : L(X) \rightarrow L(X) \text{ tal que } \varphi(x_i) = f_i$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e $\varphi(x_{n+1}) = \varphi(x_{n+2}) = \dots = 0$. Dado que I é um T -ideal, temos $\varphi(f) \in I$. Ou seja,

$$\varphi(f) = \varphi(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)) = f(f_1, \dots, f_n) \in I.$$

(\Leftarrow) Suponha agora que $f(f_1, \dots, f_n) \in I$ para todo $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e quaisquer $f_1, \dots, f_n \in L(X)$. Se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in I$ e $\varphi : L(X) \rightarrow L(X)$ é um endomorfismo de álgebras de Lie, então $\varphi(x_i) = f_i \in L(X)$ para cada i e vale:

$$\varphi(f) = \varphi(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)) = f(f_1, f_2, \dots, f_n) \in I,$$

pela hipótese. Portanto, I é um T -ideal. \square

Lema 2.16. *Se G é uma álgebra de Lie, então o conjunto de todas as identidades polinomiais de G é um T -ideal de $L(X)$.*

Demonstração. Por definição, $T(G)$ é o conjunto de todos os polinômios $f = f(x_1, \dots, x_n) \in L(X)$ tais que para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in G$ tem-se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Dado que $0 \in T(G)$, temos que $T(G) \neq \emptyset$.

- Subespaço: Se $f = f(x_1, \dots, x_n), g = g(x_1, \dots, x_n) \in T(G)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, então $\alpha f + \beta g \in T(G)$, pois para todos $a_1, \dots, a_n \in G$ temos

$$(\alpha f + \beta g)(a_1, \dots, a_n) = \alpha f(a_1, \dots, a_n) + \beta g(a_1, \dots, a_n) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

- Ideal: Se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in T(G)$ e $h = h(x_1, \dots, x_n) \in L(X)$, então $[f, h] \in T(G)$. De fato, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in G$, temos:

$$[f(a_1, \dots, a_n), h(a_1, \dots, a_n)] = [0, h(a_1, \dots, a_n)] = 0.$$

- T -fechado: Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T(G)$ e, para cada $i = 1, \dots, n$, considere $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \in L(X)$. Então para todos $a_1, \dots, a_m \in G$, temos que $g(x_1, \dots, x_m) = f(f_1, f_2, \dots, f_n)$ satisfaz:

$$g(a_1, a_2, \dots, a_m) = f(f_1(a_1, \dots, a_m), f_2(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m)) = 0,$$

pois f se anula em todas as avaliações sobre G .

Logo, $T(G)$ é um T -ideal de $L(X)$. \square

Proposição 2.17. *Se I é um T -Ideal, então existe uma álgebra de Lie G tal que $I = T(G)$.*

Demonstração. Como I é um T -Ideal de $L(X)$, considere a álgebra quociente do Exemplo 1.13,

$$G = L(X)/I.$$

- Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T(G)$. Então para todos $a_1, \dots, a_n \in G$, $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Dado que $x_i + I \in G$, segue que

$$f(x_1 + I, x_2 + I, \dots, x_n + I) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + I = 0 + I = I.$$

Isto implica que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$. Portanto, $T(G) \subseteq I$.

- Sejam $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$ e $f_i + I \in G$, $i = 1, \dots, n$. Dado que I é um T -ideal, segue que $f(f_1, f_2, \dots, f_n) \in I$. Assim, temos

$$f(f_1 + I, f_2 + I, \dots, f_n + I) = f(f_1, f_2, \dots, f_n) + I = I = 0.$$

Portanto, $I \subseteq T(G)$.

Segue a igualdade $T(G) = I$. □

Definição 2.18. Dado um subconjunto S de $L(X)$, a interseção de todos os T -ideais que contêm S é chamada de T -ideal gerado por S . Denotamos tal T -ideal por $\langle S \rangle^T$.

Teorema 2.19. Se $S \subseteq L(X)$, então

$$\langle S \rangle^T = \text{span} \{ [f(g_1, \dots, g_n), h_1, \dots, h_m] \mid f(x_1, \dots, x_n) \in S, g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in L(X), m \geq 0 \}.$$

Demonstração. Seja I o conjunto

$$I = \text{span} \{ [f(g_1, \dots, g_n), h_1, \dots, h_m] \mid f(x_1, \dots, x_n) \in S, g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in L(X), m \geq 0 \}.$$

- Mostraremos que I é um T -ideal.
 - Por definição, I é um subespaço vetorial de $L(X)$.
 - Por construção, I é fechado sob colchetes à direita com qualquer $h_j \in L(X)$. Portanto, I é um ideal de $L(X)$.
 - Se $\varphi : L(X) \rightarrow L(X)$ é um endomorfismo de álgebras de Lie, então

$$\varphi([f(g_1, \dots, g_n), h_1, \dots, h_m]) = [f(\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_n)), \varphi(h_1), \dots, \varphi(h_m)].$$

Portanto, I é fechado por endomorfismos de $L(X)$.

Logo, I é um T -ideal.

- Verificaremos que $S \subseteq I$.
Se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in S$, então para $g_1 = x_1, \dots, g_n = x_n$ e $m = 0$ na definição de I , temos $f \in I$. Portanto, $S \subseteq I$.
- Minimalidade: Se J é um T -ideal com $S \subseteq J$, então $I \subseteq J$.
Se J é um T -ideal que contém S , então para todo $f(x_1, \dots, x_n) \in S$, temos que

$$[f(g_1, \dots, g_n), h_1, \dots, h_m] \in J.$$

Assim, J contém todos os geradores de I e, portanto, $I \subseteq J$.

Finalmente, como I é um T -ideal que contém S e está contido em qualquer T -ideal que contém S , concluímos que $\langle S \rangle^T = I$. □

Definição 2.20. Seja $S \subseteq L(X)$ um subconjunto de polinômios.

1. Dizemos que $f \in L(X)$ é uma consequência dos polinômios em S , se $f \in \langle S \rangle^T$.
2. Dizemos que $\widehat{S} \subseteq L(X)$ é equivalente a S , se $\langle \widehat{S} \rangle^T = \langle S \rangle^T$.

Pelo Teorema 2.19, o item 1 desta definição quer dizer que f é uma combinação linear de polinômios do tipo $[h(g_1, \dots, g_n), w_1, \dots, w_m]$, onde $h(x_1, \dots, x_n) \in S$ e $g_1, \dots, g_n, w_1, \dots, w_m \in L(X)$. Além disso, se $f \in \langle S \rangle^T$, então

$$\langle f \rangle^T \subseteq \langle S \rangle^T.$$

No geral, se \widehat{S} é um subconjunto de $L(X)$ tal que $\widehat{S} \subseteq \langle S \rangle^T$, então $\langle \widehat{S} \rangle^T \subseteq \langle S \rangle^T$; isso é consequência direta da Definição 2.18.

2.3.2 Variedades de álgebras de Lie

Definição 2.21. Seja $S = \{f_i \in L(X) \mid i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra de Lie livre $L(X)$. A classe $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(S)$ de todas as álgebras de Lie que satisfazem as identidades polinomiais $f_i \in S$, ou seja,

$$\mathfrak{L} = \{G \mid f \in T(G) \text{ para todo } f \in S, G \text{ é álgebra de Lie}\},$$

é chamada de variedade de álgebras de Lie definida (ou determinada) pelo sistema de identidades polinomiais S .

Denotamos o conjunto de todas as identidades polinomiais satisfeitas pela variedade \mathfrak{L} por

$$T(\mathfrak{L}) = \{f \in L(X) \mid f \in T(G) \text{ para todo } G \in \mathfrak{L}\} = \bigcap_{G \in \mathfrak{L}} T(G).$$

Como a interseção de T -ideais é um T -ideal, pelo Lema 2.16 segue que $T(\mathfrak{L})$ é um T -ideal, o qual chamaremos de ideal verbal (ou T -ideal) de \mathfrak{L} .

Temos as seguintes implicações:

$$S \subseteq T(G) \Rightarrow \langle S \rangle^T \subseteq T(G) \Rightarrow \langle S \rangle^T \subseteq \bigcap_{G \in \mathfrak{L}} T(G) = T(\mathfrak{L}).$$

Por outro lado, pela demonstração da Proposição 2.17, temos

$$T\left(\frac{L(X)}{\langle S \rangle^T}\right) = \langle S \rangle^T, \text{ ou seja, } \frac{L(X)}{\langle S \rangle^T} \in \mathfrak{L}$$

e, conseqüentemente,

$$\langle S \rangle^T = T(\mathfrak{L}).$$

Dizemos que S é uma base das identidades polinomiais de \mathfrak{L} .

Podemos caracterizar as variedades de álgebras de Lie com o seguinte teorema, no qual pode ser encontrado em [1, Teorema 4.3].

Teorema 2.22 (Birkhoff). *Uma classe não vazia de álgebras de Lie, \mathfrak{L} , é uma variedade se, e somente se, é fechada sob as seguintes operações:*

- *Subálgebras: Se $G \in \mathfrak{L}$ e $A \subseteq G$ é uma subálgebra, então $A \in \mathfrak{L}$.*
- *Imagens homomórficas: Se $\varphi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de álgebras de Lie e $G \in \mathfrak{L}$, então $\text{Im}(\varphi) \in \mathfrak{L}$.*
- *Produtos cartesianos: Se $G_i \in \mathfrak{L}$, $i \in I$, então $\prod_{i \in I} G_i \in \mathfrak{L}$.*

Exemplo 2.23. Segue do Exemplo 2.11 que o T -ideal da variedade das álgebras de Lie nilpotentes de classe $\leq p$, denotada por \mathfrak{N}_p , é dada por

$$T(\mathfrak{N}_p) = \left\langle f_{p+1}(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}) = [x_1, x_2, \dots, x_{p+1}] \right\rangle^T.$$

Exemplo 2.24. Segue do Exemplo 2.12 que o T -ideal da variedade das álgebras de Lie solúveis de classe ≤ 3 , denotada por \mathfrak{A}^3 , é dada por

$$T(\mathfrak{A}^3) = \left\langle \delta_3(x_1, x_2, \dots, x_8) = \left[[x_1, x_2], [x_3, x_4], [x_5, x_6], [x_7, x_8] \right] \right\rangle^T.$$

Exemplo 2.25. A variedade $\mathfrak{A}^3 \cap \mathfrak{N}_p$ consiste em todas as álgebras de Lie solúveis de classe ≤ 3 e nilpotentes de classe $\leq p$. Ou seja,

$$T(\mathfrak{A}^3 \cap \mathfrak{N}_p) = \langle \delta_3, f_{p+1} \rangle^T.$$

Definiremos a seguir o produto de duas variedades.

Definição 2.26. Sejam \mathfrak{L}_1 e \mathfrak{L}_2 duas classes de álgebras de Lie. Definimos o produto de \mathfrak{L}_1 por \mathfrak{L}_2 , como segue:

$$\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 = \{G \mid G/H \in \mathfrak{L}_2, H \text{ é ideal de } G, H \in \mathfrak{L}_1\}.$$

Note que, se \mathfrak{L}_1 e \mathfrak{L}_2 são variedades, então pelo Teorema 2.22, $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2$ é também uma variedade. Veja [1, Seção 4.3.1] para mais detalhes.

Exemplo 2.27. Considere a variedade das álgebras de Lie nilpotentes de classe $\leq p$, \mathfrak{N}_p , do Exemplo 2.23, e denote por \mathfrak{A} a variedade das álgebras de Lie abelianas. Então o produto $\mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$ é dado por

$$\mathfrak{N}_p \mathfrak{A} = \{G \mid G/H \in \mathfrak{A}, H \text{ é ideal de } G, H \in \mathfrak{N}_p\}.$$

Ou seja, $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$ se existe um ideal nilpotente de classe $\leq p$ tal que a álgebra resultante do quociente por ele é abeliana. Note que

$$T(\mathfrak{N}_p \mathfrak{A}) \supseteq \left\langle [[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2p-1}, x_{2p}], [x_{2p+1}, x_{2p+2}]] \right\rangle^T.$$

Proposição 2.28. *Se S_1 e S_2 são subconjuntos de $L(X)$ tal que $S_1 \subseteq S_2$, então*

$$\mathfrak{L}(S_2) \subseteq \mathfrak{L}(S_1).$$

Dizemos que $\mathfrak{L}(S_2)$ é uma subvariedade de $\mathfrak{L}(S_1)$.

Demonstração. Seja $G \in \mathfrak{L}(S_2)$. Por definição, para todo $f \in S_2$ temos $f \in T(G)$. Como $S_1 \subseteq S_2$, se $g \in S_1$ então $g \in S_2$ e, portanto, $g \in T(G)$. Ou seja, $G \in \mathfrak{L}(S_1)$. Portanto, $\mathfrak{L}(S_2) \subseteq \mathfrak{L}(S_1)$. \square

Teorema 2.29 (Correspondência de Galois entre variedades e T -ideais). *Seja $L(X)$ a álgebra de Lie livre, livremente gerada por X . Então, existe uma correspondência bijetiva π , entre os T -ideais de $L(X)$ e as variedades de álgebras de Lie. Além disso, π é uma correspondência de Galois, ou seja, se $I_1 \subseteq I_2$ são T -ideais, então $\pi(I_2) \subseteq \pi(I_1)$.*

Demonstração. Denotamos por $\text{Var}(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as variedades de \mathbb{K} -álgebras de Lie e por Ω^T o conjunto de todos os T -ideais de $L(X)$. Definimos $\pi : \Omega^T \rightarrow \text{Var}(\mathbb{K})$ como sendo $\pi(I) = \mathfrak{L}(I)$.

Por definição, dada uma variedade \mathfrak{L} , existe $S \subseteq L(X)$ tal que $\mathfrak{L}(S) = \mathfrak{L}$. Pelo Teorema 2.19, temos

$$\mathfrak{L}(\langle S \rangle^T) = \mathfrak{L}(S) = \mathfrak{L}$$

e, portanto, π é sobrejetora.

Para mostrar a injetividade, sejam I_1 e I_2 dois T -ideais de $L(X)$ tais que $I_1 \neq I_2$. Sem perda de generalidade, existe $f \in I_1 \setminus I_2$. Pela demonstração da Proposição 2.17, temos que $T(L(X)/I_2) = I_2$. Portanto, $(L(X)/I_2) \in \mathfrak{L}(I_2)$ mas $(L(X)/I_2) \notin \mathfrak{L}(I_1)$, provando que $\mathfrak{L}(I_1) \neq \mathfrak{L}(I_2)$.

Finalmente, se $I_1 \subseteq I_2$, então pela Proposição 2.28 temos que $\pi(I_2) \subseteq \pi(I_1)$. \square

2.4 Identidades polinomiais multi-homogêneas

Denote $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ e seja $m = m(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}] \in L(X)$ um monômio de Lie (palavra de Lie), onde $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t} \in X_n$ e $t \in \mathbb{N}$. Definimos o grau de m com respeito a variável x_j como

$$\deg_{x_j} m = |\{l \mid x_{i_l} = x_j, \ 1 \leq l \leq t\}|.$$

Ou seja, o grau de m com respeito a variável x_j é o número de letras x_j que m contém.

Por exemplo, se $m = m(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = [x_3, x_2, x_1, x_2, x_2, x_5, x_1]$ temos que

$$\deg_{x_1} m = 2, \ \deg_{x_2} m = 3, \ \deg_{x_3} m = 1, \ \deg_{x_4} m = 0 \ \text{e} \ \deg_{x_5} m = 1.$$

Agora estendemos esse conceito para um polinômio qualquer $f(x_1, \dots, x_n)$ de $L(X)$. Para isso, seja

$$M_n = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}] \in L(X) \mid x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t} \in X_n, \ t \in \mathbb{N}\}$$

o conjunto de todos os monômios de Lie de $L(X)$ nas variáveis x_1, \dots, x_n . Escreva

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m \in M_n} \alpha_m m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \alpha_m \in \mathbb{K}.$$

O grau de f com respeito a variável x_j é definido por

$$\deg_{x_j} f = \max\{\deg_{x_j} m \mid m \in M_n \text{ e } \alpha_m \neq 0\}.$$

Por exemplo, $\deg_{x_2}([x_3, x_2, x_1, x_2, x_2, x_5, x_1] - [x_2, x_3, x_1, x_2]) = \max\{3, 2\} = 3$.

Definição 2.30. Dizemos que

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m \in M_n} \alpha_m m(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \alpha_m \in \mathbb{K},$$

é homogêneo numa variável x_j se, para todo $m \in M_n$ com $\alpha_m \neq 0$, tem-se que $\deg_{x_j} f = \deg_{x_j} m$.

Por exemplo, $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_3, x_2, x_2, x_2] - 7[x_2, x_3, x_1, x_2, x_2] + 5[x_2, x_1, x_2, x_1, x_2]$ é homogêneo na variável x_2 , mas não é homogêneo nas variáveis x_1 e x_3 .

Definição 2.31. Um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(X)$ é chamado de multi-homogêneo se é homogêneo em cada variável x_1, x_2, \dots, x_n . Neste caso, dizemos que

$$d = (d_1 = \deg_{x_1} f, d_2 = \deg_{x_2} f, \dots, d_n = \deg_{x_n} f)$$

é o multigrado de f .

Por exemplo, $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_1, x_3, x_2] + 5[x_3, x_1, x_2, x_1] - 7[x_2, x_1, x_1, x_3]$ é multi-homogêneo com multigrado $d = (2, 1, 1)$.

Definição 2.32. Um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(X)$ é chamado de multilinear nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n se é multi-homogêneo com multigrado $d = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ fatores}}$.

