



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



MARIA CLARA DO CARMO SANTOS

**PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: EXPLORANDO O PROBLEMA DA
AGULHA DE BUFFON PARA O ENSINO MÉDIO**

SÃO CARLOS - SP

2025

MARIA CLARA DO CARMO SANTOS

**PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: EXPLORANDO O PROBLEMA DA
AGULHA DE BUFFON PARA O ENSINO MÉDIO**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos.

Orientadora: Prof. Dra. Teresa Cristina Martins Dias.

SÃO CARLOS - SP

2025

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à Deus, que até aqui me sustentou e me deu a valiosa oportunidade de estudar nesta universidade e conhecer tantas pessoas especiais ao longo desse percurso.

Agradeço ao meu esposo, Jessé, que tem sido meu porto seguro e maior incentivador durante todos esses anos de graduação, sempre confiando em meu potencial e sonhando comigo.

Agradeço aos meus pais, Mônica e Aguinaldo, que oram e torcem por mim diariamente, sempre depositando confiança e admiração em cada um dos meus passos.

Agradeço à minha orientadora, Teresa Cristina, que me acompanha desde o segundo semestre da graduação, seja como professora, orientadora de Iniciação Científica e, agora, orientadora do meu Trabalho de Conclusão de Curso. Sou grata pela confiança, pelos aprendizados, pelo apoio e pela parceria.

Agradeço à minha família em geral - irmãos, tios, avós e primos - que estão sempre ao meu lado, comemorando comigo cada conquista. Essa vitória é nossa.

Agradeço aos meus colegas de curso, por me auxiliarem ao longo da graduação e por em nenhum momento deixarem eu me sentir sozinha.

Agradeço aos meus professores, todos os que tive durante esses anos, que contribuíram para minha formação, não apenas com conteúdos acadêmicos, mas também com trocas de experiências e conselhos valiosos.

Por fim, agradeço à todos que, de alguma forma, passaram pela minha vida nesses cinco anos e acrescentaram em minha formação como docente.

Resumo

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) são abordados conceitos fundamentais de Probabilidade, incluindo suas definições: clássica, frequentista e subjetiva. Além disso, são apresentados a probabilidade condicional e o Teorema de Bayes, com suas respectivas definições, demonstrações e exemplos. O foco principal no trabalho é o estudo da probabilidade geométrica, sendo explorada através do problema da agulha de Buffon. Ao longo dos capítulos são expostos estudos teóricos, a demonstração, de forma prática e ilustrativa, do problema da agulha de Buffon e possíveis atividades para aplicação no Ensino Médio. O objetivo é oferecer uma abordagem educacional desse problema, possibilitando sua aplicação em sala de aula na Educação Básica, buscando complementar o ensino de Probabilidade de maneira abrangente, estimulando o raciocínio e o pensamento probabilístico dos estudantes.

Palavras-chave: Conde Buffon, Educação Básica, Ensino Médio, Probabilidade, Probabilidade Geométrica, Problema da agulha de Buffon.

Abstract

In this Final Course Work addresses fundamental concepts of Probability, including its definitions: classical, frequentist and subjective. In addition, conditional probability and Bayes' Theorem are presented, with their respective definitions, demonstrations and examples. The main focus of the work is the study of geometric probability, explored through the Buffon needle problem. Throughout the chapters, theoretical studies are presented, the demonstration, in a practical and illustrative way, of the Buffon needle problem and possible activities for application in High School. The objective is to offer an educational approach to this problem, enabling its application in the classroom in Basic Education, seeking to complement the teaching of Probability in a comprehensive manner, stimulating students' reasoning and probabilistic thinking.

Keywords: Count Buffon, Basic Education, High School, Probability, Geometric Probability, Buffon's Needle Problem.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Conde de Buffon.	23
Figura 2 – Exemplo de um lançamento da agulha.	26
Figura 3 – Variáveis Y e Θ definidas.	26
Figura 4 – Distância d	27
Figura 5 – Representação da medida d	27
Figura 6 – Intervalos da variável Y	28
Figura 7 – Gráfico da função.	29
Figura 8 – Plano confeccionado.	31
Figura 9 – Exemplo da superfície com dois planos.	32
Figura 10 – Superfície com dois planos confeccionada pela autora.	32
Figura 11 – Função senoidal padrão.	34
Figura 12 – Quadrado 1 sobreposto a função seno.	34
Figura 13 – Retângulo 1 sobreposto a função seno.	35
Figura 14 – Retângulo 2 sobreposto a função seno.	35
Figura 15 – Função de interesse confeccionada.	37
Figura 16 – Senóide padrão confeccionada.	37
Figura 17 – Retângulo escolhido sobreposto a função.	38
Figura 18 – Colagem finalizada.	38
Figura 19 – Interface inicial do Scratch.	42
Figura 20 – Criação e personalização da agulha.	43
Figura 21 – Criação e personalização do plano.	43
Figura 22 – Alteração do cenário.	44
Figura 23 – Códigos iniciais.	44
Figura 24 – Códigos sequenciais.	45
Figura 25 – Códigos finais.	45

Sumário

1	INTRODUÇÃO	8
2	PROBABILIDADES	11
2.1	Probabilidade clássica, frequentista e subjetiva	11
2.2	Probabilidade condicional	16
2.3	Probabilidade geométrica	20
3	O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON	23
3.1	História de Buffon	23
3.2	Aplicações das teorias iniciadas por Buffon	25
3.3	Demonstração do problema das agulhas	26
4	ATIVIDADE EM SALA DE AULA	30
4.1	Confecção da atividade	31
4.2	Exemplos de atividades para realizar em sala de aula	33
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
	REFERÊNCIAS	49

1 Introdução

A partir de 1997, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o ensino de Estatística e Probabilidade foi inserido na Educação Básica. Hoje em dia, esses conceitos são trabalhados desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio e estão nos mais variados documentos, como na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e no Currículo Paulista (BRASIL, 2018). Dessa forma, com a inserção desses conteúdos no currículo escolar, as pesquisas e estudos para o desenvolvimento da Educação Estatística não pararam de crescer. Porém, esses estudos ainda são muito recentes, já que são menos de 30 anos da presença da Estatística e Probabilidade nos PCN (CASTRO; FILHO, 2015).

Diante do cenário vivido pela sociedade contemporânea, a importância de estudar esses conceitos torna-se cada vez mais evidente, já que o grande volume de informações entregues diariamente supera o de qualquer outro período da história da humanidade. A falta de letramento estatístico e de habilidades para interpretar dados é um problema, pois influencia na tomada de decisões, que é uma prática constante na vida cotidiana, de forma que saber identificar qual escolha ou ação é mais vantajosa e apresenta menores impactos negativos é essencial para a formação de um cidadão. Portanto, uma sociedade sem conhecimentos estatísticos e probabilísticos pode sofrer danos individuais, quando as decisões erradas parte de cada indivíduo, e danos coletivos, quando as escolhas erradas ocorrem em larga escala.

Desde as situações com menores impactos na vida, como: “Que roupa é mais apropriada para usar hoje?”, “Devo levar guarda-chuva ou sombrinha?”, “Qual o melhor caminho para chegar lá?”, “Qual melhor época para passar as férias nesse lugar?”, até as com maiores impactos, como: “Em quem votar?”, “Qual vaga de emprego devo aceitar?”, “Qual curso de graduação devo me inscrever?”, “Será que meu time irá ganhar no campeonato?”, a compreensão de Estatística e Probabilidade pode interferir positivamente nas tomadas de decisões.

Assim, o pensamento estatístico e a interpretação de dados e gráficos são fundamentais para a formação de opiniões e decisões, além de dificultar a crença nas “fakes news”. Diante disso, e certamente de outros motivos, fica evidente a importância da compreensão dessas ciências para a sociedade contemporânea e a escola é uma das ferramentas mais importante para a construção de uma sociedade “mais culta” em todas as áreas, incluindo Matemática e Estatística.

Pelo fato dos conceitos de Estatística e Probabilidade terem sido inseridos no contexto escolar recentemente, o ensino e aprendizagem desses conceitos ainda possuem diversas defasagens e muitas vezes são deixados de segundo plano (FERNANDES; SOUSA;

RIBEIRO, 2004). Cazorla, Kataoka e Silva (2010), parafraseados por Castro e Filho (2015, p.873), indagam que a Estatística tem sido apresentada aos estudantes com as características lógicas e deterministas da Matemática. Esse ponto é bastante discutível, tanto na Estatística quanto na Probabilidade, que também tem sido apresentada da mesma forma (CASTRO; FILHO, 2015).

Com isso, a Estatística e a Probabilidade podem ser trabalhadas em sala de aula desenvolvendo o pensamento no estudante de que as medidas resumo e os resultados refletem um comportamento do que está sendo analisado. No caso em que esses conceitos são trabalhados apenas matematicamente, a parte reflexiva da ciência é deixada de lado. Por esse motivo, estudos e pesquisas sobre metodologias e práticas pedagógicas para o Ensino de Estatística e Probabilidade vem sendo desenvolvidos. Assim, os estudos nesse trabalho se fazem necessários e pertinentes para a formação profissional da autora.

Os conteúdos de Probabilidade para Educação Básica compreendem principalmente os métodos de contagem e probabilidade simples e condicional (BRASIL, 2018), porém, por conta do tempo escasso, essas conceitos são “esquecidos” ou tratados de forma breve ou de forma excessivamente formalizada, o que gera uma grande problemática, porque muitos alunos se formam na Educação Básica sem terem tempo de compreenderem o que é de fato Probabilidade, as formas de representações e propriedades básicas (FERNANDES; SOUSA; RIBEIRO, 2004).

Vale ressaltar que a defasagem comentada, não se dá pelo requisito de conhecimento matemático complexo do conteúdo que deve ser apresentado aos alunos, mas à certo despreparo da maioria dos docentes, principalmente pelo fato dos conteúdos de Estatística e Probabilidade não serem apresentados, em grande parte das formações de professores de Matemática, com um caráter pedagógico, mas sim, com um caráter acadêmico (RODRIGUES; SILVA, 2019). Isto porque, como já comentado anteriormente, a área de Educação Estatística é relativamente recente como área de estudos e pesquisas.

Neste trabalho, buscou-se desenvolver uma atividade baseada na probabilidade geométrica, a qual é pouco comentada e discutida na Educação Básica, mas que, juntamente com metodologias diversificadas, pode ser apresentada aos estudantes de forma prática, já que a probabilidade geométrica se diferencia levando em consideração conceitos geométricos.

O estímulo do trabalho em sala de aula com materiais concretos contribui para o processo de ensino-aprendizagem. Vale ressaltar que a eficiência dessa abordagem depende de como o professor utiliza e aplica o material como objeto de estudo (LORENZATO et al., 2006). Assim, nesse trabalho buscou-se desenvolver, em primeiro momento, uma atividade com material concreto, descrevendo os modos de confecção e uso, para que os docentes se sintam preparados para confeccionar e manusear o próprio material, apresentando-o aos estudantes em uma aula didática e complementar de Probabilidade.

Além disso, foram desenvolvidos nesse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), estudos sobre as diferentes definições de Probabilidade, sendo a probabilidade clássica, apresentando os axiomas de Komolgorov, a probabilidade frequentista e a probabilidade subjetiva. Assim, consideradas como noções introdutórias, a compreensão dessas definições e axiomas facilita o entendimento acerca da probabilidade, porém, em diversos casos, estas não são compreendidas pelos docentes e, conseqüentemente, muito menos pelos estudantes (FERNANDES; SOUSA; RIBEIRO, 2004). A probabilidade condicional e o Teorema de Bayes também são tópicos estudados neste trabalho. Os estudos teóricos foram realizados com base, principalmente, no livro “Probabilidade: Um Curso Introdutório” (DANTAS, 2022).

Vale ressaltar que a probabilidade geométrica foi estudada com foco no problema das agulhas de Buffon, buscando tornar esse jogo de azar, que é muito importante para a Geometria Integral e Estocástica - pois foi a partir dele que o autor foi pioneiro ao considerar conceitos geométricos para o cálculo de probabilidade - acessível e apto para ser apresentado em sala de aula aos estudantes.

Esse trabalho foi dividido em estudos teóricos e práticos, sendo apresentados conceitos sobre Probabilidade no Capítulo 2, no Capítulo 3 sobre Buffon e o problema das agulhas e no Capítulo 4 atividades práticas para o ensino básico.

2 Probabilidades

Neste capítulo estudamos as diferentes definições de Probabilidade, definição clássica, frequentista e subjetiva da Probabilidade, descrevendo e exemplificando-as. Além disso, também são apresentados a probabilidade condicional, o Teorema de Bayes e a probabilidade geométrica. Os principais conceitos abordados são baseados no livro: “Probabilidade: Um Curso Introdutório” (DANTAS, 2022).

Vale ressaltar que o objetivo neste estudo é fortalecer o teor teórico do trabalho, explorando as diferentes definições e propriedades. Dessa forma, neste capítulo, foram apresentados, com caráter expositivo, os estudos realizados durante o TCC. Além disso, conceitos primários como espaço amostral, eventos, eventos simples, eventos disjuntos, união e intersecção de eventos, podem ser vistos nas referências citadas ao longo do texto.

