

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCAR
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA – CCET
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA – DEMEC

ANA BEATRIZ MATIAS ROMAN

**ANÁLISE DE VIBRAÇÃO ALEATÓRIA EM UM VEÍCULO
BAJA BASEADA EM ENTRADA PSD DETERMINADA
EXPERIMENTALMENTE**



SÃO CARLOS
2025

ANA BEATRIZ MATIAS ROMAN

**ANÁLISE DE VIBRAÇÃO ALEATÓRIA EM UM VEÍCULO BAJA BASEADA EM
ENTRADA PSD DETERMINADA EXPERIMENTALMENTE**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de São Carlos, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Mariano Eduardo Moreno

São Carlos
2025

Roman, Ana Beatriz Matias

Análise de vibração aleatória em um veículo baja baseada em entrada PSD determinada experimentalmente / Ana Beatriz Matias Roman -- 2025. 76f.

TCC (Graduação) - Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos, São Carlos

Orientador (a): Mariano Eduardo Moreno

Banca Examinadora: Mariano Eduardo Moreno, João Gustavo Pereira da Silva, Sidney Bruce Shiki

Bibliografia

1. Veículo baja. 2. Processamento de sinais de aceleração. 3. Análise de vibração aleatória. I. Roman, Ana Beatriz Matias. II. Título.

Ficha catalográfica desenvolvida pela Secretaria Geral de Informática (SIn)

DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR

Bibliotecário responsável: Arildo Martins - CRB/8 7180



FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

COORDENAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA - CCEMec/CCET/R

Rod. Washington Luís km 235 - SP-310, s/n - Bairro Monjolinho, São Carlos/SP, CEP 13565-905

Telefone: (16) 33519703 - <http://www.ufscar.br>

DP-TCC-FA nº 39/2025/CCEMec/CCET/R

Graduação: Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Folha Aprovação (GDP-TCC-FA)

FOLHA DE APROVAÇÃO

ANA BEATRIZ MATIAS ROMAN

ANÁLISE DE VIBRAÇÃO ALEATÓRIA EM UM VEÍCULO BAJA BASEADA EM ENTRADA PSD DETERMINADA
EXPERIMENTALMENTE

Trabalho de Conclusão de Curso

Universidade Federal de São Carlos – Campus São Carlos

São Carlos, 04 de dezembro de 2025

ASSINATURAS E CIÊNCIAS

Cargo/Função	Nome Completo
Orientador	Mariano Eduardo Moreno
Membro da Banca 1	João Gustavo Pereira da Silva
Membro da Banca 2	Sidney Bruce Shiki



Documento assinado eletronicamente por **Mariano Eduardo Moreno, Docente**, em 04/12/2025, às 10:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joao Gustavo Pereira da Silva, Professor(a) do Ensino Superior**, em 04/12/2025, às 10:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sidney Bruce Shiki, Docente**, em 04/12/2025, às 10:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.ufscar.br/autenticacao>, informando o código verificador **2082422** e o código CRC **461E50B5**.

Dedico este trabalho aos meus pais, Andréa e Izair.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu saúde, perseverança e fé para me dedicar ao curso de Engenharia Mecânica. Agradeço aos meus pais, Andréa e Izair, que fizeram diversos sacrifícios para que eu pudesse realizar esse sonho e me mostram, diariamente, o valor do trabalho árduo e contínuo.

Agradeço aos meus irmãos, Giovana e Vitor Hugo, pelo apoio incondicional. Agradeço as minhas tias e avós, Flávia, Rúbia, Geralda e Lázaro, que tiveram participação ativa na minha formação pessoal e profissional.

Agradeço ao meu namorado, Erik, pelo incentivo, parceria nos estudos e pela confiança na minha capacidade. Agradeço as minhas amigas de infância, Ana Laura, Ana Luísa, Fabiane, Juliana e Lorena, que durante esses 24 anos tive o prazer de compartilhar a vida. Agradeço aos meus amigos do Baja UFSCar, em especial Mika, Murilo, Davi, Rafael e Giovanni que durante nossa trajetória na equipe partilharam os momentos e desafios em conjunto.

Agradeço aos meus professores da Engenharia Mecânica, pelas aulas e por toda ajuda durante a graduação. Agradeço em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Mariano Eduardo Moreno, pelo auxílio durante o desenvolvimento do presente trabalho e durante toda a graduação. Sou grata por todos os ensinamentos e debates realizados.

“Imagination is more important than knowledge. For knowledge is limited to all we now know and understand, while imagination embraces the entire world, and all there ever will be to know and understand.”

Albert Einstein

RESUMO

ROMAN, A. B. M. *Análise de vibração aleatória em um veículo baja baseada em entrada PSD determinada experimentalmente*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2025.

O Baja é uma categoria de veículo off-road projetado para enfrentar condições adversas de terreno. No Brasil, a *Society of Automotive Engineers* (SAE) promove competições estaduais e nacionais de veículos Baja, desenvolvidos pelas universidades brasileiras. O chassi é um componente do carro que tem a finalidade de garantir a integridade do piloto e suportar os demais subsistemas do Baja em sua estrutura. Na atualidade, a gaiola é regulamentada para garantir a segurança do piloto, restringindo-se a combinação de materiais, diâmetro e espessura dos tubos que a compõem (ou materiais com resistência equivalente). Dessa maneira, com o intuito de compreender os efeitos dos impactos e das vibrações aos quais um chassi é submetido, foi realizada uma análise modal do sistema completo do Baja da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), seguida de um teste de vibrações na estrutura, para que fosse possível comparar com o modelo computacional desenvolvido. Assim, os resultados modais foram utilizados em uma análise espectral da gaiola ao considerar entradas vibracionais provenientes do solo, que foram obtidas por meio de um teste experimental. Dessa forma, por meio dos resultados obtidos, foi possível analisar o comportamento dinâmico da estrutura da gaiola e obter parâmetros (forças de reação nas rodas) para dimensionamento dos componentes de suspensão do veículo.

Palavras-chave: veículo baja; instrumentação com acelerômetros; processamento de sinais de aceleração; análise de vibração aleatória.

ABSTRACT

ROMAN, A. B. M. *Random vibration analysis of a Baja vehicle based on experimentally determined PSD input*. Undergraduate Thesis (Bachelor's Degree in Mechanical Engineering) – Center for Exact Sciences and Technology, Federal University of São Carlos, São Carlos, 2025.

Baja vehicles are a category of off-road vehicles designed to withstand adverse terrain conditions. In Brazil, the *Society of Automotive Engineers* (SAE) promotes regional and national Baja competitions, in which vehicles are developed by Brazilian universities. The chassis is a vehicle component whose purpose is to ensure driver safety and to support the other Baja subsystems within its structure. Currently, the roll cage is regulated to guarantee driver safety, restricting the combination of materials, as well as the diameter and thickness of the tubes that compose it (or materials with equivalent strength). Therefore, in order to understand the effects of impacts and vibrations to which a chassis is subjected, a modal analysis of the complete Baja vehicle of the Federal University of São Carlos (UFSCar) was performed, followed by vibration testing on the structure, enabling comparison with the developed computational model. Subsequently, the modal results were used in a spectral analysis of the roll cage by considering vibrational inputs originating from the ground, which were obtained through an experimental test. Thus, based on the results obtained, it was possible to analyze the dynamic behavior of the roll cage structure and to obtain parameters (reaction forces at the wheels) for the design of the vehicle suspension components.

Keywords: baja vehicle; accelerometer instrumentation; acceleration signal processing; random vibration analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tubos primários e secundários	18
Figura 2 – Carro Baja UFSCar, 2024	20
Figura 3 – Comparação entre sistemas com diferentes valores de ζ	25
Figura 4 – Comportamento do carregamento dinâmico	27
Figura 5 – Malha genérica, elementos finitos	32
Figura 6 – Tipos de elementos	33
Figura 7 – CAD da gaiola e das bandejas	40
Figura 8 – CAD da gaiola em casca	41
Figura 9 – Bandeja traseira esquerda superior, antes e depois do tratamento do CAD	42
Figura 10 – Montagem gaiola e bandejas, pós tratamento de CAD	42
Figura 11 – Malha do modelo geral	43
Figura 12 – Malha localizada parte frontal do chassi	44
Figura 13 – Qualidade de malha pelo método <i>Skewness</i>	44
Figura 14 – Qualidade de malha pelo método Jacobiano	45
Figura 15 – Junta de revolução entre a bandeja e a gaiola	46
Figura 16 – Ligação entre pares de bandejas	46
Figura 17 – Mola do veículo Baja	47
Figura 18 – Esquemático da vista superior do veículo e as condições de contorno: Caso A	48
Figura 19 – Condições de contorno do modelo	48
Figura 20 – Esquemático da vista superior do veículo e as condições de contorno: Casos B, C e D	49
Figura 21 – Acelerômetro PCB Piezotronics modelo 333B30	50
Figura 22 – Sistema de aquisição de dados modular NI CompactDAQ (cDAQ-9174) com módulos NI 9201 e NI 9234	50
Figura 23 – Posição dos acelerômetros na gaiola - Teste de vibração	51
Figura 24 – Acelerômetro analógico ADXL335	53
Figura 25 – Arduino uno com microcontrolador ATmega328P	53
Figura 26 – Modos de vibração referentes à 5ª e 6ª frequências naturais	56
Figura 27 – Modos de vibração referentes à 7ª e 8ª frequências naturais	57
Figura 28 – Modos de vibração referentes à 9ª e 10ª frequências naturais	58
Figura 29 – Modo de vibração referente à 11ª frequência natural (54,112 Hz)	59
Figura 30 – Espectro em frequência com entrada pelo martelo de borracha, configuração 1	59
Figura 31 – Espectro em frequência com entrada pelo martelo de metal, configuração 1	60
Figura 32 – Espectro em frequência com entrada frontal, configuração 1	60
Figura 33 – Espectro em frequência com entrada lateral, configuração 1	61
Figura 34 – Aceleração na roda normalizada	63

Figura 35 – PSD de aceleração normalizada $[(g^2/Hz)/(g^2/Hz)_{max}]$	64
Figura 36 – PSD normalizada com envelopamento	65
Figura 37 – PSD normalizada e valor RMS	65
Figura 38 – Resposta PSD no centro de massa do piloto	66
Figura 39 – Tensão equivalente de von Mises no modelo completo de elementos finitos .	67
Figura 40 – Tensão equivalente de von Mises na gaiola	68
Figura 41 – Tensão equivalente de von Mises máxima do chassi	68
Figura 42 – Tensão de von Mises nas regiões vizinhas à tensão máxima da gaiola	69
Figura 43 – Cargas atuantes nas rodas dianteiras do veículo	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação da razão de amortecimento	24
Tabela 2 – Propriedades mecânicas do aço 1020	39
Tabela 3 – Dimensões dos tubos utilizados	39
Tabela 4 – Massa por componente	47
Tabela 5 – Frequências naturais adquiridas na análise modal	55
Tabela 6 – Comparativo entre as frequências naturais obtidas na análise modal e no teste de vibração	62
Tabela 7 – Forças de reação nas bandejas: Caso A	70
Tabela 8 – Forças de reação nas bandejas: Caso B	70
Tabela 9 – Forças de reação nas bandejas: Caso C	70
Tabela 10 – Forças de reação nas bandejas: Caso D	70
Tabela 11 – Forças de reação nas bandejas	71
Tabela 12 – Forças de reação nas bandejas dianteiras em (Y): Caso B	71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAD	<i>Computer Aided Design</i>
DFT	Transformada de <i>Fourier</i> Discreta
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FRF	Função de Resposta em Frequência
MEF	Método dos Elementos Finitos
PSD	<i>Power Spectral Density</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
SAE	<i>Society of Automotive Engineers</i>
UFSCar	Universidade Federal de São Carlos

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Constante de integração dependente da posição inicial do sistema
B	Constante de integração dependente da velocidade inicial do sistema
Be	Operador de derivadas (matriz de deformação do elemento)
c	Coefficiente de amortecimento (constante viscosa)
C	Matriz de amortecimento global
D	Matriz constitutiva do material (relaciona tensão-deformação)
De	Matriz constitutiva do elemento
$E[x(t)x(t + (\tau))]$	Operador de valor esperado (média estatística)
F	Força resultante (vetor) — conforme Segunda Lei de Newton
$F(t)$	Vetor de carregamentos aplicados (domínio do tempo)
F_0	Amplitude da força excitadora (harmônica)
$f(t)$	Força de entrada em função do tempo
f_k	Frequência real (associada ao índice k na DFT)
f_s	Frequência de amostragem
F_{RMS}	Valor RMS da força (quando aplicável)
I	Momento de inércia ($I = \int r^2 dm$)
j	Unidade imaginária
k	Rigidez (da mola) / índice associado a frequência discreta (contexto)
K	Matriz de rigidez global
Ke	Matriz de rigidez elementar
m	Massa (ou massa associada a um grau de liberdade)
M	Matriz de massa global
Me	Matriz de massa elementar (consistente)
N	Número total de amostras (ou número de pontos na DFT)

Ne	Vetor/matriz de funções de forma do elemento
N_{kn}	(quando usado na base da DFT — ver notação específica no texto)
r_1, r_2	Raízes reais (negativas) de um sistema superamortecido
$R_{xx}(\tau)$	Função de autocorrelação do sinal $x(t)$
$S_{xx}(\omega)$	Densidade espectral de potência (PSD) da excitação
$S_{yy}(\omega)$	PSD da resposta
T	Intervalo total de tempo usado no cálculo RMS contínuo
T_s	Intervalo de amostragem (período)
t	Variável independente de tempo
$u(t)$	Vetor de deslocamentos e rotações nodais (domínio do tempo)
$x(t)$	Sinal no domínio do tempo (deslocamento, velocidade ou aceleração conforme contexto)
x_n	Amostra discreta do sinal no tempo (índice n)
x_i	i -ésima amostra (usado no RMS discreto)
x_{RMS}	Valor RMS do sinal x
$X(\omega)$	Transformada de Fourier de $x(t)$ (domínio da frequência angular)
X_k	Coefficiente espectral associado ao índice k (DFT/FFT)
$X_{m\acute{a}x}$	Pico máximo da resposta no domínio da frequência
$Y(\omega)$	Resposta no domínio da frequência (saída)
$ X(f) $	Magnitude do espectro em função da frequência (intensidade/energia)
$ x(t) ^2$	Potência instantânea do sinal
$\angle X(f)$	Fase (defasagem) do espectro em função da frequência
φ	Defasagem ou ângulo de fase (phi)
ϕ	Autovetor (forma modal) — vetor de modo ϕ
ϕ_i, ϕ_j	Autovetores associados aos modos i e j
ρ	Densidade do material

ρ_e	Densidade do elemento (quando aparece em integrais elementares)
τ	Defasagem temporal (tempo de atraso) usada em autocorrelação
ω	Frequência angular (rad/s)
ω_n	Frequência natural (não amortecida)
ω_d	Frequência natural amortecida
ω_r	Frequência de ressonância amortecida (pico forçado)
ζ	Razão de amortecimento (damping ratio)
$\ddot{x}(t)$	Aceleração (segunda derivada temporal de x)
$\dot{x}(t)$	Velocidade (derivada temporal de x)
V	Volume do domínio (usado nas integrais globais)
V_e	Volume do elemento (usado nas integrais elementares)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	Vibrações	21
2.1.1	Vibrações livres e forçadas	22
2.1.2	Vibrações amortecida e vibração não amortecida	22
2.1.3	Ressonância	25
2.2	Carregamentos determinísticos e aleatórios	27
2.2.1	Transformada de Fourier	28
2.2.1.1	Transformada Discreta de Fourier (DFT)	28
2.2.1.2	Transformada Rápida de Fourier (FFT)	29
2.2.1.3	Função de Resposta em Frequência (FRF)	29
2.2.2	<i>Power Spectral Density (PSD)</i>	30
2.2.2.1	Valor <i>Root Mean Square</i> (RMS)	31
2.3	Elementos finitos	32
2.3.1	Inércia	35
2.3.2	Análise modal	36
2.4	Teste de vibrações	37
2.5	Trabalhos relacionados	38
3	MATERIAIS E MÉTODOS	39
3.1	Chassi Baja UFSCar	39
3.2	Estudos modais	39
3.2.1	Tratamento da geometria	39
3.2.2	Análise modal	43
3.2.3	Teste de Vibrações	49
3.2.4	Comparação entre o modelo de elementos finitor e o modelo experimental	52
3.3	Análise espectral	52
3.3.1	Aquisição de dados	52
3.3.2	Tratamento dos dados	54
3.3.3	Análise espectral: PSD	54
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	55
4.1	Estudos modais	55
4.1.1	Análise modal	55

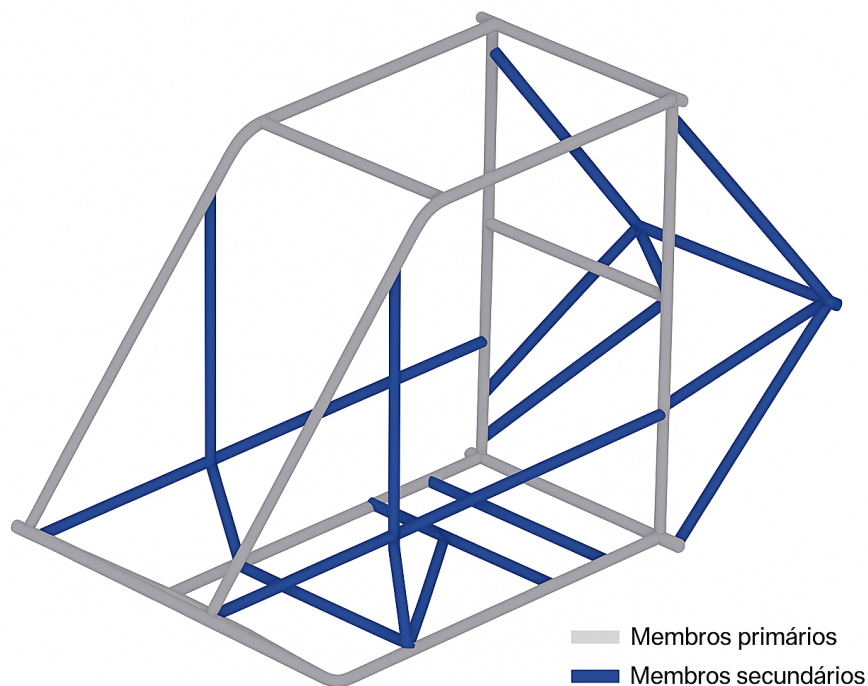
4.1.2	Teste de Vibrações	59
4.1.3	Comparação entre o modelo de elementos finitos e teste experimental . .	61
4.2	Análise espectral	62
4.2.1	Aquisição de dados	62
4.2.2	Tratamento dos dados	64
4.2.3	Análise espectral: PSD	66
4.2.3.1	PSD de resposta	66
4.2.3.2	Tensão de Von Mises equivalente	67
4.2.3.3	Forças de reação	70
5	CONCLUSÕES	73
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

A competição Baja SAE consiste em um programa estudantil que tem como objetivo promover um espaço para que estudantes de engenharia possam aplicar os conhecimentos adquiridos na graduação e desenvolver-se como engenheiros (SAE BRASIL, 2024) ao projetar, construir e testar um veículo off-road de pequeno porte totalmente funcional. São desenvolvidos pela equipe diversos subsistemas de um veículo, como freios, direção, suspensão e transmissão, todos interconectados por uma estrutura principal, o chassi, que é projetado no formato de uma gaiola formada por elementos tubulares, na qual são embarcados os subsistemas e que também é responsável por acomodar com segurança o condutor e preservar a integridade geral do veículo. A gaiola deve ser projetada para que haja o mínimo de espaço entre o piloto e as extremidades (SAE BRASIL, 2024).

Dessa maneira, nota-se a importância do projeto e da fabricação da gaiola, visto que, além de atender aos requisitos estabelecidos pelo regulamento, é necessário garantir uma boa performance do veículo e um comportamento dinâmico favorável. O chassi deve ser composto por tubos de aço de seção circular, divididos em tubos primários e secundários, que se diferenciam pela espessura e pelo diâmetro mínimos exigidos pela competição. Os tubos classificados como primários e secundários estão exemplificados na Figura 1, no contexto de uma gaiola genérica.

Figura 1 – Tubos primários e secundários



Fonte: Adaptado de SAE BRASIL (2024)

O material dos tubos também é regulamentado, exigindo-se um teor mínimo de 0,18% de carbono em sua composição. Segundo o regulamento da SAE BRASIL (2024), os tubos primários devem possuir um diâmetro externo mínimo de 25,4 mm (1 polegada) e espessura de parede de 3,05 mm, ou a equipe pode realizar um cálculo de equivalência, desde que a rigidez e a resistência à flexão sejam superiores às do caso indicado. Já os tubos secundários devem possuir, no mínimo, 0,89 mm de espessura e 25,4 mm de diâmetro externo, podendo também ser substituídos mediante o cálculo de equivalência.

Durante uma competição BAJA SAE *off road*, o carro é submetido a diversos percursos e obstáculos para avaliar sua capacidade e performance. Ao longo das provas, o chassi e o carro são sujeitos a vibrações oriundas do perfil do solo e do motor, além de impactos, muitas vezes, imprevisíveis. Tais carregamentos são de caráter aleatório e, na maioria das vezes, devido à falta de recursos para a aquisição de dados, difíceis de estimar.

Assim, quando uma estrutura é excitada em uma de suas frequências naturais (frequência com que o sistema oscila livremente após uma excitação inicial (RAO, 2008)), o sistema pode entrar em ressonância, um fenômeno físico que resulta em uma resposta vibratória amplificada (EWINS, 2000). A ressonância é prejudicial aos componentes mecânicos e pode acarretar danos estruturais, fadiga prematura ou até mesmo falhas catastróficas, o que justifica a necessidade de uma avaliação criteriosa de seus efeitos.

De acordo com o regulamento, um chassi pode participar de até quatro competições Baja SAE e/ou possuir um período de vida útil de dois anos. Entretanto, apesar de a gaiola possuir vida limitada e ter seus elementos estruturais individuais regulamentados, é imprescindível realizar a análise estrutural do conjunto projetado, a fim de garantir que este não apresente frequências naturais próximas ou coincidentes com o regime de trabalho do motor, evitando, assim, a ocorrência de ressonância e assegurando sua capacidade de suportar os impactos ao longo de sua vida útil.