Note que todo polinômio multilinear tem a forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}], \quad \alpha_\sigma \in \mathbb{K},$$

onde S_n é o grupo simétrico de $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Se denotamos por PL_n o conjunto de todos os polinômios multilineares nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , pode ser mostrado que o espaço vetorial PL_n tem base

$$\{[x_n, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n-1)}] \mid \sigma \in S_{n-1}\}.$$

Em particular, $\dim_{\mathbb{K}} PL_n = (n-1)!$. Para maiores detalhes, veja [4, Exercício 4.3.8].

Seja $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(X)$. Fixada uma variável x_j , denote $d = \deg_{x_j} f$. Note que podemos escrever o polinômio f da seguinte forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

onde f_i é homogêneo de grau i na variável x_j .

Demonstraremos agora um teorema que será de grande utilidade nesta dissertação, quando trabalharmos com T -ideais sobre corpos infinitos.

Teorema 2.33. *Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(X)$. Fixada uma variável x_j tal que $d = \deg_{x_j} f$, decomponha f como em (2.1). Se $|\mathbb{K}| > d$, então*

$$\langle f \rangle^T = \langle f_0, f_1, \dots, f_d \rangle^T.$$

Em particular, se \mathbb{K} é infinito, então o T-ideal gerado por f é igual ao T-ideal gerado pelas suas componentes multi-homogêneas.

Demonstração. Por comodidade, vamos supor que $x_1 = x_j$. Assim,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(x_1, \dots, x_n),$$

onde f_i é homogêneo de grau i na variável x_1 e $\deg_{x_1} f_i = i$. Note que, como f é uma soma dos f_i , então $f \in \langle f_0, f_1, \dots, f_d \rangle^T$. Segue que

$$\langle f \rangle^T \subseteq \langle f_0, f_1, \dots, f_d \rangle^T.$$

Como $|\mathbb{K}| > d$, então podemos considerar $d + 1$ elementos de \mathbb{K} distintos, dados por $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$. Para cada $t = 0, 1, \dots, d$, defina o polinômio g_t por

$$g_t = f(\alpha_t x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d f_i(\alpha_t x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d \alpha_t^i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

É claro que $g_t \in \langle f \rangle^T$ para todo t . Além disso, temos as igualdades:

$$\begin{aligned} g_0 &= f(\alpha_0 x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + \alpha_0 f_1 + \alpha_0^2 f_2 + \dots + \alpha_0^d f_d, \\ g_1 &= f(\alpha_1 x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_1^2 f_2 + \dots + \alpha_1^d f_d, \\ g_2 &= f(\alpha_2 x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + \alpha_2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + \dots + \alpha_2^d f_d, \\ &\vdots \\ g_d &= f(\alpha_d x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + \alpha_d f_1 + \alpha_d^2 f_2 + \dots + \alpha_d^d f_d. \end{aligned}$$

O que pode-se escrever como uma equação matricial da forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix}}_{g=Ah} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^d \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^d \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \alpha_d^2 & \cdots & \alpha_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$$

Note que A é a matriz de Vandermonde, uma matriz muito utilizada na álgebra linear, cujo determinante é dado por

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0,$$

pois $\alpha_i \neq \alpha_j$ para todos $i \neq j$. Então, como $\det(A) \neq 0$, segue que A admite uma matriz inversa B , o que implica que $h = Bg$, isto é,

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix}.$$

Ou seja, cada f_i é uma combinação linear de $g_0, g_1, g_2, \dots, g_d \in \langle f \rangle^T$. Consequentemente,

$$f_i \in \text{span}\{g_0, g_1, \dots, g_d\} \subseteq \langle g_0, g_1, \dots, g_d \rangle^T \subseteq \langle f \rangle^T,$$

para todo $i = 0, 1, 2, \dots, d$. Portanto,

$$\langle f_0, f_1, f_2, \dots, f_d \rangle^T \subseteq \langle f \rangle^T,$$

e temos a igualdade desejada $\langle f \rangle^T = \langle f_0, f_1, f_2, \dots, f_d \rangle^T$.

Agora, se \mathbb{K} é infinito, podemos repetir o processo para cada f_0, f_1, \dots, f_d na variável x_2 , e encontraremos um conjunto de polinômios f_{ij} com $0 \leq i \leq d$ e $0 \leq j \leq d_i$ tal que

$$\langle f_i \rangle^T = \langle f_{i0}, f_{i1}, \dots, f_{id_i} \rangle^T,$$

onde cada f_{ij} é homogêneo nas variáveis x_1 e x_2 . Além disso,

$$\langle f \rangle^T = \langle f_{ij} \mid 0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq d_i \rangle^T.$$

Continuando o processo, agora para cada f_{ij} na variável x_3 , e assim por diante, após alguns passos teremos que $\langle f \rangle^T$ coincide com o T -ideal gerado pelas suas componentes multi-homogêneas. \square

Dado um polinômio $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L(X)$, podemos escrevê-lo como

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_d f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

onde $f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é multi-homogêneo com multigrado $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Se \mathbb{K} é infinito, então o último teorema nos diz que

$$\langle f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle^T = \langle f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n \rangle^T.$$

Se o corpo infinito \mathbb{K} tem característica positiva p , então podemos provar que todo T -ideal gerado por $f \in L(X)$ é igual a um T -ideal gerado por polinômios multi-homogêneos $f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com multigrado

$$d = (p^{d_1}, p^{d_2}, \dots, p^{d_n}).$$

Este teorema será de utilidade no Capítulo 4 desta dissertação.

Teorema 2.34. *Seja \mathbb{K} um corpo infinito de característica positiva p . Se $f \in L(X)$, então existe um subconjunto finito $S \subseteq L(X)$ tal que*

$$a) \langle f \rangle^T = \langle S \rangle^T;$$

b) *Todo elemento $h(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S$ é multi-homogêneo com multigrado $d = (p^{t_1}, p^{t_2}, \dots, p^{t_m})$ para alguns $t_1, t_2, \dots, t_m \geq 0$.*

Demonstração. Como \mathbb{K} é infinito, então pelo Teorema 2.33, o conjunto

$$S = \left\{ f^{(d)} = f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n, d_j = \deg_{x_j} f^{(d)}, 1 \leq j \leq n \right\},$$

formado pelas componentes multi-homogêneas de f , satisfaz

$$\langle f \rangle^T = \langle S \rangle^T.$$

Fixado $f^{(d)} \in S$, podemos escrever $d_j = a_j p^{t_j}$ tal que $p \nmid a_j$ e $t_j \geq 0$. Começando o nosso estudo pela variável x_1 , considere novas variáveis y_1, y_2 que não pertencem ao conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$, e defina

$$g_1 = g_1(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f^{(d)}(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n).$$

Denote por $u_1 = u_1(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)$ a componente multi-homogênea de g_1 com multigrado

$$(p^{t_1}, a_1 p^{t_1} - p^{t_1}, d_2, \dots, d_n).$$

Temos que u_1 é consequência de $g_1 \in \langle f^{(d)} \rangle^T$. Assim,

$$\langle u_1 \rangle^T \subseteq \langle g_1 \rangle^T \subseteq \langle f^{(d)} \rangle^T.$$

Note que,

$$u_1(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_1 p^{t_1} \\ p^{t_1} \end{pmatrix} f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Como $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 p^{t_1} \\ p^{t_1} \end{pmatrix} \neq 0 \pmod{p}$, segue que

$$\alpha^{-1} u_1(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ou seja, $f^{(d)} \in \langle u_1 \rangle^T$. Temos que $\langle f^{(d)} \rangle^T \subseteq \langle u_1 \rangle^T$. Portanto $\langle f^{(d)} \rangle^T = \langle u_1 \rangle^T$.

Como $\deg_{y_2} u_1 = (a_1 - 1)p^{t_1}$, fazemos o mesmo processo na variável y_2 de u_1 e assim por diante. Após uma quantidade finita de passos, obtemos um polinômio multi-homogêneo

$$w_1 = w_1(y_1, y_2, \dots, y_{l_1}, x_2, \dots, x_n)$$

cujos graus nas variáveis y_1, y_2, \dots, y_{l_1} são potências de p e tal que $\langle f^{(d)} \rangle^T = \langle w_1 \rangle^T$. Agora fazemos o mesmo processo com a variável x_2 , e assim por diante. Após um número finito de passos, veremos que cada componente multi-homogênea $f^{(d)} \in S$ é equivalente a um polinômio multi-homogêneo com multigrado composto apenas por potências de p . Isso mostra que podemos substituir cada elemento de S por outro que gera o mesmo T -ideal, mas com multigrado do tipo requerido na parte (b). \square

Corolário 2.35. *Seja \mathbb{K} um corpo infinito de característica positiva p , G uma \mathbb{K} -álgebra de Lie com base B , e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in L(X)$. Então existe um subconjunto $S \subseteq L(X)$ que satisfaz o Teorema 2.34 e possui a seguinte propriedade: $f(x_1, \dots, x_n) \in T(G)$ se, e somente se, $h(a_1, \dots, a_m) = 0$ para todos $a_1, \dots, a_m \in B$ e $h(x_1, \dots, x_m) \in S$.*

Demonstração. Veja a Seção 4.2.2 de [1]. □

2.5 O Problema de Specht

Um dos principais problemas na teoria das PI-álgebras é o chamado Problema de Specht. Nesta seção vamos abordar em que consiste este problema. Os resultados aqui apresentados são de maneira ilustrativa e suas demonstrações não serão feitas.

Definição 2.36. *Seja \mathfrak{L} uma variedade de álgebras de Lie. Se existe um subconjunto finito S de $L(X)$ tal que S gera \mathfrak{L} , dizemos que \mathfrak{L} é finitamente gerada. Caso contrário, dizemos que \mathfrak{L} é infinitamente gerada.*

Referente a definição acima, em outras palavras, \mathfrak{L} é uma variedade finitamente gerada se existe um subconjunto finito S de $L(X)$ tal que

$$T(\mathfrak{L}) = \langle S \rangle^T.$$

As variedades fornecem uma classificação de todas as estruturas algébricas a partir das identidades que satisfazem. Nessa perspectiva, surge a seguinte questão fundamental: toda variedade pode ser descrita por um sistema finito de identidades polinomiais? Este é o famoso Problema de Specht.

O problema foi formulado inicialmente por B.H. Neumann em 1935 para grupos e por Wilhelm Specht em 1950 para álgebras associativas sobre corpos de característica zero. Ele pode ser enunciado da seguinte forma:

Problema de Specht. *Toda variedade de álgebras (associativas ou de Lie) é finitamente gerada?*

As investigações em torno desse problema se dividem em dois enfoques principais:

1. Demonstrar que certas variedades satisfazem a propriedade de Specht, ou seja, fornecem uma resposta positiva para o Problema de Specht;
2. Construir exemplos de variedades que não admitem uma base finita para as suas identidades polinomiais.

Entre os resultados positivos, destaca-se o seguinte:

Teorema 2.37 ([4, Teorema 3.1.3], Oates-Powell-Bahturin). *Se R é um grupo finito ou um anel (associativo ou de Lie) finito ou uma álgebra (associativa ou de Lie) finita, então a variedade gerada por $T(R)$ satisfaz a propriedade de Specht.*

O resultado mais significativo foi alcançado por Kemer em 1987, que forneceu uma solução positiva para o problema de Specht no contexto das álgebras associativas sobre corpos de característica zero, usando técnicas avançadas da teoria das PI-álgebras.

Teorema 2.38 ([8], Kemer, 1987). *Toda variedade de álgebras associativas sobre um corpo de característica zero possui uma base finita para as suas identidades polinomiais.*

No entanto, existem contraexemplos que mostram que o Problema de Specht não tem uma resposta positiva em todos os contextos.

Para álgebras associativas sobre corpos de característica positiva existe o seguinte resultado demonstrado por Belov no ano de 1999:

Teorema 2.39 ([3, Teorema 3.1], Belov 1999). *Sobre qualquer corpo de característica positiva existem T-ideais de álgebras associativas não finitamente gerados.*

No mesmo ano de 1999, Grishin, e no ano de 2002, Gupta e Krasilnikov fizeram contraexemplos simples ao problema de Specht de álgebras associativas sobre corpos de característica 2.

Teorema 2.40 ([6, Teorema 2.18], Grishin-Gupta-Krasilnikov). *Sobre um corpo qualquer de característica 2, existem os seguintes T-ideais não finitamente gerados:*

- O T-ideal de Grishin, gerado por

$$y_1^4 z_1^4 x_1^2 \cdots x_n^4 z_2^4 y_2^4 z_1^4 x_{n+1}^2 \cdots x_{2n}^2 z_2^4 y_2^4, \quad n = 1, 2, \dots$$

- O T-ideal de Gupta e Krasilnikov, gerado por

$$[x, y^2] x_1^2 \cdots x_n^2 [x, y^2]^3, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

No caso das álgebras de Lie, o primeiro contraexemplo foi construído por Vaughan-Lee em 1970, para álgebras sobre um corpo de característica 2, e depois por Drensky (1974) para qualquer característica positiva.

Teorema 2.41 ([9, Teorema 2], [5, Teorema 2.3], Vaughan-Lee, Drensky). .

- Seja \mathbb{K} um corpo de característica 2. O T-ideal gerado por os polinômios

$$[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5], \quad [[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n], [x_1, x_2]], \quad n \geq 3,$$

não é finitamente gerado.

- Seja \mathbb{K} um corpo de característica positiva p . O T-ideal gerado por os polinômios

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2p-1}, x_{2p}] x_{2p+1}],$$

$$\left[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], [[x_5, x_6], [x_7, x_8]] \right] e \quad [[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n], [x_1, x_2]], \quad n \geq 3$$

não é finitamente gerado.

Apesar desses avanços, o Problema de Specht permanece em aberto no seguinte caso:

Problema em aberto. Toda variedade de álgebras de Lie sobre um corpo de característica zero possui uma base finita para as suas identidades polinomiais?

Uma direção positiva para álgebras de Lie em característica zero foi obtida por Il'tyakov, com o seguinte resultado:

Teorema 2.42 ([6, Teorema 2.19][Il'tyakov]). *Seja L uma álgebra de Lie finitamente gerada sobre um corpo de característica zero.*

- (i) *Se L admite uma álgebra envolvente R que seja uma PI-álgebra, então todo par (R, L) que satisfaz todas as identidades polinomiais fracas possui uma base finita dessas identidades fracas.*
- (ii) *Se a álgebra de multiplicações $\text{ad}(L)$ é uma PI-álgebra (associativa), então a variedade gerada por L satisfaz a propriedade de Specht. Em particular, isso vale quando L tem dimensão finita.*

No próximo capítulo estudaremos os contraexemplos de Drensky para variedades de álgebras de Lie sobre corpos de característica positiva, assunto principal desta dissertação.

Contraexemplo ao problema de Specht para T-ideais de Álgebras de Lie

O objetivo central deste capítulo é demonstrar que, sobre um corpo arbitrário de característica $p > 0$, existe um T -ideal de identidades polinomiais na álgebra de Lie livre que não é finitamente gerado. Em outras palavras, pretendemos construir um exemplo de uma variedade de álgebras de Lie que não admite uma base finita para suas identidades, isto é, uma variedade que não satisfaz a propriedade de Specht.

Essas demonstrações foram apresentadas nos trabalhos de Vaughan Lee (1970) ([9]) para corpos de característica 2 e Drenski (1974) ([5]) para corpos de característica positiva p , que consiste em construir uma álgebra de Lie que satisfaça todas as identidades polinomiais geradoras de um dado T -ideal, mas que, simultaneamente, não satisfaça uma certa identidade polinomial que deveria ser consequência dos geradores, caso o ideal fosse finitamente gerado. A ocorrência desse absurdo demonstra que o T -ideal em questão não pode ser finitamente gerado. Este capítulo apresenta, portanto, esses métodos e ideais dos trabalhos mencionados.

Ao longo deste capítulo, \mathbb{K} denotará um corpo de característica positiva p .

Construiremos as estruturas T_n, A_n, B_n e C_n que serão a base do nosso estudo.

3.1 Conjunto T_n e álgebra de Lie A_n

Definição 3.1. Fixado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por T_n o conjunto das partes de $\{1, 2, \dots, 2n - 1\}$, isto é,

$$T_n = \{ \tau \mid \tau \subseteq \{1, 2, \dots, 2n - 1\} \},$$

e denotamos por $|\tau|$ a cardinalidade de $\tau \in T_n$.

Com base neste conjunto T_n , construiremos uma álgebra A_n . Tal álgebra terá a estrutura de espaço vetorial dada a seguir e, posteriormente, definiremos o produto entre quaisquer de seus elementos.

Definição 3.2. Denotamos por A_n o espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} com a seguinte base:

$$\left\{ a_{\sigma}^{(1)}, a_{\tau}^{(k)}, b \mid \sigma, \tau \in T_n, |\tau| \text{ é ímpar e } 2 \leq k \leq p-1 \right\}.$$

De agora em diante, usaremos apenas tal base para A_n e, referente aos seus elementos, segue o item de notações.

Notação 3.3. Para fins de cálculo, estabeleceremos que

$$a_{\{1,2,\dots,2n-1\}}^{(p)} = b \text{ e } a_{\sigma}^{(p)} = 0 \text{ se } \sigma \neq \{1,2,\dots,2n-1\}.$$

Além disso, denotaremos por Γ_n o conjunto dos pares (k, σ) que satisfazem as seguintes sentenças:

- $k = 1$ e $\sigma \in T_n$, ou
- $2 \leq k \leq p-1$, $\sigma \in T_n$ e $|\sigma|$ é ímpar, ou
- $k = p$ e $\sigma = \{1, \dots, 2n-1\}$.