A probabilidade é uma função $P(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, cujo o domínio são os pontos do espaço amostral e o contradomínio é o intervalo $[0, 1]$, conforme a Definição 2.1 (MAGALHÃES, 2006):

Definição 2.1. *Considere o espaço amostral denotado por Ω . Uma função $P(\cdot)$ é denominada probabilidade se satisfaz as condições:*

- a) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \subset \Omega$;
- b) $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$, com A_j 's disjuntos;
- c) $P(\Omega) = 1$.

Essas condições são chamadas de Axiomas de Kolmogorov.

2.1 Probabilidade clássica, frequentista e subjetiva

Na definição clássica de probabilidade são considerados experimentos que possuem eventos simples com a mesma chance de ocorrência, ou seja, equiprováveis. Além disso, refere-se a um experimento que possui um número finito ou infinito enumerável de eventos.

Definição 2.2. *Consideremos um experimento e seu respectivo espaço amostral, denotado por Ω , com um total de N resultados possíveis, em que cada evento simples do espaço amostral tem a mesma chance de ocorrer (equiprováveis). Denote de A um evento de Ω , $A \subset \Omega$, composto de m eventos simples de Ω , logo $m \leq N$. Assim, a probabilidade de A , denotado por $P(A)$, é:*

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

A Definição 2.2 pode ser interpretada como: “casos favoráveis sobre casos possíveis”, sendo m o número de casos favoráveis, descrevendo a quantidade de resultados possíveis de Ω que resultam no evento A .

Exemplo 1. Em um sorteio de uma rifa de uma bicicleta, há 75 possíveis números para serem sorteados (1 a 75). Atribui-se a chance de ocorrência de cada número igual à $\frac{1}{75}$. Para saber a probabilidade do evento “sortear um número par”, denotado por A , acontecer, deve-se calcular o valor de m (quantidade de eventos simples do espaço amostral que resultam em A) para calcular $P(A)$. Assim, temos, $m = 37$ e $N = 75$, logo, $P(A) = \frac{37}{75} \approx 0,493$.

Exemplo 2. Em uma brincadeira de pega-pega, há sempre quem pega e quem foge, quem pega é chamado popularmente de “pegador”. Ganha quem for o último a ser pego. Em um grupo de cinco crianças, um será quem pega e quatro os que fogem. Para definir quem será o “pegador” da brincadeira, há cinco papéis, quatro deles com a palavra “livre” e um com a palavra “pegador”. Para o primeiro jogador que escolherá o papel, a chance de cada evento simples ocorrer é igual à $\frac{1}{5}$. Assim, a probabilidade do evento “sortear: livre”, denotado por A , ocorrer possui $m = 4$ e $N = 5$, logo, $P(A) = \frac{4}{5} = 0,8$ e a probabilidade do evento “sortear: pegador”, denotado por B , ocorrer possui $m = 1$ e $N = 5$, logo, $P(B) = \frac{1}{5} = 0,2$.

Visto isso, é garantido que $P(A) = \frac{m}{N}$, apresentado na Definição 2.2, é probabilidade, pois satisfaz a definição axiomática de probabilidade, os Axiomas de Kolmogorov, como é demonstrado a seguir.

Dessa forma, seja Ω um espaço amostral que satisfaça as condições da Definição 2.2. A probabilidade de A , denotada por $P(A)$, ocorrer satisfaz:

- a) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \subset \Omega$;
- b) Se A_1, A_2, \dots, A_n são eventos mutuamente exclusivos (disjuntos) de Ω , então:

$$P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k);$$

- c) $P(\Omega) = 1$.

Demonstração.

a) Temos que $N > 0$ e $m \geq 0$, além disso, temos também que $m \leq N$, logo,

$$0 \leq m \leq N \Rightarrow 0 \leq \frac{m}{N} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

b) Seja A_1, A_2, \dots, A_n eventos mutuamente exclusivos. Suponha que A_1 possua m_1 eventos simples, A_2 possua m_2 eventos simples e, assim por diante, até A_n . Além disso, suponha também que $\bigcup_{k=1}^n A_k$ possua m eventos simples, todos em Ω .

Como A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente exclusivos, por definição, eles não possuem eventos simples em comum. Assim, a quantidade de eventos simples m de $\bigcup_{k=1}^n A_k$ é:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Dessa forma, temos:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \frac{m}{N} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \dots + \frac{m_n}{N} = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Logo, $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

c) Por definição, sabemos que N é o total de eventos simples do espaço amostral Ω . Além disso, o número de eventos simples m de Ω é N . Dessa forma, temos:

$$P(\Omega) = \frac{m}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

□

Como visto, pela Definição 2.2 são considerados experimentos com eventos simples equiprováveis. Porém, existe uma infinidade de experimentos e, em algumas situações, não se pode garantir inicialmente que os eventos simples (subconjuntos unitários) são equiprováveis. Dessa forma, para o cálculo da probabilidade, é considerado o limite de frequências relativas, a qual é denominada de probabilidade frequentista ou estatística (MAGALHÃES, 2006).

A probabilidade frequentista está relacionada à frequência de ocorrência do evento em um experimento. Assim, quando nos referimos a experimentos que produzem resultados aleatórios e queremos calcular sua probabilidade, iremos repetir o experimento “ n ” vezes. Como a probabilidade frequentista está relacionada a quantidade de vezes que o evento de interesse ocorreu no experimento, para calcularmos, denotaremos $n(A)$ como a quantidade de vezes que o evento A ocorreu nas n repetições totais do experimento realizado. Segue a definição.

Definição 2.3. Consideremos um espaço amostral, denotado por Ω , associado a um experimento com um evento aleatório e chamemos de A o evento de interesse desse experimento. Seja n a quantidade de vezes que o experimento foi realizado nas mesmas condições, de forma independente, e $n(A)$ a quantidade de vezes que A ocorreu nas n repetições. Assim, temos a frequência relativa de A nas n repetições como:

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}.$$

No caso que n é grande, $f_{n,A}$ tende a uma constante p a qual podemos definir como a probabilidade frequentista de A , denotada por $P(A)$.

A frequência frequentista pode ser notada em diversos estudos, principalmente em pesquisas demográficas e em experimentos relacionados ao lançamento de moeda e dados (DANTAS, 2022). Durante a graduação, a autora desenvolveu uma atividade na Iniciação Científica (IC) para calcular a probabilidade do evento “resultar na face Cara” ocorrer no lançamento de uma moeda, respondendo a pergunta: “a moeda é balanceada?”, juntamente com alguns estudantes do Ensino Médio e Superior. O experimento foi realizado em diferentes cenários e com diferentes moedas (repetindo o experimento por, pelo menos, 40 vezes em cada turma). O objetivo foi que os estudantes compreendessem a noção da frequência relativa convergindo a um p definido como $P(A)$ (SANTOS, 2023).

Exemplo 3. Karl Pearson realizou 24.000 lançamentos de uma moeda para obter a probabilidade frequentista do evento “resultar na face Cara”, denotado por A , ocorrer. O resultado do seu experimento convergiu a uma constante p , com $p = P(A) = 0,5005$. Dessa forma, em $n = 24.000$, ele obteve $n(A) = 12.012$ (DANTAS, 2022).

Exemplo 4. Para calcular a probabilidade de nascer um bebê por dia em um hospital, foi realizado um experimento frequentista. No experimento, definiu-se n como a quantidade de dias que seria realizado a observação e $n(A)$ a quantidade de dias que tiveram nascimentos naquele hospital durante a observação. Após um $n = 120$, obtiveram $n(A) = 86$, assim, $f_{n,A} = P(A) = \frac{86}{120} = \frac{43}{60} \approx 0,717$.

Visto isso, é garantido que $f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$, apresentado na Definição 2.3, é probabilidade, pois satisfaz a definição axiomática de probabilidade, os Axiomas de Kolmogorov, como é demonstrado a seguir.

Dessa forma, seja Ω um espaço amostral que satisfaça a Definição 2.3. A frequência relativa $f_{n,A}$, definida na classe dos eventos de Ω , satisfaz as seguintes condições:

- a) $0 \leq f_{n,A} \leq 1$, para todo $A \subset \Omega$;
- b) Se A_1, A_2, \dots, A_n são eventos mutuamente exclusivos de Ω , então:

$$f_{n, \bigcup_{k=1}^n A_k} = f_{n,A_1} + f_{n,A_2} + \dots + f_{n,A_n};$$

- c) $f_{n,\Omega} = 1$.

Demonstração.

a) Temos que $n > 0$ e $n(A) \geq 0$, além disso, temos também que $n(A) \leq n$, logo,

$$0 \leq n(A) \leq n \Rightarrow 0 \leq \frac{n(A)}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f_{n,A} \leq 1.$$

b) Seja A_1, A_2, \dots, A_n eventos mutuamente exclusivos. Suponha que A possua $n(A_1)$ ocorrências, A_2 possua $n(A_2)$ ocorrências e, assim por diante, até A_n . Além disso, suponha também que $\bigcup_{k=1}^n A_k$ possua $n(\bigcup_{k=1}^n A_k)$ ocorrências, todos em Ω .

Como A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente exclusivos, por definição, quando A_1 ocorre, A_2 não ocorre e quando A_2 ocorre, A_1 não ocorre e assim para todos. Desta forma, o número de ocorrências $n(\bigcup_{k=1}^n A_k)$ de $\bigcup_{k=1}^n A_k$ é:

$$n\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_n).$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} f_{n, \bigcup_{k=1}^n A_k} &= \frac{n(\bigcup_{k=1}^n A_k)}{n} = \frac{n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_n)}{n} = \frac{n(A_1)}{n} + \frac{n(A_2)}{n} + \dots + \frac{n(A_n)}{n} \\ &= f_{n,A_1} + f_{n,A_2} + \dots + f_{n,A_n}. \end{aligned}$$

c) Por definição, sabemos que n é a quantidade de vezes que o experimento foi realizado. Além disso, sabemos que algum ponto de Ω ocorreu em todas as n vezes do experimento, de forma que, $n(\Omega) = n$.

Desta forma, temos:

$$f_{n,\Omega} = \frac{n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

□

Além das definições de Probabilidade descritas em 2.2 e 2.3, existe o conceito de probabilidade subjetiva. A probabilidade subjetiva está relacionada a um experimento que é difícil de ser realizado em condições iguais ou repetidas vezes. Como visto nas definições 2.2 e 2.3, a probabilidade de um experimento é calculada considerando eventos equiprováveis ou os resultados realizados em uma quantidade n de vezes, com n grande, em condições idênticas em todas as realizações. Porém, como são descritas nos exemplos abaixo (exemplos 5 e 6), existem situações que não são possíveis respeitá-las.

Assim, baseado em opiniões de especialistas e estudos anteriores, esta poderá depender do observador, levando em consideração o valor que cada observador deposita naquele evento, sendo denominada de subjetiva ou pessoal.

Exemplo 5. *Em uma disputa de dois times, no caso que se deseja calcular a probabilidade de um time ganhar de outro, o enfrentamento entre eles poderá se repetir, mas não em condições idênticas. Por exemplo, o clima do dia, as condições físicas e emocionais dos atletas, a situação do campo/quadra, o público que está presente, todos esses, e outros, são fatores externos que interferem nos dados. Dessa forma, especialistas poderão apresentar probabilidades diferentes, considerando fatores externos diferentes (DANTAS, 2022).*

Exemplo 6. *No caso que se deseja calcular a probabilidade de uma viagem pra Lua ser bem sucedida, especialistas podem atribuir diferentes probabilidades, pois não há tantas viagens para serem consideradas no caso da probabilidade frequentista, até porque, um evento desse experimento, em caso de insucesso, poderá ocasionar uma tragédia, além de ter um custo milionário.*

Essas são as definições de probabilidade. Nas próximas sessões são apresentadas outros conceitos importantes, sendo eles a probabilidade condicional (Seção 2.2) e a geométrica (Seção 2.3).

2.2 Probabilidade condicional

Para definirmos a probabilidade condicional, dado dois eventos distintos A e B pertencentes ao mesmo espaço amostral, calculamos a probabilidade de ocorrer o evento B , considerando que o evento A ocorreu. Ou seja, iremos calcular a probabilidade do evento B ocorrer, sendo que A já ocorreu.

Logo, podemos adotar o seguinte procedimento, como o evento A ocorreu, não iremos levar em consideração nenhum ponto do espaço amostral que não pertença a A , assim, para calcularmos a probabilidade do evento B ocorrer, dado que A já ocorreu, A se tornará o novo espaço amostral desse experimento.

Desta forma, segue a definição de probabilidade condicional.

Definição 2.4. *Considere o espaço amostral, denotado por Ω , e A e B sendo eventos distintos de Ω . Supondo que $P(A) > 0$, a probabilidade condicional de B dado A , denotado por $P(B|A)$, é definida por:*

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad (2.1)$$

sendo $P(AB) = P(A \cap B)$ a probabilidade de A e B ocorrer simultaneamente.

Além disso, podemos manipular a Equação (2.1) e obter:

$$P(AB) = P(A)P(B|A). \quad (2.2)$$

Generalizando (2.2), temos:

Lema 1. Considere o espaço amostral, denotado por Ω , e sejam A_1, A_2, \dots, A_n eventos de Ω , em que está definida a função de probabilidade $P(\cdot)$, assim, tem-se:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \quad (2.3)$$

Demonstração.