Assim, para identificar as frequências naturais e realizar estudos dinâmicos estruturais do chassi de um Baja, o método dos elementos finitos (MEF) é uma ferramenta que facilita e permite estimar o comportamento estrutural da gaiola. O presente trabalho aborda estudos modais da gaiola do Baja UFSCar e as possibilidades de utilização desse recurso no desenvolvimento de um projeto mais eficiente do chassi e dos seus subsistemas. A partir da Figura 2, é possível visualizar o protótipo Baja UFSCar do ano de 2024 e todos os componentes e subsistemas alocados no chassi, destacando-se o motor, o tanque de combustível e os elementos da suspensão dianteira e traseira, incluindo as rodas, além do próprio condutor.

Figura 2 – Carro Baja UFSCar, 2024



Fonte: Baja UFSCar, 2024

1.1 Objetivos

O presente trabalho possui como objetivo analisar o comportamento estrutural do chassi, seu desempenho dinâmico (modal) e analisar as forças na peça de conexão da roda com os demais componentes da suspensão ao considerar vibrações e impactos estruturais originados na interface entre o solo e o carro. Como objetivos específicos, podem ser citados:

- Realizar uma análise modal do chassi via elementos finitos;
- Realizar um teste de vibrações do carro para comparar com os resultados da análise modal;
- Aquisitar dados das acelerações na roda provenientes do solo;
- Processar os sinais para gerar entradas no domínio da frequência;
- Realizar uma análise espectral via elementos finitos ao considerar vibrações oriundas do solo e do motor.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo modal é uma ferramenta fundamental para a compreensão do comportamento dinâmico de estruturas mecânicas, permitindo identificar suas frequências naturais, correspondente aos modos de vibração e possíveis regiões de ressonância. Assim, a revisão bibliográfica deste trabalho busca reunir e discutir os principais conceitos, métodos e aplicações necessárias para desenvolver o estudo proposto.

A princípio, foram revisadas os principais conceitos de vibrações mecânicas (como a ressonância), seguidos dos tipos de carregamentos aos quais uma estrutura pode ser submetida. Posteriormente, foi discutido como transformar um sinal medido ao longo do tempo para o domínio da frequência. Por fim, foram abordados aspectos dos elementos finitos e suas aplicações (método de cálculo numérico utilizado no presente trabalho).

2.1 Vibrações

As vibrações podem ser definidas como movimentos oscilatórios de um corpo ou partícula em torno de uma posição de equilíbrio, ou seja, um movimento que se repete após um intervalo de tempo (RAO, 2008). Os sistemas mecânicos existentes podem ser modelados matematicamente como sistemas contínuos ou discretos. Os sistemas discretos são sistemas que possuem um número finito de graus de liberdade; já os sistemas contínuos possuem infinitos graus de liberdade. Os graus de liberdade de um corpo ou conjunto mecânico podem ser definidos como o número mínimo de coordenadas que permite identificar a posição das partes do sistema, em sua totalidade, em qualquer instante de tempo (RAO, 2008).

A maioria dos mecanismos estudados são considerados sistemas contínuos, pois possuem infinitos graus de liberdade. Entretanto, torna-se inviável e improvável, calcular analiticamente, os sistemas contínuos. Dessa maneira, uma prática comum na engenharia, consiste na discretização de sistemas contínuos em sistemas discretos, para que o conjunto possua finitos graus de liberdade e seja possível uma aproximação analítica para facilitar os cálculos.

A prática de discretização dos sistemas contínuos pode ser realizada por meio do MEF, em que o sistema é subdividido em um número finito de subdomínios chamados elementos finitos (FILHO, 2015). Nos sistemas discretizados os modelos são tratados como vários conjuntos de elementos massa, mola e amortecedor. Esses modelos possuem boa aplicabilidade para estudos estruturais, incluindo análises dinâmicas das vibrações de sistemas mecânicos, como o caso do veículo Baja.

2.1.1 Vibrações livres e forçadas

As vibrações podem ser caracterizadas como livres ou forçadas. A princípio, uma vibração livre ocorre quando um sistema, após uma perturbação inicial, continua a vibrar por conta própria, sem a ação de forças externas; a vibração resultante é conhecida como vibração livre. Assim, após a aplicação da perturbação inicial, nenhuma força externa age sobre o sistema (RAO, 2008).

Já sobre a vibração forçada, trata-se de um sistema sujeito a uma força externa repetitiva, isto é, uma força que varia no tempo; assim, a vibração resultante é conhecida como vibração forçada (RAO, 2008). A força externa pode ser um impulso, uma força harmônica ou aleatória. Alguns exemplos de sistemas submetidos a vibrações forçadas são veículos com motores. O Baja UFSCar é um exemplo, sujeito a carregamentos aleatórios, como o gerado pelo perfil irregular do solo durante a passagem a uma determinada velocidade. Dessa forma, através das rodas e suspensão afeta sua estrutura ou pela rotação do motor, cujos elementos rotativos e desbalanceamentos devido aos componentes mecânicos produzem carregamentos harmônicos com frequências relacionadas à sua velocidade.

2.1.2 Vibrações amortecida e vibração não amortecida

Uma vibração pode ser caracterizada como amortecida quando há dissipação de energia ao longo do tempo, como o atrito e os amortecedores. Já a vibração não amortecida ocorre quando a energia não é dissipada ao longo do tempo. Esse modelo é idealizado, pois na prática sempre há um tipo de dissipação (RAO, 2008).

Os sistemas de vibrações com um grau de liberdade dificilmente são encontrados na realidade, porém, é de extrema importância compreender matematicamente esses sistemas, para que seja possível assimilar e entender os sistemas de múltiplos graus de liberdade. A Equação 1 indica matematicamente um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade, com uma ação de uma força externa.

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \quad (1)$$

Desse modo, m , c e k são os valores de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. Já $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$, $\frac{dx(t)}{dt}$ e $x(t)$ são a aceleração, a velocidade e o deslocamento do sistema, respectivamente, e, por fim, $f(t)$ é a força de entrada aplicada no sistema vibratório. Essa equação diferencial de segundo grau, de um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade, é a base para os equacionamentos de análises dinâmicas no MEF.

Para a vibração não amortecida, a constante c (amortecimento) é nula. Assim, a equação geral do movimento para sistemas sem amortecimento é simplificada conforme ilustrado na Equação 2.

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = f(t) \quad (2)$$

Para deixar o modelo em função dos coeficientes normalizados, pode-se reescrever a equação, dividindo os termos pela massa (m), como mostrado na Equação 3.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (3)$$

A equação simplificada, quando comparada à equação do oscilador harmônico simples, indicada na Equação 4, nota-se que ω_n^2 (frequência natural ao quadrado) é equivalente ao termo $\frac{k}{m}$ da equação simplificada estudada.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (4)$$

Portanto, pode-se concluir que a frequência natural do sistema é a raiz quadrada da rigidez da mola sobre a massa do sistema. Consequentemente, infere-se que a frequência natural aumenta com a rigidez do sistema e diminui com o aumento de massa, como exposto na Equação 5.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

Já para um sistema de vibração amortecida, temos a Equação 1 como equação geral do movimento, em que o amortecimento (c) é maior que zero. Ao simplificar a equação, dividindo os termos por m , o resultado foi indicado na Equação 6.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (6)$$

Desse modo, temos que a razão de amortecimento (ζ) pode ser indicada na Equação 7.

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (7)$$

A razão de amortecimento (ζ) é um parâmetro adimensional que quantifica o nível de amortecimento em um sistema mecânico. ζ é nulo quando trata-se de um sistema sem amortecimento. Já para um sistema amortecido, o ζ pode assumir valores a partir de zero. O tipo de resposta em frequência é alterado de acordo com o valor de ζ , como indicado na Tabela 1.

Tabela 1 – Classificação da razão de amortecimento

Valor de ζ	Tipo de resposta
$\zeta = 0$	Não amortecido
$0 < \zeta < 1$	Subamortecido
$\zeta = 1$	Criticamente amortecido
$\zeta > 1$	Superamortecido

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

Em sistemas subamortecidos, em que o (ζ) varia entre 0 e 1, temos a maioria dos sistemas mecânicos reais. Trata-se de um movimento oscilatório que decai exponencialmente com o tempo; ou seja, a energia é dissipada gradualmente. Nesse caso em específico, temos que a frequência amortecida (ω_d) é menor que a frequência natural (ω_n). Assim, para sistemas subamortecidos, a solução da equação massa-mola-amortecedor tem a forma indicada na Equação 8.

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)] \quad (8)$$

Dado que t refere-se a variável independente do tempo, A e B correspondem a constantes de integração que dependem do estado inicial do sistema (posição e velocidade iniciais). Dessa maneira, conclui-se que (ω_d) pode ser indicada pela Equação 9.

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

Já os sistemas criticamente amortecidos, em que o valor de ζ é igual a um, temos sistemas que retornam ao ponto de equilíbrio sem oscilações. Nesses casos, a amplitude decai exponencialmente, portanto, esse comportamento é desejável em sistemas de controle e instrumentação, nos quais se busca que a resposta do sistema retorne ao equilíbrio o mais rápido possível, sem apresentar oscilações. A solução geral do sistema criticamente amortecido foi indicada na Equação 10.

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \quad (10)$$

O sistema superamortecido, com ζ maior que um, é um sistema com dissipação de energia ao longo do tempo, e, quando comparado ao sistema criticamente amortecido, sua resposta é mais lenta. A solução geral para esse tipo de sistema foi indicada na Equação 11.

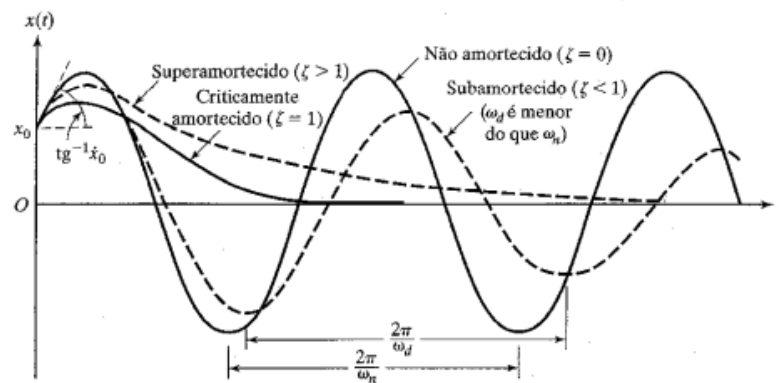
$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad (11)$$

Na Equação 11, r_1 e r_2 correspondem a raízes reais e negativas. As raízes da equação característica de modelos superamortecidos são negativas, não ocorre oscilação e o movimento decai lentamente. As raízes foram indicadas na Equação 12.

$$r_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (12)$$

Dessa maneira, conclui-se que em todos os sistemas que possuem amortecimento, submetidos a vibrações livres, a energia decai ao longo do tempo. As equações apresentadas tratam-se de representações numéricas para modelos com um grau de liberdade. Já para modelos com múltiplos graus de liberdade, essa compreensão é expandida, para um conjunto de equações diferenciais acopladas. Além disso, a frequência natural de um sistema se altera para a frequência amortecida apenas em sistemas subamortecidos. A partir da Figura 3 é possível visualizar comparativamente os tipos de respostas, dados a diferentes valores de (ζ).

Figura 3 – Comparação entre sistemas com diferentes valores de ζ



Fonte: Rao (2008)

2.1.3 Ressonância

Uma estrutura, quando submetida à uma frequência de excitação que coincida com a frequência natural desse sistema, gera uma resposta com elevada amplitude, condição conhecida como ressonância (RAO, 2008). As frequências naturais são as quais, após uma perturbação inicial em um sistema, o mesmo continua a vibrar por si próprio, sem ação de forças externas. Um sistema vibratório com ' n ' graus de liberdade, terá ' n ' frequências naturais.

Para sistemas não amortecidos, têm-se que a amplitude do movimento tende ao infinito, teoricamente, fenômeno extremamente perigoso para um sistema mecânico. Já nos sistemas amortecidos, o pico de resposta é finito, mas ainda assim perigoso para as estruturas e deve ser evitado.

As grandes amplitudes de vibrações, geradas pelo fenômeno de ressonância, são extremamente prejudiciais para os componentes, pois podem acelerar o processo de fadiga. Os esforços cíclicos intensos e os deslocamentos excessivos podem resultar em quebra de componentes ou em falhas catastróficas, aspectos que além de gerar ruídos e desconforto em situações em que

há uma pessoa operando o equipamento ou veículo. Dessa maneira, é necessário entender o processo de ressonância, conseguir identificar as frequências naturais dos sistemas estudados e garantir a seguridade dos equipamentos.

A ressonância pode ser evitada de diversas formas, como realizando a alteração da rigidez ou da massa do sistema, pois, automaticamente, ocorreria uma alteração do valor da frequência natural apresentado na Equação 5. Contudo, é importante ressaltar que a massa e a rigidez estão interligadas; ou seja, para que haja um aumento na rigidez, haverá aumento da massa ao sistema. Assim, um dos dilemas da engenharia consiste em encontrar um equilíbrio entre um comportamento dinâmico mais favorável sem deslocar a frequência natural para valores indesejados.

Além disso, adicionar amortecimento ao sistema pode promover uma redução no pico de frequência, mesmo que a frequência de operação ainda esteja próxima da frequência natural do sistema. Ademais, pode-se usar isoladores de vibrações, como coxins, amortecedores, ou evitar operações que excitem a estrutura em suas frequências naturais.

Desse modo, matematicamente, ao analisar um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade amortecido, temos a solução geral dada na Equação 1. Porém, se a entrada do sistema for uma excitação harmônica, teremos a Equação 13.

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (13)$$

O termo F_0 consiste na amplitude da força excitadora, ω indica a frequência de excitação angular e o termo $\cos(\omega t)$ indica a função harmônica da força. Assim, têm-se como solução a Equação 14.

$$x(t) = X(\omega) \cos(\omega t - \phi) \quad (14)$$

Em que, $X(\omega)$ indica a amplitude da resposta, ϕ apresenta a defasagem ou ângulo de fase e $\cos(\omega t - \phi)$ trata-se da função harmônica da resposta. Logo, a frequência natural para sistemas sem amortecimento foi indicada na Equação 5. Quando não há amortecimento, a amplitude máxima de movimento do sistema pode ser representada matematicamente pela Equação 15.

$$X(\omega) = \frac{F_0}{|k - m\omega^2|} \quad (15)$$

Já para sistemas amortecidos, a frequência natural, ou frequência de ressonância, pode ser descrita pela Equação 9, ou pela Equação 16. A frequência natural amortecida (ω_d) está associada à resposta livre do sistema, enquanto a frequência de ressonância (ω_r) refere-se à resposta forçada e depende do amortecimento para determinar o ponto de máxima resposta.

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (16)$$

Observa-se que, quando o amortecimento é desprezível ($\zeta \approx 0$), a frequência de ressonância aproxima-se da frequência natural do sistema não amortecido, de modo que $\omega_r \approx \omega_n$. Contudo, para valores de amortecimento maiores que zero ($\zeta > 0$), verifica-se que $\omega_r \neq \omega_n$, uma vez que o amortecimento desloca o pico de ressonância para frequências menores.

A partir da Equação 16 é possível obter a frequência de ressonância amortecida (ω_r). Assim, os sistemas amortecidos possuem pico máximo de frequência ($X_{\text{máx}}$), indicados pela Equação 17.

$$X_{\text{máx}} = \frac{F_0}{2m\zeta\omega_n} \quad (17)$$

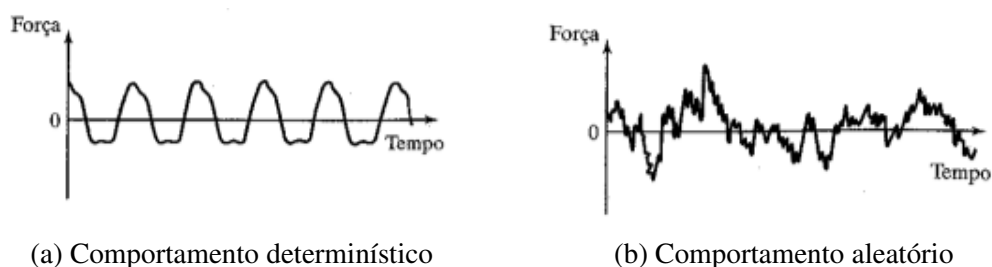
Por fim, conclui-se que o fenômeno físico de ressonância causa deslocamentos com amplitudes extremamente elevadas e são prejudiciais para a integridade dos sistemas mecânicos, por isso, devem ser evitados, de modo a garantir a seguridade e bom funcionamento dos equipamentos.

2.2 Carregamentos determinísticos e aleatórios

Uma vibração pode ser determinística ou aleatória. A princípio, quando o valor ou a magnitude (força ou movimento) agindo sobre um sistema mecânico for conhecida em qualquer instante de tempo, a excitação é caracterizada como determinística; ou seja, a vibração resultante é determinística (RAO, 2008). Já em um carregamento aleatório, o valor da excitação não é conhecido exatamente em qualquer instante, dessa maneira, a vibração resultante é aleatória. Nas excitações não determinísticas, em alguns casos, é possível estimar ou prever estaticamente o comportamento da estrutura (RAO, 2008).

Dessa maneira, uma excitação determinística tem sua forma temporal, totalmente conhecida, por exemplo uma força senoidal, um degrau ou um impulso. Na Figura 4 é possível visualizar a diferença entre excitações determinísticas e aleatórias.

Figura 4 – Comportamento do carregamento dinâmico



Fonte: Rao (2008)

Para os carregamentos aleatórios, nos quais é difícil prever o comportamento do sistema, é imprescindível realizar um estudo cauteloso. Existem algumas ferramentas, como as transformadas de *Fourier* e as curvas de *Power Spectral Density* (PSD), ou densidade espectral de potência, que são capazes de auxiliar na análise dinâmica de sistemas mecânicos.

2.2.1 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta fundamental para a análise dinâmica de sistemas mecânicos, pois permite que os sinais obtidos em função do tempo sejam representados no domínio da frequência. Por meio desse método, é possível avaliar a distribuição de energia de um sistema em diferentes frequências. Assim, para um sinal contínuo, a transformada de Fourier pode ser expressa conforme a Equação 18 (RAO, 2008):

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (18)$$

Em que $x(t)$ representa o sinal no domínio do tempo, $X(\omega)$ é o sinal correspondente no domínio da frequência, ω é a frequência angular (rad/s) e j é a unidade imaginária. A transformada inversa, que reconstrói o sinal no domínio do tempo a partir da sua representação em frequência, é dada pela Equação 19 (RAO, 2008):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (19)$$

As equações assumem que $x(t)$ é uma função integrável e contínua (RAO, 2008). A transformada de Fourier é amplamente utilizada em engenharia para identificar frequências naturais, ressonâncias e falhas mecânicas. Em análises modais, ela permite transformar dados temporais em informações espectrais, facilitando a detecção de modos de vibração e comportamentos estruturais relevantes.

2.2.1.1 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

No caso de sinais digitais, a versão discreta da transformada de Fourier, denominada *Discrete Fourier Transform* (DFT), é a mais utilizada. Os sinais são amostrados em intervalos regulares no tempo, por exemplo, por acelerômetros (RAO, 2008). Matematicamente, a DFT é definida pela Equação 20:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (20)$$

Em que x_n é o valor do sinal no domínio do tempo (amostra discreta), X_k é o coeficiente espectral associado ao índice de frequência k , N é o número total de amostras e $(e^{-j\frac{2\pi}{N}kn})$ representa a base complexa da DFT.

A DFT permite quantificar a contribuição de cada frequência no sinal. O sinal original pode ser entendido como a soma de diversas componentes senoidais, e a DFT fornece os coeficientes de cada uma delas. A relação entre o índice discreto k e a frequência real f_k é dada por:

$$f_k = \frac{k}{N \cdot T_s} = \frac{k \cdot f_s}{N} \quad (21)$$

Em que T_s é o intervalo de amostragem e f_s é a frequência de amostragem. Assim, o espectro resultante representa a energia associada a cada frequência discreta do sinal.

2.2.1.2 Transformada Rápida de Fourier (FFT)

A *Fast Fourier Transform* (FFT) é uma forma computacionalmente otimizada da DFT, permitindo a conversão de sinais temporais para o domínio da frequência de maneira eficiente. Enquanto a DFT tradicional exige cerca de N^2 operações, a FFT reduz esse custo para $N \log_2 N$, o que a torna adequada para o processamento de grandes conjuntos de dados em tempo real.

A partir da FFT, é possível obter as principais informações espectrais de um sinal, como:

- **Magnitude** $|X(f)|$: representa a intensidade ou energia associada a cada componente de frequência;
- **Fase** $\angle X(f)$: indica a defasagem entre o sinal de cada componente e o sinal original.

Esses parâmetros são essenciais para a análise modal experimental e para a construção de funções de resposta em frequência (FRF), permitindo a identificação das frequências naturais e dos modos de vibração de uma estrutura.

2.2.1.3 Função de Resposta em Frequência (FRF)

A Função de Resposta em Frequência (FRF) relaciona a excitação aplicada a um sistema com a sua resposta medida no domínio da frequência. Trata-se de uma função complexa que contém informações tanto de magnitude quanto de fase. A FRF é calculada pela Equação 22:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (22)$$

Em que $X(\omega)$ representa a excitação (força aplicada) e $Y(\omega)$ a resposta (deslocamento, velocidade ou aceleração) e $H(\omega)$ representa a função de transferência do domínio da frequência. O quociente entre ambos define a função de transferência do sistema.

Por meio da FRF, é possível determinar as frequências de ressonância e identificar modos de vibração característicos. Além disso, ela é amplamente utilizada para a geração de diagramas de Bode e para a validação experimental de modelos numéricos.

Em casos em que a aquisição direta de dados de excitação não é viável, a FRF pode ser estimada a partir do espectro de frequência obtido pela FFT, servindo de base para a identificação modal e avaliação do comportamento dinâmico da estrutura.

Assim, para o presente estudo, não será utilizada a FRF, pois no teste de vibração realizado, as forças excitadoras não são conhecidas. Dessa forma, será obtido um espectro em frequência por meio da FFT.