Com base nas notações acima, note que todo elemento $a \in A_n$ tem a forma

$$a = \sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} a_{\sigma}^{(k)}, \quad \alpha_{(k,\sigma)} \in \mathbb{K}.$$

A seguir definiremos a operação de produto $[,]$ no espaço vetorial A_n , tornando-o assim uma álgebra. Para isso, pelo Exemplo 1.6, é suficiente definir o produto entre quaisquer dois elementos da base de A_n .

Definição 3.4. Definimos o produto $[,]$ entre quaisquer dois elementos da base de A_n por

$$\left[a_{\sigma}^{(k)}, a_{\tau}^{(l)} \right] = \begin{cases} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \tau}^{(k+l)}, & \text{se } k+l \leq p, \quad \sigma \cap \tau = \emptyset \text{ e } |\sigma| + |\tau| \text{ é ímpar;} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e estendemos tal produto para quaisquer dois elementos de A_n por linearidade: se

$$a = \sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} a_{\sigma}^{(k)} \text{ e } b = \sum_{(l,\tau) \in \Gamma_n} \beta_{(l,\tau)} a_{\tau}^{(l)},$$

onde $\alpha_{(k,\sigma)}, \beta_{(l,\tau)} \in \mathbb{K}$, então

$$[a, b] = \left[\sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} a_{\sigma}^{(k)}, \sum_{(l,\tau) \in \Gamma_n} \beta_{(l,\tau)} a_{\tau}^{(l)} \right] = \sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \sum_{(l,\tau) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} \beta_{(l,\tau)} \left[a_{\sigma}^{(k)}, a_{\tau}^{(l)} \right].$$

Exemplo 3.5. Seja $n = 3$ e $p = 5$.

Assim, \mathbb{K} é um corpo de característica $p = 5$ e T_3 é o conjunto das partes de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ou seja,

$$T_3 = \left\{ \begin{array}{cccccc} \emptyset, & \{1\}, & \{2\}, & \{3\}, & \{4\}, & \{5\}, \\ \{1, 2\}, & \{1, 3\}, & \{1, 4\}, & \{1, 5\}, & \{2, 3\}, & \{2, 4\}, \\ \{2, 5\}, & \{3, 4\}, & \{3, 5\}, & \{4, 5\}, & \{1, 2, 3\}, & \{1, 2, 4\}, \\ \{1, 2, 5\}, & \{1, 3, 4\}, & \{1, 3, 5\}, & \{1, 4, 5\}, & \{2, 3, 4\}, & \{2, 3, 5\}, \\ \{2, 4, 5\}, & \{3, 4, 5\}, & \{1, 2, 3, 4\}, & \{1, 2, 3, 5\}, & \{1, 2, 4, 5\}, & \\ \{1, 3, 4, 5\}, & \{2, 3, 4, 5\}, & \{1, 2, 3, 4, 5\} & & & \end{array} \right\},$$

$$|T_3| = 2^5 = 32.$$

O espaço vetorial A_3 tem base

$$\left\{ a_{\emptyset}^{(1)}, a_{\{i\}}^{(t)}, a_{\{i,j\}}^{(1)}, a_{\{i,j,k\}}^{(t)}, a_{\{i,j,k,l\}}^{(1)}, a_{\{1,2,3,4,5\}}^{(5)} = b \mid 1 \leq t \leq 4 \text{ e } 1 \leq i < j < k < l \leq 5 \right\}.$$

Pela definição do produto $[a_{\sigma}^{(k)}, a_{\tau}^{(l)}]$, temos os seguintes exemplos em A_3 :

1. $[a_{\{1,2,3\}}^{(2)}, a_{\{1,2\}}^{(1)}] = 0$, pois $\{1,2,3\} \cap \{1,2\} \neq \emptyset$.
2. $[a_{\{1,2,3\}}^{(4)}, a_{\{4,5\}}^{(1)}] = (-1)^{|\{1,2,3\}|} a_{\{1,2,3,4,5\}}^{(5)} = -b$.
3. $[a_{\{2,3\}}^{(1)}, a_{\{4\}}^{(2)}] = (-1)^{|\{2,3\}|} a_{\{2,3,4\}}^{(3)} = a_{\{2,3,4\}}^{(3)}$.
4. $[a_{\{3,4,5\}}^{(3)}, a_{\{2\}}^{(1)}] = 0$, pois $|\{3,4,5\}| + |\{2\}|$ é par.
5. Se $a = a_{\{1,2\}}^{(1)} + 3a_{\{2,3,4\}}^{(2)}$ e $b = 4a_{\{1\}}^{(4)} + 2a_{\{3\}}^{(2)}$, então

$$\begin{aligned} [a, b] &= [a_{\{1,2\}}^{(1)} + 3a_{\{2,3,4\}}^{(2)}, 4a_{\{1\}}^{(4)} + 2a_{\{3\}}^{(2)}] \\ &= [a_{\{1,2\}}^{(1)}, 4a_{\{1\}}^{(4)}] + [a_{\{1,2\}}^{(1)}, 2a_{\{3\}}^{(2)}] + [3a_{\{2,3,4\}}^{(2)}, 4a_{\{1\}}^{(4)}] + [3a_{\{2,3,4\}}^{(2)}, 2a_{\{3\}}^{(2)}] \\ &= 4[a_{\{1,2\}}^{(1)}, a_{\{1\}}^{(4)}] + 2[a_{\{1,2\}}^{(1)}, a_{\{3\}}^{(2)}] + 2[a_{\{2,3,4\}}^{(2)}, a_{\{1\}}^{(4)}] + [a_{\{2,3,4\}}^{(2)}, a_{\{3\}}^{(2)}] \\ &= 4(0) + 2(-1)^{|\{1,2\}|} a_{\{1,2,3\}}^{(3)} + 2(0) + 0 \\ &= 2a_{\{1,2,3\}}^{(3)} \end{aligned}$$

Da definição de $[,]$ podemos comprovar que tal operação de produto em A_n é antissimétrica e cumpre com a identidade de Jacobi, ou seja, temos a seguinte proposição com demonstração.

Proposição 3.6. *A álgebra A_n é uma álgebra de Lie.*

Demonstração. Como a operação $[,]$ é bilinear, basta verificar a propriedade antissimétrica e a identidade de Jacobi para os elementos da base de A_n . Sejam $a_{\sigma}^{(k)}, a_{\tau}^{(l)}, a_{\rho}^{(m)}$ elementos da base de A_n .

(a) Antissimetria:

Se $k+l \leq p$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ e $|\sigma| + |\tau|$ é ímpar, então $(-1)^{|\sigma|} = -(-1)^{|\tau|}$, e:

$$[a_{\sigma}^{(k)}, a_{\tau}^{(l)}] = (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \tau}^{(k+l)} = -(-1)^{|\tau|} a_{\tau \cup \sigma}^{(l+k)} = -[a_{\tau}^{(l)}, a_{\sigma}^{(k)}],$$

como desejávamos. Nos demais casos, $[a_{\sigma}^{(k)}, a_{\tau}^{(l)}] = 0 = -[a_{\tau}^{(l)}, a_{\sigma}^{(k)}]$.

(b) Identidade de Jacobi:

Suponha que $k+l+m \leq p$, $\tau \cap \rho = \rho \cap \sigma = \sigma \cap \tau = \emptyset$ e considere:

$$a = [a_{\sigma}^{(k)}, [a_{\tau}^{(l)}, a_{\rho}^{(m)}]] + [a_{\tau}^{(l)}, [a_{\rho}^{(m)}, a_{\sigma}^{(k)}]] + [a_{\rho}^{(m)}, [a_{\sigma}^{(k)}, a_{\tau}^{(l)}]].$$

Caso 1. Se $|\tau|$, $|\rho|$ e $|\sigma|$ são pares, então todas as somas de tamanhos também são pares, e $a = 0$.

Caso 2. Se $|\tau|$, $|\rho|$ e $|\sigma|$ são ímpares, então as somas também são pares, e $a = 0$.

Caso 3. Se $|\tau|$ e $|\rho|$ são ímpares e $|\sigma|$ é par, então:

$$a = (-1)^{|\rho|} \left[a_{\tau}^{(l)}, a_{\rho \cup \sigma}^{(m+k)} \right] + (-1)^{|\sigma|} \left[a_{\rho}^{(m)}, a_{\sigma \cup \tau}^{(k+l)} \right] = 0 + 0 = 0.$$

Caso 4. Se $|\tau|$ e $|\rho|$ são pares e $|\sigma|$ é ímpar, então:

$$a = (-1)^{|\rho|} \left[a_{\tau}^{(l)}, a_{\rho \cup \sigma}^{(m+k)} \right] + (-1)^{|\sigma|} \left[a_{\rho}^{(m)}, a_{\sigma \cup \tau}^{(k+l)} \right] = \left[a_{\tau}^{(l)}, a_{\rho \cup \sigma}^{(m+k)} \right] - \left[a_{\rho}^{(m)}, a_{\sigma \cup \tau}^{(k+l)} \right].$$

$$\text{Por tanto, } a = a_{\tau \cup \rho \cup \sigma}^{(l+m+k)} - a_{\rho \cup \sigma \cup \tau}^{(m+l+k)} = 0.$$

Caso 5. Os demais casos são análogos aos anteriores.

Pela Proposição 1.25, concluímos que A_n é de fato uma álgebra de Lie. □

Proposição 3.7. *A álgebra de Lie A_n é nilpotente de classe p e metabeliana.*

Demonstração. Sejam

$$f_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = [x_1, x_2, \dots, x_m] \text{ e } \delta_2 = \delta_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4]].$$

Por definição, a álgebra de Lie A_n será nilpotente de classe p se $f_{p+1} \in T(A_n)$ e $f_p \notin T(A_n)$, e será metabeliana se $\delta_2 \in T(A_n)$.

Da mesma forma que na proposição anterior, como os polinômios f_{p+1} e g são multilineares, só precisamos provar que f_{p+1} e g se anulam nos elementos da base do espaço vetorial A_n e que f_p não se anula para alguma substituição de suas variáveis por elementos de A_n .

- Provaremos que A_n é nilpotente de classe p .

1. $f_p \notin T(A_n)$.

Considere $X_1 = a_{\{1\}}^{(1)}$, $X_2 = a_{\{2,3,\dots,2n-1\}}^{(1)}$, $X_3 = a_{\emptyset}^{(1)}$, ..., $X_p = a_{\emptyset}^{(1)}$ e substitua em f_p :

$$\begin{aligned} f_p(X_1, X_2, \dots, X_p) &= \left[a_{\{1\}}^{(1)}, a_{\{2,3,\dots,2n-1\}}^{(1)}, a_{\emptyset}^{(1)}, \dots, a_{\emptyset}^{(1)} \right] \\ &= - \left[a_{\{1,2,\dots,2n-1\}}^{(2)}, a_{\emptyset}^{(1)}, \dots, a_{\emptyset}^{(1)} \right] = a_{\{1,2,\dots,2n-1\}}^{(p)} = b \neq 0. \end{aligned}$$

2. $f_{p+1} \in T(A_n)$.

Sejam $X_1 = a_{\sigma_1}^{(k_1)}$, $X_2 = a_{\sigma_2}^{(k_2)}$, ..., $X_{p+1} = a_{\sigma_{p+1}}^{(k_{p+1})}$ elementos da base de A_n . Em particular, $1 \leq k_i \leq p$ para todo $1 \leq i \leq p+1$. Se $f_{p+1}(X_1, X_2, \dots, X_{p+1}) \neq 0$, então

$$\emptyset = \sigma_1 \cap \sigma_2 = (\sigma_1 \cup \sigma_2) \cap \sigma_3 = \dots = (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_p) \cap \sigma_{p+1},$$

$|\sigma_1| + |\sigma_2|$ é ímpar, $|\sigma_3|$ é par, $|\sigma_4|$ é par, ... , $|\sigma_{p+1}|$ é par, e

$$\begin{aligned} f_{p+1}(X_1, X_2, \dots, X_{p+1}) &= \left[a_{\sigma_1}^{(k_1)}, a_{\sigma_2}^{(k_2)}, \dots, a_{\sigma_{p+1}}^{(k_{p+1})} \right] = (-1)^{|\sigma_1|} \left[a_{\sigma_1 \cup \sigma_2}^{(k_1+k_2)}, a_{\sigma_3}^{(k_3)}, \dots, a_{\sigma_{p+1}}^{(k_{p+1})} \right] \\ &= (-1)^{|\sigma_1|} (-1) \left[a_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3}^{(k_1+k_2+k_3)}, a_{\sigma_4}^{(k_4)}, \dots, a_{\sigma_{p+1}}^{(k_{p+1})} \right] \\ &= (-1)^{|\sigma_1|+p-2} \left[a_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_p}^{(k_1+k_2+\dots+k_p)}, a_{\sigma_{p+1}}^{(k_{p+1})} \right]. \end{aligned}$$

Como $k_1 + k_2 + \dots + k_p \leq p$ e $k_1, k_2, \dots, k_p \geq 1$, segue que $k_1 + k_2 + \dots + k_p = p$ e, portanto,

$$f_{p+1}(X_1, X_2, \dots, X_{p+1}) = (-1)^{|\sigma_1|+p-2} \left[a_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_p}^{(p)}, a_{\sigma_{p+1}}^{(k_{p+1})} \right] = 0,$$

pois $p + k_{p+1} > p$. Absurdo.

Portanto, $f_p \notin T(A_n)$ e $f_{p+1} \in T(A_n)$ como era o desejado.

- Provaremos que A_n é uma álgebra de Lie metabeliana.

Considere $X_1 = a_{\sigma_1}^{(k_1)}$, $X_2 = a_{\sigma_2}^{(k_2)}$, $X_3 = a_{\sigma_3}^{(k_3)}$, $X_4 = a_{\sigma_4}^{(k_4)}$ elementos da base de A_n . Se $\delta_2(X_1, X_2, X_3, X_4) \neq 0$, então

$$\emptyset = \sigma_1 \cap \sigma_2 = \sigma_3 \cap \sigma_4 = (\sigma_1 \cup \sigma_2) \cap (\sigma_3 \cup \sigma_4),$$

$|\sigma_1| + |\sigma_2|$ é ímpar, $|\sigma_3| + |\sigma_4|$ é ímpar e

$$\delta_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = \left[\left[a_{\sigma_1}^{(k_1)}, a_{\sigma_2}^{(k_2)} \right], \left[a_{\sigma_3}^{(k_3)}, a_{\sigma_4}^{(k_4)} \right] \right] = (-1)^{|\sigma_1|+|\sigma_3|} \left[a_{\sigma_1 \cup \sigma_2}^{(k_1+k_2)}, a_{\sigma_3 \cup \sigma_4}^{(k_3+k_4)} \right].$$

Como $|\sigma_1 \cup \sigma_2| + |\sigma_3 \cup \sigma_4| = |\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3| + |\sigma_4|$ é par, segue que

$$\delta_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = (-1)^{|\sigma_1|+|\sigma_3|} \left[a_{\sigma_1 \cup \sigma_2}^{(k_1+k_2)}, a_{\sigma_3 \cup \sigma_4}^{(k_3+k_4)} \right] = (-1)^{|\sigma_1|+|\sigma_3|} (0) = 0. \text{ Absurdo.}$$

Portanto, $\delta_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T(A_n)$ como era desejado.

Assim, a álgebra de Lie A_n é nilpotente de classe p e metabeliana. □

Observação 3.8. Seja $A_n^k = \left[\underbrace{A_n, A_n, \dots, A_n}_{k\text{-vezes}} \right] = \text{span} \{ [a_1, a_2, \dots, a_k] \mid a_i \in A_n, 1 \leq i \leq k \}$ o subespaço vetorial de A_n gerado por todos os elementos $[a_1, a_2, \dots, a_k]$. Note que:

- Se $k > p$, então $A_n^k = 0$.

De fato,

$$[a_1, a_2, \dots, a_k] = [a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_k] = [[a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}], a_{p+2}, \dots, a_k]$$

e, pelo fato de A_n ser nilpotente de classe p , temos $[a_1, a_2, \dots, a_k] = [0, a_{p+2}, \dots, a_k] = 0$.

- $A_n^p = \text{span}\{b\} = \mathbb{K}b$.

Para provar tal fato, usaremos a notação f_p da proposição anterior. Como f_p é multilinear, basta verificarmos que $f_p(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}b$ para quaisquer elementos a_1, \dots, a_p da base de A_n . Sejam

$a_1 = a_{\sigma_1}^{(k_1)}, a_2 = a_{\sigma_2}^{(k_2)}, \dots, a_p = a_{\sigma_p}^{(k_p)}$ elementos da base de A_n . Em particular, $1 \leq k_i \leq p$ para todo $1 \leq i \leq p$. Se $f_p(a_1, a_2, \dots, a_p) \neq 0$, então

$$\emptyset = \sigma_1 \cap \sigma_2 = (\sigma_1 \cup \sigma_2) \cap \sigma_3 = \dots = (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_{p-1}) \cap \sigma_p,$$

$|\sigma_1| + |\sigma_2|$ é ímpar, $|\sigma_3|$ é par, $|\sigma_4|$ é par, ... , $|\sigma_p|$ é par, e

$$\begin{aligned} f_p(a_1, a_2, \dots, a_p) &= \left[a_{\sigma_1}^{(k_1)}, a_{\sigma_2}^{(k_2)}, \dots, a_{\sigma_p}^{(k_p)} \right] = (-1)^{|\sigma_1|} \left[a_{\sigma_1 \cup \sigma_2}^{(k_1+k_2)}, a_{\sigma_3}^{(k_3)}, \dots, a_{\sigma_p}^{(k_p)} \right] \\ &= (-1)^{|\sigma_1|} (-1) \left[a_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3}^{(k_1+k_2+k_3)}, a_{\sigma_4}^{(k_4)}, \dots, a_{\sigma_p}^{(k_p)} \right] \\ &= (-1)^{|\sigma_1|+p-1} a_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_p}^{(k_1+k_2+\dots+k_p)}. \end{aligned}$$

Como $k_1 + k_2 + \dots + k_p \leq p$ e $k_1, k_2, \dots, k_p \geq 1$, segue que $k_1 + k_2 + \dots + k_p = p$ e, portanto,

$$f_p(a_1, a_2, \dots, a_p) = (-1)^{|\sigma_1|+p-1} a_{\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_p}^{(p)} = (-1)^{|\sigma_1|+p-1} b,$$

pois o único elemento $a_{\sigma}^{(p)}$ não nulo da base de A_n é o próprio b . Portanto $A_n^p \subseteq \mathbb{K}b$.