Na Equação (2.2) temos $n = 2$, com $A_1 = A$ e $A_2 = B$. Vamos supor que (2.3) vale para $n - 1$ eventos. Dessa forma, temos:

$$P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2}). \quad (2.4)$$

Além disso, aplicando (2.2) aos eventos $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ e A_n , obtemos:

$$P(A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n) = P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \quad (2.5)$$

Agora, pela nossa hipótese, temos que:

$$P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2}).$$

Assim, fazendo a substituição de (2.4) em (2.5), obtemos:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2})P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

□

Exemplo 7. Considere um lago artesanal com duas espécies de peixes. Nesse lago há 3 machos e 2 fêmeas da espécie 1 e 6 machos e 5 fêmeas da espécie 2. Seja o evento A “pescar um peixe da espécie 1” e B o evento “pescar um peixe fêmea”. Desta forma, qual a probabilidade de B acontecer dado que A ocorreu?

Pelo enunciado $P(A) = \frac{5}{16}$, $P(B) = \frac{7}{16}$ e $P(AB) = \frac{2}{16}$.

Usando a Equação 2.1 temos que $P(B|A) = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{2}{5} \approx 0,4$.

Assim, a partir do conhecimento de que o peixe é da espécie 1, a probabilidade do evento de interesse ocorrer é de $\frac{2}{5}$. Desta forma, comparando $P(B)$ e $P(B|A)$, percebemos que usando a probabilidade condicional, temos uma probabilidade mais precisa, dado que já temos conhecimento prévio de uma informação.

Exemplo 8. Em um jogo de bingo há 75 possíveis números para serem sorteados (1 a 75) e a cada rodada os números são retirados, sem reposição. Seja A o evento “sortear

um número par” e B , “sortear um número ímpar”. Qual a probabilidade de na primeira rodada ocorrer A e na segunda ocorrer B ? Para isso, iremos calcular $P(A_1B_2)$ sendo A_1B_2 o evento que corresponde a A ocorrer na primeira rodada e B na segunda.

Pelo enunciado temos que $P(A) = \frac{37}{75}$, $P(B) = \frac{38}{75}$ e $P(B|A) = \frac{38}{74}$, mais uma vez conseguimos analisar que $P(B|A)$ é mais precisa que a $P(B)$. Desta forma, temos que $P(A_1B_2) = \frac{37}{75} \times \frac{38}{74} = \frac{1.406}{5.550} \approx 0,253$.

Além disso, a probabilidade condicional também satisfaz a definição axiomática de probabilidade, os Axiomas de Kolmogorov, como é demonstrado a seguir, se tornando uma nova medida de probabilidade.

Assim, considere A um evento, de forma que $P(A) > 0$. Dessa forma, a probabilidade condicional satisfaz:

- a) $P(B|A) \geq 0$, para todo evento B ;
- b) Se B_1, B_2, \dots, B_n são eventos mutuamente exclusivos, então:

$$P(\bigcup_{k=1}^n B_k|A) = \sum_{k=1}^n P(B_k|A);$$

- c) Se Ω denota o espaço amostral, então $P(\Omega|\Omega) = 1$.

Demonstração.

a) Pela definição de probabilidade e de probabilidade condicional, temos que $P(A) > 0$ e, pelo axioma de probabilidade, uma probabilidade é sempre não negativa, assim,

$$P(AB) \geq 0.$$

Logo, $P(B|A) \geq 0$.

b) A partir da definição de probabilidade condicional temos:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=1}^n B_k|A) &= \frac{P((\bigcup_{k=1}^n B_k) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{k=1}^n (B_k \cap A))}{P(A)} = \frac{\sum_{k=1}^n P(B_k \cap A)}{P(A)} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n P(B_k|A)P(A)}{P(A)} = \sum_{k=1}^n P(B_k|A). \end{aligned}$$

c) $P(\Omega|\Omega) = \frac{P(\Omega)}{P(\Omega)} = 1$.

□

Além desses conceitos abordados de probabilidade condicional, há mais dois tópicos importantes para serem estudados: o Lema das probabilidades totais e o Teorema de Bayes. O Lema das probabilidades totais foi visto principalmente porque é usado na demonstração do Teorema de Bayes.

Lema 2. (Lema das probabilidades totais)

Considere o espaço amostral, denotado por Ω . Sejam $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ partições de Ω , além disso, seja A um evento e P uma probabilidade definida nos eventos de Ω . Desta forma:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k).$$

Demonstração.

Como $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ são partições de Ω , então eles são eventos mutuamente exclusivos e todos unidos resultam em Ω . Logo, $\Omega = \bigcup_{k=1}^n B_k$. Além disso, temos que $A = A\Omega = A(\bigcup_{k=1}^n B_k) = \bigcup_{k=1}^n AB_k$. Desta forma, calculando $P(A)$ teremos:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(AB_k) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k).$$

□

Teorema 1. (Teorema de Bayes)

Considere o espaço amostral, denotado por Ω . Seja A um evento e B_i partições de Ω . Seja P uma probabilidade definida nos eventos de Ω . Para $i = 1, 2$,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}.$$

Demonstração.

Calculando $P(B_i|A)$ pela equação dada na Definição 2.4, temos:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)}.$$

Descrevendo $P(B_iA)$ como na equação (2.1), obtemos:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}.$$

Descrevendo $P(A)$ como na equação do Teorema 1, temos como resultado:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}.$$

□

Podemos generalizar o Teorema de Bayes para qualquer partição finita do espaço amostral, ou seja, com B_i sendo partições do espaço amostral, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, e A sendo um evento do mesmo espaço amostral. Além disso, como $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ são partições do espaço amostral, então $P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + \dots + P(B_n) = 1$.

Exemplo 9. *No teste de gravidez de farmácia, 99% dos resultados positivos são corretos, sendo assim, 1% dos testes dão positivo mas a mulher não está grávida. Além disso, 30% dos resultados negativos são incorretos, ou seja, 30% dos resultados negativos as mulheres estão grávidas. Sabendo que em um grupo de mulheres, 60% estão grávidas, qual a probabilidade do teste de uma delas dar positivo mas ela não estar grávida? Sejam B_1 o evento “estar grávida” e B_2 , “não estar grávida”, sabemos que a probabilidade dela estar grávida é 0,60 e de não estar é 0,40. Além disso, seja o evento “resultado positivo”, denotado por A . Para calcularmos $P(B_2|A)$, iremos usar o Teorema de Bayes:*

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_2)P(A|B_2) + P(B_1)P(A|B_1)} = \frac{0,4 \cdot 0,01}{0,4 \cdot 0,01 + 0,6 \cdot 0,99} \approx 0,00669.$$

Assim, a probabilidade é de 0,00669, isto é, a chance de ocorrência do evento é de 0,669%.

Exemplo 10. *Uma fábrica de instrumento musical, compra uma mesma peça de três fornecedores, sendo eles B_1, B_2 e B_3 . Para isso, do total de peças que eles utilizam, eles adquirem 60% do fornecedor B_1 , 30% do fornecedor B_2 e 10% do fornecedor B_3 . Além disso, sabe-se que os fornecedores B_1, B_2 e B_3 possuem a probabilidade de produzirem peças sem defeitos de 0,8; 0,75 e 0,4, respectivamente. Sabendo disso, qual a probabilidade de uma peça ser do fornecedor B_3 , dado que ela é defeituosa? Considere A como o evento “peça com defeito”, para calcularmos $P(B_3|A)$ iremos usar o Teorema de Bayes:*

$$\begin{aligned} P(B_3|A) &= \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_3)P(A|B_3) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_1)P(A|B_1)} \\ &= \frac{0,1 \cdot 0,6}{0,1 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,25 + 0,6 \cdot 0,2} \approx 0,24. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade é de 0,24, isto é, a chance de ocorrência do evento é de 24%.

2.3 Probabilidade geométrica

Para definirmos a probabilidade geométrica, temos que entender que os conceitos geométricos são levados em consideração para o cálculo da probabilidade, considerando a forma dos espaços amostrais contínuos, determinando os eventos favoráveis e possíveis por estimativas geométricas, utilizando da abordagem da probabilidade clássica (Definição 2.2) para a resoluções de problemas. O espaço amostral contínuo citado é um conjunto

de pontos no plano ou no espaço, como retas, figuras planas e volumes bem definidos, e os eventos são subconjuntos desses objetos geométricos (KAYSER; BALTAZAR; SILVA, 2024).

Definição 2.5. *Considere um espaço amostral, denotado por Ω , não enumerável. Dessa forma, a probabilidade $P(A)$, sendo A um evento de Ω , será calculado por:*

$$P(A) = \frac{\text{Medida de } A}{\text{Medida de } \Omega},$$

sendo a medida um comprimento de intervalos, área, volume e similares, variando conforme o espaço amostral e o experimento.

O problema da agulha de Buffon, tema de estudo desse trabalho, é considerado como o ponto inicial da probabilidade geométrica, já que Buffon foi o primeiro a utilizar, de forma algébrica, conceitos da geometria - como plano, distância e medida - para calcular a probabilidade de um certo evento de um experimento aleatório (SANTÁLO, 1984). No próximo capítulo, estudamos mais afundo esse problema e sua demonstração.

Exemplo 11. *Considere uma corda de 1 metro de comprimento, qual a probabilidade de um ponto S qualquer pertencer aos 15 centímetros iniciais dessa corda? Nesse caso, nosso espaço amostral é o comprimento da corda de 100cm e nosso evento A é “ S pertencer aos 15cm iniciais da corda”. Assim, teremos que a probabilidade de A , denotada por $P(A)$, é:*

$$P(A) = \frac{15}{100} = 0,15.$$

Exemplo 12. *O problema do macarrão: “Dividindo aleatoriamente um macarrão espaguete (similar a um segmento de reta) em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos do macarrão formem um triângulo?” (KAYSER; BALTAZAR; SILVA, 2024).*

Visto isso, é garantido que $P(A)$, apresentado na Definição 2.5, é probabilidade, pois satisfaz a definição axiomática de probabilidade, os Axiomas de Kolmogorov, como é demonstrado a seguir.

Dessa forma, seja Ω um espaço amostral que satisfaça as condições da Definição 2.5. A probabilidade de A , denotada por $P(A)$, ocorrer satisfaz:

- a) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \subset \Omega$;
- b) Se A_1, A_2, \dots, A_n são eventos mutuamente exclusivos (disjuntos) de Ω , então:

$$P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k);$$

- c) $P(\Omega) = 1$.

Demonstração.

a) Temos que Medida de $\Omega > 0$ e Medida de $A \geq 0$, além disso, temos também que Medida de $A \leq$ Medida de Ω , pois Medida de $A \subseteq$ Medida de Ω , logo,

$$0 \leq \text{Medida de } A \leq \text{Medida de } \Omega \Rightarrow 0 \leq \frac{\text{Medida de } A}{\text{Medida de } \Omega} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

b) Seja A_1, A_2, \dots, A_n eventos mutuamente exclusivos. Suponha que A_1 possua medida igual a m_1 , A_2 possua medida igual a m_2 e, assim por diante, até A_n . Além disso, suponha também que $\bigcup_{k=1}^n A_k$ possua medida igual a m , todos em Ω .

Como A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente exclusivos, por definição, eles não possuem medidas do espaço amostral em comum. Assim, a medida m de $\bigcup_{k=1}^n A_k$ é:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \frac{m}{\text{Medida de } \Omega} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\text{Medida de } \Omega} \\ &= \frac{m_1}{\text{Medida de } \Omega} + \frac{m_2}{\text{Medida de } \Omega} + \dots + \frac{m_n}{\text{Medida de } \Omega} = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \end{aligned}$$

Logo, $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$.

c) Por definição, sabemos que a Medida de Ω é a medida de todos os eventos simples do espaço amostral Ω . Além disso, a Medida de A é a medida do evento A em Ω . Dessa forma, temos:

$$P(\Omega) = \frac{\text{Medida de } A}{\text{Medida de } \Omega} = \frac{\text{Medida de } \Omega}{\text{Medida de } \Omega} = 1.$$

□

A probabilidade geométrica é conhecida atualmente como Geometria Integral e Estocástica, como já citado (SANTÁLO, 1984).

3 O problema da agulha de Buffon

O problema da agulha de Buffon foi desenvolvido por Georges Louis Leclerc, o Conde de Buffon, sendo publicado em 1777 em um ensaio de sua obra “Historie Naturelle”, dando início a probabilidade geométrica, conhecida atualmente por Geometria Integral e Estocástica.

Nesse problema, resumidamente, calcula-se a probabilidade de uma agulha ser lançada em um plano, que possui retas paralelas, e cair sobre uma dessas retas. Para esse cálculo, Georges rompe as barreiras do cálculo de probabilidade e define probabilidade como uma função sobre espaços amostrais não-enumeráveis, levando em consideração conceitos geométricos.

Em 1812, Pierre Simon Laplace generaliza esse problema e calcula o valor de π , constante matemática, usando a fórmula desenvolvida por Buffon. Essa generalização e demonstração é conhecida como: o problema da agulha Buffon-Laplace.

3.1 História de Buffon

Georges Louis Leclerc (Figura 1) nasceu no século XVIII na França e é considerado um dos maiores Naturalistas do seu tempo, juntamente com o sueco Karl Linneu. Georges estudou Medicina, Direito e aos 27 anos foi para a Academia de Ciências de Paris, onde desenvolveu seus principais estudos.