2.2.2 Power Spectral Density (PSD)

A Densidade Espectral de Potência (PSD, do inglês *Power Spectral Density*) é uma ferramenta para análise de sistemas sujeitos a excitações aleatórias (sistemas não determinísticos). A PSD descreve como a potência de um sinal aleatório está distribuída ao longo das frequências (RAO, 2008). Desse modo, por meio da função PSD é possível quantificar a contribuição de cada frequência para a vibração total do sistema e permite a análise de um sinal aleatório no domínio da frequência e não do tempo.

Desse modo, ao considerarmos que na PSD, $x(t)$ é um processo estocástico (aleatório) que possui média nula, a função de autocorrelação (para realizar uma previsão estatística) pode ser dado pela Equação 23.

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (23)$$

Em que $R_{xx}(\tau)$ apresenta a função de autocorrelação do sinal $x(t)$, τ indica a defasagem temporal (tempo de atraso), $E[x(t)x(t + \tau)]$ trata-se do operador de valor esperado (média estatística). Assim, a Densidade Espectral de Potência é dada pela Transformada de *Fourier* da função de autocorrelação indicada na Equação 24.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (24)$$

Em que, $S_{xx}(\omega)$ trata-se da PSD do sinal $x(t)$ no domínio da frequência angular. Essa equação representa, teoricamente, como a potência do sinal está distribuída ao longo das frequências. Além disso, a PSD possui algumas propriedades, como a não negatividade, $S_{xx}(\omega) \geq 0$ para todo ω , visto que, trata-se de energia, e a energia não pode ser negativa; propriedade da simetria, se $x(t)$ for real, então $S_{xx}(\omega)$ é par, $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$; e por fim, a potência total, na qual a área sobre a curva da PSD, indica a potência total do sinal, como indicado na Equação 25.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = E[x^2(t)] \quad (25)$$

Em que $|x(t)|^2$ indica a potência instantânea do sinal. Logo, a equação que relaciona a excitação e a resposta de um sistema linear foi indicada na Equação 26.

$$S_{yy}(\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{xx}(\omega) \quad (26)$$

Dado que, $S_{yy}(\omega)$ trata-se da PSD da resposta, $S_{xx}(\omega)$ da PSD da excitação e $H(j\omega)$ da função de resposta em frequência do sistema. No presente trabalho, os dados adquiridos de aceleração na roda serão convertidos para o domínio da frequência e a PSD será extraída.

Para sinais discretos no tempo, a densidade espectral de potência pode ser estimada a partir da Transformada Discreta de Fourier (DFT). Considerando um sinal $x[n]$ com N amostras e frequência de amostragem f_s , a PSD pode ser escrita pela Equação 27.

$$S_{xx}(f_k) = \frac{1}{Nf_s} |X[k]|^2 \quad (27)$$

Onde $X[k]$ representa a DFT do sinal $x[n]$, definida pela Equação 28.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (28)$$

Com $f_k = \frac{kf_s}{N}$ sendo a frequência discreta associada ao índice k .

2.2.2.1 Valor *Root Mean Square* (RMS)

O valor RMS (*Root Mean Square*) representa a medida estatística da magnitude de um sinal variável ao longo do tempo. Essa grandeza é amplamente utilizada em análises de vibrações, corrente elétrica e processamento de sinais, pois fornece uma indicação do valor eficaz do sinal, isto é, o valor equivalente em energia a um sinal contínuo que produziria o mesmo efeito médio (LALANNE, 2009).

Assim, o RMS é uma forma de medir o "valor efetivo" ou a "energia média" de um sinal que varia com o tempo. Matematicamente, o valor RMS de um sinal contínuo $x(t)$, definido em um intervalo de tempo T , é dado por:

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (29)$$

Em que $x(t)$ é o valor instantâneo do sinal ao longo do tempo, T é o intervalo total de tempo considerado para a análise e x_{RMS} é o valor quadrático médio (ou eficaz) do sinal. Para sinais discretos, obtidos por meio de amostragem, a expressão é adaptada para:

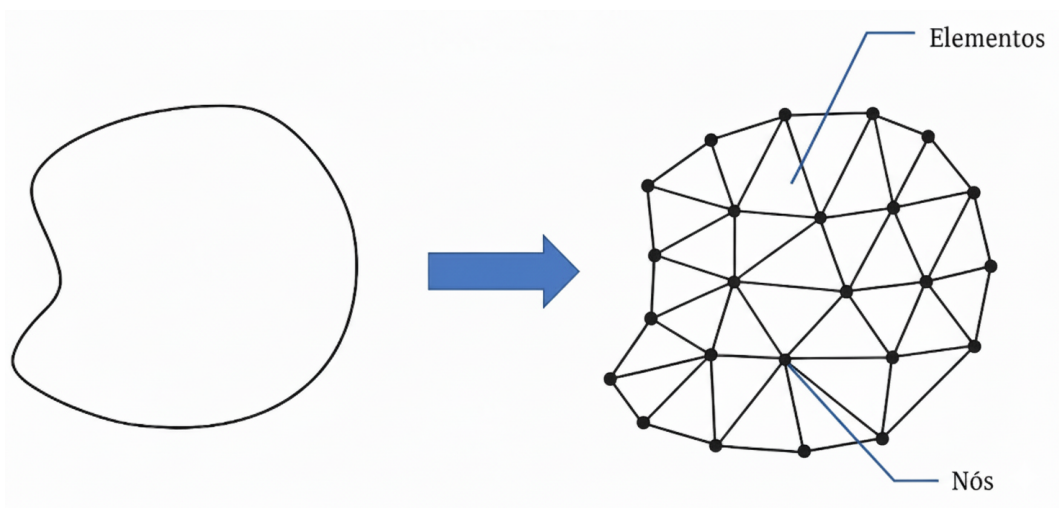
$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (30)$$

Em que x_i representa o valor do sinal na i -ésima amostra, N é o número total de amostras do sinal e a somatória $\sum_{i=1}^N x_i^2$ indica o somatório dos quadrados de todos os valores medidos. Além disso, para sinais estacionários, o valor de RMS pode ser obtido através da área abaixo do gráfico da PSD.

2.3 Elementos finitos

O MEF é um método de solução de equações diferenciais baseado na discretização de sistemas contínuos; ou seja, subdivide um modelo com infinitos pontos em um número finito de elementos, para que seja possível realizar cálculos aproximados para cada uma dessas partes (elementos) e, por meio de funções algébricas, distribuir cada ponto calculado para os nós, que são pontos compartilhados entre os elementos (FILHO, 2015). A Figura 5 permite visualizar os elementos e os nós. O conjunto de elementos e nós, é denominado como malha.

Figura 5 – Malha genérica, elementos finitos



Fonte: Adaptado de Junior e Filho (s.d.)

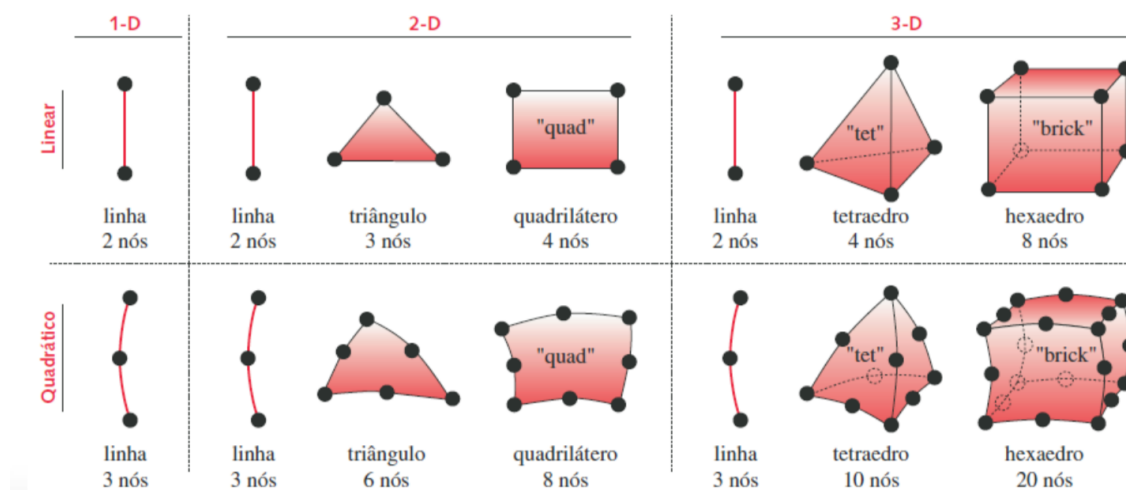
Dessa maneira, para que os cálculos dos sistemas contínuos possuam uma boa aproximação por meio dos sistemas discretos, é necessário que a malha seja gerada cuidadosamente. Uma malha adequada e de qualidade leva em consideração todos os aspectos da geometria, sua forma, espessura, comportamento, dentre outros.

Assim, para a criação de uma malha em uma geometria, é necessário o tratamento do CAD para simplificar o modelo, garantindo que pequenos detalhes de fabricação que são irrelevantes para o estudo sejam removidos ou modificados. O tratamento da geometria permite que a malha fique com uma complexidade menor e o tempo de processamento da análise, seja menor.

Além do tratamento da geometria, a escolha do tipo de elemento adequado para cada estudo é imprescindível. Os elementos podem ser do tipo *beam* (viga), elementos bidimensionais (*shell* ou casca) e elementos tridimensionais. Além disso, os elementos planos ou tridimensionais,

podem ser, lineares ou quadráticos. Essa classificação determina matematicamente como o será realizada a interpolação para aproximar os deslocamentos dentro de cada elemento, nos elementos lineares a interpolação é de primeira ordem e os nós do elemento, são nos extremos, nos vértices do elemento. Já os elementos quadráticos, são de interpolação de segunda ordem e possuem nós intermediários, no meio da aresta. Por meio da Figura 6 é possível visualizar os tipos de elementos.

Figura 6 – Tipos de elementos



Fonte: Adaptado de Logan (2011)

Além dos tipos citados, existem os elementos do tipo 0D que não possuem geometria definida (comprimento, área e volume). A geometria desses elementos em si é irrelevante; porém influenciam na resposta dinâmica do sistema. Esses componentes são utilizados para representarem massas concentradas, cargas pontuais, inércias concentradas, dentre outros.

As características da malha influenciam diretamente na precisão do resultado encontrado e no tempo de processamento da simulação. Os elementos 1D são adequados para estruturas esbeltas, como vigas e tubos, em que uma dimensão é consideravelmente maior que as demais. Esses elementos não são adequados para geometrias que possuem curvaturas acentuadas. Também não são recomendados para estudos em que se deseja visualizar efeitos locais na estrutura.

Já os elementos de casca são utilizados para estruturas que possuem uma dimensão consideravelmente menor que as demais, como chapas, em que a espessura é pequena quando comparada as demais dimensões. Desse modo, normalmente são utilizadas para componentes que possuem espessura fina e constante ao longo de sua geometria. Por fim, os elementos tridimensionais são utilizados para estudar geometrias com maior complexidade, que exigem uma malha mais adaptativa ao modelo e resultados mais detalhados. Assim, os elementos 3D entregam resultados mais detalhados, porém possuem uma maior demanda computacional.

Assim, como o método de discretização divide uma geometria em vários elementos menores, o sistema é representado de maneira análoga a uma associação de massas, molas

e amortecedores. Desse modo, cada elemento tem matrizes locais com sua massa, rigidez e amortecimento, e a montagem ou associação global dessas matrizes é chamada de matriz global (FILHO, 2015). A matriz de rigidez de um elemento K_e e a matriz de massa consistente M_e , foram indicadas nas Equações 31 e 32, respectivamente.

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_e dV \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{V_e} \rho_e \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV \quad (32)$$

Nas Equações 31 e 32 \mathbf{K}_e , \mathbf{M}_e e representam, respectivamente, as matrizes de rigidez e massa elementares. O termo V_e refere-se ao volume do elemento, enquanto dV indica o volume diferencial para integração sobre o domínio do elemento finito.

A matriz \mathbf{B}_e relaciona os deslocamentos nodais com as deformações no elemento, e \mathbf{D}_e é a matriz constitutiva do material, responsável pela relação tensão-deformação, de acordo com a Lei de Hooke generalizada. A matriz \mathbf{N}_e contém as funções de forma utilizadas para interpolação dos deslocamentos ao longo do volume do elemento, e ρ_e é a massa específica do material.

Logo, por meio da rigidez de cada elemento, é possível calcular a rigidez global do sistema. A equação de movimento global de um sistema (malha completa) pode ser indicada pela Equação 33.

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + C \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = F(t) \quad (33)$$

Dado que:

- M é a matriz de massa global do sistema;
- C é a matriz de amortecimento global;
- K é a matriz de rigidez global;
- $x(t)$ é o vetor de deslocamentos e rotações nodais ao longo do tempo;
- $\frac{dx(t)}{dt}$ é o vetor de velocidades nodais;
- $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ é o vetor de acelerações nodais;
- $F(t)$ é o vetor de carregamentos externos aplicados ao sistema.

2.3.1 Inércia

A inércia é um conceito físico que indica a capacidade de um corpo resistir a mudanças em seu movimento; ou seja, um corpo em repouso tende a permanecer em repouso, e um objeto em movimento tende a permanecer em movimento com a mesma velocidade e direção, a menos que uma força externa atue sobre ele. Assim, a equação básica do movimento pode ser descrita pela segunda lei de Newton (Equação 34).

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (34)$$

Em que F é a força resultante, m a massa do corpo e a a aceleração. Dessa forma, a inércia representa a tendência de um corpo em manter seu movimento retilíneo uniforme ou seu estado de repouso na ausência de forças externas (HIBBELER, 2017).

Em sistemas estruturais, a inércia está associada à distribuição de massa e ao momento de inércia, grandezas que determinam como o corpo reage a excitações dinâmicas, vibrações e rotações. O momento de inércia é uma medida da resistência que um corpo oferece à variação de sua velocidade angular, sendo definido pela Equação 35.

$$I = \int r^2 dm \quad (35)$$

Desse modo, nota-se que a inércia é proporcional a força aplicada sobre um corpo, e inversamente proporcional a aceleração. Nos elementos finitos a matriz de massa representa a distribuição de inércia da estrutura (FILHO, 2015). Sendo assim, a matriz M representa a inércia do sistema. A matriz de massa foi indicada na Equação 36.

$$M = \int_V \rho N^T N dV \quad (36)$$

Dado que ρ trata-se da densidade do material e N das funções de forma dos elementos. Já a rigidez do sistema é determinada pela matriz global K , e determina a resistência da estrutura a deformação. A matriz K relaciona o vetor global de forças (ou momentos) nodais, com o vetor global de deslocamentos (ou rotações), e é indicada na Equação 37.

$$K = \int_V B^T D B dV \quad (37)$$

Dado que B trata-se do operador de derivadas parciais, D da matriz constitutiva (relaciona tensão e deformação) e, V : volume dos elementos. A combinação entre as duas matrizes permite realizar análises modais. Essas matrizes representam, respectivamente, a inércia e a rigidez da estrutura, sendo fundamentais na formulação da equação de movimento utilizada nesse tipo de análise. Dessa forma, a partir do balanço entre as forças inerciais e elásticas, é possível determinar as frequências naturais e os modos de vibração do sistema.

2.3.2 Análise modal

A princípio, como discutido anteriormente, a análise modal possui como objetivo, identificar parâmetros modais de um sistema, sendo eles, frequências naturais, formas modais e fatores de amortecimento.

A Equação 33, descreve o movimento geral de um sistema com múltiplos graus de liberdade. Para um corpo livre no espaço, ou seja, com 6 graus de liberdade de corpo rígido, sem amortecimento e sem forças externas, seu movimento pode ser matematicamente descrito pela Equação 38.

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (38)$$

Desse modo, ao considerar uma solução harmônica, indicada pela Equação 39, e substituindo os valores na Equação 38, têm-se como resultado a Equação 40.

$$x(t) = \phi e^{j\omega t} \quad (39)$$

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0 \quad (40)$$

Para que uma solução diferente da trivial ($\phi = 0$) seja encontrada, deve-se resolver o autoproblema da Equação 40, em que os autovalores ω^2 permitem identificar as frequências naturais do sistema a partir das raízes quadradas. Já os autovetores ϕ representam as formas modais associadas a cada frequência natural (FILHO, 2015). Logo, é imprescindível considerar que para cada frequência natural existe um modo de vibração correspondente, ou seja, a forma espacial com que a geometria irá se deslocar ao vibrar. Cada par (ω_n, ϕ_n) define um modo de vibração.

Os autovetores são ortogonais com relação às matrizes de massa e rigidez:

$$\phi_i^T M \phi_j = 0, \quad i \neq j \quad (41)$$

$$\phi_i^T K \phi_j = 0, \quad i \neq j \quad (42)$$

Essa propriedade permite a diagonalização do sistema, possibilitando análises no domínio da frequência ou pela superposição modal (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005). O processo consiste em transformar o sistema acoplado em um conjunto de equações independentes, de modo que os termos fora da diagonal principal da matriz sejam eliminados. Assim, a forma reduzida da matriz torna o sistema mais simples de resolver, facilitando a obtenção das respostas modais.

Ademais, as frequências naturais mais baixas são normalmente as mais críticas em projetos estruturais. Isso ocorre porque as forças externas predominantes (motor, vento, perfil do

solo, dentre outras) atuam com frequências baixas, assim, a estrutura fica submetida por maior período de tempo a essas frequências. Além disso, os amortecedores, normalmente possuem menor eficiência em frequências mais baixas.

Portanto, conclui-se que análise modal é uma ferramenta importante para identificar frequências naturais e evitar que a estrutura trabalhe em uma frequência próxima a alguma ressonância ou para orientação ao validar estruturas por meio de experimentos, dentre outros.

2.4 Teste de vibrações

As frequências naturais, assim como outros parâmetros de um sistema, podem ser identificadas por meio de um teste experimental de vibrações. Esse tipo de aquisição de dados é bem disseminado na engenharia, pois além de ser possível identificar parâmetros dinâmicos, como frequências naturais, formas modais e fatores de amortecimento, podem ser úteis para identificação de falhas ou para validar modelos numéricos (EWINS, 2000).

A princípio, o teste de vibrações consiste em adquirir um sinal no domínio do tempo, normalmente utilizando um acelerômetro, obtendo-se assim uma medida da aceleração ao longo do tempo. É desejável que a força de entrada seja conhecida, como por um martelo de impacto, para que assim, a entrada e saída sejam conhecidas. Durante o teste de vibrações, diversos fatores influenciam na qualidade da aquisição de dados, como qualidade dos materiais utilizados, modo de fixação dos acelerômetros, qualidade do impulso da entrada, plataforma da aquisição de dados, dentre outros.

Após a aquisição dos valores de aceleração ao longo do tempo, é necessário processar os dados adquiridos. Por meio da DFT, é possível converter os dados para o domínio da frequência e realizar os cálculos das FRF's. Assim, é possível ajustar as curvas da FRF e estimar os parâmetros de interesse.

Para realizar um teste de vibrações é importante entender qual o intervalo de frequências o acelerômetro que será utilizado é capaz de abranger, para que assim, todas as frequências necessárias para o caso estudado sejam passíveis de leitura. Segundo Lalanne (2009), as excitações mecânicas que resultam de medições do ambiente (como no presente trabalho) ou de ensaios laboratoriais podem ser classificadas de acordo com os seguintes grupos.

- Vibrações senoidais;
- Vibrações de varredura senoidal;
- Vibrações aleatórias;
- Choques mecânicos.

Além disso, pode ocorrer uma combinação dessas vibrações mencionadas. As vibrações existentes na realidade abrangem domínios de frequência distintos (LALANNE, 2009):

- Entre 1 e 500 Hz, aproximadamente, para veículos rodoviários;
- Entre 10 e 2.000 Hz, aproximadamente, para aviões e espaçonaves;
- Entre 1 e 35 Hz, aproximadamente, para terremotos;
- Acima de 10.000 Hz para choques gerados por impacto metal-metal;

Segundo Lalanne (2009), as vibrações podem ser classificadas de acordo com a sua frequência, como frequência muito baixa (de 0 a 2 Hz), frequência média (de 2 a 20 Hz) ou frequência alta (de 20 a 2.000Hz).

2.5 Trabalhos relacionados

Estudos anteriores já exploraram modelos multicorpos de veículos Baja e o dimensionamento de componentes da suspensão a partir do MEF. O trabalho de Neto (2022) desenvolve um modelo multicorpos de um Baja, utilizando elementos 2D e 1D para os tubos da gaiola, pneu em casca, bandejas e juntas esféricas. A partir do modelo, foi desenvolvida uma análise modal e uma análise transiente estrutural ao considerar alguns obstáculos críticos (vala, tronco e rampa). O modelo discretizado desenvolvido para o trabalho de Neto (2022) abrange uma gama variada dos componentes do veículo; ademais, o autor utiliza alguns recursos de tratamento das geometrias para facilitar a criação de malha, como o *share topology*, que garante que a malha seja compartilhada entre determinadas regiões e evita a necessidade de contato entre as peças.

O trabalho de Silva (2019) apresenta um teste de vibração em um chassi de veículo Baja e a convergência do modelo de elementos finitos com a aquisição de dados realizada. O autor utiliza um martelo de impacto para realizar as entradas no veículo.

A pesquisa desenvolvida por Costa (2022) realiza o dimensionamento de uma manga e de um cubo de roda utilizando o MEF. O autor utiliza um programa em *python* que representa o veículo com sete graus de liberdade e extrai dados de força de entrada, a partir de um determinado conjunto de obstáculos, que foi desenvolvido por Parsekian (2022). A partir dos dados de entrada foi desenvolvida uma análise estática e, posteriormente, um cálculo de fadiga considerando o acúmulo de dano, para avaliar a vida dos componentes.

Ao considerar outras equipes de competição, como a Fórmula SAE, é possível obter as curvas PSD considerando a rugosidade do solo. Segundo Marques (2024), a utilização de perfis de estrada com base na ISO 8608 permite simular a resposta das suspensões veiculares de forma mais realista e próxima das condições reais de uso. A norma não se aplica à realidade do veículo Baja.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Chassi Baja UFSCar

A gaiola da equipe Baja UFSCar é composta por tubos de aço 1020 laminados a frio. As propriedades mecânicas do material foram indicadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades mecânicas do aço 1020

Propriedade	Valor
Densidade	7,87 g/cm ³
Dureza (Brinell)	121
Resistência à tração máxima (σ_{ult})	420 MPa
Limite de escoamento (σ_y)	350 MPa
Alongamento na ruptura	15 %
Módulo de elasticidade (E)	186 GPa
Módulo de cisalhamento (G)	72 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,29

Fonte: Adaptado de MatWeb (2025)

Os diâmetros dos tubos primários e secundários, e suas respectivas espessuras foram indicados na Tabela 3.