Conforme já foi visto na proposição anterior, $b = \left[a_{\{1\}}^{(1)}, a_{\{2, \dots, 2n-1\}}^{(1)}, \underbrace{a_{\emptyset}^{(1)}, \dots, a_{\emptyset}^{(1)}}_{p-2\text{-vezes}} \right] \in A_n^p$. Por-

tanto, $\mathbb{K}b \subseteq A_n^p$.

Segue que $A_n^p = \mathbb{K}b$.

Observação 3.9. Pelo fato de A_n ser metabeliana, temos pela Observação 2.13 que

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a_1, a_2, a_4, a_3]$$

para todos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A_n$,

3.2 Álgebra de Lie D_n

Definição 3.10. Sejam $\lambda, \mu \in T_n$ tais que $|\lambda|$ é ímpar e $|\mu|$ é par. Denotaremos por $g_\lambda, h_\mu \in \text{End}_{\mathbb{K}}(A_n)$ os operadores lineares de A_n que agem na base de A_n do seguinte modo:

$$\left(a_{\sigma}^{(k)} \right) g_{\lambda} = \begin{cases} a_{\sigma \cup \lambda}^{(k)}, & \text{se } |\sigma| \text{ é par e } \sigma \cap \lambda = \emptyset; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\left(a_{\sigma}^{(k)} \right) h_{\mu} = \begin{cases} k a_{\sigma \cup \mu}^{(k)}, & \text{se } \sigma \cap \lambda = \emptyset; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Relembramos da Álgebra Linear que num elemento qualquer

$$a = \sum_{(k, \sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k, \sigma)} a_{\sigma}^{(k)} \in A_n, \quad \alpha_{(k, \sigma)} \in \mathbb{K},$$

os operadores acima satisfazem:

$$\begin{aligned} (a)g_\lambda &= \left(\sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} a_\sigma^{(k)} \right) g_\lambda = \sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} \left(a_\sigma^{(k)} \right) g_\lambda, \\ (a)h_\mu &= \left(\sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} a_\sigma^{(k)} \right) h_\mu = \sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} \left(a_\sigma^{(k)} \right) h_\mu. \end{aligned}$$

Proposição 3.11. *Sejam $\lambda, \mu \in T_n$ tais que $|\lambda|$ é ímpar e $|\mu|$ é par. Então os operadores lineares g_λ e h_μ são derivações de A_n .*

Demonstração. Precisamos mostrar que para quaisquer $a, b \in A_n$ vale:

$$([a, b])g_\lambda = [(a)g_\lambda, b] + [a, (b)g_\lambda] \text{ e}$$

$$([a, b])h_\mu = [(a)h_\mu, b] + [a, (b)h_\mu].$$

Se $a = \sum_{(k,\sigma) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} a_\sigma^{(k)}$ e $b = \sum_{(l,\tau) \in \Gamma_n} \beta_{(l,\tau)} a_\tau^{(l)}$, com $\alpha_{(k,\sigma)}, \beta_{(l,\tau)} \in \mathbb{K}$, então pela definição de álgebra e pelo fato de g_λ e h_μ serem transformações lineares, temos que:

$$([a, b])g_\lambda = \left(\sum_{(k,\sigma), (l,\tau) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} \beta_{(l,\tau)} [a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) g_\lambda = \sum_{(k,\sigma), (l,\tau) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} \beta_{(l,\tau)} \left([a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) g_\lambda,$$

$$([a, b])h_\mu = \left(\sum_{(k,\sigma), (l,\tau) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} \beta_{(l,\tau)} [a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) h_\mu = \sum_{(k,\sigma), (l,\tau) \in \Gamma_n} \alpha_{(k,\sigma)} \beta_{(l,\tau)} \left([a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) h_\mu.$$

Assim, para que g_λ e h_μ sejam derivações é suficiente provar que:

$$\left([a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) g_\lambda = \left[(a_\sigma^{(k)})g_\lambda, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, (a_\tau^{(l)})g_\lambda \right],$$

$$\left([a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) h_\mu = \left[(a_\sigma^{(k)})h_\mu, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, (a_\tau^{(l)})h_\mu \right].$$

- Vamos provar que cada lado da igualdade $\left([a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) g_\lambda = \left[(a_\sigma^{(k)})g_\lambda, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, (a_\tau^{(l)})g_\lambda \right]$ é zero.

$$- \left([a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) g_\lambda = 0.$$

Pela definição de produto em A_n , $[a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \neq 0$ se $k+l \leq p$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ e $|\sigma| + |\tau|$ é ímpar. Neste caso, $|\sigma \cup \tau|$ é ímpar e, pela definição de g_λ , vale:

$$\left([a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] \right) g_\lambda = \left((-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \tau}^{(k+l)} \right) g_\lambda = 0.$$

$$- \left[(a_\sigma^{(k)})g_\lambda, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, (a_\tau^{(l)})g_\lambda \right] = 0.$$

Suponha que o acima seja $\neq 0$. Então, pela definição de g_λ e pelo produto em A_n , obrigatoriamente devemos ter $\sigma \cap \lambda = \tau \cap \lambda = \sigma \cap \tau = \emptyset$, $k+l \leq p$ e $|\sigma|, |\tau|$ são pares. Neste

caso, teremos

$$\begin{aligned} \left[(a_\sigma^{(k)})g_\lambda, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, (a_\tau^{(l)})g_\lambda \right] &= \left[a_{\sigma \cup \lambda}^{(k)}, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, a_{\tau \cup \lambda}^{(l)} \right] \\ &= (-1)^{|\sigma \cup \lambda|} a_{\sigma \cup \lambda \cup \tau}^{(k+l)} + (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \tau \cup \lambda}^{(k+l)} \\ &= -a_{\sigma \cup \lambda \cup \tau}^{(k+l)} + a_{\sigma \cup \tau \cup \lambda}^{(k+l)} = 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Portanto, pelos dois itens, $0 = \left(\left[a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)} \right] \right) g_\lambda = \left[(a_\sigma^{(k)})g_\lambda, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, (a_\tau^{(l)})g_\lambda \right]$.

• Vamos provar a igualdade $\left(\left[a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)} \right] \right) h_\mu = \left[(a_\sigma^{(k)})h_\mu, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, (a_\tau^{(l)})h_\mu \right]$.

– Pela definição de h_μ e pelo produto em A_n , temos que ambos os lados da igualdade coincidem com 0 ou $\sigma \cap \tau = \sigma \cap \mu = \tau \cap \mu = \emptyset$, $|\sigma| + |\tau|$ é ímpar e $k + l \leq p$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \left(\left[a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)} \right] \right) h_\mu &= \left((-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \tau}^{(k+l)} \right) h_\mu = (-1)^{|\sigma|} \left(a_{\sigma \cup \tau}^{(k+l)} \right) h_\mu \\ &= (-1)^{|\sigma|} (k+l) a_{\sigma \cup \tau \cup \mu}^{(k+l)} = (-1)^{|\sigma|} k a_{\sigma \cup \tau \cup \mu}^{(k+l)} + (-1)^{|\sigma|} l a_{\sigma \cup \tau \cup \mu}^{(k+l)} \\ &= k (-1)^{|\sigma| + |\mu|} a_{\sigma \cup \tau \cup \mu}^{(k+l)} + l (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \tau \cup \mu}^{(k+l)} \\ &= \left[k a_{\sigma \cup \mu}^{(k)}, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, l a_{\tau \cup \mu}^{(l)} \right] \\ &= \left[\left(a_\sigma^{(k)} \right) h_\mu, a_\tau^{(l)} \right] + \left[a_\sigma^{(k)}, \left(a_\tau^{(l)} \right) h_\mu \right]. \end{aligned}$$

Portanto, as transformações lineares g_λ e h_μ são derivações. □

Definição 3.12. Denotamos por D_n o \mathbb{K} -subespaço vetorial de $\text{End}_{\mathbb{K}}(A_n)$ gerado pelo conjunto

$$\{g_\lambda, h_\mu \mid \lambda, \mu \in T_n, |\lambda| \text{ é ímpar e } |\mu| \text{ é par}\}.$$

Proposição 3.13. D_n é uma subálgebra de Lie abeliana da álgebra de Lie das derivações de A_n .

Demonstração. Pela última proposição, temos que D_n é um subespaço vetorial da álgebra de Lie de derivações $\mathcal{D}(A_n)$. Relembramos da Proposição 1.31 que o produto em D_n é o colchete de Lie

$$[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1, \quad d_1, d_2 \in D_n.$$

Provaremos que $[d_1, d_2] = 0$, ou seja, $(a)d_1 d_2 = (a)d_2 d_1$ para todo $a \in A_n$. Como $d_1 d_2$ e $d_2 d_1$ são transformações lineares, basta provar tal igualdade para todo elemento a da base de A_n . Sejam $\sigma, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \mu_1, \mu_2 \in T_n$ e $k \leq p$ tais que $|\lambda|, |\lambda_1|, |\lambda_2|$ são ímpares e $|\mu|, |\mu_1|, |\mu_2|$ são pares.

$$1. \left(a_\sigma^{(k)} \right) g_{\lambda_1} g_{\lambda_2} = \left(a_\sigma^{(k)} \right) g_{\lambda_2} g_{\lambda_1}.$$

Prova. Ambos os lados da igualdade são 0 ou $|\sigma|$ é par e $\sigma \cap \lambda_1 = \sigma \cap \lambda_2 = \emptyset$. No segundo caso temos

$$\left(a_\sigma^{(k)} \right) g_{\lambda_1} g_{\lambda_2} = \left(\left(a_\sigma^{(k)} \right) g_{\lambda_1} \right) g_{\lambda_2} = \left(a_{\sigma \cup \lambda_1}^{(k)} \right) g_{\lambda_2} = 0,$$

pois $|\sigma \cup \lambda_1|$ é ímpar. Da mesma maneira, $\left(a_\sigma^{(k)} \right) g_{\lambda_2} g_{\lambda_1} = 0$. Logo, $\left(a_\sigma^{(k)} \right) g_{\lambda_1} g_{\lambda_2} = \left(a_\sigma^{(k)} \right) g_{\lambda_2} g_{\lambda_1}$.

$$2. \binom{(k)}{a_\sigma} h_{\mu_1} h_{\mu_2} = \binom{(k)}{a_\sigma} h_{\mu_2} h_{\mu_1}.$$

Prova. Ambos os lados da igualdade são 0 ou $\sigma \cap \mu_1 = \sigma \cap \mu_2 = \mu_1 \cap \mu_2 = \emptyset$. No segundo caso temos

$$\binom{(k)}{a_\sigma} h_{\mu_1} h_{\mu_2} = \left(\binom{(k)}{a_\sigma} h_{\mu_1} \right) h_{\mu_2} = \left(k a_{\sigma \cup \mu_1}^{(k)} \right) h_{\mu_2} = k^2 a_{\sigma \cup \mu_1 \cup \mu_2}^{(k)} = k^2 a_{\sigma \cup \mu_2 \cup \mu_1}^{(k)} = \binom{(k)}{a_\sigma} h_{\mu_2} h_{\mu_1}.$$

$$3. \binom{(k)}{a_\sigma} h_\mu g_\lambda = \binom{(k)}{a_\sigma} g_\lambda h_\mu.$$

Prova. Ambos os lados da igualdade são 0 ou $\sigma \cap \lambda = \sigma \cap \mu = \lambda \cap \mu = \emptyset$ e $|\sigma|$ é par. No segundo caso temos

$$\binom{(k)}{a_\sigma} h_\mu g_\lambda = \left(\binom{(k)}{a_\sigma} h_\mu \right) g_\lambda = \left(k a_{\sigma \cup \mu}^{(k)} \right) g_\lambda = k a_{\sigma \cup \mu \cup \lambda}^{(k)} = \binom{(k)}{a_{\sigma \cup \lambda}} h_\mu = \binom{(k)}{a_\sigma} g_\lambda h_\mu.$$

Portanto $[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1 = 0$, para todos os elementos da base de D_n . Pela bilinearidade do colchete, segue que $[d_1, d_2] = 0$ para todos os $d_1, d_2 \in D_n$. Segue do exemplo 1.19 que, D_n é uma álgebra de Lie abeliana. \square

3.3 Álgebra de Lie B_n

Definição 3.14. Denotamos por B_n o produto semidireto das álgebras de Lie A_n e D_n correspondente ao homomorfismo inclusão $\varphi : D_n \rightarrow \mathcal{D}(A_n)$. Relembramos da Proposição 1.32 que

$$B_n = A_n \rtimes D_n = \{(a, d) \mid a \in A_n, d \in D_n\}$$

e, para todos $(a_1, d_1), (a_2, d_2) \in B_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, vale:

- Adição: $(a_1, d_1) + (a_2, d_2) = (a_1 + a_2, d_1 + d_2)$.
- Produto por escalar: $\lambda(a_1, d_1) = (\lambda a_1, \lambda d_1)$.
- Multiplicação: $[(a_1, d_1), (a_2, d_2)] = ([a_1, a_2] + (a_1)d_2 - (a_2)d_1, 0)$, pois $[d_1, d_2] = 0$.

Observação 3.15. Identificaremos o elemento $(a, 0_{D_n}) \in B_n$ com $a \in A_n$, e identificaremos o elemento $(0_{A_n}, d) \in B_n$ com $d \in D_n$, onde 0_{A_n} é o elemento nulo de A_n e 0_{D_n} é o operador nulo de D_n . Neste sentido, A_n e D_n são subálgebras de B_n .

Em particular, se $a \in A_n$ e $d \in D_n$, então

$$[a, d] = [(a, 0_{D_n}), (0_{A_n}, d)] = ([a, 0_{A_n}] + (a)d - (0_{A_n})0_{D_n}, [0_{D_n}, d]) = ((a)d, 0_{D_n}) = (a)d.$$

Ou seja, $[a, d] = (a)d \in A_n$.

Uma outra observação importante é a seguinte.

Observação 3.16. $b \in Z(B_n)$, ou seja, b está no centro de B_n .

Para provar tal sentença, precisamos provar que $[b, u] = 0$ para todo $u \in B_n$ e, pela bilinearidade do comutador é suficiente assumir que b é um elemento da base de B_n . Pela definição do produto em A_n , segue que

- $[b, a_\sigma^{(k)}] = [a_{\{1,2,\dots,2n-1\}}^{(p)}, a_\sigma^{(k)}] = 0$, pois $p+k > p$,
- $[b, g_\lambda] = \left(a_{\{1,2,\dots,2n-1\}}^{(p)}\right) g_\lambda = 0$, pois $|\{1,2,\dots,2n-1\}|$ é ímpar, e
- $[b, h_\mu] = \left(a_{\{1,2,\dots,2n-1\}}^{(p)}\right) h_\mu = p \left(a_{\{1,2,\dots,2n-1\} \cup \mu}^{(p)}\right) = 0$, pois a característica do corpo é p .

Proposição 3.17. Se $B_n^2 = [B_n, B_n] = \text{span}_{\mathbb{K}}\{[b_1, b_2] \mid b_1, b_2 \in B_n\}$, então $B_n^2 = A_n$.

Demonstração. Provaremos que $B_n^2 \subseteq A_n$. Se $b_1 = (a_1, d_1)$ e $b_2 = (a_2, d_2) \in B_n$, então pela definição do produto em B_n temos

$$[b_1, b_2] = ([a_1, a_2] + (a_1)d_2 - (a_2)d_1, 0) = [a_1, a_2] + (a_1)d_2 - (a_2)d_1 \in A_n,$$

como desejávamos.

Provaremos que $A_n \subseteq B_n^2$. Como B_n^2 é espaço vetorial, basta provar que cada elemento da base de A_n está em B_n^2 . Se $1 \leq k \leq p-1$ e $a_\sigma^{(k)}$ é um elemento da base de A_n , então definindo $\hat{a} = \left(\frac{1}{k}a_\sigma^{(k)}, 0\right)$ e $d = (0, h_\emptyset)$, teremos $\hat{a}, d \in B_n$ e $[\hat{a}, d] = \left[\left(\frac{1}{k}a_\sigma^{(k)}, 0\right), (0, h_\emptyset)\right] = \left(\frac{1}{k}a_\sigma^{(k)}\right) h_\emptyset = a_\sigma^{(k)} \in B_n^2$. Note também que $b = \left[\left(a_\emptyset^{(1)}, 0\right), \left(a_{\{1,\dots,2n-1\}}^{(p-1)}, 0\right)\right] \in B_n^2$. \square

Proposição 3.18. A álgebra B_n satisfaz as identidades polinomiais

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}) = \left[[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2p-1}, x_{2p}], x_{2p+1} \right] e$$

$$\delta_3(x_1, x_2, \dots, x_8) = \left[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], [[x_5, x_6], [x_7, x_8]] \right].$$

Demonstração. Como os polinômios f e δ_3 são multilineares, só precisamos provar que f e δ_3 se anulam nos elementos da base do espaço vetorial B_n . Dividiremos a demonstração em duas partes.