Figura 1 – Conde de Buffon.



Fonte: website Meisterdrucke.

O maior interesse de pesquisa do Conde foi o homem em sua totalidade, buscando compreender e estudar sobre as paixões, reações afetivas e preocupações humanas. Além disso, na Matemática, suas principais contribuições foram a tradução para o francês do

método dos fluxos de Newton e o problema da agulha na teoria das probabilidades, assunto de estudo deste trabalho.

Louis foi nomeado pelo rei francês Luiz XV como Conde de Buffon, uma vila da França, atualmente Buffon é uma comuna com aproximadamente 190 habitantes. Durante suas viagens, Georges acrescentou em seu nome “de Buffon”, já que a vila possuía histórias com sua família desde seus antepassados.

Sobre sua vida pessoal, Georges casou-se com Marie-Françoise de Saint-Belin-Malain, teve dois filhos e faleceu em 1788, com 80 anos, em Paris.

A obra “Historie Naturelle” é a principal em sua carreira como Naturalista, contendo 36 volumes. Em 1777, Buffon publicou o “Essai d’Arithmetique Morale”, um ensaio sobre jogos de azar e a sua influência no comportamento humano, assunto de seu interesse. Dentre suas obras, esta é a mais estudada pelos matemáticos, pois nela Buffon relaciona a Matemática com a realidade humana.

Neste ensaio, Buffon reivindica o possível cálculo da probabilidade através de conceitos de geometria, afirmando que para isso basta inventar jogos que se baseiem nessas relações. Por conseguinte, ele utiliza dois jogos de azar, o Franc Carreau e o jogo conhecido atualmente como o problema da agulha de Buffon, para exemplificar cálculos de probabilidade.

O jogo Franc Carreau se baseia no lançamento ao acaso de uma moeda circular sobre um piso quadriculado para calcular a probabilidade da moeda ficar completamente dentro de um dos quadrados, sem interseccionar as linhas.

No caso do problema da agulha de Buffon, considera uma agulha lançada ao acaso sobre um plano dividido em retas paralelas com distância fixa entre elas, denotada por D . Dessa forma, calcula-se a probabilidade da agulha cair sobre o plano e cortar uma das retas paralelas. Nesse caso, a condição é que o tamanho da agulha seja menor do que a distância D . Buffon calcula essa probabilidade e desenvolve uma fórmula, demonstrando de forma direta com cálculos incluindo medidas.

Com o “problema da agulha de Buffon”, nasce a Teoria das Probabilidades Geométricas. Como vemos, trata-se de um jogo de azar, cuja solução está em “medir” os casos favoráveis e possíveis, ao invés de “contá-los” (conforme ocorre nos jogos discretos, a exemplo dos dados ou das cartas). A diferença entre “medir” e “contar” é o que distingue a Geometria da Aritmética (SANTÁLO, 1984).

3.2 Aplicações das teorias iniciadas por Buffon

Com o nascimento da teoria das probabilidades geométricas, através do problema da agulha de Buffon, diversos estudos foram, e ainda são, realizados, buscando aplicar a fórmula desenvolvida por Buffon e as teorias da probabilidade geométrica, de acordo com os objetivos do estudo.

Para que a teoria não fique só no papel, mas seja útil e aplicável na realidade, muitos pesquisadores, buscando respostas para suas perguntas de pesquisa, fizeram o uso da teoria desenvolvida no problema da agulha de Buffon e tiveram êxito em suas buscas e aplicações. Podemos exemplificar dois casos nos quais a teoria das probabilidades geométricas foram aplicadas.

No primeiro caso, temos a teoria sendo usada para encontrar o comprimento total de escoamento em uma bacia hidrográfica. Para determinar tal comprimento é necessário o uso do curvímeter em um processo trabalhoso e demorado, porém, utilizando o método desenvolvido a partir do problema da agulha de Buffon, o processo se torna mais simples e rápido. Ademais, quando comparado os resultados usando a teoria das probabilidades geométricas e os resultados usando o curvímeter, o valor encontrado não possui diferença expressiva. Assim, pela simplicidade e menor gasto de tempo, neste experimento, a teoria de Buffon é considerada mais prática e com menor chance de erro (BATISTA, 1987).

No segundo caso, a Geometria Integral é utilizada na Esteorologia - ciência que trata de uma extrapolação do plano ao espaço (SANTÁLO, 1984) - e na Tomografia Computorizada, que diferente da radiografia, que obtém uma imagem do corpo na projeção sobre um plano, essa reconstrói de forma precisa o corpo, com a densidade da matéria e a sua posição exata no espaço. Na Esteorologia, há o uso da esperança matemática (MAGALHÃES, 2006) e de teorias desenvolvidas a partir do problema da agulha de Buffon. Da mesma maneira, a Tomografia Computorizada usa a divisão em seções planas e raios paralelos. Santálo (1984), finaliza seu artigo dizendo a importância dos processos e etapas da Ciência:

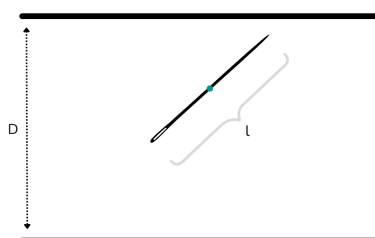
A Estereologia e a Tomografia Computadorizada ilustram bem o processo das diferentes etapas no avanço da Ciência. Inicialmente, os estudos são motivados pela simples curiosidade de conhecer ou, por outra, buscam solucionar os problemas que aparecem em atividades extra científicas (a “paixão” de Buffon pelos jogos de azar serve como um bom exemplo). Depois, estes resultados obtidos revelam-se aplicáveis a questões práticas apresentadas pela Técnica - é a etapa das “aplicações” da Ciência. Posteriormente, tais aplicações voltam a apresentar problemas de caráter teórico, que novamente despertam o interesse dos cientistas puros, dando origem, muitas vezes, a outros estudos e a teorias exclusivamente especulativas. (SANTÁLO, 1984).

3.3 Demonstração do problema das agulhas

O problema da agulha de Buffon, como já dito anteriormente, é conhecido como o ponto inicial da probabilidade geométrica, o qual foi formulado por Conde Buffon em sua obra “Essai d’Arithmetique Morale”, em 1777.

A seguir, apresenta-se a questão do problema da agulha enunciado por Buffon: “Qual a probabilidade de uma agulha, de medida l , ao ser lançada sobre um plano, cortado por retas paralelas equidistantes (com distância D), cair sobre uma das retas paralelas do plano?” (Figura 2).

Figura 2 – Exemplo de um lançamento da agulha.

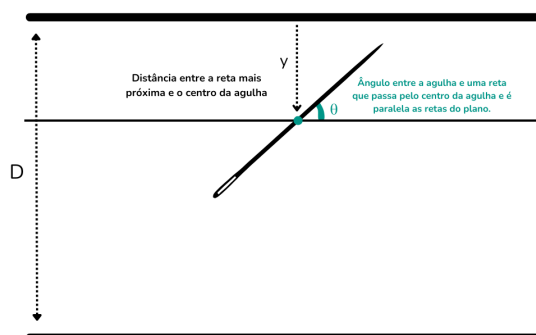


Fonte: criado pela autora.

Para resolver essa questão, Buffon utilizou uma demonstração direta, calculando a medida da área de interesse, denotada por A_e , sobre a medida da área total, denotada por A_Ω .

Desta forma, vamos dividir a demonstração em duas etapas, o cálculo da área de interesse e o cálculo da área total (valor do espaço amostral do experimento). Para isso, vamos considerar Y como a variável aleatória que indica a distância do centro da agulha até a reta do plano mais próxima e Θ como a variável aleatória que indica o ângulo entre a agulha e uma reta, paralela às retas do plano, que passe pelo centro da agulha (Figura 3). Os valores que as variáveis aleatórias Y e Θ assumem são, respectivamente, y e θ mostrados a seguir.

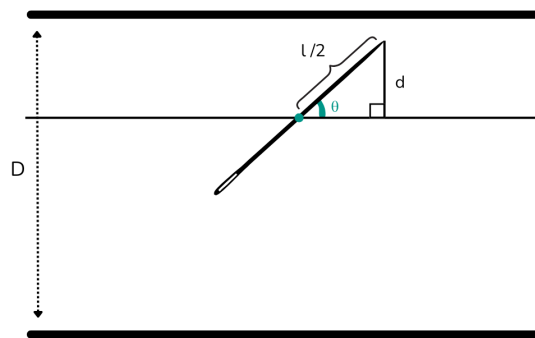
Figura 3 – Variáveis Y e Θ definidas.



Fonte: criado pela autora.

Conhecendo a distância y e o ângulo θ podemos calcular se a agulha está cortando uma das retas do plano. Para isso, precisamos encontrar a distância entre a ponta da agulha e a reta (paralela as retas do plano e que passa pelo centro da agulha). Assim, usa-se as relações métricas do triângulo retângulo. Sempre considerando a ponta da agulha mais próxima da reta do plano.

Considere d a distância da ponta da agulha até a reta que passa pelo centro da agulha em questão. Esse segmento será pertencente à reta que passa pela ponta da agulha e é perpendicular as retas do plano (Figura 4).

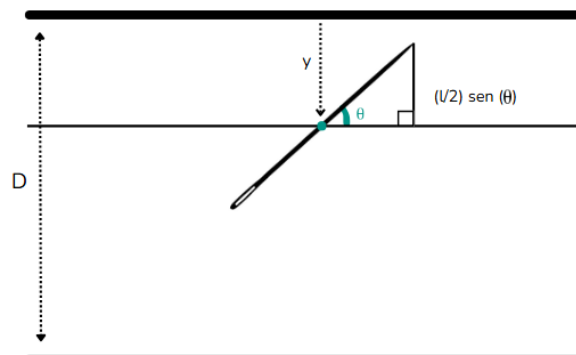
Figura 4 – Distância d .

Fonte: criado pela autora.

Usando a relação métrica $\text{sen}(\theta)$:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{d}{\frac{l}{2}} \Rightarrow d = \frac{l}{2} \text{sen}(\theta). \quad (3.1)$$

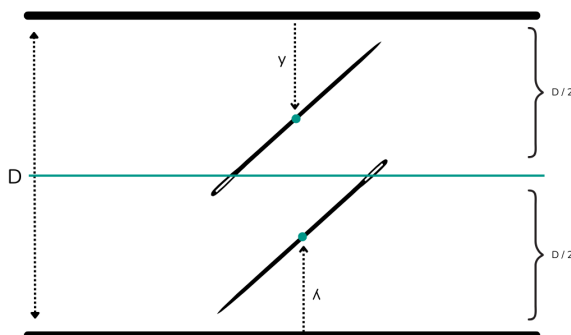
Logo, a distância da ponta da agulha até a reta que passa pelo seu centro é de $\frac{l}{2} \text{sen}(\theta)$ (Figura 5). Portanto, para a agulha estar sobre uma das retas do plano é necessário que, $y \leq \frac{l}{2} \text{sen}(\theta)$.

Figura 5 – Representação da medida d .

Fonte: criado pela autora.

É fácil perceber que Y pode assumir qualquer valor no intervalo $\left[0, \frac{D}{2}\right]$ (Figura 6), pois como estamos considerando a distância do centro da agulha até a reta mais próxima, se $y > \frac{D}{2}$ é só girarmos o plano (180°) e percebermos que y é menor, ou no máximo igual, a $\frac{D}{2}$.

Figura 6 – Intervalos da variável Y .



Fonte: criado pela autora.

Além disso, também é fácil perceber que Θ pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, \pi]$. Assim, se θ for 0, a agulha será paralela às retas do plano, e se for $\frac{\pi}{2}$, a agulha será perpendicular às retas do plano. Podemos perceber que se $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, os resultados são simétricos ao caso de $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Dessa forma, podemos escolher θ por exemplo no intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Como queremos a probabilidade da agulha cair sobre uma das retas do plano, com os intervalos definidos e com a função de interesse encontrada (3.1), conseguimos encontrar as medidas para o cálculo da probabilidade.

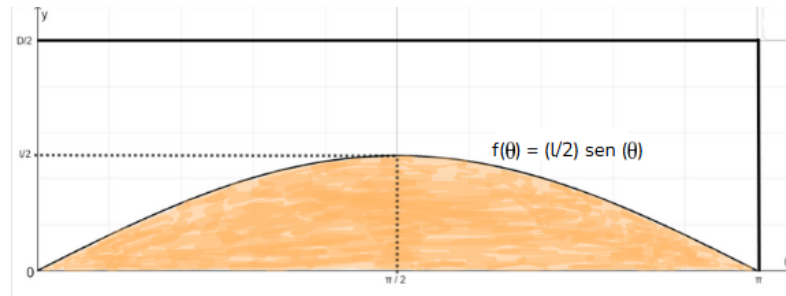
O evento de interesse é no caso em que $y \leq \frac{l}{2} \text{sen}(\theta)$. Como l é conhecido, a variável é Θ , para $0 \leq \theta \leq \pi$, sendo que o caso máximo ocorre na posição que agulha é perpendicular às retas do plano, $\theta = \frac{\pi}{2}$, então, o ponto máximo da função é $\frac{l}{2}$, pois

$$y = \frac{l}{2} \text{sen}(\theta) \Rightarrow y = \frac{l}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{l}{2}.$$

Portanto, já podemos construir o gráfico da função de interesse (Figura 7), com o domínio sendo o intervalo $\left[0, \frac{l}{2}\right]$ e contradomínio sendo o intervalo $[0, \pi]$, para calcularmos a probabilidade.