Tabela 3 – Dimensões dos tubos utilizados

Componente	Diâmetro (mm)	Espessura (mm)
Tubos primários da gaiola	31,75	2,0
Tubos secundários da gaiola	25,4	1,5
Tubos bandejas dianteira superior e inferior	25,4	1,2
Tubos bandejas traseiras superiores	31,75	1,5
Tubos bandejas traseiras inferiores	25,4	1,2

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

O processo de fabricação do chassi foi realizado manualmente, desde as bocas de lobo para os encaixes dos tubos até a solda completa do chassi. A manufatura acarreta erros dimensionais na estrutura, o que pode afetar as frequências naturais e outras características quando comparadas ao projeto.

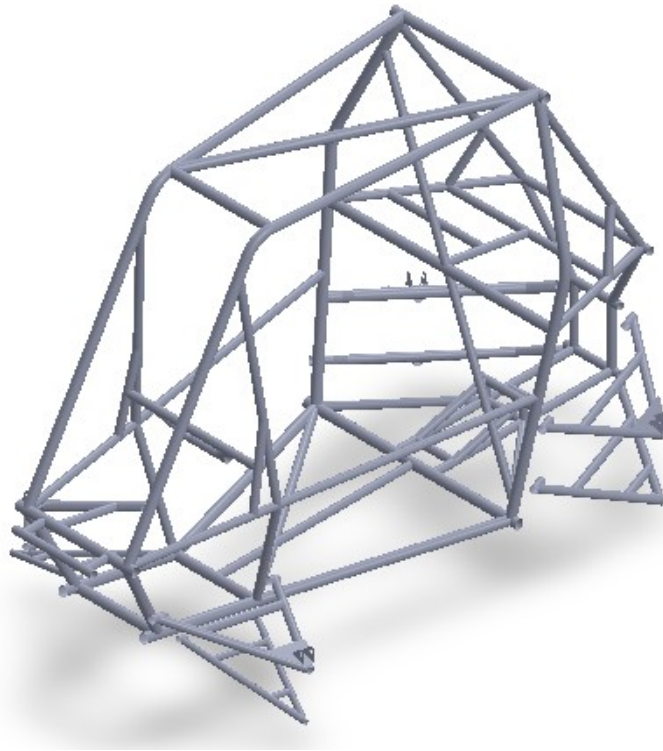
3.2 Estudos modais

3.2.1 Tratamento da geometria

A princípio, com a intenção de representar o modelo estudado experimentalmente nas simulações realizadas, foram utilizadas as geometrias da gaiola e das bandejas de suspensão. As bandejas foram posicionadas no espaço (em torno do chassi), considerando os parâmetros de

suspensão e, posteriormente, foram conectadas à geometria da gaiola diretamente no ambiente de simulação, por meio de restrições que definem o comportamento da junta de rotação entre os componentes. A Figura 7 ilustra as bandejas posicionadas na gaiola com o *software Solidworks*.

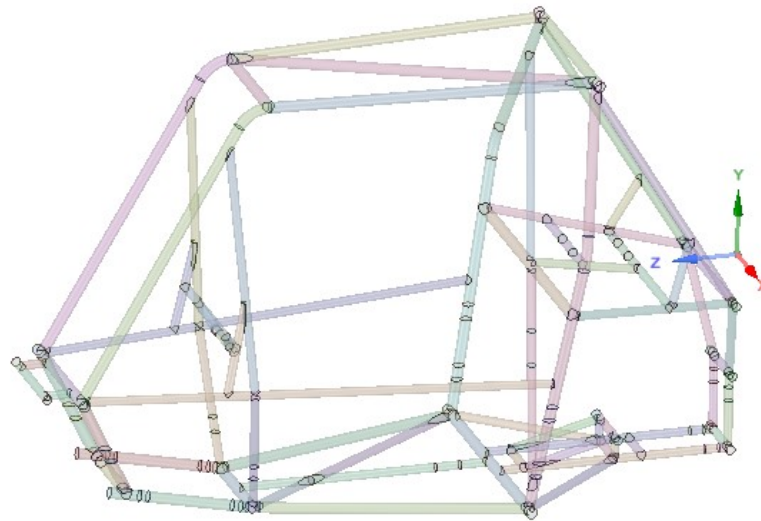
Figura 7 – CAD da gaiola e das bandejas



Fonte: Elaborado pela própria autora (2025)

A geometria da gaiola foi tratada utilizando o *software Solidworks* e o *Space Claim* (*software* de CAD do *Ansys*). Primeiramente, no espaço de CAD do *Solidworks* foi realizado um *offset* na superfície externa do chassi, de modo que a estrutura tubular ficasse como casca. O mesmo procedimento foi adotado nas bandejas, que também são estruturas tubulares. Posteriormente, as estruturas sólidas foram removidas da geometria. Essa simplificação foi realizada para que a malha da simulação fosse feita com elementos 2D, de casca, mais adequados para esse tipo de geometria, e para minimizar a demanda computacional quando comparada a elementos tridimensionais. A Figura 8 apresenta a gaiola pós tratamento, em casca, para receber a malha do tipo 2D.

Figura 8 – CAD da gaiola em casca



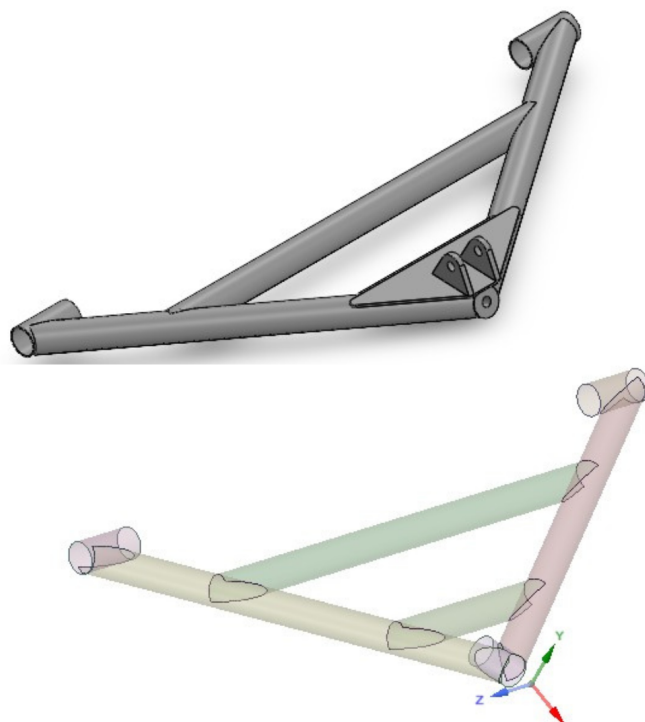
Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Os elementos do tipo 1D também seriam adequados para o estudo, visto que esse tipo de elemento é indicado para geometrias esbeltas, como tubos, e conseguem representar resultados de flexão e torção. Entretanto, os elementos de viga não calculam efeitos locais de tensão nas geometrias pelos métodos aqui utilizados, logo, como na realização da análise espectral um dos objetivos é verificar os resultados de tensão nos tubos de estrutura, conclui-se que os elementos de casca são mais indicados para o presente trabalho. Assim, as geometrias foram exportadas em formato *STEP* para que fosse possível utilizar as geometrias no *Ansys*.

Após a importação das estruturas no *Space Claim*, as arestas duplicadas foram removidas e os detalhes irrelevantes para a simulação também foram deletados. Além disso, foi utilizado o comando *share topology*, topologia compartilhada, para garantir que a união entre os tubos seja contínua, e com isso, a malha seja unificada para a geometria da gaiola e entre cada bandeja. Esse recurso foi adotado para minimizar os contatos entre os tubos e reduzir a demanda computacional da simulação.

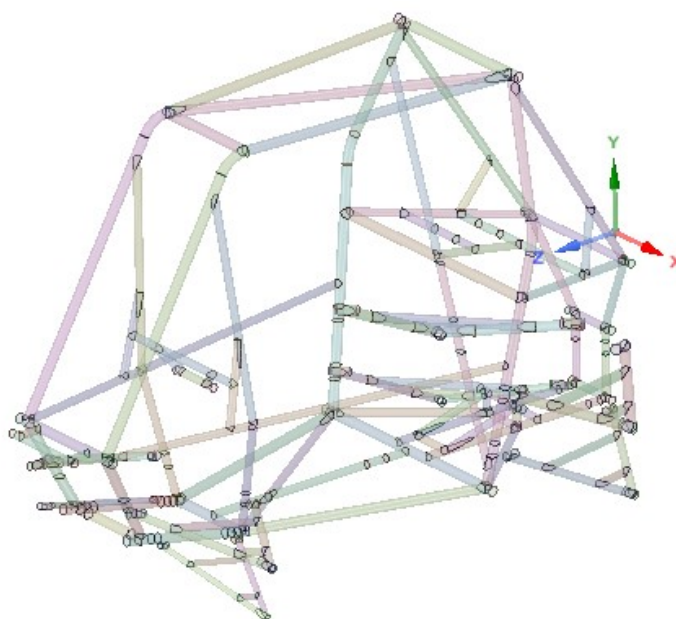
A Figura 9 representa a geometria de uma das bandejas, dianteira direita superior, antes e depois do tratamento do CAD, e a Figura 10 representa a geometria da gaiola e das bandejas, pós-tratamento do modelo.

Figura 9 – Bandeja traseira esquerda superior, antes e depois do tratamento do CAD



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Figura 10 – Montagem gaiola e bandejas, pós tratamento de CAD



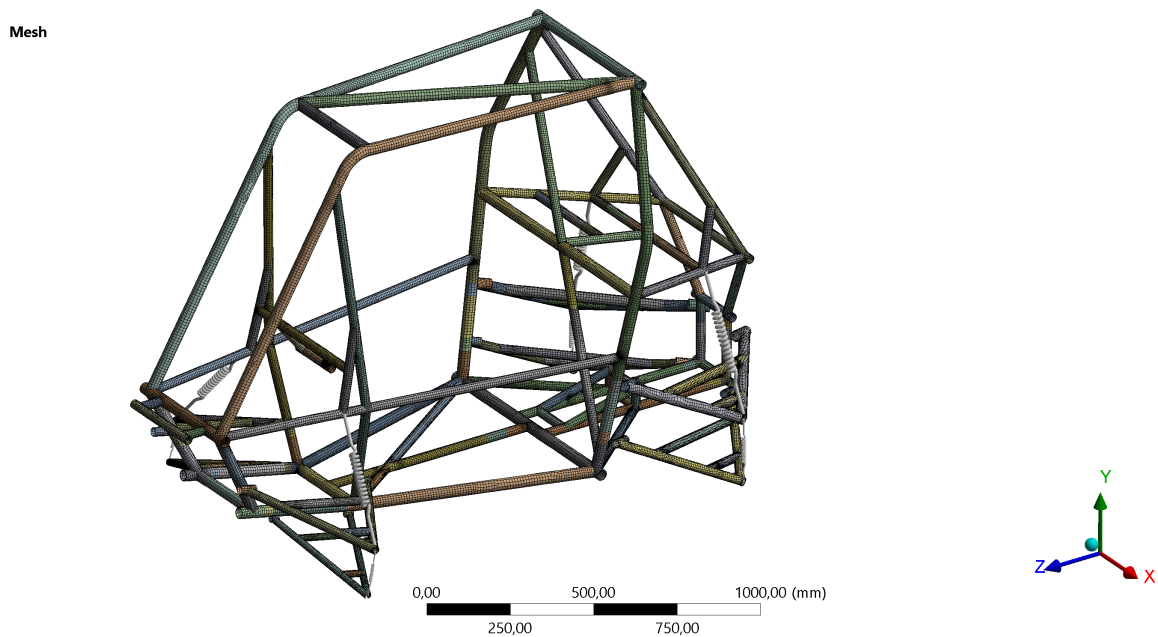
Fonte: Elaborado pela autora (2025)

3.2.2 Análise modal

A análise modal do chassi, além de extrair parâmetros primordiais para análise da seguridade da estrutura, como frequências naturais e modos de vibrar, é utilizada como base para as demais simulações desenvolvidas. Dessa maneira, é imprescindível que a simulação seja representativa da realidade, para minimizar os erros e garantir a confiabilidade do modelo.

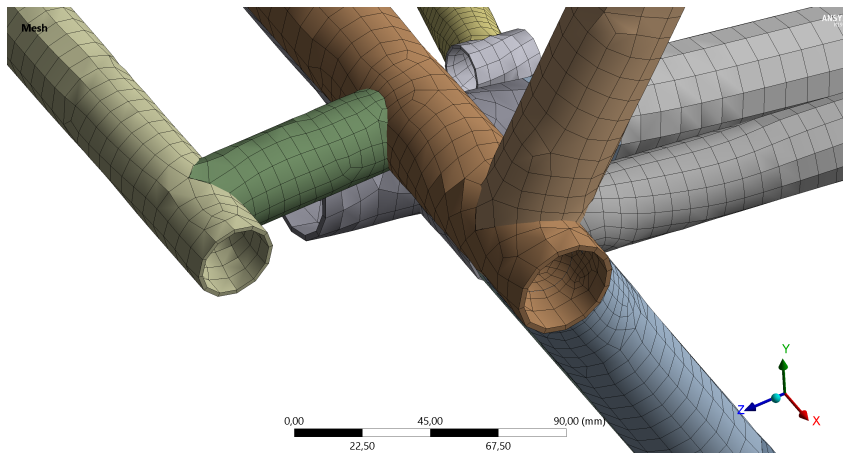
Dado o tratamento do CAD, no ambiente *Mechanical* do *Ansys*, o material, espessura e sentido da espessura do tubo foram especificados conforme indicados nas Tabelas 2 e 3. A malha foi gerada utilizando predominantemente elementos quadriláteros de segunda ordem (elementos quadráticos), com tamanho máximo dos elementos de 12 mm. A qualidade da malha gerada foi analisada por meio da metodologia *skewness* e pelo método jacobiano. As Figuras 11 e 12 exibem a malha das geometrias.

Figura 11 – Malha do modelo geral



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

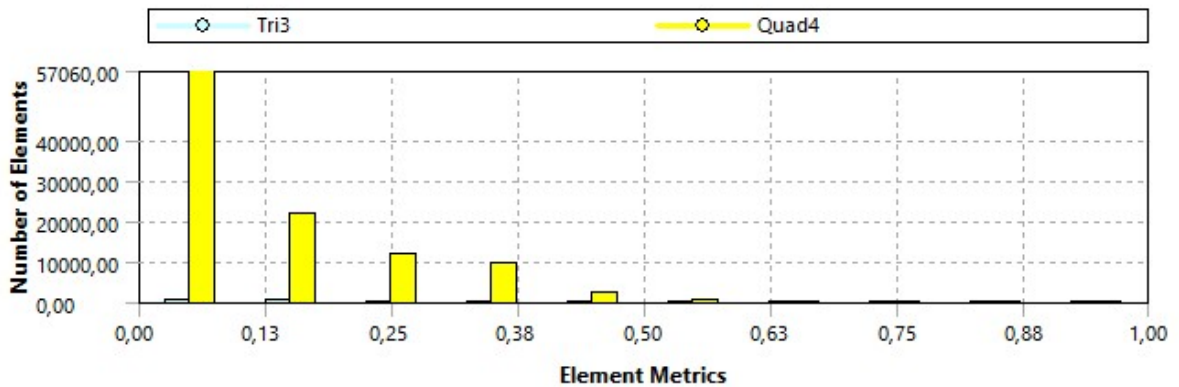
Figura 12 – Malha localizada parte frontal do chassi



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

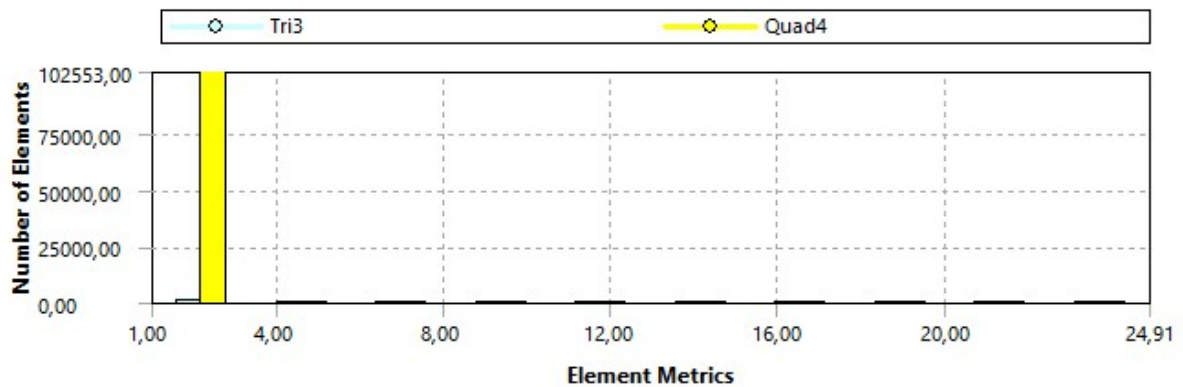
Assim, é possível observar que não foi utilizado contato entre os tubos da gaiola, pois o tratamento de CAD realizado utilizando o *share topology* garante que a malha seja contínua entre os componentes. Logo, reduz a demanda computacional da simulação, com a inexistência de contatos do tipo *bonded*. As Figuras 13 e 14 indicam a qualidade da malha utilizando o método *skewness* e Jacobiano, respectivamente.

Figura 13 – Qualidade de malha pelo método *Skewness*



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Figura 14 – Qualidade de malha pelo método Jacobiano

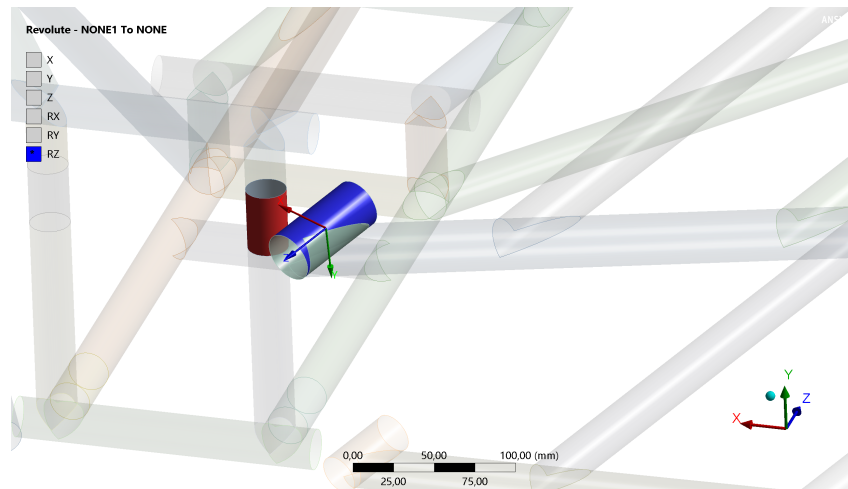


Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Desse modo, é possível observar que a qualidade da malha é adequada, pois possui uma média da deformação dos elementos de 0,12543 pelo método *skewness*, que é uma métrica que avalia o desvio da forma de um elemento em relação à sua geometria ideal (para elementos do tipo 2D, verifica-se o ângulo interno dos elementos; quanto mais próximo de 1, mais ideal o elemento é). Já pelo método Jacobiano, quanto mais próximo de 1 se encontra o Jacobiano de um elemento, maior a qualidade do elemento. O jacobiano está associado à transformação entre o sistema de coordenadas naturais do elemento e o sistema de coordenadas físicas do modelo. Assim, pela metodologia Jacobiana, temos que a média dos elementos é de 1,2528. É importante ressaltar que os elementos que não apresentaram alta qualidade estão localizados em pontos irrelevantes das bandejas para este trabalho, os quais não afetam diretamente os resultados adquiridos.

As bandejas foram conectadas à gaiola por meio de uma junta de rotação, aplicada nos 16 olhais das bandejas (dois olhais em cada bandeja), de modo que a rotação da bandeja ocorre em relação ao chassi em torno do eixo de cada um dos olhais. Assim, o único grau de liberdade entre a bandeja e a gaiola é a rotação em torno do próprio eixo da bucha da bandeja, como indicado na Figura 15.

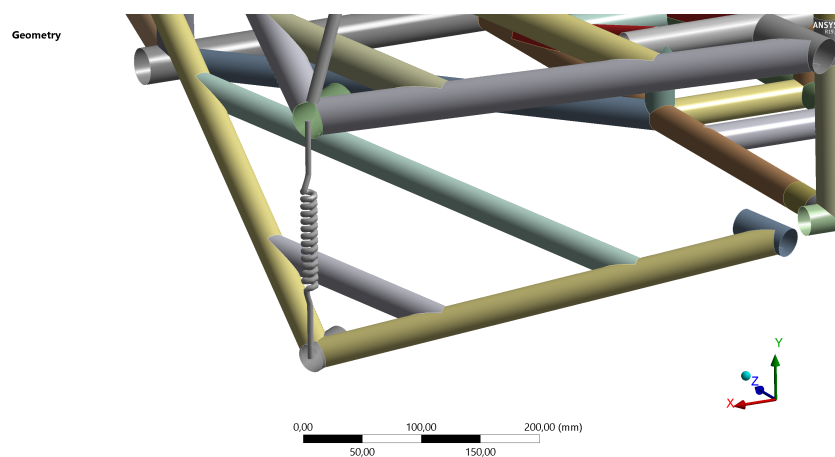
Figura 15 – Junta de revolução entre a bandeja e a gaiola



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

A conexão entre as extremidades das bandejas superiores e inferiores foi realizada por meio de um elemento de mola, com rigidez 50.000 N/mm para representar a alta rigidez de um componente de geometria complexa, que levaria a uma malha muito refinada, sem contribuir significativamente para os objetivos deste estudo. Nas extremidades de cada suporte em ‘A’ foi criado um *remote point* para facilitar a conexão entre as geometrias e a rigidez adotada para o elemento de mola foi determinada de modo a garantir que a deformação na mola seja ínfima, quando comparada à deformação dos demais componentes. A Figura 16 representa o tipo de ligação realizada entre os 4 pares de bandejas.