Parte 1. $f(x_1, \dots, x_{2p+1}) \in T(B_n)$.

Demonstração. Sejam $v_1, \dots, v_{2p}, v_{2p+1} \in B_n$. Vimos na Proposição 3.17 que $B_n^2 = A_n$, portanto, para todos $v_{2i-1}, v_{2i} \in B_n$, existe $a_i \in A_n$ tal que $[v_{2i-1}, v_{2i}] = a_i$. Assim,

$$f(v_1, v_2, \dots, v_{2p+1}) = \left[[v_1, v_2], [v_3, v_4], \dots, [v_{2p-1}, v_{2p}], v_{2p+1} \right]$$

$$= [a_1, a_2, \dots, a_p, v_{2p+1}] = \left[[a_1, a_2, \dots, a_p], v_{2p+1} \right].$$

Pela Observação 3.8, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $[a_1, a_2, \dots, a_p] = \alpha b$. Agora, pela Observação 3.16, segue que

$$f(v_1, v_2, \dots, v_{2p+1}) = [\alpha b, v_{2p+1}] = \alpha [b, v_{2p+1}] = 0.$$

Portanto, $f(x_1, \dots, x_{2p+1}) \in T(B_n)$.

Parte 2. $\delta_3(x_1, x_2, \dots, x_8) \in T(B_n)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.17, temos que $B_n^2 = A_n$, então para $v_1, v_2, \dots, v_8 \in B_n$, existem $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A_n$ tais que $[v_1, v_2] = a_1, \dots, [v_7, v_8] = a_4$. Assim,

$$\begin{aligned} \delta_3(v_1, v_2, \dots, v_8) &= \left[[[v_1, v_2], [v_3, v_4]], [[v_5, v_6], [v_7, v_8]] \right] \\ &= [[a_1, a_2], [a_3, a_4]] = 0, \end{aligned}$$

pois $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ é uma identidade polinomial de A_n segundo a Proposição 3.7.

Portanto, $\delta_3(x_1, x_2, \dots, x_8) \in T(B_n)$. □

Para o próximo lema, relembremos a seguinte notação: se x e y são elementos de uma álgebra de Lie, então

$$[x, y^m] = [x, \underbrace{y, y, \dots, y}_m].$$

Lema 3.19. *Sejam $a, a_1, a_2 \in A_n$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ e $\lambda, \mu \in T_n$, onde $|\lambda|$ é ímpar e $|\mu|$ é par. Então:*

$$[(a)h_\mu, a^{p-1}] = 0,$$

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)g_\lambda, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] = \alpha_1^p [(a_1)g_\lambda, a_1^{p-1}] + \alpha_2^p [(a_2)g_\lambda, a_2^{p-1}].$$

Demonstração. Sejam V_n e W_n subespaços vetoriais da álgebra de Lie A_n dados por:

$$V_n = \text{span}_{\mathbb{K}} \left\{ a_\sigma^{(1)} \mid \sigma \in T_n \right\} \text{ e } W_n = \text{span}_{\mathbb{K}} \left\{ a_\tau^{(k)} \mid \tau \in T_n, |\tau| \text{ é ímpar}, 2 \leq k \leq p \right\}.$$

É claro que $A_n = V_n \oplus W_n$.

AFIRMAÇÃO 1: $W_n = A_n^2 = [A_n, A_n]$.

Prova: Como W_n e A_n^2 são subespaços vetoriais, só precisamos provar que os elementos da base de um estão no outro e vice-versa.

-) $A_n^2 \subseteq W_n$. Se $a_\sigma^{(k)}$ e $a_\tau^{(l)}$ são elementos da base de A_n , então os elementos da base de A_n^2 têm a forma

$$[a_\sigma^{(k)}, a_\tau^{(l)}] = (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \tau}^{k+l},$$

onde $\sigma \cap \tau = \emptyset$, $|\sigma| + |\tau|$ é ímpar e $k + l \leq p$. Como $k + l > 1$, segue que $a_{\sigma \cup \tau}^{k+l} \in W_n$. Portanto, $A_n^2 \subseteq W_n$.

-) $W_n \subseteq A_n^2$. Seja $a_\tau^{(l)}$ elemento da base de W_n . É claro que $a_\tau^{(l)} = [a_\emptyset^{(1)}, a_\tau^{(l-1)}] \in A_n^2$. Portanto, $W_n \subseteq A_n^2$.

Pelos dois itens, $W_n = A_n^2$.

AFIRMAÇÃO 2: Para todos $w \in W_n$ e $a \in A_n$ tem-se que $[(w)g_\lambda, a^{p-1}] = 0$ e $[(w)h_\mu, a^{p-1}] = 0$.

Prova: Note que, $(w)g_\lambda$ e $(w)h_\mu \in W_n$. Se $z_0 \in \{(w)g_\lambda, (w)h_\mu\}$, pela Afirmação 1 segue que $z_0 \in A_n^2$.

Logo,

$$[z_0, a^{p-1}] \in [A_n^2, A_n^k] = A_n^{k+2}.$$

Onde $k \geq p-1$, assim $k+2 > p$. Pela Observação 3.8 temos, $[z_0, a^{p-1}] = 0$. Como desejado.

AFIRMAÇÃO 3: Sejam $v \in V_n$ e $w \in W_n$. Suponha que $z_0 \in \{(v)g_\lambda, (v)h_\mu\}$ e $z_1, \dots, z_{p-1} \in \{v, w\}$. Se $z_i = w$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, então $[z_0, z_1, \dots, z_{p-1}] = 0$.

Prova: Note que, $(v)g_\lambda$ e $(v)h_\mu \in V_n$. Suponha que $z_0 \in \{(v)g_\lambda, (v)h_\mu\}$, $z_1, \dots, z_{p-1} \in \{v, w\}$ e $z_i = w$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Como $V_n \subseteq A_n$, então $z_0 \in A_n$, $z_j \in A_n$ para $j \neq i$ e $z_i \in A_n^2$ pela Afirmação 1. Assim,

$$[z_0, z_1, \dots, z_i, \dots, z_{p-1}] \in [A_n, A_n, \dots, A_n^2, \dots, A_n] = A_n^{k+2}.$$

Onde $k \geq p-1$, assim $k+2 > p$. Pela Observação 3.8 temos, $[z_0, z_1, \dots, z_{p-1}] = 0$. Como desejado.

Seja $a = v + w \in A_n$ com $v \in V_n$ e $w \in W_n$. Temos:

$$\begin{aligned} [(a)g_\lambda, (a)^{p-1}] &= [(v+w)g_\lambda, (v+w)^{p-1}] = [(v)g_\lambda, (v+w)^{p-1}] + [(w)g_\lambda, (v+w)^{p-1}] \text{ e} \\ [(a)h_\mu, (a)^{p-1}] &= [(v+w)h_\mu, (v+w)^{p-1}] = [(v)h_\mu, (v+w)^{p-1}] + [(w)h_\mu, (v+w)^{p-1}]. \end{aligned}$$

Assim, pela Afirmação 2, obtemos:

$$\begin{aligned} [(a)g_\lambda, (a)^{p-1}] &= [(v)g_\lambda, (v+w)^{p-1}] \text{ e} \\ [(a)h_\mu, (a)^{p-1}] &= [(v)h_\mu, (v+w)^{p-1}]. \end{aligned}$$

Pela propriedade distributiva,

$$[(a)g_\lambda, (a)^{p-1}] = [(v)g_\lambda, (v)^{p-1}] + \sum [(v)g_\lambda, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}] \text{ e}$$

$$[(a)h_\mu, (a)^{p-1}] = [(v)h_\mu, (v)^{p-1}] + \sum [(v)h_\mu, z_1, z_2, \dots, z_{p-1}],$$

onde em cada somatório temos $2^{p-1} - 1$ somandos com $z_1, \dots, z_{p-1} \in \{v, w\}$ e $z_i = w$ para algum i .

Portanto, pela Afirmação 3, segue que:

$$\begin{aligned} [(a)g_\lambda, (a)^{p-1}] &= [(v)g_\lambda, (v)^{p-1}] \text{ e} \\ [(a)h_\mu, (a)^{p-1}] &= [(v)h_\mu, (v)^{p-1}]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto, para demonstrar nosso lema, só precisamos provar que as igualdades do enunciado se cumprem para $a, a_1, a_2 \in V_n$. Escreva

$$a = \sum_{\sigma \in T_n} \alpha_\sigma a_\sigma^{(1)} \in V_n,$$

onde $\alpha_\sigma \in \mathbb{K}$.

- Provaremos que $[(a)h_\mu, (a)^{p-1}] = 0$.

Denote por $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t$ os $t = 2^{2n-1}$ elementos de T_n . Note que

$$\begin{aligned} [(a)h_\mu, a^{p-1}] &= [(a)h_\mu, a, a^{p-2}] = \left[\left[\left(\sum_{\sigma \in T_n} \alpha_\sigma a_\sigma^{(1)} \right) h_\mu, \left(\sum_{\sigma \in T_n} \alpha_\sigma a_\sigma^{(1)} \right) \right], a^{p-2} \right] \\ &= \left[\left[\left(\alpha_{\sigma_1} a_{\sigma_1}^{(1)} + \alpha_{\sigma_2} a_{\sigma_2}^{(1)} + \dots + \alpha_{\sigma_t} a_{\sigma_t}^{(1)} \right) h_\mu, \left(\alpha_{\sigma_1} a_{\sigma_1}^{(1)} + \alpha_{\sigma_2} a_{\sigma_2}^{(1)} + \dots + \alpha_{\sigma_t} a_{\sigma_t}^{(1)} \right) \right], a^{p-2} \right] \\ &= \left[\alpha_{\sigma_1}^2 \left[\left(a_{\sigma_1}^{(1)} \right) h_\mu, a_{\sigma_1}^{(1)} \right] + \alpha_{\sigma_1} \alpha_{\sigma_2} \left[\left(a_{\sigma_1}^{(1)} \right) h_\mu, a_{\sigma_2}^{(1)} \right] + \dots + \alpha_{\sigma_t}^2 \left[\left(a_{\sigma_t}^{(1)} \right) h_\mu, a_{\sigma_t}^{(1)} \right], a^{p-2} \right] \\ &= \left[\sum_{\sigma \in T_n} \alpha_\sigma^2 \left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) h_\mu, a_\sigma^{(1)} \right] + \sum_{\substack{\sigma, \tau \in T_n \\ \sigma \neq \tau}} \alpha_\sigma \alpha_\tau \left(\left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) h_\mu, a_\tau^{(1)} \right] + \left[\left(a_\tau^{(1)} \right) h_\mu, a_\sigma^{(1)} \right] \right), a^{p-2} \right]. \end{aligned}$$

Como $|\mu|$ é par, temos

$$\left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) h_\mu, a_\sigma^{(1)} \right] = \left[a_{\sigma \cup \mu}^{(1)}, a_\sigma^{(1)} \right] = 0,$$

pois $|\sigma \cup \mu| + |\sigma|$ é par. Logo,

$$[(a)h_\mu, a^{p-1}] = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in T_n \\ \sigma \neq \tau}} \alpha_\sigma \alpha_\tau \left[\left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) h_\mu, a_\tau^{(1)} \right] + \left[\left(a_\tau^{(1)} \right) h_\mu, a_\sigma^{(1)} \right], a^{p-2} \right].$$

Além disso, se $\sigma \cap \mu = \tau \cap \mu = \sigma \cap \tau = \emptyset$ e $|\sigma| + |\tau|$ é ímpar, então

$$\left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) h_\mu, a_\tau^{(1)} \right] + \left[\left(a_\tau^{(1)} \right) h_\mu, a_\sigma^{(1)} \right] = \left[a_{\sigma \cup \mu}^{(1)}, a_\tau^{(1)} \right] + \left[a_{\tau \cup \mu}^{(1)}, a_\sigma^{(1)} \right] = (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \mu \cup \tau}^{(2)} + (-1)^{|\tau|} a_{\tau \cup \mu \cup \sigma}^{(2)}.$$

Como $|\sigma| + |\tau|$ é ímpar, então $(-1)^{|\sigma|+|\tau|} = -1$ implica que $(-1)^{|\sigma|} = -(-1)^{|\tau|}$. Portanto,

$$\left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) h_\mu, a_\tau^{(1)} \right] + \left[\left(a_\tau^{(1)} \right) h_\mu, a_\sigma^{(1)} \right] = (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \mu \cup \tau}^{(2)} - (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma \cup \mu \cup \tau}^{(2)} = 0.$$

Concluimos assim que

$$[(a)h_\mu, a^{p-1}] = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in T_n \\ \sigma \neq \tau}} \alpha_\sigma \alpha_\tau \left[\left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) h_\mu, a_\tau^{(1)} \right] + \left[\left(a_\tau^{(1)} \right) h_\mu, a_\sigma^{(1)} \right], a^{p-2} \right] = 0.$$

- Provaremos que $[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)g_\lambda, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] = \alpha_1^p \left[(a_1)g_\lambda, a_1^{p-1} \right] + \alpha_2^p \left[(a_2)g_\lambda, a_2^{p-1} \right]$.

AFIRMAÇÃO 4: $[(a_1)g_\lambda, a_2] = [(a_2)g_\lambda, a_1]$ para todos $a_1, a_2 \in A_n$.

Prova: Pela Proposição 3.11 temos

$$([a_1, a_2])g_\lambda = [(a_1)g_\lambda, a_2] + [a_1, (a_2)g_\lambda].$$

Como $[a_1, a_2] \in W_n$, temos que $[a_1, a_2]$ é uma combinação linear de elementos $a_\sigma^{(k)}$ com $|\sigma|$ ímpar. Portanto,

$$0 = ([a_1, a_2])g_\lambda = [(a_1)g_\lambda, a_2] + [a_1, (a_2)g_\lambda],$$

o que implica $[(a_1)g_\lambda, a_2] = -[a_1, (a_2)g_\lambda]$. Agora, pela anticomutatividade do comutador, temos $[(a_1)g_\lambda, a_2] = [(a_2)g_\lambda, a_1]$.

AFIRMAÇÃO 5: Se $\{i_3, i_4, \dots, i_p\} = \{3, 4, \dots, p\}$, então $[(a_1)g_\lambda, a_2, \dots, a_p] = [(a_1)g_\lambda, a_2, a_{i_3}, \dots, a_{i_p}]$ para todos $a_1, a_2, \dots, a_p \in A_n$.

Prova: Como A_n é metabeliana, da Observação 2.13 temos que para todos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A_n$ vale

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a_1, a_2, a_4, a_3].$$

Portanto, se $4 \leq j \leq p$, obtemos

$$\begin{aligned} [(a_1)g_\lambda, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_p] &= \left[[(a_1)g_\lambda, a_2, \dots, a_{j-3}], a_{j-2}, a_{j-1}, a_j, \dots, a_p \right] \\ &= \left[[(a_1)g_\lambda, a_2, \dots, a_{j-3}], a_{j-2}, a_j, a_{j-1}, \dots, a_p \right]. \end{aligned}$$

Provamos que não se altera o comutador sempre que trocamos, a partir da terceira posição, dois elementos vizinhos dentro dele. Logo, $[(a_1)g_\lambda, a_2, \dots, a_p] = [(a_1)g_\lambda, a_2, a_{i_3}, \dots, a_{i_p}]$, como era o desejado.

AFIRMAÇÃO 6: Se $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} = \{1, 2, \dots, p\}$, então $[(v_1)g_\lambda, v_2, \dots, v_p] = [(v_{i_1})g_\lambda, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}]$ para todos $v_1, v_2, \dots, v_p \in V_n$.

Prova: Sejam $\lambda, \sigma, \tau, \rho \in T_n$. Se $\sigma \cap \lambda = \tau \cap \lambda = \rho \cap \lambda = \sigma \cap \tau = \sigma \cap \rho = \tau \cap \rho = \emptyset$, $|\lambda|$ é ímpar e $|\sigma|, |\tau|, |\rho|$ são pares, então

$$\begin{aligned} \left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) g_\lambda, a_\tau^{(1)}, a_\rho^{(1)} \right] &= \left[a_{\sigma \cup \lambda}^{(1)}, a_\tau^{(1)}, a_\rho^{(1)} \right] = \left[(-1)^{|\sigma \cup \lambda|} a_{\sigma \cup \lambda \cup \tau}^{(2)}, a_\rho^{(1)} \right] \\ &= (-1)^{|\sigma \cup \lambda|} (-1)^{|\sigma \cup \lambda \cup \tau|} a_{\sigma \cup \lambda \cup \tau \cup \rho}^{(3)} \\ &= (-1)^{|\sigma \cup \lambda|} (-1)^{|\sigma \cup \lambda \cup \rho|} a_{\sigma \cup \lambda \cup \rho \cup \tau}^{(3)} \\ &= \left[\left(a_\sigma^{(1)} \right) g_\lambda, a_\rho^{(1)}, a_\tau^{(1)} \right]. \end{aligned}$$

Pela multilinearidade do comutador triplo, temos que

$$[(v_1)g_\lambda, v_2, v_3] = [(v_1)g_\lambda, v_3, v_2] \tag{3.2}$$

para todos $v_1, v_2, v_3 \in V_n$. Seja $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$. Pela Afirmação 4 e por (3.2), temos

$$[(v_1)g_\lambda, v_2, v_3] = [(v_1)g_\lambda, v_3, v_2] = [(v_3)g_\lambda, v_1, v_2] = [(v_3)g_\lambda, v_2, v_1] = [(v_2)g_\lambda, v_3, v_1] = [(v_2)g_\lambda, v_1, v_3].$$

Ou seja, $[(v_1)g_\lambda, v_2, v_3] = [(v_{i_1})g_\lambda, v_{i_2}, v_{i_3}]$. Finalmente pela Afirmação 5, se $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} = \{1, 2, \dots, p\}$, então

$$[(v_1)g_\lambda, v_2, \dots, v_p] = [(v_{i_1})g_\lambda, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}].$$

Agora estamos aptos a provar a segunda igualdade do enunciado do lema.