Temos então, o espaço amostral sendo o retângulo S de largura y e comprimento θ , com $0 \leq y \leq \frac{D}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, e a área de interesse dada pela função, $f(\theta) = y = \frac{l}{2} \text{sen}(\theta)$, com o ponto máximo em $y = \frac{l}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ como na Equação (3.1) e ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Gráfico da função.



Fonte: criado pela autora.

Para calcularmos a área de interesse A_e , calcula-se a área da função $f(\theta)$, para θ variando de 0 a π . Para isso, usa-se integral definida, a qual é uma operação que calcula a área sob a curva de uma função em um intervalo $[a, b]$, fornecendo um número real que mede a acumulação de valores da função entre a e b (GUIDORIZZI, 2001). Assim, temos

$$\begin{aligned} A_e &= \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \text{sen}(\theta) d\theta = \frac{l}{2} \int_0^{\pi} \text{sen}(\theta) d\theta = \frac{l}{2} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \left[\frac{l}{2} (-\cos \pi) \right] - \left[\frac{l}{2} (-\cos 0) \right] \\ &= \left[\frac{l}{2} (-(-1)) \right] - \left[\frac{l}{2} (-1) \right] = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} = l. \end{aligned}$$

Logo, a medida da área de interesse é $A_e = l$.

Para calcular a medida do espaço amostral A_{Ω} , calcula-se a área do retângulo S , sendo ela:

$$A_{\Omega} = \frac{D}{2} \pi.$$

Basta agora calcularmos a probabilidade $P(A)$, com $P(A) = \frac{A_e}{A_{\Omega}}$, sendo A o evento “a agulha cair sobre uma das retas”, como definida na Definição 2.3. Dessa forma,

$$P(A) = \frac{A_e}{A_{\Omega}} = \frac{l}{\frac{D}{2} \pi} = \frac{2l}{\pi D} = \frac{2}{\pi} \times \frac{l}{D}, \quad (3.2)$$

sendo l o tamanho da agulha e D a distância fixa entre as retas do plano.

Portanto, temos a probabilidade de uma agulha, de medida l , ao ser lançada sobre um plano, cortado por retas paralelas equidistantes (em uma distância D), cair sobre uma das retas paralelas do plano. Essa probabilidade é calculada pela função (3.2), como demonstrado.

Nesse caso, foi demonstrado a fórmula para $l < D$, caso clássico do problema da agulha de Buffon.

4 Atividade em sala de aula

Quebrar o paradigma de apenas abordar assuntos que não envolvam os conceitos geométricos é essencial para o ensino pleno dos conceitos de Probabilidade. Além disso, muitos estudantes apresentam dificuldades em compreender o conteúdo apenas com os exemplos abstratos, então, trazer um material concreto, analisar juntamente com os alunos e “brincar” com os casos, são métodos significativos para a formação do pensamento probabilístico dos estudantes.

Diversos professores se arriscam na missão de trazer materiais concretos nas aulas, porém, muitas vezes, ficam presos naqueles exemplos típicos: lançamento de dados, moedas ou urnas. Dessa forma, esse trabalho foi pensado para trazer uma atividade diferente das usuais sobre probabilidade, aumentando o portfólio de exemplos e atividades para o desenvolvimento do pensamento probabilístico.

As habilidades da BNCC norteiam os conteúdos da Educação Básica. Dessa forma, é imprescindível realizar uma busca nesse documento para compreender o que deve ser abordado de cada conteúdo. Por esse motivo, foi elencado abaixo as habilidades de Probabilidade para o Ensino Médio (BRASIL, 2018):

- (EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.);
- (EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade;
- (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos;
- (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades;

Com as habilidades norteadoras, é possível criar atividades com objetivos sólidos para cada série e turma. Neste trabalho, como o foco é em atividades do problema da agulha de Buffon, após análise dos conteúdos e habilidades de cada série da Educação Básica e o nível da atividade, sugere-se que as atividades sejam realizadas no Ensino Médio. Porém, o professor pode adaptar a atividade para que ela seja aplicável também para o Ensino Fundamental.

4.1 Confeção da atividade

Para realizar as atividades descritas abaixo, é preciso confeccionar o plano para o lançamento da agulha. O termo plano refere-se à região plana cortada por retas paralelas equidistantes descrita por Buffon no caso da agulha. A seguir, é abordado sobre a confecção do plano.

Seguem os materiais necessários para a confecção:

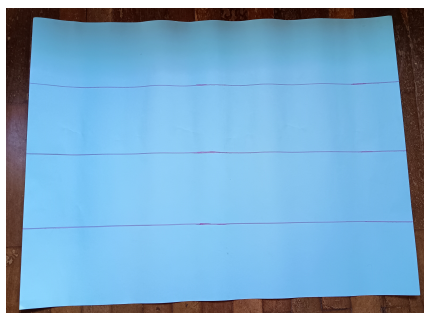
- Uma superfície para o plano (Exemplos: papelão, isopor, folha de papel, cartolina, etileno acetato de vinila - E.V.A.);
- Marcador para desenhar as retas do plano (Exemplos: canetas esferográficas, canetas coloridas, canetas próprias para o material);
- Régua e compasso para o processo de desenhar as retas.

Etapas para a confecção do plano:

1. Separe os materiais necessários para a confecção;
2. Na superfície escolhida para o plano, delimite o tamanho da distância D entre as retas, de maneira que todas sejam equidistantes e preencham todo o plano de maneira uniforme;
3. Com auxílio da régua e do transferidor, na distância escolhida, desenhe as retas paralelas. Lembre-se: para as retas serem paralelas entre si, há uma reta perpendicular a todas elas.

A autora confeccionou um plano com a base de cartolina azul e com a distância $D = 12,5\text{cm}$ (Figura 8).

Figura 8 – Plano confeccionado.



Fonte: criado pela autora.

O professor tem a opção de realizar a confecção do plano em conjunto com os estudantes, podendo trabalhar várias questões geométricas como retas paralelas, retas

transversais e como dividir uma área em partes iguais. Desta forma, ele trabalhará vários conceitos matemáticos já na confecção do trabalho, instigando os alunos com perguntas como: “Como vamos escolher o tamanho da distância D entre as retas?”, “Qual a definição de retas paralelas?” e “Como podemos construir as retas paralelas?”.

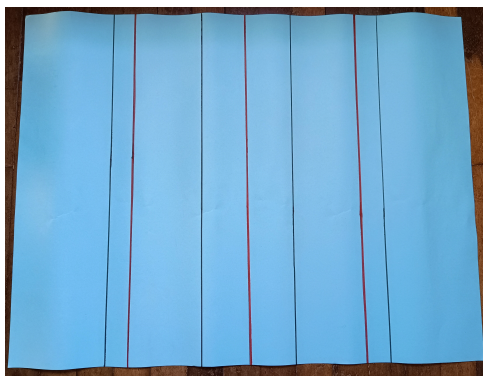
Além disso, pode-se realizar na mesma superfície diversos planos, com diferentes distâncias. Exemplo: com uma caneta da cor preta, marque as retas de um plano com distância D_1 entre elas, e, com uma caneta de cor rosa, marque as retas de um outro plano com distância D_2 , e assim por diante (Figura 9). Dessa maneira, quando a atividade for realizada, basta informar aos alunos a cor das retas do plano que será utilizado, dando mais possibilidades do cálculo de diferentes probabilidades. Porém, se não for viável para a turma, a sugestão é que sejam elaborados diferentes planos, com diferentes distâncias, para a atividade. A autora também confeccionou um plano nessas condições, sendo na mesma base do plano anterior (Figura 8), porém no inverso da cartolina (Figura 10).

Figura 9 – Exemplo da superfície com dois planos.



Fonte: criado pela autora.

Figura 10 – Superfície com dois planos confeccionada pela autora.



Fonte: criado pela autora.

Ademais, é importante que a primeira e última reta pertençam à todos os planos, para que todas as distâncias sejam equidistantes, deixando bem visível quais as retas que são de mais de um plano, quando isso ocorrer.

Após a confecção do plano, basta escolher a agulha. A agulha deve respeitar a condição de ter tamanho l menor do que a distância D do plano. Além disso, é sugerido que o professor leve agulhas com diferentes tamanhos para brincar com os estudantes, desde que todas respeitem a condição do problema ($l < D$). Para a substituição da agulha, pode ser usado palitos e fósforos de diferentes tamanhos.

4.2 Exemplos de atividades para realizar em sala de aula

Atividade 1 - Desenvolvimento da função de Buffon

Para essa atividade, deve-se construir com os alunos os intervalos das variáveis Y e Θ , definindo y e θ como foi demonstrado na Seção 3.3. Durante essa construção, é trabalhado distâncias, as definições de retas paralelas e perpendiculares e a relação métrica seno. Esses conteúdos fazem parte da grade escolar e poderá ser lembrado juntamente com os estudantes.

Após definir com os alunos os intervalos e as distâncias, pode ser trabalhado a questão: “Como calcular, com essas informações, se a agulha está sobre uma das retas?”. Assim, investigue e encontre com os alunos a função de interesse (3.1) dos casos favoráveis ($y \leq \frac{l}{2}\text{sen}(\theta)$), com y e θ variando conforme o intervalo construído) como já mostrado acima. A partir disso, construa com os alunos o gráfico da função, com os eixos y e θ (Figura 7).

Para o cálculo da função de probabilidade, explique para os estudantes a Definição 2.3, já que nesse caso a função de probabilidade levará em questões os conceitos geométricos, calculando a área da função de interesse, denotada por A_e na Seção 3.3, sobre a área total do espaço amostral, denotada por A_Ω na Seção 3.3.

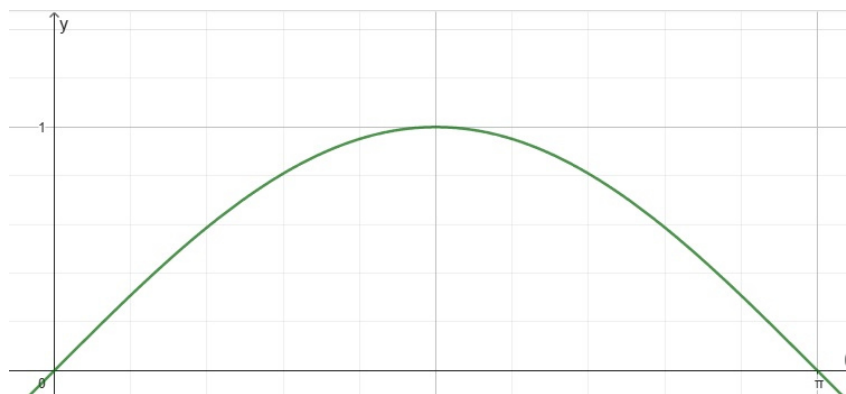
Para o cálculo da área total do espaço amostral, é usado o método de área de retângulo, já vista pelos estudantes (comprimento \times largura). Porém, para o cálculo da área de interesse (área da função nos devidos intervalos) é usado o conceito de integral (GUIDORIZZI, 2001), mas, como na Educação Básica não há contato com esse tipo de cálculo, é sugerido uma atividade visual para os estudantes calcularem e compreenderem que a área da função de interesse é l , como calculado pela integral.

Para isso, inicia-se a investigação com os alunos com a pergunta: “Como calcular a medida da área de uma figura com curvas como a área da função?”. Os alunos darão sugestões e caberá ao professor mediar, responder e interagir com elas. Neste caso, será trabalhado com a decomposição de áreas conhecidas.

Para calcular com os alunos a área da função (área abaixo da senóide), a metodologia será investigativa. Inicialmente, é sugerido que o professor trabalhe com uma função senoidal padrão, a função $f(\theta) = \text{sen}(\theta)$ no intervalo $[0, \pi]$ (Figura 11). É interessante que o professor construa na lousa o gráfico da função senoidal e peça para os estudantes

reproduzirem também em seus materiais. A atividade poderá ser individual, em duplas ou grupos.

Figura 11 – Função senoidal padrão.

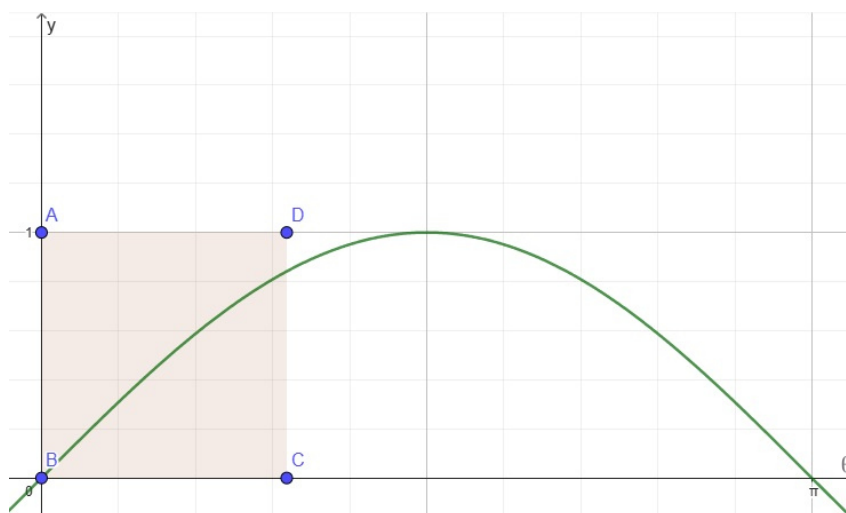


Fonte: criado pela autora.