Figura 16 – Ligação entre pares de bandejas



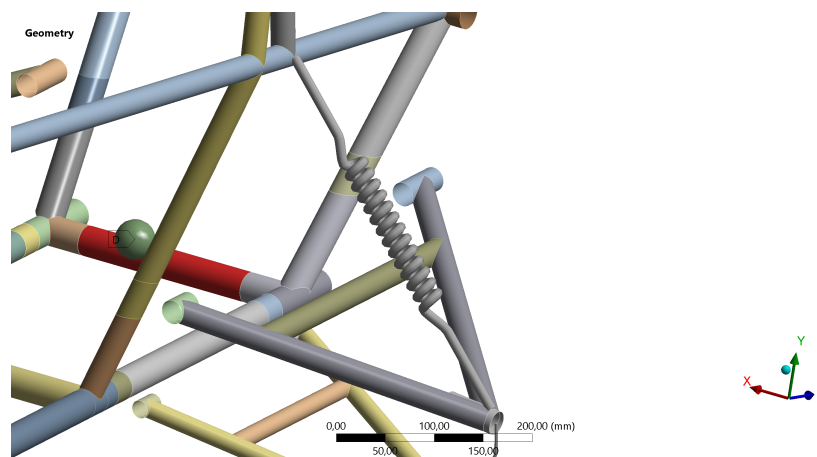
Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Ao adotar o elemento de mola, entre as extremidades da mola e as extremidades da bandeja, os corpos possuem apenas um grau de liberdade restringido, a translação na direção da mola; entretanto, na realidade, a bandeja é conectada à manga de roda por meio de um

ball joint, uma junta esférica, que impede as translações nos 3 eixos. Dessa maneira, essas simplificações realizadas no modelo computacional são hipóteses simplificadoras que afetam a forma de como o modelo se comporta, principalmente a suspensão, mas são necessárias para reduzir a complexidade do modelo.

Ademais, também foram adicionados 4 elementos de mola entre a gaiola e as bandejas, que são de fato as molas presentes no veículo de *off road*, as molas da dianteira possuem 12.000 N/m de constante de rigidez (k), e as traseiras possuem 16.000 N/m como constante. Os valores foram estimados experimentalmente por membros da equipe Baja UFSCar. A Figura 17 apresenta a mola do veículo no modelo desenvolvido.

Figura 17 – Mola do veículo Baja



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Além disso, para garantir que o modelo seja representativo, foram adicionados pontos de massa concentrados para os seguintes corpos: motor, piloto, conjunto da direção do veículo e para o tanque de combustível. Os pontos foram posicionados de maneira aproximada com o centro de massa de cada componente e conjunto. A Tabela 4 indica a massa adicionada para representar cada componente.

Tabela 4 – Massa por componente

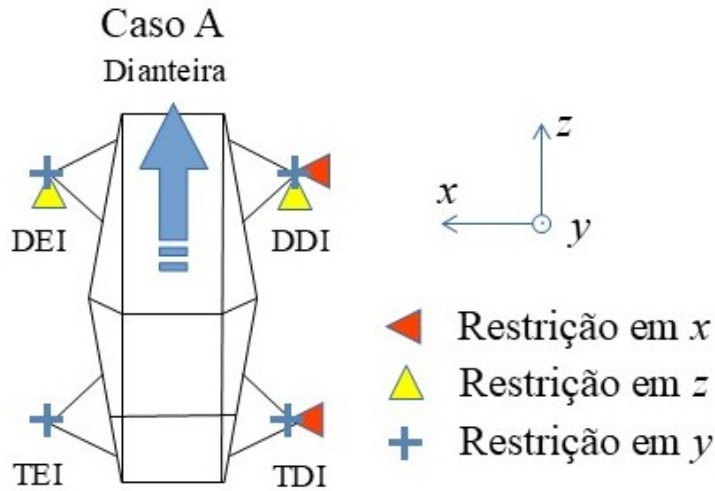
Componente	Massa [kg]
Piloto	70
Motor	50
Tanque	10
Direção	5

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Por fim, foram criados 4 *remotes displacement*, um em cada extremidade das bandejas inferiores. Na bandeja dianteira direita inferior, os três graus de liberdade de translação foram restritos. Na bandeja dianteira esquerda, foram restritas as translações em Y e em Z. Já na bandeja traseira esquerda, foram restritas as translações em Y e X, e na bandeja traseira direita, foi restrita

apenas a translação em Y. Na Figura 18, apresenta-se um esquemático da vista superior da gaiola e as restrições aplicadas em cada roda.

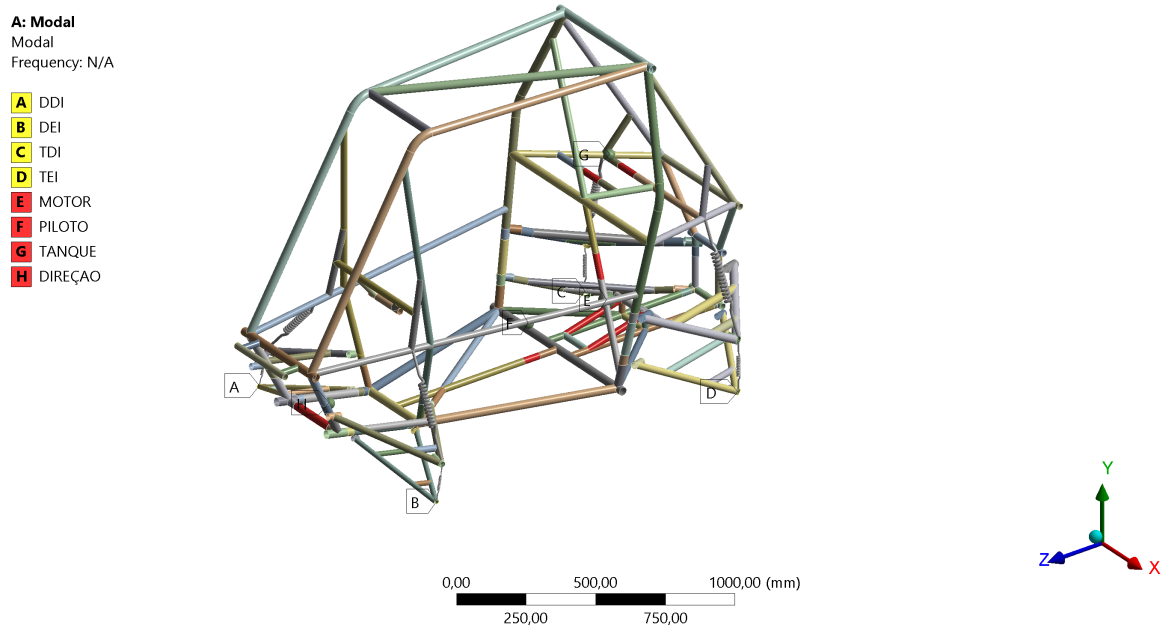
Figura 18 – Esquemático da vista superior do veículo e as condições de contorno: Caso A



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

As restrições aplicadas consideram que as quatro rodas estão em contato com o solo constantemente. A Figura 19 indica as condições de contorno aplicadas ao modelo no *Ansys*.

Figura 19 – Condições de contorno do modelo



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Assim, com as condições de contorno aplicadas ao modelo, foi possível executar a simulação e extrair as frequências naturais e seus respectivos modos de vibração. As condições

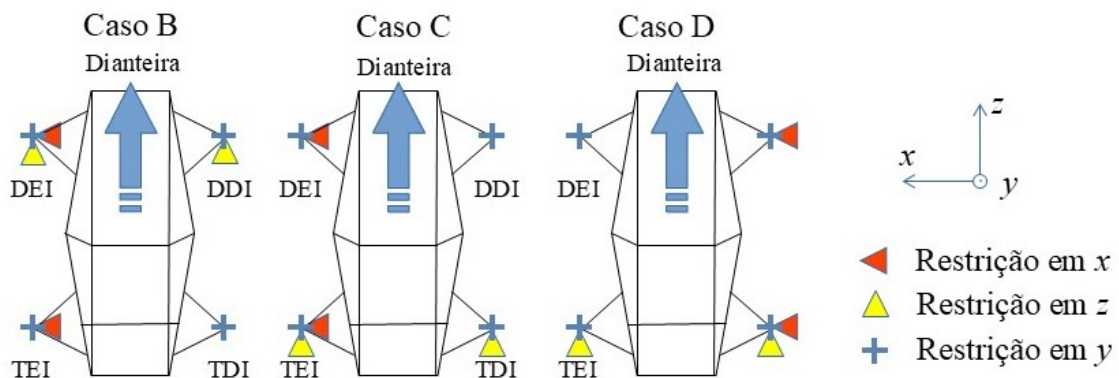
de contorno aplicadas, os *remote displacements*, foram rotacionados em sentido anti horário para obter as forças de reação na análise espectral nos três eixos para todas as rodas como apresentado na Figura 20. Essas condições foram determinadas de modo a permitir o movimento de trabalho da suspensão.

Sendo dianteira direita inferior DDI, dianteira direita esquerda DEI, traseira direita inferior TDI e a traseira esquerda inferior TEI.

As hipóteses simplificadoras aplicadas foram reunidas para facilitar a compreensão do modelo desenvolvido, sendo elas:

- A peça que conecta as bandejas inferiores às bandejas superiores possui rigidez significativamente superior aos corpos adicionados no modelo (50.000 N);
- Entre as extremidades das molas (50.000 N/m de rigidez) e as extremidades das bandejas há 6 graus de liberdade;
- As quatro rodas estão constantemente em contato com o solo;
- A roda com as três translações restringidas trata-se do caso crítico para um veículo baixa.

Figura 20 – Esquemático da vista superior do veículo e as condições de contorno: Casos B, C e D



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

3.2.3 Teste de Vibrações

O teste de vibrações foi realizado com o carro completo, em contato com o solo e com o piloto no interior do veículo. Para realizar a aquisição de dados, foram utilizados 4 acelerômetros do tipo PCB Piezotronics modelo 333B30, com uma base NI CompactDAQ (cDAQ-9174) e módulo NI 9234. Esses acelerômetros foram posicionados em localidades estratégicas, com base em uma análise modal preliminar da gaiola. Na Figura 21 mostra-se o acelerômetro utilizado e na Figura 22 apresenta-se a base de captação de dados.

Figura 21 – Acelerômetro PCB Piezotronics modelo 333B30



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Figura 22 – Sistema de aquisição de dados modular NI CompactDAQ (cDAQ-9174) com módulos NI 9201 e NI 9234



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

As principais especificações técnicas do acelerômetro PC Piezotronics modelo 333B30 são apresentadas a seguir:

- Tipo de sensor: piezoelétrico (IEPE);
- Sensibilidade: 100 mV/g;
- Faixa de medição: ± 50 g;
- Faixa de frequência: 0,5 a 10000 Hz;

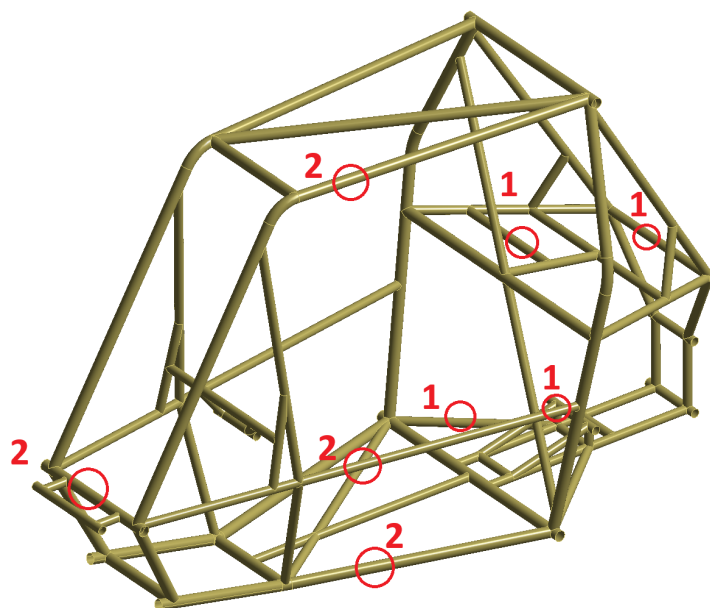
- Frequência natural: ~ 25 kHz;
- Tensão de excitação: 18 a 30 V (IEPE).

O teste foi dividido em duas etapas; na primeira, os quatro acelerômetros foram posicionados e a aquisição de dados foi realizada com quatro tipos de entradas diferentes; posteriormente, os acelerômetros foram reposicionados e o teste foi realizado novamente, replicando de maneira aproximada as mesmas quatro entradas. Os acelerômetros foram fixados no chassi com cera de abelha, prática comum para a aquisição de dados, pois a cera solidificada possui rigidez suficiente para não influenciar significativamente nos resultados, é de fácil aplicação e remoção, e é versátil e não exige preparação da estrutura como lixamento e polimento.

Dessa maneira, como o teste foi realizado com o carro completo, o elevado amortecimento presente no conjunto, principalmente do pneu e do próprio amortecedor, dificulta a visualização dos picos de frequência natural. Por esse motivo, para realizar as entradas do teste, não foi utilizado o martelo de impacto, pois esse tipo de excitação geraria um sinal de curta duração e baixa energia. Assim, foram utilizados como entrada um martelo de metal, um martelo de borracha, uma entrada frontal no sentido do solo e uma entrada lateral (força aplicada manualmente).

A localização aproximada dos acelerômetros foi apresentada na Figura 23. Os pontos indicados com '1' representam a primeira etapa do teste. Já os pontos indicados por '2' representam a segunda etapa, após o reposicionamento dos quatro acelerômetros.

Figura 23 – Posição dos acelerômetros na gaiola - Teste de vibração



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

A não utilização do martelo de impacto impossibilita a identificação matemática da energia da excitação de entrada. Logo, como curva de saída dos picos de frequência natural, não é possível obter um diagrama de Bode, e sim um espectro de saída, que permite observar os picos qualitativamente.

Dessa maneira, para as quatro entradas realizadas, em duas disposições diferentes dos acelerômetros, foi possível obter a aceleração ao longo do tempo em oito gráficos diferentes. Esses dados foram transformados para o espectro de frequência, para melhor visualização e identificação dos picos de frequências naturais. A princípio, os dados foram tratados no *MATLAB* e foi utilizado o método *Welch*, que dividiu o sinal em blocos do mesmo tamanho (N); em cada bloco, foi aplicada uma janela, o espectro de frequência foi calculado para cada bloco e, por fim, foi realizada a média entre os blocos.

O método *Welch* permite diminuir os ruídos na aquisição de dados e destaca melhor os picos de ressonância da estrutura. Os blocos foram realizados a cada 2 segundos, com uma frequência de amostragem de 3.200 Hz, ou seja, um total de 6.400 amostras. A resolução de frequência é de 0,5 Hz, considerada adequada para identificar modos estruturais.

3.2.4 Comparação entre o modelo de elementos finitor e o modelo experimental

A partir dos oito gráficos extraídos do teste de vibrações, foi realizada uma média simples entre os sinais correspondentes aos quinze primeiros picos de ressonância; ou seja, calculou-se a média dos valores obtidos no primeiro pico, em seguida, no segundo pico, e assim sucessivamente até o décimo pico. Assim, a média de cada pico foi comparada com a frequência natural correspondente extraída na análise modal.

Esse processo foi realizado para verificar a confiabilidade do modelo desenvolvido, pois foi utilizado como base para o aprimoramento do modelo. Também foi possível calcular a margem de divergência entre as frequências.

3.3 Análise espectral

A análise espectral foi realizada pelo método de superposição modal. Por meio da análise modal, foram determinadas as frequências naturais e as formas modais, indicadas pela Equação 40. O método da superposição modal consiste em projetar a resposta da estrutura no espaço modal.

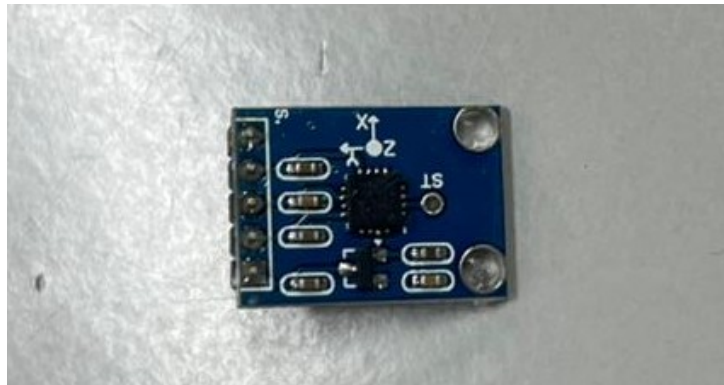
3.3.1 Aquisição de dados

A fim de obter as entradas de aceleração na roda do veículo durante um determinado percurso, foi realizada uma instrumentação na roda dianteira direita do veículo. Um circuito foi montado a fim de replicar os principais obstáculos que um veículo Baja é capaz de superar, como

valetas, troncos de árvores, valetas alternadas (conhecidas como xadrez) e "zigue-zague" que colocam à prova a manobrabilidade do veículo. O piloto realizou o circuito durante cinco minutos consecutivos e a aceleração da roda foi captada durante esse tempo.

O acelerômetro analógico utilizado para a aquisição de dados foi exposto na Figura 24. Ademais, para auxiliar na medição, foi utilizado um Arduino para converter o sinal analógico em digital. O Arduino utilizado é apresentado na Figura 25.

Figura 24 – Acelerômetro analógico ADXL335



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Figura 25 – Arduino uno com microcontrolador ATmega328P



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Destacam-se aqui as principais características do acelerômetro ADXL335:

- Faixa de medição: $\pm 3g$ em cada eixo;

- Sensibilidade típica: 300 mV/g;
- Tensão de alimentação: 1,8 a 3,6 V.

3.3.2 Tratamento dos dados

Os sinais adquiridos de aceleração por tempo foram tratados com auxílio do *MATLAB*. Dada a frequência de amostragem de 1.000 Hz, foi realizada a leitura e pré-processamento dos dados da roda e foi descartado o primeiro ponto obtido. Além disso, o nível do *Direct Current* (DC), ou *off set* foi removido do sinal, ou seja, o componente de gravidade foi removido. Posteriormente, foi calculada a PSD utilizando o método *Welch*, o mesmo utilizado no tratamento dos dados do teste de vibração.

Foi utilizada uma janela de *Hann* com 12.000 pontos, que permite suavizar as extremidades do segmento e minimiza os efeitos do *leakage* espectral, ou seja, minimiza as descontinuidades. Entretanto, essa técnica reduz a resolução em frequência. Assim, como a frequência de amostragem é igual a 1.000 Hz, os 12.000 pontos correspondem a 12 segundos de sinal por segmento. Ademais, foi utilizado um *overlap* de 6.000 pontos, ou seja, as janelas não começam no zero, e sim, 6.000 pontos à frente, uma sobreposição de 50%. A sobreposição garante que uma mesma amostra seja utilizada em mais de uma janela, e garante que o ruído estatístico seja reduzido, aumentando a confiabilidade da PSD. A resolução em frequência é de 0,0833 Hz. Posteriormente, os resultados da PSD foram plotados no domínio da frequência.

3.3.3 Análise espectral: PSD

Assim, por meio do método da superposição modal, foi realizada uma análise espectral no chassi. Ao utilizar as condições de contorno e os resultados da análise modal, foi inserida uma curva PSD para as quatro rodas do veículo, dada a aquisição e o tratamento dos dados coletados.

Foi adotada a simplificação em que as acelerações às quais a roda dianteira direita foi submetida são as mesmas que as das demais rodas. Na realidade, as entradas de aceleração do solo variam em cada roda, pois o terreno é irregular e as suspensões são independentes nas quatro rodas. A curva obtida PSD foi linearizada no *MATLAB*. Foi realizado um envelopamento superior para suavizar a curva, utilizando *bins*, que são faixas de frequências e dentro de cada faixa, é selecionado o maior valor.

A curva suavizada foi utilizada como *input* na análise espectral. Logo, por meio da simulação, foi possível obter forças de reações nas quatro rodas, deslocamentos e tensões na estrutura.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Estudos modais

4.1.1 Análise modal

Segundo Ewins (2000), para análises harmônicas e experimentais, o conjunto modal (simulação) deve ser entre 1,5 a 2 vezes a frequência máxima excitada para garantir a fidelidade. Entretanto, essa condição geraria uma demanda computacional alta. Desse modo, foi analisado a massa modal efetiva para verificar quantos modos de vibração eram necessários para uma análise fidedigna.

A partir da análise modal, foi possível extrair as 15 primeiras frequências naturais do modelo multicorpos. Os valores das frequências foram apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 – Frequências naturais adquiridas na análise modal

Modo	Frequência [Hz]	Aspecto Predominante do Modo
1	1,67	Movimento da suspensão
2	2,31	Movimento da suspensão
3	7,57	Movimento da suspensão
4	21,25	Flexão dianteira/habitáculo
5	31,58	Flexo torção geral
6	36,53	Flexão na região do motor
7	39,26	Flexão no tubo do assento do piloto
8	41,21	Torção geral
9	45,28	Torção dianteira superior
10	52,40	Flexão traseira (região do tanque e do motor)
11	54,11	Flexo torção geral
12	67,57	Torção traseira superior
13	75,98	Flexo torção geral
14	81,57	Torção dianteira
15	92,40	Torção lateral

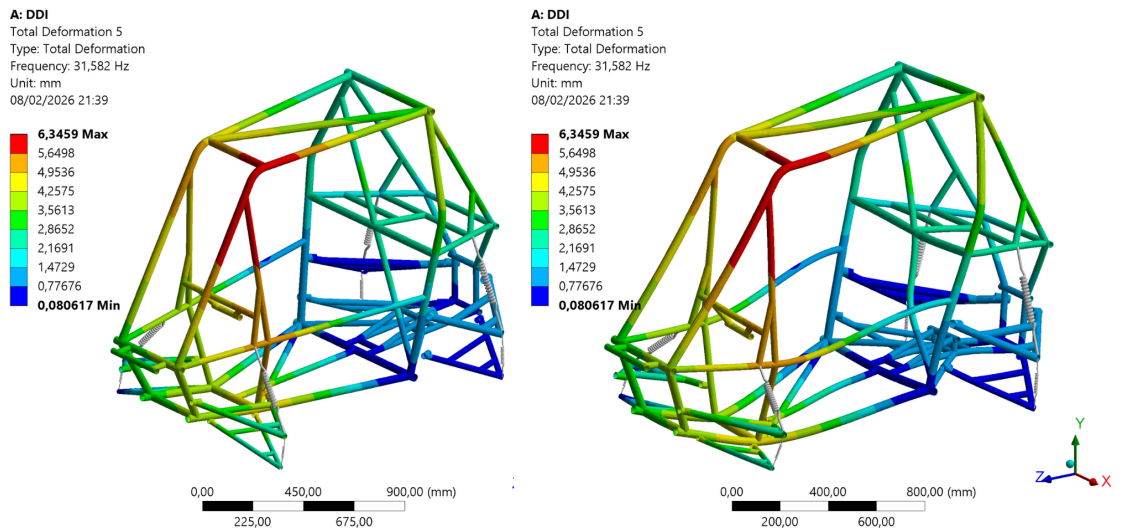
Fonte: Elaborado pela autora (2025)

A primeira, segunda e terceira frequências naturais estão relacionadas ao movimento de trabalho em suspensão do veículo e tratam-se de frequências mais baixas. A partir do quarto modo de vibração, tratam-se de frequências relacionadas ao chassi. A terceira coluna descreve o tipo de movimento predominante do modelo em cada modo de vibração e a região da estrutura mais afetada. Esse tipo de verificação é importante para analisar flexões e, principalmente, torções em tubos estruturais que possuem quantidade significativa de solda; assim, garantir um dimensionamento de solda adequado e evitar o cisalhamento.