Dados $a_1, a_2 \in A_n$, sejam $v_1, v_2 \in V_n$ e $w_1, w_2 \in W_n$ tais que $a_1 = v_1 + w_1$ e $a_2 = v_2 + w_2$. Fixados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, escreva $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ e $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. De (3.1) temos

$$\begin{aligned} [(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)g_\lambda, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] &= [(a)g_\lambda, a^{p-1}] = [(v)g_\lambda, v^{p-1}] \\ &= [(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^{p-1}]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Demonstraremos por indução em $k \geq 2$ que

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^{k-1}] = \\ & \alpha_1^k [(v_1)g_\lambda, v_1^{k-1}] + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-j} \alpha_2^j [(v_1)g_\lambda, (v_1)^{k-j-1}, (v_2)^j] + \alpha_2^k [(v_2)g_\lambda, v_2^{k-1}]. \end{aligned}$$

a) Se $k = 2$, então

$$\begin{aligned} [(v)g_\lambda, (v)^{p-1}] &= [(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^{p-1}] \\ &= [\alpha_1 (v_1)g_\lambda, \alpha_1 v_1] + [\alpha_1 (v_1)g_\lambda, \alpha_2 v_2] + [\alpha_2 (v_2)g_\lambda, \alpha_1 v_1] + [\alpha_2 (v_2)g_\lambda, \alpha_2 v_2]. \end{aligned}$$

Pela Afirmação 6, temos

$$[(v)g_\lambda, (v)^{p-1}] = \alpha_1^2 [(v_1)g_\lambda, v_1] + 2\alpha_1 \alpha_2 [(v_1)g_\lambda, v_2] + \alpha_2^2 [(v_2)g_\lambda, v_2].$$

Se $k = 3$, então

$$\begin{aligned} [(v)g_\lambda, (v)^{p-1}] &= [(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^{p-1}] \\ &= [(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2] \\ &= \begin{cases} \alpha_1^3 [(v_1)g_\lambda, v_1, v_1] + \alpha_1^2 \alpha_2 [(v_1)g_\lambda, v_1, v_2] + \alpha_1 \alpha_2^2 [(v_1)g_\lambda, v_2, v_1] + \alpha_1 \alpha_2^2 [(v_1)g_\lambda, v_2, v_2] \\ + \alpha_1^2 \alpha_2 [(v_2)g_\lambda, v_1, v_1] + \alpha_1 \alpha_2^2 [(v_2)g_\lambda, v_1, v_2] + \alpha_1 \alpha_2^2 [(v_2)g_\lambda, v_2, v_1] + \alpha_2^3 [(v_2)g_\lambda, v_2, v_2]. \end{cases} \end{aligned}$$

Pela Afirmação 6, temos

$$[(v)g_\lambda, (v)^2] = \alpha_1^3 [(v_1)g_\lambda, v_1^2] + 3\alpha_1^2 \alpha_2 [(v_1)g_\lambda, v_1, v_2] + 3\alpha_1 \alpha_2^2 [(v_1)g_\lambda, v_2^2] + \alpha_2^3 [(v_2)g_\lambda, v_2^2].$$

Portanto, a igualdade se cumpre nos casos $k = 2$ e $k = 3$.

b) Suponha que a igualdade se cumpre para k . Isto é

$$[(v)g_\lambda, (v)^{k-1}] = \alpha_1^k [(v_1)g_\lambda, v_1^{k-1}] + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-j} \alpha_2^j [(v_1)g_\lambda, (v_1)^{k-j-1}, (v_2)^j] + \alpha_2^k [(v_2)g_\lambda, v_2^{k-1}].$$

Demonstraremos que a igualdade se cumpre para $k + 1$. Note que,

$$[(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^k] = \left[[(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^{k-1}], \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \right].$$

Aplicando a hipótese de indução, temos que a igualdade acima fica

$$\left[\alpha_1^k [(v_1)g_\lambda, v_1^{k-1}] + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \alpha_1^{k-j} \alpha_2^j [(v_1)g_\lambda, (v_1)^{k-j-1}, (v_2)^j] + \alpha_2^k [(v_2)g_\lambda, v_2^{k-1}], \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \right].$$

Pela bilinearidade do colchete, Afirmação 6 e pela relação de Stifel

$$\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j},$$

obtemos

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^k] \\ &= \alpha_1^{k+1} [(v_1)g_\lambda, v_1^k] + \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \alpha_1^{k+1-j} \alpha_2^j [(v_1)g_\lambda, (v_1)^{k-j}, (v_2)^j] + \alpha_2^{k+1} [(v_2)g_\lambda, v_2^k], \end{aligned}$$

como desejávamos. Portanto,

$$[(a)g_\lambda, (a)^{p-1}] = \alpha_1^p [(a_1)g_\lambda, a_1^{p-1}] + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \alpha_1^{p-j} \alpha_2^j [(a_1)g_\lambda, (a_1)^{p-j-1}, (a_2)^j] + \alpha_2^p [(a_2)g_\lambda, a_2^{p-1}].$$

Como a característica do corpo \mathbb{K} é p e

$$\binom{p}{j} = \frac{p!}{(p-j)!j!} \equiv 0 \pmod{p}$$

para todo $1 \leq j \leq p-1$, segue que

$$[(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^{p-1}] = \alpha_1^p [(v_1)g_\lambda, v_1^{p-1}] + \alpha_2^p [(v_2)g_\lambda, v_2^{p-1}].$$

Logo, pelas Afirmações 2 e 3, temos

$$\begin{aligned} [(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)g_\lambda, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] &= [(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)g_\lambda, (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^{p-1}] \\ &= \alpha_1^p [(v_1)g_\lambda, v_1^{p-1}] + \alpha_2^p [(v_2)g_\lambda, v_2^{p-1}] \\ &= \alpha_1^p [(a_1)g_\lambda, a_1^{p-1}] + \alpha_2^p [(a_2)g_\lambda, a_2^{p-1}] \end{aligned}$$

como era o desejado. □

3.4 Álgebra de Lie C_n

Para estabelecer o resultado principal desta dissertação, construiremos uma álgebra de Lie que denotamos por C_n , na qual será fundamental na demonstração de que certos T-ideais não admitem uma base finita. A álgebra C_n será gerada por elementos específicos que capturam o comportamento desejado das identidades. A seguir, formalizamos sua definição.

Definição 3.20. Denotamos por C_n a subálgebra de Lie de B_n gerada pelos elementos $a_\emptyset^{(1)}, g_{\{1\}}, h_\mu$, com $\mu = \emptyset, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \dots, \{2n-2, 2n-1\}$. Isto é,

$$C_n = \left\langle a_\emptyset^{(1)}, g_{\{1\}}, h_\emptyset, h_{\{2,3\}}, h_{\{4,5\}}, \dots, h_{\{2n-2, 2n-1\}} \right\rangle.$$

Lema 3.21. Se $a_1, a_2 \in A_n$, $c_1, c_2, \dots, c_k \in C_n$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, então temos na álgebra B_n a seguinte igualdade:

$$[\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, c_1, c_2, \dots, c_k, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] = \alpha_1^p [a_1, c_1, c_2, \dots, c_k, a_1^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, c_1, c_2, \dots, c_k, a_2^{p-1}].$$

Demonstração. Seja $S = \{z_1 = a_\emptyset^{(1)}, z_2 = g_{\{1\}}, z_3 = h_\emptyset, z_4 = h_{\{2,3\}}, \dots, z_{n+2} = h_{\{2n-2, 2n-1\}}\}$ o conjunto gerador da álgebra de Lie C_n . Então, para todo $c_j \in C_n$ temos

$$c_j = \sum_i \gamma_{(i,j)} [z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_t}],$$

onde $t \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_t \leq n+2$, $i = (i_1, i_2, \dots, i_t)$ e $\gamma_{(i,j)} \in \mathbb{K}$. Pela bilinearidade do comutador, para provar o lema é suficiente assumir o caso em que

$$c_j = [z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{t_j}}]$$

para todo $j = 1, \dots, k$.

Sejam V_n e W_n como no Lema 3.19. Se $u_1, \dots, u_p \in A_n$ e algum $u_i \in W_n$, então

$$c = [u_1, c_1, \dots, c_k, u_2, \dots, u_p] \in A_n^m,$$

onde $m > p$, logo pela Observação 3.8 temos que $c = 0$.

Portanto, para provar o lema, basta considerar o caso em que $a_1, a_2 \in V_n \subseteq A_n$.

Denote $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$.

CASO 1: Existem $1 \leq j \leq k$ e $1 \leq s \leq t_j$ tais que $z_{j_s} = a_\emptyset^{(1)}$.

Note que $c_j = [z_{j_1}, \dots, z_{j_s}, \dots, z_{j_{t_j}}] \in A_n$ e, portanto, $c = [a, c_1, \dots, c_j, \dots, c_k, (a)^{p-1}] \in A_n^m$, onde $m > p$. Pela Observação 3.8 temos $c = 0$ para todo $a \in A_n$. Portanto, vale a seguinte igualdade:

$$[a, c_1, \dots, c_j, \dots, c_k, (a)^{p-1}] = \alpha_1^p [a_1, c_1, \dots, c_j, \dots, c_k, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, c_1, \dots, c_j, \dots, c_k, (a_2)^{p-1}] = 0.$$

De agora em diante só consideraremos o caso em que $z_{j_s} \neq a_\emptyset^{(1)}$ para todos j, s . Isto implica que $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{t_j}} \in D_n$ e também $c_j = [z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{t_j}}] \in D_n$. Lembramos que D_n é uma subálgebra da álgebra de Lie de derivações de A_n , na qual tem base $\{g_\lambda, h_\mu \mid \lambda, \mu \in T_n, |\lambda| \text{ é ímpar, } |\mu| \text{ é par}\}$. Já vimos na Proposição 3.13 que tal álgebra de Lie D_n é abeliana.

CASO 2: Existe $1 \leq j \leq k$ tal que $t_j > 1$.

Como D_n é abeliana, todos os colchetes em D_n de comprimento estritamente maior que um são nulos.

Em particular,

$$c_j = [z_{j_1}, z_{j_2}, \dots, z_{j_{t_j}}] = 0.$$

Logo, $c = [a, c_1, \dots, c_j, \dots, c_k, (a)^{p-1}] = 0$ para todo $a \in A_n$. Portanto, vale a igualdade:

$$[a, c_1, \dots, c_j, \dots, c_k, (a)^{p-1}] = \alpha_1^p [a_1, c_1, \dots, c_j, \dots, c_k, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, c_1, \dots, c_j, \dots, c_k, (a_2)^{p-1}] = 0.$$

Portanto, de agora em diante, assumiremos que $c_j \in S \setminus \{a_\emptyset^{(1)}\} \subset D_n$ para todo j . Da identidade de Jacobi temos

$$[a, c_{j_1}, c_{j_2}] = -[c_{j_1}, c_{j_2}, a] - [c_{j_2}, a, c_{j_1}] = -[c_{j_2}, a, c_{j_1}] = [a, c_{j_2}, c_{j_1}].$$

Pela Observação 1.18, obtemos

$$\begin{aligned} [a, c_{j_1}, \dots, c_{j_l}, c_{j_{l+1}}, \dots, c_{j_k}, a^{p-1}] &= [a, c_{j_1}, \dots, [c_{j_l}, c_{j_{l+1}}], \dots, c_{j_k}, a^{p-1}] + [a, c_{j_1}, \dots, c_{j_{l+1}}, c_{j_l}, \dots, c_{j_k}, a^{p-1}] \\ &= [a, c_{j_1}, \dots, c_{j_{l+1}}, c_{j_l}, \dots, c_{j_k}, a^{p-1}]. \end{aligned}$$

Mostramos que se $\{1, 2, \dots, k\} = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, então

$$[a, c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_k}, a^{p-1}] = [a, c_1, c_2, \dots, c_k, a^{p-1}] \quad (3.4)$$

para todo $a \in A_n$. Uma vez que $c_j \in S \setminus \{a_\emptyset^{(1)}\} \subset D_n$ para todo j , temos os seguintes casos para analisar em $c = [a, c_1, c_2, \dots, c_k, a^{p-1}]$:

- Existem $i \neq j$ tais que $c_i = c_j = g_{\{1\}}$. Por (3.4) podemos supor $c_1 = c_2 = g_{\{1\}}$.
- Existe um único j tal que $c_j = g_{\{1\}}$. Por (3.4) podemos supor $c_1 = g_{\{1\}}$.
- $c_j \neq g_{\{1\}}$ para todo j .

Faremos um estudo separado de cada caso.

CASO 3: $c_1 = c_2 = g_{\{1\}}$.

Pela Afirmção 1 da demonstração da Proposição 3.13, temos que $[a, g_{\lambda_1}, g_{\lambda_2}] = 0$ para todos $g_{\lambda_1}, g_{\lambda_2} \in D_n$ e para todo $a \in A_n$. Isto implica que

$$\begin{aligned} c &= [a, c_1, c_2, \dots, c_k, a^{p-1}] = [[a, c_1, c_2], c_3, \dots, c_k, a^{p-1}] \\ &= [[a, g_{\{1\}}, g_{\{1\}}], c_3, \dots, c_k, a^{p-1}] = [0, c_3, \dots, c_k, a^{p-1}] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, temos a igualdade

$$[a, c_1, c_2, \dots, c_k, a^{p-1}] = \alpha_1^p [a_1, c_1, c_2, \dots, c_k, a_1^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, c_1, c_2, \dots, c_k, a_2^{p-1}] = 0.$$

CASO 4: $c_1 = g_{\{1\}}$, $c_j = h_{\mu_j}$, $2 \leq j \leq k$ e $\mu_j \in \{\emptyset, \{2, 3\}, \dots, \{2n-2, 2n-1\}\}$.

Seja $a_\sigma^{(1)}$ um elemento da base de V_n . Se $\sigma \cap \mu_j = \emptyset$ para todo $2 \leq j \leq k$, $|\sigma|$ é par e $\mu_i \neq \mu_j$ para todos $i \neq j$, então

$$\begin{aligned} [a_\sigma^{(1)}, g_{\{1\}}, h_{\mu_2}, h_{\mu_3}, \dots, h_{\mu_k}, a^{p-1}] &= [a_{\sigma \cup \{1\}}^{(1)}, h_{\mu_2}, h_{\mu_3}, \dots, h_{\mu_k}, a^{p-1}] \\ &= [a_{\sigma \cup \{1\} \cup \mu_2 \cup \dots \cup \mu_k}^{(1)}, a^{p-1}] = \left[(a_\sigma^{(1)}) g_\lambda, a^{p-1} \right], \end{aligned}$$

onde $\lambda = \{1\} \cup \mu_2 \cup \dots \cup \mu_k$. Logo, pela bilinearidade do colchete, para todo $a \in V_n$ vale a igualdade

$$[a, g_{\{1\}}, h_{\mu_2}, h_{\mu_3}, \dots, h_{\mu_k}, a^{p-1}] = [(a) g_\lambda, a^{p-1}].$$

Como $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, onde $a_1, a_2 \in V_n$, pelo Lema 3.19 obtemos

$$\begin{aligned} [a, g_{\{1\}}, h_{\mu_2}, \dots, h_{\mu_k}, (a)^{p-1}] &= [(a) g_{\lambda}, (a)^{p-1}] \\ &= [(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) g_{\lambda}, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] \\ &= \alpha_1^p [(a_1) g_{\lambda}, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [(a_2) g_{\lambda}, (a_2)^{p-1}] \\ &= \alpha_1^p [a_1, g_{\{1\}}, h_{\mu_2}, \dots, h_{\mu_k}, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, g_{\{1\}}, h_{\mu_2}, \dots, h_{\mu_k}, (a_2)^{p-1}] \\ &= \alpha_1^p [a_1, c_1, \dots, c_k, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, c_1, \dots, c_k, (a_2)^{p-1}]. \end{aligned}$$

Portanto, temos a igualdade

$$[\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, c_1, \dots, c_k, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] = \alpha_1^p [a_1, c_1, \dots, c_k, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, c_1, \dots, c_k, (a_2)^{p-1}].$$

CASO 5: $c_j = h_{\mu_j}$, $1 \leq j \leq k$ e $\mu_j \in \{\emptyset, \{2, 3\}, \dots, \{2n-2, 2n-1\}\}$.