A função seno, derivações e os gráficos, são conteúdos da Educação Básica, logo, essa atividade engloba conteúdos de Matemática vistos pelos estudantes.

Após a confecção da senóide, o professor poderá iniciar dizendo o objetivo da investigação: Encontrar um polígono com área conhecida que, quando decomposto em diversas partes, possa ter aproximadamente a área da senóide. O primeiro polígono sugerido é um quadrado (Quadrado 1) de área conhecida igual a 1, com largura e comprimento medindo 1, a largura medindo 1 foi escolhida por ser a altura máxima da senóide (condição do seno). Esse quadrado pode ser trabalhado sobrepondo a função, para a investigação ficar mais visível (Figura 12).

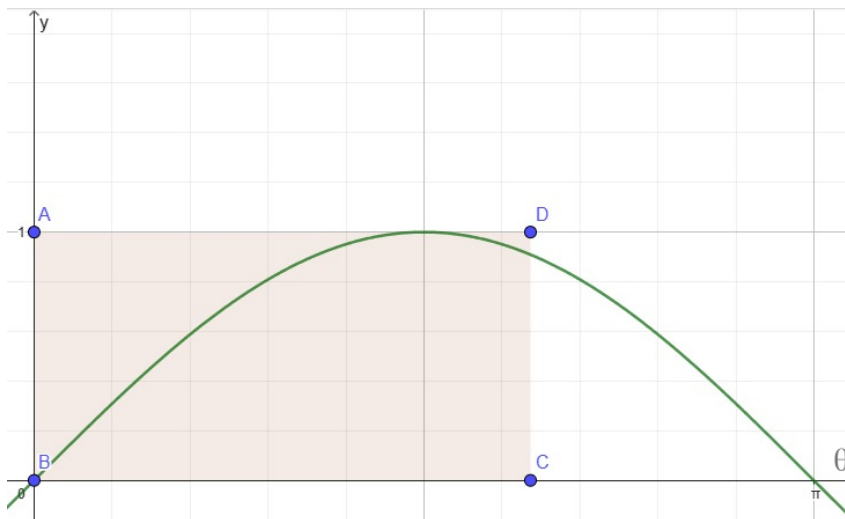
Figura 12 – Quadrado 1 sobreposto a função seno.



A partir dessa construção, os alunos podem ser questionados: “Se aumentarmos o quadrado, conseguimos uma área conhecida e que ainda seja menor, ou igual, a área da função?” e “Se sim, para qual direção e quantas unidades é melhor aumentarmos?”. É

importante frizar que a área do polígono não pode ser maior do que a área da senóide, apenas menor ou aproximadamente igual. O objetivo é instigar os estudantes a visualizarem um possível aumento de 1 no comprimento do quadrado, resultando em um retângulo (Retângulo 1) de área igual a 2, com largura de 1 e comprimento de 2 (Figura 13). Para melhor visualização, é sugerido que trabalhe novamente com a sobreposição do retângulo sobre a função.

Figura 13 – Retângulo 1 sobreposto a função seno.



Com esse novo polígono, de área conhecida, sobreposto a função, pode-se questionar aos estudantes novamente: “Se aumentarmos mais uma unidade no comprimento, a nova área será maior que a área da função?”. Espera-se que os estudantes visualize que sim, como mostrado na Figura 14 (Retângulo 2, com área igual a 3).

Figura 14 – Retângulo 2 sobreposto a função seno.



Fonte: criado pela autora.

Após essas construções, espera-se que os alunos escolham o retângulo de área igual a 2 para dar continuidade na investigação, construindo-o e o recortando em outro material,

sempre levando em consideração as medidas referentes aos eixos da função senoidal. Além disso, a partir das sobreposições, é possível visualizar que a área da nossa senóide está entre 2 e 3. É importante ressaltar que o cálculo da área da senóide será de forma aproximada, então sempre há um mínimo erro possível.

Para o próximo passo da investigação, lembre com os estudantes que ao dividir o retângulo em diferentes partes, sem perda de material, a área inicial é mantida. A decomposição de um polígono em diversas partes, sem perda, pode ser trabalhada com o Tangram e é uma habilidade sugerida pela BNCC (BRASIL, 2018). O Tangram é um material manipulativo formado por sete peças geométricas que juntas formam um quadrado. Hoje em dia, o Tangram¹ está disponível também de forma *on-line*.

Logo depois de todos esses passos, motive os estudantes trabalharem e cobrirem toda a área da senóide com partes do retângulo. Nessa hora, eles poderão recortar o retângulo como acharem mais favorável com o objetivo de cobrir a área da senóide. Após a realização dessa tarefa, eles poderão usar cola para a sobreposição final ficar fixa. Logo, eles perceberão que a área da senóide é aproximadamente a área do retângulo (2), pois a área total do retângulo, decomposta, cobrirá, sem perda, a área total da senóide. Porém, como é uma atividade manual, de aproximação e decomposição, em cada etapa realizada há erros provenientes da não exatidão das atividades manuais, portanto, uma perda ou falta mínima é estimada.

Após a finalização da atividade com a função senoidal padrão, o objetivo é o cálculo da área da senóide da função de interesse do caso das agulhas. Com o gráfico da função $f(\theta) = \frac{l}{2}\text{sen}(\theta)$, variando nos intervalos definidos, já construído (Figura 7), instigue os alunos a visualizarem qual é a área dessa função. Eles poderão utilizar o mesmo método do caso anterior, porém, agora, o retângulo terá largura igual a $\frac{l}{2}$ (altura máxima da função) e comprimento igual a 2 (os gráficos se mantiveram iguais), como visualizado na construção dos intervalos e no gráfico da função. Logo, verão que a área da senóide de interesse será

$$A_e = \frac{l}{2}2 = l.$$

Com A_e calculado, só é preciso calcular A_Ω , que é a área de um retângulo de largura igual a $\frac{D}{2}$ e de comprimento igual a π (Figura 7). Assim, temos:

$$A_\Omega = \frac{D}{2}\pi.$$

Por fim, para chegarmos na função de probabilidade de Buffon para o evento A, “A agulha cair sobre uma das retas do plano”, a partir da Definição 2.3, basta calcularmos

¹ Acesso ao Tangram *on-line*: <http://www.tangramonline.com>.

$\frac{A_e}{A_\Omega}$. Logo,

$$P(A) = \frac{A_e}{A_\Omega} = \frac{l}{\frac{D}{2}\pi} = \frac{2l}{\pi D} = \frac{2}{\pi} \times \frac{l}{D},$$

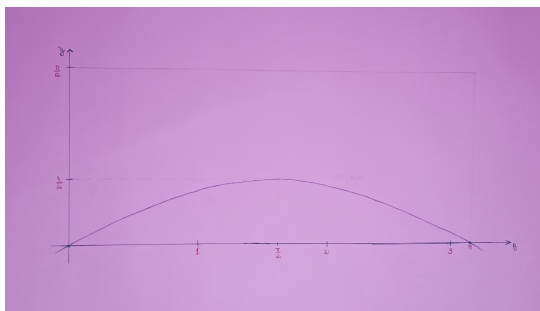
como encontrado por Buffon.

Atráves dessa atividade, é possível demonstrar, na Educação Básica, a função de probabilidade desenvolvida por Buffon. Além disso, na sua execução, são trabalhados diversos conceitos matemáticos, sendo eles: retas paralelas, retas perpendiculares, distância, função seno, triângulo retângulo, relação métrica do seno, área de retângulos, fração e decomposição de polígonos. Ademais, através dessa atividade, é inserido ao estudante conceitos adicionais como a probabilidade geométrica e a área de uma senóide.

A atividade pode ser realizada usando diversos materiais como base, podendo ser: papel branco, papel quadriculado, E.V.A. e cartolina. É sugerido que o professor auxilie os alunos nas construções dos gráficos e dos polígonos. Além disso, a tesoura, régua e cola são materiais importantes para a confecção, recortes e sobreposição na atividade. Para uma melhor visualização, a autora confeccionou cada passo da atividade manual, que podem ser visualizados nas figuras 15 a 18.

1º) Construção do gráfico da função de interesse no intervalo em questão.

Figura 15 – Função de interesse confeccionada.



Fonte: criado pela autora.

2º) Construção da senóide padrão, a função $f(x) = \text{sen}(x)$, no intervalo $[0, \pi]$.

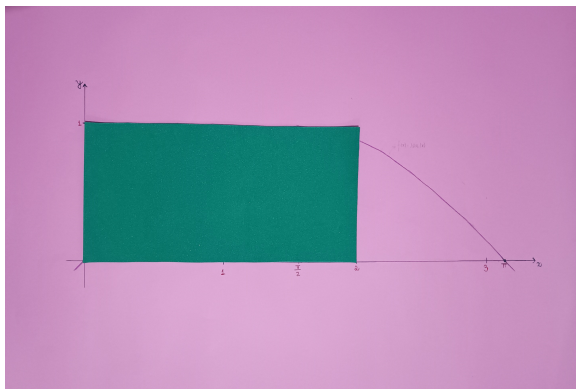
Figura 16 – Senóide padrão confeccionada.



Fonte: criado pela autora.

3º) Construção do retângulo de área igual a 2.

Figura 17 – Retângulo escolhido sobreposto a função.



Fonte: criado pela autora.

4º) Decomposição e colagem do retângulo sobrepondo a área da senóide.

Figura 18 – Colagem finalizada.



Fonte: criado pela autora.

Vale ressaltar que as imagens foram realizadas pela autora, podendo apresentar traços de distorção por conta do ângulo da fotografia, mas todas as dimensões e retas foram respeitadas na confecção. Além disso, reafirmando, como é uma atividade manual, tanto para o professor quanto para os alunos, e de aproximação, é estimado que em alguns casos haja sobra ou falta de material do retângulo para cobrir a senóide, já que há possíveis erros nos tamanhos, eixos, dimensões, recortes e nas curvas da senóide. Porém, essa estimativa é mínima e deverá ser explicada aos alunos.

Após a atividade com a senóide padrão, realizar a mesma atividade com o gráfico da função de interesse, porém, dando a liberdade aos alunos de fazerem ou apenas desenvolverem um pensamento análogo, sem a necessidade das decomposições e sobreposições físicas.

Atividade 2 - O jogo das agulhas

Ao levar os planos e as agulhas na sala de aula, brinque com os alunos do jogo das agulhas. Peça para os alunos formarem grupos para se desafiarem e jogarem a agulha de forma aleatória sobre o plano. Para que não haja interferências, em primeiro momento, não fale o objetivo da agulha atingir as retas, só peça para jogarem a agulha aleatoriamente sobre o plano e anote as vezes que ela cair sobre uma das retas.

Nesse caso, pode ser calculado uma estimativa da probabilidade após jogarem a agulha no plano diversas vezes, trabalhando a probabilidade frequentista do evento A: “A agulha cair sobre uma das retas do plano”.

A autora realizou o experimento em um plano com distância $D = 9,15\text{cm}$ entre as retas e com uma agulha de medida $l = 6,5\text{cm}$. No experimento, foi lançado a agulha 60 vezes sobre o plano, em 31 lançamentos a agulha não interceptou uma das retas do plano e em 29 lançamentos a agulha interceptou uma das retas do plano. Assim, a partir da definição e cálculo da probabilidade frequentista (Definição 2.3) temos:

$$P(A) = \frac{29}{60} \approx 0,483.$$

Após o cálculo da probabilidade através do experimento de lançar a agulha muitas vezes no plano, traga a função de probabilidade desenvolvida por Buffon e calcule juntamente com os alunos, comparando os resultados.

Para o caso do plano acima, a probabilidade do evento A, através da função de Buffon é igual a:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 6,5}{9,15\pi} = \frac{13}{9,15\pi} \approx 0,452.$$

A partir dessa atividade, o professor introduzirá aos estudantes conceitos da probabilidade frequentista e da probabilidade geométrica. Além disso, poderá realizar também a Atividade 1, construindo com os alunos como o Conde Buffon chegou na função, e mostrando o porquê ela é mais precisa do que o experimento frequentista, já que para obter a probabilidade real do evento, a quantidade de lançamentos deveria tender ao infinito.

Atividade 3 - O jogo das agulhas com variações nos tamanhos das distâncias e nos tamanhos das agulhas

Faça diferentes grupos jogarem em diferentes planos e com diferentes tamanhos de agulhas, anote sempre os resultados para cada aplicação. Após uma grande quantidade de lançamentos, indague os alunos com as seguintes questões:

- A probabilidade da agulha cair sobre uma das retas aumenta com uma distância maior ou menor?

- A probabilidade muda se aumentar o plano mas continuar com a mesma distância entre as retas?
- O tamanho da agulha interfere na probabilidade da agulha cair sobre uma das retas? De qual forma?

Para isso, leve os alunos à investigação, anote as hipóteses e os estimule a fazerem experimentos, anotarem os resultados, calcularem as probabilidades através do experimento e pela função, compararem as probabilidades encontradas e analisarem a função e quais mudanças a impactariam. Nessa hora, o docente trabalhará como mediador, auxiliando no processo, mas permitindo que os alunos possam fazer seus próprios experimentos para validar ou refutar suas hipóteses.