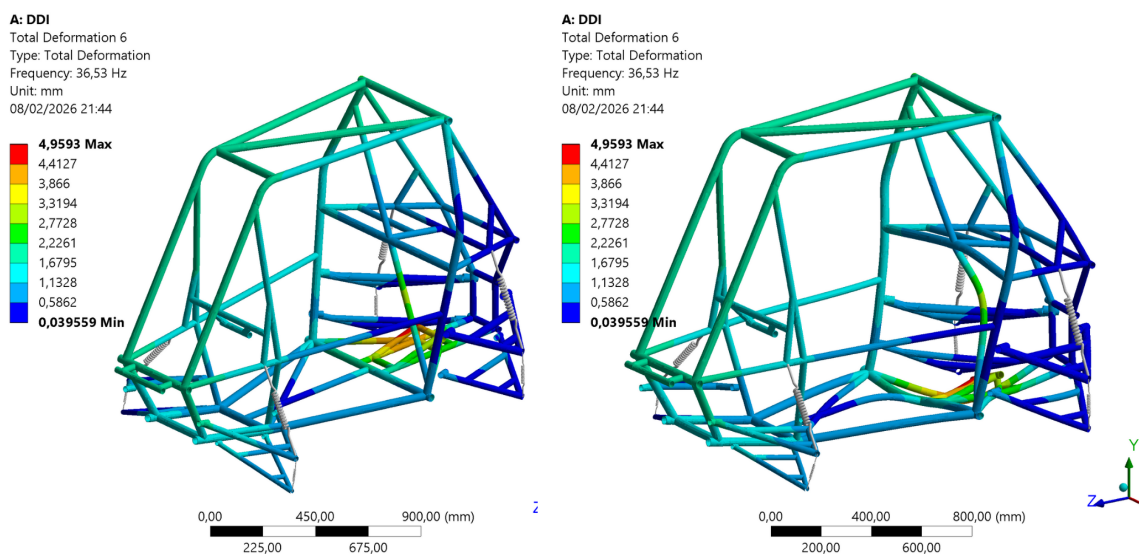
As frequências relacionadas do quinto ao décimo primeiro modo de vibração estão dentro do regime de trabalho do motor, que varia de 1.800 rpm (correspondente a 30 Hz) a 3.800 rpm

(63,3 Hz). a faixa de trabalho do motor não é fixa e pode variar de acordo com o *setup* da suspensão e do veículo. A Figura 26 apresenta os modos de vibração relacionados à quinta e a sexta frequência natural, para ilustrar os modos mais baixos dentro da faixa de trabalho do motor.

Figura 26 – Modos de vibração referentes à 5ª e 6ª frequências naturais



(a) 5ª frequência natural (31,582 Hz)



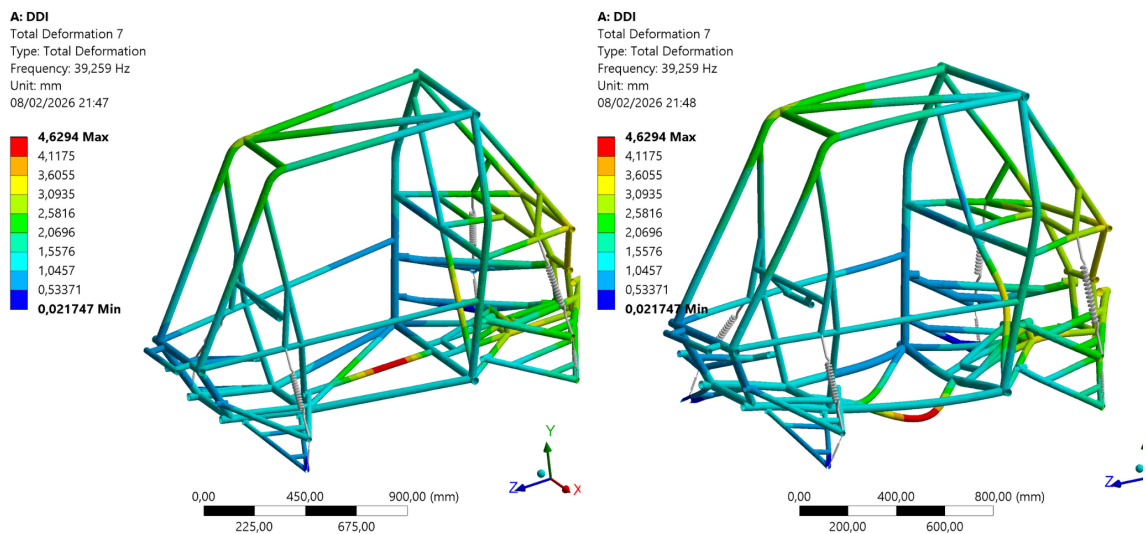
(b) 6ª frequência natural (36,530 Hz)

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

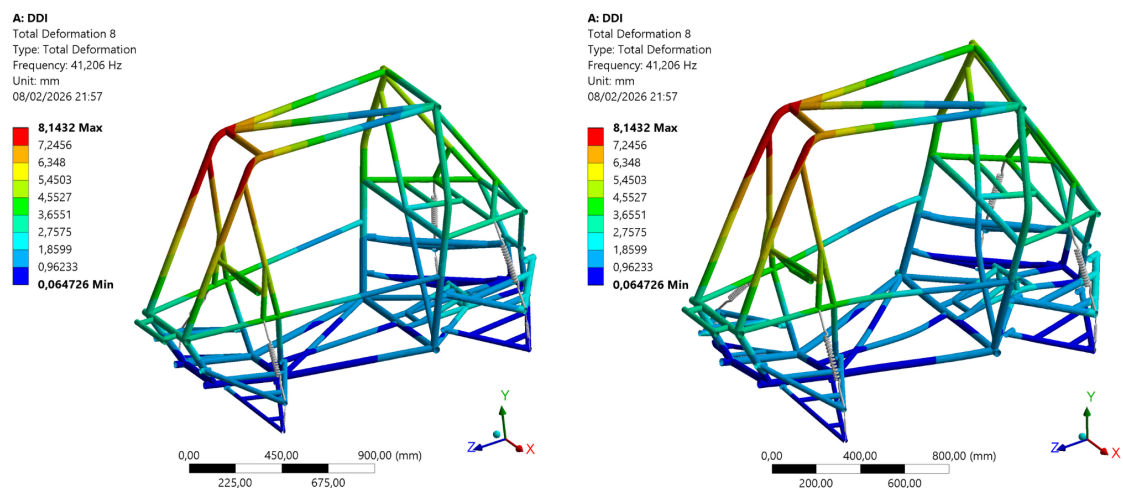
As quintas e sextas frequências naturais do veículo são importantes de serem analisadas, pois estão próximas da frequência de rotação do motor em marcha lenta (quando o motor está ligado, porém o veículo está parado), que é aproximadamente 30 Hz (1800 rpm). No passado, a equipe já presenciou vibrações excessivas nessas condições, indicando que o sistema pode estar suscetível a fenômenos de ressonância nessa faixa de operação.

Além disso, o sexto modo de vibração corresponde a uma movimentação de flexão localizada na região do motor, como indicado na Tabela 5. Quando uma frequência excitadora proveniente do motor se aproxima de um modo com participação significativa nessa área, há maior transmissão de energia vibratória para os suportes e para o chassi, podendo resultar em ruído, desconforto ao condutor e até fadiga estrutural dos componentes montados nessa região. A Figura 27 apresenta os modos de vibração correspondentes à sétima e à oitava frequências naturais.

Figura 27 – Modos de vibração referentes à 7ª e 8ª frequências naturais



(a) 7ª frequência natural (39,259 Hz)



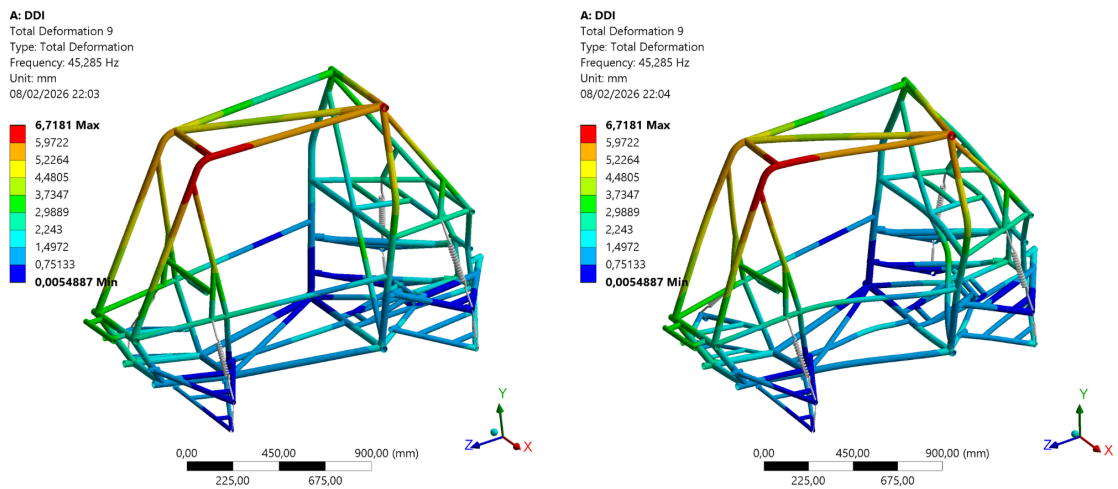
(b) 8ª frequência natural (41,206 Hz)

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

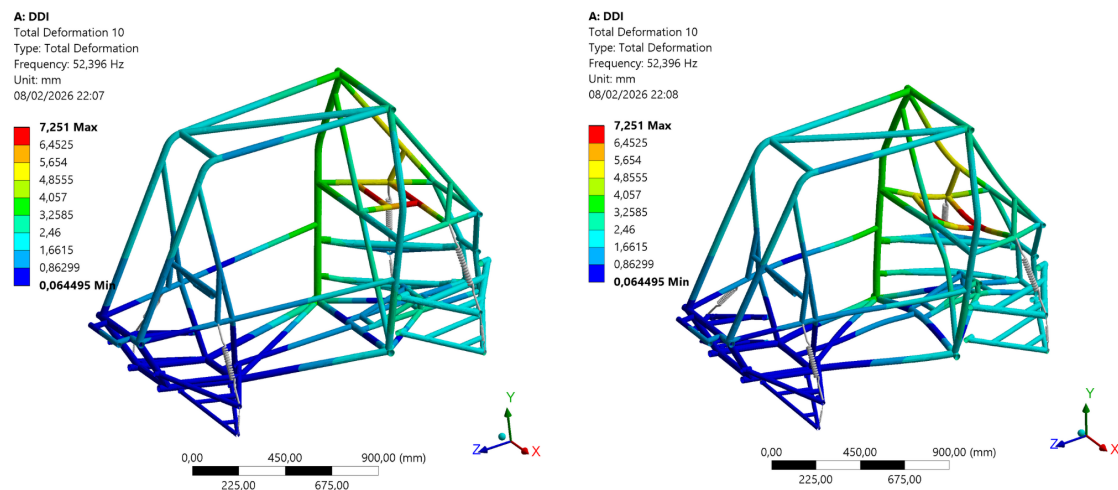
A sétima frequência natural encontrada apresenta uma movimentação de flexão no tubo de travamento inferior, local no qual o assento do piloto é fixado. A Figura 28 apresenta os

modos de vibração do modelo referentes à nona e à décima frequências naturais.

Figura 28 – Modos de vibração referentes à 9ª e 10ª frequências naturais



(a) 9ª frequência natural (45,285 Hz)

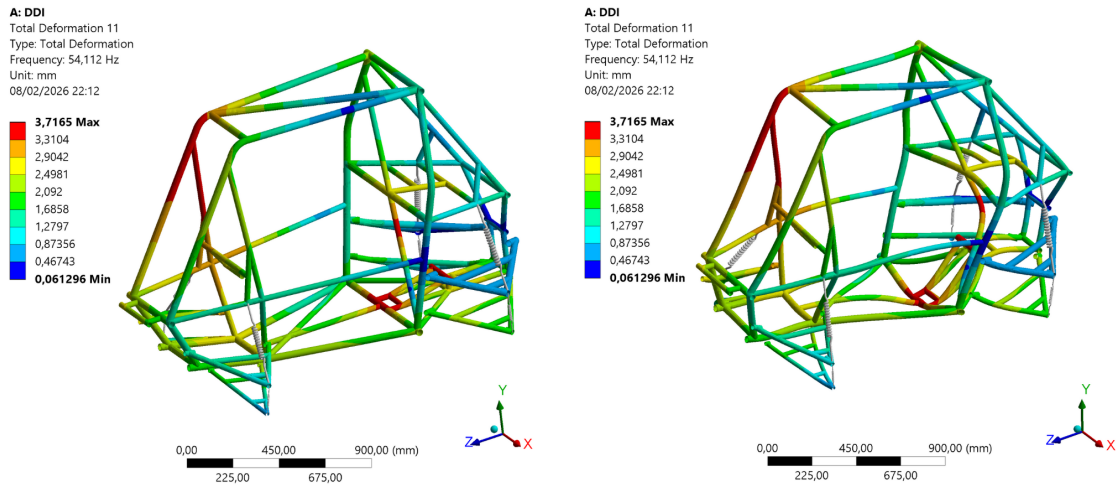


(b) 10ª frequência natural (52,396 Hz)

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Por fim, a Figura 29 apresenta o modo de vibração referente à décima primeira frequência natural (54,112 Hz). Essa frequência trata-se da última frequência natural adquirida na simulação que está dentro do regime de trabalho do motor.

Figura 29 – Modo de vibração referente à 11ª frequência natural (54,112 Hz)

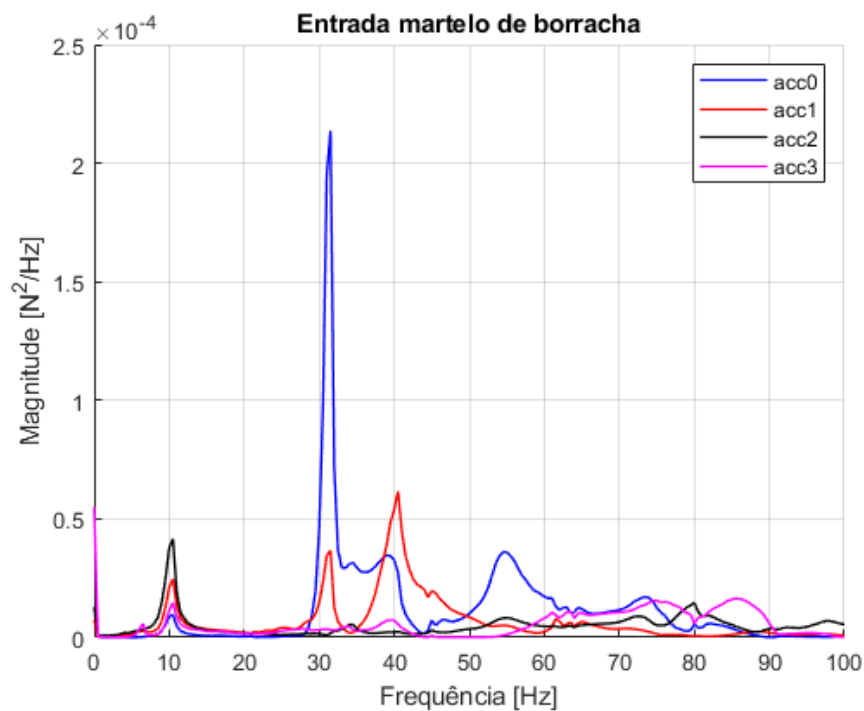


Fonte: Elaborado pela autora (2025)

4.1.2 Teste de Vibrações

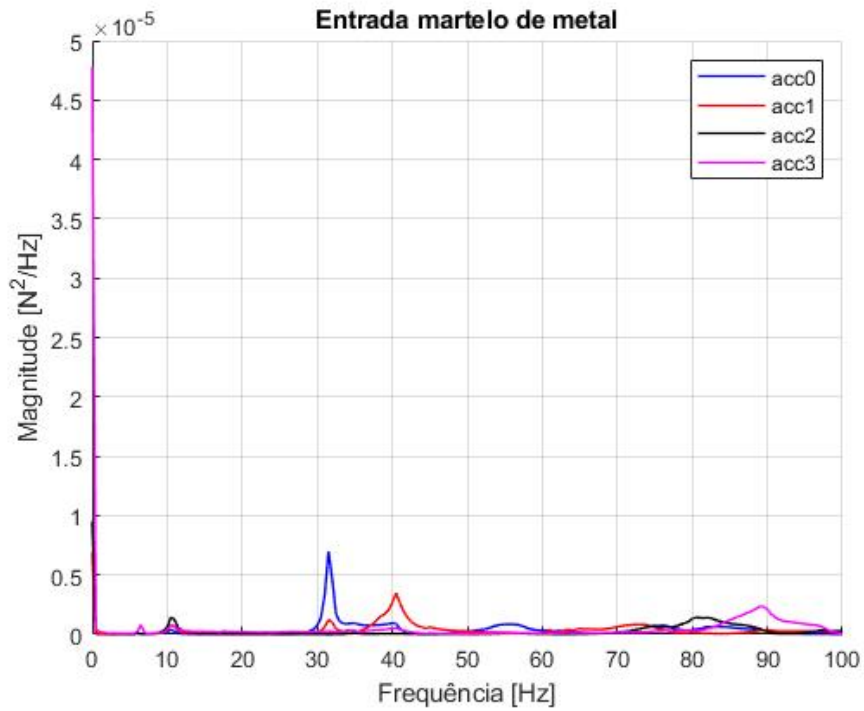
Dado as quatro entradas aplicadas no veículo, em duas rodadas de teste, variando o posicionamento dos acelerômetros nos chassis, foram obtidos oito gráficos de resposta em frequência. Considerando o primeiro *setup* de acelerômetros, as Figuras 30, 31, 32 e 33 indicam a resposta em frequência para as quatro entradas distintas: martelo de metal, martelo de borracha, entrada manual frontal e entrada manual lateral.

Figura 30 – Espectro em frequência com entrada pelo martelo de borracha, configuração 1



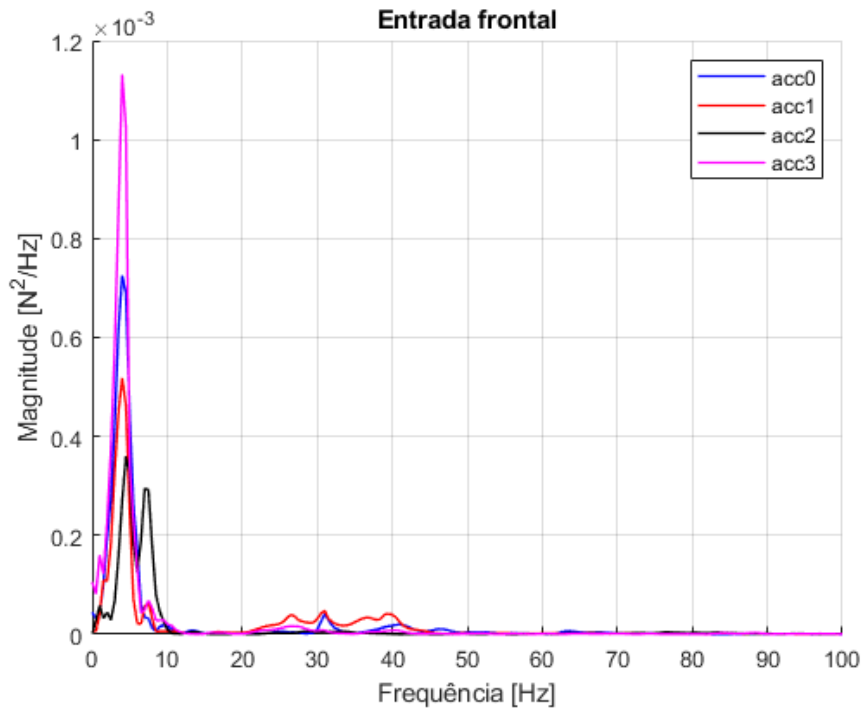
Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Figura 31 – Espectro em frequência com entrada pelo martelo de metal, configuração 1



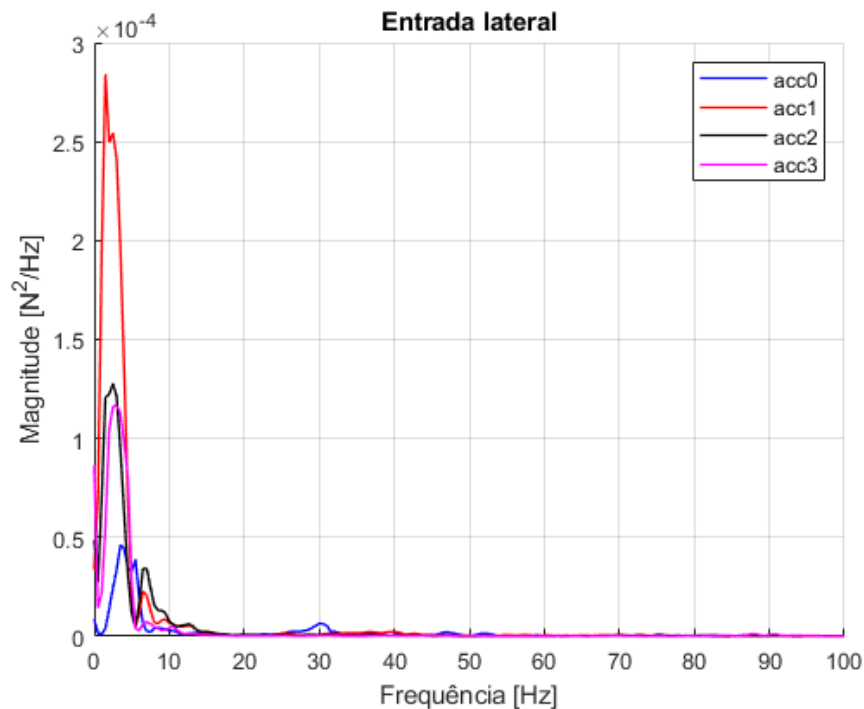
Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Figura 32 – Espectro em frequência com entrada frontal, configuração 1



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Figura 33 – Espectro em frequência com entrada lateral, configuração 1



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

A partir dos gráficos apresentados, é possível perceber que vários “picos” de frequências são difíceis de visualizar; isso ocorre devido ao alto amortecimento do veículo, proveniente dos pneus e do amortecedor, que dissipam a energia. A aquisição dos dados, quando feita somente com a estrutura do chassi, proporciona um gráfico mais limpo e com picos mais evidentes. Entretanto, para o estudo realizado no presente trabalho de análise espectral por meio da superposição modal, é imprescindível a realização do teste de vibração do veículo completo com piloto.