Seja $a_{\sigma}^{(1)}$ um elemento da base de V_n . Se $\sigma \cap \mu_j = \emptyset$ para todo j e $\mu_i \neq \mu_j$ para todos $i \neq j$, então

$$\begin{aligned} [a_{\sigma}^{(1)}, h_{\mu_1}, h_{\mu_2}, \dots, h_{\mu_k}, a^{p-1}] &= [a_{\sigma \cup \mu_1}^{(1)}, h_{\mu_2}, \dots, h_{\mu_k}, a^{p-1}] \\ &= [a_{\sigma \cup \mu_1 \cup \dots \cup \mu_k}^{(1)}, a^{p-1}] = \left[\left(a_{\sigma}^{(1)} \right) h_{\mu}, a^{p-1} \right], \end{aligned}$$

onde $\mu = \mu_1 \cup \dots \cup \mu_k$. Logo, pela bilinearidade do colchete, para todo $a \in V_n$ vale a igualdade

$$[a, h_{\mu_1}, h_{\mu_2}, \dots, h_{\mu_k}, a^{p-1}] = [(a) h_{\mu}, a^{p-1}].$$

Pelo Lema 3.19, segue que $[(a) h_{\mu}, a^{p-1}] = 0$ para todo $a \in A_n$. Assim, temos que

$$[(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) h_{\mu}, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] = \alpha_1^p [(a_1) h_{\mu}, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [(a_2) h_{\mu}, (a_2)^{p-1}] = 0.$$

Logo,

$$[a, h_{\mu_1}, \dots, h_{\mu_k}, (a)^{p-1}] = \alpha_1^p [a_1, h_{\mu_1}, \dots, h_{\mu_k}, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, h_{\mu_1}, \dots, h_{\mu_k}, (a_2)^{p-1}].$$

Portanto, temos a igualdade

$$[\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, c_1, \dots, c_k, (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)^{p-1}] = \alpha_1^p [a_1, c_1, \dots, c_k, (a_1)^{p-1}] + \alpha_2^p [a_2, c_1, \dots, c_k, (a_2)^{p-1}].$$

Finalizamos aqui a demonstração do lema. □

Proposição 3.22. *Sejam $u_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = [x_1, \dots, x_k, [x_1, x_2]^{p-1}]$, com $k > 2$, polinômios de $L(X)$. Então, para todo $2 < k < n + 2$, $u_k \in T(C_n)$ e $u_{n+2} \notin T(C_n)$.*

Demonstração.

(a). Provaremos que $u_{n+2} \notin T(C_n)$. Considere as seguintes substituições por elementos de C_n :

$$X_1 = a_{\emptyset}^{(1)}, X_2 = h_{\emptyset}, X_3 = g_{\{1\}}, X_4 = h_{\{2,3\}}, X_5 = h_{\{4,5\}}, \dots, X_{n+2} = h_{\{2n-2, 2n-1\}}.$$

Então, avaliando no polinômio u_{n+2} , temos que

$$\begin{aligned}
u_{n+2}(X_1, X_2, \dots, X_{n+2}) &= \left[a_{\emptyset}^{(1)}, h_{\emptyset}, g_{\{1\}}, h_{\{2,3\}}, \dots, h_{\{2n-2, 2n-1\}}, \left[a_{\emptyset}^{(1)}, h_{\emptyset} \right]^{p-1} \right] \\
&= \left[a_{\emptyset}^{(1)}, g_{\{1\}}, h_{\{2,3\}}, \dots, h_{\{2n-2, 2n-1\}}, \left(a_{\emptyset}^{(1)} \right)^{p-1} \right] \\
&= \left[a_{\{1\}}^{(1)}, h_{\{2,3\}}, \dots, h_{\{2n-2, 2n-1\}}, \left(a_{\emptyset}^{(1)} \right)^{p-1} \right] \\
&= \left[a_{\{1,2,3,\dots,2n-1\}}^{(1)}, \underbrace{a_{\emptyset}^{(1)}, \dots, a_{\emptyset}^{(1)}}_{p-1 \text{ vezes}} \right] \\
&= \left[-a_{\{1,2,3,\dots,2n-1\}}^{(2)}, \underbrace{a_{\emptyset}^{(1)}, \dots, a_{\emptyset}^{(1)}}_{p-2 \text{ vezes}} \right] \\
&= (-1)^{p-1} a_{\{1,2,\dots,2n-1\}}^{(p)} = (-1)^{p-1} b \neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $u_{n+2} \notin T(C_n)$.

(b). Provaremos que se $k < n + 2$ então $u_k \in T(C_n)$.

Seja $S = \{z_1 = a_{\emptyset}^{(1)}, z_2 = g_{\{1\}}, z_3 = h_{\emptyset}, z_4 = h_{\{2,3\}}, \dots, z_{n+2} = h_{\{2n-2, 2n-1\}}\}$ o conjunto gerador da álgebra de Lie C_n . Fixe uma base de C_n formada por elementos da forma $[z_{l_1}, z_{l_2}, \dots, z_{l_m}]$. Pela multilinearidade de

$$u_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \left[[x_1, x_2], x_3, \dots, x_k, [x_1, x_2]^{p-1} \right]$$

nas variáveis x_3, \dots, x_k só precisamos provar que o polinômio u_k se anula nos elementos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k \in C_n$ tais que X_3, \dots, X_k estão na base de C_n . Como $C_n \subset B_n$, pela Proposição 3.17 temos $[X_1, X_2] \in A_n$. Portanto, escrevendo

$$[X_1, X_2] = \sum_{\sigma, l} \alpha_{\sigma, l} a_{\sigma}^{(l)}, \quad \alpha_{\sigma, l} \in \mathbb{K},$$

segue do Lema 3.21 que

$$u_k(X_1, X_2, \dots, X_k) = \sum_{\sigma, l} (\alpha_{\sigma, l})^p \left[a_{\sigma}^{(l)}, X_3, \dots, X_k, \left(a_{\sigma}^{(l)} \right)^{p-1} \right].$$

Assim, para provar que $u_k \in T(C_n)$ é suficiente provar que

$$\left[a_{\sigma}^{(l)}, X_3, \dots, X_k, \left(a_{\sigma}^{(l)} \right)^{p-1} \right] = 0$$

para quaisquer elementos da base X_3, \dots, X_n de C_n e qualquer elemento $a_{\sigma}^{(l)} \in (A_n \cap C_n)$.

Suponha que

$$\left[a_{\sigma}^{(l)}, X_3, \dots, X_k, \left(a_{\sigma}^{(l)} \right)^{p-1} \right] \neq 0$$

para certos $a_\sigma^{(l)}, X_3, \dots, X_k$ como acima. Com o mesmo raciocínio dos Casos 1 e 2 da demonstração do Lema 3.21, temos que $l = 1$ e

$$X_3, \dots, X_k \in \{g_{\{1\}}, h_\emptyset, h_{\{2,3\}}, \dots, h_{\{2n-2, 2n-1\}}\}.$$

Com o mesmo raciocínio dos Casos 3, 4 e 5 da demonstração do Lema 3.21, se μ_3, \dots, μ_k são os subconjuntos que formam os índices das derivações X_3, \dots, X_k , então

$$\left[a_\sigma^{(1)}, X_3, \dots, X_k, \left(a_\sigma^{(1)} \right)^{p-1} \right] = \left[a_\tau^{(1)}, \left(a_\sigma^{(1)} \right)^{p-1} \right] \neq 0,$$

onde $\tau = \sigma \cup \mu_3 \cup \dots \cup \mu_k$ e os subconjuntos envolvidos são dois a dois disjuntos. Escrevendo

$$\left[a_\sigma^{(1)}, X_3, \dots, X_k, \left(a_\sigma^{(1)} \right)^{p-1} \right] = \left[\left[a_\tau^{(1)}, a_\sigma^{(1)} \right], \left(a_\sigma^{(1)} \right)^{p-2} \right] \neq 0,$$

obtemos $\sigma = \emptyset$ e $|\tau|$ ímpar, pois $\tau \cap \sigma = \emptyset$ e $|\tau| + |\sigma|$ é ímpar. Provamos que

$$\left[a_\sigma^{(1)}, X_3, \dots, X_k, \left(a_\sigma^{(1)} \right)^{p-1} \right] = (-1)^{p-1} a_\tau^{(p)} \neq 0.$$

Logo, $\tau = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$. Como

$$\mu_3 \cup \dots \cup \mu_k = \tau = \{1, 2, \dots, 2n-1\},$$

sem perda de generalidade temos

$$X_3 = g_{\{1\}}, X_4 = h_{\{2,3\}}, \dots, X_k = h_{\{2n-2, 2n-1\}}.$$

Ou seja, $k-2 = n$, o que é um absurdo. □

Agora estamos aptos a provar o resultado principal desta dissertação.

3.5 T-ideal infinitamente gerado

Teorema 3.23. *Seja \mathbb{K} um corpo de característica positiva p . Então, existe um T -ideal na álgebra de Lie livre $L(X)$ que contém os polinômios*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}) = \left[[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2p-1}, x_{2p}], x_{2p+1} \right] \text{ e}$$

$$\delta_3(x_1, x_2, \dots, x_8) = \left[\left[[x_1, x_2], [x_3, x_4] \right], \left[[x_5, x_6], [x_7, x_8] \right] \right],$$

e não é finitamente gerado.

Demonstração. Seja \mathbb{K} um corpo de característica positiva p . Considere o T -ideal J gerado pelos polinômios

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}) &= [[x_1, x_2], \dots, [x_{2p-1}, x_{2p}], x_{2p+1}], \\ \delta_3(x_1, x_2, \dots, x_7, x_8) &= \left[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], [[x_5, x_6], [x_7, x_8]] \right] \text{ e} \\ u_k(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \left[x_1, \dots, x_k, [x_1, x_2]^{p-1} \right] \end{aligned}$$

com $k \geq 3$. Isto é, $J = \langle f, \delta_3, u_3, u_4, \dots, u_k, \dots \rangle^T$.

Demonstraremos por absurdo que J não é finitamente gerado. Suponha que J é um T -ideal de $L(X)$ finitamente gerado. Então existe um conjunto finito de polinômios $S = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ tal que $J = \langle S \rangle^T$. Então cada w_i , $1 \leq i \leq m$, é uma consequência dos polinômios f, δ_3 e uma quantidade finita de u_k . Ou seja, existe $n_i \geq 3$ tal que

$$w_i \in \langle f, \delta_3, u_3, u_4, \dots, u_{n_i} \rangle^T.$$

Se $n \in \mathbb{N}$ satisfaz

$$n + 1 = \max \{n_1, n_2, \dots, n_m\},$$

então

$$J = \langle f, \delta_3, u_3, u_4, \dots, u_{n+1} \rangle^T.$$

Como $u_k \in J$ para todo $k \geq 3$, segue que todo u_k será uma consequência de $f, \delta_3, u_3, \dots, u_{n+1}$. Em particular, u_{n+2} será uma consequência de $f, \delta_3, u_3, \dots, u_{n+1}$. Portanto, toda álgebra de Lie que tem $f, \delta_3, u_3, u_4, \dots, u_{n+1}$ como identidades polinomiais, também terá u_{n+2} como identidade polinomial.

Olhamos para a álgebra de Lie C_n da Definição 3.20. Como C_n é subálgebra de Lie de B_n , pela Proposição 3.18 temos que f e δ_3 são identidades polinomiais de C_n . Além disso, pela Proposição 3.22 os polinômios u_3, u_4, \dots, u_{n+1} também são identidades polinomiais de C_n . Por outro lado, novamente pela Proposição 3.22, temos que u_{n+2} não é uma identidade polinomial de C_n . Portanto, a existência desta álgebra gera um absurdo. Mostramos assim que o T -ideal J não pode ser finitamente gerado. \square

Identidades Polinomiais de Álgebras de Lie de Dimensão Finita

Neste capítulo, construímos um contraexemplo que refuta a validade do problema de Specht no contexto das álgebras de Lie sobre corpos infinitos de característica positiva, seguindo a abordagem apresentada em [5]. Mais precisamente, demonstraremos que, para todo corpo infinito \mathbb{K} de característica positiva p , existe uma álgebra de Lie de dimensão finita — concretamente, de dimensão $2p + 3$ — cujo T-ideal de identidades não pode ser gerado por nenhum conjunto finito de identidades polinomiais.

Ao longo deste capítulo, \mathbb{K} denotará um corpo infinito de característica positiva p .

Consideraremos as estruturas T_n , A_n , B_n e C_n construídas no capítulo 3.

4.1 Algumas aplicações de T_n e C_n

Definição 4.1. Dado um natural $k < n$. Definimos as aplicações $\varphi_k : T_n \rightarrow T_n$ e $\psi_k : T_n \rightarrow T_n$ da seguinte maneira:

$$(\sigma)\varphi_k = \sigma \cup \{2k, 2k + 1\}, \quad (\sigma)\psi_k = \sigma \setminus \{2k, 2k + 1, \dots, 2n - 1\}$$

para todo $\sigma \in T_n$.

Observamos que estas aplicações preservam a união, ou seja

$$\bigcup_{t=1}^m (\sigma_t)\varphi_k = \left(\bigcup_{t=1}^m \sigma_t \right) \varphi_k, \quad \bigcup_{t=1}^m (\sigma_t)\psi_k = \left(\bigcup_{t=1}^m \sigma_t \right) \psi_k.$$

Além disso, temos também a seguinte observação.

Observação 4.2. Seja $k < n$ e sejam $a_\emptyset^{(1)}, g_{\{1\}}, h_\mu$ os elementos geradores de C_n ; relembramos que

$\mu = \emptyset$ ou $\mu = \{2m, 2m + 1\}$, $m = 1, 2, \dots, n - 1$. Notemos que:

$$\begin{aligned} (\{1\})\varphi_k &= \{1, 2k, 2k + 1\}, & (\mu)\varphi_k &= \begin{cases} \{2k, 2k + 1\}, & \text{se } \mu = \emptyset, \text{ ou } m = k, \\ \{2m, 2m + 1, 2k, 2k + 1\}, & \text{se } m < k \text{ ou } m > k, \end{cases} \\ (\{1\})\psi_k &= \{1\}, & (\mu)\psi_k &= \begin{cases} \emptyset, & \text{se } \mu = \emptyset \text{ ou } m \geq k, \\ \mu, & \text{se } m < k. \end{cases} \end{aligned}$$

Então observamos que $|(\{1\})\varphi_k|$ e $|(\{1\})\psi_k|$ são ímpares, e $|(\{\mu\})\varphi_k|$ e $|(\{\mu\})\psi_k|$ são pares.

Além disso, note que $(T_n)\psi_k = \{(\sigma)\psi_k \mid \sigma \in T_n\} \subseteq T_k$. Portanto, $\text{Im}(\psi_k) \subseteq T_k$.

A álgebra C_n tem uma base formada pelos elementos $a_\sigma^{(l)} \in C_n$, $g_{\{1\}}$, h_μ , onde $\mu = \emptyset$ ou $\mu = \{2m, 2m + 1\}$, $m = 1, 2, \dots, n - 1$. Com isso em mente, temos a seguinte definição.

Definição 4.3. Dado um número natural $k < n$, denotamos por $\Phi_k : C_n \rightarrow C_n$ e $\Psi_k : C_n \rightarrow C_k$ as transformações lineares que agem nos elementos da base de C_n como segue:

$$\begin{aligned} (a_\sigma^{(l)})\Phi_k &= a_{(\sigma)\varphi_k}^{(l)}, & (g_{\{1\}})\Phi_k &= g_{(\{1\})\varphi_k}, & (h_\mu)\Phi_k &= h_{(\mu)\varphi_k}, \\ (a_\sigma^{(l)})\Psi_k &= a_{(\sigma)\psi_k}^{(l)}, & (g_{\{1\}})\Psi_k &= g_{(\{1\})\psi_k}, & (h_\mu)\Psi_k &= h_{(\mu)\psi_k}. \end{aligned}$$

Com isto podemos provar os resultados da seguinte seção.

4.2 Algumas identidades de C_n

Pelo Teorema 2.33 sabemos que o T -ideal gerado por $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in L(X)$ é igual ao T -ideal gerado por suas componentes multi-homogêneas $f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ tal que $d = (d_1, d_2, \dots, d_m) \in \mathbb{N}^m$ é o multigrado do polinômio multi-homogêneo $f^{(d)}$. O polinômio pode ser escrito na forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_d f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Lema 4.4. Seja $f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ um polinômio multi-homogêneo de multigrado $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ na álgebra de Lie livre $L(X)$, e considere na álgebra de Lie C_n o elemento

$$c_n = f^{(d)}(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_m) \neq 0,$$

onde $X_1 = a_{\sigma_1}^{(l_1)}, \dots, X_i = a_{\sigma_i}^{(l_i)}$, $X_{i+1} = g_{\sigma_{i+1}}, \dots, X_j = g_{\sigma_j}$, $X_{j+1} = h_{\sigma_{j+1}}, \dots, X_m = h_{\sigma_m}$ com $\sigma_t \in T_n$ para todo $1 \leq t \leq m$. Então, valem as seguintes sentenças:

(a) Se $k < n$, então para o elemento $c_k \in C_k$ (definido na primeira igualdade abaixo) tem-se

$$c_k = f^{(d)}((X_1)\Psi_k, \dots, (X_m)\Psi_k) = (c_n)\Psi_k \text{ e } c_k \neq 0.$$

(b) Se x_1 e x_m são variáveis de grau 1 no polinômio $f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ e $\sigma_m = \{2k, 2k + 1\}$, então

$$c_n = f^{(d)}((X_1)\Phi_k, X_2, X_3, \dots, X_{m-1}, h_\emptyset).$$

Demonstração. Como $f^{(d)}(x_1, \dots, x_m)$ é multi-homogêneo com multigrado $d = (d_1, \dots, d_m)$, onde $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{N}$, então podemos escrever $f^{(d)}$ como uma soma de monômios de Lie da seguinte forma:

$$f^{(d)}(x_1, \dots, x_m) = \sum_r \alpha_r u_r(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

onde $u_r = u_r(x_1, x_2, \dots, x_m) = [x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_t}]$, $1 \leq r_s \leq m$, $1 \leq s \leq t$, $t = d_1 + \dots + d_m$, $\alpha_r \in \mathbb{K}$ tal que

$$\deg_{x_1}(u_r) = d_1, \quad \deg_{x_2}(u_r) = d_2, \quad \dots, \quad \deg_{x_m}(u_r) = d_m.$$

Por hipótese, temos que

$$c_n = f^{(d)}(X_1, X_2, \dots, X_m) = \sum_r \alpha_r u_r(X_1, X_2, \dots, X_m) \neq 0.$$

Isto quer dizer que existe $u_r(X_1, X_2, \dots, X_m) = [X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_t}] \neq 0$, onde

$$X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_t} \in \left\{ a_{\sigma_1}^{(l_1)}, \dots, a_{\sigma_i}^{(l_i)}, g_{\sigma_{i+1}}, \dots, g_{\sigma_j}, h_{\sigma_{j+1}}, \dots, h_{\sigma_m} \right\}.$$

Isto implica que,

- $\sigma_q \cap \sigma_s = \emptyset$, para todos $q \neq s$ com $t, s = 1, 2, \dots, m$.
- Se $d_s > 1$, então $\sigma_s = \emptyset$.
- $l = l_1 d_1 + l_2 d_2 + \dots + l_i d_i \leq p$. Se $l = p$, então $\sigma = \bigcup_{t=1}^m \sigma_t = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$.