No caso de um plano com distância $D = 10\text{cm}$, pode-se calcular a probabilidade com agulhas de diversos tamanhos, apenas garantindo que $l < D$. Seguem exemplos:

1º) Para uma agulha medindo $l = 4\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 4}{10\pi} = \frac{8}{10\pi} \approx 0,255.$$

2º) Para uma agulha medindo $l = 6\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 6}{10\pi} = \frac{12}{10\pi} \approx 0,382.$$

3º) Para uma agulha medindo $l = 1\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 1}{10\pi} = \frac{2}{10\pi} \approx 0,064.$$

Dessa forma, pode-se perceber que se manter a distância D e mudar apenas o tamanho l da agulha, quanto maior for a agulha, maior a probabilidade dela cair sobre uma das retas. Esse fato pode ser percebido só de analisar a função de Buffon, já que l pertence ao numerador da fração, assim, quanto menor ele for, menor o número será.

No caso de uma agulha de tamanho $l = 5\text{cm}$, pode-se trabalhar com esta sendo lançada sobre diversos planos com a distância D variando, apenas garantindo que $D > l$. Seguem exemplos:

1º) Para um plano com distância $D = 8\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 5}{8\pi} = \frac{10}{8\pi} \approx 0,398.$$

2º) Para um plano com distância $D = 10\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 5}{10\pi} = \frac{10}{10\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0,318.$$

3º) Para um plano com distância $D = 6\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 5}{6\pi} = \frac{10}{6\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0,318.$$

Dessa forma, pode-se perceber que se manter a agulha com medida l e mudar apenas a distância D entre as retas do plano, quanto menor for a distância, maior a probabilidade da agulha cair sobre uma das retas. Esse fato pode ser percebido só de analisar a função de Buffon, já que D pertence ao denominador da fração, assim, quanto maior ele for, menor o número será.

Esses casos são para comparar as probabilidades apenas variando um dos valores. Porém, quando a distância D e a medida l variam, pode-se analisar e comparar as probabilidades pela razão $\frac{l}{D}$.

Utilizando propriedades de fração, a função desenvolvida por Buffon é equivalente a $P(A) = \frac{2}{\pi} \times \frac{l}{D}$. Assim, pode-se analisar que para todos os casos com $l < D$, temos que $\frac{2}{\pi}$ é fixo, somente variando o valor de $\frac{l}{D}$ para cada caso. Como $\frac{l}{D}$ está multiplicando a razão fixa, quanto maior for essa razão, maior será a probabilidade do evento acontecer. Desta forma, para compararmos casos que há variação de D e l , basta analisarmos a razão $\frac{l}{D}$, quanto maior for o valor dessa razão, maior será a probabilidade. Seguem exemplos:

1º) Para um plano com distância $D = 4\text{cm}$ e uma agulha com medida $l = 1\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 1}{4\pi} = \frac{2}{4\pi} \approx 0,159.$$

2º) Para um plano com distância $D = 15\text{cm}$ e uma agulha com medida $l = 13\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 13}{15\pi} = \frac{26}{15\pi} \approx 0,552.$$

3º) Para um plano com distância $D = 20\text{cm}$ e uma agulha com medida $l = 19,5\text{cm}$, temos:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 19,5}{20\pi} = \frac{39}{20\pi} \approx 0,621.$$

Assim, comparando a razão $\frac{l}{D}$ em cada um dos casos acima, temos:

$$\frac{1}{4} < \frac{13}{15} < \frac{19}{20},$$

refletindo na comparação das probabilidades, quanto maior o valor da razão entre a medida da agulha e a distância das retas do plano, maior a probabilidade.

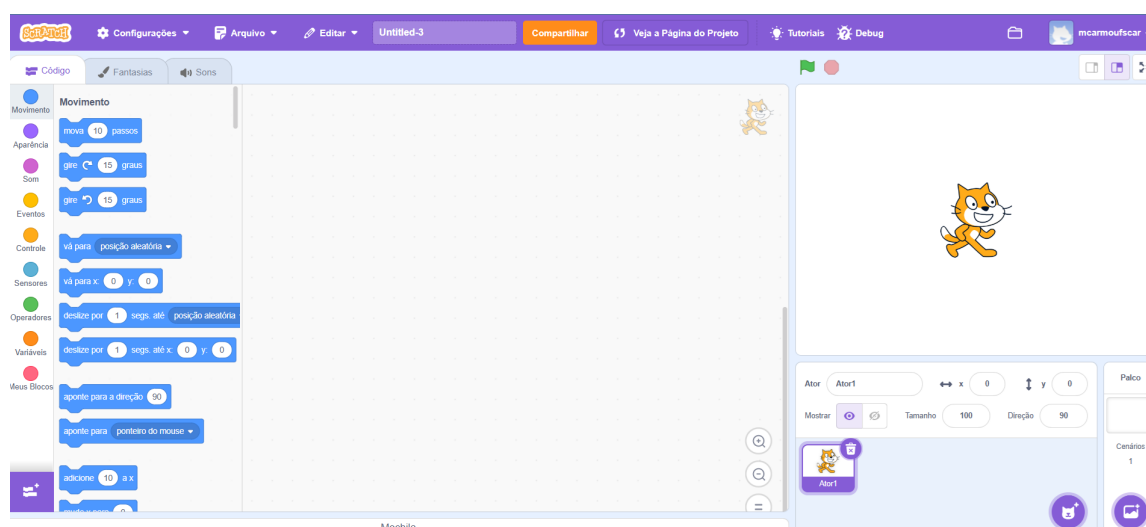
É importante que essas investigações e casos sejam feitos com os estudantes como protagonistas e o professor como mediador, como já citado acima, propiciando um cenário

para o desenvolvimento da investigação, construção de hipóteses e argumentação dos estudantes.

Atividade 4 - Programando o jogo das agulhas no Scratch

O Scratch é uma linguagem de programação com interface visual simplificada (Figura 19), voltada ao público infante juvenil, que permite a criação de histórias, jogos e animações. Essa ferramenta é utilizada pela escolas estaduais do estado de São Paulo nas aulas de itinerário formativo de tecnologia, com o objetivo de fomentar o pensamento computacional, a resolução de problemas, a criatividade, a expressão pessoal, o trabalho colaborativo e a equidade no ensino de computação. O acesso ao Scratch² é gratuito e *on-line*.

Figura 19 – Interface inicial do Scratch.



Fonte: criado pela autora.

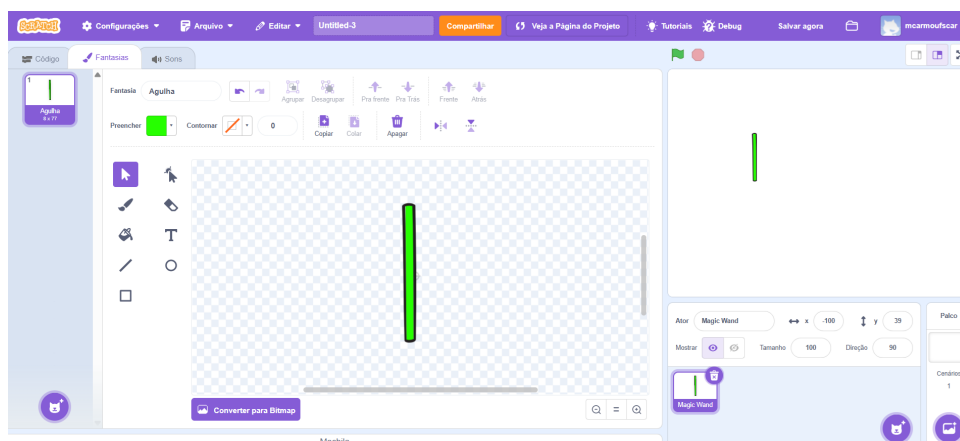
Como as atividades sugeridas são para a Educação Básica, foi pensado em uma atividade trabalhando a programação em blocos do Scratch e o jogo das agulhas de Buffon. Para isso, todos os códigos e passos necessários para a criação do jogo das agulhas de Buffon por meio dessa linguagem é descrito a seguir. Além disso, a autora deixou o modelo³ disponível no site, podendo ser acessado gratuitamente e de forma *on-line*.

O primeiro passo é excluir o ator usual (gato) e adicionar a agulha. Para representar a agulha foi escolhido o objeto com nome: “Magic Wand” (ou varinha mágica, em Português) e foi personalizado conforme o desejo da autora. Ele pode ser personalizado na barra “Fantasias”, excluindo objetos, alterando a cor, borda e tamanho (Figura 20).

² Acesso ao Scratch: <https://scratchbrasil.org.br>.

³ Acesso ao modelo do Jogo das agulhas de Buffon: <https://scratch.mit.edu/projects/1193176925>.

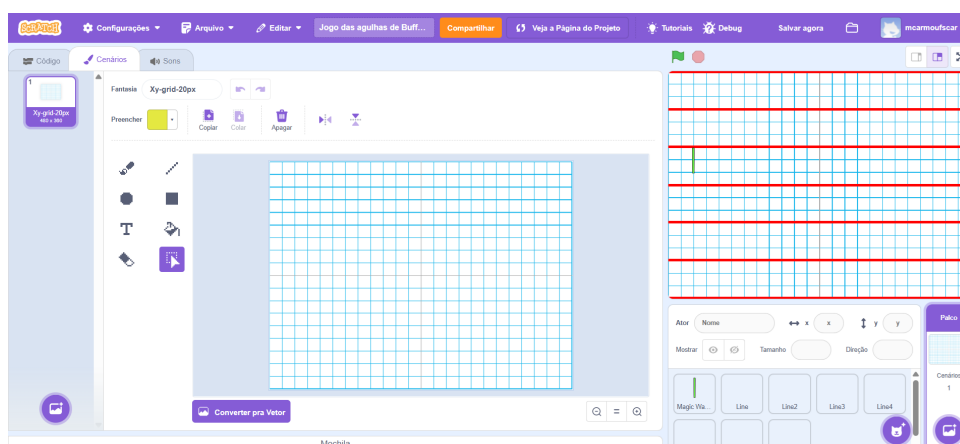
Figura 20 – Criação e personalização da agulha.



Fonte: criado pela autora.

Para confecção do plano, é preciso que as retas sejam atores também, então foi escolhido o objeto: “line”, o qual foi personalizado aumentando o comprimento, para permear todo o plano, e reduzindo a largura, para as retas ficarem estreitas (Figura 21). Após uma reta confeccionada, basta duplicá-la para obter as outras retas idênticas necessárias. Para auxiliar na distância das retas, foi utilizado como cenário uma malha quadriculada disponibilizada pelo programa chamada de: “Xy-grid-20px”. Nessa malha, cada quadradinho tem aproximadamente 20 *pixels* de lado.

Figura 21 – Criação e personalização do plano.



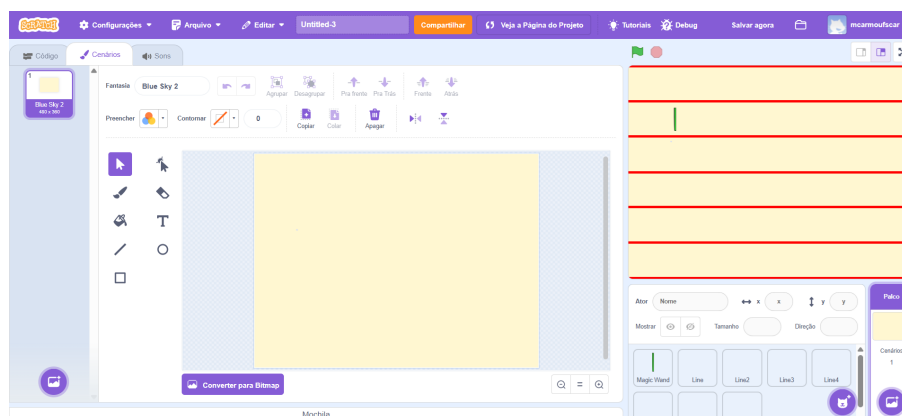
Fonte: criado pela autora.

Para o programa modelo, a autora utilizou uma distância, denotada por D , de 3 quadradinhos, utilizando 7 retas. Porém, o professor pode realizar o plano como ele achar melhor, podendo também dar a liberdade para os alunos escolherem as distâncias das retas, obedecendo os mesmos critérios da confecção do plano na Seção 4.1. Além disso, a agulha (com medida denotada por l) precisa ser menor que a distância D entre as retas e as bordas superiores e inferiores também devem possuir retas.

Após a confecção da agulha e do plano, o cenário pode ser alterado para um fundo

liso. A autora escolheu o cenário chamado: “Blue Sky 2” e personalizou alterando a cor (Figura 22). Além disso, para a agulha ficar na camada acima das retas, basta clicar nela e colocá-la sobre as retas na interface geral.

Figura 22 – Alteração do cenário.