4.1.3 Comparação entre o modelo de elementos finitos e teste experimental

As frequências naturais aquiritadas no teste de vibração (em média, como citado anteriormente) foram comparadas com a análise modal do veículo. A Tabela 6 apresenta os valores em comparação e o desvio entre os dois métodos (a frequência obtida no teste foi utilizada como referência para a comparação) para as quinze primeiras frequências identificadas. A correspondência foi feita por similaridade entre os valores encontrados em ambos os métodos, devido às limitações na quantidade de medidas experimentais.

Tabela 6 – Comparativo entre as frequências naturais obtidas na análise modal e no teste de vibração

Frequência natural	Análise modal [Hz]	Teste de vibração [Hz]	Desvio [%]
1 ^a	1,67	-	-
2 ^a	2,31	4,43	91,77
3 ^a	7,57	8,88	17,30
-	-	14,00	-
4 ^a	21,25	-	-
5 ^a	31,58	31,30	0,89
6 ^a	36,53	39,83	9,04
7 ^a	39,26	39,83	1,45
8 ^a	41,21	40,50	1,72
9 ^a	45,28	-	-
10 ^a	52,40	-	-
11 ^a	54,11	55,00	1,64
12 ^a	67,57	-	-
13 ^a	75,98	-	-
14 ^a	81,57	-	-
15 ^a	92,40	-	-

Fonte: Elaborada pela autora (2025)

A partir da comparação, é possível observar que as frequências naturais mais baixas apresentam uma divergência maior entre o teste e a análise. Essa diferença ocorre porque essas frequências são mais difíceis de serem excitadas pelos métodos convencionais, pois tratam-se de efeitos locais na estrutura relacionados à suspensão do veículo. Dessa forma, como alguns componentes da suspensão não foram contemplados no modelo, como roda, amortecedor, cubo de roda e eixo de roda, isso pode contribuir para a maior discrepância.

Ademais, entre a terceira e a quarta frequência natural da análise modal, temos uma frequência adquirida no teste de vibração que não corresponde a nenhuma frequência da análise modal. Essa discrepância pode ser proveniente de algum componente que não foi considerado no modelo de elementos finitos, como por exemplo, as rodas.

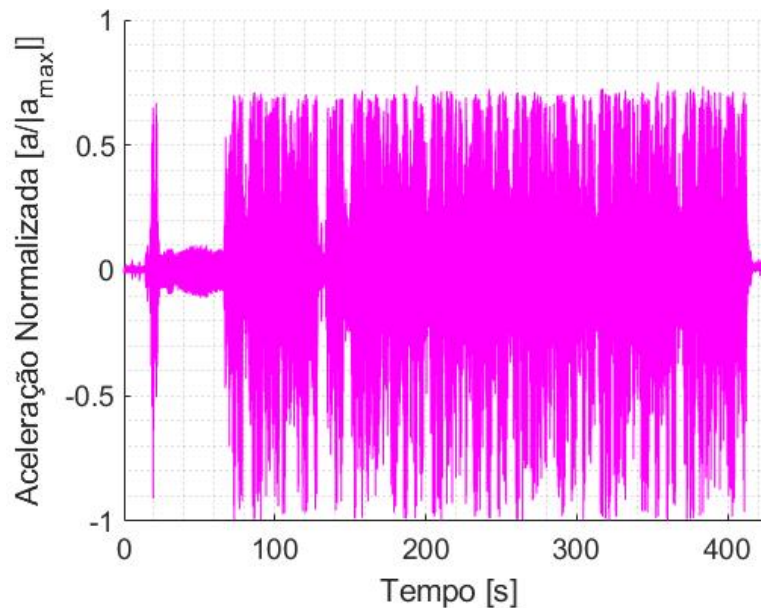
4.2 Análise espectral

A análise espectral foi feita em função de dados aquisitados por acelerômetro posicionado na região de conexão entre a roda e suspensão, em um componente denominado manga dianteira da roda direita.

4.2.1 Aquisição de dados

Os dados normalizados de aceleração por tempo medidos são apresentados na Figura 34.

Figura 34 – Aceleração na roda normalizada



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

É importante ressaltar que o objetivo do teste realizado é captar os dados de aceleração transmitidos para os componentes da suspensão a partir da interação entre roda e solo. Entretanto, os valores medidos tem influência de outros aspectos, como a rotação do motor. Conclui-se que os valores randômicos oriundos do solo são predominantes quando comparados a entrada harmônica do motor.

A partir do comportamento do gráfico é possível visualizar que houve a saturação de vários pontos. Ademais, os valores não apresentam simetria e ultrapassam a sensibilidade do sensor utilizado. Dessa forma, conclui-se que os dados adquiridos não são totalmente confiáveis e realistas devido à limitações do hardware. Durante a realização do teste pode ter ocorrido a desconfiguração do sensor.

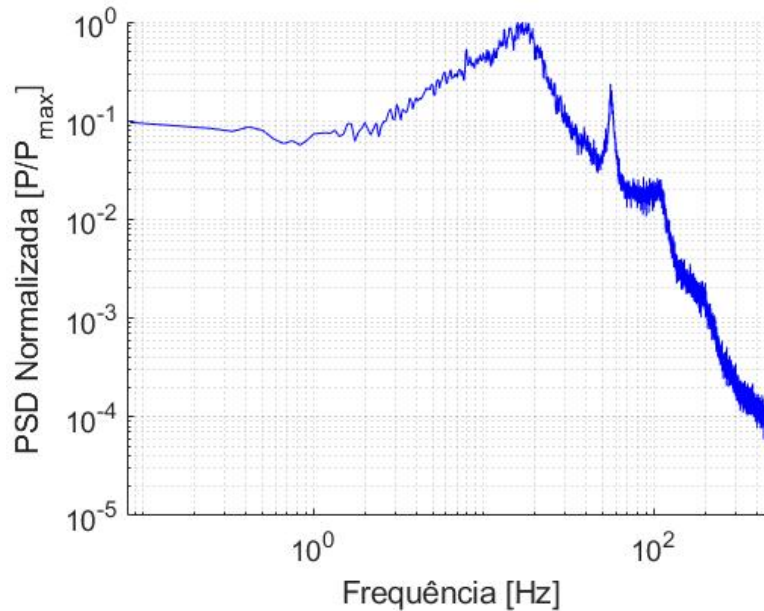
A partir da análise dos dados adquiridos foi possível visualizar que os valores máximas ultrapassam a faixa de medição do sensor. Isso ocorre porque o acelerômetro tem saída analógica (tensão elétrica) e a placa Arduino utilizada é capaz de leitura de tensões maiores que a sensibilidade do sensor, por isso, são exibidas acelerações maiores do que a faixa especificada no *data sheet*. Além disso, como o acelerômetro foi posicionado na manga de roda, componente rotativo (conforme o esterçamento do veículo), é possível que a aceleração centrípeta possa ter contribuição na saturação do acelerômetro.

Desse modo, não há possibilidade de tratar os dados aquisitados para que fiquem confiáveis. O teste deverá ser realizado novamente com um sensor de maior sensibilidade e devidamente configurado. Entretanto, como não foi possível refazer o teste com outro acelerômetro, os dados adquiridos foram utilizados para o desenvolvimento da metodologia do trabalho aqui proposta.

4.2.2 Tratamento dos dados

A PSD foi normalizada dividindo seus valores pelo ponto máximo em módulo, o resultado foi apresentado na Figura 35.

Figura 35 – PSD de aceleração normalizada $[(g^2/Hz)/(g^2/Hz)_{max}]$

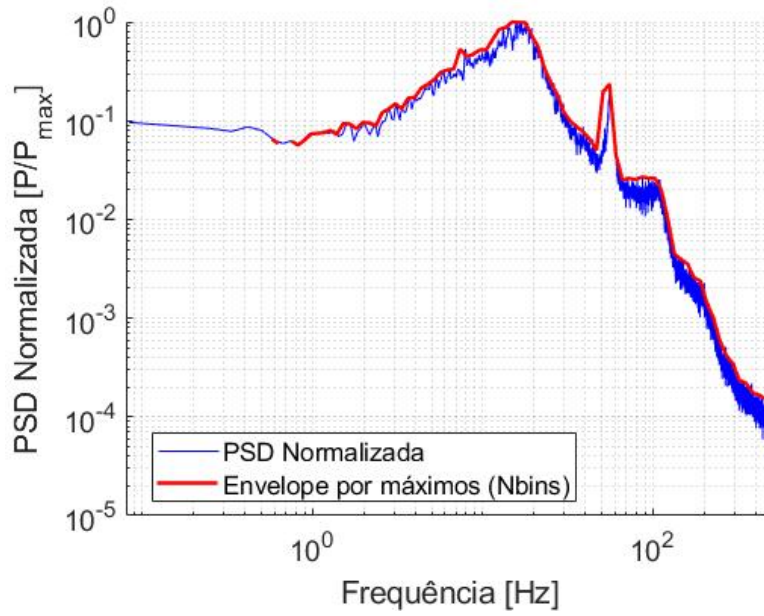


Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Para obter uma curva PSD simplificada com o comportamento linear adequado para o *input* da simulação foi realizado um envelopamento utilizando uma metodologia *Nbins* no *MATLAB*. O gráfico foi dividido em seções e o valor máximo de cada seção foi considerado para o envelope. O envelope por janelas foi apresentado na Figura 36.

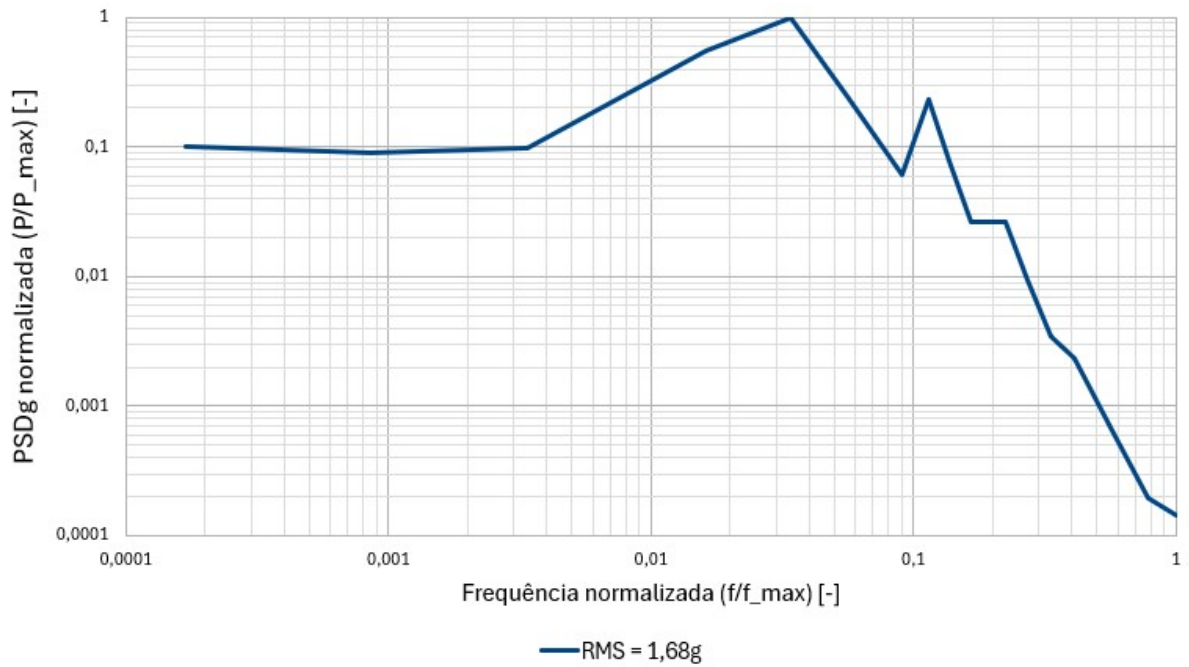
A curva dada de entrada na análise espectral foi apresentada na Figura 37. É importante ressaltar que os dois eixos (PSD e Frequência estão normalizados, entretanto, o valor RMS de 1,68G refere-se ao valor de média sem a normalização da curva.

Figura 36 – PSD normalizada com envelopamento



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Figura 37 – PSD normalizada e valor RMS



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

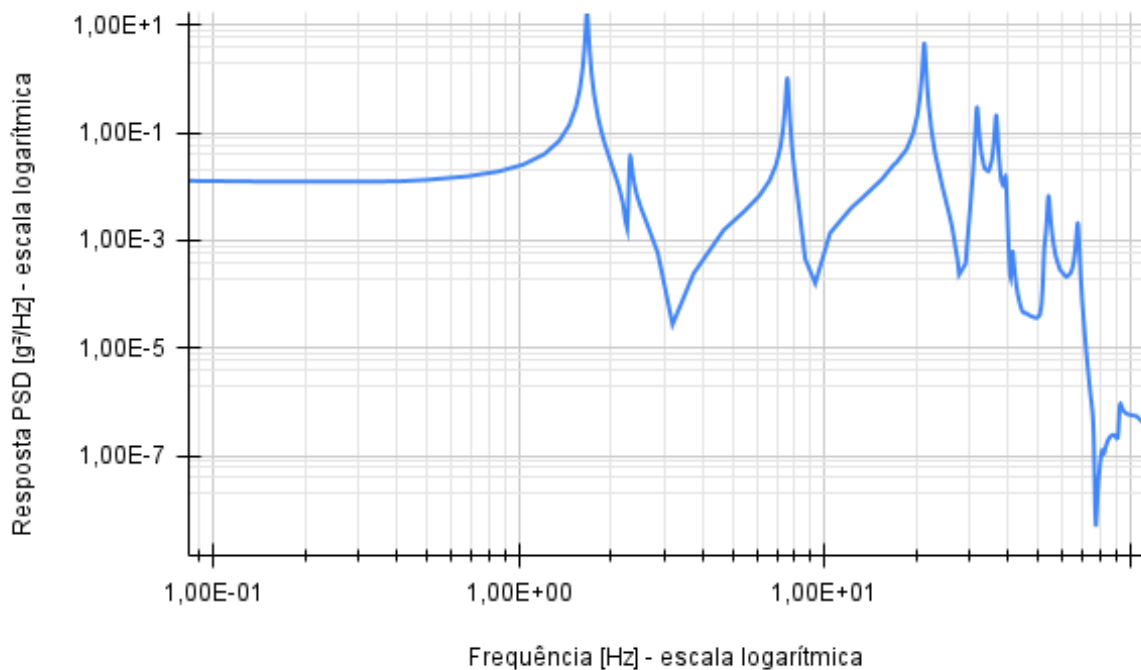
4.2.3 Análise espectral: PSD

A análise PSD permitiu a obtenção de diversos dados relevantes para o trabalho. Apresenta-se a seguir dados referentes à obtenção de PSD de resposta em regiões de interesse, como à posição do piloto, o que pode contribuir para estudos sobre seu conforto. Em seguida resultados de tensões na estrutura da gaiola, para avaliação de conexões entre tubos e, finalmente, avaliações de forças, focadas na região dos componentes da suspensão do veículo.

4.2.3.1 PSD de resposta

A partir do modelo desenvolvido, foi possível obter uma PSD de resposta no centro de massa do piloto, local em que foi aplicado um ponto de massa concentrado para representar o piloto, acoplado aos tubos correspondentes. A resposta obtida foi apresentada na Figura 38.

Figura 38 – Resposta PSD no centro de massa do piloto



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

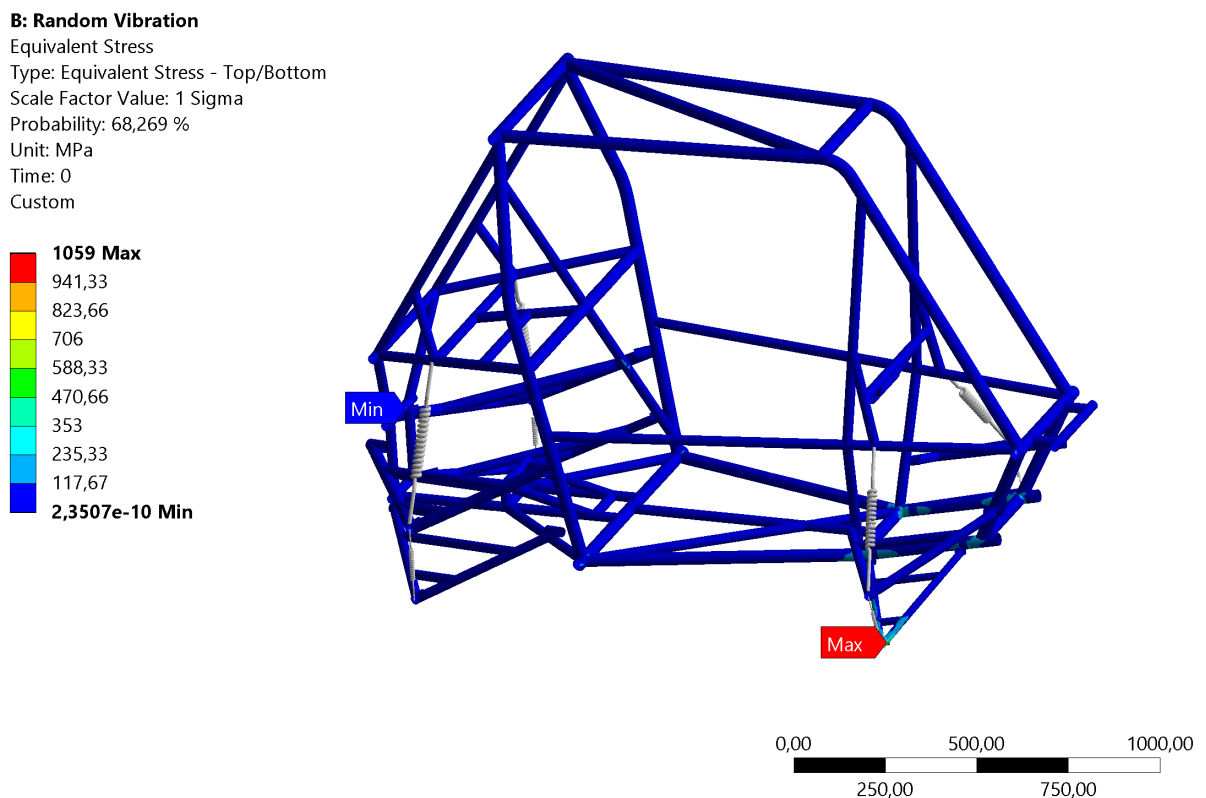
A PSD de resposta da aceleração no centro de massa do piloto evidencia que a maior concentração de energia vibratória ocorre em baixas e médias frequências, faixa na qual o corpo humano apresenta maior sensibilidade dinâmica. Observam-se picos bem definidos, possivelmente associados aos modos dinâmicos do conjunto veículo–suspensão e ao acoplamento com o piloto. Em frequências mais elevadas, a densidade espectral de potência apresenta queda acentuada, indicando que essas componentes contribuem de forma menos significativa para a

resposta global, seja devido ao amortecimento do sistema, seja por limitações do sistema de medição.

4.2.3.2 Tensão de Von Mises equivalente

A tensão equivalente de von Mises calculada para a situação base (Caso A) foi indicada na Figura 39.

Figura 39 – Tensão equivalente de von Mises no modelo completo de elementos finitos

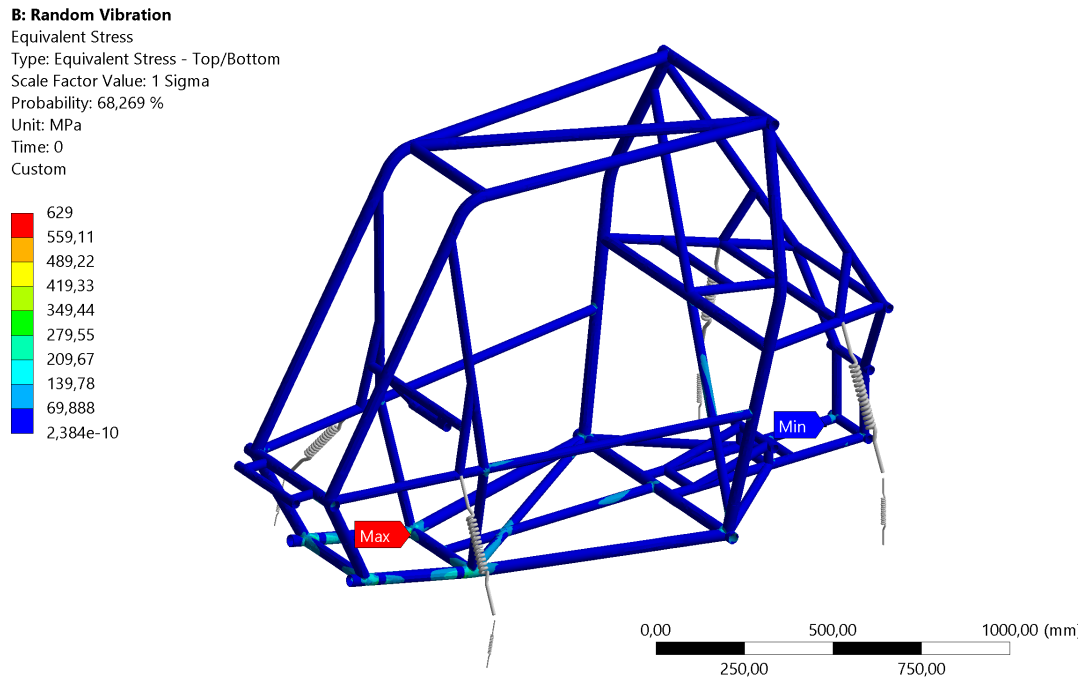


Fonte: Elaborado pela autora (2025)

A princípio, foi apresentado o resultado da tensão considerando todos os corpos do modelo. A tensão máxima foi localizada na bandeja direita inferior, local em que foi aplicado a condição de contorno e o carregamento. Além disso, é importante destacar, que na prática há uma bucha usinada que suporta as entradas na extremidades das bandejas, entretanto, o modelo não contemplou esse componente. Por esse motivo, na prática, não ocorre a tensão elevada conforme mostrado.