Portanto, $u_r(X_1, X_2, \dots, X_m) = [X_{r_1}, X_{r_2}, \dots, X_{r_t}] = \beta_r a_{\sigma}^{(l)} \in A_n$, $\beta_r \in \mathbb{K}$ e $\sigma = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_m$. Logo, $c_n = (\sum_r \alpha_r \beta_r) a_{\sigma}^{(l)} \neq 0$ e, em particular, $(\sum_r \alpha_r \beta_r) \neq 0$ e $a_{\sigma}^{(l)} \neq 0$.

(a) Provaremos que se $k < n$, então $c_k = f^{(d)}((X_1)\Psi_k, \dots, (X_m)\Psi_k) = (c_n)\Psi_k \neq 0$.

Note que,

$$c_k = f^{(d)}((X_1)\Psi_k, \dots, (X_m)\Psi_k) = \sum_r \alpha_r u_r((X_1)\Psi_k, \dots, (X_m)\Psi_k) = \sum_r \alpha_r [(X_{r_1})\Psi_k, \dots, (X_{r_t})\Psi_k],$$

onde

$$\begin{aligned} (X_{r_s})\Psi_k &\in \left\{ \left(a_{\sigma_1}^{(l_1)} \right) \Psi_k, \dots, \left(a_{\sigma_i}^{(l_i)} \right) \Psi_k, (g_{\sigma_{i+1}}) \Psi_k, \dots, (g_{\sigma_j}) \Psi_k, (h_{\sigma_{j+1}}) \Psi_k, \dots, (h_{\sigma_m}) \Psi_k \right\} \\ &= \left\{ a_{(\sigma_1)\Psi_k}^{(l_1)}, \dots, a_{(\sigma_i)\Psi_k}^{(l_i)}, g_{(\sigma_{i+1})\Psi_k}, \dots, g_{(\sigma_j)\Psi_k}, h_{(\sigma_{j+1})\Psi_k}, \dots, h_{(\sigma_m)\Psi_k} \right\}. \end{aligned}$$

Definindo $\tau = (\sigma_1)\Psi_k \cup \dots \cup (\sigma_m)\Psi_k$, temos $[(X_{r_1})\Psi_k, \dots, (X_{r_t})\Psi_k] = \beta_r a_{\tau}^{(l)}$. Como a aplicação Ψ_k preserva a união, temos $\tau = (\sigma)\Psi_k$ e

$$0 \neq c_k = \left(\sum_r \alpha_r \beta_r \right) a_{\tau}^{(l)} = \left(\sum_r \alpha_r \beta_r \right) a_{(\sigma)\Psi_k}^{(l)} = \left(\left(\sum_r \alpha_r \beta_r \right) a_{\sigma}^{(l)} \right) \Psi_k = (c_n)\Psi_k.$$

Provamos assim nossa primeira sentença.

(b) Provaremos que $c_n = f^{(d)}((X_1)\Phi_k, X_2, X_3, \dots, X_{m-1}, h_0)$, se x_1 e x_m são variáveis de grau 1 no polinômio $f^{(d)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ e $\sigma_m = \{2k, 2k+1\}$.

Como $(\sigma_1)\varphi = \sigma_1 \cup \{2k, 2k+1\}$ por definição de φ , então

$$(X_1)\Phi_k = \left(a_{\sigma_1}^{(l_1)}\right)\Phi_k = a_{(\sigma_1)\varphi_k}^{(l_1)} = a_{\sigma_1 \cup \{2k, 2k+1\}}^{(l_1)}.$$

Note que

$$\gamma = f^{(d)}((X_1)\varphi, X_2, \dots, X_{m-1}, h_0) = \sum_r \alpha_r u_r((X_1)\varphi, X_2, \dots, X_{m-1}, h_0).$$

Agora, com raciocínio análogo ao do item (a), pode ser demonstrado o item (b).

Finalizamos aqui a demonstração do lema. □

O seguinte resultado mostra uma inclusão entre as identidades de C_k e C_n .

Lema 4.5. *Se $k \in \mathbb{N}$, então $T(C_k) \subseteq T(C_n)$ para todo $n \geq k$.*

Demonstração. Seja $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in T(C_k)$. Como \mathbb{K} é infinito de característica p , pelo Teorema 2.34 podemos assumir que f é multi-homogêneo cujo multigrado é formado por potências de p . Além disso, fixada a base $B = \left\{a_{\sigma}^{(k)}, g_{\lambda}, h_{\mu}\right\}$ de C_n , pelo Corolário 2.35 temos que $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in T(C_n)$ se, e somente se,

$$f(v_1, v_2, \dots, v_m) = 0$$

para todos $v_1, v_2, \dots, v_m \in B$.

Suponha que $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \notin T(C_n)$. Neste caso, existem $v_1, v_2, \dots, v_m \in B$ tais que

$$f(v_1, v_2, \dots, v_m) \neq 0.$$

Pelo Lema 4.4, note que

$$f((v_1)\Psi_k, (v_2)\Psi_k, \dots, (v_m)\Psi_k) \neq 0.$$

Como cada $(v_1)\Psi_k, (v_2)\Psi_k, \dots, (v_m)\Psi_k \in C_k$, temos uma contradição na hipótese. Portanto,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in T(C_n)$$

e $T(C_k) \subseteq T(C_n)$. □

4.3 Álgebra de Lie L_2

Nesta seção vamos considerar o conjunto T_n e a álgebra de Lie C_n para $n = 2$. Assim, T_2 vai ter a forma:

$$T_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} \emptyset, & \{1\}, & \{2\}, & \{3\}, \\ \{1, 2\}, & \{1, 3\}, & \{2, 3\}, & \{1, 2, 3\} \end{array} \right\}.$$

Definição 4.6. Seja $S = \{a_\emptyset^{(1)}, a_{\{2,3\}}^{(1)}, g_{\{1\}}, h_\emptyset\}$. Denotaremos por L_2 a subálgebra de Lie de C_2 gerada por S . Isto é,

$$L_2 = \langle S \rangle = \left\langle a_\emptyset^{(1)}, a_{\{2,3\}}^{(1)}, g_{\{1\}}, h_\emptyset \right\rangle.$$

Podemos calcular a base desta álgebra, para isso olhamos a seguinte proposição.

Proposição 4.7. A álgebra de Lie L_2 tem dimensão $2p + 3$, e sua base é dada por

$$\left\{ g_{\{1\}}, h_\emptyset, a_\emptyset^{(1)}, a_{\{2,3\}}^{(1)}, a_{\{1\}}^{(1)}, a_{\{1,2,3\}}^{(1)}, a_{\{1\}}^{(2)}, a_{\{1,2,3\}}^{(2)}, \dots, a_{\{1\}}^{(p-1)}, a_{\{1,2,3\}}^{(p-1)}, a_{\{1,2,3\}}^{(p)} \right\}.$$

Demonstração. Note que L_2 é gerado, como espaço vetorial, por todos os colchetes $[z_1, z_2, \dots, z_t]$ tal que $z_i \in \{a_\emptyset^{(1)}, a_{\{2,3\}}^{(1)}, g_{\{1\}}, h_\emptyset\}$ para todo $1 \leq i \leq t$, $t \in \mathbb{N}$. Assim, temos os seguintes casos:

- Seja $t = 1$. Então os elementos da base de L_2 são os colchetes de comprimento 1, que são os próprios elementos $g_{\{1\}}, h_\emptyset, a_\emptyset^{(1)}$ e $a_{\{2,3\}}^{(1)}$.
- Seja $t = 2$. Então os elementos resultantes são os colchetes de comprimento 2.
Note que $[z_i, z_i] = 0$ para todo i , e

$$\begin{aligned} [g_{\{1\}}, h_\emptyset] &= -[h_\emptyset, g_{\{1\}}] = 0, & [g_{\{1\}}, a_\emptyset^{(1)}] &= -[a_\emptyset^{(1)}, g_{\{1\}}] = -a_{\{1\}}^{(1)}, \\ [g_{\{1\}}, a_{\{2,3\}}^{(1)}] &= -[a_{\{2,3\}}^{(1)}, g_{\{1\}}] = -a_{\{1,2,3\}}^{(1)}, & [h_\emptyset, a_\emptyset^{(1)}] &= -[a_\emptyset^{(1)}, h_\emptyset] = -a_\emptyset^{(1)}, \\ [h_\emptyset, a_{\{2,3\}}^{(1)}] &= -[a_{\{2,3\}}^{(1)}, h_\emptyset] = -a_{\{2,3\}}^{(1)}, & [a_\emptyset^{(1)}, a_{\{2,3\}}^{(1)}] &= -[a_{\{2,3\}}^{(1)}, a_\emptyset^{(1)}] = 0. \end{aligned}$$

Como $a_\emptyset^{(1)}$ e $a_{\{2,3\}}^{(1)}$ estão no caso $t = 1$, então os elementos resultantes são $a_{\{1\}}^{(1)}$ e $a_{\{1,2,3\}}^{(1)}$.

- Seja $t = 3$. Então temos os elementos resultantes dos colchetes de comprimento 3, mas note que $[z_1, z_2, z_3] = [[z_1, z_2], z_3]$. Assim, é suficiente analisar o caso $[z_1, z_2] \in \{a_{\{1\}}^{(1)}, a_{\{1,2,3\}}^{(1)}\}$. Temos que

$$\begin{aligned} [a_{\{1\}}^{(1)}, g_{\{1\}}] &= 0, & [a_{\{1,2,3\}}^{(1)}, g_{\{1\}}] &= 0, \\ [a_{\{1\}}^{(1)}, h_\emptyset] &= a_{\{1\}}^{(1)}, & [a_{\{1,2,3\}}^{(1)}, h_\emptyset] &= a_{\{1,2,3\}}^{(1)}, \\ [a_{\{1\}}^{(1)}, a_\emptyset^{(1)}] &= -a_{\{1\}}^{(2)}, & [a_{\{1,2,3\}}^{(1)}, a_\emptyset^{(1)}] &= -a_{\{1,2,3\}}^{(2)}, \\ [a_{\{1\}}^{(1)}, a_{\{2,3\}}^{(1)}] &= -a_{\{1,2,3\}}^{(2)}, & [a_{\{1,2,3\}}^{(1)}, a_{\{2,3\}}^{(1)}] &= 0. \end{aligned}$$

Como $a_{\{1\}}^{(1)}$ e $a_{\{1,2,3\}}^{(1)}$ estão no caso $t = 2$, então os elementos resultantes são $a_{\{1\}}^{(2)}$ e $a_{\{1,2,3\}}^{(2)}$.

- Seja $t = 4, 5, \dots, p$. Como $[z_1, z_2, \dots, z_t] = [[z_1, \dots, z_{t-1}], z_t]$, fixe t e assumamos que

$$[z_1, \dots, z_{t-1}] \in \left\{ a_{\{1\}}^{(t-2)}, a_{\{1,2,3\}}^{(t-2)} \right\}.$$

Fazendo os mesmos cálculos que no caso $t = 3$, temos que os elementos resultantes são

$$a_{\{1\}}^{(t-1)} \text{ e } a_{\{1,2,3\}}^{(t-1)}.$$

- Seja $t = p + 1$. Note que somente resulta $a_{\{1,2,3\}}^{(p)}$, pois se $\sigma \in T_2$, então $a_{\sigma}^{(p)}$ é zero para $\sigma \neq \{1,2,3\}$.

Os demais colchetes de comprimento $t > p + 1$ não resultarão em novos elementos, pois são zero perante a classe de nilpotência p de A_2 . Portanto, temos que a base de L_2 tem $2p + 3$ elementos e são os que estão descritos no enunciado. \square

Lema 4.8. *Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in T(L_2)$. Então existe n tal que $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in T(C_n)$.*

Demonstração. Ver artigo [5], Lema 3.3. \square

Provaremos agora uma identidade polinomial para L_2 .

Proposição 4.9. $u(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) = [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}, [x_1, x_2]^{p-1}] \in T(L_2)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.21, sabemos que $u(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \in T(L_2)$ se, e somente se,

$$u(l_1, l_2, \dots, l_{n+2}) = 0$$

para todos l_1, l_2, \dots, l_n elementos da base de L_2 . Suponha que

$$u(l_1, l_2, \dots, l_{n+2}) = [l_1, l_2, \dots, l_{n+2}, [l_1, l_2]^{p-1}] \neq 0,$$

então observamos que

$$l_1, l_2 \in \{a_{\emptyset}^{(1)}, h_{\emptyset}\} \text{ e } l_3, \dots, l_{n+2} \in \{g_{\{1\}}, h_{\emptyset}\}.$$

Logo, nestas avaliações temos

$$\begin{aligned} u(l_1, l_2, \dots, l_{n+2}) &= [a_{\emptyset}^{(1)}, l_3, \dots, l_{n+2}, [a_{\emptyset}^{(1)}]^{p-1}] = [a_{\emptyset}^{(1)}, g_{\{1\}}, h_{\emptyset}, \dots, h_{\emptyset}, [a_{\emptyset}^{(1)}]^{p-1}] \\ &= a_{\{1\}}^{(p)} = 0, \end{aligned}$$

pois $\{1\} \neq \{1,2,3\}$. Absurdo. Portanto, $u(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \in T(L_2)$. \square

Encerramos este capítulo com o principal resultado dele.

Teorema 4.10. *Sobre qualquer corpo infinito \mathbb{K} de característica positiva p existe uma álgebra de Lie de dimensão $2p + 3$ tal que seu conjunto de identidades polinomiais não é finitamente gerado.*

Demonstração. Pela Proposição 4.7 a álgebra L_2 da Definição 4.6 tem uma base com $2p + 3$ elementos, dada por

$$\left\{ g_{\{1\}}, h_{\emptyset}, a_{\emptyset}^{(1)}, a_{\{2,3\}}^{(1)}, a_{\{1\}}^{(1)}, a_{\{1,2,3\}}^{(1)}, a_{\{1\}}^{(2)}, a_{\{1,2,3\}}^{(2)}, \dots, a_{\{1\}}^{(p-1)}, a_{\{1,2,3\}}^{(p-1)}, a_{\{1,2,3\}}^{(p)} \right\}.$$

Provaremos nosso teorema se mostramos que L_2 não tem uma base finita de suas identidades polinomiais.

Suponha por contradição que L_2 tem uma base finita de identidades polinomiais. Ou seja, suponha que existe uma quantidade finita de polinômios $f_1, f_2, \dots, f_m \in L(X)$ tal que

$$T(L_2) = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle^T.$$

Pelo Lema 4.8, para cada $i = 1, \dots, m$, existe n_i tal que $f_i \in T(C_{n_i})$. Se n é o maior dentre os números n_1, \dots, n_m , então pelo Lema 4.5 temos $T(L_2) \subseteq T(C_n)$. Considere o polinômio

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) = [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}, [x_1, x_2]^{p-1}].$$

Pela Proposição 3.22 sabemos que $u(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \notin T(C_n)$. Como $T(L_2) \subseteq T(C_n)$, então

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \notin T(L_2),$$

o que contradiz a Proposição 4.9. Este absurdo mostra que a base das identidades polinomiais de L_2 não pode ser finita, provando nosso teorema. \square

Referências Bibliográficas

- [1] BAHTURIN, Yuri. **Identical relations in Lie algebras**. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2021. 344 p. (De Gruyter Expositions in Mathematics; 68).
- [2] BAHTURIN, Yuri A. Two remarks on varieties of Lie algebras. **Mathematical Notes**, v. 4, n. 4, p. 387–398, 1968.
- [3] BELOV, Alexei. Counterexamples to the Specht problem. **Sbornik: Mathematics**, v. 190, n. 9–10, p. 1271–1282, 1999.
- [4] DRENSKY, Vesselin. **Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra**. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 258 p.
- [5] DRENSKY, Vesselin S. On identities in Lie algebras. **Algebra and Logic**, v. 13, n. 3, p. 150–165, 1974.
- [6] DRENSKY, Vesselin. Weak polynomial identities and their applications. **Communications in Mathematics**, v. 29, p. 1–19, 2021.
- [7] DRENSKY, Vesselin S. On varieties of Lie algebras with infinite basis property. **arXiv preprint**, arXiv:2301.12572, 2023. 23 p.
- [8] KEMER, Aleksandr R. **Ideals of identities of associative algebras**. Providence: American Mathematical Society, 1991. 206 p. (Translations of Mathematical Monographs; 87).
- [9] VAUGHAN-LEE, Michael R. Varieties of Lie algebras. **The Quarterly Journal of Mathematics**, v. 21, n. 3, p. 297–308, 1970.
- [10] VOLICHENKO, I. B. On varieties of center-by-metabelian Lie algebras. Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 1980. 112 p. (Preprint).