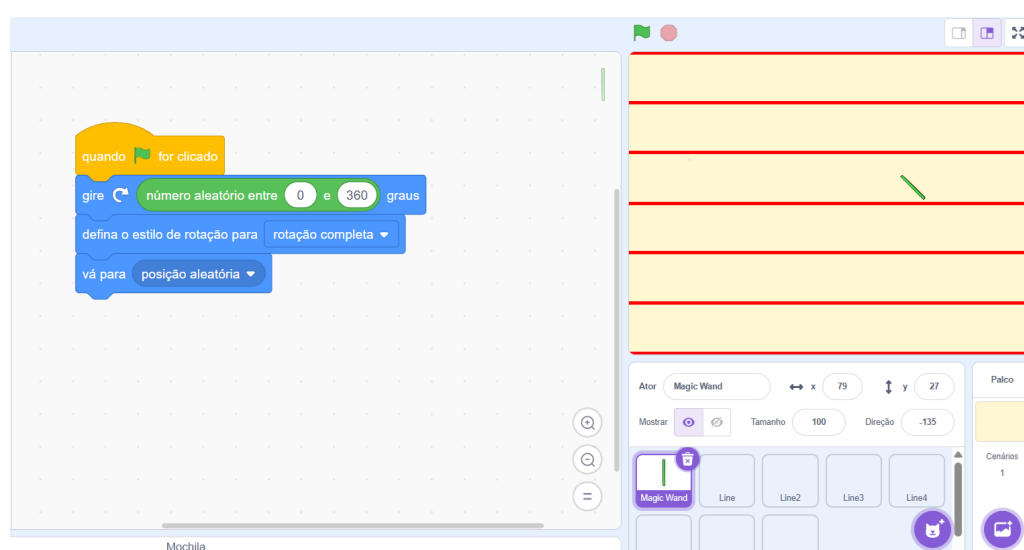


Fonte: criado pela autora.

Após a construção dos atores e do cenário, o próximo passo é realizar os códigos do programa. Para isso, na barra códigos, o objeto selecionado deve ser a agulha, é importante que todos os códigos sejam feitos na parte do ator principal, que no nosso caso é a agulha. Para iniciar o processo de programação, é importante observar que o programa divide os comandos por cores facilitando a procura pelos códigos.

Para que a agulha seja lançado sobre o plano de forma aleatória, contemplando todos as possíveis direções e ângulos, os comandos necessários são os descritos na Figura 23.

Figura 23 – Códigos iniciais.

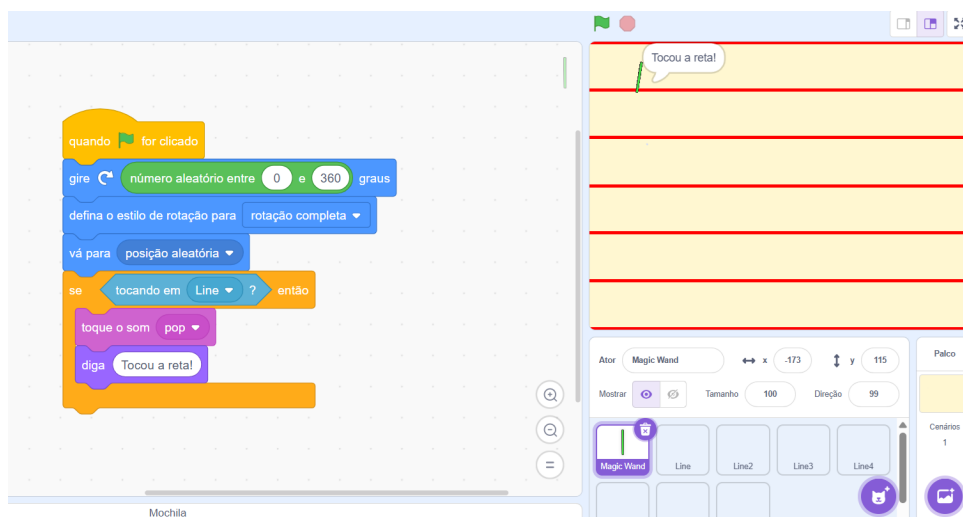


Fonte: criado pela autora.

A partir desses códigos, o jogo já poderá ser operado, com o lançamento ocorrendo todas as vezes que a bandeira verde for clicada. Porém, para deixar o jogo mais dinâmico

e facilitar a visualização de quando a agulha toca uma das retas do plano, pode ser programado para que toda vez que a agulha interceptar uma das retas do plano, o jogador ser avisado. Para isso, foi utilizado os seguintes códigos descritos na Figura 24.

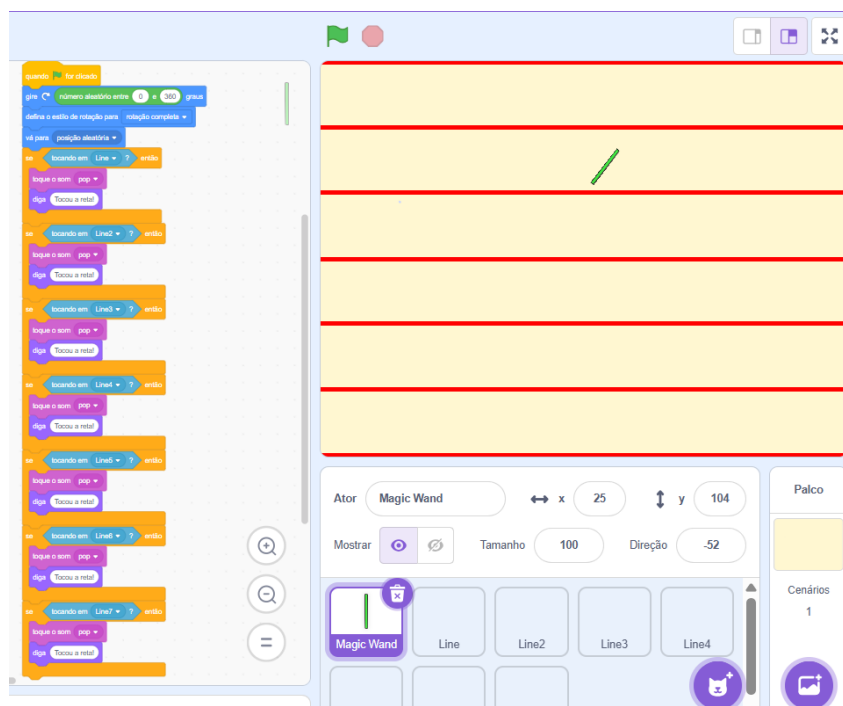
Figura 24 – Códigos sequenciais.



Fonte: criado pela autora.

A mesma sequência de códigos deverá ser feita para identificar a intercessão em todas as retas do plano (Figura 25). Vale ressaltar que o som escolhido quando a agulha toca a reta foi o “pop” e a fala foi “Tocou a reta!”, como descrito na Figura 24, porém eles podem ser alterados e personalizados.

Figura 25 – Códigos finais.



Fonte: criado pela autora.

Com a elaboração de todos esses passos, o jogo das agulhas de Buffon é finalizado, basta os estudantes jogarem e se divertirem. O jogo pode ser em duplas ou grupos, e cada um dos jogadores têm a chance de fazer um lançamento por rodada, todas as vezes que um jogador lançar a agulha e ela interceptar uma das retas, ele pontua. Esse jogo era um jogo de azar da época do Conde Buffon, as pessoas apostavam e lançavam as agulhas sobre o plano, se a agulha interceptasse a reta, eles ganhavam a aposta.

Além dessa atividade, o professor poderá questionar os alunos se o plano construído, com distância D e com o tamanho da agulha l , é favorável para o jogador ganhar ou perder. Assim, o professor poderá realizar um experimento frequentista ou introduzir a função de probabilidade desenvolvido por Buffon, podendo mesclar as atividades acima. Para isso, os alunos poderão trabalhar com o tamanho e a distância em *pixels* ou transformar em centímetros, considerando que 1 *pixel* é aproximadamente 0,02646cm. Assim, trabalharão também o conceito de conversão de medidas.

Para esse modelo construído pela autora, foi utilizado $D = 60$ *pixels* e $l = 40$ *pixels*, como mostrado na Figura 21, considerando que cada quadradinho possui 20 *pixels* de lado, como já informado. Desta forma, neste caso, a probabilidade da agulha cair sobre uma das retas (evento denotado por A) através da função de Buffon é:

$$P(A) = \frac{2l}{D\pi} = \frac{2 \times 40}{60\pi} = \frac{80}{60\pi} = \frac{4}{3\pi} \approx 0,424.$$

No cálculo acima foram usados os valores em *pixels*, porém, podem ser usados os valores em centímetros, convertendo-os. A probabilidade será a mesma, pois a razão se manterá igual após a conversão.

Para finalizar, a autora fez um experimento frequentista com 120 lançamentos através do jogo construído com as medidas acima. Entre os 120 lançamentos, em 63 lançamentos a agulha não interceptou uma das retas e em 57 lançamentos a agulha interceptou uma das retas. Utilizando a Definição 2.3 de probabilidade frequentista, temos:

$$P(A) = \frac{57}{120} \approx 0,475.$$

Desta forma, o professor poderá tanto calcular a probabilidade frequentista a partir do experimento, com uma grande quantidade de lançamentos, quanto introduzir a função de Buffon. Para mais, poderá trazer ambos e comparar os resultados em conjunto com os estudantes.

Para os casos que não serão utilizadas as medidas sugeridas nesse trabalho, é imprescindível que seja utilizado a malha quadriculada para medir os valores de D e l que são utilizados na função de Buffon, se esse for o objetivo da atividade. Porém, a atividade de construção do programa juntamente com os estudantes já é uma atividade completa e interdisciplinar, podendo ser realizada em aulas de Matemática ou de programação.

Por meio dessas quatro atividades desenvolvidas, o professor poderá trabalhar com os estudantes de Educação Básica, diferentes conceitos de Matemática e Probabilidade, utilizando como tema o problema das agulhas de Buffon. Além disso, o docente poderá desenvolver outras questões e atividades, para diferentes séries da Educação Básica, voltadas ao problema.

5 Considerações finais

É essencial que a Educação Estatística e Probabilidade siga em processo de desenvolvimento, de maneira que novas pesquisas e estudos sejam realizados, auxiliando os professores de Matemática realizarem aulas com metodologias e práticas pedagógicas coerentes, aplicáveis e que gerem resultados significativos no aprendizado dos estudantes.

O conhecimento da teoria das probabilidades, incluindo os conceitos, definições e propriedades, é de extrema importância para o docente que ministrará tais conteúdos em sala de aula. Com isso, a investigação de abordagens alternativas para calcular a probabilidade de um evento, como através dos conceitos geométricos, constitui uma ação importante para o fortalecimento do processo de ensino e aprendizagem.

Atráves deste trabalho, foi possível elencar os principais conceitos de Probabilidade voltados ao professor de Matemática da Educação Básica, bem como apresentar um problema de probabilidade geométrica para ser explorado em diferentes perspectivas didáticas. As atividades propostas permitem ao docente trabalhar com os estudantes de forma diversificada, interdisciplinar e integrando múltiplos conteúdos.

O objetivo da autora foi proporcionar uma fundamentação teórica sólida, ao mesmo tempo em que se propôs a explorar o problema clássico da agulha de Buffon de maneira prática e visual, possibilitando sua implementação em sala de aula e abordando diversos conceitos matemáticos além da probabilidade, tais como função seno, curva senoidal, ângulos, fração, área de regiões irregulares, decomposição de polígonos e de áreas conhecidas, além da utilização de atividades manuais e de programação. As propostas com materiais manipulativos, jogos e recursos tecnológicos visam favorecer a visualização e a manipulação de informações, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para o engajamento dos estudantes no processo de construção do conhecimento matemático e probabilístico.

Referências

- BATISTA, J. L. F. Uso da teoria de probabilidades geométricas para estimar o comprimento total dos canais de escoamento numa bacia hidrográfica. *Rede*, v. 58, n. 57, p. 10–15, 1987. Citado na página 25.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 8, 9, 30 e 36.
- CASTRO, J. B. D.; FILHO, J. A. D. C. Desenvolvimento do pensamento estatístico com suporte computacional. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 17, n. 5, p. 870–896, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 9.
- DANTAS, C. A. B. *Probabilidade: Um Curso Introdutório*. 4. ed. São Paulo: Edusp, 2022. 278 p. Citado 4 vezes nas páginas 10, 11, 14 e 16.
- FERNANDES, J. A.; SOUSA, M. V.; RIBEIRO, S. A. O ensino de estatística no ensino básico e secundário: Um estudo exploratório. 2004. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo: Volume 1*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 33.
- KAYSER, T. A. R.; BALTAZAR, R.; SILVA, L. S. da. Explorando a probabilidade geométrica: o caso do problema do macarrão. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, v. 14, n. 2, p. 1–15, 2024. Citado na página 21.
- LORENZATO, S. et al. O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Autores Associados Campinas, SP, 2006. Citado na página 9.
- MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. [S.l.]: Edusp, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 25.
- RODRIGUES, M. U.; SILVA, L. D. Disciplina de estatística na matriz curricular dos cursos de licenciatura em matemática no brasil. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 14, p. 1–21, 2019. Citado na página 9.
- SANTOS, M. C. d. C. *Práticas pedagógicas para o Ensino de Estatística no Ensino Médio*. 2023. Relatório final de Iniciação Científica. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. Citado na página 14.
- SANTÁLO, L. A. Geometria integral, estereologia e tomografia computadorizada. *Ciência Hoje*, v. 2, n. 15, p. 27–32, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 24 e 25.