Posteriormente, as bandejas foram ocultadas da simulação e os valores de tensão foram ajustados para os corpos visíveis, como mostrado na Figura 40.

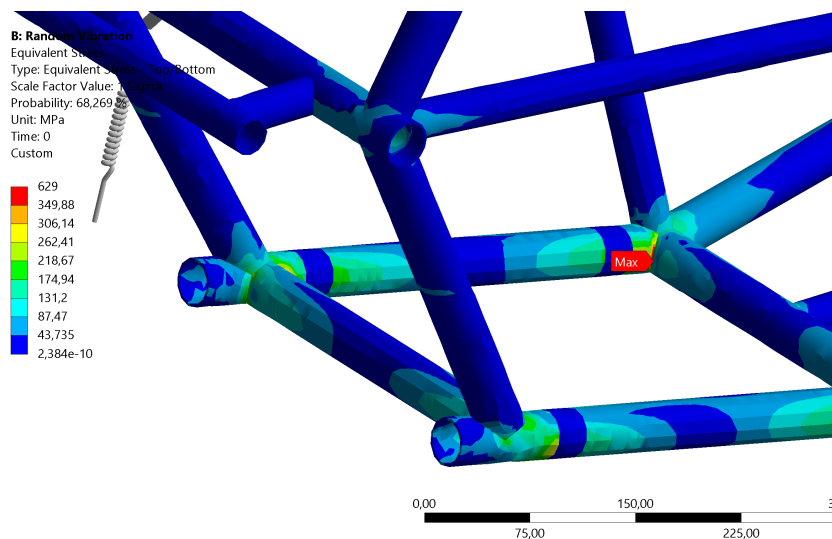
Figura 40 – Tensão equivalente de von Mises na gaiola



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Assim, é possível visualizar que houve uma diminuição da tensão máxima para 629 MPa a um σ . Um σ trata-se de um intervalo de confiança que assegura que as tensões estão iguais ou abaixo desse valor em 68,3% do tempo. A Figura 41 apresenta com mais detalhes a região de tensão máxima.

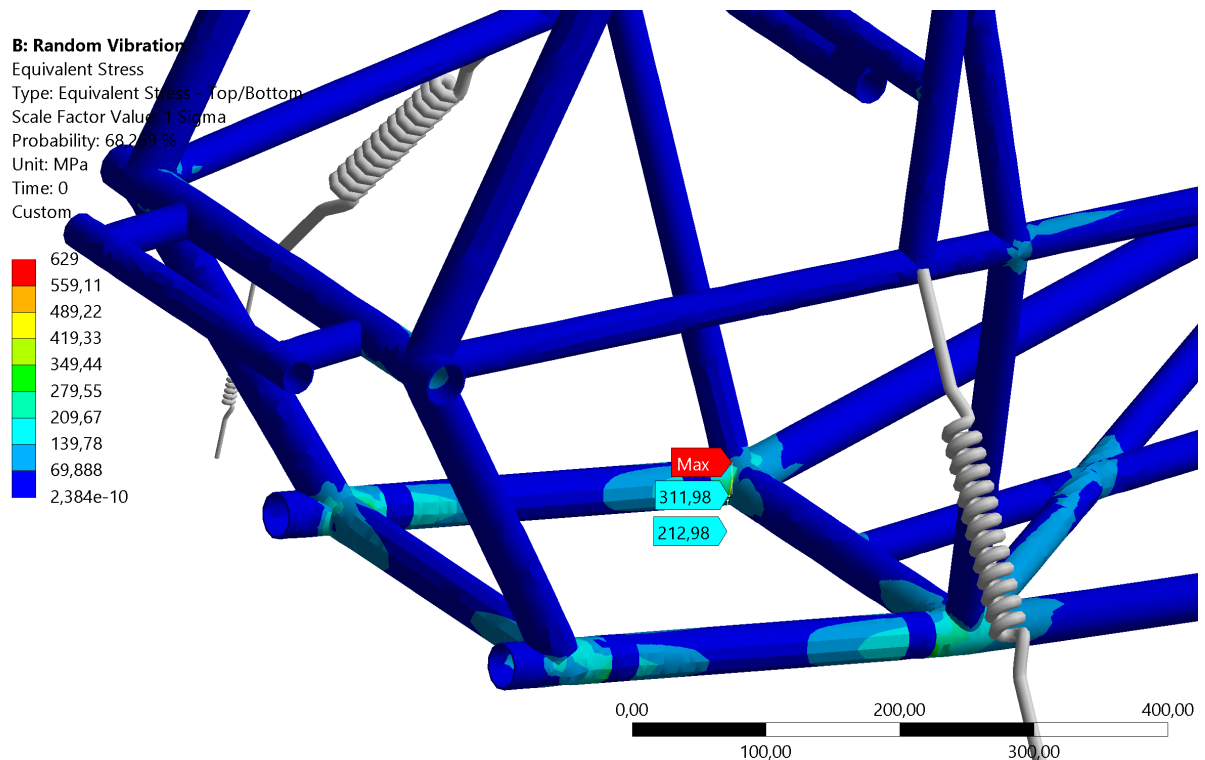
Figura 41 – Tensão equivalente de von Mises máxima do chassi



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Desse modo, verifica-se que em uma região de encontro entre tubos localiza-se a tensão máxima do modelo. Porém, trata-se de uma singularidade e é irreal. Como ocorrem nas junções dos tubos, são um indicativo de concentradores de tensão nessas regiões, porém, não são quantitativos, visto que na prática há um cordão de solda que aumenta a rigidez da estrutura e adiciona um raio de curvatura que alivia concentrações. Logo, é possível avaliar regiões da conexão de tubos que sofrerão maiores tensões e os modos de vibração para avaliar a torção nas conexões. A torção é um tipo de carregamento delicado para cordões de solda, pois provoca tensões de cisalhamento não uniformes e concentradas, e acelera a fadiga e a propagação de trincas. Por meio da Figura 42, é possível observar valores de tensões vizinhas a esse ponto, que encontram-se significativamente mais baixos.

Figura 42 – Tensão de von Mises nas regiões vizinhas à tensão máxima da gaiola



Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Além disso, é importante ressaltar que a região analisada, na prática, sofre o processo de soldagem, que aumenta a rigidez localizada. Ou seja, na realidade, a região não está submetida a essa tensão. Nos demais pontos do chassi, as tensões resultantes estão abaixo do limite de escoamento do aço 1020 laminado a frio (aproximadamente 350 MPa) e são coerentes com a realidade. A média dos valores de tensão é de 29,3 MPa.

4.2.3.3 Forças de reação

As forças de reação foram calculadas nos pontos de restrição (*remote displacements*). Os valores resultantes para os quatro casos estudados foram indicados nas Tabelas 7, 8, 9 e 10.

Tabela 7 – Forças de reação nas bandejas: Caso A

Bandeja	Força de reação em X (N)	Força de reação em Y (N)	Força de reação em Z (N)
Dianteira direita	2076,7	536,7	3695,3
Dianteira esquerda	0	739,5	2306,9
Traseira esquerda	0	551,9	0
Traseira direita	2958,6	1681,1	0

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Tabela 8 – Forças de reação nas bandejas: Caso B

Bandeja	Força de reação em X (N)	Força de reação em Y (N)	Força de reação em Z (N)
Dianteira direita	0	742,2	2294,5
Dianteira esquerda	2013,1	521,21	3632,1
Traseira esquerda	2962,0	1674,3	0
Traseira direita	0	583,27	0

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Tabela 9 – Forças de reação nas bandejas: Caso C

Bandeja	Força de reação em X (N)	Força de reação em Y (N)	Força de reação em Z (N)
Dianteira direita	0	438,8	0
Dianteira esquerda	1362,0	598,5	0
Traseira esquerda	3284,7	3028,0	2982,4
Traseira direita	0	1477,0	2944,1

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Tabela 10 – Forças de reação nas bandejas: Caso D

Bandeja	Força de reação em X (N)	Força de reação em Y (N)	Força de reação em Z (N)
Dianteira direita	1329,0	589,5	0
Dianteira esquerda	0	442,9	0
Traseira esquerda	0	1687,0	3450,3
Traseira direita	4070,1	4314,0	4567,7

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

A Tabela 11 indica as forças de reação nas quatro rodas para a condição de contorno mais crítica em que as três translação estão restringidas.

Tabela 11 – Forças de reação nas bandejas

Bandeja	Força de reação em X (N)	Força de reação em Y (N)	Força de reação em Z (N)
Dianteira direita inferior	2058,9	539,9	3627,8
Dianteira esquerda inferior	1999,6	528,2	3588,8
Traseira esquerda inferior	3416,2	3192,3	3158,4
Traseira direita inferior	4141,0	4407,0	4675,2

Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Os valores de força de reação nas rodas apresentados na Tabela 11 não possuem sinais de simetria entre os pares de rodas. Isso ocorre pois, apesar de o sinal de entrada ser o mesmo para as quatro rodas, as condições de contorno aplicadas não são simétricas, como indicadas na Figura 18. Ademais, a geometria apresentada possui assimetrias de massa devido aos pontos adicionados (piloto, motor, tanque e direção) como a região traseira direita, além da carga do motor que está centralizada em reação ao veículo, possui uma sobrecarga do tanque de gasolina.

Desse modo, verifica-se que entre os 4 casos estudados, o maior valor de força de reação em Y dente as duas rodas dianteiras ocorre na dianteira direita no caso B, em que o valor de força de reação é aproximadamente 742 N para 1σ . Para esse caso estudado, foi calculado a força de reação considerando 2σ e 3σ . Os valores foram apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 – Forças de reação nas bandejas dianteiras em (Y): Caso B

Bandeja	(1 σ) [N]	(2 σ) [N]	(3 σ) [N]
Dianteira direita inferior	742,20	1484,30	2226,40
Dianteira esquerda inferior	521,20	1042,40	1563,60

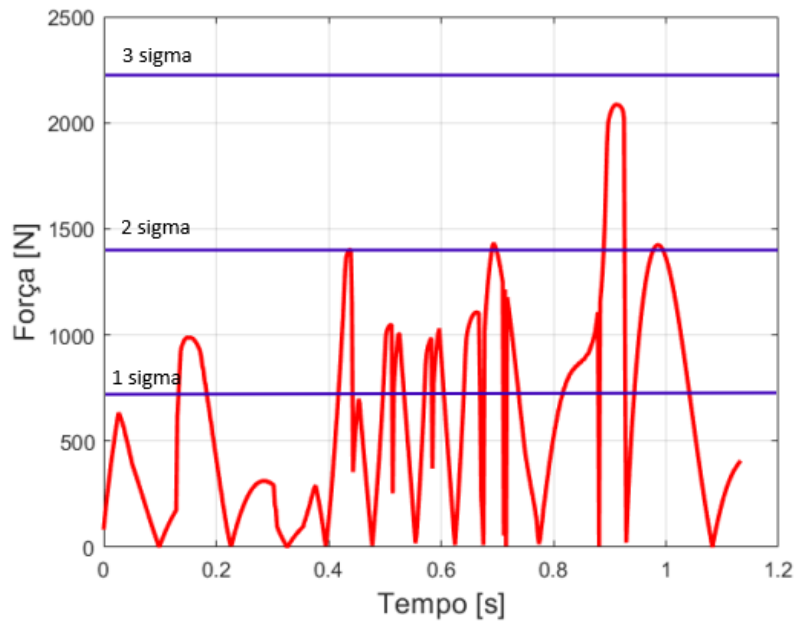
Fonte: Elaborado pela autora (2025)

Assim, os valores indicados na Tabela 12 foram utilizados para um comparativo entre o estudo realizado por Costa (2022). A Figura 43 apresenta o gráfico de força utilizado no trabalho Costa (2022) com as linhas indicando os valores máximos de 1, 2 e 3 σ calculados no presente trabalho.

É necessário destacar que o trabalho realizado por Costa (2022) utiliza quatro obstáculos específicos de alta intensidade para compor o ciclo de carregamento. Já o presente trabalho realizou uma aquisição ao longo do tempo, que conta com obstáculos de alta intensidade; porém, também inclui trechos de baixa intensidade (terrenos planos e relativamente constantes).

A interpretação dos valores analisados indica que, em aproximadamente 68,5% do tempo, as forças que agem sobre os componentes de suspensão estarão em 742,20 N ou abaixo desse valor; em 95,45% do tempo, as forças estarão em até 1484,30 N; e em 99,7% do tempo, as forças atuantes serão de no máximo 2226,40 N. Em comparação com as forças do trabalho realizado por Costa (2022), os resultados de força apresentam similaridades e coerência, apesar de os valores encontrados no presente trabalho não serem confiáveis devido à saturação dos valores de aceleração medidos.

Figura 43 – Cargas atuantes nas rodas dianteiras do veículo



Fonte: Adaptado de Costa (2022)

Ao analisar o comportamento espectral correspondente (Figura 35), observa-se que a maior contribuição energética da resposta PSD se concentra nas faixas de baixas frequências, enquanto as componentes em frequências mais elevadas apresentam níveis significativamente menores. A saturação ocorre em frequências a partir de aproximadamente 60 Hz, região na qual a resposta espectral apresenta baixa densidade de energia, reduzindo seu impacto nos valores globais da PSD normalizada. Dessa forma, é possível compreender a coerência entre os resultados obtidos no presente trabalho e no trabalho realizado por Costa (2022).

5 CONCLUSÕES

A partir do presente trabalho, é possível concluir que a metodologia aplicada permite realizar uma análise dinâmica da estrutura do chassi. Além disso, por meio do estudo proposto, foi possível extrair dados que contribuem para o desenvolvimento da equipe em outras áreas; as forças de reação obtidas na região da manga de roda podem ser utilizadas para o dimensionamento dos componentes de suspensão. Ademais, o modelo multicorpos desenvolvido para as simulações pode ser utilizado para outros tipos de estudo, como análises de impacto; e deixa espaço para aperfeiçoamento do modelo.

Entretanto, é importante ressaltar que os dados medidos na roda de manga durante o circuito apresentaram sinais de saturação e não podem ser considerados 100% confiáveis e realistas. Logo, conclui-se que a metodologia elaborada é viável para o desenvolvimento do projeto de um veículo Baja; porém, é necessário realizar um teste com um acelerômetro com um maior *range* de medição para obtenção de dados seguros.

Durante a concepção de um veículo Baja, a aquisição de dados para o dimensionamento dos componentes do carro é imprescindível para maximizar a performance do veículo e evitar o subdimensionamento ou superdimensionamento da estrutura. Na atualidade, o trabalho de sensoriamento do veículo do Baja UFSCar é introdutório e recente na equipe. Desse modo, verifica-se a importância do presente trabalho e dos trabalhos adjacentes que podem ser desenvolvidos para aumentar o repertório e a capacidade técnica da equipe.

A partir do modelo multicorpos elaborado, é possível realizar simulações derivadas, como o cálculo de fadiga do chassi, para verificar a vida do componente e avaliar possibilidades de melhoria e redução de peso da estrutura. Entretanto, para realizar uma análise de fadiga é necessário solucionar o problema do concentrador de tensão irreal na conexão entre os tubos. Essa correção pode ser feita adicionando um filete para aliviar o concentrador de tensão ou não gerar a malha contínua pelo *share topology* e aplicar conexões do tipo *seam weld*. Assim, seria possível indicar os parâmetros do cordão de solda e identificar as tensões e comportamento do componente. Dessa forma, além de ser possível diminuir o concentrador de tensão para calcular a fadiga é possível avaliar se o dimensionamento do cordão de solda está adequado.

Também é viável realizar uma análise transiente estrutural considerando obstáculos específicos de alta intensidade (impactos). Além disso, a partir das forças de reação obtidas em cada uma das rodas do veículo, é possível dimensionar componentes da suspensão, como bandejas, mangas de roda e cubos de roda. É importante ressaltar que a aquisição da aceleração na roda ao longo do tempo foi realizada com um acelerômetro uniaxial (Y global da simulação). Dessa maneira, foram desconsideradas entradas laterais oriundas do solo ou do movimento da direção; portanto, é imprescindível considerar um coeficiente de segurança que absorva a

simplificação realizada.

O modelo desenvolvido também pode ser aprimorado para obter resultados mais realistas. Algumas modificações possíveis que podem ser realizadas para otimizar o modelo existente são:

- Adicionar juntas esféricas entre as extremidades das bandejas e as extremidades da mola que conectam as duas estruturas para representar os *ball joint*. No modelo atual, a extremidade da mola possui os 6 graus de liberdade em relação as extremidades das bandejas.
- Substituir o comando *share topology* (que garante a continuidade da malha entre os tubos) por um contato do tipo *seam weld*. Essa modificação faria com que a região de encontro entre os tubos possuísse uma rigidez maior quando comparada ao material dos tubos, representando o cordão de solda. Assim, o comportamento da estrutura se aproximaria mais da realidade.
- Adicionar outras peças ao modelo, existentes no veículo, com o intuito de deixá-lo mais realista. Exemplos de geometrias que poderiam ser incluídas: buchas nas extremidades das bandejas, olhais na gaiola, semi-eixo, *link* de direção, dentre outras. A decisão de abranger outros componentes deve ser realizada ao considerar o nível de detalhe e precisão necessários para o estudo;
- Adicionar o amortecedor e o pneu na simulação para que as frequências naturais adquiridas sejam mais próximas da realidade e, conseqüentemente, o modelo seja mais fidedigno;
- Explorar as condições de contorno aplicadas as rodas para deixar o modelo mais representativo.

Por fim, a aquisição de dados pode ser aprimorada utilizando um acelerômetro uniaxial porém com uma faixa de medição superior ao implementado, para evitar os pontos que saturaram e obter valores mais realistas. Ademais, pode-se realizar a aquisição durante uma prova de enduro da Baja SAE, o que tornaria os resultados mais fidedignos as necessidades do veículo. Por último, é possível utilizar um acelerômetro biaxial ou triaxial.

Logo, conclui-se que a metodologia desenvolvida é relevante para o contexto, porém os valores obtidos (quantitativamente) não são confiáveis devido à imprecisão dos valores medidos.

REFERÊNCIAS

- COSTA, C. R. **Dimensionamento do conjunto manga de eixo, ponta de eixo e cubo de roda de um veículo Baja**. São Carlos, SP, Brasil, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 38, 71 e 72.
- EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice and Application**. 2nd. ed. Baldock, UK: Research Studies Press, 2000. ISBN 978-0863803853. Citado 3 vezes nas páginas 19, 37 e 55.
- FILHO, A. A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. 2. ed. São Paulo: Érica, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 21, 32, 34, 35 e 36.
- HIBBELER, R. C. **Mecânica para Engenharia: Dinâmica**. 14. ed. São Paulo: Pearson, 2017. Citado na página 35.
- JUNIOR, C. R.; FILHO, W. M. M. Estudo matemático dos elementos finitos utilizados em cálculo estrutural. In: **IX Simpósio de Iniciação Científica, Didática e de Ações Sociais da FEI**. São Bernardo do Campo, Brasil: [s.n.], s.d. Citado na página 32.
- LALANNE, C. **Mechanical Vibration and Shock Analysis: Vol. 1 – Sinusoidal Vibration**. 2. ed. London: ISTE, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 31, 37 e 38.
- LOGAN, D. L. **A First Course in the Finite Element Method**. 6. ed. Boston: Cengage Learning, 2011. Tradução livre do título: Um Primeiro Curso em Método dos Elementos Finitos. ISBN 9780534552985. Citado na página 33.
- MARQUES, G. A. **Aplicação de perfis de estrada na simulação de suspensões veiculares: uma abordagem baseada na ISO 8608**. São Carlos, SP, Brasil, 2024. Citado na página 38.
- MATWEB. **Material Property Data**. 2025. Acesso em: 31 ago. 2025. Disponível em: <<http://www.matweb.com>>. Citado na página 39.
- NETO, J. G. L. **Análise estrutural do chassi de um Baja SAE a partir do método dos elementos finitos aplicado a modelo dinâmico multicorpo do tipo four-post**. Fortaleza, CE, Brasil, 2022. Citado na página 38.
- PARSEKIAN, P. H. L. **Desenvolvimento de um software de simulação do comportamento dinâmico de um veículo Baja**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica)) — Departamento de Engenharia Mecânica, São Carlos, 2022. Citado na página 38.
- RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. Tradução da 5ª edição do original em inglês: Mechanical Vibrations. ISBN 9788576052675. Disponível em: <<https://www.pearson.com.br/livro/vibracoes-mecanicas-5-edicao/859>>. Citado 6 vezes nas páginas 19, 21, 22, 25, 27 e 30.
- SAE BRASIL. **Regulamento Técnico Baja SAE Brasil 2024**. São Paulo: Sociedade de Engenheiros da Mobilidade, 2024. Disponível em: <<https://www.saebrasil.org.br/eventos/baja-sae-brasil>>. Acesso em: 4 out. 2025. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- SILVA, R. C. da. **Estudo das frequências naturais de um chassi tubular de um protótipo Baja offroad**. Ouro Preto, MG, Brasil, 2019. Citado na página 38.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 6th. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN 978-0750664318. Citado na página 36.